PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

COORDENAÇÃO LOCAL DO PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

1 Descrição do projeto

1.1 Resumo

Neste trabalho pretendemos apresentar um resultado de existência e unicidade de solução para um problema envolvendo a equação da onda. Será estudado classes de problemas com dados iniciais regulares. Precisamente, consideraremos os dados iniciais em espaços de funções m vezes continuamente diferenciáveis. Para isso será efetuado levantamento bibliográfico preliminar sobre tópicos de Análise Real e Espaços Métricos. Serão estudados aspectos relativos ao espaço das funções contínuas com métricas apropriadas. O resultado principal será provado via Séries de Fourier.

1.2 Objetivos

- Complementar a formação do discente, visando um perfil científico.
- Estudar aspectos relativos aos espaços das funções contínuas, e das funções continuamente diferenciáveis, sob o ponto de vista de espaços métricos.
- Provar um teorema que estabeleça condições para a existência de solução para a equação de propagação de ondas acústicas.
- Propiciar que o aluno aprenda aspectos teóricos sobre Análise Real, Espaços Métricos e aplicá-los no estudo da equação da onda.
- Apresentar os resultados finais no Encontro Anual de Iniciação Científica, Tecnológica e Inovação.

1.3 Cronograma de atividades

Atividades	**Set**	**Out**	**Nov**	**Dez**	**Jan**	**Fev**	**Mar**	**Abr**	**Mai**	**Jun**	**Jul**	**Ago**
Estuda das referências	X	X	X	X	X	X	X	X				
Escruta do relatório parcial					X	X						
Formulação do resultado							X	X	X	X		
Prova do resultado								X	X	X	X	
Escrita do relatório final										X	X	X

1.4 Materiais e métodos

Como trata-se de pesquisa teórica, inicialmente realizamos um levantamento bibliográfico de modo a ter subsídios teóricos suficientes para demonstrar o resultado principal. Basicamente deve envolver aspectos relativos à Análise Real e Espaços Métricos. Para isto, o fiz estudos individuais das referências bibliográficas e apresentei seminários semanais ao orientador. Estes seminários foram realizados em sala de aula com a exposição em quadro ou remotamente. Além dos encontros nos seminários me reuni com o orientador, sempre que necessário, para discussão e análise dos resultados obtidos.

Os estudos preliminares compreenderão uma revisão contendo resultados de Análise Real e tópicos preliminares de Espaços Métricos. Isto será feito do um ponto de vista teórico e seguirá o contido nas referências White (1993), Lima (1976), Lima (1977), Lima (2002), Medeiros et al. (2011), Rudin (1975) e Kreyszig (1978). Um dos principais objetivos é estudar aspectos relativos ao espaço das funções contínuas. Tal espaço será estudado do ponto de vista de espaços métricos e será explorado suas características com diferentes métricas. O segundo principal objetivo é explorar as características dos espaços das funções contínuas, e das funções m vezes continuamente diferenciáveis, e provar um teorema que garanta a existência de solução para um problema de valores iniciais envolvendo a equação da onda.

2 Descrição dos principais resultados

Em seguida, discutiremos os principais resultados obtidos até o momento de acordo com os estudos realizados. Estão separados em área de estudo, organizados na ordem de pesquisa realizada. Apresentamos também pequenas descrições e justificativas para o foco em cada uma das áreas citadas.

2.1 Teorema de existência de solução da equação da onda

Como o resultado que buscamos apresentar no E Encontro Anual de Iniciação Científica, Tecnológica e Inovação é relacionado à equação da onda acústica, iniciamos o projeto com o estudo de Equações Diferenciais Parciais (EDPs), a qual a equação da onda é um exemplo.

Assim, esta subseção, apresentaremos definições bases relacionadas ao estudo de EDPs, em específico, o fundamento teórico necessário para a prova do teorema de existência e unicidade de solução para o problema de valor inicial e de fronteira (PVIF) associado à equação da onda.

Definição 2.1.1. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *periódica* de período T se, e somente se, $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definição 2.1.2. Dada uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ onde $u_n(x) : I \to \mathbb{R}$ *converge pontualmente* se, para cada $x_0 \in I$ fixado, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ é convergente. Ou seja, dados $\epsilon > 0$ e $x_0 \in I$, existe $N(\epsilon, x_0) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \sum_{j=n}^{m} u_j(x_0) \right| < \epsilon \tag{1}$$

para todo $m \geq n \geq N(\epsilon, x_0)$.

Definição 2.1.3. Dada uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ onde $u_n(x) : I \to \mathbb{R}$ *converge uniformemente* se, para cada $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ (ou seja, independente de $x \in I$) tal que

$$\left| \sum_{j=n}^{m} u_j(x) \right| < \epsilon \tag{2}$$

para todo $m \geq n \geq N(\epsilon)$ e para todo $x \in I$.

Teorema 2.1.1. (Teste M de Weierstrass) *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ uma série de funções $u_n : I \to \mathbb{R}$ definidas em um subconjunto I de $\mathbb{R}$. Suponha que existam constantes M_n tais que*

$$|u_n(x)| \leq M_n|, \qquad \textit{para todo } x \in I, \tag{3}$$

e que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convirja. Então a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ tem convergência uniforme em I.

Definição 2.1.4. Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica, de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, podemos expressá-la como uma *série* *de Fourier* da seguinte forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{4}$$

Definição 2.1.5. Dada uma função f que possa se expressa como um série de Fourier, os coeficientes a_n e b_n são chamados de *coeficientes de Fourier* de f e são dados por

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx; \quad n \geq 0 \tag{5}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx; \quad n \geq 1 \tag{6}$$

Definição 2.1.6. A equação da onda é dada pelo Problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF)

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & \text{em } \mathbb{R} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & \\ u(x,0) = f(x), & \text{em } 0 \leq x \leq L \\ u_t(x,0) = g(x), & \text{em } 0 \leq x \leq L \end{cases} \tag{7}$$

Definição 2.1.7. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *seccionalmente diferenciável* se ela for seccionalmente contínua e se a sua derivada f' for seccionalmente contínua.

Teorema 2.1.2. (Teorema de Fourier) *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável de período $2L$. Então, a série de Fourier de f converge em cada ponto x para*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2}[f(x+h) + f(x-h)] \tag{8}$$

Definição 2.1.8. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *par* se $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definição 2.1.9. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *ímpar* se $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.1.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par integrável em qualquer intervalo $[-L, L]$. Então*

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx. \tag{9}$$

Portanto, se f é par e de período $2L$, então os coeficientes de Fourier são dados por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx, \\ b_n &= 0 \end{aligned}$$

Proposição 2.1.2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função ímpar integrável em qualquer intervalo $[-L, L]$. Então*

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0 \tag{10}$$

Portanto, se f é ímpar e de período $2L$, então os coeficientes de Fourier são dados por

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \\ b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx \end{aligned}$$

Proposição 2.1.3. (Desigualdade de Bessel) *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrado integrável em $[-L, L]$ (ou seja, $\int_{-L}^{L} |f(x)|\,dx$ exista). e a_n, b_n sejam seus coeficientes de Fourier. Então*

$$\frac{1}{2}a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2\,dx \tag{11}$$

Teorema 2.1.3. (Teorema de existência de solução da equação da onda) *Dado o problema de valor inicial e de contorno*

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & \text{em } \mathbb{R} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), & \text{em } 0 \leq x \leq L \\ u_t(x,0) = g(x), & \text{em } 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Sendo f e g funções contínuas em $[0, L]$ tais que f, f', f'' e g, g' são contínuas e f''' e g'' sejam seccionalmente contínuas. Seja $f(0) = f(L) = f''(0) = g(0) = g(L) = 0$ então

1. a_n, b_n estão bem definidos em

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx, \tag{12}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx \tag{13}$$

2. *Ocorre que*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{14}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{15}$$

3. *A solução do problema é dada por*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{16}$$

onde $u(x,t)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, de classe C^2.

2.2 Cardinalidade de conjuntos

Dado o estudo específico sobre a equação da onda, iniciamos com uma fundamentação teórica em Análise Real, seguindo Lima (1976) como referência principal. Isso se deve ao fato de que a equação da onda é uma equação diferencial parcial de segunda ordem, e, para a resolução de tal equação, é necessário o estudo de séries de Fourier.

Nesta subseção, definiremos os conceitos de conjuntos finitos e infinitos, e apresentaremos os conceitos de cardinalidade de conjuntos e, com isso, a distinção entre conjuntos numeráveis e não numeráveis. Para tal, definiremos e tomaremos como partida o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.

Definição 2.2.1. Dado um conjunto $\mathbb{N}$ e uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, chamamos os elementos desse conjunto de números naturais se, e somente se, s satisfaz os seguintes axiomas *(chamados Axiomas de Peano)*

1. $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função injetora.

2. $\mathbb{N} \backslash s(\mathbb{N})$ consta de um só elemento; tal elemento é chamado de "um", com símbolo 1. Ou seja, 1 não é sucessor de nenhum número natural.

3. Se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto tal que $1 \in \mathbb{N}$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \in X$, então $s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Definição 2.2.2. Em $\mathbb{N}$, definimos a adição de dois números naturais como a operação $+$ sobre um par (m,n) da seguinte forma:

1. $m + 1 = s(m)$

2. $m + s(n) = s(m + n)$, ou seja, $m + (n + 1) = (m + n) + 1$

Definição 2.2.3. Em $\mathbb{N}$, definimos a multiplicação de dois números naturais como a operação $\cdot$ sobre um par (m, n) da seguinte forma:

1. $m \cdot 1 = m$

2. $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$

Teorema 2.2.1. *Sobre as operações de adição e multiplicação de números naturais, temos as seguintes propriedades:*

- *associatividade:* $(m + n) + p = m + (n + p)$ *e* $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$

- *comutatividade:* $m + n = n + m$ *e* $m \cdot n = n \cdot m$

- *distributividade:* $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$

- *lei do corte:* $m + p = n + p \Rightarrow m = n$ *e* $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$

Teorema 2.2.2. (Princípio da boa-ordenação) *Todo subconjunto não vazio* $A \subset \mathbb{N}$ *possui um menor elemento.*

Definição 2.2.4. Definimos como o conjunto de inteiros menores ou iguais a n como $I_n = \{p \in \mathbb{N}; p \leq n\}$.

Definição 2.2.5. Um conjunto X é dito finito se é vazio ou, então, se existe uma função bijetora $f : I_n \to X$. A bijeção f chama-se *contagem* de X e o número n chama-se *número de elementos* ou *número cardinal* de X.

Teorema 2.2.3. *Seja* X *um conjunto finito e* $f : X \to X$ *uma função. Então,* f *é injetora se, e somente se,* f *é sobrejetora.*

Definição 2.2.6. Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é dito *limitado* quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq p, \forall x \in X$.
Corolário 1. *Um subconjunto* X *de* $\mathbb{N}$ *é finito se, e somente se,* X *é limitado.*

Definição 2.2.7. Um conjunto X é dito infinito se não é finito. Ou seja, X é infinito se, e somente se, não existe uma função bijetora $f : I_n \to X$ para nenhum $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.2.4. *Se* X *é um conjunto infinito, então existe uma função injetora* $f : \mathbb{N} \to X$.
Corolário 1. *Um conjunto* X *é infinito se, e somente se, existe uma bijeção* $\psi : X \to Y$ *sobre um subconjunto próprio* $Y \subset X$.

Definição 2.2.8. Um conjunto X é dito *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$. Neste caso, f chama-se *enumeração* de X.

Teorema 2.2.5. *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*
Corolário 1. *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.*

2.3 Números reais

Dando sequência nos estudos de Análise Real, tocamos em seu pilar fundamental, o corpo dos números reais.

Nesta subseção, exibiremos as definições de corpo, corpo ordenado e corpo ordenado completo, e, em seguida, tomaremos por axioma a existência de um corpo ordenado completo, chamado de corpo dos números reais, e apresentaremos algumas de suas propriedades e teoremas relacionados com tal corpo.

Definição 2.3.1. Uma terna $(K, +, \cdot)$ onde K é um conjunto e $+, \cdot$ são operações é um *corpo* se, e somente se, satisfaz as seguintes propriedades:

1. *Associatividade:* para todo $a, b, c \in K$, temos que $(a+b)+c = a+(b+c)$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

2. *Comutatividade:* para todo $a, b \in K$, temos que $a+b = b+a$ e $a \cdot b = b \cdot a$.

3. *Elemento neutro:* existem $0, 1 \in K$ tais que $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$ para todo $a \in K$.

4. *Distributividade:* para todo $a, b, c \in K$, temos que $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

5. Todo $a \in K$ possui um *oposto* $-a$ tal que $a + (-a) = 0$.

6. Todo $a \in K \backslash \{0\}$ possui um *inverso* a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

Definição 2.3.2. Um corpo $(K, +, \cdot)$ é dito *ordenado* se existe um subconjunto $P \subset K$, chamado de conjunto dos elementos positivos, tal que

1. A soma de dois elementos positivos é um elemento positivo: $a, b \in P \Rightarrow a + b \in P$ e $a, b \in P \Rightarrow a \cdot b \in P$.

2. Dado $a \in K$ existem três possibilidades: $a \in P$, ou $-a \in P$ ou $a = 0$.

Definição 2.3.3. Em um corpo ordenado $(K, +, \cdot)$, podemos definir uma relação de ordem $<$ e dizemos que *x é menor que y* se $x < y \iff y - x \in P$.

Teorema 2.3.1. *Em um corpo ordenado $(K, +, \cdot)$, as afirmações são equivalentes:*

1. *$\mathbb{N} \subset K$ é ilimitado superiormente;*
2. *Dados quaisquer $a, b \in K$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$;*
3. *Dado qualquer $a \in K$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.*

Um corpo ordenado que satisfaz qualquer uma das propriedades acima é dito arquimediano.

Definição 2.3.4. Dado um corpo ordenado $(K, +, \cdot)$, definimos como *valor absoluto (ou módulo)* de um elemento $a \in K$ como $|0| = 0$ e $|a| = a$ se $a \in P$ e $|a| = -a$ se $-a \in P$.

Definição 2.3.5. Dado um corpo ordenado $(K, +, \cdot)$, um subconjunto $A \subset K$ é dito *limitado superiormente* se existe $M \in K$ tal que $a \leq M$ para todo $a \in A$. Nesse caso dizemos que M é uma *cota superior* de A.

Analogamente se define um conjunto *limitado inferiormente* e *cota inferior*.

Definição 2.3.6. Dado um corpo ordenado $(K, +, \cdot)$, um subconjunto $A \subset K$, dizemos que $a \in A$ é o *supremo* de A se

1. a é uma cota superior de A.
2. Se b é uma cota superior de A, então $a \leq b$.

Ou seja, a é o menor dos limitantes superiores de A e denotamos $a = \sup A$.

Analogamente, definimos o *ínfimo* de A, denotado por $\inf A$.

Definição 2.3.7. Dado um corpo ordenado $(K, +, \cdot)$, dizemos que tal corpo é *completo* se, e somente se, todo subconjunto não vazio $A \subset K$ que é limitado superiormente possui um supremo.

Definição 2.3.8. Tomamos por **axioma** a existência de um corpo ordenado completo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, chamado de *corpo dos números reais*.

Proposição 2.3.1. (Desigualdade de Bernoulli) *Para todo $x \in \mathbb{R}, x \geq -1$ e todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.*

Proposição 2.3.2. (Desigualdade triangular) *Se $x, y \in \mathbb{R}$ então $|x+y| \leq |x| + |y|$.*

Teorema 2.3.2. (Teorema dos subintervalor encaixados) *Dada uma sequência de intervalos limitados e fechados* $I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots$, $I_n = [a_n, b_n]$ *então existe um número real* c *tal que* $c \in I_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.3.3. *O conjunto dos números reais não é enumerável.*

2.4 Sequências

Agora, com o corpo dos números reais definido, podemos estudar as sequências de números reais e seus limites. Tal estudo nos fornecerá as ferramentes necessárias para a compreensão do conceito de limite, funções e continuidade, conceitos essenciais na Análise Real para a compreensão das funções nas quais estamos interessados.

Em específico, nos dá o embasamento necessário para a compreensão da noção de derivada mais adiante, na qual a teoria das EDPs se baseia.

Aqui será apresentada a definição de sequência de números reais e a noção de limite em sua forma mais simples, sendo o limite de uma sequência. Assim, definiremos os conceitos de sequências convergentes, divergentes e sequências de Cauchy. Em seguida, apresentaremos alguns teoremas relacionados com tais conceitos.

Definição 2.4.1. Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um número real x_n. Denota-se a sequência por (x_n) ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definição 2.4.2. Uma sequência (x_n) é dita *limitada superiormente* se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Analogamente, definimos uma sequência *limitada inferiormente*.

Definição 2.4.3. Dizemos que o número real a é limite da sequência (x_n) se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$ para todo $n \geq N$.

Ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N \implies |x_n - a| < \epsilon. \quad (17)$$

Definição 2.4.4. Uma sequência (x_n) é dita *convergente* se existe um número real a tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, caso contrário, dizemos que a sequência é *divergente*.

Teorema 2.4.1. (Unicidade do limite) *Se a sequência* (x_n) *é convergente, então o limite é único.*

Definição 2.4.5. Dada uma sequência (x_n), definimos como subsequência a restrinção de (x_n) a um subconjunto infinito de $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ onde $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots\}$. Escrevemos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$.

Teorema 2.4.2. *Seja (x_n) uma sequência onde $\lim x_n = a$, etão toda subsequência de (x_n) também converge para a.*

Teorema 2.4.3. *Toda sequência convergente é limitada.*

Definição 2.4.6. Uma sequência (x_n) é dita *monótona* se $x_{n+1} \geq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.4.4. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Teorema 2.4.5. (Teorema de Bolzano-Weierstrass) *Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.*

Teorema 2.4.6. *Seja (x_n) uma sequência monótona que possui uma subsequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ convergente. Então, a sequência (x_n) também é convergente.*

Teorema 2.4.7. (Teorema do sanduíche) *Sejam $(x_n), (y_n), (z_n)$ sequências de números reais tais que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Se $\lim x_n = \lim z_n = a$, então $\lim y_n = a$.*

Definição 2.4.7. Uma sequência (x_n) é dita *de Cauchy* se, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \epsilon$ para todo $n, m \geq N$.

Teorema 2.4.8. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*
Corolário 1. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Teorema 2.4.9. *Toda sequência de Cauchy de números reais é convergente.*

2.5 Topologia na reta

Com a bagagem teórica sobre sequências de números reais, podemos avançar para o estudo do conceito de topologia no corpo dos números reais. A topologia é uma área da matemática que estuda as propriedades de conjuntos bem como, de forma geral, as noções de limite e de continuidade.

Dessa forma, apresentaremos em seguida conceitos básicos relacionados à topologia dos números reais; definiremos conceitos como conjuntos abertos, fechados, ponto interior, ponto aderente, ponto de acumulação, vizinhança e conjuntos compactos.

Definição 2.5.1. Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, um ponto $a \in X$ é dito ponto interior de X quando existe $\epsilon > 0$ tal que o intervalo aberto $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset X$.

O conjunto dos pontos interiores de X chama-se *interior* de X e é denotado por $\text{int}(X)$.

Definição 2.5.2. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito *aberto* se todo ponto de X é um ponto interior de X. Ou seja, $X = \text{int}(X)$.

Definição 2.5.3. Dado $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X$, dizemos que a é ponto aderente de X se, e somente se, $\exists (x_n) \subset X$ tal que $\lim x_n = a$.

Note que todo ponto b de X é um ponto aderente de X, pois podemos tomar a sequência constante $x_n = b$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Chama-se *fecho* de X o conjunto dos pontos aderentes de X e é denotado por $\overline{X}$ e tem-se $X \subset \overline{X}$.

Definição 2.5.4. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito *fechado* se $\overline{X} = X$. Ou seja, X contém todos os seus pontos aderentes.

Definição 2.5.5. Dado $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, definimos o *bola aberta* de raio ϵ centrada em a como o conjunto $B(a, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < \epsilon\}$.

Dizemos que $B(a, \epsilon)$ é uma vizinhança de a.

Teorema 2.5.1. *Um ponto a é ponto aderente de X se, e somente se, toda vizinhança de a contém um ponto de X.*

Teorema 2.5.2. *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $A = \mathbb{R} \backslash F$ é aberto.*

Definição 2.5.6. Um ponto $a \in \mathbb{R}$ é *ponto de acumulação* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se, e somente se, toda vizinhança de a contém algum ponto de X diferente de a.

Se a não é ponto de acumulação de X, então a é um *ponto isolado* de X.

Teorema 2.5.3. *Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *a é ponto de acumulação de X.*

2. *Existe uma sequência $(x_n) \subset X \backslash \{a\}$ tal que $\lim x_n = a$.*

3. *Toda vizinhança de a contém infinitos pontos de X.*

Definição 2.5.7. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito *compacto* quando é limitado e fechado.

Teorema 2.5.4. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência $(x_n) \subset X$ possui uma subsequência convergente para um ponto de X.*

2.6 Limites de funções

Finalmente, expandiremos o conceito de limite apresentado na seção 2.4 para funções reais de variável real.

Separamos em uma subseção própria, pois o conceito de limite de funções é essencial para a noção de continuidade e derivada de funções reais, ideias fundamentais para a compreensão das equações diferenciais parciais.

Portanto, exploraremos aqui a definção de limite de funções, que se difere levemente do limite de uma sequência, e os principais teoremas relacionados a existência e comportamento de uma ou mais funções.

Definição 2.6.1. Seja $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'$ ponto de acumulação de X. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o *limite de* $f(x)$ *quando* x *tende à* a se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Simbolicamente, temos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in X, \quad 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)-L| < \epsilon. \tag{18}$$

Teorema 2.6.1. *Sejam* $f, g : X \to \mathbb{R}, a \in X', \lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x \to a} g(x) = M$. *Se* $L < M$ *então existe* $\delta > 0$ *tal que* $x \in X, 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < g(x)$.

Teorema 2.6.2. (Teorema do sanduíche para funções) *Sejam* $f, g, h : X \to \mathbb{R}, a \in X'$ *e* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$. *Se* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *para* $x \in X \backslash \{a\}$, *então* $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

Teorema 2.6.3. *Sejam* $f : X \to \mathbb{R}, a \in X'$. *Para que* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *é necessário e suficiente que, para toda sequência* $(x_n) \subset X\backslash\{a\}$ *tal que* $\lim x_n = a$, *tem-se* $\lim f(x_n) = L$.

Teorema 2.6.4. (Unicidade do limite) *Sejam* $f : X \to \mathbb{R}, a \in X'$. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} f(x) = M$, *então* $L = M$.

Teorema 2.6.5. *Sejam* $f : X \to \mathbb{R}, a \in X'$. *Se existe* $\lim_{x\to a} f(x)$ *então* f *é limitada em uma vizinhança de* a. *Ou seja, existem* $M > 0$ *e* $\delta > 0$ *tal que* $x \in X, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x)| \leq M$.

2.7 Considerações

Destarte, foi trabalhado até o momento a fundamentação básica da Análise Real, com conceitos de sequências, limites, funções e topologia na reta. Tais noções servirão como baluarte para os estudos que seguem, cada vez mais se aproximando ao cerne buscado: A resolução da equação diferencial parcial que descreve o comportamento de uma onda acústica.

Em seguida, trabalharemos a teoria relaciona à funções contínuas e então passaremos para o estudo de espaços métricos. Por último, abordaremos a teoria física que fundamenta o comportamento de ondas acústicas, a equação da onda, e a resolução de tal equação por meio de séries de Fourier a fim de encaixá-la nos moldes do **Teorema de existência de solução da equação da onda**, no qual garantiu-se a existência de solução.