

# Список интегралов от иррациональных функций

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Ниже приведён список интегралов (первообразных функций) от иррациональных функций. В списке везде опущена аддитивная константа интегрирования.

## Содержание

- Интегралы с корнем из  $a^2+x^2$
- Интегралы с корнем из  $x^2-a^2$
- Интегралы с корнем из  $a^2-x^2$
- Интегралы с корнем из общего квадратного трёхчлена
- Интегралы с корнем из линейной функции
- Библиография



**Списки интегралов**

Элементарные функции

Рациональные функции

Иррациональные функции

Тригонометрические функции

Гиперболические функции

Экспоненциальные функции

Логарифмические функции

Обратные тригонометрические функции

Обратные гиперболические функции

## Интегралы с корнем из $a^2+x^2$

Везде ниже:  $r = \sqrt{a^2 + x^2}$ .

$$\int r \, dx = \frac{1}{2} \left( x r + a^2 \ln(x + r) \right)$$

$$\int r^3 \, dx = \frac{1}{4} x r^3 + \frac{1}{8} 3 a^2 x r + \frac{3}{8} a^4 \ln \left( \frac{x + r}{a} \right)$$

$$\int r^5 \, dx = \frac{1}{6} x r^5 + \frac{5}{24} a^2 x r^3 + \frac{5}{16} a^4 x r + \frac{5}{16} a^6 \ln \left( \frac{x + r}{a} \right)$$

$$\int x r^{2n+1} \, dx = \frac{r^{2n+3}}{2n+3}$$

$$\int x^2 r \, dx = \frac{x r^3}{4} - \frac{a^2 x r}{8} - \frac{a^4}{8} \ln \left( \frac{x + r}{a} \right)$$

$$\int x^2 r^3 \, dx = \frac{x r^5}{6} - \frac{a^2 x r^3}{24} - \frac{a^4 x r}{16} - \frac{a^6}{16} \ln \left( \frac{x + r}{a} \right)$$

$$\int x^3 r \, dx = \frac{r^5}{5} - \frac{a^2 r^3}{3}$$

$$\int x^3 r^3 dx = \frac{r^7}{7} - \frac{a^2 r^5}{5}$$

$$\int x^3 r^{2n+1} dx = \frac{r^{2n+5}}{2n+5} - \frac{a^3 r^{2n+3}}{2n+3}$$

$$\int x^4 r dx = \frac{x^3 r^3}{6} - \frac{a^2 x r^3}{8} + \frac{a^4 x r}{16} + \frac{a^6}{16} \ln\left(\frac{x+r}{a}\right)$$

$$\int x^4 r^3 dx = \frac{x^3 r^5}{8} - \frac{a^2 x r^5}{16} + \frac{a^4 x r^3}{64} + \frac{3a^6 x r}{128} + \frac{3a^8}{128} \ln\left(\frac{x+r}{a}\right)$$

$$\int x^5 r dx = \frac{r^7}{7} - \frac{2a^2 r^5}{5} + \frac{a^4 r^3}{3}$$

$$\int x^5 r^3 dx = \frac{r^9}{9} - \frac{2a^2 r^7}{7} + \frac{a^4 r^5}{5}$$

$$\int x^5 r^{2n+1} dx = \frac{r^{2n+7}}{2n+7} - \frac{2a^2 r^{2n+5}}{2n+5} + \frac{a^4 r^{2n+3}}{2n+3}$$

$$\int \frac{r dx}{x} = r - a \ln\left|\frac{a+r}{x}\right| = r - a \sinh^{-1} \frac{a}{x}$$

$$\int \frac{r^3 dx}{x} = \frac{r^3}{3} + a^2 r - a^3 \ln\left|\frac{a+r}{x}\right|$$

$$\int \frac{r^5 dx}{x} = \frac{r^5}{5} + \frac{a^2 r^3}{3} + a^4 r - a^5 \ln\left|\frac{a+r}{x}\right|$$

$$\int \frac{r^7 dx}{x} = \frac{r^7}{7} + \frac{a^2 r^5}{5} + \frac{a^4 r^3}{3} + a^6 r - a^7 \ln\left|\frac{a+r}{x}\right|$$

$$\int \frac{dx}{r} = \sinh^{-1} \frac{x}{a} = \ln|x+r|$$

$$\int \frac{x dx}{r} = r$$

$$\int \frac{x^2 dx}{r} = \frac{x}{2} r - \frac{a^2}{2} \sinh^{-1} \frac{x}{a} = \frac{x}{2} r - \frac{a^2}{2} \ln|x+r|$$

$$\int \frac{dx}{xr} = -\frac{1}{a} \sinh^{-1} \frac{a}{x} = -\frac{1}{a} \ln\left|\frac{a+r}{x}\right|$$

## Интегралы с корнем из $x^2 - a^2$

Везде ниже:  $s = \sqrt{x^2 - a^2}$ .

Принято  $x^2 > a^2$ , для  $x^2 < a^2$ , смотрите следующий раздел.

$$\int s \, dx = \frac{1}{2} (xs - a^2 \ln(x + s))$$

$$\int xs \, dx = \frac{1}{3} s^3$$

$$\int \frac{s \, dx}{x} = s - a \cos^{-1} \left| \frac{a}{x} \right|$$

$$\int \frac{dx}{s} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + s|$$

Заметим, что  $\ln \left| \frac{x+s}{a} \right| = \operatorname{sgn}(x) \cosh^{-1} \left| \frac{x}{a} \right| = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+s}{x-s} \right)$ , где  $\cosh^{-1} \left| \frac{x}{a} \right|$  принимает только положительные значения.

$$\int \frac{x \, dx}{s} = s$$

$$\int \frac{x \, dx}{s^3} = -\frac{1}{s}$$

$$\int \frac{x \, dx}{s^5} = -\frac{1}{3s^3}$$

$$\int \frac{x \, dx}{s^7} = -\frac{1}{5s^5}$$

$$\int \frac{x \, dx}{s^{2n+1}} = -\frac{1}{(2n-1)s^{2n-1}}$$

$$\int \frac{x^{2m} \, dx}{s^{2n+1}} = -\frac{1}{2n-1} \frac{x^{2m-1}}{s^{2n-1}} + \frac{2m-1}{2n-1} \int \frac{x^{2m-2} \, dx}{s^{2n-1}}$$

$$\int \frac{x^2 \, dx}{s} = \frac{xs}{2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| \frac{x+s}{a} \right|$$

$$\int \frac{x^2 \, dx}{s^3} = -\frac{x}{s} + \ln \left| \frac{x+s}{a} \right|$$

$$\int \frac{x^4 \, dx}{s} = \frac{x^3 s}{4} + \frac{3}{8} a^2 xs + \frac{3}{8} a^4 \ln \left| \frac{x+s}{a} \right|$$

$$\int \frac{x^4 \, dx}{s^3} = \frac{xs}{2} - \frac{a^2 x}{s} + \frac{3}{2} a^2 \ln \left| \frac{x+s}{a} \right|$$

$$\int \frac{x^4 \, dx}{s^5} = -\frac{x}{s} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{s^3} + \ln \left| \frac{x+s}{a} \right|$$

$$\int \frac{x^{2m} dx}{s^{2n+1}} = (-1)^{n-m} \frac{1}{a^{2(n-m)}} \sum_{i=0}^{n-m-1} \frac{1}{2(m+i)+1} \binom{n-m-1}{i} \frac{x^{2(m+i)+1}}{s^{2(m+i)+1}}, \text{ где } n > m \geq 0$$

$$\int \frac{dx}{s^3} = -\frac{1}{a^2} \frac{x}{s}$$

$$\int \frac{dx}{s^5} = \frac{1}{a^4} \left[ \frac{x}{s} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{s^3} \right]$$

$$\int \frac{dx}{s^7} = -\frac{1}{a^6} \left[ \frac{x}{s} - \frac{2}{3} \frac{x^3}{s^3} + \frac{1}{5} \frac{x^5}{s^5} \right]$$

$$\int \frac{dx}{s^9} = \frac{1}{a^8} \left[ \frac{x}{s} - \frac{3}{3} \frac{x^3}{s^3} + \frac{3}{5} \frac{x^5}{s^5} - \frac{1}{7} \frac{x^7}{s^7} \right]$$

$$\int \frac{x^2 dx}{s^5} = -\frac{1}{a^2} \frac{x^3}{3s^3}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{s^7} = \frac{1}{a^4} \left[ \frac{1}{3} \frac{x^3}{s^3} - \frac{1}{5} \frac{x^5}{s^5} \right]$$

$$\int \frac{x^2 dx}{s^9} = -\frac{1}{a^6} \left[ \frac{1}{3} \frac{x^3}{s^3} - \frac{2}{5} \frac{x^5}{s^5} + \frac{1}{7} \frac{x^7}{s^7} \right]$$

## Интегралы с корнем из $a^2-x^2$

---

Везде ниже:  $t = \sqrt{a^2 - x^2}$  ( $|x| \leq |a|$ )

$$\int t dx = \frac{1}{2} \left( xt + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) = \frac{1}{2} \left( xt - a^2 \arccos \frac{x}{a} \right)$$

$$\int xt dx = -\frac{1}{3} t^3$$

$$\int \frac{t dx}{x} = t - a \ln \left| \frac{a+t}{x} \right|$$

$$\int \frac{dx}{t} = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x dx}{t} = -t$$

$$\int \frac{x^2 dx}{t} = -\frac{x}{2} t + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int t dx = \frac{1}{2} \left( xt - \operatorname{sgn} x \cosh^{-1} \left| \frac{x}{a} \right| \right)$$

## Интегралы с корнем из общего квадратного трёхчлена

---

Здесь обозначено:  $R = ax^2 + bx + c$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2\sqrt{aR} + 2ax + b| \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sinh^{-1} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \quad (a > 0, 4ac - b^2 > 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax + b| \quad (a > 0, 4ac - b^2 = 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \quad (a < 0, 4ac - b^2 < 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)^3}} = \frac{4ax + 2b}{(4ac - b^2)\sqrt{R}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)^5}} = \frac{4ax + 2b}{3(4ac - b^2)\sqrt{R}} \left( \frac{1}{R} + \frac{8a}{4ac - b^2} \right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)^{2n+1}}} = \frac{4ax + 2b}{(2n-1)(4ac - b^2)R^{(2n-1)/2}} + \frac{8a(n-1)}{(2n-1)(4ac - b^2)} \int \frac{dx}{R^{(2n-1)/2}}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{\sqrt{R}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)^3}} = -\frac{2bx + 4c}{(4ac - b^2)\sqrt{R}}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)^{2n+1}}} = -\frac{1}{(2n-1)aR^{(2n-1)/2}} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{R^{(2n+1)/2}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left( \frac{2\sqrt{cR} + bx + 2c}{x} \right)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \sinh^{-1} \left( \frac{bx + 2c}{|x|\sqrt{4ac - b^2}} \right)$$

## Интегралы с корнем из линейной функции

---

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{-2}{\sqrt{b}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{ax+b}{b}}$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x} dx = 2 \left( \sqrt{ax+b} - \sqrt{b} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{ax+b}{b}} \right)$$

$$\int \frac{x^n}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2}{a(2n+1)} \left( x^n \sqrt{ax+b} - bn \int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{ax+b}} dx \right)$$

$$\int x^n \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{2n+1} \left( x^{n+1} \sqrt{ax+b} + bx^n \sqrt{ax+b} - nb \int x^{n-1} \sqrt{ax+b} dx \right)$$

## Библиография

---

### Книги

- Градштейн И. С. Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (4-е издание). М.: Наука, 1963. ISBN 0-12-294757-6 // EqWorld (<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/handbooks.htm>)
- Двайт Г. Б. *Таблицы интегралов* СПб: «Издательство и типография АО ВНИИГ им. Б. В. Веденеева», 1995.-176 с. ISBN 5-85529-029-8.
- D. Zwillinger. *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*, 31st ed., 2002. ISBN 1-58488-291-3.
- M. Abramowitz and I. A. Stegun, eds. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 1964. ISBN 0-486-61272-4
- Корн Г. А., Корн Т. М. *Справочник по математике для научных работников и инженеров* (<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Korn1973ru.djvu>). — М.: «Наука», 1974.

### Таблицы интегралов

- Интегралы на EqWorld (<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/auxiliary/aux-integrals.htm>)
- S.O.S. Mathematics: Tables and Formulas (<http://www.sosmath.com/tables/tables.html>)

### Вычисление интегралов

- The Integrator (<http://integrals.wolfram.com>) (на Wolfram Research)
- Империя Чисел (<http://ru.numberempire.com/integralcalculator.php>)

---

Источник — «[https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Список\\_интегралов\\_от\\_иррациональных\\_функций&oldid=67122626](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Список_интегралов_от_иррациональных_функций&oldid=67122626)»

---

Эта страница последний раз была отредактирована 2 декабря 2014 в 20:32.

Текст доступен по лицензии [Creative Commons Attribution-ShareAlike](#); в отдельных случаях могут действовать дополнительные условия.

Wikipedia® — зарегистрированный товарный знак некоммерческой организации [Wikimedia Foundation, Inc.](#)

[Свяжитесь с нами](#)