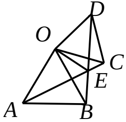
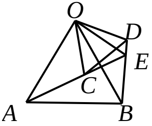
模型一：手拉手模型—全等

等边三角形

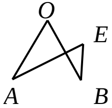


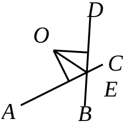


条件：ΔOAB，ΔOCD 均为等边三角形

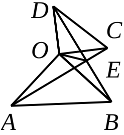
结论：① $\Delta OAC \cong \Delta OBD$；② $\angle AEB = 60^\circ$

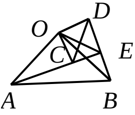
③ OE 平分 $\angle AED$（易忘）





等腰 $RT\Delta$

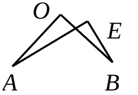




条件：ΔOAB，ΔOCD 均为等腰直角三角形

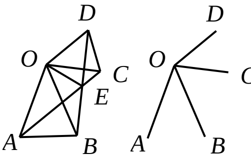
结论：① $\Delta OAC \cong \Delta OBD$；② $\angle AEB = 90°$

③ OE 平分 $\angle AED$（易忘）



导角核心图形

任意等腰三角形



条件：ΔOAB，ΔOCD 均为等腰三角形

且 $\angle AOB=\angle COD$

结论：① $\Delta OAC\cong\Delta OBD$；② $\angle AEB=\angle AOB$

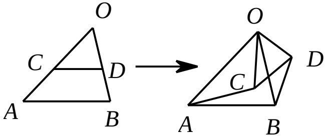
③ OE 平分 $\angle AED$（易忘）

模型总结：核心图形如右图，核心条件如下：

① $OA=OB$， $OC=OD$

② $\angle AOB=\angle COD$

模型二：手拉手模型—相似



条件：$CD // AB$，将 ΔOCD 旋转至右图位置

结论：右图

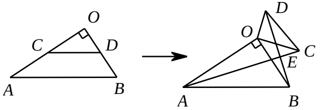
$$\Delta OCD \backsim \Delta OAB \Leftrightarrow \Delta OAC \backsim \Delta OBD$$

且延长 AC 交 BD 与点 E

必有 $\angle BEC = \angle BOA$

非常重要的结论，必须会熟练证明

手拉手相似（特殊情况）



当 $\angle AOB = 90°$ 时，

除 $\Delta OCD \backsim \Delta OAB \Leftrightarrow \Delta OAC \backsim \Delta OBD$ 之外

还会隐藏 $\dfrac{BD}{AC} = \dfrac{OD}{OC} = \dfrac{OB}{OA} = \tan\angle OCD$

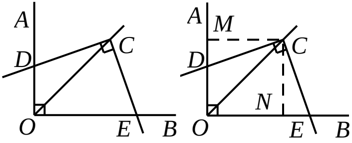
满足 $BD \perp AC$，若连结 AD 、 BC，则必有

$AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$

$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} AC \times BD$（对角线互相垂直四边形）

模型三：对角互补模型

（全等型—90°）



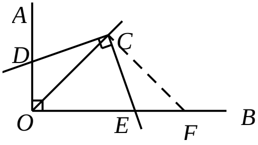
条件：① $\angle AOB=\angle DCE=90°$

② OC 平分 $\angle AOB$

结论：① $CD=CE$ ；② $OD+OE=\sqrt{2}OC$

③ $S_{ODCE}=S_{\Delta OCD}+S_{\Delta OCE}=\frac{1}{2}OC^2$

辅助线之一：作垂直，证明 $\Delta CDM\cong\Delta CEN$



条件：① $\angle AOB = \angle DCE = 90°$

② OC 平分 $\angle AOB$

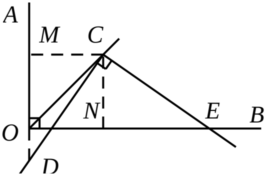
结论：① $CD = CE$；② $OD + OE = \sqrt{2}OC$

③ $S_{ODCE} = S_{\Delta OCD} + S_{\Delta OCE} = \dfrac{1}{2}OC^2$

辅助线之二：过点 C 作 $CF \perp OC$

证明 $\Delta ODC \cong \Delta FEC$

当$\angle DCE$一边交AO延长线上于点D时，如图



以上三个结论：（辅助线之一）

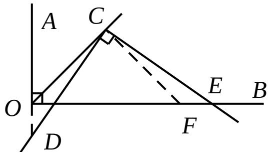
① $CD=CE$ 不变

② $OE-OD=\sqrt{2}OC$ （重点）

③ $S_{\Delta OCE}-S_{\Delta OCD}=\frac{1}{2}OC^2$ （难点）

请独立完成以上证明，必须非常熟练掌握

当$\angle DCE$一边交AO延长线上于点D时，如图



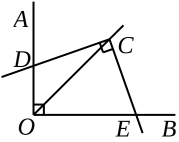
以上三个结论：(辅助线之二)

① $CD=CE$ 不变

② $OE-OD=\sqrt{2}OC$ （重点）

③ $S_{\Delta OCE}-S_{\Delta OCD}=\frac{1}{2}OC^2$ （难点）

请独立完成以上证明，必须非常熟练掌握



细节变化：若将条件“OC 平分 $\angle AOB$”与结论“$CD=CE$”互换

条件：① $\angle AOB=\angle DCE=90°$

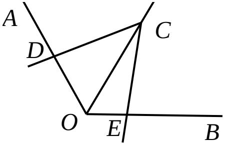
② $CD=CE$

结论：① OC 平分 $\angle AOB$；

② $OD+OE=\sqrt{2}OC$

③ $S_{ODCE}=S_{\Delta OCD}+S_{\Delta OCE}=\frac{1}{2}OC^2$

（全等型—120°）



条件：① $\angle AOB = 2\angle DCE = 120°$

② OC 平分 $\angle AOB$

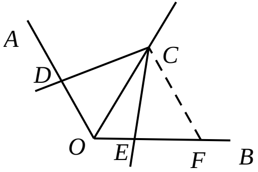
结论：① $CD = CE$ ；② $OD + OE = OC$

③ $S_{ODCE} = S_{\Delta OCD} + S_{\Delta OCE} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}OC^2$

请模仿（全等形—90°）辅助线之一完成证明

辅助线之二：在 OB 上取一点 F，使 $OF=OC$

证明 ΔOCF 为等边三角形（重要）

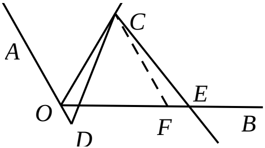


结论：① $CD=CE$；② $OD+OE=OC$

$$③\ S_{ODCE}=S_{\Delta OCD}+S_{\Delta OCE}=\frac{\sqrt{3}}{4}OC^2$$

必须熟练，自己独立完成证明

当$\angle DCE$一边交AO延长线上于点D时，如图



以上三个结论：（辅助线之二）

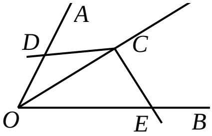
①____________________

②______________________（重点）

③_______________________（难点）

请独立完成以上证明，必须非常熟练掌握

（全等型—任意角 α ）



条件：① $\angle AOB = 2\alpha$，$\angle DCE = 180° - 2\alpha$

② $CD = CE$

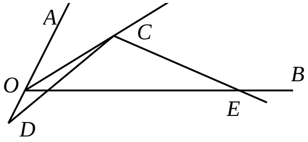
结论：① OC 平分 $\angle AOB$；

② $OD + OE = 2OC \cdot \cos\alpha$

③ $S_{ODCE} = S_{\Delta OCD} + S_{\Delta OCE} = OC^2 \bullet \sin\alpha \bullet \cos\alpha$

难度较大，记得经常复习

当$\angle DCE$一边交AO延长线上于点D时，如图



以上三个结论：（辅助线之二）

①____________________

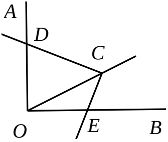
②_______________________（重点）

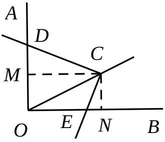
③________________________（难点）

请独立完成以上证明，必须非常熟练掌握

请思考初始条件的变化，对模型的影响

（对角互补模型--相似型）





如图，若将条件“ OC 平分 $\angle AOB$ ”去掉

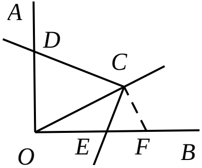
条件：① $\angle AOB = \angle DCE = 90°$ 不变，

$\angle COE = \alpha$，结论中三个条件又该如何变化？

结论：① $CE = CD \bullet \tan\alpha$；

② $(OD \bullet \tan\alpha + OE)\cos\alpha = OC$

③ $S_{\Delta OCD} \bullet \tan^2\alpha + S_{\Delta OCE} = \frac{1}{2} OC^2 \bullet \tan\alpha$



证明：过点 C 作 $CF \perp OC$，交 OB 于点 F

$\because \angle DCE = \angle OCF = 90°$

$\therefore \angle DCO = \angle ECF$

$\because \angle AOB + \angle DCE = 180°$

$\therefore \angle CDO + \angle CEO = 180°$

$\therefore \angle CDO = \angle CEF$

$\therefore \Delta CDO \backsim \Delta CEF$

$\therefore \dfrac{EF}{DO} = \dfrac{CE}{CD} = \dfrac{CF}{CO} = \tan\alpha$ （关键步）

∴结论①得证

$\therefore\ EF = OD \bullet \tan\alpha$

$\because\ (OE + EF) \bullet \cos\alpha = OC$

∴结论②得证

$$\therefore\ \frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta CDO}} = \left(\frac{CF}{CO}\right)^2 = \tan^2\alpha$$

$\therefore\ S_{\Delta CEF} = S_{\Delta CDO} \bullet \tan^2\alpha$

$\because\ S_{\Delta OCE} + S_{\Delta CEF} = S_{\Delta OCF}$

且 $S_{\Delta OCF} = \dfrac{1}{2} OC^2 \bullet \tan\alpha$

∴结论③得证

<u>难度非常大，请仔细认真复习</u>

对角互补模型总结：

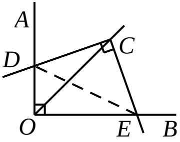
①常见初始条件：四边形对角互补

两点注意：四点共圆和直角三角形斜边中线

②初始条件：角平分线与两边相等的区别

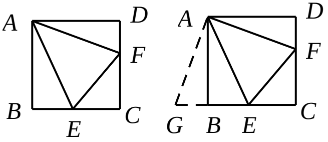
③常见两种辅助线的作法

④注意下图中“ OC 平分 $\angle AOB$ ”



$\angle CDE=\angle CED=\angle COA=\angle COB$ 相等是如何推导

角含半角模型(90°)



条件：①正方形 $ABCD$；② $\angle EAF = 45^\circ$

结论：① $EF = DF + BE$

② ΔCEF 周长为正方形 $ABCD$ 周长一半

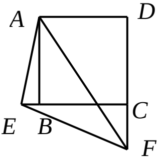
也可以这样：

条件：①正方形 $ABCD$；② $EF = DF + BE$

结论：① $\angle EAF = 45^\circ$

口诀：角含半角要旋转

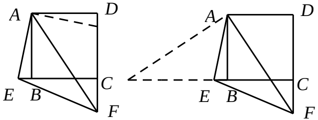
角含半角模型(90°)



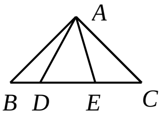
条件：①正方形 $ABCD$；② $\angle EAF = 45°$

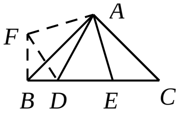
结论：① $EF = DF - BE$

辅助线：



角含半角模型(90°)

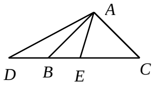


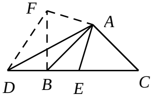


条件：①等腰直角 ΔABC ；② $\angle DAE = 45°$

结论： $BD^2 + CE^2 = DE^2$

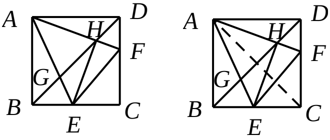
若 $\angle DAE$ 旋转到 ΔABC 外部时





结论： $BD^2 + CE^2 = DE^2$ 仍然成立

角含半角模型(90°)变形



条件：① $\angle EAF = 45°$；

结论：ΔAHE 为等腰直角三角形（重点/难点）

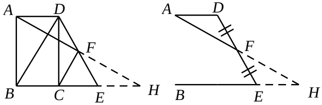
证明：连接 AC （方法不唯一）

$\because \angle DAC = \angle EAF = 45°$，$\therefore \angle DAH = \angle CAE$

$\because \angle ADH = \angle ACE = 45°$，$\therefore \Delta ADH \backsim \Delta ACE$

$\therefore \dfrac{DA}{AH} = \dfrac{AC}{AE}$ $\quad\therefore \Delta AHE \backsim \Delta ADC$

倍长中线类模型



条件：①矩形 $ABCD$；② $BD=BE$

③ $DF=EF$

结论： $AF\perp CF$

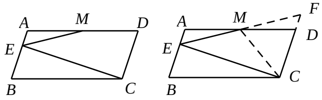
模型提取：

①有平行线 $AD//BE$

②平行线间线段有中点 $DF=EF$

可以构造 8 字全等 $\Delta ADF\cong\Delta HEF$

倍长中线类模型



条件：①平行四边形； $ABCD$ ② $BC=2AB$；

③ $AM=DM$ ；④ $CE\perp AD$

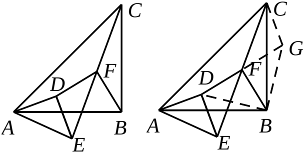
结论： $\angle EMD=3\angle MEA$

辅助线:有平行 $AB/\!/CD$，有中点 $AM=DM$

延长 EM，构造 $\Delta AME\cong\Delta DMF$，连接 CM 构造等腰 ΔEMC，ΔMCF

通过构造 8 字全等线段数量及位置关系,角的大小转化

相似三角形360度旋转模型（倍长中线法）



条件：① ΔADE 、 ΔABC 均为等腰直角

② $EF=CF$

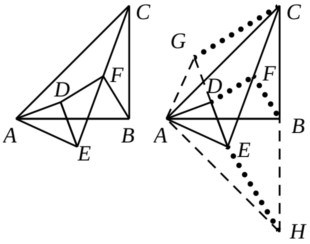
结论：① $DF=BF$ ；② $DF\perp BF$

辅助线：延长 DF 到点 G ，使 $FG=DF$ ，连接 CG 、 BG 、 BD 证明 ΔBDG 为等腰直角

突破点： $\Delta ABD\cong\Delta CBG$

难点：证明 $\angle BAD=\angle BCG$

相似三角形 360 度旋转模型（补全法）



条件：① ΔADE 、 ΔABC 均为等腰直角

② $EF=CF$

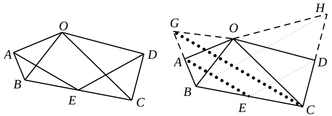
结论：① $DF=BF$ ；② $DF\perp BF$

辅助线：构造等腰直角 ΔAEG 、 ΔAHC

辅助线思路：将 DF 与 BF 转化到 CG 与 EH

任意相似直角三角形 360 度旋转模型

（补全法）



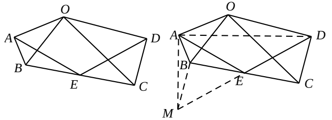
条件：① $\Delta OAB \backsim \Delta ODC$

② $\angle OAB = \angle ODC = 90°$；③ $BE = CE$

结论：① $AE = DE$；② $\angle AED = 2\angle ABO$

辅助线：延长 BA 到点 G，使 $AG = AB$，延长 CD 到点 H 使 $DH = CD$，补全 ΔOGB、OCH 构造旋转模型，转化 AE 与 DE 到 CG 与 BH，难点在转化 $\angle AED$

任意相似直角三角形 360 度旋转模型（倍长法）



条件：① $\Delta OAB \backsim \Delta ODC$

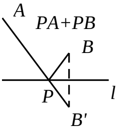
② $\angle OAB = \angle ODC = 90°$ ；③ $BE \quad CE$

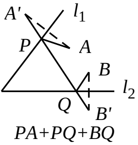
结论：① $AE = DE$ ； ② $\angle AED = 2\angle ABO$

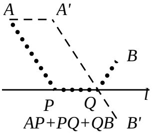
辅助线：延长 DE 至 M ，使 $ME = DE$ ，将结论的两个条件转化为证明 $\Delta AMD \backsim \Delta ABO$ ，此为难点，将 $\Delta AMD \backsim \Delta ABC$ 继续转化为证明 $\Delta ABM \backsim \Delta AOD$，使用两边成比且夹角等

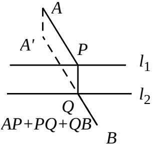
此处难点在证明 $\angle ABM = \angle AOD$

最短路程模型之一（将军饮马类）









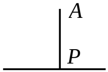
\

总结:以上四图为常见的轴对称类最短路程问题，

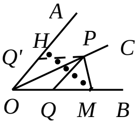
最后都转化到:“两点之间，线段最短”解决

特点：①动点在直线上；②起点，终点固定

最短路程模型之二（点到直线类）



垂线段最短



条件：如右图① OC 平分 $\angle AOB$

② M 为 OB 上一定点

③ P 为 OC 上动点

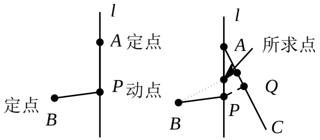
④ Q 为 OB 上动点

求：$MP+PQ$ 最小时，P 、Q 的位置

辅助线：将作 Q 关于 OC 对称点 Q' ，转化 $PQ'=PQ$ ，过点 M 作 $MH\perp OA$

$MP+PA=MP+PQ'\geq MH$ （垂线段最短）

最短路程模型之二（点到直线类）



条件：如图，点 A 、 B 为定点， P 为动点

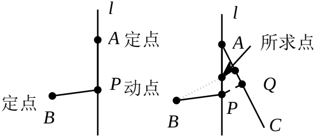
问题：点 P 在何处， $BP+\frac{1}{2}AP$ 最短

结论：以 A 为顶点作 $\angle PAC=30^\circ$ ，过点 P 作

$PQ\perp AC$ ，转化 $PQ=\frac{1}{2}AP$ ，过点 B 作 AC

的垂线与 AP 的交点为所求（垂线段最短）

最短路程模型之二（点到直线类）

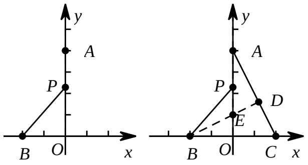


条件：如图，点 A 、 B 为定点， P 为动点

问题：点 P 在何处， $BP+\frac{\sqrt{2}}{2}AP$ 最短

结论：以 A 为顶点作 $\angle PAC=45°$ ，过点 P 作 $PQ\perp AC$ ，转化 $PQ=\frac{1}{2}AP$ ，过点 B 作 AC 的垂线与 AP 的交点为所求

最短路程模型之二（点到直线类）



条件：$A(0,4)$、$B(-2,0)$，$P(0,n)$

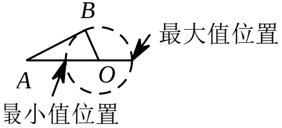
问题：n 为何值时，$PB+\frac{\sqrt{5}}{5}PA$ 值最小

结论:① x 上取点 $C(2,0)$，使 $\sin\angle OAC=\frac{\sqrt{5}}{5}$

②过点 B 作 $BD\perp AC$，交 y 轴于点 E 为所求

③ $\tan\angle EBO=\tan\angle OAC=\frac{1}{2}$，即 $E(0,1)$

最短路程模型之三（旋转类最值模型）



条件：①线段 $OA=4$，$OB=2$ $(OA>OB)$

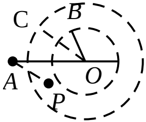
② OB 绕点 O 在平面内 $360°$ 旋转

问题： AB 的最大值，最小值分别为多少？

结论：以点 O 为圆心， OB 为半径作圆，如图所示，将问题转化为“三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边”

最大值： $OA+OB$；最小值： $OA-OB$

最短路程模型之三（旋转类最值模型）



条件：①线段 $OA=4$，$OB=2$

②以点 O 为圆心，OB，OC 为半径作圆

③点 P 是两圆所组成圆环内部（含边界）一点

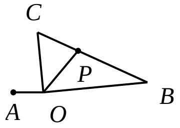
问题：若 PA 的最大值为 10，则 $OC=6$

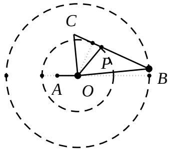
若 PA 的最小值为 1，则 $OC=3$

若 PA 的最小值为 2，则 PC 的取值范围是

$0<PC\leq 2$

最短路程模型之三（旋转类最值模型）





条件：① $Rt\Delta OBC$ ， $\angle OBC = 30°$

② $OC = 2$;③ $OA = 1$ ； ④点 P 为 BC 上动点

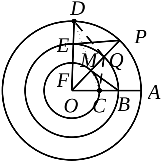
（可与端点重合）；⑤ ΔOBC 绕点 O 旋转

结论： PA 最大值为 $OA + OB = 1 + 2\sqrt{3}$

PA 最小值为 $\frac{1}{2}OB - OA = \sqrt{3} - 1$

如右图, 圆的最小半径为 O 到 BC 垂线段长

最短路程模型之四（动点在圆上）



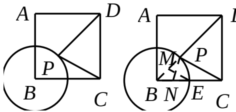
条件：以点 O 为圆心三个圆，OA、OD 固定

OP 绕点 O 旋转

问题：点 Q 在什么位置时，$EP+MB$ 最小

辅助线：连接 DQ、QC，当 Q、D、C 三点共线时，$EP+MB=DQ+QC=DC$ 最小

最短路程模型之四（动点在圆上）



条件：①正方形 $ABCD$ 且边长为 4 ；

② $\odot B$ 的半径为 2 ；③ P 为 $\odot B$ 上动点

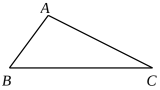
问题：求 $PD+(PC/2)$ 最小值

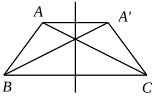
辅助线：过点 E 作 $EM // PC$ ，取 BE 中点 N

转化思路：将 $PC/2$ 转化 ME ，将 ME 转化为 MN ，因此 $MD+MN$ 的最小值为 DN 长度

总结： $PC/2$ 的比值不是随意给出的，而是圆的半径 r/BC

二倍角模型





条件：ΔABC 中，$\angle B=2\angle C$

辅助线：以 BC 的垂直平分线为对称轴，作点 A 的对称点 A'，连接 AA'、BA'、CA'

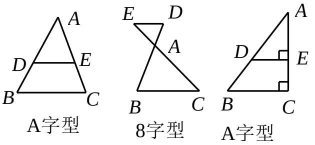
则 BA' 为 $\angle ABC$ 的角平分线，

那么 $BA=AA'=CA'$（注意这个结论）

此种辅助线的作法是二倍角三角形常见的辅助线作法之一，但并不是唯一作法

相似三角形模型

（基本型）



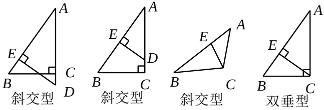
平行类：$DE // BC$

结论：$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$（注意对应边要对应）

模型应用：经常在选择，填空中直接考查，在第20 题的第二问也经常会考查“A 字型”“8 字型”相似，建立方程。

相似三角形模型

（斜交型）



条件：如左面两个图 $\angle AED=\angle ACB=90^\circ$

结论： $AE\times AB=AC\times AD$

条件：如右面两个图 $\angle ACE=\angle ABC$

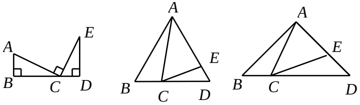
结论： $AC^2=AE\times AB$

第四个图还存在 $AB\times EC=BC\times AC$

$BC^2=BE\times BA$，$CE^2=BE\times AE$

相似三角形模型

（一线三角型）



条件：左图： $\angle ABC=\angle ACE=\angle CDE=90^\circ$

中图： $\angle ABC=\angle ACE=\angle CDE=60^\circ$

右图： $\angle ABC=\angle ACE=\angle CDE=45^\circ$

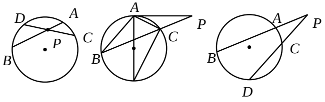
结论：所有图形都存在的结论

① $\Delta ABC \backsim \Delta CDE$ ；② $AB\times DE=BC\times CD$

一线三等角模型也经常用来建立方程或函数关系

相似三角形模型

（圆幂定理型）



条件：中图，PA 为圆的切线

结论：左图：$PA \times PB = PC \times PD$

中图：$PA^2 = PC \times PB$

右图：$PA \times PB = PC \times PD$

以上结论均可以通过相似三角形进行证明