

# 1 Краткие теоретические вопросы по теме "Ряды Фурье"

## 1.1 Как найти коэффициенты равномерно сходящегося тригонометрического ряда по его сумме?

Для функции  $f$  с периодом  $2\pi$  представимой в виде суммы тригонометрического ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  находятся по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

## 1.2 Что такое коэффициенты Фурье по ортонормированной системе в абстрактном векторном пространстве со скалярным произведением? Опишите проекционное свойство частичной суммы ряда Фурье.

Пусть  $\vec{a} \in V$ , где  $V$  унитарное пространство и  $\{\vec{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$  ортонормированная система.

Тогда коэффициентами Фурье по ортонормированной системе  $\{\vec{e}_n\}$  называются числа

$$c_n(\vec{a}) = (\vec{a}, \vec{e}_n)$$

Рассмотрим  $b_n = \sum_{k=1}^n c_k(\vec{a})\vec{e}_k$ . Тогда  $\vec{a} - \vec{b} \perp \vec{b}$ . Это и есть проекционное свойство.

### 1.3 Что такое равенство Парсеваля? Объясните, почему коэффициенты Фурье обязаны убывать.

Из неравенства Бернулли

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i(\vec{a})|^2 \leq \|\vec{a}\|^2$$

по необходимому признаку сходимости ряда следует, что  $c_i(\vec{a}) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i(\vec{a})|^2 = \|\vec{a}\|^2$$

называется уравнением замкнутости или равенством Парсеваля

### 1.4 В чем состоит минимизирующее свойство коэффициентов Фурье?

Пусть  $a \in V$  и  $\{\vec{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$  — произвольная ортонормированная система. Тогда

$$\min_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \Delta(c_1, \dots, c_n),$$

где  $\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \|\vec{a} - \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{e}_k\|^2$  и  $c_k = c_k(\vec{a})$  — коэффициенты Фурье относительно ортонормированной системы  $\{\vec{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$

## 1.5 Что такое ряд Фурье на пространстве $2l$ -периодических функций

Зададим в пространстве непрерывных  $2l$ -периодических функций скалярное произведение

$$(f, g) = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

тем самым превратив его в унитарное. Обозначим его как  $C_{2l}$ .

$e_n : x \mapsto e^{inx}, n \in \mathbb{Z}$ ,  $e_n$  образуют ортонормированную систему. Коэффициенты Фурье относительно этой ортонормированной системы

$$c_n(f) = 1/2l \int_0^{2l} f(x) e^{-inx} dx$$

Ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$$

В предыдущем выражении равенство в смысле среднеквадратичной нормы.

**1.6 Как разложить функцию, заданную на интервале  $(0, l)$ , в ряд по косинусам кратных дуг? по синусам? (Пустой)**

**1.7 Дайте определение свертки периодических функций. Как найти коэффициенты Фурье свертки?**

Пусть  $f$  и  $g$  непрерывные  $2l$ -периодические функции. Сверткой  $f * g$  называется

$$f * g(x) = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(t)g(x - t)dt$$

Свойства  $f * g$

- $f * g$  непрерывная  $2l$ -периодическая функция
- если  $g$  дополнительно  $k$  раз непрерывно дифференцируема, то  $f * g$  — тоже и

$$(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}$$

- $f * g$  билинейна, коммутативна, ассоциативна

Коэффициенты Фурье свертки находятся как произведение коэффициентов Фурье каждой из функций, то есть

$$c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$$

**1.8 Как найти производную свертки, если один из сверточных сомножителей дифференцируем? Как это свойство можно использовать для сглаживания функции?(Не полный)**

Пусть  $f$  и  $g$  непрерывные  $2l$ -периодические функции. Свёрткой  $f * g$  называется

$$f * g(x) = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(t)g(x-t)dt$$

Если  $g$  дополнительно  $k$  раз непрерывно дифференцируема, то  $f * g$  — тоже и

$$(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}$$

**1.9 Что такое фильтр и передаточная функция в теории обработки радиосигналов? Объясните, почему не существует идеального фильтра.**

Отображение  $f \rightarrow f * g$  описывает прохождение сигнала  $f$  через фильтр  $g$ . В результате амплитуда  $c_n(f)$   $n$ -ой гармоники  $f$  умножается на  $c_n(g)$ . В силу леммы Римана-Лебега  $c_n(g) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , значит  $\nexists g : f * g = f$  (не существует фильтра не искажающего сигнал).

### 1.10 Что утверждает лемма Римана-Лебега? Какова ее связь со стремлением коэффициентов Фурье к нулю?

Лемма Римана-Лебега состоит в том, что если  $f(x) \in C[a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x)e^{ikx} dx \rightarrow 0, k \rightarrow 0$$

Заметим, что при  $a = 0$ ,  $b = 2l$ ,  $k = -n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  и  $f(x) \in C_{2l}$

$$\int_a^b f(x)e^{ikx} dx \rightarrow 0 = 2l \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(x)e^{-inx} dx = 2lc_n(f) \rightarrow 0, k \rightarrow 0$$

Значит  $c_n(f) \rightarrow 0, k \rightarrow 0$ , где  $c_n$  — коэффициенты Фурье относительно ортонормированной системы  $e_n$ ,  $e_n : x \mapsto e^{inx}, n \in \mathbb{Z}$

### 1.11 Сформулируйте теорему Дирихле для непрерывно дифференцируемых функций. Почему ряд Фурье сходится к такой функции равномерно?(Не полностью)

Теорема Дирихле состоит в том, что если функция  $f \in C_{2l}^1$ , то ряд Фурье сходится к  $f$  поточечно

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx},$$

где  $x \in \mathbb{R}$  и  $c_n = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(x)e^{-inx} dx$