# 《图论及其应用》2024

潘嵘

计算机学院

# 本次课主要内容

## 平面图概念与性质

(一)、平面图的概念

(二)、平面图性质

(三)、图的嵌入性问题简介

(四)、凸多面体与平面图

# (一)、平面图的概念

图的平面性问题是图论典型问题之一。生活中许多问题都与该问题有关。

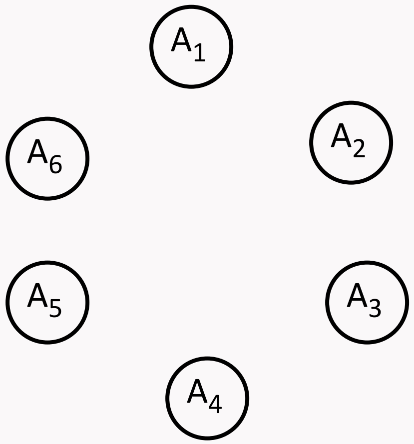
例子1：电路板设计问题

在电路板设计时，需要考虑的问题之一是连接电路元件间的导线间不能交叉。否则，当绝缘层破损时，会出现短路故障。

显然，电路板可以模型为一个图，“要求电路元件间连接导线互不交叉”，对应于“要求图中的边不能相互交叉”。

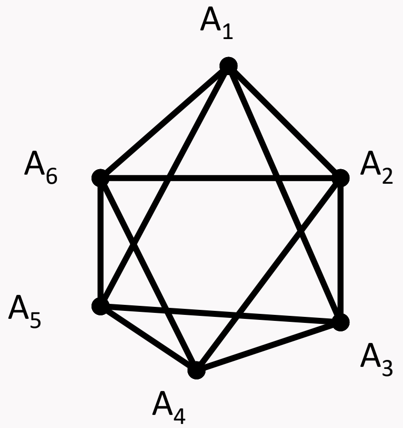
例子2：空调管道的设计

某娱乐中心有6个景点，位置分布如下图。



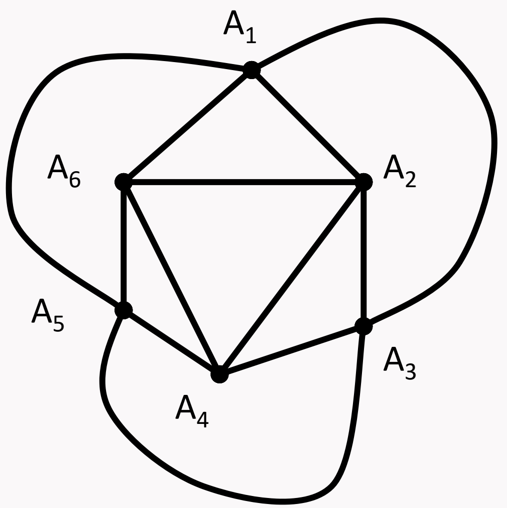

分析者认为：（1）$A_1$与$A_4$，（2）$A_2$与$A_5$，（3）$A_3$与$A_6$间人流较少，其它景点之间人流量大，必须投资铺设空调管道，但要求空调管道间不能交叉。如何设计？

如果把每个景点分别模型为一个点，景点间连线，当且仅当两景点间要铺设空调管道。那么，上面问题直接对应的图为：

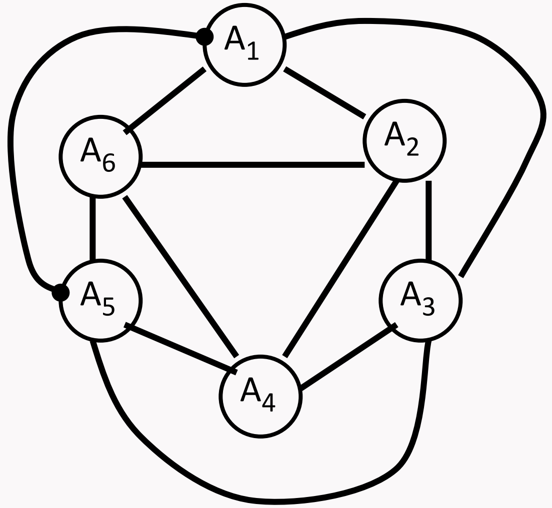



于是，问题转化为：能否把上图画在平面上，使得边不会相互交叉？

通过尝试，可以把上图画为：



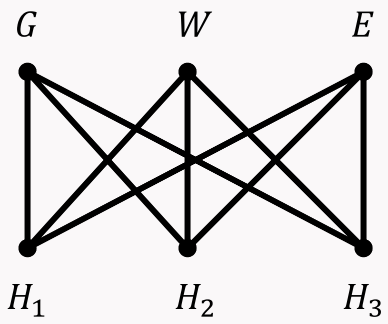

于是，铺设方案为：



例子3：3间房子和3种设施问题

问题：要求把3种公用设施(煤气，水和电)分别用煤气管道、水管和电线连接到3间房子里，要求任何一根线或管道不与另外的线或管道相交，能否办到？

上面问题可以模型为如下偶图：

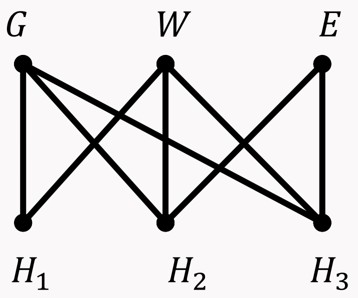



问题转化为，能否把上面偶图画在平面上，使得边与边之间不会交叉？

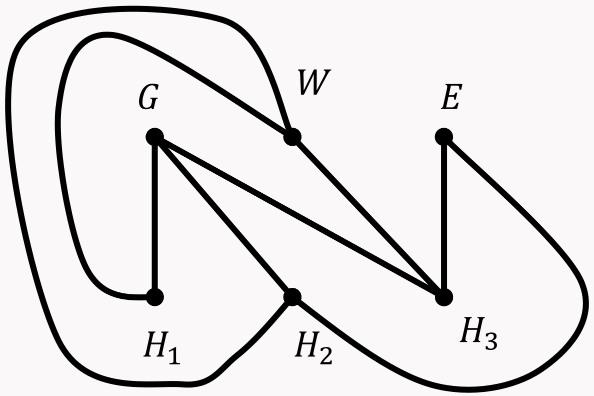
上面的例子都涉及同一个图论问题：能否把一个图画在平面上，使得边与边之间没有交叉？

针对这一问题，我们引入如下概念

定义1 如果能把图$G$画在平面上，使得除顶点外，边与边之间没有交叉，称$G$可以嵌入平面，或称$G$是可平面图。可平面图$G$的边不交叉的一种画法，称为$G$的一种平面嵌入，$G$的平面嵌入表示的图称为平面图。




图$G$




图$G$的平面嵌入

注:

（1）可平面图概念和平面图概念有时可以等同看待；

（2）图的平面性问题主要涉及如下几个方面：1）平面图的性质；2）平面图的判定；3）平面嵌入方法(平面性算法）；4）涉及图的平面性问题的拓扑不变量。

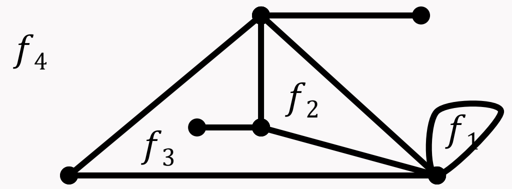
由图的平面性问题研究引申出图的一般嵌入性问题的研究，形成了拓扑图论的主要内容。我国数学家吴文俊、刘彦佩等在该方向都有重要结果。刘彦佩的专著是《图的上可嵌入性理论》(1994)，化学工业出版社出版。

历史上，波兰数学家库拉托斯基、美国数学家惠特尼、生于英国的加拿大数学家托特，我国数学家吴文俊等都在拓扑图论中有过精湛的研究。

# (二)、平面图性质

定义2 （1）一个平面图$G$把平面分成若干连通片，这些连通片称为$G$的区域，或$G$的一个面。$G$的面组成的集合用$\Phi$表示。

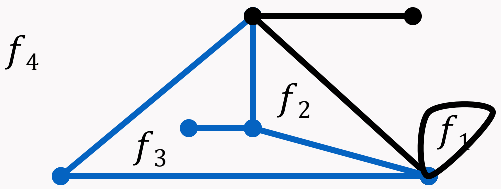
（2）面积有限的区域称为平面图$G$的内部面，否则称为$G$的外部面。




平面图$G$

在上图$G$中，共有4个面。其中$f_4$是外部面，其余是内部面。$\Phi = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$。

（3）在$G$中，顶点和边都与某个给定区域关联的子图，称为该面的边界。某面$f$的边界中含有的边数(割边计算2次)称为该面$f$的次数，记为$\deg(f)$.



平面图$G$

在上图中，蓝色边在$G$中的导出子图为面$f_3$的边界。

$$\deg(f_1)=1 \quad \deg(f_2)=3 \quad \deg(f_3)=6 \quad \deg(f_4)=6$$

1、平面图的次数公式

定理1 设$G=(n,m)$是平面图，则：

$$\sum_{f\in\Phi}\deg(f)=2m.$$

证明：对$G$的任意一条边$e$，如果$e$是某面割边，那么由面的次数定义，该边给$G$的总次数贡献2次；如果$e$不是割边，那么，它必然是两个面的公共边，因此，由面的次数定义，它也给总次数贡献2次。于是有：

$$\sum_{f\in\Phi}\deg(f)=2m.$$

2、平面图的欧拉公式

定理2（欧拉公式）设$G=(n,m)$是连通平面图，$\varphi$是$G$的面数，则：

$$n-m+\varphi=2.$$

证明：情形1，如果$G$是树，那么$m=n-1$，$\varphi=1$。在这种情况下，容易验证，定理中的恒等式是成立的。

情形2，$G$不是树的连通平面图。

假设在这种情形下，欧拉恒等式不成立。则存在一个含有最少边数的连通平面图$G$，使得它不满足欧拉恒等式。设这个最少边数连通平面图$G=(n,m)$，面数为$\varphi$，则：

$$n-m+\varphi\neq 2.$$

因为$G$不是树，所以存在非割边$e$。显然，$G-e$是连通平面图，边数为$m-1$，顶点数为$n$，面数为$\varphi-1$。

由最少性假设，$G-e$满足欧拉等式：

$$n-(m-1)+(\varphi-1)=2.$$

化简得：$n-m+\varphi=2.$

这是一个矛盾。

注：该定理可以采用对面数$\varphi$作数学归纳证明。

3、欧拉公式的几个有趣推论

推论1 设$G$是具有$\varphi$个面$k$个连通分支的平面图，则：

$$n - m + \varphi = k + 1.$$

证明：对第$i$ $(1 \le i \le k)$个分支来说，设顶点数为$n_i$, 边数为$m_i$, 面数为$\varphi_i$, 由欧拉公式：

$$n_i - m_i + \varphi_i = 2.$$

所以，

$$\sum_{i=1}^{k}(n_i - m_i + \varphi_i) = 2k\,.$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{i=1}^{k} m_i + \sum_{i=1}^{k} \varphi_i = 2k\,.$$

而：

扣除重复计算的$k-1$个外部面

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n \quad \sum_{i=1}^{k} m_i = m \quad \sum_{i=1}^{k} \varphi_i = \varphi + k - 1$$

所以得：

$$n - m + \varphi = k + 1.$$

推论2 设$G$是具有$n$个点$m$条边$\varphi$个面的连通平面图，如果对$G$的每个面$f$, 有：$\deg(f) \geq l \geq 3$, 则：

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2).$$

证明：一方面，由次数公式得：

$$2m = \sum_{f \in \Phi} \deg(f) \geq l\varphi \Rightarrow \varphi \leq \frac{2m}{l}.$$

另一方面，由欧拉公式得：

$$\varphi = 2 - n + m.$$

所以有：

$$\varphi = 2 - n + m \leq \frac{2m}{l}.$$

整理得：

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2).$$

注：（1）上面推论2也可以叙述为：

设$G=(n,m)$是连通图，如果：

$$m>\frac{l}{l-2}(n-2),$$

则$G$是非可平面图。

（2）推论2的条件是$G$是平面图的必要条件，不是充分条件。

例1 求证：$K_{3,3}$是非可平面图。

证明：注意到，$K_{3,3}$是偶图，不存在奇圈，所以，每个面的次数至少是4，即$l=4$.

所以，

$$\frac{l}{l-2}(n-2)=\frac{4}{2}(6-2)=8.$$

而$m=9$，这样有：

$$m>\frac{l}{l-2}(n-2).$$

所以，由推论2，$K_{3,3}$是非平面图。

推论3 设$G$是具有$n$个点$m$条边$\varphi$个面的简单平面图，则：

$$m\leq 3n-6.$$

证明：情形1，$G$连通。

因为$G$是简单图，所以每个面的次数至少为3, 即$l = 3$. 于是，由推论2得：

$$m \leq 3n - 6.$$

情形2，若$G$不连通。设$G_1, G_2, \ldots, G_k$是连通分支。

一方面, 由推论1：

$$n - m + \varphi = k + 1.$$

另一方面，由次数公式得：

$$\varphi \leq \frac{2m}{3}.$$

所以得：

$$m \leq 3n - 3(k + 1) \leq 3n - 6.$$

例2，证明：$K_5$是非可平面图。

证明：$K_5$是简单图，$m = 10, n = 5.$

由$3n - 6 = 9,$ 得

$$m > 3n - 6,$$

所以，$K_5$是非可平面图。

推论4 设$G$是具有$n$个点$m$条边的连通平面图，若$G$的每个圈均由长度是$l$的圈围成，则：

$$m(l-2) = l(n-2).$$

证明：由次数公式，欧拉公式容易得证。

推论5 设$G$是具有$n$个点$m$条边的简单平面图，则：

$$\delta \leq 5.$$

证明：若不然，设$\delta \geq 6$,

由握手定理：

$$6n \leq \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m \Rightarrow m > 3n - 6.$$

这与$G$是简单平面图矛盾。

注：该结论是证明“5色定理”的出发点。

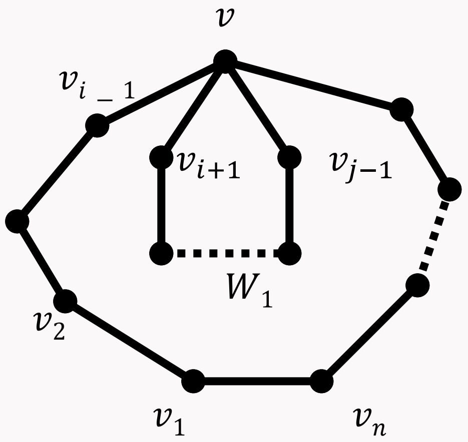
定理3 一个连通平面图是2连通的，当且仅当它的每个面的边界是圈。

证明：“必要性”： 设$G$是2连通的平面图，因为环总是两个面的边界，且环面显然由圈围成。不失一般性，假设$G$没有环，那么$G$没有割边，也没有割点。所以，每个面的边界一定是一条闭迹。

设$C$是$G$的任意面的一个边界，我们证明，它一定为圈

若不然，设$C$是$G$的某面的边界，但它不是圈。

因$C$是一条闭迹且不是圈，因此，$C$中存在子圈。设该子圈是$W_1$. 因$C$是某面的边界，所以$W_1$与$C$的关系可以表示为下图的形式：




容易知道：$v$为$G$的割点。矛盾！

“充分性” 设平面图$G$的每个面的边界均为圈。此时删去$G$中任意一个点不破坏$G$的连通性，这表明$G$是2连通的

推论6 若一个平面图是2连通的，则它的每条边恰在两个面的边界上。

# (三)、图的嵌入性问题简介

在图的平面嵌入的基础上，简单介绍：

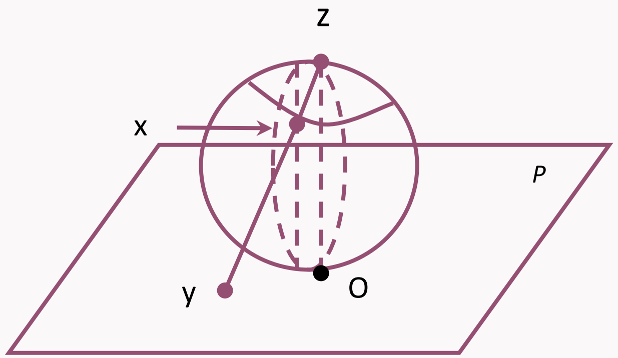
1、曲面嵌入

1）、球面嵌入

定理4　$G$可球面嵌入当且仅当$G$可平面嵌入。

证明：我们用建立球极平面射影的方法给出证明。

将求面$S$放在一个平面$P$上，设切点为$O$, 过$O$作垂直于$P$的直线，该直线与$S$相交于$z$.



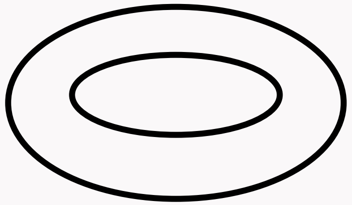
球极投影示意图

作映射 $f: S-\{z\} \rightarrow P$. 定义$f(x)=y$, 使得$x, y, z$三点共线。该映射称为球极平面射影。

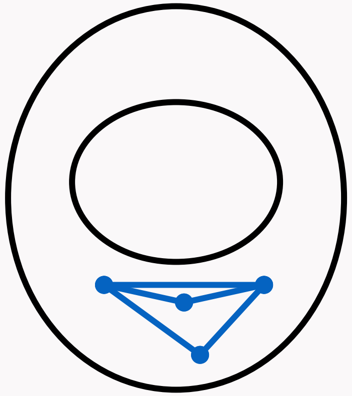
通过$f$, 可以把嵌入球面的图映射为嵌入平面的图。反之亦然。

2)、环面嵌入

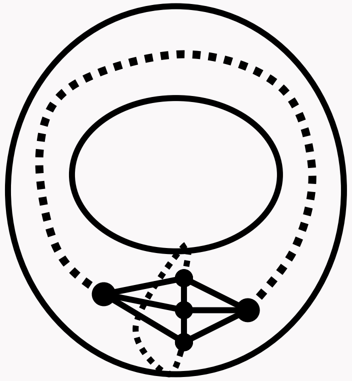
环面的形状像一个汽车轮胎的表面。



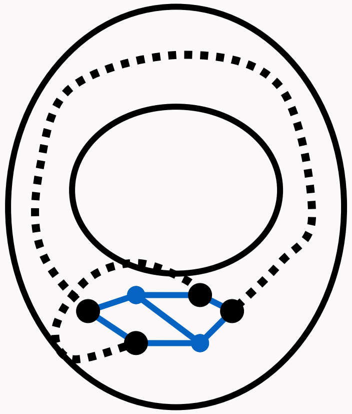
例3 将$K_4, K_5, K_{3,3}$嵌入到环面上。



$K_4$的环面嵌入



$K_5$的环面嵌入



$K_{3,3}$的环面嵌入

3） 定向曲面嵌入

这是目前嵌入性问题研究热点。国内：刘彦佩，黄元秋等是从事该方向研究的代表。

2、图的3维空间嵌入

定理5　所有图均可嵌入$R^3$中。

证明：在$R^3$中作空间曲线：

$$l:\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}.$$

把图$G$的顶点放在该直线的不同位置，则$G$的任意边不相交。

事实上，对处于曲线$l$上的任意4个相异顶点，它们对应的参数值分别为：$t_1, t_2, t_3, t_4$.

四面体体积∝范德蒙矩阵行列式

因为：

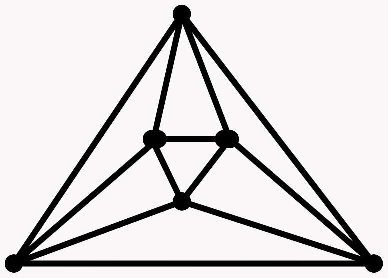
$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & {t_1}^2 & {t_1}^3 \\ 1 & t_2 & {t_2}^2 & {t_2}^3 \\ 1 & t_3 & {t_3}^2 & {t_3}^3 \\ 1 & t_4 & {t_4}^2 & {t_4}^3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以，上面4点不共面。

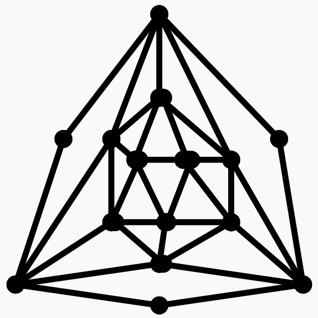
## (四)、凸多面体与平面图

一个多面体称为凸多面体，如果在体上任取两点，其连线均在体上。

凸多面体的一维骨架：把一个凸多面体压缩在平面上，得到一个对应的平面图，该平面图称为该凸多面体的一维骨架。



正八面体一
维骨架



正二十面体
一维骨架

定理6 存在且只存在5种正多面体：它们是正四、六、八、十二、二十面体。

证明：任取一个正$\varphi$面体，其顶点数、棱数分别是$n$和$m$. 对应的一维骨架是一个每个面次数为$l$, 顶点度数为$r$的简单平面正则图$G$.

由次数公式得： $2m = \varphi l \cdots (1)$

由握手定理得： $2m = nr \cdots (2)$

以上两等式中：$l \geq 3$，$r \geq 3$

由(1)与(2) 得：$m = \frac{nr}{2}, \varphi = \frac{2m}{l} = \frac{nr}{l} \cdots (3)$

将(3)代入欧拉公式得：

$$n = 4l(2l - lr + 2r)^{-1} \cdots (4)$$

在(4)中， $2l - lr + 2r > 0 \Rightarrow 2(l + r) > lr$

于是得不等式组：

$$\begin{cases} 2(l+r) > lr \\ l \geq 3 \\ r \geq 3 \end{cases} \quad \cdots (5)$$

不等式组(5)的正整数解恰有5组：

| 序号 | $l$ | $r$ | $n$ | $m$ | $\varphi$ | 相应的正多面体 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 | 4 | 6 | 4 | 正四面体 |
| 2 | 3 | 4 | 8 | 12 | 6 | 正六面体 |
| 3 | 3 | 5 | 20 | 30 | 12 | 正十二面体 |
| 4 | 4 | 3 | 6 | 12 | 8 | 正八面体 |
| 5 | 5 | 3 | 12 | 30 | 20 | 正二十面体 |

定理得证。

Thank You !