Кострикин

Содержание

1 §20. Комплексные числа в алгебраической форме

1.1 Теория

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$
$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i;$
$z_1=a_1+b_1i;$
$z_2=a_2+b_2i;$
$z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i;$
$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$

1.2 Задание 20.1

1.3 а)

Пример

$$(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)=?;$$

Решение $(2+i)(3-i)=(2\cdot3+1)+(-2+3)i=7+i;$
$(2+3i)(3+4i)=(2\cdot3-3\cdot4)+(2\cdot4+3\cdot3)i=(6-12)+(8+9)i=-6+17i;$
$(7+i)+(-6+17i)=(7-6)+(1+17)i=1+18i;$

1.4 б)

Пример

$$(2+i)(3+7i)-(1+2i)(5+3i)=?;$$

Решение $(2+i)(3+7i)=(2\cdot 3-7)+(2\cdot 7+3)i=-1+17i;$

$(1+2i)(5+3i)=(5-6)+(3+10)i=-1+13i;$

$(-1+17i)-(-1+13i)=(-1+17i)+(1-13i)=4i;$

1.5 в)

Пример

$$(4+i)(5+3i)-(3+i)(3-i)=?;$$

Решение Используя формулу сокращенного умножения:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$

$(3+i)(3-i)=9+1=10;$
$(4+i)(5+3i)=(4\cdot 5-3)+(4\cdot 3+5)i=17+17i;$
$17+17i-10=7+17i;$

1.6 г)

Пример

$$\frac{(5+i)(7-6i)i}{3+i} = ?;$$

Решение $(5+i)(7-6i) = (5*7+6) + (-5*6+7)i = 41-23i;$

$$\frac{41-23i}{3+i} = \frac{41\cdot 3-23}{10} + \frac{-23\cdot 3-41}{10}i = \frac{100}{10} + \frac{-110}{10}i = 10-11i;$$

1.7 д)

Пример

$$\frac{(5+i)(3+5i)}{2i} =?;$$

Решение $(5+i)(3+5i) = (5\cdot 3-5)+(5\cdot 5+3)i = 10+28i;$

В ситуации, когда действительная часть в знаменателе равна нулю, не нужно использовать формулу деления комплексных чисел. Расписать все выражение, как сумму дробей и вычислить получившиеся дроби.

$$\frac{10+28i}{2i} = \frac{10}{2i} + \frac{28i}{2i} = ...$$

Тут домножили и разделили на i мнимую часть

$$... = 14 + \frac{5i}{i^2} = 14-5i;$$

с помощью форулы деления комплексных чисел

$$\frac{10+28i}{2i} = \frac{56}{4} + \frac{-20}{4}i = 14-5i;$$

1.8 e)

Пример $\dfrac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$ =?;

Решение $(1+3i)(8-i) = (8+3) + (-1+24)i = 11+23i$;

$(2+i)^2 = (2+i)\cdot(2+i) = (2\cdot 2-1) + (2+2)i = 3+4i$;

$$\frac{11+23i}{3+4i} = \frac{11\cdot 3+23\cdot 4}{9+16} + \frac{23\cdot 3-11\cdot 4}{9+16}i = \frac{33+92}{25} + \frac{69-44}{25} =$$
$$= \frac{125}{25} + \frac{25}{25}i = 5+i;$$

1.9 ж)

Пример $\dfrac{(2+i)(4+i)}{1+i} =?;$
Решение $(2+i)(4+i) = (8-1) + (2+4)i = 7+6i;$

$$\frac{7+6i}{1+i} = \frac{7+6}{2} + \frac{6-7}{2}i = \frac{13}{2} - \frac{1}{2}i;$$

1.10 з)

Пример $\dfrac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$ =?;
Решение $(3-i)(1-4i) = (3-4) + (-12-1)i = -1-13i;$

$$\frac{-1-13i;}{2-i} = \frac{-2+13}{5} + \frac{-26-1}{5}i = \frac{11}{5} + \frac{27}{5}i;$$

1.11 и)

Пример $(2+i)^3 + (2-i)^3 = ?$;

Решение по формуле суммы куббов:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$((2+i)+(2-i))((2+i)^2-(2-i)(2+i)+(2-i)^2) = 4\cdot((2+i)^2-5+(2-i)^2);$

по формуле квадрата суммы и разности:

$$(a+b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)$$

$$(a-b)^2 = (a^2 - 2ab + b^2)$$

$(2+i)^2 = 4 + 4i - 1;$
$(2-i)^2 = 4 - 4i - 1;$
$4\cdot(4+4i-1-5+4-4i-1) = 4\cdot(4+4-1-5-1) = 4(8-7) = 4;$

1.12 к)

Пример $(3+i)^3-(3-i)^3=?$;

Решение по формуле разности куббов:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$((3+i)(3-i))((3+i)^2+(3+i)(3-i)+(3-i)^2)=$
$=2i(9+6i-1+9-3i+3i+1+9-6i-1)=2i(9-1+9+1+9-1)=2i\cdot 26=52i$

1.13 л)

Пример $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3} = ?$

Решение $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3} = \dfrac{(1+i)^2(1+i)^2(1+i)}{(1-i)^2(1-i)} = ...$

$(1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

$(1-i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$

$$... = \frac{2i \cdot 2i}{-2i(1-i)} = \frac{2i(1+i)}{i-1} = \frac{2i-2}{i-1} = \frac{2(i-1)}{(i-1)} = 2$$

1.14 м)

Пример $(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3 = ?$

Решение $(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3 = \frac{(-1+\sqrt{3}i)^2(-1+\sqrt{3}i)}{8} = ...$

$(-1+\sqrt{3}i)^2 = 1 - 2\sqrt{3}i - 3 = -2\sqrt{3}i - 2$

$... = \frac{(-2\sqrt{3}i - 2)(-1+\sqrt{3}i)}{8} = \frac{2\sqrt{3}i + 6 + 2 - 2\sqrt{3}i}{8} = \frac{8}{8} = 1$

1.15 Задание 20.2

Пример Вычислить: $i^{77}, i^{98}, i^{-57}, i^n$, n - целое число **Решение** $i^2 = -1$
$i^4 = 1$
$i^{77} = i^{76}i = (i^4)^{19}i = 1^{19}i = i$
$i^{98} = (i^4)^{24}i^2 = i^2 = -1$

$$i^n = \begin{cases} n = 4k, n \in \mathbb{Z}, i^n = 1 \\ n = 4k+1, n \in \mathbb{Z}, i^n = i \\ n = 4k+2, n \in \mathbb{Z}, i^n = -1 \\ n = 4k+3, n \in \mathbb{Z}, i^n = -i \end{cases}$$

1.16 Задание 20.3

Доказать равенство... или сделать так, чтобы левое стало равно правому

1.17 а)

Пример $(1+i)^8 n = 2^4 n$ **Решение** Сводим к одной степени:

$$(1+i)^2)^{4n} = 2^{4n}$$

Что-то уже можно посчитать:

$$(1+i)^2 = 2i$$

$(2i)^{4n} = 2^{4n} 2^{4n} i^{4n} = 2^{4n} 2^{4n} i = 2^{4n}$
Что-то уже можно посчитать:

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$$

$2^{4n} = 2^{4n}$

1.18 б)

Пример $(1+i)^{4n} = (-1)2^{2n}$ **Решение** $(((1+i)^2)^2)^n = -2^{2n}((2i)^2)^n = -4^n$
$-4^n = -4^n$

1.19 Задание 20.4

Решить систему уравнений:
во всех заданиях очень помогал финт ушами про избавление от иррациональности в знаменателе.

1.20 а)

Пример

$$\begin{cases}(1+i)z_1+(1-i)z_2=1+i\\(1-i)z_1+(1+i)z_2=1+3i\end{cases}$$

Решение Во втором уравнении вынесем все, кроме z_1 в правую часть:

$$z_1=\frac{1+i-(1-i)z_2}{1+i}=1-\frac{(1-i)z_2}{1+i}$$

Подставим в первое уравнение:

$(1-i)(1-\dfrac{(1-i)z_2}{1+i})+(1+i)z_2=1+3i$
$1-i-\dfrac{(1-i)^2\cdot z_2}{1+i}+(1+i)z_2=1+3i$
...
$(1-i)^2=-2i$
...
$1-i+\dfrac{2iz_2}{1+i}+z_2+z_2i=1+3i$
$\dfrac{2iz_2}{1+i}+z_2+z_2i=1+3i-1+i$
$z_2(\dfrac{2i}{1+i}+1+i)=4i$
$z_2=\dfrac{4i}{\frac{2i}{1+i}+1+i}...$
$(1+i)^2=2i$

$$\frac{2i}{1+i} + 1 + i = \frac{2i+2i}{1+i} = \frac{4i}{1+i}...$$
$$z_2 = \frac{4i}{\frac{4i}{1+i}} = 4i\frac{1+i}{4i} = 1+i$$

Подставим в выведенное ранее z_1:

$$z_1 = 1 - \frac{(1-i)(1+i)}{1+i} = 1 + i - 1 = i$$

1.21 б)

Пример

$$\begin{cases} iz_1 + (1+i)z_2 = 2+2i \\ 2iz_1 + (3+2i)z_2 = 5+3i \end{cases}$$

Решение Во втором уравнении выразим z_1:

$$z_1 = \frac{5+3i-(3+2i)z_2}{2i} =$$

Подставим в первое уравнение:

$$i\frac{5+3i-(3+2i)z_2}{2i} + z_2 + iz_2 = 2(1+i)$$
$$\frac{5+3i-(3+2i)z_2}{2} + z_2 + iz_2 = 2(1+i)$$
$$\frac{5+3i}{2} - \frac{(3+2i)z_2}{2} + z_2 + iz_2 = 2(1+i)$$
$$-\frac{(3+2i)z_2}{2} + z_2 + iz_2 = 2(1+i) - \frac{5+3i}{2}\frac{-3z_2 - 2iz_2 + 2z_2 + 2iz_2}{2} = 2(1+i) - \frac{5+3i}{2} - \frac{z_2}{2} = 2(1+i) - \frac{5+3i}{2} - z_2 = 4(1+i) - 5 - 3i = 4 + 4i - 5 - 3i$$
$$z_2 = -4 - 4i + 5 + 3i = 1 - i$$

Подставим полученное значение z_2 в формулу z_1:

$$z_1 = \frac{5+3i-(3+2i)(1-i)}{2i} = \frac{5+3i-3+3i-2i-2}{2i} = \frac{4i}{2i} = 2$$