中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

《图论及其应用》2024

潘嵘

计算机学院

本次课主要内容

平面图的判定与涉及平面性的不变量

(一)、平面图的判定

(二)、涉及平面性的不变量

(一)、平面图的判定

在本章第一次课中，我们已经明确：对于3阶以上的具有m条边的单图G来说，如果G满足如下条件之一：（1）$m > 3n-6$;（2）K_5是G的一个子图；（3）$K_{3,3}$是G的一个子图，那么，G是非可平面图。

但上面的条件仅为G是非可平面图的充分条件。

这次课要解决的问题是：给出判定一个图是否是可平面图的充分必要条件

最早给出图的平面性判定充要条件的是波兰数学家库拉托斯基(30年代给出)。后来，美国数学家惠特尼，加拿大数学家托特，我国数学家吴文俊等都给出了不同的充要条件。

我们主要介绍波兰数学家库拉托斯基的结果。

库拉托斯基定理主要基于K_5和$K_{3,3}$是非可平面图这一事实而提出的平面性判定方法。

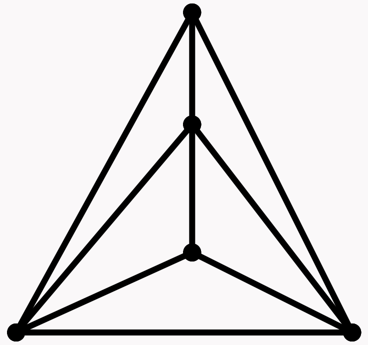
所以，我们称K_5与$K_{3,3}$为库拉托斯基图。

一个自然的猜测是：G是可平面图的充分必要条件是G不含子图K_5和$K_{3,3}$.

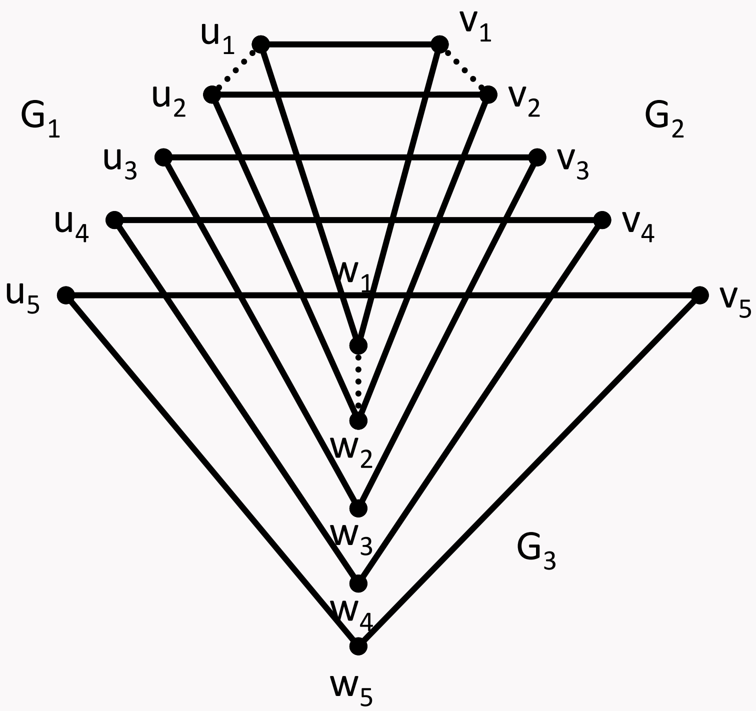
上面命题必要性显然成立！但充分性能成立吗？

十分遗憾！下面例子给出了回答：NO!

下面的图G是一个点数为5，边数为9的极大平面图。考虑$F = G \times K_3$,



G



$F = G \times K_3$

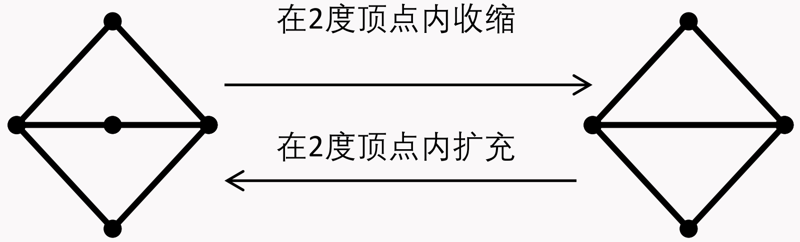
注：F由G的3个拷贝组成，分别是G_1, G_2, G_3. 三个拷贝中的边没有画出。图中虚线不是对应的G_i中边。

可以证明：F中不含K_5和$K_{3,3}$，且F是非可平面图。

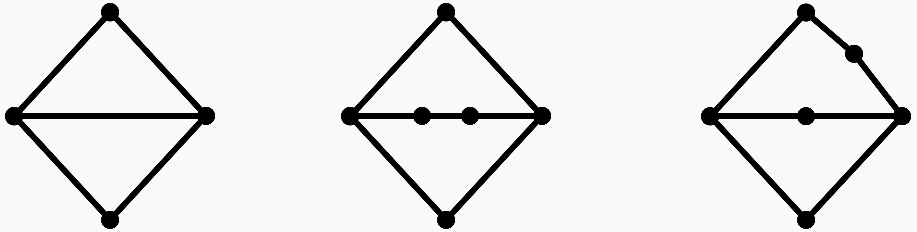
尽管我们的直觉猜测错了，但库拉托斯基还是基于K_5与$K_{3,3}$得到了图的平面性判据。

1、相关概念

定义1 在图G的边上插入一个2度顶点，使一条边分成两条边，称将图在2度顶点内扩充；去掉一个图的2度顶点，使关联它们的两条边合并成一条边，称将图G在2度顶点内收缩。



定义2 两个图G_1与G_2说是同胚的，如果$G_1 \cong G_2$, 或者通过反复在2度顶点内扩充和收缩后能够变成一对同构的图。



G_1 G_2 G_3

上面的G_1, G_2, G_3是同胚图。

注：显然，图的平面性在同胚意义下不变。

定理1（库拉托斯基定理）图G是可平面的，当且仅当它不含K_5或$K_{3,3}$同胚的子图。

例1 求证：下面两图均是非平面图。

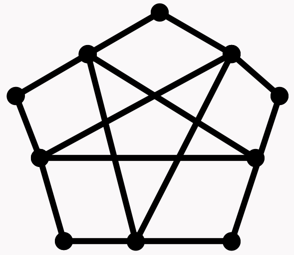


图 G_1

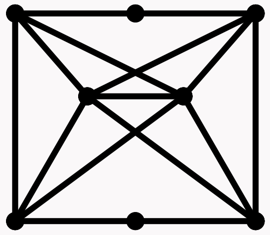


图 G_2

证明：对于G_1来说，按G_1在2度顶点内收缩后，可得到K_5. 所以，由库拉托斯基定理知G_1是非可平面图。

对于G_2来说，先取如下子图

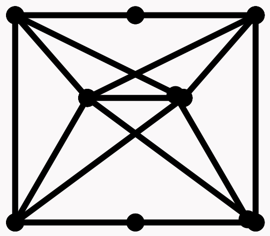
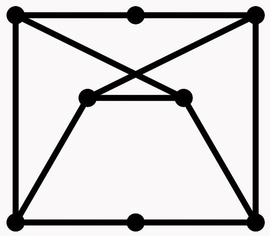
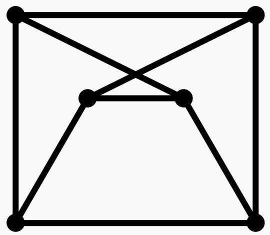


图 G_2



G_2的一个子图

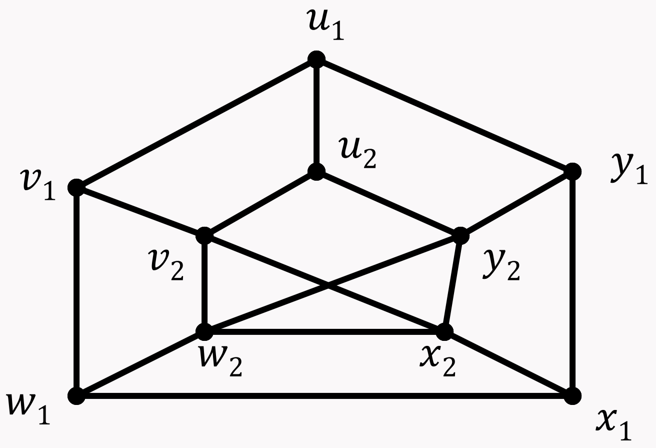
对上面子图，按2度顶点收缩得与之同胚子图$K_{3,3}$：



$K_{3,3}$

所以，G_2是非可平面图。

例2 确定下图是否是可平面图。



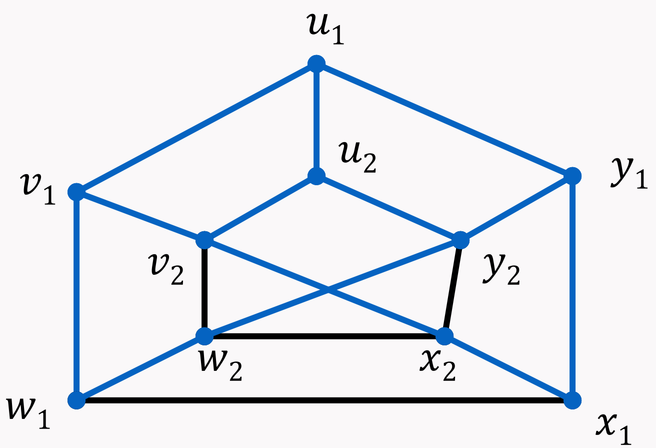
分析：我们根据图的结构形式，怀疑该图是非可平面图。但我们必须找到证据！

当然我们可能考虑是否$m > 3n - 6$. 遗憾的是该图不满足这个不等式！

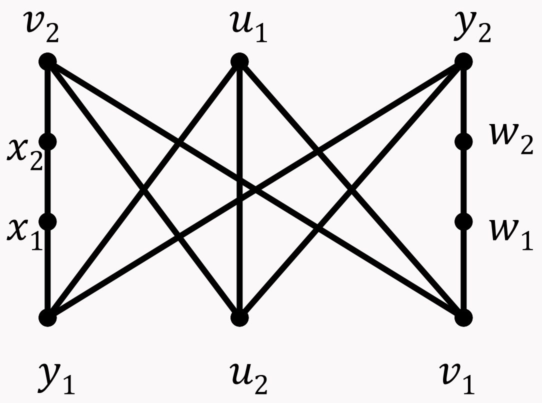
所以，我们要在该图中寻找一个与K_5或$K_{3,3}$同胚的子图！

由于该图的最大度为4的顶点才4个，所以，不存在与K_5同胚的子图。因此，只有寻找与$K_{3,3}$同胚的子图！

解：取G中蓝色边的一个导出子图：



也就是得到G的如下形式的一个子图：



上图显然和$K_{3,3}$同胚。由库拉托斯基定理知，G是非可平面的。

注：（1）库拉托斯基定理可以等价叙述为：

库拉托斯基定理：图G是非可平面的，当且仅当它含有K_5或$K_{3,3}$同胚的子图

（2）库拉托斯基（1896---1980）波兰数学家。1913年开始在苏格兰格拉斯哥大学学习工程学，1915年回到波兰发沙大学转学数学，主攻拓扑学。1921年获博士学位。1930年在利沃夫大学作数学教授期间，发现并证明了图论中的库拉托斯基定理。1939年后到发沙大学做数学教授。他的一生主要研究拓扑学与集合论。

库拉托斯基于1954年率波兰数学家代表团对我国进行了学术访问，还送给了华罗庚一些波兰数学家写的数论函数论文。

库拉托斯基定理：图G是非可平面的，当且仅当它含有K_5或$K_{3,3}$同胚的子图

定义2 给定图G，去掉G中的环，用单边代替平行边而得到的图称为G的基础简单图。

定理2　（1）图G是可平面的，当且仅当它的基础简单图是可平面的；

（2）图G是可平面图当且仅当G的每个块是可平面图。

证明：（1）由平面图的定义，该命题显然成立。

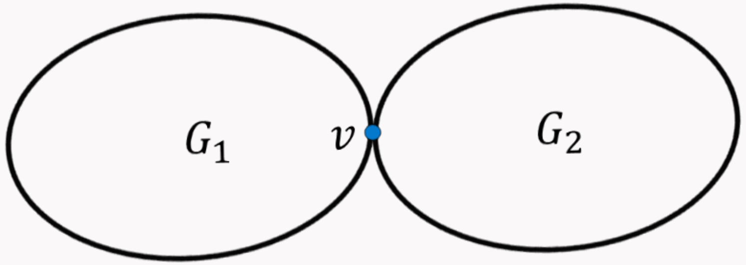
（2）必要性显然。下面证明充分性。

不失一般性，假设G连通。我们对G的块数n作数学归纳证明。

当$n = 1$时，由条件，结论显然成立；

设当$n < k$时，若G的每个块是可平面的，有G是可平面的。下面考虑$n = k$时的情形。

设点v是G的割点，则按照v，G可以分成两个边不重子图G_1与G_2，即$G = G_1 \cup G_2$, 且$G_1 \cap G_2 = \{v\}$.

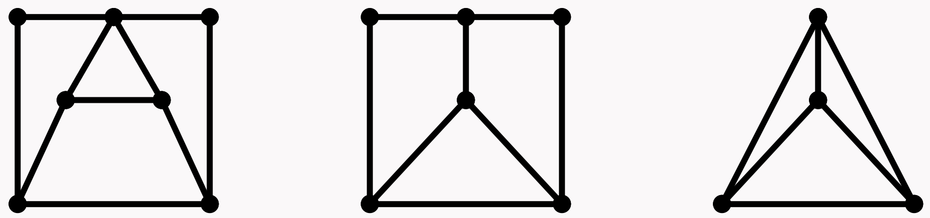


按归纳假设，G_1与G_2都是可平面图。取G_1与G_2的平面嵌入满足点v都在外部面边界上，则把它们在点v处对接后，将得到G的平面嵌入。即证G是可平面图

关于图的可平面性刻画，德国数学家瓦格纳(Wangner)在1937年得到了一个定理。

定义3 设uv是简单图G的一条边。去掉该边，重合其端点，再删去由此产生的环和平行边。这一过程称为图G的初等收缩或图的边收缩运算。

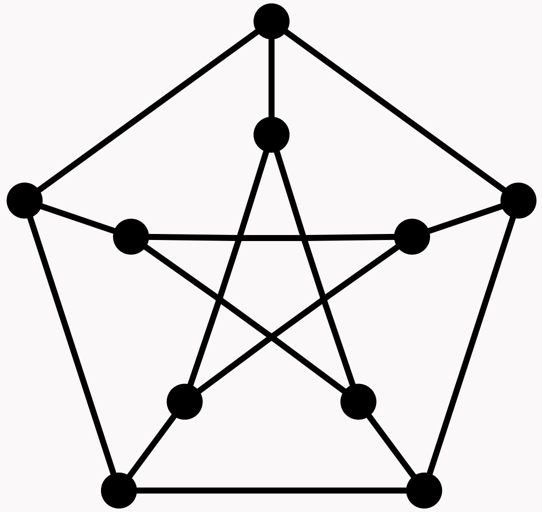
称G可收缩到H,是指对G通过一系列边收缩后可得到图H.



定理2（瓦格纳定理）：简单图G是可平面图当且仅当它不含有可收缩到K_5或$K_{3,3}$的子图。

注：这是瓦格纳1937年在科隆大学博士毕业当年提出并证明过的一个定理

例3 求证彼得森图是非可平面图。

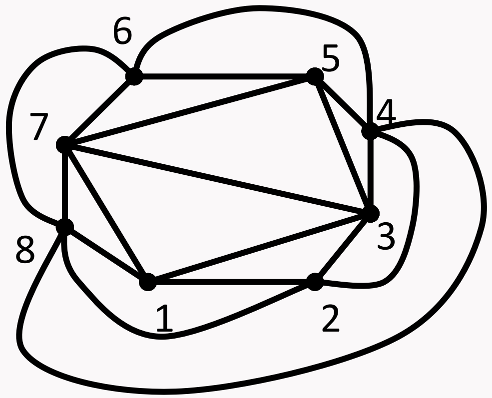


证明：很明显，彼得森图通过一些列边收缩运算后得到K_5.由瓦格纳定理得证。

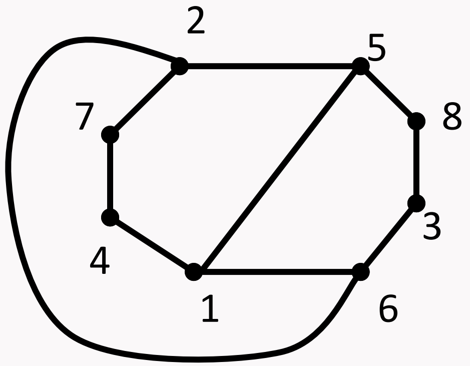
定理3 至少有9个顶点的简单可平面图的补图是不可平面的，而9是这个数目中的最小的一个。

注：该定理是由数学家巴特尔、哈拉里和科达马首先得到。然后由托特(1963)给出了一个不太笨拙的证明，他采用枚举法进行验证。还不知道有简洁证明，也没有得到推理方法证明。

例4 找出一个8个顶点的可平面图，使其补图也是可平面的。



G



G的补

例5 设G是一个简单图，若顶点数$n \geq 11$,则G与G的补图中，至少有一个是不可平面图（要求用推理方法）.

证明：设G是一个n阶可平面图，则：

$$m(G) \leq 3n-6.$$

所以：

$$m(\bar{G}) = m(K_n) - m(G) \geq \frac{n(n-1)}{2} - (3n-6).$$

考虑：

$$\begin{aligned} & m(\bar{G}) - (3n-6) \\ \geq & \frac{n(n-1)}{2} - 2(3n-6). \\ = & \frac{1}{2}(n^2 - 13n + 24) \end{aligned}$$

令：

$$f(n)=\frac{1}{2}(n^2-13n+24).$$

则：

$$f'(n)=n-\frac{13}{2}.$$

所以，　当$n\geq 6.5$时，$f(n)$单调上升。而当$n=11$时：

$$f(11)>0.$$

所以，　当$n\geq 11$时，有：

$$m(\bar{G})>(3n-6).$$

即证明了简单可平面图G的补图是非可平面图。

例6 设G_i是一个有n_i个点，m_i条边的图，$i = 1,2$. 证明：若G_1与G_2同胚，则

$$n_1 + m_2 = n_2 + m_1.$$

证明：设G_1经过p_1次2度顶点扩充，p_2次2度顶点收缩得到H_1, G_2经过q_1次2度顶点扩充，q_2次2度顶点收缩得到H_2, 使得：

$$H_1 \cong H_2.$$

又设H_1与H_2的顶点数分别为n_1*和n_2*,边数分别为m_1*与m_2*. 那么：

$$n_1 * = n_1 + P_1 - P_2 \quad m_1 * = m_1 + P_1 - P_2$$
$$n_2 * = n_2 + q_1 - q_2 \quad m_2 * = m_2 + q_1 - q_2.$$

所以：

$$\begin{aligned} n_1+m_2 &= n_1*+m_2*+P_1-P_2+q_1-q_2 \\ n_2+m_1 &= n_2*+m_1*+P_1-P_2+q_1-q_2 \end{aligned}.$$

而由$H_1 \cong H_2$得：

$$m_1*=m_2*, n_1*=n_2*.$$

定义2 两个图G_1与G_2说是同胚的，如果$G_1 \cong G_2$，或者通过反复在2度顶点内扩充和收缩后能够变成一对同构的图。

所以：

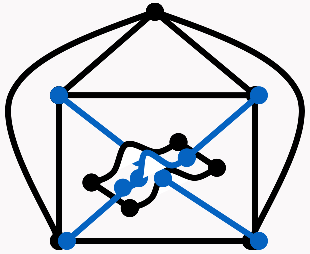
$$n_1+m_2=n_2+m_1.$$

(二)、涉及平面性的不变量

我们将要讨论的问题是：如何刻画一个非可平面图与平面图之间的差距。只作简单介绍。

1、图的亏格

环柄：边交叉处建立的“立交桥”。通过它，让一条边经过 “桥下”，而另一条边经过“桥上”，从而把两条边在交叉处分开。



环柄示意图

定义4 若通过加上k个环柄可将图G嵌入到球面，则k的最小数目，称为G的亏格，记为：$\gamma(G)$.

定理4 对于一个亏格为γ,有n个顶点，m条边和φ个面的多面体，有：

$$n-m+\varphi=2-2\gamma.$$

因多面体对应一个连通图，所以上面恒等式称为一般连通图的欧拉公式。

推论：设G是一个有n个点m条边，亏格为γ的连通图，则：

（1）$\gamma \geq \frac{1}{6}m-\frac{1}{2}(n-2)$;

（2）若G无三角形，则：$\gamma \geq \frac{1}{4}m-\frac{1}{2}(n-2)$;

（3）若G每个面是三角形，则：m=$3(n-2+2\gamma)$;

（4）若G每个面是四边形，则：m=$2(n-2+2\gamma)$.

证明（3）：因为G的每个面是三角形，所以每条边是两个面的公共边，得：$3\varphi = 2m$. 于是由定理4得：

$$m=3(n-2+2\gamma).$$

对于完全图的亏格曾经是一个长期的，有趣的，困难的和成功的努力。1890年希伍德提出如下猜想：

$$\gamma(K_n) = \left\{\frac{(n-3)(n-4)}{12}\right\} \cdots (*)$$

希伍德由推论(1)证明了：

$$\gamma(K_n) \geq \frac{(n-3)(n-4)}{12}.$$

同时希伍德也证明了$\gamma(K_7) = 1.$

1891年，赫夫曼对$n = 8 \cdots 12$ 进行了证明；

1952年，林格尔对$n = 13$ 进行了证明；

记阶数$n = 12s + r$

1954年，林格尔对$r = 5$ 进行了证明；

1961--65年，林格尔对$r = 7$、10、3 进行了证明；

1961--65年，杨斯、台里等对$r=$ 4、0、1、9、6 进行了证明；

1967--68年，林格尔、杨斯对$r=$ 2、8、11进行了证明；

1968年后，法国蒙特派列尔大学文学教授杰恩对$n=18$、20、23进行了证明.

对于完全双图，结果由林格尔独立得到。

定理5 设m,n是正整数，则：

$$\gamma(K_n)=\left\{\frac{(n-3)(n-4)}{12}\right\},\quad \gamma(K_{m,n})=\left\{\frac{(m-3)(n-2)}{4}\right\}.$$

2、图的厚度

定义5 若图G的k个可平面子图的并等于G, 则称k的最小值为G的厚度，记为$\theta(G)$.

定理6

（1）若$n \neq 4(\mathrm{mod}\, 6)$或$n \neq 9$, 则：$\theta(K_n) = \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor$;

（2）$\theta\left(K_{m,n}\right) = \left\lfloor \frac{mn}{2(m+n-2)} \right\rfloor$;

（3）对任意的单图$G = (n, m)$, 有：$\theta \geq \frac{m}{3n-6}$.

3、图的糙度

定义6　图G中边不相交的不可平面子图的最多数目称为G的糙度，记为：$\xi(G)$.

定理7　完全图的糙度由下式给出：

$$\xi(K_{3n})=\begin{cases}\binom{n}{2}, & 3n\leq 15\\ \binom{n}{2}+\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor, & 3n\geq 30\end{cases};$$

$$\xi(K_{3n+1})=\binom{n}{2}+2\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor,$$

（$3n+1\geq 19$并且$3n+1\neq 9r+7$, 其中r为面数）；

$$\xi(K_{3n+2})=\binom{n}{2}+\left\lfloor\frac{14n+1}{15}\right\rfloor.$$

定义8　将G画在平面上时相交的边对的最少数目称为G的叉数，记为$\eta(G)$.

定理9

$$\eta(K_n) \leq \frac{1}{4}\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil\left\lceil\frac{n-2}{2}\right\rceil\left\lceil\frac{n-3}{2}\right\rceil,$$

$$\eta\left(K_{m,n}\right) \leq \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil\left\lceil\frac{m-1}{2}\right\rceil\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil.$$

Thank You !