图论及其应用

潘 嵘

panr@sysu.edu.cn

本次课主要内容

平面性算法

(一)、涉及算法的相关概念

(二)、平面性算法

(一)、涉及算法的相关概念

关于图的平面性问题，我们已经建立了一些平面性判定方法：

（1）对于简单图$G = (n, m)$, 如果$m > 3n - 6$, 则G是非可平面的；

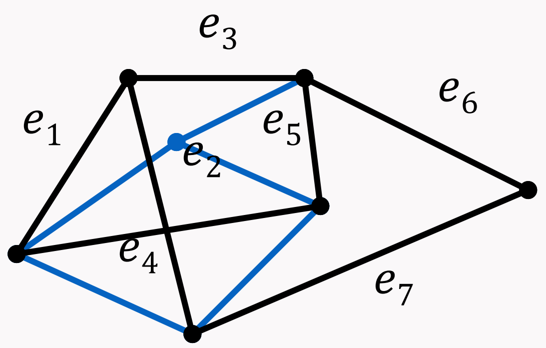
（2）对于连通图$G = (n, m)$, 如果每个面次数至少为$l \geq 3$, 且$m > (n-2)l / (l-2)$，则G是非可平面的；

（3）库拉托斯基定理：G是可平面的当且仅当G不含有与K_5或$K_{3,3}$同胚的子图；

（4）瓦格纳定理：G是可平面的当且仅当G不含有能够收缩成K_5或$K_{3,3}$的子图；

上面的判定方法，局限性很大。这次课我们将给出一个算法，其作用是：如果G非可平面，通过算法可以得到判定；如果G是可平面图，通过算法，可以给出一种平面嵌入形式。

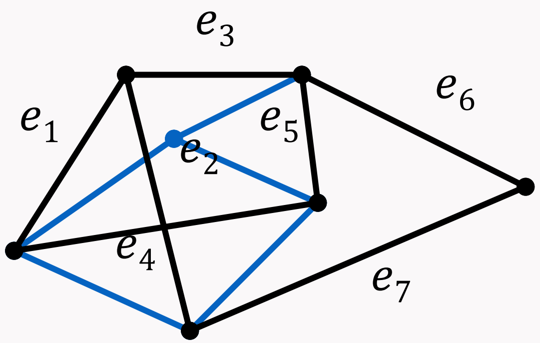
定义1 设H是G的一个子图，在$E(G)-E(H)$中定义一个二元关系“～”：$\forall e_1, e_2 \in E(G)-E(H), e_1 \sim e_2$，当且仅当存在一条途径$W$使得：（1）$e_1$与$e_2$分别是$W$的始边和终边，且(2) W的内点与H不能相交。



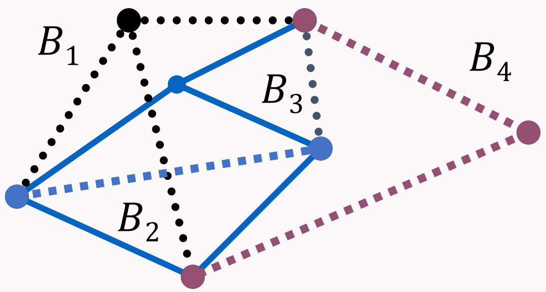
G

定义2 设B是$E(G)-E(H)$关于二元关系"~" 的等价类在G中的边导出子图，则称B是G关于子图H的一座桥。桥与H的公共顶点称为桥B在H中的附着顶点。

例1 在下图中，蓝色边在G中导出子图为H. 求出G关于H的所有桥。



G



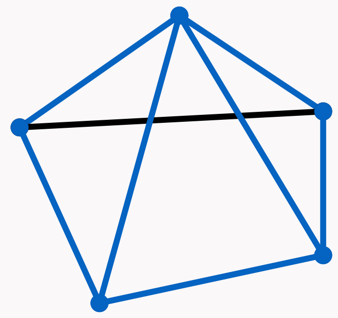
G

定义3 设H是图G的可平面子图，$\widetilde{H}$是H的一种平面嵌入。若G也是可平面图，且存在G的一个平面嵌入$\tilde{G}$, 使得：

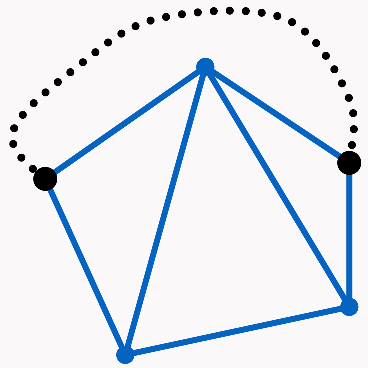
$$\widetilde{H} \subseteq \tilde{G},$$

称$\widetilde{H}$是G容许的。

例2 在G中，我们取蓝色边导出的子图为H, 并取$\widetilde{H} = H$.



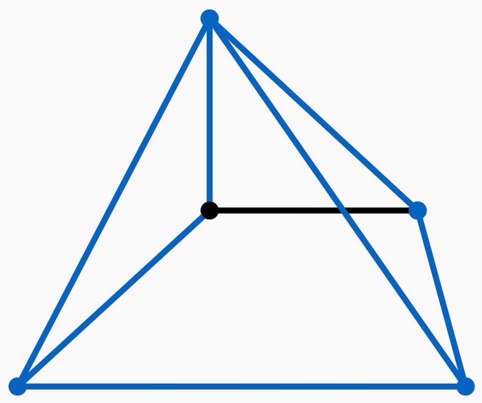
G



$\tilde{G}$

容易知道：$\widetilde{H}$是G容许的。

例3 在G中，我们取蓝色边导出的子图为H, 并取$\widetilde{H} = H$.



G

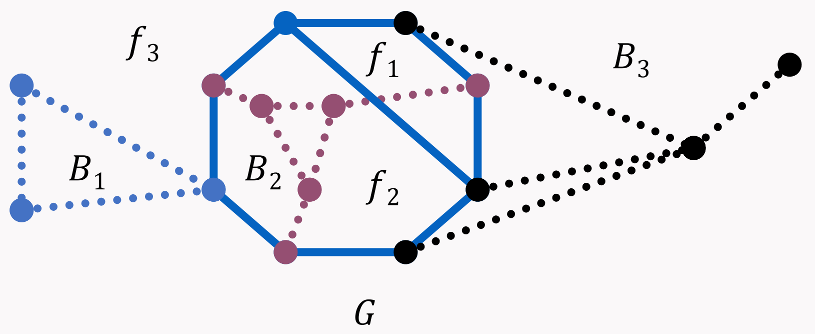
容易知道： $\widetilde{H}$不是G容许的。

定义4 设B是G中子图H的任意一座桥，若B对H的所有附着顶点都位于$\widetilde{H}$的某个面f的边界上，则称B在面f内可画入，否则，称B在面f内不可画入。

对于G的桥B,令：

$$F(B,\widetilde{H}) = \{f \mid f\text{是}\widetilde{H}\text{的面，且}B\text{在}f\text{内可画入}\}$$

例4 蓝色边的导出子图是H,如果取$\widetilde{H} = H$确定H的桥在$\widetilde{H}$中可以画入的面集合。



解：

$$F(B_1,\widetilde{H}) = \{f_2, f_3\} \quad F(B_2,\widetilde{H}) = \{f_3\} \quad F(B_3,\widetilde{H}) = \{f_3\}$$

定理1 设$\widetilde{H}$是G容许的，则对于H的每座桥B:

$$F\left(B, \widetilde{H}\right) \neq \Phi.$$

证明：因$\widetilde{H}$是G容许的，由定义，存在G的一个平面嵌入$\tilde{G}$,使得：

$$\widetilde{H} \subseteq \tilde{G}.$$

于是，H的桥B所对应的$\tilde{G}$的子图，必然限制在$\widetilde{H}$的某个面内。所以：

$$F\left(B, \widetilde{H}\right) \neq \Phi.$$

注：定理1实际上给出了一个图是可平面图的一个必要条件。这个必要条件表明：如果存在G的一个可平面子图H,使得对于某桥B,有$F\left(B, \widetilde{H}\right) = \Phi$,那么，$G$是非可平面的。

根据上面的结论：我们可以按如下方式来考虑G的平面性问题：

先取G的一个可平面子图H_1, 其平面嵌入是$\widetilde{H}_1$

对于H_1的每座桥B, 如果：$F\left(B, \widetilde{H}_1\right) = \Phi$, 则$G$非可平面

否则，取H_1的桥B_1, 作：$H_2 = B_1 \cup H_1$,再取一个面

$$f \in F\left(B_1, \widetilde{H}_1\right).$$

将B_1画入$\widetilde{H}_1$的面f中。

如果B_1可平面，则只要把B_1平面嵌入后，得到H_2的平面嵌入$\widetilde{H}_2$.

然后再进行上面相同的操作，可以得到G的边数递增的子图平面嵌入序列：

$$\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2 \cdots$$

最终，得到可平面图G的一种平面嵌入形式。

(二)、平面性算法

1964年，Demoucron，*Mlgrance*和*Pertuiset*提出了下面的平面性算法，简称*DMP*算法。

设G是至少三个顶点的简单块。

（1）取G的一个圈H_1, 求出H_1的一个平面嵌入$\widetilde{H}_1$. 置$i = 1$;

（2）若$E(G) - E(H_i) = \Phi$, 则停止；否则，确定G中H_i的所有桥，并对每座桥B, 求出

$$F\left(B, \widetilde{H}_{\mathrm{i}}\right);$$

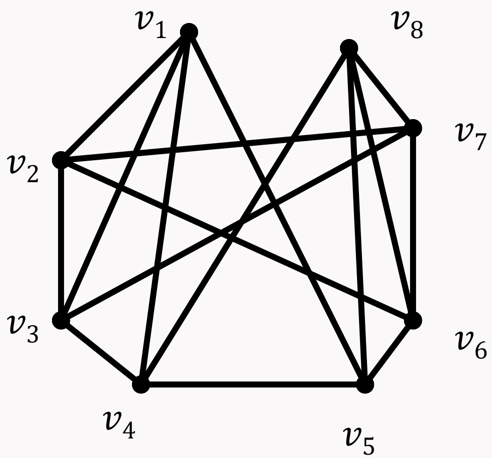
（3）若存在桥B, 使得：$F(B, \widetilde{H}_{\mathrm{i}}) = \Phi$，则停止（$G$不可平面）；否则，在$H_i$的所有桥中确定一个使得$\left|F(B, \widetilde{H}_{\mathrm{i}})\right|$最小的$B$, 并取$f \in F\left(B, \widetilde{H}_i\right)$;

（4）在桥B中取一条连接H_i中两个附着顶点的路P_i，$P_i \subseteq B_i$

置$H_{i+1} = H_i \cup P_i$, 把P_i画在$\widetilde{H}_{\mathrm{i}}$的面$f$内, 得到$\widetilde{H}_{i+1}$.

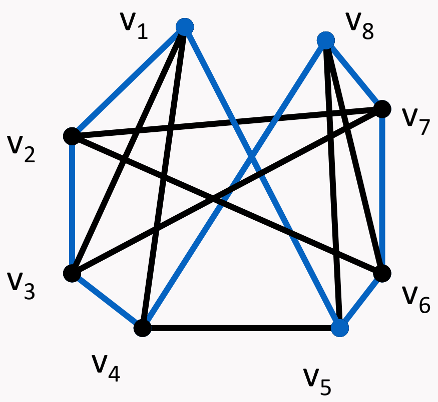
（5）置$i=i+1$转（2）。

例5 用平面性算法考察下图G的平面性。

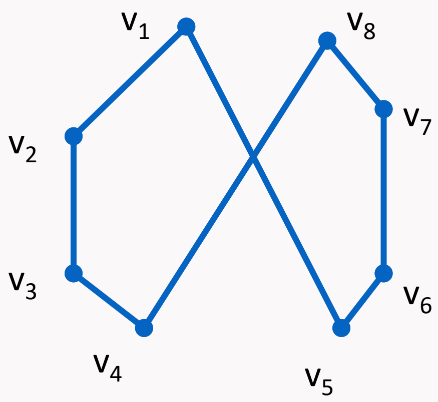


图G

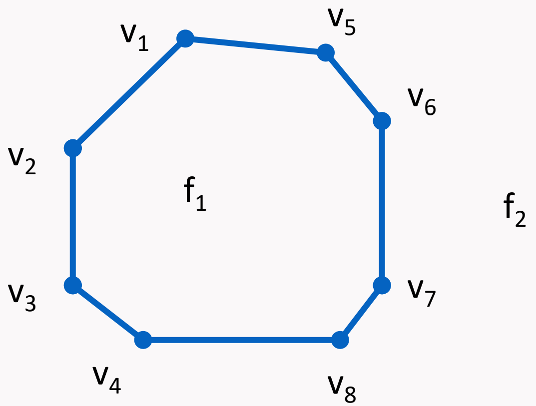
解：（1）取G的一个圈H_1，并作平面嵌入：



图G



H_1

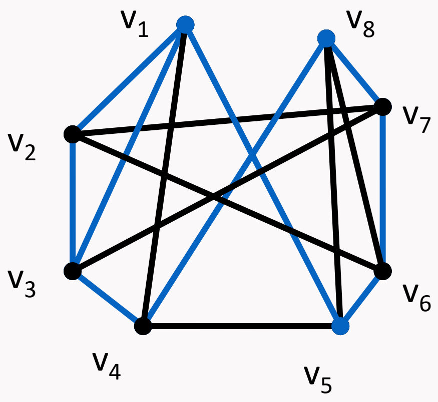


$\widetilde{H}_1$

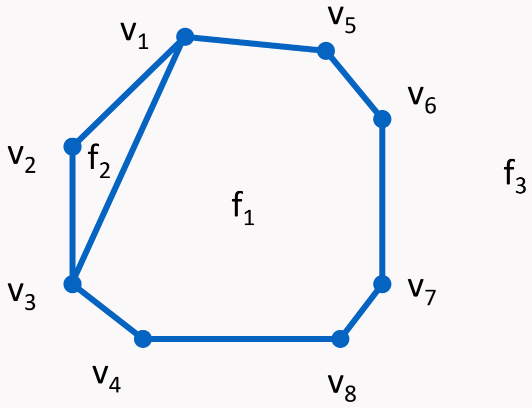
(2)

$$B_1 = G[\{v_1 v_3\}], \qquad F(B_1, \widetilde{H}_1) = \{f_1, f_2\}$$
$$B_2 = G[\{v_1 v_4\}], \qquad F(B_2, \widetilde{H}_1) = \{f_1, f_2\}$$
$$B_3 = G[\{v_2 v_7\}], \qquad F(B_3, \widetilde{H}_1) = \{f_1, f_2\}$$
$$B_4 = G[\{v_2 v_6\}], \qquad F(B_4, \widetilde{H}_1) = \{f_1, f_2\}$$
$$B_5 = G[\{v_3 v_7\}], \qquad F(B_5, \widetilde{H}_1) = \{f_1, f_2\}$$
$$B_6 = G[\{v_4 v_5\}], \qquad F(B_6, \widetilde{H}_1) = \{f_1, f_2\}$$
$$B_7 = G[\{v_5 v_8\}], \qquad F(B_7, \widetilde{H}_1) = \{f_1, f_2\}$$
$$B_8 = G[\{v_6 v_8\}], \qquad F(B_8, \widetilde{H}_1) = \{f_1, f_2\}$$

(3) 取B_1和f_1. (4) 取$P_1 = v_1v_3$

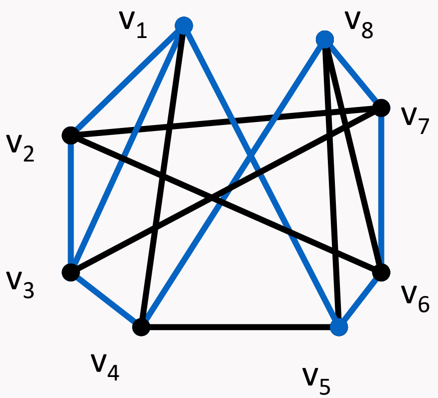


图G

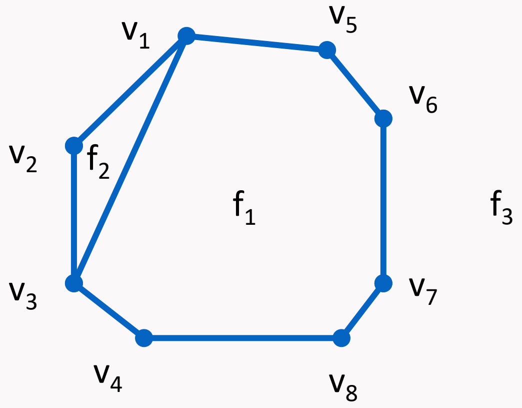


$\widetilde{H}_1$

$$B_1 = G[\{v_1 v_4\}], \qquad F(B_1, \widetilde{H}_2) = \{f_1, f_3\}$$
$$B_2 = G[\{v_2 v_7\}], \qquad F(B_2, \widetilde{H}_2) = \{f_3\}$$
$$B_3 = G[\{v_2 v_6\}], \qquad F(B_3, \widetilde{H}_2) = \{f_3\}$$
$$B_4 = G[\{v_3 v_7\}], \qquad F(B_4, \widetilde{H}_2) = \{f_1, f_3\}$$
$$B_5 = G[\{v_4 v_5\}], \qquad F(B_5, \widetilde{H}_2) = \{f_1, f_3\}$$
$$B_6 = G[\{v_5 v_8\}], \qquad F(B_6, \widetilde{H}_2) = \{f_1, f_3\}$$
$$B_7 = G[\{v_6 v_8\}], \qquad F(B_7, \widetilde{H}_2) = \{f_1, f_3\}$$

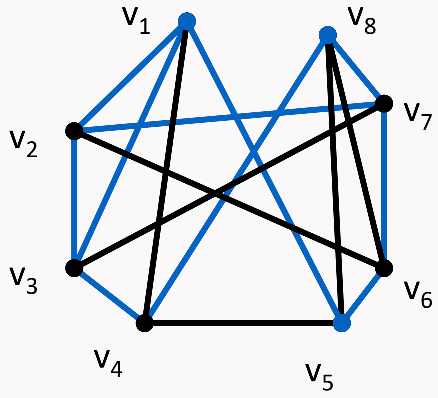


图G

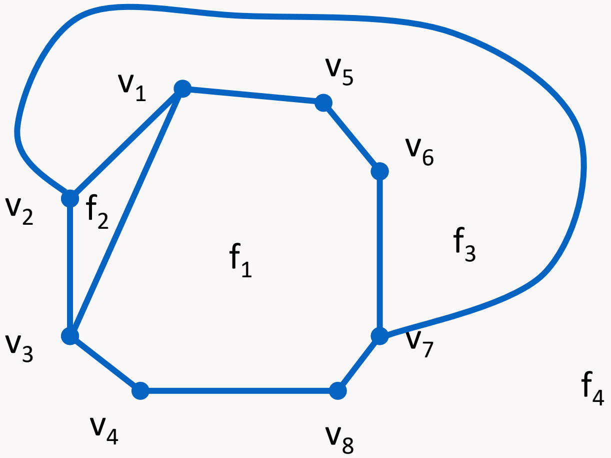


$\widetilde{H}_2$

（3）取B_2和f_3.（4）取$P_2 = v_2 v_7$



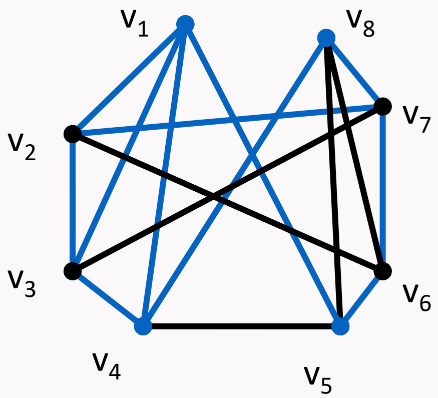
图G



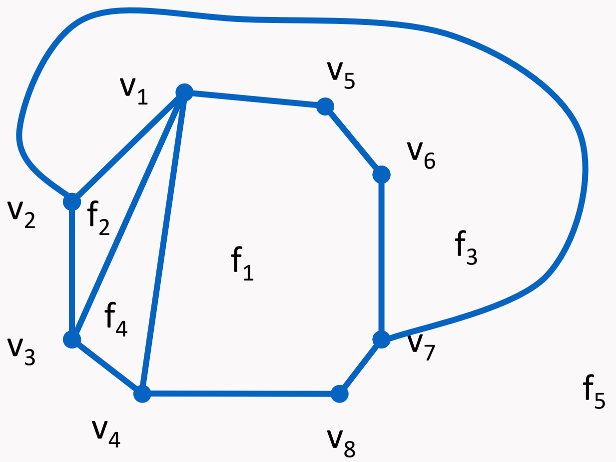
$\widetilde{H}_3$

$$B_1 = G[\{v_1 v_4\}], \qquad F(B_1, \widetilde{H}_3) = \{f_1\}$$
$$B_2 = G[\{v_2 v_6\}], \qquad F(B_2, \widetilde{H}_3) = \{f_3\}$$
$$B_3 = G[\{v_3 v_7\}], \qquad F(B_3, \widetilde{H}_3) = \{f_1, f_4\}$$
$$B_4 = G[\{v_4 v_5\}], \qquad F(B_4, \widetilde{H}_3) = \{f_1\}$$
$$B_5 = G[\{v_5 v_8\}], \qquad F(B_5, \widetilde{H}_3) = \{f_1\}$$
$$B_6 = G[\{v_6 v_8\}], \qquad F(B_6, \widetilde{H}_3) = \{f_1\}$$

（3）取B_1和f_1.　　（4）取$P_3 = v_1 v_4$



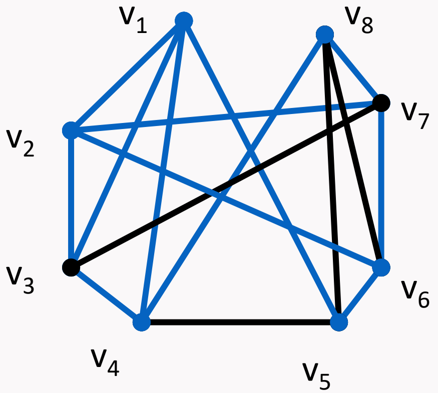
图G



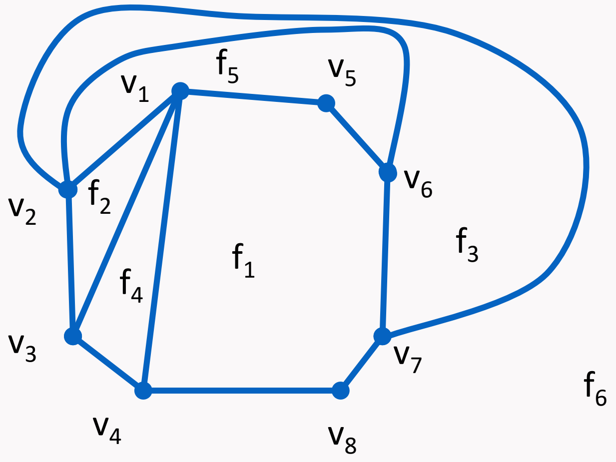
$\widetilde{H}_4$

$$
\begin{aligned}
B_1 &= G[\{v_2 v_6\}], & F(B_1, \widetilde{H}_4) &= \{f_3\} \\
B_2 &= G[\{v_3 v_7\}], & F(B_2, \widetilde{H}_4) &= \{f_5\} \\
B_3 &= G[\{v_4 v_5\}], & F(B_3, \widetilde{H}_4) &= \{f_1\} \\
B_4 &= G[\{v_5 v_8\}], & F(B_4, \widetilde{H}_4) &= \{f_1\} \\
B_5 &= G[\{v_6 v_8\}], & F(B_5, \widetilde{H}_4) &= \{f_1\}
\end{aligned}
$$

（3）取B_1和f_5.　　（4）取$P_4 = v_2 v_6$

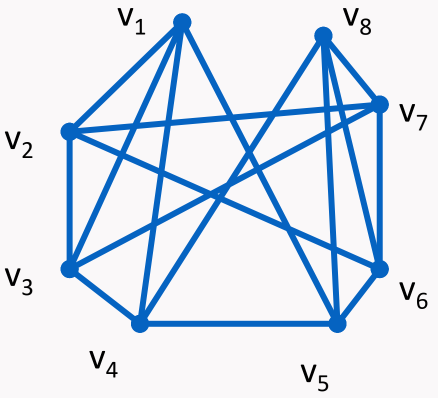


图G

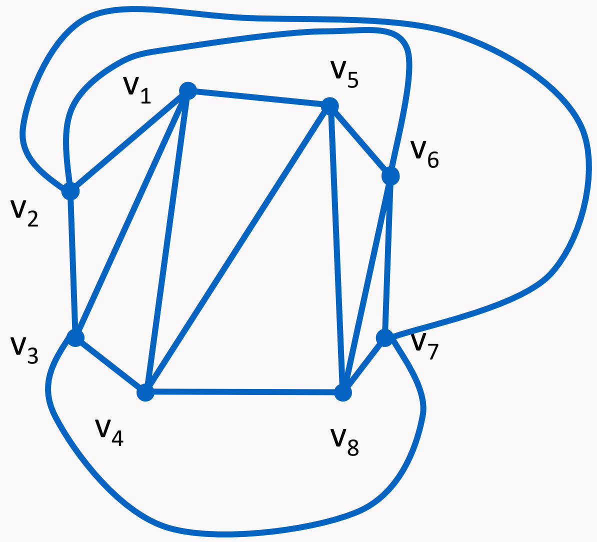


$\widetilde{H}_4$

继续下去，得到：



图G



$\tilde{G}$

算法分析：主要运算包括：

（i）找出块G中的一个圈H_i;

（ii）确定G中H_i的桥以及它们对于H_i的附着点；

（iii）对于$\widetilde{H_i}$的每个面f确定其周界；

（iv）对于$\widetilde{H_i}$的每座桥B，确定$F\left(B,\widetilde{H_i}\right)$

（v）在H_i的某座桥B中求一条起点与终点均为附着点的一条路P_i.

可证上述每一个算法均存在好算法，因此平面性算法也是好算法。

Thank You !