

# Теория и решение примеров

## Шага 4, Ступени 2

# Содержание

<b>1</b>	<b>§20. Комплексные числа в алгебраической форме</b>	<b>2</b>
1.1	Задание 20.1 . . . . .	2
1.2	Задание 20.2 . . . . .	14
1.3	Задание 20.3 . . . . .	15
1.4	Задание 20.4 . . . . .	17

# 1 §20. Комплексные числа в алгебраической форме

## Теория

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i;$$

$$z_1 = a_1 + b_1i;$$

$$z_2 = a_2 + b_2i;$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i$$

## 1.1 Задание 20.1

а)

## Пример

$$(2 + i)(3 - i) + (2 + 3i)(3 + 4i) = ?;$$

## Решение

$$(2 + i)(3 - i) = (2 \cdot 3 + 1) + (-2 + 3)i = 7 + i;$$

$$(2 + 3i)(3 + 4i) = (2 \cdot 3 - 3 \cdot 4) + (2 \cdot 4 + 3 \cdot 3)i = (6 - 12) + (8 + 9)i = -6 + 17i;$$

$$(7 + i) + (-6 + 17i) = (7 - 6) + (1 + 17)i = 1 + 18i;$$

б)

**Пример**

$$(2 + i)(3 + 7i) - (1 + 2i)(5 + 3i) = ?;$$

**Решение**

$$(2 + i)(3 + 7i) = (2 \cdot 3 - 7) + (2 \cdot 7 + 3)i = -1 + 17i;$$

$$(1 + 2i)(5 + 3i) = (5 - 6) + (3 + 10)i = -1 + 13i;$$

$$(-1 + 17i) - (-1 + 13i) = (-1 + 17i) + (1 - 13i) = 4i;$$

в)

### Пример

$$(4 + i)(5 + 3i) - (3 + i)(3 - i) = ?;$$

### Решение

Используя формулу сокращенного умножения:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2;$$

$$(3 + i)(3 - i) = 9 + 1 = 10;$$

$$(4 + i)(5 + 3i) = (4 \cdot 5 - 3) + (4 \cdot 3 + 5)i = 17 + 17i;$$

$$17 + 17i - 10 = 7 + 17i;$$

г)

**Пример**

$$\frac{(5+i)(7-6i)i}{3+i}=?;$$

**Решение**

$$(5+i)(7-6i) = (5 \cdot 7 + 6) + (-5 \cdot 6 + 7)i = 41 - 23i;$$

$$\frac{41-23i}{3+i} = \frac{41 \cdot 3 - 23}{10} + \frac{-23 \cdot 3 - 41}{10}i = \frac{100}{10} + \frac{-110}{10}i = 10 - 11i;$$

д)

### Пример

$$\frac{(5+i)(3+5i)}{2i}=?;$$

### Решение

$$(5+i)(3+5i) = (5 \cdot 3 - 5) + (5 \cdot 5 + 3)i = 10 + 28i;$$

В ситуации, когда действительная часть в знаменателе равна нулю, не нужно использовать формулу деления комплексных чисел. Расписать все выражение, как сумму дробей и вычислить получившиеся дроби.

$$\frac{10+28i}{2i} = \frac{10}{2i} + \frac{28i}{2i} = \dots$$

Тут домножили и разделили на  $i$  мнимую часть

$$\dots = 14 + \frac{5i}{i^2} = 14 - 5i;$$

с помощью формулы деления комплексных чисел

$$\frac{10+28i}{2i} = \frac{56}{4} + \frac{-20}{4}i = 14 - 5i;$$

е)

### Пример

$$\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}=?;$$

### Решение

$$(1+3i)(8-i) = (8+3) + (-1+24)i = 11+23i;$$

$$(2+i)^2 = (2+i) \cdot (2+i) = (2 \cdot 2 - 1) + (2+2)i = 3+4i;$$

$$\begin{aligned} \frac{11+23i}{3+4i} &= \frac{11 \cdot 3 + 23 \cdot 4}{9+16} + \frac{23 \cdot 3 - 11 \cdot 4}{9+16}i = \frac{33+92}{25} + \frac{69-44}{25} = \\ &= \frac{125}{25} + \frac{25}{25}i = 5+i; \end{aligned}$$



**ж)**

**Пример**

$$\frac{(2+i)(4+i)}{1+i}=?;$$

**Решение**

$$(2+i)(4+i) = (8-1) + (2+4)i = 7+6i;$$

$$\frac{7+6i}{1+i} = \frac{7+6}{2} + \frac{6-7}{2}i = \frac{13}{2} - \frac{1}{2}i;$$

3)

### Пример

$$\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}=?;$$

### Решение

$$(3-i)(1-4i) = (3-4) + (-12-1)i = -1-13i;$$

$$\frac{-1-13i}{2-i} = \frac{-2+13}{5} + \frac{-26-1}{5}i = \frac{11}{5} + \frac{27}{5}i;$$

**и)**

### **Пример**

$$(2+i)^3 + (2-i)^3 = ?;$$

### **Решение**

по формуле суммы кубов:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$((2+i) + (2-i))((2+i)^2 - (2-i)(2+i) + (2-i)^2) = 4 \cdot ((2+i)^2 - 5 + (2-i)^2);$$

по формуле квадрата суммы и разности:

$$(a+b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)$$

$$(a-b)^2 = (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$(2+i)^2 = 4 + 4i - 1;$$

$$(2-i)^2 = 4 - 4i - 1;$$

$$4 \cdot (4 + 4i - 1 - 5 + 4 - 4i - 1) = 4 \cdot (4 + 4 - 1 - 5 - 1) = 4(8 - 7) = 4;$$

к)

### Пример

$$(3+i)^3 - (3-i)^3 = ?;$$

### Решение

по формуле разности кубов:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\begin{aligned} & ((3+i)(3-i))((3+i)^2 + (3+i)(3-i) + (3-i)^2) = \\ & = 2i(9+6i-1+9-3i+3i+1+9-6i-1) = 2i(9-1+9+1+9-1) = 2i \cdot 26 = 52i \end{aligned}$$

л)

### Пример

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}=?$$

### Решение

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3} = \frac{(1+i)^2(1+i)^2(1+i)}{(1-i)^2(1-i)} = \dots$$

$$(1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

$$(1-i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$$

$$\dots = \frac{2i \cdot 2i}{-2i(1-i)} = \frac{2i(1+i)}{i-1} = \frac{2i-2}{i-1} = \frac{2(i-1)}{(i-1)} = 2$$

м)

### Пример

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = ?$$

### Решение

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = \frac{(-1 + \sqrt{3}i)^2(-1 + \sqrt{3}i)}{8} = \dots$$

$$(-1 + \sqrt{3}i)^2 = 1 - 2\sqrt{3}i - 3 = -2\sqrt{3}i - 2$$

$$\dots = \frac{(-2\sqrt{3}i - 2)(-1 + \sqrt{3}i)}{8} = \frac{2\sqrt{3}i + 6 + 2 - 2\sqrt{3}i}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

## 1.2 Задание 20.2

### Пример

Вычислить:  $i^{77}, i^{98}, i^{-57}, i^n$ ,  $n$  - целое число

### Решение

$$i^2 = -1$$

$$i^4 = 1$$

$$i^{77} = i^{76}i = (i^4)^{19}i = 1^{19}i = i$$

$$i^{98} = (i^4)^{24}i^2 = i^2 = -1$$

$$i^n = \begin{cases} n = 4k, n \in \mathbb{Z}, i^n = 1 \\ n = 4k + 1, n \in \mathbb{Z}, i^n = i \\ n = 4k + 2, n \in \mathbb{Z}, i^n = -1 \\ n = 4k + 3, n \in \mathbb{Z}, i^n = -i \end{cases}$$

### 1.3 Задание 20.3

Доказать равенство... или сделать так, чтобы левое стало равно правому

а)

#### Пример

$$(1+i)^8 n = 2^4 n$$

#### Решение

Сводим к одной степени:

$$(1+i)^2)^{4n} = 2^{4n}$$

Что-то уже можно посчитать:

$$(1+i)^2 = 2i$$

$$(2i)^{4n} = 2^{4n}$$

$$2^{4n} i^{4n} = 2^{4n}$$

$$2^{4n} i = 2^{4n}$$

Что-то уже можно посчитать:

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$$

$$2^{4n} = 2^{4n}$$



б)

**Пример**

$$(1+i)^{4n} = (-1)2^{2n}$$

**Решение**

$$(((1+i)^2)^2)^n = -2^{2n}$$

$$((2i)^2)^n = -4^n$$

$$-4^n = -4^n$$

## 1.4 Задание 20.4

Решить систему уравнений:

во всех заданиях очень помогал финт ушами про избавление от иррациональности в знаменателе.

а)

### Пример

$$\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i \end{cases}$$

### Решение

Во втором уравнении вынесем все, кроме  $z_1$  в правую часть:

$$z_1 = \frac{1+i - (1-i)z_2}{1+i} = 1 - \frac{(1-i)z_2}{1+i}$$

Подставим в первое уравнение:

$$(1-i)\left(1 - \frac{(1-i)z_2}{1+i}\right) + (1+i)z_2 = 1+3i$$

$$1-i - \frac{(1-i)^2 \cdot z_2}{1+i} + (1+i)z_2 = 1+3i$$

...

$$(1-i)^2 = -2i$$

...

$$1-i + \frac{2iz_2}{1+i} + z_2 + z_2i = 1+3i$$

$$\frac{2iz_2}{1+i} + z_2 + z_2i = 1+3i - 1+i$$

$$z_2\left(\frac{2i}{1+i} + 1+i\right) = 4i$$

$$z_2 = \frac{4i}{\frac{2i}{1+i} + 1+i}$$

...

$$(1+i)^2 = 2i$$
$$\frac{2i}{1+i} + 1+i = \frac{2i+2i}{1+i} = \frac{4i}{1+i}$$

...

$$z_2 = \frac{4i}{\frac{4i}{1+i}} = 4i \frac{1+i}{4i} = 1+i$$

Подставим в выведенное ранее  $z_1$ :

$$z_1 = 1 - \frac{(1-i)(1+i)}{1+i} = 1+i-1=i$$

б)

### Пример

$$\begin{cases} iz_1 + (1+i)z_2 = 2+2i \\ 2iz_1 + (3+2i)z_2 = 5+3i \end{cases}$$

### Решение

Во втором уравнении выразим  $z_1$ :

$$z_1 = \frac{5+3i - (3+2i)z_2}{2i} =$$

Подставим в первое уравнение:

$$\begin{aligned} i \frac{5+3i - (3+2i)z_2}{2i} + z_2 + iz_2 &= 2(1+i) \\ \frac{5+3i - (3+2i)z_2}{2} + z_2 + iz_2 &= 2(1+i) \\ \frac{5+3i}{2} - \frac{(3+2i)z_2}{2} + z_2 + iz_2 &= 2(1+i) \\ -\frac{(3+2i)z_2}{2} + z_2 + iz_2 &= 2(1+i) - \frac{5+3i}{2} \\ \frac{-3z_2 - 2iz_2 + 2z_2 + 2iz_2}{2} &= 2(1+i) - \frac{5+3i}{2} \\ -\frac{z_2}{2} &= 2(1+i) - \frac{5+3i}{2} \\ -z_2 &= 4(1+i) - 5 - 3i = 4 + 4i - 5 - 3i \\ z_2 &= -4 - 4i + 5 + 3i = 1 - i \end{aligned}$$

Подставим полученное значение  $z_2$  в формулу  $z_1$ :

$$z_1 = \frac{5+3i - (3+2i)(1-i)}{2i} = \frac{5+3i - 3+3i-2i-2}{2i} = \frac{4i}{2i} = 2$$