

# 1 Краткие теоретические вопросы по теме "Ряды Фурье"

## 1.1 Как найти коэффициенты равномерно сходящегося тригонометрического ряда по его сумме?

Для функции  $f$  с периодом  $2\pi$  представимой в виде суммы тригонометрического ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  находятся по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

## 1.2 Что такое коэффициенты Фурье по ортонормированной системе в абстрактном векторном пространстве со скалярным произведением? Опишите проекционное свойство частичной суммы ряда Фурье.

Пусть  $\vec{a} \in V$ , где  $V$  унитарное пространство и  $\{\vec{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$  ортонормированная система. Тогда коэффициентами Фурье по ортонормированной системе  $\{\vec{e}_n\}$  называются числа

$$c_n(\vec{a}) = (\vec{a}, \vec{e}_n)$$

Рассмотрим  $b_n = \sum_{k=1}^n c_k(\vec{a}) \vec{e}_k$ . Тогда  $\vec{a} - \vec{b} \perp \vec{b}$ . Это и есть проекционное свойство.

## 1.3 Что такое равенство Парсеваля? Объясните, почему коэффициенты Фурье обязаны убывать.

Из неравенства Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(\vec{a})|^2 \leq \|\vec{a}\|^2$$

по необходимому признаку сходимости ряда следует, что  $c_n(\vec{a}) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .  
Равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(\vec{a})|^2 = \|\vec{a}\|^2$$

называется уравнением замкнутости или равенством Парсеваля

## 1.4 В чем состоит минимизирующее свойство коэффициентов Фурье?

Пусть  $a \in V$  и  $\{\vec{e}_n\}_{n=1}^n$  — произвольная ортонормированная система.  
Тогда

$$\min_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \Delta(c_1, \dots, c_n),$$

где  $\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \|\vec{a} - \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{e}_k\|$  и  $c_k = c_k(\vec{a})$  — коэффициенты Фурье относительно ортонормированной системы  $\{\vec{e}_n\}_{n=1}^n$

## 1.5 Что такое ряд Фурье на пространстве $2l$ -периодических функций

Зададим в пространстве непрерывных  $2l$ -периодических функций скалярное произведение

$$(f, g) = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

тем самым сделав его унитарным. Обозначим это пространство как  $C_{2l}$ .

$e_n : x \mapsto e^{i\frac{\pi}{l}nx}, n \in \mathbb{Z}$ ,  $e_n$  образуют ортонормированную систему Коэффициенты Фурье относительно этой ортонормированной системы

$$c_n(f) = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(x) e^{-i\frac{\pi}{l}nx} dx$$

Ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{i\frac{\pi}{l}nx}$$

В предыдущем выражении равенство в смысле среднеквадратичной нормы.

## 1.6 Как разложить функцию, заданную на интервале $(0, l)$ , в ряд по косинусам кратных дуг? по синусам?

Воспользуемся в этом вопросе вещественной формой ряда Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}$$

и коэффициенты запишем в симметричной форме

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Далее для нахождения разложения на интервале  $(0, l)$  можно продолжить функцию периодически на всю ось с периодом  $T = l$  тогда получится ряд содержащий и синусы, и косинусы. Если же предварительно продолжить функцию чётно(нечётно) относительно нуля на интервал  $(-l, l)$  и затем периодически  $T = 2l$ , то в ряду останутся слагаемые только с косинусами(синусами), так как при вычислении коэффициента  $b_n$  ( $a_n$ ) будет интегрироваться нечётная функция по симметричному интервалу.

Аналогично для получения разложения косинусам (синусам) кратных дуг нужно перед чётным(нечётным) продолжением относительно 0 продолжить функцию чётно/нечётно (в зависимости от того какие кратности дуг нужны (см. таблицу ниже)) относительно  $l$ .

| Продолж. относ. 0 | Продолж. относ. $l$ | Тип разложения        |
|-------------------|---------------------|-----------------------|
| Чётно             | Чётно               | Косинусы чётных дуг   |
| Чётно             | Нечётно             | Косинусы нечётных дуг |
| Нечётно           | Чётно               | Синусы нечётных дуг   |
| Нечётно           | Нечётно             | Синусы чётных дуг     |

## 1.7 Дайте определение свертки периодических функций. Как найти коэффициенты Фурье свертки?

Пусть  $f$  и  $g$  непрерывные  $2l$ -периодические функции. Свёрткой  $f * g$  называется

$$f * g(x) = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(t)g(x - t)dt$$

Свойства  $f * g$

- $f * g$  непрерывная  $2l$ -периодическая функция
- если  $g$  дополнительно  $k$  раз непрерывно дифференцируема, то  $f * g$  — тоже и

$$(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}$$

- $f * g$  билинейна, коммутативна, ассоциативна

Коэффициенты Фурье свертки находятся как произведение коэффициентов Фурье каждой из функций, то есть

$$c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$$

## 1.8 Как найти производную свертки, если один из сверточных сомножителей дифференцируем? Как это свойство можно использовать для сглаживания функции?

Пусть  $f$  и  $g$  непрерывные  $2l$ -периодические функции. Свёрткой  $f * g$  называется

$$f * g(x) = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(t)g(x - t)dt$$

Если  $g$  дополнительно  $k$  раз непрерывно дифференцируема, то  $f * g$  — тоже и

$$(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}$$

Множество функций  $C_{2l}^1$  плотно в  $C_{2l}$ , то есть

$$\forall f(x) \in C_{2l} \text{ и } \forall \varepsilon > 0 \exists g(x) \in C_{2l}^1 : \max_{x \in [0, 2l]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Задача нахождения сглаженной функции состоит в получении  $g(x)$ .

Возьмём сглаживающую функцию  $\omega(x)$  обладающую следующими свойствами:

- $\omega(x) \in C_{2l}^1$
- $\omega(x) \geq 0$
- $\omega(-x) = \omega(x)$
- $\omega(-x) = 0, \forall x \in [\delta, 2l]$
- $\frac{1}{2l} \int_0^{2l} \omega(x)dx = 1$

Тогда в качестве  $g(x)$  можно использовать свёртку  $f * \omega$ , что следует из свойства производной свёртки

### 1.9 Что такое фильтр и передаточная функция в теории обработки радиосигналов? Объясните, почему не существует идеального фильтра.

Отображение  $f \rightarrow f * g$  описывает прохождение сигнала  $f$  через фильтр  $g$ . В результате амплитуда  $c_n(f)$   $n$ -ой гармоники  $f$  умножается на  $c_n(g)$ .

В силу леммы Римана-Лебега  $c_n(g) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , значит  $\nexists g : f * g = f$  (не существует фильтра не искажающего сигнал).

Передаточной называется функция отношения выходного сигнала к входному, то есть передаточная функция  $W(x) = \frac{f * g(x)}{f(x)}$

### 1.10 Что утверждает лемма Римана-Лебега? Какова ее связь со стремлением коэффициентов Фурье к нулю?

Лемма Римана-Лебега состоит в том, что если  $f(x) \in C[a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) e^{ikx} dx \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

Заметим, что при  $a = 0, b = 2l, k = -\frac{\pi}{l}n, n \in \mathbb{Z}$  и  $f(x) \in C_{2l}$

$$\int_a^b f(x) e^{ikx} dx = 2l \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(x) e^{-i\frac{\pi}{l}nx} dx = 2lc_n(f) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Значит  $c_n(f) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , где  $c_n$  — коэффициенты Фурье относительно ортонормированной системы  $e_n, e_n : x \mapsto e^{i\frac{\pi}{l}nx}, n \in \mathbb{Z}$

### 1.11 Сформулируйте теорему Дирихле для непрерывно дифференцируемых функций. Почему ряд Фурье сходится к такой функции равномерно?

Теорема Дирихле состоит в том, что если функция  $f \in C_{2l}^1$ , то ряд Фурье сходится к  $f$  поточечно

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\frac{\pi}{l}nx},$$

где  $x \in \mathbb{R}$  и  $c_n = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(x) e^{-i\frac{\pi}{l}nx} dx$

Так как

$$c_n(f) = \frac{c_n(f')}{i\frac{\pi}{l}n}$$

и

$$\left| \frac{c_n(f')}{n} \right| \leq \left| \frac{|c_n(f')|^2 + \frac{1}{n^2}}{2} \right|$$

В предыдущем неравенстве было использовано, что среднее геометрическое меньше среднего арифметического ( $|\frac{a}{b}| = \sqrt{a^2 \cdot b^{-2}} \leq \frac{a^2 + b^{-2}}{2}$ ).

$$|c_n(f)| \leq \left| \frac{c_n(f')}{\frac{\pi}{l}n} \right| \leq \left| \frac{|c_n(f')|^2 + \frac{1}{(\frac{\pi}{l}n)^2}}{2} \right|$$

Ряд  $\sum |c_n(f')|^2$  сходится в силу неравенства Бесселя,  $\sum 1/n^2$  сходится. Значит сходится и  $\sum |c_n(f)|$ . Ряд Фурье функции  $f$  сходится к своей сумме равномерно, а его сумма —  $f(x)$ .

## 1.12 Что такое сходимость рядов Фурье в среднеквадратичном? Какова связь такой сходимости с равенством Парсеваля?

Если функция  $f$  непрерывна и периодична с периодом  $2l$ , то ряд Фурье сходится к функции  $f$  в среднеквадратичном

$$\|f - \sum_{k=-n}^n c_k e_k\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

где  $c_n = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(x) e^{-i\frac{\pi}{l}nx} dx$  и  $e_n = e^{i\frac{\pi}{l}nx}$

Воспользуемся минимизирующим свойством коэффициентов Фурье

$$\|f - \sum_{k=-n}^n c_k e_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

откуда получим равенство Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$$

## 1.13 Как найти коэффициенты Фурье первообразной функции с нулевым средним?

Пусть  $f$  —  $2\pi$  периодическая функция и  $c_0 = 0$  (среднее значение  $f$  равно нулю), тогда первообразная  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  тоже  $2\pi$  периодическая функция и

$$F(x) = \sum_{n \neq 0} c_n \int_0^x e^{int} dt = \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx}$$

Таким образом

$$c_n(F) = \frac{c_n(f)}{in}$$

### 1.14 Что представляет собой ряд Фурье производной? Какова связь между гладкостью функции и скоростью убывания коэффициентов Фурье?

Для  $2\pi$  периодической  $k$  раз непрерывно дифференцируемой функции  $f \in C_{2\pi}^{(k)}$

$$c_n(f^k) = (in)^k c_n(f)$$

Чем глаже функция, тем быстрее убывают коэффициенты

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

Обратное тоже верно, но в другой формулировке:

Если

$$c_n = \frac{\sigma_n}{n^{k+1}},$$

где

$$\{\sigma_n\} : \sum |\sigma_n|^2 - \text{сходится}$$

то  $f \in C_{2\pi}^k$

## 2 Задача Штурма-Лиувилля

### 2.1 Как ставится регулярная задача Штурма-Лиувилля? Что такое собственные функции и собственные значения такой задачи? Опишите основные свойства системы собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля.

Поставим задачу отыскать на отрезке  $[a, b]$  решения  $y = y(x)$  дифференциального уравнения

$$p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x),$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = c_1 \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = c_2 \end{cases}$$

Пусть  $p_0, p_1, p_2, f$  — непрерывные и краевые условия однородны ( $c_1 = c_2 = 0$ )

Введём оператор  $L$  действующий из пространства  $V_2$  дважды непрерывно дифференцируемых функций на  $[a, b]$ , удовлетворяющих краевым условиям

$$L(y) = p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y$$

Тогда краевая задача сведётся к нахождению таких  $y \in V_2$ , что  $L(y) = f$

Пусть  $\rho$ :  $p_1\rho = (p_2\rho)'$  и  $p = -p_2\rho$ . Домножим и разделим левую часть дифференциального уравнения на  $\rho$ . Тогда оператор

$$L(y) = \frac{-(py')' + qy}{\rho}$$

называется оператором Штурма-Лиувилля.

Краевая задача на собственные числа и собственные функции оператора  $L$

$$-(py')' + qy = \lambda \rho y$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = c_1 \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = c_2 \end{cases}$$

называется задачей Штурма-Лиувилля, при этом предполагается, что  $p$ ,  $q$  и  $\rho$  — вещественные непрерывные функции, *(здесь должны быть ещё условия наложенные на  $p$ ,  $q$  и  $\rho$ : причём  $p$  — непрерывно дифференцируема ...)*

Задача Штурма-Лиувилля — регулярная, если  $L$  — регулярный оператор, то есть  $p, \rho > 0$

Свойства решений задачи Штурма-Лиувилля

- Корни собственных функций просты. (если  $y$  — собственная функция, то её нули простые)
- Каждому собственному значению отвечает единственная с точностью до множителя собственная функция (т.е. собственные числа оператора Штурма-Лиувилля — простые)
- Собственные значения задачи Штурма-Лиувилля вещественны. Соответствующие им собственные функции могут быть выбраны вещественными.
- Различным собственным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  отвечают ортогональные собственные функции  $y_1$  и  $y_2$
- Собственные числа образуют бесконечную монотонно возрастающую последовательность, стремящуюся к бесконечности

## 2.2 В чем состоит метод Фурье для задачи о колебаниях неоднородной струны?

Рассмотрим струну, закреплённую в точках  $0$  и  $\pi$  на оси  $x$  с положением равновесия по отрезку  $[0, \pi]$



Уравнение для функции  $u(x, t)$ , описывающее форму струны в момент времени  $t$  (волновое уравнение)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Зададим начальные условия

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Будем искать решение в виде ряда Фурье по синусам

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx)$$

Подставив  $u(x, t)$  в волновое уравнение и начальные условия получим, что

$$b_n''(t) = -a^2 n^2 b_n(t)$$

$$\begin{cases} b_n(0) = b_n \\ b_n'(0) = 0 \end{cases}$$

где  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$ .

Откуда получаем, что

$$b_n(t) = b_n \cos(ant)$$

и

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(ant) \sin(nx)$$

Однако надо дополнительно потребовать, чтобы полученный ряд был дважды непрерывно дифференцируемым. Если  $f(x) \in C_{[0, \pi]}^3$  и  $f''(0) = f''(\pi) = 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| n^2$  и дополнительное условие выполняется.

В этом случае

$$b_n = \frac{2}{\pi n^3} \int_0^{\pi} f'''(x) \cos(nx) dx$$

Разложив  $\cos(ant) \sin(nx)$  по формуле произведения синуса на косинус и воспользовавшись тем, что  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$  получим, что

$$u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2}$$