

Минорский

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение в анализ</b>	<b>2</b>
1.1	§Свойства пределов. Раскрытие неопределенностей ввида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ . . . . .	2
1.1.1	734 . . . . .	2
1.1.2	735 . . . . .	3
1.1.3	736 . . . . .	4
1.1.4	737 . . . . .	5
1.1.5	738 . . . . .	6
1.1.6	739 . . . . .	7
1.1.7	740 . . . . .	8
1.1.8	741 . . . . .	9
1.1.9	742 . . . . .	10
1.1.10	743 . . . . .	11
1.1.11	744 . . . . .	12
1.1.12	745 . . . . .	13
1.1.13	746 . . . . .	14
1.1.14	747 . . . . .	15
1.1.15	748 . . . . .	16
1.1.16	749 . . . . .	17
1.1.17	750 . . . . .	18
1.1.18	751 . . . . .	19
1.2	§Предел отношения $\frac{\sin a}{a}$ при $a \rightarrow 0$ . . . . .	20
1.2.1	763 . . . . .	20
1.2.2	764 . . . . .	21
1.2.3	765 . . . . .	22
1.2.4	766 . . . . .	23

# 1 Введение в анализ

## 1.1 §Свойства пределов. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

### 1.1.1 734

1) тут сразу подставим

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 1}{2x + 1} = -3/5$$

2) Вспоминаем формулы косинуса двойного угла

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 + \sin 2x}{1 - \cos 4x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 + \sin 2x}{1 - (1 - 2\sin^2 2x)} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 + \sin 2x}{2\sin^2 2x} = 1$$

**1.1.2 735**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 4$$

### 1.1.3 736

Корни уравнения в знаменателе будут 2 и 1

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x-1)} = 1$$

**1.1.4 737**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x + 1)} = 3/2$$

**1.1.5 738**

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{tgx}{sin2x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{sinx}{cosx * sin2x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{sinx}{cosx * 2sinx * cosx} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{2cos^2x} = 1/2$$

**1.1.6 739**

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{-(\sin x - \cos x)(\cos x + \sin x)} = -1/\sqrt{2}$$



**1.1.7 740**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{(\sqrt{1+3x}-1)(\sqrt{1+3x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{1+3x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x}+1}{3}$$

**1.1.8 741**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{ax} - x}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{ax} - x)(\sqrt{ax} + x)}{(x - a)(\sqrt{ax} + x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{ax - x^2}{(x - a)(\sqrt{ax} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-x(x - a)}{(x - a)(\sqrt{ax} + x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-x}{\sqrt{ax} + x} = -1/2\end{aligned}$$

**1.1.9    742**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} =$$

$$x = t^6, t \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1}{t^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(t - 1)(t + 1)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{t + 1}{t^2 + t + 1} = 2/3$$

**1.1.10 743**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+mx} - 1}{x} &= \\ 1 + mx = t^3, t \rightarrow 1, x &= \frac{t^3 - 1}{m} \\ \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{t^3} - 1}{\frac{t^3 - 1}{m}} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{m(t - 1)}{t^3 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{m}{t^2 + t + 1} = m/3\end{aligned}$$

**1.1.11 744**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \\ &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - 1+x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 1\end{aligned}$$

**1.1.12 745**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1-tgx} - \sqrt{1+tgx}}{\sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\sqrt{1-tgx} - \sqrt{1+tgx})(\sqrt{1-tgx} + \sqrt{1+tgx})}{\sin 2x(\sqrt{1-tgx} + \sqrt{1+tgx})} = \\
 \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-2tgx}{\sin 2x(\sqrt{1-tgx} + \sqrt{1+tgx})} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-2\sin x}{\cos * 2\sin x * \cos x(\sqrt{1-tgx} + \sqrt{1+tgx})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{-2\cos^2 x} = -1/2
 \end{aligned}$$

**1.1.13    746**

1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1/x}{3x - 4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3x} = 2/3$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x}{1 - 2x^3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 7}{1/x - 2x^2} =$$

Относительно бесконечно больших, константы всегда принимаются за 0. Можно конечно вынести старшую степень, тогда любое число, деленное на бесконечность, будет 0.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{2x^2} = 5/2$$

**1.1.14 747**

1)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 1}{x^2 + 1} &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 1/x}{x + 1/x} &= \\ &= \frac{3}{\infty} = 0\end{aligned}$$



**1.1.15 748**

1)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1/x^2}{1 + 1/x^2} &= \\ &= \frac{\infty}{1} = \infty\end{aligned}$$

**1.1.16 749**

1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 1}; \sqrt{x} = a;$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a - 6a^2}{3a^2 + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 6a}{3a + 1/a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6a}{3a} = -2 \end{aligned}$$

**1.1.17 750**

1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{1 - 2n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{1/n - 2} = -3/2$$

**1.1.18 751**

1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 1}}{2n - 1} =$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 1}}{2n + 1 - 2} =$$

Отбросим константы, потому что они ни на что не влияют

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2}}{2n} =$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{2}}{2n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

## 1.2 §Предел отношения $\frac{\sin a}{a}$ при $a \rightarrow 0$

### 1.2.1 763

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 4x}{4x} = 4\end{aligned}$$

**1.2.2 764**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/3)}{x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1/3)\sin(x/3)}{x/3} = 1/3\end{aligned}$$

**1.2.3 765**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tgx}{x} &= \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{sinx}{xcosx} = \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{cosx} = 1\end{aligned}$$

**1.2.4 766**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x/2)}{x^2} =$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1/4)\sin^2(x/2)}{(1/4)x^2} = 1/4$$