Solução da 44 OBM (2022)

---

1. Dado $0 < a < 1$, determine todas as funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas em $x = 0$ tais que $f(x) + f(ax) = x, \forall x \in \mathbb{R}$

---

2. Considere o conjunto G de matrizes 2×2 dado por

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1, c \text{ é múltiplo de } 3 \right\}$$

e as matrizes em G

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mostre que qualquer matriz de G pode ser escrita como por um produto $M_1, M_2, \ldots, M_r$ com $M_i \in \{A, A^{-1}, B, B^{-1}\}$, $\forall i \leq r$.

---

3. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de inteiros. Definimos $a_n^{(0)} = a_n$, para todo n natural. Para todo inteiro$M \geq 0$, definimos $(a_n^{(M+1)})_{n\in\mathbb{N}} : a_{n+1}^{(M)} - a_n^{(M)}, \forall n \in \mathbb{N}$. E dizemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é $(M+1)$-autorreferente se existem k_1 e k_2 naturais fixados, tais que $a_{n+k_1} = a_{n+k_2}^{(M+1)}, \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Existe uma sequência de inteiros tal que o menor M para o qual ela éM-autorreferente é $M = 2022$?

b) Existe uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos tal que o menor M para o qual ela é M-autorreferente é $M = 2022$?

---

4. Dados $c, a > 0$, considere a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ definida por $x_1 = c$ e $x_{n+1} = x_n e^{-x_n^a}$ para $n \geq 1$. Para quais valores reais de β a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\beta}$ é convergente?

Solução: Primeiramente, notemos que, como $e^r > 0, \forall r \in \mathbb{R}$, $x_n > 0$ para todo $n \geq 1$. Logo, x_n^a também é positivo para $n \geq 1$, donde $-x_n^a < 0$.

Agora, para analizar a convergência, aplicamos o teste da razão, isto é

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^{\beta}}{x_n^{\beta}} = \lim_{n\to\infty} (\frac{x_{n+1}}{x_n})^{\beta},$$

onde, substituindo x_{n+1} por sua relação de recorrência, temos

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{x_n e^{-x_n^a}}{x_n})^{\beta} = \lim_{n\to\infty} (e^{-x_n^a})^{\beta} = \lim_{n\to\infty} e^{-\beta x_n^a}.$$

Para uma série convergir, é necessário que o limite acima seja menor que 1. Assim, temos que $e^{-\beta x_n^a} < 1$, donde $-\beta x_n^a < 0$, ou seja, $\beta > 0$. Finalmente, para $\beta = 0$, note que a série seria a soma de termos constantes iguais a 1, o que diverge. Logo, a série converge para todo $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\beta > 0$.

■

---

5. Dado $X \subset \mathbb{N}$, definimos $d(X)$ como sendo o maior $c \in [0, 1]$ tal que, para quaisquer $a < c$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, existem $m, r \in \mathbb{N}$ com $r > n_0$ e $|X \cap [m, m + r)|/r \geq a$. Sejam $E, F \subset \mathbb{N}$ com $d(E)d(F) > 1/4$. Prove que, para qualquer p primo e $k \in \mathbb{N}$, existem $m \in E$ e $n \in F$ com $m \equiv n \pmod{p^k}$.

---

6. Seja $p \equiv \pmod 4$ um número primo, e seja θ um ângulo tal que $\tan(\theta)$ é racional. Prove que $\tan((p+1)\theta)$ é um número racional cujo númerador é múltiplo de p, ou seja $\tan((p+1)\theta) = \frac{u}{v}$ com $u, v \in \mathbb{Z}, v > 0$, $\text{mdc}(u, v) = 1$ e $u \equiv 0 \pmod p$.