Теория и решение примеров Шага 4, Ступени 2

Содержание

1 §20. Комплексные числа в алгебраической форме

Теория

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$
$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i;$
$z_1=a_1+b_1i;$
$z_2=a_2+b_2i;$
$z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i;$
$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$

1.1 Задание 20.1

а)

Пример

$$(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)=?;$$

Решение

$(2+i)(3-i)=(2\cdot 3+1)+(-2+3)i=7+i;$
$(2+3i)(3+4i)=(2\cdot 3-3\cdot 4)+(2\cdot 4+3\cdot 3)i=(6-12)+(8+9)i=-6+17i;$
$(7+i)+(-6+17i)=(7-6)+(1+17)i=1+18i;$

б)

Пример

$$(2+i)(3+7i)-(1+2i)(5+3i)=?;$$

Решение

$(2+i)(3+7i)=(2\cdot 3-7)+(2\cdot 7+3)i=-1+17i;$
$(1+2i)(5+3i)=(5-6)+(3+10)i=-1+13i;$
$(-1+17i)-(-1+13i)=(-1+17i)+(1-13i)=4i;$

в)

Пример

$$(4+i)(5+3i)-(3+i)(3-i)=?;$$

Решение

Используя формулу сокращенного умножения:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$

$(3+i)(3-i)=9+1=10;$
$(4+i)(5+3i)=(4\cdot 5-3)+(4\cdot 3+5)i=17+17i;$
$17+17i-10=7+17i;$

г)

Пример

$$\frac{(5+i)(7-6i)i}{3+i} = ?;$$

Решение

$$(5+i)(7-6i) = (5*7+6)+(-5*6+7)i = 41-23i;$$

$$\frac{41-23i}{3+i} = \frac{41\cdot 3-23}{10} + \frac{-23\cdot 3-41}{10}i = \frac{100}{10} + \frac{-110}{10}i = 10-11i;$$

д)

Пример

$$\frac{(5+i)(3+5i)}{2i} = ?;$$

Решение

$(5+i)(3+5i) = (5 \cdot 3 - 5) + (5 \cdot 5 + 3)i = 10 + 28i;$

В ситуации, когда действительная часть в знаменателе равна нулю, не нужно использовать формулу деления комплексных чисел. Расписать все выражение, как сумму дробей и вычислить получившиеся дроби.

$$\frac{10+28i}{2i} = \frac{10}{2i} + \frac{28i}{2i} = ...$$

Тут домножили и разделили на i мнимую часть

$$... = 14 + \frac{5i}{i^2} = 14 - 5i;$$

с помощью форулы деления комплексных чисел

$$\frac{10+28i}{2i} = \frac{56}{4} + \frac{-20}{4}i = 14 - 5i;$$

e)

Пример

$$\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2} = ?;$$

Решение

$$(1+3i)(8-i) = (8+3) + (-1+24)i = 11+23i;$$
$$(2+i)^2 = (2+i)\cdot(2+i) = (2\cdot 2-1) + (2+2)i = 3+4i;$$

$$\frac{11+23i}{3+4i} = \frac{11\cdot 3+23\cdot 4}{9+16} + \frac{23\cdot 3-11\cdot 4}{9+16}i = \frac{33+92}{25} + \frac{69-44}{25} =$$
$$= \frac{125}{25} + \frac{25}{25}i = 5+i;$$

ж)

Пример

$$\frac{(2+i)(4+i)}{1+i} = ?;$$

Решение

$$(2+i)(4+i) = (8-1) + (2+4)i = 7+6i;$$

$$\frac{7+6i}{1+i} = \frac{7+6}{2} + \frac{6-7}{2}i = \frac{13}{2} - \frac{1}{2}i;$$

з)

Пример

$$\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i} = ?;$$

Решение

$$(3-i)(1-4i) = (3-4) + (-12-1)i = -1-13i;$$

$$\frac{-1-13i;}{2-i} = \frac{-2+13}{5} + \frac{-26-1}{5}i = \frac{11}{5} + \frac{27}{5}i;$$

и)

Пример

$(2+i)^3 + (2-i)^3 = ?;$

Решение

по формуле суммы куббов:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$((2+i)+(2-i))((2+i)^2-(2-i)(2+i)+(2-i)^2) = 4\cdot((2+i)^2-5+(2-i)^2);$

по формуле квадрата суммы и разности:

$$(a+b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)$$

$$(a-b)^2 = (a^2 - 2ab + b^2)$$

$(2+i)^2 = 4 + 4i - 1;$
$(2-i)^2 = 4 - 4i - 1;$
$4\cdot(4 + 4i - 1 - 5 + 4 - 4i - 1) = 4\cdot(4 + 4 - 1 - 5 - 1) = 4(8-7) = 4;$

к)

Пример

$(3+i)^3 - (3-i)^3 = ?;$

Решение

по формуле разности куббов:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$((3+i)(3-i))((3+i)^2 + (3+i)(3-i) + (3-i)^2) =$
$= 2i(9+6i-1+9-3i+3i+1+9-6i-1) = 2i(9-1+9+1+9-1) = 2i \cdot 26 = 52i$