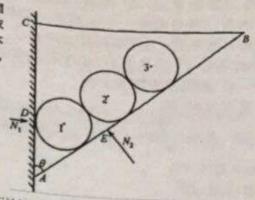
为学符合题:

一、静力学

第1题

[例10] 有一轻质木板 AB 长为1.A 端用铰链团 [例 10] · 另一端用水平轻绳 BC 拉住,板上依定在竖直墙壁上,另一端用水平轻绳 BC 拉住,板上依 於放着1.2.3 一切學療均不分。一切學療均不分。 板与增的美角方的(如图 2-14 所示)。一切學療均不分。 求及選上的张力。



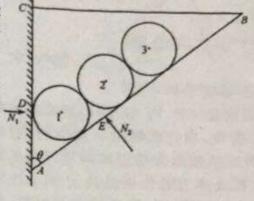
[例10] 有一轻质木板 AB 长为1.A 端用铰链固 度在受直墙壁上,另一端用水平轻绳 BC 拉住. 板上依 定在至月,2,3三个圆柱体,半径均为r,重力均为G. 木次数看1,2,3三个圆柱体,半径均为r,重力均为G. 木 次数章的夹角为 θ(如图 2-14 所示)。一切摩擦均不计。 求风绳上的张力。

解析 三个圆柱处于平衡状态,可以把三个圆柱 合在一起看成一个刚体,由于不计一切摩擦,三个圆柱 合在一层。 但或的整体受重力 3G,支持力 N_1 、 N_2 ,三个力达到平 N_1 赛. (图 2-14)

在沿板方向受力平衡。可知

$$N_1 \sin\theta = 3G \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$N_1 = 3G \cot \theta$$



此时,我们可以根据三力平衡时,交于一点的原理来求出 N_2 的作用点,则可以求出 N_2 的反力 N_2 对A的力矩,由对A点力矩平衡方程可以求出BC绳上的拉力大小,这样也不算繁. 但如果我们把三个 圖柱加上木板再合为一刚体,则此刚体受 A 点作用力, N_1 ,BC 绳的拉力,重力 3G,由对 A 点合力矩为 军,可得

$$N_1 \cdot AD = T \cdot AC - 3G(r + 2r\sin\theta)$$

式中AD与AC,可用r,1,8表示

$$AD = r/\tan\frac{\theta}{2}$$

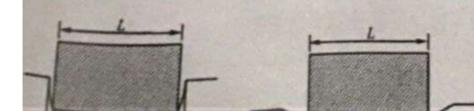
$$AC = l\cos\theta$$

由此可知

$$T = \frac{3Gr}{l} \left(2 \tan \theta + \frac{1 + \cos \theta}{\sin^2 \theta \cos \theta} \right)$$

由本题解决过程不难体会到体系平衡时,何为"刚体";在解决问题的不同步骤中,"刚体"是可以改 变的,不要有思维定势。有时候,视角不同,问题的难易程度截然不同。

宽为 L 的石块依次放在两个内壁光滑但形状不同的槽里, 槽的尺寸如图 2-13 所 块在高力为多少的情况下平衡将是稳定的.



一個的民事後的到另一個形,定点的旅游中心了

(1) 当石块贴着槽运动到一个任意位置,如图 2-14 解析 (1) 当 (1) 当 (1) 对 (1) 对 (1) 对 (2-14) 中度线所示,石块底边与槽交于 A'、B' 两点,联结 OA'、OB'、 中歷政所示,可以不是因为三条边确定一个三角形 A'OB',可见有,OA' = OB' = R. 因为三条边确定一个三角形 A'OB',可见 相的图心 O 相对石块的位置不变, 为石块的转动中心.

由于对称性,石块的质心 C,即其中心,位于石块底边的中 而线上,在平衡状态下,OC 连线位于竖直方向。

$$\frac{h}{2} < \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}, h < \sqrt{4R^2 - l^2}$$

石块在槽内的平衡是稳定的。 当质心 C 与 O 点重合时,即

$$h = \sqrt{4R^2 - l^2}.$$

石块在槽内随遇平衡; 当质心 C 位于 O 点上方时,即

$$h > \sqrt{4R^2 - l^2}.$$

石块在槽内是不稳定平衡.

(2) 考虑石块的底边 AB. 当 AB 的两端沿斜面移动 时,石块的瞬心也在变化,当石块转过一角度时,它的瞬 心为以 AB 两端与斜面接触点为垂足的两斜面的垂线的 交点 O, 即为斜面对石块弹力的作用线的交点. AB 中点 为M,当石块在如图 2-15 位置时,因为槽左右对称,所以 ZAOB 的角平分线沿竖直方向,交AB 于D.

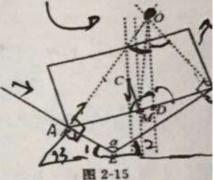


图 2-14

由正弦定理可知

$$\frac{\sin\angle AOD}{\sin\angle ODA} = \frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle ODB} = \frac{AD}{AO} = \frac{BD}{BO},$$

在图示位置中

$$AE < BE$$
.

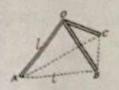
因此.

$$AO > BO \cdot AD > BD$$
.

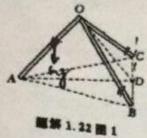
所以 M 在水平方向上位于 D 的左侧,而质心 C 在水平方向上位于 M 的左 E水平方向上位于D 的左侧,可见重力矩使石块趋向与更偏离平衡位置,而 石块向另一方向移动,同样不会回复到平衡位置,因此石块在槽内是不稳定

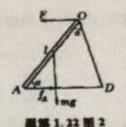
夏(国培)

- 题 1.22 三根质量为 m、长为 l 的机同均质棒. 如图所示地靠在一起,三棒与 成一边长为1的正三角形.已知三棒与地之间的摩擦系数相等.
- 1) 试求 OA 棒顶点所受作用力的大小与方向;
- 2) 若在 OA 棒的中点固定一质量也为m 的小球,再求其顶沟流空作用力的大小与方面



■新1.27 (1) 三根稀的頂端相互放在一起,如图 1 所示,由对称性可知,任何一棒(如 OA 操的頂端是到其余两棒对它的作用力的合力 F 必沿水平方向,如图 2 所示,在图 1 中 D 是 BC 的口点,有





(1)

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DO} = \frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$\cos a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

由 OA 棒乐受外力相对 A 点力矩平衡。得

$$Pl\sin \alpha - mg \frac{l}{2}\cos \alpha = 0 \tag{2}$$

将(1)式代入(2)式,可解得

$$F = \frac{\sqrt{2}}{4}mg$$

(2) 当 OA 棒的中点固定一质性也为m 的小球后,三棒的受力情况都发生了改变。且不但 OB 与 OC 两棒受力情况和同。此三棒顶端的受力可看成是除原受力 F 外,再各受一个 Tc 的作用。且有 Ts = Tc、 既然此二棒仍平衡。可见 Ts 和 Tc 必沿各自棒的方向,故这两 稻 OD 方向,其反作用力 T 作用于 OA 棒的顶端,如图 3 所示。由 T 和小球重力相对 A 点

1,可得

$$Tl\sin\alpha - mg\frac{l}{2}\cos\alpha = 0$$

得

$$T = \frac{\sqrt{2}}{4}mg$$

前用
$$3$$
 所示的 F 和 T 的 S 量关系。即可求得 CA 稀重缩所受的作用力 F_A 为 $F_A = 2F\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 2F\sin a = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{4}$ mg. $\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$f_A = F + T\cos(\pi - 2a) \tag{2}$$

$$N_A = \frac{5}{3}m_0$$

$$f_A = \frac{f_2^2}{3} mg$$

原鄉 1.22 曜 3

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}mg$$

$$\mu_A \geqslant \frac{f_A}{N_A} = \frac{\sqrt{2}}{5} \tag{5}$$

OB棒的受力情况如图 4 所示。由此棒竖直方向和水平方向合外力为零,可分别得

$$N_B = m_{\rm K} + T_B \sin \pi \tag{6}$$

$$f_{\rm A} = F + T_{\rm A} \cos a \tag{7}$$

山图 5 所示的矢量关系。可得 Ta、Tc 与T 的关系为

 $T_{\rm B} = \frac{1}{\sqrt{3}}T = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{4} mg = \frac{\sqrt{6}}{12} mg$

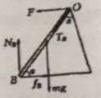
将(8)式分别代入(6)、(7)式、得

$$N_S = mg + \frac{\sqrt{5}}{12}mg \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{7}{6}mg$$
 (9)

$$f_R = \frac{\sqrt{2}}{4}mg + \frac{\sqrt{6}}{12}mg \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}mg$$
 (10)

将(9)、(10)式代入 /8 ≤ μ8N8, 可得

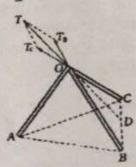
$$\mu_B \geqslant \frac{f_B}{N_B} = \frac{2\sqrt{2}}{7} \tag{11}$$



野山泉

相 间

据 1. 22 图 4

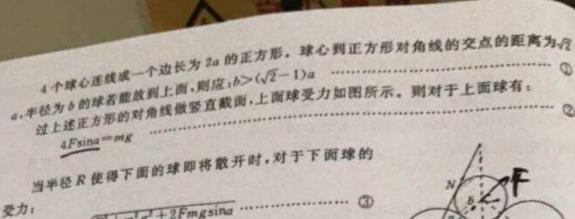


重傷 1.22 至 5

由于 B、C棒受力操死完全相同。故 C棒平衡所需的最小摩擦系数与 B棒相等。比较(5)式与(11) 式,即可得條与地面向的麼鄉系数应識足

$$\mu \ge \frac{2\sqrt{2}}{7}$$

[点件] 在(3)小题的求解中,很容易遭骗对 OB 或 OC 棒平衡所需最小摩擦系数的讨论和求 解,英以为小求是固定在 OA 棒的中点,只要 OA 棒能保持平衡,则体系一定能平衡,从而得到只须 満足μ≥ 「即可的错误结论.



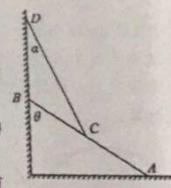
由 $25b^2 + 50ab - 23a^2 \ge 0$ 得 $:b \ge (\frac{4\sqrt{3}}{5} - 1)a$ 将 ⑥ 与 ① 对 比 得 知 ⑥ 式 一 定 成 立 。 所 以 , 下 面 的 球 相 互 分 离 的 条 件 是 :

将⑥与①对比得知⑥式一定成立。所以,卜面的球相互分离的条件是: $R>a+\sqrt{25b^2+50ab-23a^2}$

腰

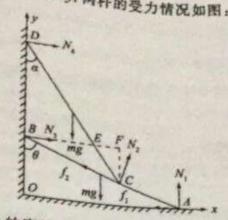
7. (第 28 届全国物理竞赛复赛)质量均匀分布的刚性杆 AB、D 如图放置, A 点与水平地面接触, 与地面间的静摩擦因数为 μA, D 两点与光滑竖直墙壁接触, 杆 AB 与 CD 接触处的静摩擦因数μc, 两杆的质量均为 m, 长度均为 l。

- (1)已知系统平衡时 AB 杆与墙面夹角为θ,求 CD 杆与墙面的 角α应该满足的条件(用α及已知量满足的方程式表示)
- (2)若 $\mu_A=1.00$, $\mu_C=0.866$, $\theta=60^\circ$,求系统平衡时 α 的取值





解,(1)建立如图所示坐标系 Oxy. 两杆的受力情况如图:



 f_1 为地面作用于杆 AB 的摩擦力, N_1 为地面对杆 AB 的支持力, f_2 、 N_2 为杆 AB 用于杆 CD 的摩擦力和支持力, N_3 、 N_4 分别为墙对杆 AB 和 CD 的作用力,mg 为重取杆 AB 和 CD 构成的系统为研究对象,系统平衡时,由平衡条件有

 $\frac{1}{2} m_g l sin\theta + m_g \left(l sin\theta - \frac{1}{2} l sin\theta \right) - N_1 l cos\theta - N_4 (l cos\theta + l cos\theta - CF) = 0$ $B_{i} = \frac{3}{2} mg i \sin \theta - \frac{1}{2} mg i \sin \theta - N_{i} (l \cos \theta + l \cos \theta - CF) = 0 \qquad (3)$ 或中CF特求,F 是过C 的整直线与过B 的水平线的交点,E 为BF 与CD 的交点。 由几何关系有 CF=Isingcot# $N_t + N_t \cos\theta - f_t \sin\theta = 0 \qquad (5)$ 取杆 CD 为研究对象。由平衡条件有 $N_t + N_2 \cos\theta - f \sin\theta = 0 \qquad (6)$ $N_t \sin\theta + f_t \cos\theta - mg = 0 \qquad (6)$ 以及对C点的力矩: $N_i l cosa - \frac{1}{2} mg l sina = 0$ (7) $N_{2} = \left(\frac{3}{2}\tan\theta - \frac{1}{2}\tan\theta - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{2}\frac{\tan\theta\sin\theta}{\sin\theta}\right)mg \qquad (9)$ $f_1 = \left(\frac{3\tan\theta}{2} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{2} \frac{\tan\theta\sin\theta}{\sin\theta}\right) mg \qquad (10)$ (11) $N_t = \left(\sin\theta - \frac{1}{2}\tan\alpha\cos\theta\right)mg \quad \dots \tag{12}$ $f_2 = \left(\cos\theta + \frac{1}{2}\tan\sin\theta\right)mg$ (13) (14) CD 杆平衡的必要条件为: $f_1 \leq \mu_1 N_1$ 由(12)、(13)、(14)式得 $\tan \alpha \leq \frac{2(\mu_C \sin \theta - \cos \theta)}{2}$ (15) μccosθ+sinθ 由(10)、(11)、(16)式得 $tanasina = 2sina \le 4\mu_A - 3tan\theta$ (17)

因此,使系统平衡, α应满足的条件为(15)式和(17)式。

(2)将题给的数据代人(15)式可得:a < arctan(), 385=21, 1°

将题给的数据代人(17)式,经数值计算可得:a≥19.5°

因此,a的取值范围为:19.5°≤α≤21.1°

8. (第29届全国物理竞赛决赛)如图所示,三个质量均为 m 的小球固定于由刚性轻 杆构成的丁字形架的三个顶点 A 、B 和 C 处。 $AD \bot BC$,且 AD = BD = CD = a ,小球可 为质点,整个杆球体系置于水平桌面上,三个小球和桌面接触,轻质杆架悬空。桌面和 个小球之间的静摩擦和滑动摩擦因数均为μ,在AD杆上距A点。4和3a两处分别施加 一对垂直于此杆的推力、且两推力大小相等、方向相反。

(1)试论证在上述推力作用下,杆球体系处于由静止转变为运动的

临界状态时,三球所受桌面的摩擦力都达到最大静摩擦力。

(2)如果在AD杆上有一转轴,随推力由零逐渐增加。整个装置将从 静止开始绕该转轴转动。问转轴在 AD 杆上什么位置时,推动该体系所 新的推力最小,并求出该推力的大小。



作。(1)因杆是轻杆,所以,每个小球与水平面的压力均为 mg,最大静摩擦力大小均 为 f。 = gang。 不难看出,运动的临界状态可能有两种,一是三球同时运动,二是有两个球 为了。 统第三个建开始转动。而第三个球不动。只要论述第二种情况不能出现就可以了。

由于外界两个推力等大反向。合力为零、所以,临界运动时三球受的摩擦力合力为 零.若B、C绕A即将运动,此时,

 $f_a = f_c = \mu mg$,两者的方向分别与 AB、AC 垂直, f_A 等于 f_a 和 f_c 的合力

即:fa= Jfs +fc = VZumg>umg 不可能 大子ではす 同理,若临界运动时分别以B或C为轴转动,也不可能。

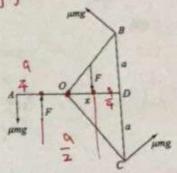
所以, 杆球体系处于由静止转变为运动的临界状态时, 三球 所受桌面的摩擦力都达到最大静摩擦力。

(2)设转轴 O距离 D 点为 z

$$F = \mu mg(a-x) + 2\mu mg \sqrt{a^2 + x^2}$$

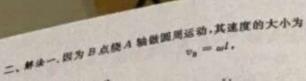
设
$$y=2\sqrt{a^2+x^2}-x$$

整理得:
$$3x^2-2yx+4a^2-y^2=0$$



x有实根,则 $\Delta \ge 0$ 解得 $y \ge \sqrt{3}a$, 取等号时 F 最小,此时 $x = \frac{b}{2a}$ 即 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

题 1.8】 一个半径为 r_1 和 r_2 ,重量为 $G_0=200$ N,可绕轴 A 转动的滑 通过一个固定在墙上可转动的叉子 AB 支撑,其中 $\frac{r_2}{r_1}=3$, $\alpha=30^\circ$,如 1.8 (a) 所示。绳索在滑轮较小半径 r₁ 的轴肩上缠绕了一圈,绳索右



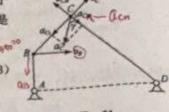
因为是勾角连转动, B 点的切向加速度为零, 被 a, 也是 B 点的加速度, 其方向沿 BA 方向. 因

因为是可用进行制。 为C点绕D输做器周运动,其速度的大小用 vc 表示,方向垂直于 杯CD,在考查的时刻,由图 31 可知,其方向沿杆 BC 方向。因 BC 是

附性杆、所以 B和 C 点沿 BC 方向的速度必相等,故有 $v_c = v_a \cos \frac{x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega L$ 此时杆 CD 幾 D 糖按順时针方向转动,C 点的法向加速度

$$v_c = v_a \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}\omega l}{2}.$$

$$a_{\rm cs} = \frac{v_{\rm c}^*}{CD}.$$



(4)

由围可知。CD=2√21、由(3)。(4)两式得

$$a_{Ca} = \frac{\sqrt{2}}{8}\omega^2 l,$$

(5)

下面来分析C点沿垂直于杆CD方向的加速度,即切向加速度 a_{ct} 。因为BC是刚性杆,所 其方向沿 CD 方向。 以C点相对B点的运动只能是绕B的转动,C点相对B点的速度方向必垂直于杆BC.令va 14

表示其速度的大小,根据速度合成公式,有



由几何关系得

$$v_{CB} = \sqrt{v_B^2 - v_C^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}v_B = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega I.$$
 (6)

由于C点绕B点做圆周运动,相对B点的向心加速度

图为它8一个21、放有

(7)

其方向垂直杆_CD.

由(2)式及图 31 可知,B点的加速度沿 BC 杆的分量为

= 12 21 + 48645 = 3

too acre= aco+ason

所以に真相对(A 点(或 D 轴)的加速度指垂直于杆 CD 方向的分量 (で大り つかき) (10 a a = a a + (a s) a = 3√2 a 1.

C 点的总加速度为C 点绕D 轴做圆周运动的法向加速度 a_{cs} 与切向加速度 a_{cs} 的合加速度,即

$$a_{c} = \sqrt{a_{cs}^{2} + a_{cs}^{2}} = \frac{\sqrt{74}}{8} \omega^{2} l_{1}$$
 (11)

a。的方向与杆 CD 间的夹角

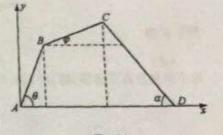
$$\gamma = \arctan \frac{a_0}{a_{c_0}} = \arctan 6 = 80,54^{\circ}.$$
 (12)

解法二. 通过微商求 C 点加速度. 以固定点 A 为原点作一直角坐标系 Azy, Az 轴与 AD 重合,Ay与AD垂直.任意时刻:,连杆的位形如图 32 所

 $\overline{BC} = \sqrt{2}l$, $\overline{CD} = 2\sqrt{2}l$, $\overline{AD} = 3l$, $d\theta/dt = -\omega$. C 点坐标表 示为

$$x_{c} = l\cos\theta + \sqrt{2}l\cos\varphi, \qquad (1$$

$$y_c = l\sin\theta + \sqrt{2}l\sin\varphi. \tag{2}$$



将(1),(2)两式分别对时间 t 求一阶微商,得

$$\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} = -l\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \sqrt{2}\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right),\tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} = l \left(\cos\theta \, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \sqrt{2}\cos\varphi \, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \right). \tag{4}$$

把(3),(4)两式分别对时间 t 求一阶微商,得

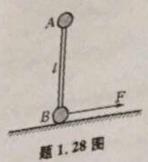
$$\frac{\mathrm{d}^{2}x_{C}}{\mathrm{d}t^{2}} = -1\left[\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^{2} + \sin\theta\frac{\mathrm{d}^{2}\theta}{\mathrm{d}t^{2}} + \sqrt{2}\cos\varphi\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^{2} + \sqrt{2}\sin\varphi\frac{\mathrm{d}^{2}\varphi}{\mathrm{d}t^{2}}\right],\tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t^2} = l \left[-\sin\theta \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \cos\theta \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} - \sqrt{2}\sin\varphi \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \sqrt{2}\cos\varphi \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \right]. \tag{6}$$

根据几何关系,有

 $CD\sin\alpha = AB\sin\theta + BC\sin\varphi$, $CD\cos\alpha + AB\cos\theta + BC\cos\varphi = 3l$,

。是 展1.28 质量均为m的小球A、B由长为l的轻杆连接,直立于光滑水平面上,如图所示 展1.28 质量均为m的小球A、B由长为l的轻杆连接,直立于光滑水平面上,如图所示 是1.28 质量均为m的小球A、B由长为l的轻杆连接,直立于光滑水平面上,如图所示 度1.28 质量均为m的小球A、B由长为1的轻杆连接,且上了几份水平面上,如图所示意 度1.28 质量均为m的小球A、B由长为1的轻离。此时杆与水平方向的夹角为 8、求此时太平 下球B上作用一水平值力下,使B球移动了一段距离。此时杆与水平方向的夹角为 8、求此时太平 对 B球的作用力.



展解1.28 设在F为作用下,经过时间1, B球移动了一段距离5.此时杆与水平方向的夹角为

8,如图 1 所示. 并设 B 球的速度为 v,而 A 球相对 B 球的速度为 v'. 由功

原理,得
$$F_{s} = \frac{1}{2}mv^{2} + \frac{1}{2}m[(v - v'\sin\theta)^{2} + (v'\cos\theta)^{2}]$$

$$-mgl(1 - \sin\theta)$$
(1)

体系质心沿水平方向的加速度 ac 为

$$ac = \frac{F}{2m} \tag{2}$$

此过程中质心沿水平方向的位移 xc 为

$$xc = \frac{1}{2}ac t^2 (3)$$

題解 1.28 图 1

而

由