1 Краткие теоретические вопросы по теме "Ряды Фурье"

1.1 Как найти коэффициенты равномерно сходящегося тригонометрического ряда по его сумме?

Для функции f с периодом 2π представимой в виде суммы тригонометрического ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

коэффициенты a_n и b_n находятся по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \ (n = 0, 1, 2...)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \ (n = 1, 2...)$$

1.2 Что такое коэффициенты Фурье по ортонормированной системе в абстрактном векторном пространстве со скалярным произведением? Опишите проекционное свойство частичной суммы ряда Фурье.

Пусть $\vec{a} \in V$, где V унитарное пространство и $\{\vec{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормированная система.

Тогда коэффициентами Фурье по ортонормированной системе $\{\vec{e_n}\}$ называются числа

$$c_n(\vec{a}) = (\vec{a}, \vec{e_n})$$

Рассмотрим $b_n = \sum_{k=1}^{n} c_k(\vec{a})\vec{e_k}$. Тогда $\vec{a} - \vec{b} \perp \vec{b}$. Это и есть проекционное свойство.

1.3 Что такое равенство Парсеваля? Объясните, почему коэффициенты Фурье обязаны убывать.

Из неравенства Бернулли

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i(\vec{a})|^2 \leq ||\vec{a_n}||^2$$

по необходимому признаку сходимости ряда следует, что $c_i(\vec{a}) \to 0$ при $n \to 0$. Равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i(\vec{a})|^2 \ = ||\vec{a_n}||^2$$

называется уравнением замкнутости или равенством Парсеваля

1.4 В чем состоит минимизирующее свойство коэффициентов Фурье?

Пусть $a \in V$ и $\{\vec{e}_n\}_{n=1}^{n}$ — произвольная ортонормированная система. Тогда

$$\min_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} \Delta(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \Delta(c_1, ..., c_n),$$

где $\Delta(\lambda_1, ..., \lambda_n) = ||\vec{a} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{e_k}||$ и $c_k = c_k(\vec{a})$ — коэффициенты Фурье относительно ортонормированной системы $\{\vec{e}_n\}_{n=1}^{n}$

1.5 Что такое ряд Фурье на пространстве $2l$-периодических функций

Зададим в пространстве непрерывных $2l$-периодических функций скалярное произведение

$$(f, g) = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

тем самым превратив его в унитарное. Обозначим его как C_{2l}.

$e_n : x \mapsto e^{i \frac{\pi}{l} nx}, n \in \mathbb{Z}$, e_n образуют ортонормированную систему Коэффициенты Фурье относительно этой ортонормированной системы

$$c_n(f) = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(x) e^{-i \frac{\pi}{l} nx} dx$$

Ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{i \frac{\pi}{l} nx}$$

В предыдущем выражении равенство в смысле среднеквадратичной нормы.

1.6 Как разложить функцию, заданную на интервале $(0, l)$, в ряд по косинусам кратных дуг? по синусам?(Пустой)

1.7 Дайте определение свертки периодических функций. Как найти коэффициенты Фурье свертки?

Пусть f и g непрерывные $2l$-периодические функции. СвЁрткой $f * g$ называется

$$f * g(x) = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(t) g(x - t) dt$$

Свойства $f * g$

- $f * g$ непрерывная $2l$-периодическая функция
- если g дополнительно k раз непрерывно дифференцируема, то $f * g$ — тоже и
$$(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}$$
- $f * g$ билинейна, комутативна, ассоциативна

Коэффициенты Фурье свертки находятся как произведение коэффициентов Фурье каждой из функций, то есть

$$c_n(f * g) = c_n(f) c_n(g)$$

1.8 Как найти производную свертки, если один из сверточных сомножителей дифференцируем? Как это свойство можно использовать для сглаживания функции?(Не полный)

Пусть f и g непрерывные $2l$-периодические функции. СвЁрткой $f*g$ называется
$$f*g(x)=\frac{1}{2l}\int_0^{2l}f(t)g(x-t)dt$$
Если g дополнительно k раз непрерывно дифференцируема, то $f*g$ — тоже и
$$(f*g)^{(k)}=f*g^{(k)}$$

1.9 Что такое фильтр и передаточная функция в теории обработки радиосигналов? Объясните, почему не существует идеального фильтра.

Отображение $f \to f*g$ описывает прохождение сигнала f через фильтр g. В результате амплитуда $c_n(f)$ n-ой гармоники f умножается на $c_n(g)$ В силу леммы Римана-Лебега $c_n(g)\to 0, n\to\infty$, значит $\nexists g : f*g=f$ (не существует фильтра не искажающего сигнал).

1.10 Что утверждает лемма Римана-Лебега? Какова ее связь со стремлением коэффициентов Фурье к нулю?

Лемма Римана-Лебега состоит в том, что если $f(x) \in C[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)e^{ikx}dx \to 0, k \to 0$$

Заметим, что при $a = 0$, $b = 2l$, $k = -\frac{\pi}{l}n, n \in \mathbb{Z}$ и $f(x) \in C_{2l}$

$$\int_a^b f(x)e^{ikx}dx \to 0 = 2l\frac{1}{2l}\int_0^{2l} f(x)e^{-i\frac{\pi}{l}nx}dx = 2lc_n(f) \to 0, k \to 0$$

Значит $c_n(f) \to 0, k \to 0$, где c_n — коэффициенты Фурье относительно ортонормированной системы e_n, $e_n : x \mapsto e^{i\frac{\pi}{l}nx}, n \in \mathbb{Z}$

1.11 Сформулируйте теорему Дирихле для непрерывно дифференцируемых функций. Почему ряд Фурье сходится к такой функции равномерно?(Не полностью)

Теорема Дирихле состоит в том, что если функция $f \in C^1_{2l}$, то ряд Фурье сходится к f поточечно

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i\frac{\pi}{l}nx},$$

где $x \in \mathbb{R}$ и $c_n = \frac{1}{2l}\int_0^{2l} f(x)e^{-i\frac{\pi}{l}nx}dx$

1.12 Что такое сходимость рядов Фурье в средне-квадратичном? Какова связь такой сходимости с равенством Парсеваля?

Если функция f непрерывна и периодична с периодом $2l$, то ряд Фурье сходится к функции f в среднеквадратичном

$$||f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

где $c_n = \frac{1}{2l}\int_0^{2l} f(x)e^{-i\frac{\pi}{l}nx}dx$ и $e_n = e^{i\frac{\pi}{l}nx}$

Воспользуемся минимизирующим свойством коэффициентов Фурье

$$||f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k|| = ||f|| - \sum_{k=-n}^{n} c_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

откуда получим равенство Парсеваля

$$||f|| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k$$

1.13 Как найти коэффициенты Фурье первообразной функции с нулевым средним?

Пусть f — 2π переодическая функция и $c_0 = 0$ (среднее значение f равно нулю), тогда первообразная $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ тоже 2π периодическая функция и

$$F(x) = \sum_{n\neq 0} c_n \int_0^x e^{int}dt$$

1.14 Что представляет собой ряд Фурье производной? Какова связь между гладкостью функции и скоростью убывания коэффициентов Фурье?

Для 2π периодической k раз непрерывно дифференцируемой функции $f \in C_{2\pi}^{(k)}$

$$c_n(f^k) = (in)^k c_n(f)$$

Чем глаже функция, тем быстрее убывают коэффициенты

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

Обратное тоже верно, но в другой формулировке:
Если

$$c_n = \frac{\sigma_n}{n^{k+1}},$$

где

$$\{\sigma_n\} : \sum |\sigma_n|^2 - \text{сходится}$$

то $f \in C_{2\pi}^k$