

Минорский

Содержание

1	Введение в анализ	3
1.1	§Свойства пределов. Раскрытие неопределенностей ввида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$	3
1.1.1	734	3
1.1.2	735	4
1.1.3	736	5
1.1.4	737	6
1.1.5	738	7
1.1.6	739	8
1.1.7	740	9
1.1.8	741	10
1.1.9	742	11
1.1.10	743	12
1.1.11	744	13
1.1.12	745	14
1.1.13	746	15
1.1.14	747	16
1.1.15	748	17
1.1.16	749	18
1.1.17	750	19
1.1.18	751	20
1.2	§Предел отношения $\frac{\sin a}{a}$ при $a \rightarrow 0$	21
1.2.1	763	21
1.2.2	764	22
1.2.3	765	23
1.2.4	766	24
1.2.5	767	25

1.2.6	768	26
1.2.7	769	27
1.2.8	770	28
1.2.9	771	29

1 Введение в анализ

1.1 §Свойства пределов. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

1.1.1 734

1) тут сразу подставим

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 1}{2x + 1} = -3/5$$

2) Вспоминаем формулы косинуса двойного угла

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 + \sin 2x}{1 - \cos 4x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 + \sin 2x}{1 - (1 - 2\sin^2 2x)} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 + \sin 2x}{2\sin^2 2x} = 1$$

1.1.2 735

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 4$$

1.1.3 736

Корни уравнения в знаменателе будут 2 и 1

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x-1)} = 1$$

1.1.4 737

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x + 1)} = 3/2$$

1.1.5 738

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{tgx}{sin2x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{sinx}{cosx * sin2x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{sinx}{cosx * 2sinx * cosx} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{2cos^2x} = 1/2$$

1.1.6 739

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{-(\sin x - \cos x)(\cos x + \sin x)} = -1/\sqrt{2}$$

1.1.7 740

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{(\sqrt{1+3x}-1)(\sqrt{1+3x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{1+3x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x}+1}{3}$$

1.1.8 741

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{ax} - x}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{ax} - x)(\sqrt{ax} + x)}{(x - a)(\sqrt{ax} + x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{ax - x^2}{(x - a)(\sqrt{ax} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-x(x - a)}{(x - a)(\sqrt{ax} + x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-x}{\sqrt{ax} + x} = -1/2\end{aligned}$$

1.1.9 742

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} =$$

$$x = t^6, t \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1}{t^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(t - 1)(t + 1)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{t + 1}{t^2 + t + 1} = 2/3$$

1.1.10 743

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+mx} - 1}{x} &= \\ 1 + mx = t^3, t \rightarrow 1, x &= \frac{t^3 - 1}{m} \\ \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{t^3} - 1}{\frac{t^3 - 1}{m}} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{m(t - 1)}{t^3 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{m}{t^2 + t + 1} = m/3\end{aligned}$$

1.1.11 744

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \\ &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - 1+x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 1\end{aligned}$$

1.1.12 745

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1-tgx} - \sqrt{1+tgx}}{\sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\sqrt{1-tgx} - \sqrt{1+tgx})(\sqrt{1-tgx} + \sqrt{1+tgx})}{\sin 2x(\sqrt{1-tgx} + \sqrt{1+tgx})} = \\
 \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-2tgx}{\sin 2x(\sqrt{1-tgx} + \sqrt{1+tgx})} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-2\sin x}{\cos * 2\sin x * \cos x(\sqrt{1-tgx} + \sqrt{1+tgx})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{-2\cos^2 x} = -1/2
 \end{aligned}$$

1.1.13 746

1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1/x}{3x - 4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3x} = 2/3$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x}{1 - 2x^3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 7}{1/x - 2x^2} =$$

Относительно бесконечно больших, константы всегда принимаются за 0. Можно конечно вынести старшую степень, тогда любое число, деленное на бесконечность, будет 0.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{2x^2} = 5/2$$

1.1.14 747

1)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 1}{x^2 + 1} &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 1/x}{x + 1/x} &= \\ &= \frac{3}{\infty} = 0\end{aligned}$$

1.1.15 748

1)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1/x^2}{1 + 1/x^2} &= \\ &= \frac{\infty}{1} = \infty\end{aligned}$$

1.1.16 749

1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 1}; \sqrt{x} = a;$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a - 6a^2}{3a^2 + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 6a}{3a + 1/a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6a}{3a} = -2 \end{aligned}$$

1.1.17 750

1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{1 - 2n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{1/n - 2} = -3/2$$

1.1.18 751

1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 1}}{2n - 1} =$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 1}}{2n + 1 - 2} =$$

Отбросим константы, потому что они ни на что не влияют

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2}}{2n} =$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{2}}{2n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

1.2 §Предел отношения $\frac{\sin a}{a}$ при $a \rightarrow 0$

1.2.1 763

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 4x}{4x} = 4\end{aligned}$$

1.2.2 764

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/3)}{x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1/3)\sin(x/3)}{x/3} = 1/3\end{aligned}$$

1.2.3 765

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tgx}{x} &= \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{sinx}{xcosx} = \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{cosx} = 1\end{aligned}$$

1.2.4 766

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x/2)}{x^2} =$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1/4)\sin^2(x/2)}{(1/4)x^2} = 1/4$$

1.2.5 767

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} =$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} = 2$$

1.2.6 768

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}} =$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}{x+2-2} = 6\sqrt{2}$$

1.2.7 769

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{h} =$$

...

$$\sin(x+h) - \sin(x-h) = 2\sin\frac{(x+h) - (x-h)}{2} * \cos\frac{x+h + x-h}{2} = 2\sin(2h/2) * \cos(2x/2)$$

...

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sin(2h/2) * \cos(2x/2)}{h} = 2\cos x$$

1.2.8 770

1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} =$$

...

$$\arctg x = y, x = tgy, y \rightarrow 0$$

...

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{tgy} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \cos y}{\sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \cos y = 1$$

ниже ошибка

2)

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\arcsin(1 - 2x)}{4x^2 - 1} =$$

...

$$\arcsin(1 - 2x) = y, x = \sin y, y \rightarrow 0$$

...

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{4 \sin^2 y - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{4 \sin^2 y - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{4 - 1/\sin^2 y} = \lim_{y \rightarrow 0} (1/4 - \sin^2 y) = 1/4$$

1.2.9 771

1)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = 1/2\end{aligned}$$