1 Ряды и интегралы Фурье. Интеграл Фурье.

1.1 Что такое преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции? Опишите его основные свойства.

Для абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ справедливо равенство

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\xi(x-t)} dt$$

Правая часть равенства называется интегралом Фурье.
Это выражение можно разделить на две части. Например, в симметричном варианте

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

Преобразованием Фурье функции f называется функция $\widehat{f}$

Преобразованием (или оператором) Фурье называется отображение

$$F : f \to \widehat{f} = Ff, \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

Свойства преобразования Фурье функции f:

1. $\widehat{f}(\xi)$ – отграниченная функция
2. $\widehat{f}(\xi)$ – равномерно непрерывная функция
3. $\widehat{f}(\xi) \underset{\xi\to\infty}{\longrightarrow} 0$

1.2 Сформулируйте теорему об обращении преобразования Фурье.

Если f – абсолютно интегрируемая функция, то имеет место формула обращения (обратное преобразование Фурье)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

1.3 Что представляет собой равенство Парсеваля для преобразования Фурье? Дайте примеры.

Равенство Парсеваля состоит в том, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx$$

Для равенства Парсеваля достаточно квадратичной интегрируемости функций

1.4 Как найти преобразование Фурье производной? Какова связь между гладкостью функции и скоростью убывания ее преобразования Фурье на бесконечности?

$$F\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)(\xi) = (i\xi)^n \widehat{f}(\xi)$$

1.5 Как найти преобразование Фурье произведения функции на аргумент? Какова связь между скоростью убывания функции на бесконечности с гладкостью ее преобразования Фурье?

$$F\left(x^n f\right)(\xi) = i^n \frac{d^n \widehat{f}(\xi)}{d\xi^n}$$

1.6 Дайте определение свёртки функций на оси. Чему равно преобразование Фурье свертки.

Свёрткой на оси называется интеграл

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

Если f и g – непрерывны, абсолютно и квадратично интегрируемы, то свёртка $f * g$ абсолютно интегрируема и

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$$

1.7 Что такое гауссова плотность? Чему равно преобразование Фурье гауссовой плотности?

1.8 Асимптотика состояния свободной нерялитивисткой квантовой частицы на больших временах.

2 Элементы геометрии поверхностей

3 Вариационное исчисление. Простейшие задачи вариационного исчисления

3.1 Что такое интегральный функционал и его производная? Что такое вариация интегрального функционала?

Интегральный функционал – отображение

$$I : y \to I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$$

Производная интегрального функционала называется вариацией

$$\delta I[\eta] = \frac{d}{dt} I(y + t\eta)\bigg|_{t=0}$$

3.2 Сформулируйте основную лемму вариационного исчисления. Опишите идею ее доказательства.

Пусть $G(x) \in C[x_1, x_2]$, и для любой η, такой что $\eta(x) \in C^{(1)}[x_1, x_2]$, $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ выполнено

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)G(x)dx = 0$$

то $G(x) \equiv 0$ на интервале $[x_1, x_2]$

Доказательство ведётся от противного.
Пусть $\exists x_0 \in (x_1, x_2) : G(x_0) > 0$. Тогда в силу непрерывности $G(x)$ $\exists (a, b) \subset (x_1, x_2) : \forall x \in (a, b) \quad G(x > 0)$

Зададим η следующим образом

$$\eta = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & x \in (a, b) \\ 0 & x \notin (a, b) \end{cases}$$

η имеет непрерывную производную и $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$

Но

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)G(x)dx = \int_a^b (x-a)^2(x-b)^2G(x)dx > 0$$

Получили противоречие

3.3 Что такое уравнение Эйлера-Лагранжа? Как оно получается?

Пусть $y(x)$ минимизирует интеграл

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$$

и $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$

Пусть $Y(x) = y(x) + t\eta(x)$, где $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.
Заменим в I $y(x)$ на $Y(x)$ и $y'(x)$ на $Y'(x)$ и зафиксируем функцию $\eta(x)$. Тогда

$$I(t) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y, Y')dx$$

Задача свелась к нахождению минимума $I(t)$. Минимум достигается при $y(x) = Y(x)$, т.е. при $t = 0$. Таким образом получаем, что $I'(0) = 0$

$$\frac{dI}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial Y}\eta + \frac{\partial F}{\partial Y'}\eta' dx$$

Воспользуемся тем, что $I'(0) = 0$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' dx = 0$$

Проинтегрировав второе слагаемое по частям получим

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta dx = 0$$

В силу основной леммы

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \text{ – Уравнение Эйлера-Лагранжа}$$

3.4 Что такое экстремали? Что называется вариационной производной? Почему?

Экстремалями называются решения уравнения Эйлера-Лагранжа

Рассмотрим первую вариацию функционала

$$I'(0) = \delta I[\eta] = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx$$

пологая $\eta = \delta y$

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx$$

δI линейно зависит от δy. По аналогии с производной по Фрише вариационной производной функционала I называют

$$\frac{\delta I}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}$$

3.5 Пусть функция Лагранжа $F(x, y, y')$ не зависит от переменной x. Что представляет собой первый интеграл уравнения Эйлера-Лагранжа? Почему?

$F = F(y, y')$

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F \right) = y'' \frac{\partial F}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} y' - \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = -y' \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right)$$

В случае экстремали предыдущее выражение равно 0, значит

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F \right) = 0$$

$$y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F = C$$

Предыдущее равенство называется первым интегралом уравнения Эйлера-Лагранжа

3.6 Что такое геодезические? Как ставится соответствующая вариационная задача? Как она решается в случае ортогональных локальных координат при условии, что коэффициенты первой квадратичной формы зависят лишь от одной из переменных?

Пусть поверхность задана уравнением $g(x, y, z) = 0$.

Кривая минимальной длины, соединяющая заданные точки называется геодезической

Пусть элемент поверхности $dS = P(u,v)(du)^2 + 2Q(u,v)dudv + R(u,v)(dv)^2$. Зафиксируем на поверхности точки $P_1(u_1, v_1)$ и $P_2(u_2, v_2)$.

Рассмотрим кривую $v = v(u)$. Её длина

$$I = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{P + 2Qv' + Rv'^2} du$$

При $Q = 0$ (условие ортогональности), $P = P(v)$, $R = R(v)$ функция Лагранжа не зависит от u

$$v' \frac{Rv'}{\sqrt{Rv'^2 + P}} - \sqrt{Rv'^2 + P} = C$$

$$v = C \int \frac{\sqrt{R} dv}{\sqrt{P^2 - C^2 P}}$$

3.7 Что такое естественные граничные условия? В каких вариационных задачах они возникают?

Задача со свободными концами: найти экстремали

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

удовлетворяющие граничному условию $y(x_1) = y_1$

Для такой задачи естественные граничные условия на правом конце

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{x = x_2} = 0$$

4 Вариационное исчисление. Обобщения, приложения и трансверсальность

4.1 Выпишите уравнения Эйлера-Лагранжа в случае нескольких функций. Как они получаются?

Пусть

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, ..., z, y', ..., z') dx$$

минимизируют функции $y, ..., z$

Введём

$$Y = y + t\eta, ..., Z = z + t\xi$$

и заменим в I y на Y,..., z на Z, тем самым сведём задачу к поиску минимума функции $I(t)$ одной переменной. Минимум достигается при $I'(0) = 0$.

Далее, аналогично случаю с одной функцией, с учётом того, что $\eta, ..., \xi$ независимы, положим все переменные кроме η равными нулю. Получим, что

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

Аналогично для остальных функций.

В итоге придём к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0 \end{cases}$$

4.2 Сформулируйте принцип наименьшего действия в лагранжевой механике. Что представляют собой уравнения Эйлера -Лагранжа, если кинетическая энергия равна $T = \frac{m(x'^2+y'^2+z'^2)}{2}$, а потенциальная $U = U(x, y, z)$?

Рассмотрим систему N частиц. Кинетическая энергия

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i(\dot{x_i}^2 + \dot{y_i}^2 + \dot{z_i}^2)}{2}$$

Потенциальная

$$U = U(x_1, ..., z_n)$$

Пусть система может находиться лишь на некоторой фиксированной поверхности, заданной l голономными связями. Введём на этой поверхности локальные координаты $q_1, ..., q_{k=3N-l}$, называемых обобщёными. Тогда $T = T(q_1, ..., q_k, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_k)$ и $U = U(q_1, ..., q_k)$.

Принцип наименьшего действия (принцип Гамильтона): действительным положением системы на временном интервале $[t_1, t_2]$ является экстремаль функционала

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, ..., q_k, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_k)dt,$$

где $L = T - U$

Так как L не зависит от времени явно можно воспользоваться первым интегралом уравнения Эйлера-Лагранжа. Получим закон сохранения полной энергии $T + U =$ const

4.3 Выпишите уравнение Эйлера-Лагранжа для экстремалей двойных интегралов. Как оно выводится?

$$I = \iint_D F(x, y, z, z'_x, z'_y)dxdy$$

Пусть $z(x, y)$ минимизирует интеграл I.
$Z(x, y) = z(x, y) + t\xi(x, y), \qquad \xi(x, y)|_{\partial D} = 0$
Заменим z на Z в I, условие экстремальности $I'(0) = 0$

$$I'(0) = \iint_D \left(\frac{\partial F}{\partial z}\xi + \frac{\partial F}{\partial z'_x}\xi'_x + \frac{\partial F}{\partial z'_y}\xi'_y\right) dxdy = 0$$

Рассмотрим интеграл

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_x}\xi\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_x}\xi\right)\right) dxdy$$

С одной стороны

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_x}\xi\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_x}\xi\right)\right) dxdy = \oint_{\partial D} \left(\frac{\partial F}{\partial z'_x}\xi dy - \frac{\partial F}{\partial y'_x}\xi dx\right) = 0$$

В предыдущем выражении воспользовались формулой Грина и нулевыми граничными условиям ξ. С другой

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'_x}\xi\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_x}\xi\right)\right) dxdy =$$
$$= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z'_x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y'_x}\right)\xi dxdy + \iint_D \left(\frac{\partial F}{\partial z'_x}\xi'_x + \frac{\partial F}{\partial z'_y}\xi'_y\right) dxdy$$

Таким образом получим

$$\iint_D \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z'_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y'_x}\right)\xi dxdy = 0$$

В силу основной леммы

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z'_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y'_x} = 0$$

4.4 Что представляет собой волновое уравнение? Дайте его интерпретацию как уравнения Эйлера-Остроградского.

Пусть струна плотности ρ натянута вдоль оси x (натяжение τ) и совершает колебания в плоскости xu перпендикулярно оси x. Тогда колебания $u(x, t)$ струны удовлетворяют волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, a = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

4.5 Как ставится изопериметрическая задача? Как она сводится к задаче на условный экстремум функции нескольких переменных?

Изопериметрическая задача ставится ставится следующим образом. Пусть кривая $y = y(x)$ с фиксированными концами $y(x_{1,2}) = y_{1,2}$ минимизирует интеграл

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$$

причём интеграл

$$J = \int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y')dx$$

обладает заранее заданным значением. Какому дифференциальному уравнению должна удовлетворять y?

4.6 Как ставится задача Лагранжа? В чем отличие голономных связей от неголономных? Что такое множители Лагранжа в случае задачи Лагранжа, в чем их отличие от множителей Лагранжа для изопериметрической задачи?

Задача Лагранжа ставится следующим образом. Найти минимизирующие функции $y_1, ..., y_n$ интеграла

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n')dx$$

при условии, что

$$\begin{cases} G_1(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n') = 0 \\ \vdots \\ G_k(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n') = 0 \end{cases}$$

$k < n$.

Уравнения $G_1, ...G_k$ называются уравнениями связей. Связи называются голономными если их уравнения не зависят от производных.

Существуют функции $\lambda_1(x), ..., \lambda_k(x)$, называемые множителями Лагранжа, такие, что решения задачи Лагранжа являются экстремалями функционала

$$J = \int_{x_1}^{x_2} (F - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i G_i)dx$$

В случае изопериметрической задачи множители Лагранжа являются константами.

4.7 Рассмотрите задачу о геодезических на поверхности как задачу Лагранжа. Как это позволяет охарактеризовать геодезические?

Задача отыскания геодезических в виде задачи Лагранжа: найти наименьшее значение интеграла

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$$

при условии, что $G(x, y, z) = 0$.

Сведём её, по правилу множителей Лагранжа, к задаче на безусловный экстремум функционала

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} - \lambda G\right) dx$$

решая которую придём к тому, что главные нормали к геодезическим совпадают с нормалями к поверхности.

4.8 Что такое условие трансверсальности? Каков его геометрический смысл?

Пусть в задаче со свободными концами на экстремали интеграла

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$$

где x_2 определён как точка пересечения $y(x)$ с заданной кривой $\varphi(x, y) = 0$.

Уравнение

$$\left.\left(\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y} F}{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y' \frac{\partial \varphi}{\partial y}}\right)\right|_{x = x_2} = 0$$

называется условием трансверсальности.

Для функции F вида $F(x, y, z) = H(x, y)\sqrt{1 + z^2}$ и $\varphi = g(x) - y$ (кривая свободного конца задана явно) условие трансверсальности упростится до вида

$$g'y' = -1,$$

что является условием ортогональности экстремали и кривой свободного конца.

4.9 Сформулируйте принцип Ферма в геометрической оптике. Что представляет собой трансверсальность в геометрической оптике. Почему?

Принцип Ферма состоит в том, что свет идёт по пути, которому соответствует наименьшее время распространения. Этот принцип требует минимума функционала времени

$$t = \int_\gamma \frac{ds}{v}$$

на пути γ светового луча. ds – элемент дуги, v – скорость света.

4.10 Выпишите первое необходимое условие. Что отличает его от уравнения Эйлера-Лагранжа?

Первое необходимое условие

$$\frac{\partial F}{\partial y'} - \int_{x_1}^{x} \frac{\partial F}{\partial y} dx = \mathrm{const}$$

4.11 Выпишите условие Вейерштрасса-Эрдмана (на изломе). Какое заключение оно позволяет сделать в случае функционалов геометрической оптики?

Для каждого значения x_0 , соответствующего угловой точке минимизирующей кривой $y = y(x)$, правый и левый пределы функции

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \equiv F'_{y'}(x, y, y')$$

совпадают:

$$F'_{y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0+0)) = F'_{y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0-0))$$

Из этого условия, например, следует, что для задач в которых функция F имеет вид $F = H(x,y)\sqrt{1+y'^2}$, минимизирующая функция не имеет угловых точек. В частности в геометрической оптике, где функционал времени

$$t = \int_\gamma \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{v(y)} \sqrt{1+y'^2}$$

5 Вариационное исчисление. Гамильтонова механика и поля экстремалей

5.1 Что понимается под инвариантностью интегрального функционала? Сформулируйте теорему НЁтер. Прокомментируйте с ее помощью закона сохранения энергии.

$$I\left[u\right] = \int_a^b \left(\vec{x}, \vec{u}, \nabla \vec{u}\right) dx$$

По определению функционал I инвариантен относительно движения со скоростью $\vec{s} = (\vec{a}, \vec{b})$ в плоскости $(\vec{x}, \vec{u})$, если:

$$\frac{d}{dt} I[u_t] \equiv 0$$

$$\frac{d(x,u)}{dt} = s$$

Теорема Нётер. Если I инвариативен относительно движения со скоростью $\vec{s} = (\vec{a}, \vec{b})$, то вдоль экстремали

$$(-H, \vec{p}) \cdot \vec{s} = const$$

или

$$\frac{d}{dt} J[\Gamma_t] = 0$$

где Γ_t – экстремаль. Если учесть это в условии трансверсальности, получим:

$$\int_{D_t} \vec{n} \left[F\vec{a} + (\vec{b} - \vec{a} \times \nabla u) \frac{\partial F}{\partial \nabla u} \right] dS = 0$$

Стянув D_t в точку, получим

$$\operatorname{div} \left[F\vec{a} + (\vec{b} - \vec{a} \times \nabla u) \frac{\partial F}{\partial \nabla u} \right] d\vec{x} = 0$$

это и есть закон сохранения энергии, ассоциированный с инвариативностью функционала I.

5.2 Опишите функцию Гамильтона как преобразование Лежандра. Что такое условие регулярности? Что такое инволютивность преобразования Лежандра? Что такое канонический вид уравнений Эйлера–Лагранжа?

Преобразованием Лежандра называется отображение

$$F(x,y,z) \to H(x,y,p) = pz - F(x,y,z),$$

где

$$z = P(x,y,p) \text{ и } p = F'_z(x,y,z),$$

при условии $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \neq 0$

Применяя это преобразование дважды, получим тождественное преобразование, т.е. преобразования Лежандра инволютивно.

Преобразование Лежандра функции $F(x, y, y')$ ведёт к функции Гамильтона

$$H(x, y, p) = pP - F(x, y, P), \text{ где } y' = P(x, y, p),\ p = F'_{y'}(x, y, y')$$

при условии

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \neq 0,$$

называемом условием регулярности.

Канонический вид уравнений Эйлера–Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y} \end{cases}$$

5.3 Дайте определение поля экстремалей. Какое поле называется центральным? Объясните, как вложение экстремали в поле помогает в определении характера этой экстремали.

Полем экстремалей называется семейство экстермалей, явлющихся решением дифференциального уравнения

$$y' = z(x, y)$$

Если семейство экстремалей имеют общую начальную точку, то такое семейство – центральное.
Говорят, что экстремаль $y = y(x)$ вложена в поле экстремалей, если область определения соответствующего поля направлений является окрестностью графика данной экстремали и функция $y(x)$ является решением дифференциального уравнения этого поля.

5.4 Дайте определение функция поля. Какому дифференциальному уравнению она подчиняется? Объясните, как по частному решению уравнения Гамильтона–Якоби можно построить поле экстремалей?

Функция поля определяется равенством

$$S(t, q) = \int^{(t,q)} [L - \langle f | \nabla_f L \rangle] dt + \langle \nabla_f L | dq \rangle = \int^{(t,q)} \langle p | dq \rangle - H dt, \quad p = (p_1, \dots, p_2)$$

где f – функция наклона поля экстремалей.
Функции p_i сложные

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad L = L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n), \quad \dot{q}_i = f_i$$

При этом

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H, \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p$$

Это приводит к уравнению Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) = 0$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, \nabla_q S) = 0$$

Если $S(t, q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – n-параметрическое семейство решений уравнения Гамильтона–Якоби, то в условиях регулярности и при условии

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j}\right) \neq 0$$

решение $q = q(t)$ системы

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

при любых фиксированных значениях параметров α_i и β_i является экстремалью функционала I.

6 Вариационное исчисление. Уравнение Якоби, сопряженные точки.

6.1 Дайте определение второй вариации. Что представляет собой уравнение Якоби. Что означает, что оно является уравнением в вариациях по отношению к уравнению Эйлера –Лагранжа?

Вторая вариция интегрального функционала:

$$\delta^2 I[\eta] = \frac{d^2}{dt^2} I(y + t\eta)\Big|_{t=0}$$

$$\delta^2 I[\eta] = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\eta^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\eta\eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial {y'}^2}{\eta'}^2\right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[A\eta^2 + B\eta'^2\right] dx,$$

где

$$A = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right)$$

$$B = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}$$

Уравнение Якоби:

$$A\eta - \frac{d}{dx}\left(B\eta'\right) = 0,$$

где функция η удовлетворяет граничным условиям:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

Если уравнение $y(x, \lambda)$ удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению (например, $f(x, y, y', y'') = 0$), то производная по параметру $\eta = y'_\lambda$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta' + \frac{\partial f}{\partial y''}\eta'' = 0,$$

которое называется уравнением в вариациях. Уравнение Якоби представляет из себя уравнение в вариациях по отношению к уравнению Эйлера–Лагранжа.
Уравнение Э.-Л.:

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$$

Коэффициенты Якоби:

$$A = F_{yy} - F_{xyy'} - F_{yyy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$$

$$B = F_{y'y'}$$

$$\frac{dB}{dx} = F_{xy'y'} + F_{yy'y'}y' + F_{y'y'y'}y''$$

Тогда уравнение в вариациях сводится к уравнению Якоби:

$$A\eta - \frac{dB}{dx}\eta' - B\eta'' = 0$$

6.2 Дайте определение сопряженной точки. Опишите геометрический смысл ее существования. Что такое каустика? Почему экстремаль с сопряженной точкой не может доставлять экстремум функционалу?

Точка (x_0, y_0), на экстремали $y(x)$ (т. е. $y_0 = y(x_0)$) называется сопряженной с точкой (x_1, y_1) (началом экстремали), если уравнение Якоби имеет решение η, обращающееся в ноль в точке x_0, но не равное нулю тождественно на интервале $[x_1, x_0]$.

Центральным называется семейство экстремалей с общей начальной точкой. Точка касания экстремали и огибающей данного центрального семейства называется точкой, сопряженной с начальной точкой экстремали. Это и сводится к геометрическому смыслу ее существования

Огибающая семейства лучей называется каустикой.

Экстремаль с сопряженной точкой не может доставлять экстремум функционалу, так как это бы противоречило необходимому условию Якоби (экстремаль удовлетворяет условию Якоби, если между началом и концом этой экстремали нет точек, сопряженных с начальной).

7 Вариационное исчисление. Прямые методы.

7.1 Дайте вариационное описание собственных значений задачи Штурма–Лиувилля. Объясните рост собственных значений.

Задача на минимум функционала

$$I[y] = \int_a^b [p(x)y'^2(x) + q(x)y^2(x)]dx$$

на множестве дважды непрерывно дифференцируемых вещественнозначных функций $y(x)$, удовлетворяющих условиям

$$y(a) = y(b) = 0$$

$$\int_a^b y^2(x)dx = 1$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа для этой изопериметрической задачи имеет вид

$$qy - (py')' - \lambda y = 0$$

Тогда пара (λ, y) является собственным значением и собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля с условием Дирихле.

$$L[y] = qy - (py')'$$

Положим по определению

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f\overline{g}dx$$

$$||f|| = \sqrt{\langle y|y\rangle}$$

Связь квадратичного функционала $I[y]$ и оператора $L[y]$:

$$I[y] = \int_a^b [py'^2 + qy^2]dx = \int_a^b [-(py')'y + qy^2]dx = \int_a^b L[y]ydx = \langle L[y]|y\rangle$$

Пусть по опрделению

$$K(f,g) = \int_a^b [pf'g'qfg]dx$$

Этот функционал билинейный. Тогда

$$I[y] = K(y,y)$$

и

$$I(y+\eta) = I(y) + I(\eta) + 2K(y,\eta)$$

и для функций, удовлетворяющих нулевым граничным условиям

$$K(f,g) = \int_a^b [-(pf')' + qf]gdx = \langle L[f]|g\rangle$$

верны следующие свойства:

1. Если λ – собственное значение, отвечающее нормированной собственной функции y оператора L, то
$$I[y] = \lambda$$
2. Если y собственная функция оператора L, а z – ортогональна к y, то
$$K(y,z) = 0$$

Все собственные значения оператора Штурма–Лиувилля L могут быть расположены в возрастающую бесконечную последовательность.
Предположим, что все собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, соответствующие собственным функциям $y_1, \dots, y_{n-1}$ определены. Решение задачи на минимум функционала $I[y]$ существует и является непрерывно дифференцируемой функцией. Эта минимизирующая функция, согласно с теорией изопериметрических задач, является безусловной экстремалью функционала

$$J = \int a^b [py'^2 + qy'^2 - \mu y^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i y_i y]dx$$

где μ и $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ – множители Лагранжа.
Уравнение Эйлера

$$2qy - 2\mu y - \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i y_i - (py')' = 0$$

принимает вид

$$L[y] = \mu y + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} \nu_i y_i$$

Умножая это равенство на y_j, (j<n) и интегрируя, находим

$$0 = K(y, y_j) = \langle L[y]|y_j\rangle = \mu\langle y|y_j\rangle + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} \nu_i\langle y_i|y_j\rangle = \frac{\nu_j}{2}$$

Так как все множители ν_j равны нулю, уравнение Эйлера превращется в уравнение Штурма–Лиувилля

$$L[y] = \mu y$$

функция y собственная и

$$I[y] = \mu$$

Таким образом, μ наименьшее значение интеграла I. Тогда $\lambda_n \geq \mu$ и тогда $\lambda_n = \mu$. Обратившись к методу математической индукции, можно придти к выводу о росте собственных значений.

7.2 В чем заключается минимаксное свойство собственных значений? Объясните, как это позволяет сделать вывод о росте собственных значений к бесконечности.

Пусть μ – минимум интеграла $I[y]$ при условиях

$$\int_a^b y^2 dx = 1, \quad \int_a^b z_i y dx = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

где $z_1, \ldots, z_{n-1}$ – произвольные фиксированные непрерывно дифференцируемые функции.
Тогда

$$\mu \leq \lambda_n$$

где λ_n – собственные значения оператора Штурма–Лиувилля, ассоциированного с квадратичным функционалом $I[y]$.
Последовательность собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля стремится к бесконечности: $\lambda_n \to +\infty$.
Положим

$$p_1 = minp(x), \quad q_1 = minq(x), \quad p_2 = maxp(x), q_2 = maxq(x)$$

и определим функционалы

$$I_j[y] = \int_a^b [p_i y'^2 + q_i y^2] dx \quad (j = 1, 2)$$

Задачи Штурма–Лиувилля для этих функционалов

$$-p_j y'' + q_j y - \lambda y = 0, \quad y(a) = y(b) = 0$$

Решая задачу, получаем собственные значения $\lambda_n(j)$

$$\lambda_n(j) = \frac{\pi^2 n^2 p_j}{(b-a)^2} + q_j$$

Тогда оценка для собственных значений

$$\frac{\pi^2 n^2 p_1}{(b-a)^2} + q_1 \leq \lambda_n \geq \frac{\pi^2 n^2 p_2}{(b-a)^2} + q_2$$

Таким образом, λ_n расходятся к бесконечности.

8 Дифференциальные уравнения

8.1 Что такое автономные системы дифференциальных уравнений на плоскости? Что представляет собой фазовый портрет такой системы?

Автономная системы дифференциальных уравнений на плоскости имеет вид

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

Решением этой системы интегральная кривая

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

А её проекция на фазовую плоскость (плоскость (x, y)) называется фазовой кривой. Фазовый портрет – всё семейство фазовых кривых

8.2 Что такое гамильтоновы системы на плоскости? Какие их свойства Вам известны?

Гамильтонова система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

где $H = H(x, y)$

Свойства

- Закон сохранения для автономной Гамильтоновой системы: $H = \mathrm{const}$
- Теорема Лиувилля: фазовый объём сохраняется