Стонякин Ф. С.

Лекция 9. Экстраградиентный метод для ВН и седловых задач и его вариации. Билинейные матричные игры

11 апреля 2025 г.

1. Проекционный метод

Предположим, что имеется вариационное неравенство, в котором Q — выпуклое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$, а $g(x)$ — непрерывное на $\mathbb{R}^n$ отображение. Как известно, точка x_* — решение вариационного неравенства в том и только в том случае, когда она является неподвижной точкой проекционного отображения

$$P(x) = Pr_Q(x - \alpha g(x)),\ \alpha > 0,$$

т. е. если выполняется равенство

$$x_* = P(x_*) = Pr_Q(x_* - \alpha g(x_*)). \tag{1}$$

Рассмотрим теперь метод решения ВН, в котором используется отображение $P(x)$. Назовем его *проекционным методом*. Пусть задано начальное приближение $x_0 \in Q$. Последующие точки x_k, $k \geqslant 1$, находим с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$x_{k+1} = Pr_Q(x_k - \alpha g(x_k)),\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где $\alpha > 0$ — параметр.

Теорема 1. *Пусть Q — выпуклое замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Пусть, кроме того, $g(x)$ — сильно монотонное на Q отображение с константой*

$\mu > 0$, удовлетворяющее условию Липшица, т. е. для всех $x, y \in Q$ выполняется

$$\langle g(x) - g(y), x - y\rangle \geqslant \mu \left\|x - y\right\|_2^2, \tag{3}$$

$$\left\|g(x) - g(y)\right\|_2 \leqslant L \left\|x - y\right\|_2. \tag{4}$$

Тогда при любом $x_0 \in Q$ и $0 < \alpha < \frac{2\mu}{L^2}$ последовательность $\{x_k\}$, порождаемая итерационным процессом (2), сходится к решению задачи ВН — точке $x_* \in Q$ — с линейной скоростью

$$\left\|x_{k+1} - x_*\right\|_2 \leqslant C \left\|x_k - x_*\right\|_2, \; 0 < C < 1. \tag{5}$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что оператор проектирования $P(x) = Pr_Q(x - \alpha g(x))$ является нерастягивающим. Тогда из (1) и (2)

$$\begin{aligned} \left\|x_{k+1} - x_*\right\|_2^2 = \left\|Pr_Q(x_k - \alpha g(x_k)) - Pr_Q(x_* - \alpha g(x_*))\right\|_2^2 \leqslant \\ \leqslant \left\|x_k - \alpha g(x_k) - x_* + \alpha g(x_*)\right\|_2^2 = \\ = \left\|x_k - x_*\right\|_2^2 + \alpha^2 \left\|g(x_k) - g(x_*)\right\|_2^2 - 2\alpha \left\langle g(x_k) - g(x_*), x_k - x_*\right\rangle. \end{aligned} \tag{6}$$

Но согласно (3)

$$\langle g(x_k) - g(x_*), x_k - x_*\rangle \geqslant \mu \left\|x_k - x_*\right\|_2^2, \tag{7}$$

а в силу (4)

$$\|g(x_k) - g(x_*)\|_2^2 \leqslant L^2 \|x_k - x_*\|_2^2 \,. \tag{8}$$

Поэтому после подстановки (7) и (8) в (6) приходим к

$$\|x_{k+1} - x_*\|_2^2 \leqslant \left(1 + \alpha^2 L^2 - 2\alpha\mu\right) \|x_k - x_*\|_2^2 \,.$$

При $0 < \alpha < \frac{2\mu}{L^2}$ выполняется неравенство

$$1 + \alpha^2 L^2 - 2\alpha\mu < 1.$$

Отсюда заключаем, что итерации, определяемые формулой (2), сходятся с линейной скоростью к x_*, причем в (5) константа C равняется

$$C = \left(1 + \alpha^2 L^2 - 2\alpha\mu\right)^{1/2} .$$

$\square$

2. Экстраградиентный метод

Пусть Q — выпуклое компактное множество, $g : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — монотонный оператор, т. е.

$$\langle g(y) - g(x), y - x \rangle \geqslant 0, \quad \forall x, y \in Q, \tag{9}$$

и удовлетворяет условию Липшица с константой $L > 0$, т. е.

$$\|g(y) - g(x)\|_2 \leqslant L\|y - x\|_2, \quad \forall x, y \in Q. \tag{10}$$

Рассмотрим следующий метод.
Заданы начальная точка x_0 и $\alpha = \frac{1}{L}$. Для $k = 0, 1, 2, \dots$ имеем

$$y_{k+1} := Pr_Q \left(x_k - \alpha g(x_k)\right), \quad x_{k+1} := Pr_Q \left(x_k - \alpha g(y_{k+1})\right). \tag{11}$$

Таким образом, находим последовательность

$$x_0 \longrightarrow y_1 \longrightarrow x_1 \longrightarrow y_2 \longrightarrow x_2 \longrightarrow \dots$$

Для метода (11) имеем

$$\max_{x\in Q}\langle g(x), \widehat{y}-x\rangle \leqslant \frac{L}{2N}\max_{x\in Q}\|x-x_0\|_2^2, \tag{12}$$

где

$$\widehat{y}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_{k+1}. \tag{13}$$

Для любых $x\in Q$ и $k=0,1,\ldots$ имеем

$$\langle x_k-\alpha g(x_k)-y_{k+1}, x-y_{k+1}\rangle \leqslant 0, \tag{14}$$

таким образом,

$$\alpha\langle g(x_k), y_{k+1}-x\rangle \leqslant \langle x_k-y_{k+1}, y_{k+1}-x\rangle.$$

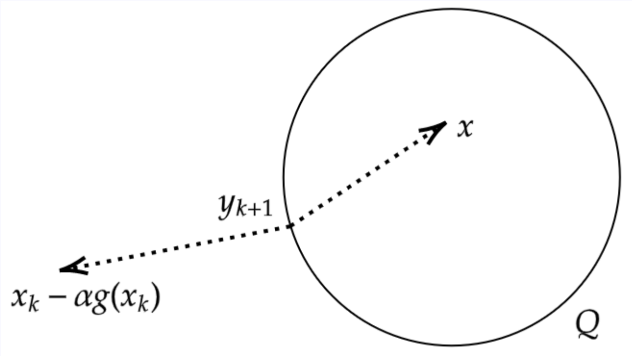

Рис. 1

Имеем

$$
\begin{aligned}
&2\langle x_k - y_{k+1}, y_{k+1} - x\rangle = 2\langle x_k, y_{k+1}\rangle - 2\|y_{k+1}\|_2^2 - 2\langle x_k, x\rangle + 2\langle y_{k+1}, x\rangle = \\
&= \left(-\|y_{k+1}\|_2^2 + 2\langle x_k, y_{k+1}\rangle\right) + \left(-\|y_{k+1}\|_2^2 + 2\langle y_{k+1}, x\rangle\right) - 2\langle x_k, x\rangle = \\
&= \left(-\|y_{k+1}\|_2^2 + 2\langle x_k, y_{k+1}\rangle - \|x_k\|_2^2\right) + \left(-\|y_{k+1}\|_2^2 + 2\langle y_{k+1}, x\rangle - \|x\|_2^2\right) + \\
&\qquad + \left(\|x\|_2^2 - 2\langle x_k, x\rangle + \|x_k\|_2^2\right) = \\
&= -\|y_{k+1} - x_k\|_2^2 - \|x - y_{k+1}\|_2^2 + \|x - x_k\|_2^2.
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$2\alpha\langle g(x_k), y_{k+1} - x\rangle \leqslant \|x - x_k\|_2^2 - \|x - y_{k+1}\|_2^2 - \|y_{k+1} - x_k\|_2^2, \quad \forall x \in Q. \quad (15)$$

Далее,

$$x_{k+1} := Pr_Q\left(x_k - \alpha g(y_{k+1})\right)$$

означает, что

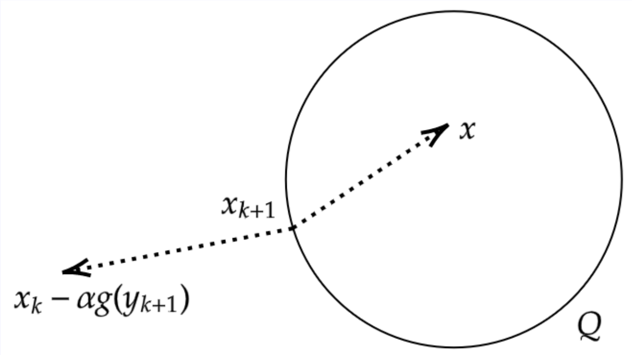

Рис. 2

$$\langle x_k - \alpha g(y_{k+1}) - x_{k+1}, x - x_{k+1}\rangle \leqslant 0,$$

или

$$\begin{aligned}\alpha\langle g(y_{k+1}), x_{k+1} - x\rangle &\leqslant \langle -x_k + x_{k+1}, x - x_{k+1}\rangle \\ &= \langle x, x_{k+1}\rangle - \|x_{k+1}\|_2^2 - \langle x_k, x\rangle + \langle x_k, x_{k+1}\rangle.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}&2\alpha\langle g(y_{k+1}), x_{k+1} - x\rangle \leqslant 2\langle x, x_{k+1}\rangle - 2\|x_{k+1}\|_2^2 - 2\langle x_k, x\rangle + 2\langle x_k, x_{k+1}\rangle = \\ &= \left(-\|x\|_2^2 + 2\langle x, x_{k+1}\rangle - \|x_{k+1}\|_2^2\right) + \left(-\|x_k\|_2^2 + 2\langle x_k, x_{k+1}\rangle - \|x_{k+1}\|_2^2\right) \\ &\quad + \left(\|x\|_2^2 - 2\langle x_k, x\rangle + \|x_k\|_2^2\right) \\ &= -\|x - x_{k+1}\|_2^2 - \|x_k - x_{k+1}\|_2^2 + \|x - x_k\|_2^2,\end{aligned}$$

то есть

$$2\alpha\langle g(y_{k+1}), x_{k+1} - x\rangle \leqslant \|x - x_k\|_2^2 - \|x - x_{k+1}\|_2^2 - \|x_k - x_{k+1}\|_2^2, \quad \forall x \in Q. \quad (16)$$

Далее,

$$\begin{aligned}\langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x\rangle &= \langle g(y_{k+1}), x_{k+1} - x\rangle + \langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x_{k+1}\rangle \\ &= \langle g(y_{k+1}), x_{k+1} - x\rangle + \langle g(x_k), y_{k+1} - x_{k+1}\rangle + \\ &\quad + \langle g(y_{k+1}) - g(x_k), y_{k+1} - x_{k+1}\rangle.\end{aligned}$$

Оценим последнее слагаемое с учетом (10).

$$\begin{aligned}\langle g(y_{k+1}) - g(x_k), y_{k+1} - x_{k+1}\rangle &\leqslant \|g(y_{k+1}) - g(x_k)\|_2 \cdot \|y_{k+1} - x_{k+1}\|_2 \\ &\leqslant L\|y_{k+1} - x_k\|_2 \cdot \|y_{k+1} - x_{k+1}\|_2 \\ &\leqslant \frac{L}{2}\left(\|y_{k+1} - x_k\|_2^2 + \|y_{k+1} - x_{k+1}\|_2^2\right).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}2\alpha\langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x\rangle &\leqslant \|x - x_k\|_2^2 - \|x - x_{k+1}\|_2^2 - \|x_k - x_{k+1}\|_2^2 + \|x_{k+1} - x_k\|_2^2 - \\ &\quad - \|x_{k+1} - y_{k+1}\|_2^2 - \|y_{k+1} - x_k\|_2^2 + \\ &\quad + \frac{2\alpha L}{2}\left(\|y_{k+1} - x_k\|_2^2 + \|y_{k+1} - x_{k+1}\|_2^2\right) \\ &= \|x - x_k\|_2^2 - \|x - x_{k+1}\|_2^2,\end{aligned}$$

то есть

$$\langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x\rangle \leqslant \frac{L}{2}\left(\|x - x_k\|_2^2 - \|x - x_{k+1}\|_2^2\right), \quad \forall x \in Q. \tag{17}$$

Пусть $\alpha = \frac{1}{L}$ и $x = x_{k+1} \in Q$ в (15).

Суммируя (17) по $k = \overline{0, N-1}$, находим

$$\sum_{k=0}^{N-1} \langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x \rangle \leqslant \frac{L}{2} \left(\|x - x_0\|_2^2 - \|x - x_N\|_2^2 \right). \tag{18}$$

Ввиду монотонности f находим

$$\langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x \rangle \geqslant \langle g(x), y_{k+1} - x \rangle, \quad \forall x \in Q. \tag{19}$$

Далее, получаем

$$\begin{aligned} \max_{x \in Q} \langle g(x), \widehat{y} - x \rangle &\leqslant \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \max_{x \in Q} \langle g(x), y_{k+1} - x \rangle \\ &\leqslant \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \max_{x \in Q} \langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x \rangle \leqslant \frac{L \max_{x \in Q} \|x - x_0\|_2^2}{2N}. \end{aligned}$$

Выпукло-вогнутые седловые задачи

Вариационные неравенства возникают, в частности, при решении седловых задач, в которых для выпуклого по u и вогнутого по v функционала $f(u,v) : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \to \mathbb{R}$ ($u \in Q_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ и $v \in Q_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$) требуется найти такую (u_*, v_*), что

$$f(u_*, v) \leqslant f(u_*, v_*) \leqslant f(u, v_*) \tag{20}$$

для произвольных $u \in Q_1$ и $v \in Q_2$. Мы считаем Q_1 и Q_2 выпуклыми компактами в пространствах $\mathbb{R}^{n_1}$ и $\mathbb{R}^{n_2}$, и поэтому $Q = Q_1 \times Q_2 \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ также есть выпуклый компакт. Для всякого $x = (u,v) \in Q$ будем полагать, что

$$\|x\| = \sqrt{\|u\|_1^2 + \|v\|_2^2},$$

где $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — нормы в пространствах $\mathbb{R}^{n_1}$ и $\mathbb{R}^{n_2}$ Условимся обозначать $x = (u_x, v_x),\ y = (u_y, v_y) \in Q$.

Хорошо известно, что для достаточно гладкой функции f по u и v задача (26) сводится к вариационному неравенству с оператором

$$g(x) = \begin{pmatrix} f'_u(u_x, v_x) \\ -f'_v(u_x, v_x) \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Из субградиентных неравенств получаем

$$f(u_y, v_y) - f(u_x, v_y) \leqslant \langle -f'_u(u_y, v_y), u_x - u_y \rangle,$$
$$f(u_y, v_x) - f(u_y, v_y) \leqslant \langle f'_v(u_y, v_y), v_x - v_y \rangle.$$

Поэтому имеем

$$f(u_y, v_x) - f(u_x, v_y) \leqslant \langle g(y), y - x \rangle. \tag{22}$$

После N шагов алгоритма получаем точку

$$\widehat{y} := (\widehat{u}, \widehat{v}) := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N_1} \frac{y_{k+1}}{N}, \tag{23}$$

для которой верна оценка величины-качества решения седловой задачи

$$\max_{v \in Q_2} f(\widehat{u}, v) - \min_{u \in Q_1} f(u, \widehat{v}) \leqslant \frac{L\|x - x_0\|_2^2}{2N} \leqslant . \tag{24}$$

Действительно, для всякого $x \in Q$ верно $f(\widehat{u}, v_x) - f(u_x, \widehat{v}) \leqslant$

$$\leqslant f\left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{u_{y_{k+1}}}{N}, v_x\right) - f\left(u_x, \sum_{k=0}^{N-1} \frac{v_{y_{k+1}}}{N}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f(u_{y_{k+1}}, v_x) - f(u_x, v_{y_{k+1}})}{N} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x \rangle \leqslant \frac{L\|x - x_0\|_2^2}{2N}. \tag{25}$$

3. Экстраградиентный метод для сильно монотонных операторов g

$$y_{k+1} := Pr_Q\left(x_k - \frac{1}{L}g(x_k)\right),$$

$$x_{k+1} := Pr_Q\left(x_k - \frac{1}{L}g(y_{k+1})\right),$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x\rangle \leqslant \frac{L\|x_0 - x\|_2^2}{2N} \quad \forall\, x \in Q. \tag{26}$$

Пусть оператор g сильно монотонен ($\mu > 0$), т.е. $\forall\, x, y \in Q$

$$\langle g(y) - g(x), y - x\rangle \geqslant \mu\|y - x\|_2^2. \tag{27}$$

Тогда

$$\langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x\rangle \geqslant \langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x\rangle + \mu\|y_{k+1} - x\|_2^2.$$

Если $x = x_*$, то $\langle g(x_*), y_{k+1} - x_*\rangle \geqslant 0$ ввиду того, что $\langle g(x_*), x_* - y_{k+1}\rangle \leqslant 0$.
Поэтому

$$\langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x_*\rangle \geqslant \mu\|y_{k+1} - x_*\|_2^2$$

и тогда в силу (26) имеем:

$$\frac{\mu}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\|y_{k+1}-x_*\|_2^2 \leqslant \frac{L\|x_0-x_*\|_2^2}{2N}$$

$\varphi(x) := \|x-x_*\|_2^2 = \|x\|_2^2 - 2\langle x, x_*\rangle + \|x_*\|_2^2$ — выпуклая функция по x, т.е.

$$\varphi\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_{k+1}\right) \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\varphi(y_{k+1}).$$

Тогда для $\widehat{y} := \dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_{k+1}$

$$\mu\|\widehat{y}-x_*\|_2^2 \leqslant \frac{L}{2N}\|x_0-x_*\|_2^2,$$

$$\|\widehat{y}-x_*\|_2^2 \leqslant \frac{L}{2\mu N}\|x_0-x_*\|_2^2,$$

$$\frac{L}{2\mu N} \leqslant \frac{1}{2} \;\text{ при }\; N \geqslant \frac{L}{\mu}.$$

После $N = \left\lceil \frac{L}{\mu} \right\rceil$ шагов

$$\|\widehat{y} - x_*\|_2^2 \leqslant \frac{1}{2}\|x_0 - x_*\|_2^2.$$

Далее, запускаем метод с начальной точкой $\widehat{y}^1 := \widehat{y}$ вместо x_0 и получим «новый» выход $\widehat{y}^2$:

$$\|\widehat{y}^2 - x_*\|_2^2 \leqslant \frac{1}{2}\|\widehat{y}^1 - x_*\|_2^2 \leqslant \frac{1}{4}\|x_0 - x_*\|_2^2.$$

Продолжаем процесс далее

$$x_0 \to \widehat{y}^1 \to \widehat{y}^2 \to \cdots$$

$$\|\widehat{y}^p - x_*\|_2^2 \leqslant \frac{1}{2^p}\|x_0 - x_*\|_2^2, \qquad \|\widehat{y}^p - x_*\|_2^2 \leqslant \varepsilon$$

после $p \geqslant \log_2 \dfrac{\|x_0 - x_*\|_2^2}{\varepsilon}$ запусков. На каждом запуске (рестарте) $N = \left\lceil \frac{L}{\mu} \right\rceil$ шагов исходного метода.

Тогда общая сложность метода равна $p_* N$

$$O\left(\frac{L}{\mu} \log_2 \frac{\|x_0 - x_*\|_2^2}{\varepsilon}\right).$$

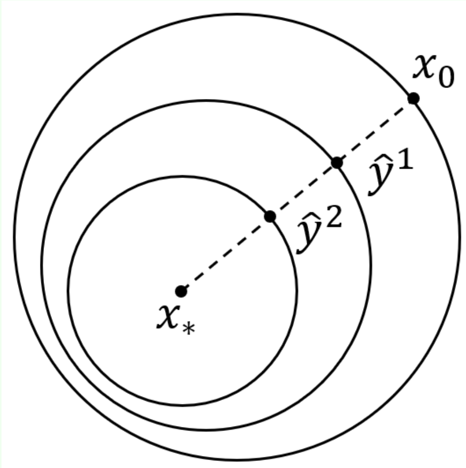

Рис. 3

4. Адаптивный и универсальный метод для решения ВН

Основные идеи:

1. A. Nemirovski, Prox-method with rate of convergence O(1/T) for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems, // SIAM Journal on Optimization, 2004, 15, pp. 229 – 251.

2. Yu. Nesterov, Universal gradient methods for convex optimization problems, // Math. Program., 2015, Ser. A, 152, pp. 381 – 404. Available at https://doi.org/10.1007/s10107-014-0790-0.

A. V. Gasnikov P. E. Dvurechensky, F. S. Stonyakin, A. A. Titov. Adaptive proximal method for variational inequalities // Comp. Math. and Math. Physics 2019, No 5.

Stonyakin F. S. On the adaptive proximal method for a class of variational inequalities and related problems. // Proceedings of IMM UrO RAN. 2019, No 2.

$$\|g(x)-g(y)\|_2 \leqslant L_\nu \|x-y\|_2^\nu \quad \forall x,y\in Q \tag{28}$$

для каждого $\nu\in[0;1]$ и $L_0<+\infty$. Другие константы L_ν могут быть бесконечными.

$$\langle g(y) - g(x), y - z \rangle \leqslant \frac{1}{2} \left(L(\delta)(\|y - x\|_2^2 + \|y - z\|_2^2) + \delta \right), \tag{29}$$

где

$$L = \left(\frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1-\mu}{1+\nu}} L_\nu^{\frac{2}{1+\nu}}. \tag{30}$$

Для краткости: $S_N = \sum\limits_{k=0}^{N-1} \frac{1}{L_{k+1}}$.

Теорема 2. *Для гёльдерова оператора g:*

$$\|g(x) - g(y)\|_2 \leqslant L_\nu \|x - y\|_2^\nu \tag{32}$$

для $\nu \in [0;1]$, $x, y \in Q$ и $L_0 < +\infty$ (другие константы L_ν могут быть бесконечными) верна оценка

$$\max_{x \in Q} \min_{k = \overline{0, N-1}} \{ \langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x \rangle \} \leqslant \frac{1}{S_N} \max_{x \in Q} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{L_{k+1}} \langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x \rangle \leqslant \varepsilon, \tag{33}$$

если

$$L_0 \leqslant 2L = 2 \inf_{\nu \in [0;1]} L_\nu \cdot \left(\frac{2L_\nu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1-\nu}{1+\nu}} \tag{34}$$

Алгоритм 1. Универсальный метод для ВН

1. $N := N + 1$, $L_{N+1} := L_N/2$.

2. Вычисляем

$$x_{N+1} := \arg\min_{x\in Q}\left\{\langle g(y_{N+1}), x - x_N\rangle + \frac{L_{N+1}}{2}\|x - x_N\|_2^2\right\}.$$

$$y_{N+1} := \arg\min_{x\in Q}\left\{\langle g(x_N), x - x_N\rangle + \frac{L_{N+1}}{2}\|x - x_N\|_2^2\right\},$$

3. Если верно $\langle g(y_{N+1}) - g(x_N), y_{N+1} - x_{N+1}\rangle \leqslant$

$$\leqslant \frac{L_{N+1}}{2}\|y_{N+1} - x_N\|_2^2 + \frac{L_{N+1}}{2}\|x_{N+1} - y_{N+1}\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{31}$$

то переходим к следующей итерации (пункт 1).

4. Если (31) не удовлетворяет, то увеличиваем L_{N+1} в 2 раза ($L_{N+1} := 2L_{N+1}$) и переходим к пункту 2.

5. Критерии остановки метода: $\sum\limits_{k=0}^{N-1}\frac{1}{L_{k+1}} \geqslant \frac{2R^2}{\varepsilon}$, где $R^2 = \max\limits_{x\in Q}\frac{1}{2}\|x - x_0\|_2^2$.

и количество итераций не превышает

$$N = \left\lceil \inf_{\nu\in[0;1]} \left(\frac{2L_\nu R^{1+\nu}}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{1+\nu}} \right\rceil. \tag{35}$$

Замечание 1. Если $g \not\equiv Const$, тогда условие $L_0 \leqslant 2L$ может быть выполнено при

$$L_0 := \frac{\|g(x) - g(y)\|_2}{\|x - y\|_2} \text{ для } g(x) \neq g(y).$$

Замечание 2. Для ВН с монотонным оператором g имеем:

$$\langle g(x), y_{k+1} - x\rangle \leqslant \langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x\rangle\,,$$

поэтому критерий (33) можно заменить на

$$\max_{x\in Q} \langle g(x), \widetilde{y} - x\rangle \leqslant \varepsilon, \text{ где } \widetilde{y} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{N-1} \frac{1}{L_{k+1}} \cdot y_{k+1}}{S_N}. \tag{36}$$

Часто (36) используется как критерий качества решения вариационного неравенства.

5. Билинейные матричные игры[1]

- Билинейная задача на вероятностном симплексе:

$$\min_{x \in \triangle^{n_x}} \max_{y \in \triangle^{n_y}} x^T A y,$$

$\triangle^{n_x}$ — вероятностный симплекс размера n_x (все компоненты вектора неотрицательные и в сумме дают 1—интуиция: распределение вероятности).

- Имеет много применений, в первую очередь в экономике и теории игр. Такую задачу называют матричной игрой или задачей поиска равновесия Нэша.

Такое равновесие характеризуется тем, что отклонение от него не может увеличить его выигрыша. Тогда рациональной стратегией каждого игрока должна быть реализация равновесия. Можно сказать, что стратегия называется равновесной по Нэшу, если она устойчива относительно индивидуального отклонения поведения игроков.

[1] Доклад А.Н. Безносикова

Билинейная задача: пример

- Пусть играют 2 игрока X и Y. Игрок Y на каждом ходу выбирает 1 оружие и атакует игрока X и пытается нанести максимальный урон. Игрок X наоборот выбирает 1 защиту и этот урон сокращает.
- Пусть у игрока Y набор из n_y типов оружия, а у $X - n_x$ защитных мер.
- Игроки знают какой урон будет нанесен, если игрок Y выберет оружие i, а игрок X оружие j. Все эти данные заносятся в матрицу A.
- Между игроками начинается война — считаем, что ударов идет очень большое количество.
- Игроки не знают какое действие выбирает соперник на очередном ходу.
- Найдите оптимальную стратегию игры X и Y .
- Самое легкое решение: пусть игрок Y возьмет самое мощное оружие – оружие, которое дает наибольший урон при какой-то защите (максимум в матрице A). Всегда ли это эффективно?
- Нет. Пусть такое оружие действительно против какой-то защиты даст урон 1000, но другие защиты полностью его блокируют. Тогда X просто

выставит эти защиты и будет невредим всегда.

- Но пусть у игрока Y есть оружие, которое всегда дает урон 10. Да, это меньше, но он постоянный.
- Цель — найти равновесие между X и Y!
- Задачу можно переписать в виде билинейной задачи на вероятностных симплексах:

$$\min_{x \in \triangle^{n_x}} \max_{y \in \triangle^{n_y}} x^T A y.$$

  Матрица A — матрица убытков. Что такое означают векторы x и y?
- Векторы x и y — вероятности (частоты) выбора той или иной защиты/атаки.
- Такая постановка реализует самый простой случай, когда игроки случайно (согласно равновесному распределению) выбирают действия.

Билинейная матричная игра: вор и полицейский

- Пусть город представляет собой квадрат из $n \times n$ маленьких квадратиков. В каждом квадратике стоит дом и полицейская будка рядом с ним. Пусть так же известны ценности домов w_i.
- Каждую ночь вор выбирает, какой дом ограбить, а полицейский выбирает будку, в которой будет дежурить.
- Вероятность поимки вора, если вор грабит дом в квадрате i, а полисмен дежурит в квадрате j равна $\exp(-\alpha \cdot \mathrm{dist}(i, j))$, т.е. уменьшается с увеличением расстояния между квадратами.
- Вор хочет максимизировать свою ожидаемую прибыль:

  $$w_i(1 - \exp(-\alpha \cdot \mathrm{dist}(i, j))).$$

  Полицейский наоборот — минимизировать.
- Эту задачу можно переписать в виде билинейной:

  $$\min_{x \in \triangle^{n_x}} \max_{y \in \triangle^{n_y}} x^T A y.$$

  В A_{ij} хранится $w_i(1 - \exp(-\alpha \cdot \mathrm{dist}(i, j)))$.

6. Метод зеркального спуска. Дивергенция Кульбака-Лейблера [2)]

Рассмотрим стандартную задачу выпуклой негладкой оптимизации:

$$\min_{x\in Q} f(x), \tag{37}$$

где $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — выпуклая негладкая функция, а Q — выпуклое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$.

Метод зеркального спуска является обобщением стандартного субградиентного метода. Напомним, что субградиентный метод для решения задачи (37) начинает с некоторой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и далее итеративно строит последовательность $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ по правилу

$$x_{k+1} := Pr_Q(x_k - h_k g_k), \tag{38}$$

где $g_k \in \partial f(x_k)$ — субградиент функции f в точке $x_k, h_k > 0$ — длина шага, $Pr_Q(y) := \arg\min_{x\in Q} \|x - y\|_2$ — евклидова проекция точки $y \in \mathbb{R}^n$ на множество Q. Заменяя оператор проектирования Pr_Q на его определение, итерацию

[2)] http://www.machinelearning.ru/wiki/images/1/11/MOMO18_Extra5.pdf

(38) можно переписать следующим образом:

$$x_{k+1} = \arg\min_{x \in Q} \left\{ \langle g_k, x \rangle + \frac{1}{2h_k} \|x - x_k\|_2^2 \right\}.$$

Отсюда видно, что итерация субградиентного метода имеет определенный геометрический смысл: новая точка x_{k+1} минимизирует на множестве Q линейную модель $f(x_k) + \langle g_k, x - x_k \rangle$ целевой функции плюс регуляризатор $(1/2)\|x - x_k\|_2^2$, запрещающий новой точке x_{k+1} отдаляться слишком далеко от текущей точки x_k. При такой интерпретации возникает естественный вопрос: нельзя ли в качестве регуляризатора вместо квадрата евклидового расстояния использовать какую-либо другую функцию $V(x, x_k)$, т. е. рассматривать итерации вида

$$x_{k+1} = \arg\min_{x \in Q} \left\{ \langle g_k, x \rangle + \frac{1}{h_k} V(x, x_k) \right\}? \tag{39}$$

В этом случае траектория $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ метода уже будет другой и можно ожидать, что при «правильном» выборе регуляризатора V, а также длин шагов h_k, новый метод будет обладать более быстрой сходимостью. При этом естественно ожидать, что выбор регуляризатора V должен определяться геометрией рассматриваемого множества Q: например, если $Q = \Delta_n$ — стандартный симплекс, то точки множества Q соответствуют дискретным вероятностным распределениям, и в этом случае более естественным расстоянием между точками множества Q является дивергенция Кульбака–Лейблера

$$V(x, x_k) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln \frac{x_i}{x_{k,i}},$$

а не обычная евклидова метрика $V(x, x_k) = (1/2)\|x - x_k\|_2^2$, никак не учитывающая особенности множества Q.

Итак, ключевой ингредиент метода зеркального спуска — это функция V. Ясно, что эта функция не может быть совсем произвольной (например, для некоторых функций соответствующая задача оптимизации, определяющая следующую точку x_{k+1}, вообще может не иметь решений). Из приведенных выше рассуждений понятно, что для того, чтобы метод зеркального спуска «правильным образом» обобщал субградиентный метод, функция V должна иметь те же свойства, что и квадрат евклидового расстояния. Оказывается, что основное свойство квадрата евклидового расстояния, отвечающее за сходимость стандартного субградиентного метода, заключается в том, что для некоторой ($d(x) := (1/2)\|x\|_2^2$) функции $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ справедливо следующее алгебраическое представление:

$$\frac{1}{2}\|y - x\|_2^2 = d(y) - d(x) - \langle \nabla d(x), y - x \rangle,$$

причем функция d сильно выпукла (относительно некоторой нормы). Таким образом, в методе зеркального спуска регуляризирующая функция V задается с помощью другой функции d согласно выписанному выше алгебраическому выражению. Функция d называется прокс-функцией или функцией, порождающей расстояние. Приведем соответствующее формальное определение.

Определение 1. *(Прокс-функция). Пусть $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $\mathbb{R}^n$ (не обязательно евклидова). Пусть $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое непустое множество. Пусть $d : Q \to \mathbb{R}$ — выпуклая и непрерывная функция. Обозначим через $Q^\circ := \{x \in Q : \partial d(x) \neq \emptyset\}$ подмножество Q, на котором функция d субдифференцируема. Функция d называется прокс-функцией для множества Q, связанной с нормой $\|\cdot\|$, если*

1. *Функция d допускает непрерывный выбор субградиентов, т. е. существует функция $\nabla d : Q^\circ \to \mathbb{R}^n$, такая, что для всех $x \in Q^\circ$ выполнено $\nabla d(x) \in \partial d(x)$, и функция ∇d непрерывна на множестве Q°.*

2. *Функция d сильно выпукла с параметром 1 относительно нормы $\|\cdot\|$, т. е.*
$$\langle \nabla d(x) - \nabla d(y), x - y\rangle \geqslant \|x - y\|^2 \tag{40}$$
для всех $x, y \in Q^\circ$.

Пример 1. (Евклидова прокс-функция). Пусть $\|\cdot\|$ — евклидова норма $\|x\| := \|x\|_2 := \langle x, x\rangle^{1/2}$. Рассмотрим функцию $d : Q \to \mathbb{R}$, заданную формулой

$$d(x) := \frac{1}{2}\|x\|_2^2.$$

Эта функция непрерывная и выпуклая, для нее $Q^\circ = Q$, $\nabla d(x) = x$, и неравенство (40) переходит в тождественное равенство. Таким образом, d является прокс-функцией для множества Q, связанной с евклидовой нормой. Эта прокс-функция называется *евклидовой*.

Пример 2. (Энтропийная прокс-функция). Пусть

$$Q := \Delta_n := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^n x_i = 1\} \text{ —}$$

стандартный единичный симплекс в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть также $\|\cdot\|$ — l_1-норма $\|x\| := \|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$.

Рассмотрим функцию $d : \Delta_n \to \mathbb{R}$, заданную формулой

$$d(x) := \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i.$$

Эта функция непрерывная и выпуклая, для неё $Q^{\circ} = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ есть относительная внутренность Δ_n, и $\nabla d(x) = (\ln x_i + 1)_{i=1}^n$.

Такую прокс-структуру используют в машинном обучении, ей соответствует дивергенция или расхождение Кульбака–Лейблера:

$$V(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log\left(\frac{x_i}{y_i}\right), \tag{41}$$

если

$$Q = S_n(1) = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}.$$

При этом

$$V(x, y) \geqslant \frac{1}{2}\|y - x\|_1^2 \quad \forall x, y \in Q. \tag{42}$$

Использование такого прокса позволяет выписывать явные формулы проектирования на симплекс, что может быть удобно. Действительно, при выборе указанной прокс-структуры шаг (39) имеет вид $(i = 1, 2, \dots, n)$:

$$x_{k+1}^i = \frac{\exp\left(-\alpha \sum\limits_{r=0}^{k} \nabla_i f(x_r)\right)}{\sum\limits_{l=1}^{n} \exp\left(-\alpha \sum\limits_{r=0}^{k} \nabla_l f(x_r)\right)} = \frac{x_k^i \exp\left(-\alpha \nabla_i f(x_k)\right)}{\sum\limits_{l=1}^{n} x_k^l \exp\left(-\alpha \nabla_l f(x_k)\right)}, \tag{43}$$

где $x_k = (x_k^1, x_k^2, ..., x_k^n) \in \mathbb{R}^n$, $x_{k+1} = (x_{k+1}^1, x_{k+1}^2, ..., x_{k+1}^n) \in \mathbb{R}^n$. При этом принято выбирать начальную точку $(1/n, 1/n, ..., 1/n)$, чтобы минимизировать максимально возможное удаление от начальной точки до точного решения задачи. А такое удаление в случае неевклидовых норм определяется через введённую дивергенцию (или расхождение) Брэгмана, которая в общем случае заменяет квадрат «евклидова» расстояния.

7. Адаптивный проксимальный метод для вариационных неравенств

Для некоторого оператора $g : Q \to \mathbb{R}^n$, заданного на выпуклом компакте $Q \subset \mathbb{R}^n$ будем рассматривать *сильные вариационные неравенства* вида

$$\langle g(x_*), x_* - x\rangle \leqslant 0, \tag{44}$$

где g удовлетворяет условию Липшица. Отметим, что в (44) требуется найти $x_* \in Q$ (это x_* и называется решением ВН) для которого

$$\max_{x \in Q}\langle g(x_*), x_* - x\rangle \leqslant 0. \tag{45}$$

В случае монотонного оператора g такой подход позволяет рассматривать также *слабые вариационные неравенства*

$$\langle g(x), x_* - x\rangle \leqslant 0. \tag{46}$$

Обычно в (46) требуется найти $x_* \in Q$ для которого (46) верно при всех $x \in Q$.

Для решения задачи (44) – (45) мы предлагаем следующий адаптивный проксимальный зеркальный метод (АПЗМ). Пусть задано число $\varepsilon > 0$ (точность решения) и начальное приближение $x_0 = \arg\min\limits_{x \in Q} d(x) \in Q$.

Опишем $(N+1)$-ю итерацию предлагаемого алгоритма $(N = 0, 1, 2, \ldots)$, положив изначально $N := 0$.

Алгоритм 2. АПЗМ

---

1. $N := N + 1$, $L_{N+1} := L_N/2$.
2. Вычисляем

$$y_{N+1} := \arg\min_{x \in Q} \left\{ \langle g(x_N), x - x_N \rangle + L_{N+1} V(x, x_N) \right\},$$

$$x_{N+1} := \arg\min_{x \in Q} \left\{ \langle g(y_{N+1}), x - x_N \rangle + L_{N+1} V(x, x_N) \right\}.$$

3. Если верно $\langle g(y_{N+1}) - g(x_N), y_{N+1} - x_{N+1} \rangle \leqslant$

$$\leqslant L_{N+1} V(y_{N+1}, x_N) + L_{N+1} V(x_{N+1}, y_{N+1}), \tag{47}$$

то переходим к следующей итерации (пункт 1).
4. Если не выполнено (47) то увеличиваем L_{N+1} в 2 раза: $L_{N+1} := 2L_{N+1}$ и переходим к пункту 2.
5. Критерий остановки метода: $\sum\limits_{k=0}^{N-1} \frac{1}{L_{k+1}} \geqslant \frac{R^2}{\varepsilon}$, where $R^2 = \max\limits_{x \in Q} V(x, x_0)$.

Теорема 3. *После остановки Алгоритма 2 справедлива оценка:*

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{L_{k+1}} \langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x \rangle \leqslant V(x, x_0) - V(x, x_N). \tag{48}$$

Доказательство. Непосредственно можно проверить равенства:

$$\langle \nabla_x V(x, x_k) \mid_{x=x_{k+1}}, x - x_{k+1} \rangle = V(x, x_k) - V(x, x_{k+1}) - V(x_{k+1}, x_k), \tag{49}$$

$$\langle \nabla_x V(x, x_k) \mid_{x=y_{k+1}}, x - y_{k+1} \rangle = V(x, x_k) - V(x, y_{k+1}) - V(y_{k+1}, x_k), \tag{50}$$

Далее, для всякого $x \in Q$ и $k = \overline{0, N-1}$ верны неравенства:

$$\langle \nabla_x \left(\langle g(x_k), x - x_k \rangle + L_{k+1} V(x, x_k) \right) \mid_{x=y_{k+1}}, x - y_{k+1} \rangle \geqslant 0, \tag{51}$$

$$\langle \nabla_x \left(\langle g(y_{k+1}), x - x_k \rangle + L_{k+1} V(x, x_k) \right) \mid_{x=x_{k+1}}, x - x_{k+1} \rangle \geqslant 0. \tag{52}$$

Поэтому

$$\langle g(y_{k+1}), x_{k+1} - x \rangle \leqslant L_{k+1} V(x, x_k) - L_{k+1} V(x, x_{k+1}) - L_{k+1} V(x_{k+1}, x_k)$$

и

$$\langle g(x_k), y_{k+1} - x \rangle \leqslant L_{k+1} V(x, x_k) - L_{k+1} V(x, y_{k+1}) - L_{k+1} V(y_{k+1}, x_k),$$

откуда для всякого $k = \overline{0, N-1}$ с учетом (47) мы имеем:

$$\langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x\rangle = \langle g(y_{k+1}), x_{k+1} - x\rangle + \langle g(x_k), y_{k+1} - x_{k+1}\rangle +$$

$$+\langle g(y_{k+1}) - g(x_k), y_{k+1} - x_{k+1}\rangle \leqslant$$

$$\leqslant L_{k+1}V(x, x_k) - L_{k+1}V(x, x_{k+1}) - L_{k+1}V(x_{k+1}, x_k) + L_{k+1}V(x_{k+1}, x_k) -$$

$$-L_{k+1}V(x_{k+1}, y_{k+1}) - L_{k+1}V(y_{k+1}, x_k) + L_{k+1}V(y_{k+1}, x_k) + L_{k+1}V(x_{k+1}, y_{k+1}),$$

т.е. верно

$$\frac{1}{L_{k+1}} \langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x\rangle \leqslant V(x, x_k) - V(x, x_{k+1}). \tag{53}$$

После суммирования неравенств (53) по $k = \overline{0, N-1}$ получим

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{L_{k+1}} \langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x\rangle \leqslant V(x, x_0) - V(x, x_N),$$

что и требовалось. □

Упражнение 1. Проверить равенства (49) и (50), а также неравенства (51) и (52).

Допустим, что оператор поля g удовлетворяет условию

$$\|g(x) - g(y)\|_* \leqslant L\|x - y\| \quad \forall x, y \in Q. \tag{54}$$

Всюду далее для краткости будем обозначать

$$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{L_{k+1}}.$$

Условие (54) означает, что для произвольных $x, y, z \in Q$

$$\langle g(y) - g(z), y - z\rangle \leqslant \|g(y) - g(x)\|_* \cdot \|y - z\| \leqslant L\|y - x\| \cdot \|y - z\|,$$

откуда в силу справедливого для всех $a, b \in \mathbb{R},\ \delta > 0$ неравенства $ab \leqslant \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$ при произвольных $x, y, z \in Q$ верно

$$\langle g(y) - g(x), y - z\rangle \leqslant \frac{L}{2}\|y - x\|^2 + \frac{L}{2}\|y - z\|^2 \leqslant LV(y, x) + LV(z, y).$$

Тогда ввиду (48) для всякого $x \in Q$

$$\min_{k=\overline{0,N-1}} \langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x \rangle \leqslant \frac{1}{S_N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{L_{k+1}} \langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x \rangle \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{S_N} \left(V(x, x_0) - V(x, x_N) \right) \leqslant \frac{R^2}{S_N},$$

где $R^2 \geqslant \max\limits_{x \in Q} V(x, x_0)$.

Если потребовать, чтобы

$$\max_{x \in Q} \min_{k=\overline{0,N-1}} \{ \langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x \rangle \} \leqslant \frac{1}{S_N} \max_{x \in Q} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{L_{k+1}} \langle g(y_{k+1}), y_{k+1} - x \rangle \leqslant \varepsilon, \tag{55}$$

то в случае $L_0 \leqslant 2L$ можно оценить количество итераций работы алгоритма 2. Действительно, $L_0 \leqslant 2L$ означает, что $L_{k+1} \leqslant 2L$ для всякого $k = \overline{0, N-1}$ и поэтому

$$\frac{R^2}{S_N} \leqslant \varepsilon \text{ верно при } N \geqslant \frac{2LR^2}{\varepsilon}.$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 4. *Если выполнено условие* (54) *для поля* g, *то алгоритм* 2 *работает не более*

$$N = \left\lceil \frac{2LR^2}{\varepsilon} \right\rceil \tag{56}$$

итераций. Если выбрать $L_0 \leqslant 2L$, *то верно* (55).

Замечание 3. Если $g \not\equiv 0$, то выполнения условия $L_0 \leqslant 2L$ можно добиться, выбрав

$$L_0 := \frac{\|g(x) - g(y)\|_*}{\|x - y\|} \text{ при } g(x) \neq g(y).$$

8. Адаптивный алгоритм для матричных игр на симплексе

Рассмотрим классическую задачу нахождения равновесия Нэша матричной игры между двумя игроками. Предположим, нам известна матрица игры $A = \|a_{ij}\|$, где a_{ij} — выигрыш первого игрока (либо, по аналогии, проигрыш второго игрока) в случае, если первый игрок выбрал стратегию i, а второй игрок — стратегию j. Задача может быть формализована следующим образом

$$f(x, y) = x^T A y \to \min_{x \in \Delta_n} \max_{y \in \Delta_m},$$

где Δ_n, Δ_m — единичные симплексы в $\mathbb{R}_n^+, \mathbb{R}_m^+$, соответственно

$$\Delta_n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n^+ \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\},$$

$$\Delta_m = \{y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}_m^+ \mid y_1 + y_2 + \cdots + y_m = 1\}.$$

Для $u = (x, y)$ или $u = (u_x, u_y)$ рассмотрим следующий оператор

$$g(u) := (\nabla_x f(x, y), -\nabla_y f(x, y)),$$

также представимый в виде

$$g(u_x, u_y) = (Ay, -A^T x).$$

Тогда оператор g удовлетворяет неравенству

$$\langle g(u) - g(v), u - w \rangle \leqslant LV(u, v) + LV(w, u), \tag{57}$$

если

$$\|g(u) - g(v)\|_\infty \leqslant L\|u - v\|_1, \tag{58}$$

где

$$L = \max |A_{i,j}|\,. \tag{59}$$

Тогда можно применить следующий алгоритм. Этот алгоритм построен на базе алгоритма 2.

Алгоритм 3

1. $L_0 > 0, \quad u_0 \in \Delta_n \times \Delta_m = Q$
2. $k := k+1, \quad L_{k+1} := \dfrac{L_k}{2}$
3. Вычисляем
$$z_{k+1} := \arg\min_{z\in Q}\{\langle g(u_k), z\rangle + L_{k+1}V(z, u_k)\}$$
$$u_{k+1} := \arg\min_{z\in Q}\{\langle g(z_{k+1}), z\rangle + L_{k+1}V(z, u_k)\}$$
4. Если верно
$$\langle g(z_{k+1}) - g(u_k), z_{k+1} - u_{k+1}\rangle \leqslant L_{k+1}V(z_{k+1}, u_k) + L_{k+1}V(u_{k+1}, z_{k+1}), \tag{60}$$
то переходим к следующей итерации (пункт 2).
5. Если не выполнено (60), то $L_{k+1} := 2 * L_{k+1}$ и переходим к пункту 3.
6. Критерий остановки метода:
$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{L_{k+1}} \geqslant \frac{R^2}{\varepsilon},$$
где $R^2 \geqslant \max\limits_{u\in Q} V(u, u_0)$.

Расшифровка п. 3 листинга алгоритма:

$$\langle g(u_k), z\rangle = \langle \nabla_x f(u_k), z_x\rangle - \langle \nabla_y g(u_k), z_y\rangle, \quad \text{где} \;\; u_k = (u_k^x, u_k^y), \;\; z_k = (z_k^x, z_k^y)$$

$$\begin{cases} z_{k+1}^x := \arg\min\limits_{x\in\Delta_n}\{\langle \nabla_x f(u_k^x, u_k^y), x\rangle + L_{k+1} V(x, u_k^x)\} \\ z_{k+1}^y := \arg\min\limits_{y\in\Delta_m}\{\langle -\nabla_y f(u_k^x, u_k^y), y\rangle + L_{k+1} V(y, u_k^y)\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{k+1}^x := \arg\min\limits_{x\in\Delta_n}\{\langle \nabla_x f(z_{k+1}^x, z_{k+1}^y), x\rangle + L_{k+1} V(x, u_k^x)\} \\ u_{k+1}^y := \arg\min\limits_{y\in\Delta_m}\{\langle -\nabla_y f(z_{k+1}^x, z_{k+1}^y), y\rangle + L_{k+1} V(y, u_k^y)\} \end{cases}$$

Напомним, если $x \in \Delta_n$ для следующей прокс-функции

$$d_{KL}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i$$

и соответствующей ей дивергенции Кульбака-Лейблера

$$V_{KL}(x_2, x_1) = \sum_{i=1}^{n} x_{2,\,i} \ln \frac{x_{2,\,i}}{x_{1,\,i}} \tag{61}$$

в случае выбора следующей начальной точки: $x_0 = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)$, дивергенция Кульбака-Лейблера ограничена:

$$V_{KL}(x, x_0) \leqslant \ln n \qquad \forall\, x \in \Delta_n$$

Тогда используя дивергенцию Кульбака-Лейблера на $\Delta_n \oplus \Delta_m$ соответственно, можно выбрать следующую начальную точку

$$u_0 = (u_0^x, u_0^y) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}, \frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \cdots, \frac{1}{m}\right).$$

Отметим, что R^2 можно выбрать как $\ln n + \ln m$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!