



中山大學  
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

# 《图论及其应用》 2024

潘嵘

计算机学院



# 本次课主要内容

## 图的顶点着色

- (一)、相关概念
- (二)、图的点色数的几个结论
- (三)、四色与五色定理
- (四)、顶点着色的应用

## (一)、相关概念

跟图的边着色问题一样，生活中的很多问题，也可以模型为所谓的图的顶点着色问题来处理。例如课程安排问题

课程安排问题：某大学数学系要为此个夏季安排课程表。所要开设的课程为：图论(GT)，统计学(S)，线性代数(LA)，高等微积分(AC)，几何学(G)，和近世代数(MA)。现有10名学生(如下所示)需要选修这些课程。根据这些信息，确定开设这些课程所需要的最少时间段数，使得学生选课不会发生冲突。(学生用 $A_i$ 表示)

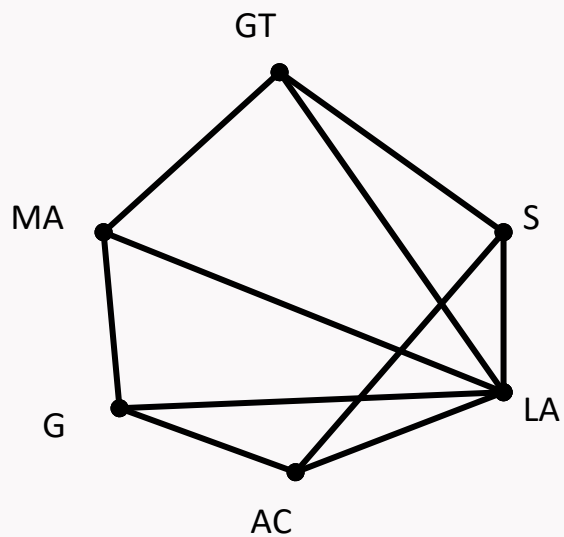
$A_1$ : LA, S ;  $A_2$ : MA, LA, G ;  $A_3$ : MA, G, LA;

$A_4$ : G, LA, AC ;  $A_5$ : AC, LA, S ;  $A_6$ : G, AC;

$A_7$ : GT, MA, LA ;  $A_8$ : LA,GT, S ;  $A_9$ : AC, S, LA;

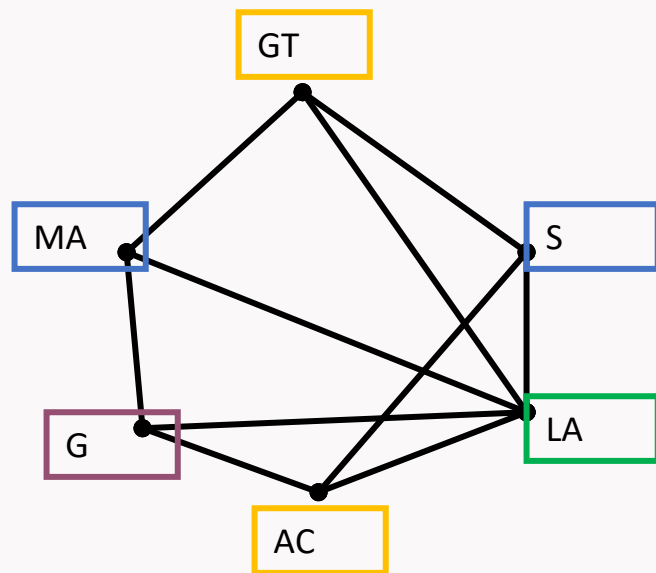
$A_{10}$ : GT, S。

把课程模型为图 $G$ 的顶点，两顶点连线当且仅当有某个学生同时选了这两门课程。



选课状态图

如果我们用同一颜色给同一时段的课程顶点染色，那么，问题转化为在状态图中求所谓的点色数问题。



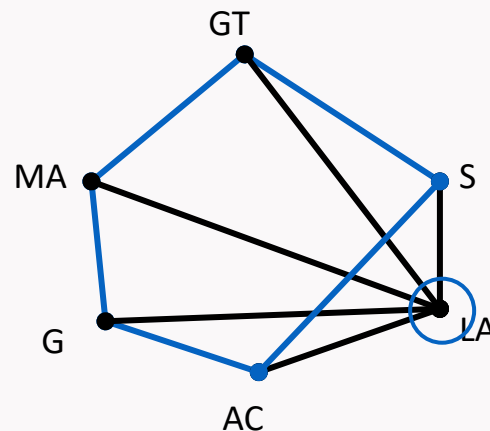
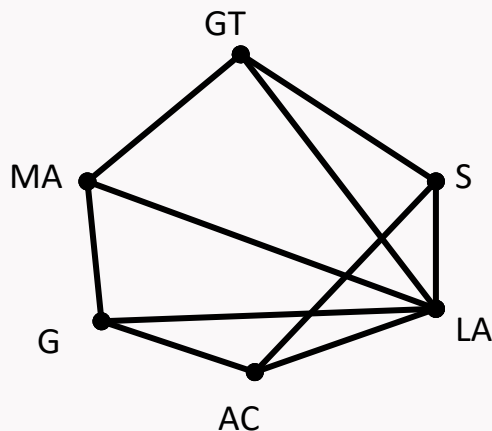
选课状态图

定义1 设 $G$ 是一个图，对 $G$ 的每个顶点着色，使得相邻顶点着不同颜色，称为对 $G$ 的**正常顶点着色**；

如果用 $k$ 种颜色可以对 $G$ 进行正常顶点着色，称 $G$ **可 $k$ 正常顶点着色**；

对图 $G$ 正常顶点着色需要的**最少颜色数**，称为图 $G$ 的**点色数**。图 $G$ 的点色数用 $\chi(G)$  表示。

例1 说明下图的点色数是4。

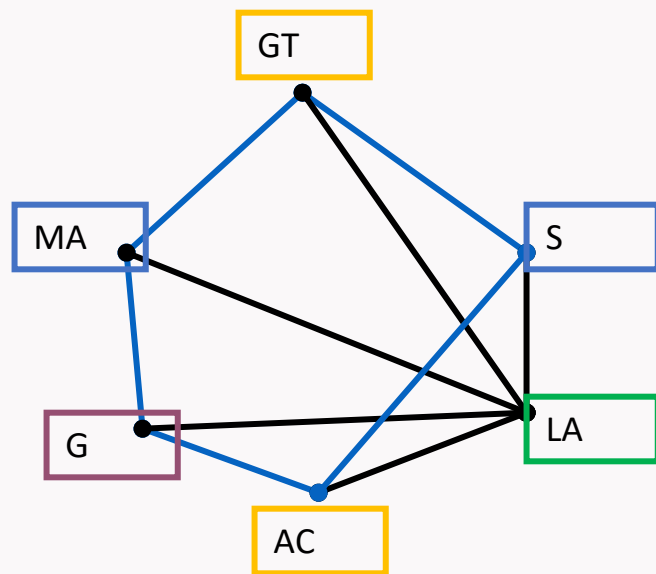


解：一方面，由图的结构特征容易知道

$$\chi(G) \geq 4.$$


另一方面，通过具体着色，用4种颜色可以得到该图的一种正常点着色，则

$$\chi(G) \leq 4.$$



所以，

$$\chi(G) = 4.$$



注：对图的正常顶点着色，带来的是图的顶点集合的一种划分方式。所以，对应的实际问题也是分类问题。属于同一种颜色的顶点集合称为一个色组，它们彼此不相邻接，所以又称为点独立集。用点色数种颜色对图 $G$ 正常着色，称为对图 $G$ 的最优点着色。

定义2 色数为 $k$ 的图称为 $k$ 色图。


## (二)、图的点色数的几个结论

定理1 对任意的图 $G$ ，有：

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

分析：事实上，定理结论容易想到，因为任意一个顶点度数至多为 $\Delta$ ，因此，正常着色过程中，其邻点最多用去 $\Delta$ 种颜色，所以，至少还有一种色可供该点正常着色使用。





证明: 我们对顶点数作数学归纳证明。

当 $n = 1$ 时, 结论显然成立。

设对顶点数少于 $n$ 的图来说, 定理结论成立。考虑一般的 $n$ 阶图 $G$ 。

任取 $v \in V(G)$ , 令 $G_1 = G - v$ , 由归纳假设:

$$\chi(G_1) \leq \Delta(G_1) + 1 \leq \Delta(G) + 1.$$

设 $\pi$ 是 $G_1$ 的一种 $\Delta(G_1) + 1$ 正常点着色方案, 因为 $v$ 的邻点在 $\pi$ 下至多用去 $\Delta(G)$ 种色, 所以给 $v$ 染上其邻点没有用过的色, 就把 $\pi$ 扩充成了 $G$ 的 $\Delta(G) + 1$ 着色方案。

对于 $G$ 来说, 可以给出其 $\Delta(G) + 1$ 正常点着色算法。

## $G$ 的 $\Delta(G) + 1$ 正常点着色算法

设 $G = (V, E)$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 色集合 $C = \{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$ , 着色方案为 $\pi$ .

(1) 令 $\pi(v_1) = 1, i = 1$ ;

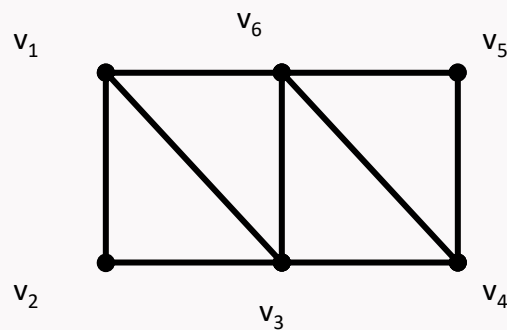
(2) 若 $i = n$ , 则停止; 否则令:

$$C(v_{i+1}) = \{\pi(v_j) | j \leq i, \text{ 并且 } v_j \text{ 与 } v_{i+1} \text{ 相邻}\},$$

设 $k$ 为 $C - C(v_{i+1})$ 中的最小整数, 令 $\pi(v_{i+1}) = k$ .

(3) 令 $i = i + 1$ , 转(2).

例2 给出下图的 $\Delta + 1$  正常点着色。



解：色集 $C = \{1,2,3,4,5\}$

$$(1) \pi(v_1) = 1$$

$$(2) C(v_2) = \{1\}, C - C(v_2) = \{2,3,4,5\}, k = 2$$

$$(1) \pi(v_2) = 2$$

$$(2) C(v_3) = \{1,2\}, C - C(v_3) = \{3,4,5\}, k = 3$$

$$(1) \pi(v_3) = 3$$

$$(2) C(v_4) = \{3\}, C - C(v_4) = \{1,2,4,5\}, k = 1$$

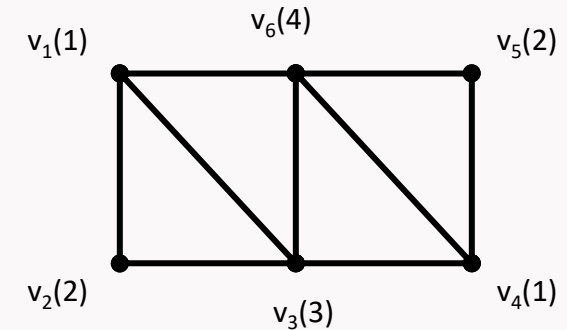
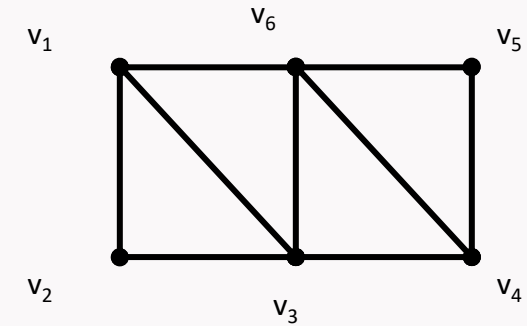
$$(1) \pi(v_4) = 1$$

$$(2) C(v_5) = \{1\}, C - C(v_5) = \{2,3,4,5\}, k = 2$$

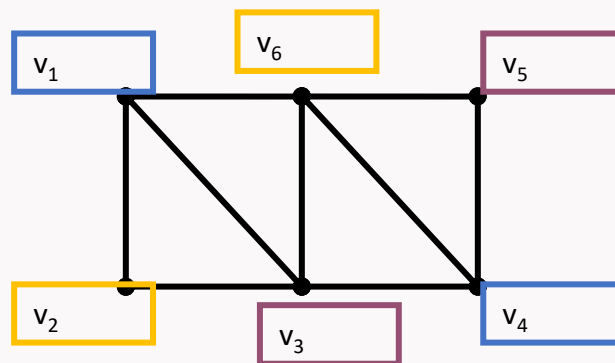
$$(1) \pi(v_5) = 2$$

$$(2) C(v_6) = \{1,2,3\}, C - C(v_5) = \{4,5\}, k = 4$$


$$(1) \pi(v_6) = 4$$



注：(1) 不能通过上面算法求出色数，例如，根据上面算法，我们求出了一个4色方案，但 $G$ 是3色图：



(2) Welsh—Powell稍微对上面算法做了一个修改，着色时按所谓最大度优先策略，即使用上面算法时，按顶点度数由大到小的次序着色。这样的着色方案起到了对上面算法的一个改进作用。



对于简单图 $G$ 来说，数学家布鲁克斯 (Brooks) 给出了一个对定理1的色数改进界。这就是下面著名的布鲁克斯定理

**定理2** (布鲁克斯, 1941) 若 $G$ 是连通的单图，并且它既不是奇圈，又不是完全图，则：

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$


数学家罗瓦斯在1973年给出了如下证明。

证明：不失一般性，我们可以假设 $G$ 是正则的，2连通的，最大度 $\Delta \geq 3$ 的简单图。原因如下：

(1) 容易证明：若 $G$ 是非正则连通单图，最大度是 $\Delta$ ，则

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

事实上，我们可以对 $G$ 的顶点数作数学归纳证明：



当 $n = 3$ 时，结论显然成立；（注：对于连通简单图， $n = 1$ 和 $2$ 时为完全图，所以 $n$ 从 $3$ 开始）

设对于阶数小于 $n$ 的非正则连通单图来说，结论成立。下设 $G$ 是阶数为 $n$ 的非正则连通单图。

设 $u$ 是 $G$ 中顶点，且 $d(u) = \delta < \Delta$ ，考虑 $G_1 = G - u$ 。

若 $G_1$ 是正则单图，则 $\Delta(G_1) = \Delta(G) - 1$ 。于是 $G_1$ 是可 $\Delta(G)$ 顶点正常着色的，从而， $G$ 是可 $\Delta(G)$ 正常顶点着色的。

若 $G_1$ 是非正则单图，则由数学归纳， $G_1$ 是可 $\Delta(G) = \Delta(G_1)$ 顶点正常着色的，从而 $G$ 是可 $\Delta(G)$ 正常顶点着色的。

(2) 容易证明：若 $G$ 是1连通（非2连通）单图，最大度是 $\Delta$ ，则

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

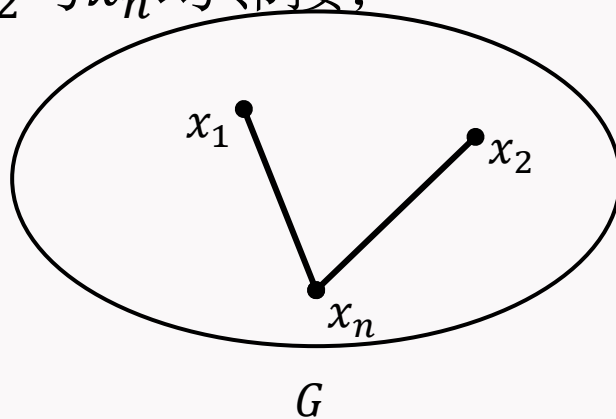
(3)  $\Delta(G) < 3$ .

若不然，结合(2)， $G$ 只可能为 $K_2$ 和圈。因 $G$ 不是奇圈，且不能为完全图，所以定理结论显然成立。

所以，下面只需证明：假设 $G$ 是正则的，2连通的，最大度 $\Delta \geq 3$ 的简单图且不是完全图或奇圈，有： $\chi(G) \leq \Delta(G)$ 。

分两步完成证明。

1) 在上面条件下，我们证明： $G$ 中存在三点 $x_1, x_2, x_n$ ，使得 $G - \{x_1, x_2\}$  连通， $x_1$ 与 $x_2$ 不邻接，但 $x_1, x_2$ 与 $x_n$ 均邻接；



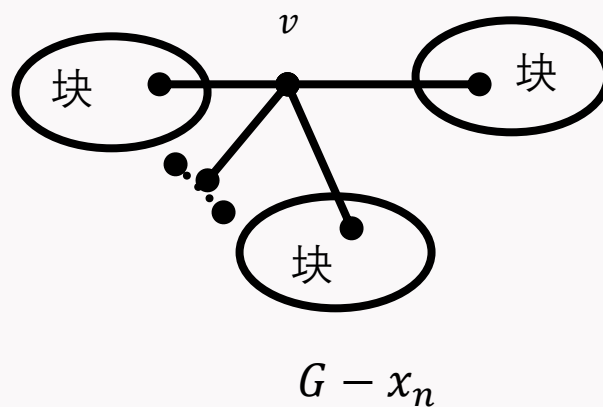



情形1 设 $G$ 是3连通的正则非完全图。

对于 $G$ 中点 $x_n$ , 显然在其邻点中存在两个不邻接顶点 $x_1$ 与 $x_2$ , 使得 $G - \{x_1, x_2\}$ 连通。

情形2 设 $G$ 是连通度为2的正则非完全图。

此时, 存在点 $x_n$ , 使得 $G - x_n$ 连通且有割点 $v$ , 于是 $G - x_n$ 至少含有两个块。





由于 $G$ 本身2连通，所以 $G - x_n$ 的每个仅含有一个割点的块中均有点与 $x_n$ 邻接。设分属于 $H_1$ 与 $H_2$ 中的点 $x_1$ 与 $x_2$ ，它们与 $x_n$ 邻接。由于 $x_1$ 与 $x_2$ 分属于不同块，所以 $x_1$ 与 $x_2$ 不邻接。又显然 $G - \{x_1, x_2\}$  连通。


2) 对 $G$ 中顶点进行如下排序：

令 $x_{n-1} \in V(G) - \{x_1, x_2, x_n\}$ 且与 $x_n$ 邻接；

$x_{n-2} \in V(G) - \{x_1, x_2, x_n, x_{n-1}\}$ 且与 $x_n$ 或 $x_{n-1}$ 邻接；

$x_{n-2} \in V(G) - \{x_1, x_2, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}\}$  且与 $x_n$ 或 $x_{n-1}$ 或 $x_{n-2}$ 邻接；

不断这样作下去，可得到 $G$ 的顶点排序：  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 。



该顶点序列的特征是，对于  $1 \leq i \leq n-1$ ， $x_i$  与某个  $x_{i+k}$  邻接。

把着色算法用于  $G$ ，按照上面顶点排序着色，容易知道，用  $\Delta(G)$  种颜色可以完成  $G$  的正常点着色。



对于简单图的点色数，还可以在定理2的基础上获得改进。

**定义3** 设  $G$  是至少有一条边的简单图，定义：

$$\Delta_2(G) = \max_{u \in V(G)} \max_{\substack{v \in N(u) \\ d(v) \leq d(u)}} d(v),$$

其中  $N(u)$  为  $G$  中点  $u$  的邻域。称  $\Delta_2(G)$  为  $G$  的次大度。

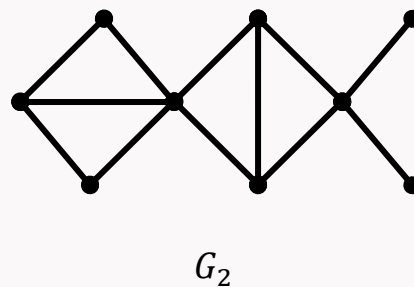
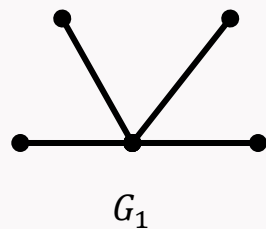
如果令：

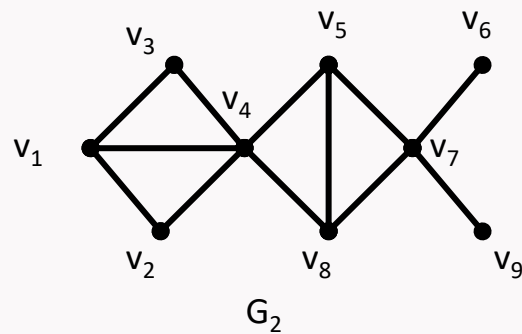
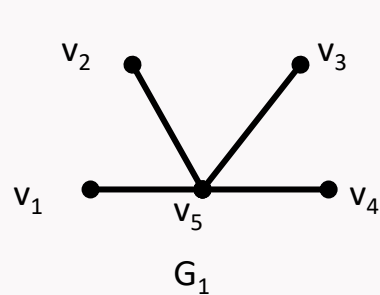
$$V_2(G) = \{v | v \in V(G), N(v) \text{ 中存在点 } u, \text{ 满足 } d(u) \geq d(v)\}.$$

那么，

$$\Delta_2(G) = \max\{d(v) | v \in V_2(G)\}.$$

例如：求下面图的次大度 $\Delta_2(G)$ .





解： (1)

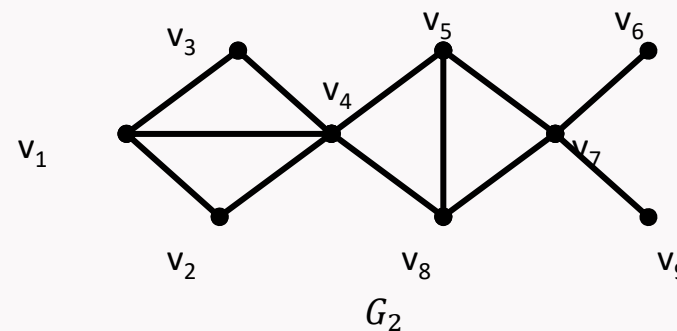
$$\begin{aligned} V_2(G_1) &= \{v | v \in V(G_1), N(v) \text{ 中存在点 } u, \text{ 满足 } d(u) \geq d(v)\} \\ &= \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \end{aligned}$$

$$\Delta_2(G_1) = \max\{d(v) | v \in V_2(G_1)\} = 1.$$

(2)

$$V_2(G_2) = \{v | v \in V(G_2), N(v) \text{ 中存在点 } u, \text{ 满足 } d(u) \geq d(v)\}.$$

$$= \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8, v_6, v_9\}.$$



$$\Delta_2(G_2) = \max\{d(v) | v \in V_2(G_2)\} = 3.$$

注：由次大度的定义知：  $\Delta_2(G) \leq \Delta(G)$ .

**定理3** 设 $G$ 是非空简单图，则：

$$\chi(G) \leq \Delta_2(G) + 1.$$

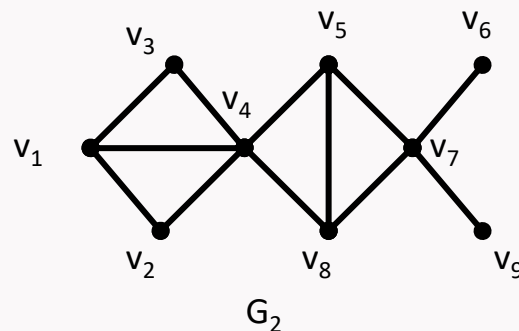
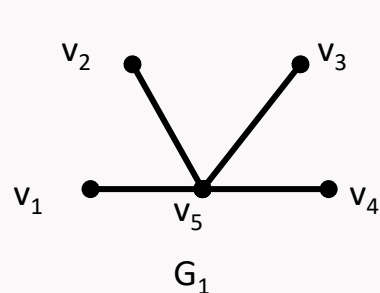
注：定理3是对定理2的一个改进！

例如：对下面的简单图来说，由定理2得：

$$\chi(G_1) \leq \Delta(G_1) = 4, \chi(G_2) \leq \Delta(G_2) = 5.$$

而由定理3得：

$$\chi(G_1) \leq \Delta_2(G_1) + 1 = 2, \chi(G_2) \leq \Delta_2(G_2) + 1 = 4.$$



推论：设 $G$ 是非空简单图，若 $G$ 中最大度点互不邻接，则有：

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

### (三)、四色与五色定理


#### 1、四色定理

1852年，刚毕业于伦敦大学的格斯里(1831—1899)发现：给一张平面地图正常着色，至少需要4种颜色。这就是著名的4色定理。

格斯里把他的证明通过他弟弟转交给著名数学家摩尔根，引起摩尔根极大兴趣并于当天给数学家哈密尔顿写了封相关信件。但没有引起哈密尔顿的注意。

直到1878年，在英国数学家会议上，数学家凯莱才再一次提到4色问题。






1879年7月，业余数学家肯普(1849---1922)在英国自然杂志上宣称证明了4色定理。肯普是凯莱在剑桥大学的学生。

1890年，英国数学家希伍德发表文章地图染色定理，通过构造反例，指出了肯普证明中的缺陷。后来，希伍德一直研究4色问题60年。

泰特在此期间也研究4色问题，但其证明被托特否定。

希伍德文章之后，4色问题研究进程开始走向停滞。

到了20世纪，美国数学家比尔荷夫提出可约性概念，在此基础上，德国数学家海斯(1906—1995)认为，可以通过寻找所谓的不可约构形来证明4色定理。



Heesch估计不可约构形集合可能包含10000个元素， 手工验证是不太可能.  
于是他给出了一种可用计算机来验证的方法。

20世纪70年代，哈肯和他的学生阿佩尔着力用计算机方法证明4色定理，借助于Appel在编程方面的深厚功底。他们于1976年6月终于成功解决了寻找不可约构形集合中的元素，宣告4色定理的成功证明。数学家托特在图论顶级刊物《图论杂志》上写了一首诗：

Wolfgang Haken

重重打击着巨妖

一次！两次！三次！四次！

他说：“妖怪已经不存在了。”

## 2、五色定理

定理4（希伍德） 每个平面图是5可着色的。

根据平面图和其对偶图的关系，上面定理等价于每个平面图是5可顶点正常着色的。


证明：我们对图的顶点作数学归纳证明。

当 $n = 1$ 时，结论显然。

设 $n = k$ 时，结论成立。考虑 $n = k + 1$ 的平面图 $G$ 。

因 $G$ 是平面图，所以 $\delta(G) \leq 5$ 。

设 $d(u) = \delta(G) \leq 5$ 。



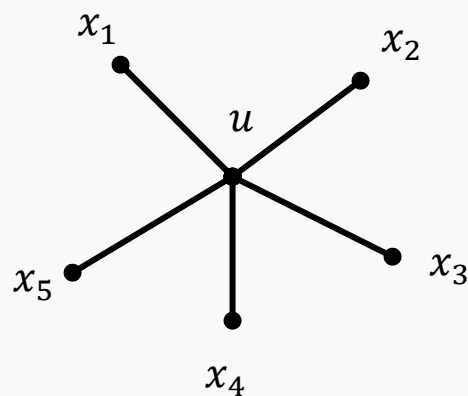
令  $G_1 = G - u$ . 由归纳假设,  $G_1$  是5可顶点正常着色的. 设  $\pi$  是  $G_1$  的5着色方案。

(1) 如果  $d(u) = \delta(G) < 5$ , 显然  $\pi$  可以扩充为  $G$  的5正常顶点着色;

(2) 如果  $d(u) = \delta(G) = 5$ , 分两种情况讨论。

情形1 在  $\pi$  下, 如果  $u$  的邻接点中, 至少有两个顶点着相同颜色, 则容易知道,  $\pi$  可以扩充为  $G$  的5正常顶点着色;

情形2 在  $\pi$  下, 设  $u$  的邻接点中, 5个顶点着了5种不同颜色。

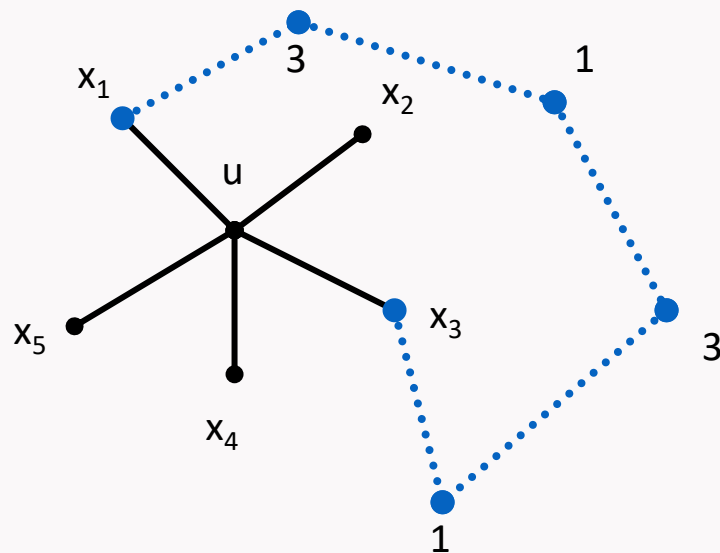


不失一般性，设  $\pi(x_i) = i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ).

设  $H(i, j)$  表示着  $i$  和  $j$  色的点在  $G_1$  中的点导出子图。

如果  $x_1$  与  $x_3$  属于  $H(1, 3)$  的不同分支。则通过交换含  $x_1$  的分支中的着色顺序，可得到  $G_1$  的新正常点着色方案，使  $x_1$  与  $x_3$  着同色，于是由情形1，可以得到  $G$  的5正常顶点着色方案；

设 $x_1$ 与 $x_3$ 属于 $H(1,3)$ 的相同分支。



在上面假设下， $x_2$ 与 $x_4$ 必属于 $H(2,4)$ 的不同分支。否则，将会得到 $H(1,3)$ 与 $H(2,4)$ 的交叉点。因此， $\pi$ 可以扩充为 $G$ 的5正常顶点着色。

## (四)、顶点着色的应用

图的正常顶点着色对应的实际问题是“划分”问题。

例1 课程安排问题：某大学数学系要为此个夏季安排课程表。所要开设的课程为：图论(GT)，统计学(S)，线性代数(LA)，高等微积分(AC)，几何学(G)，和近世代数(MA)。现有10名学生(如下所示)需要选修这些课程。根据这些信息，确定开设这些课程所需要的最少时间段数，使得学生选课不会发生冲突。(学生用 $A_i$ 表示)

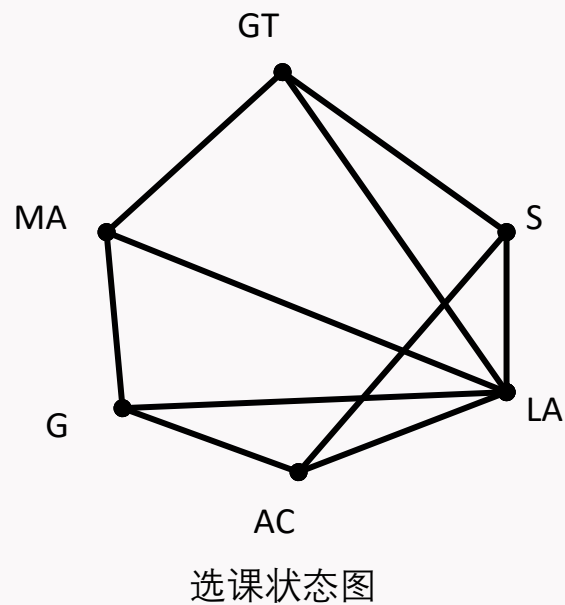
$A_1$ : LA, S ;       $A_2$ : MA, LA, G ;       $A_3$ : MA, G, LA;

$A_4$ : G, LA, AC ;       $A_5$ : AC, LA, S ;       $A_6$ : G, AC;

$A_7$ : GT, MA, LA ;       $A_8$ : LA, GT, S ;       $A_9$ : AC, S, LA;

$A_{10}$ : GT, S。

解：把课程模型为图 $G$ 的顶点，两顶点连线当且仅当有某个学生同时选了这两门课程。

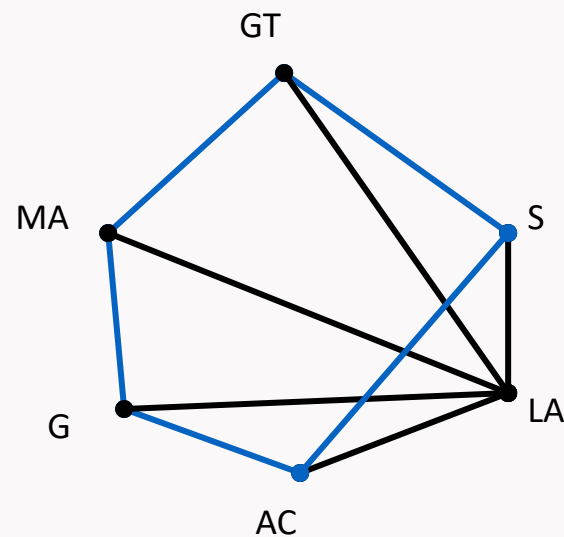




如果我们用同一颜色给同一时段的课程顶点染色，那么，问题转化为在状态图中求对应于点色数的着色。

### (1) 求点色数

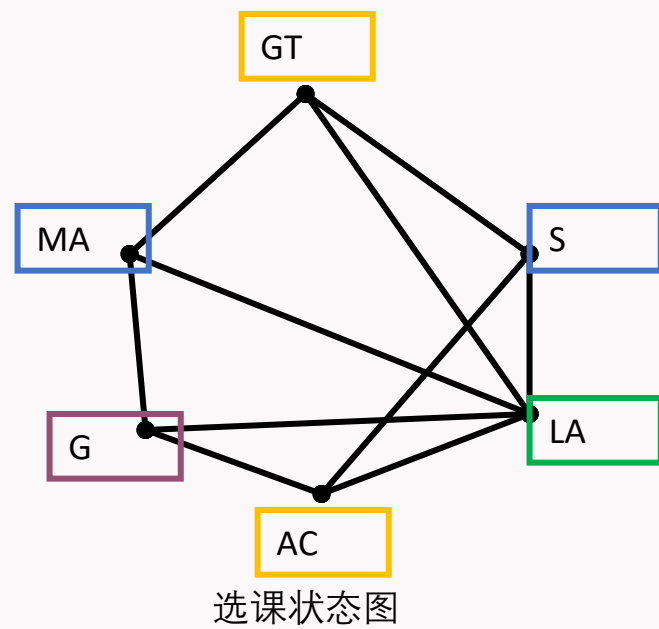
一方面，因图中含有奇圈(蓝色边)，所以，点色数至少为3。又因为点LA与该圈上每一个点均邻接，所以，点色数至少为4。



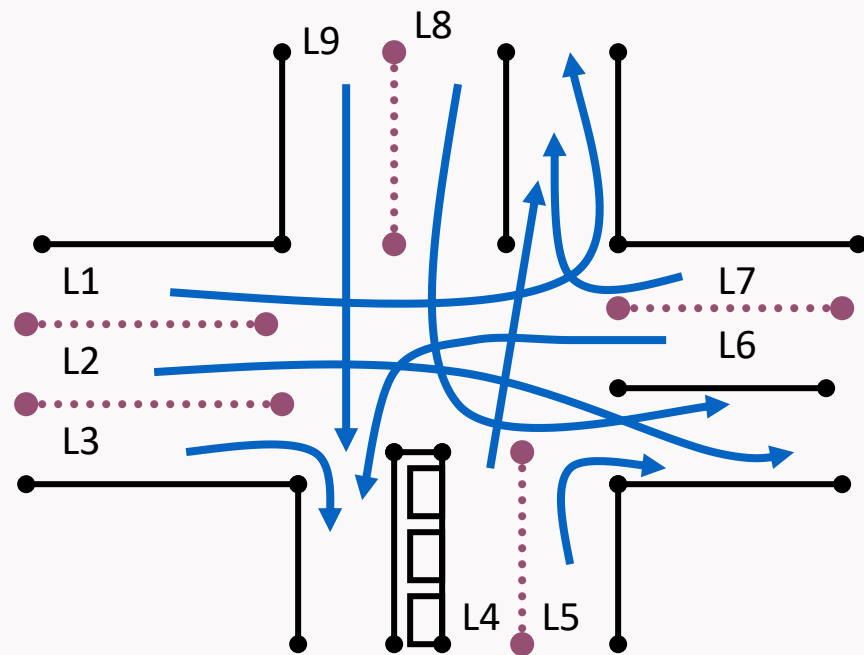
选课状态图

另一方面，我们用4种色实现了 $G$ 的正常点着色，所以，图的点色数为4。

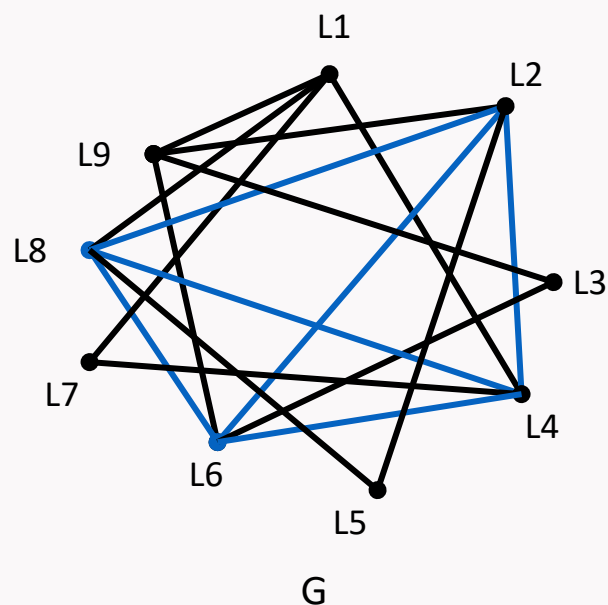
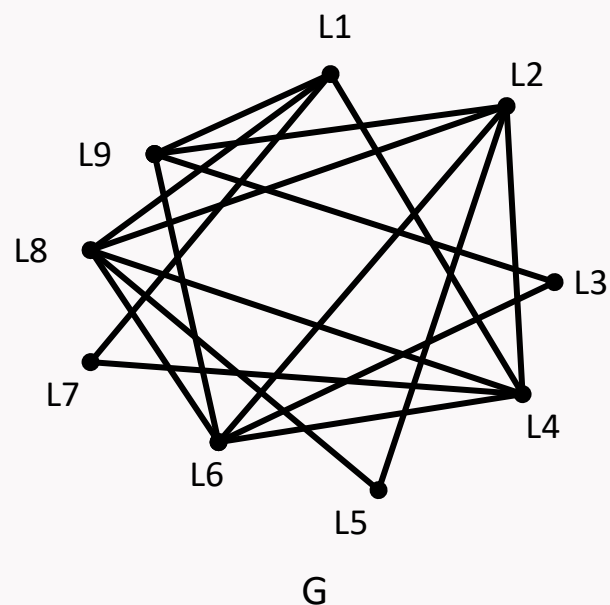
## (2) 求安排----具体着色



例2 交通灯的相位设置问题：如图所示，列出了繁华街道路口处的交通车道L1, L2, ..., L9。在此路口处安置了交通灯。当交通灯处于某个相位时，亮绿灯的车道上的车辆就可以安全通过路口。为了(最终)让所有的车辆都能够安全通过路口，对于交通灯来说，所需要的相位的最小数是多少？

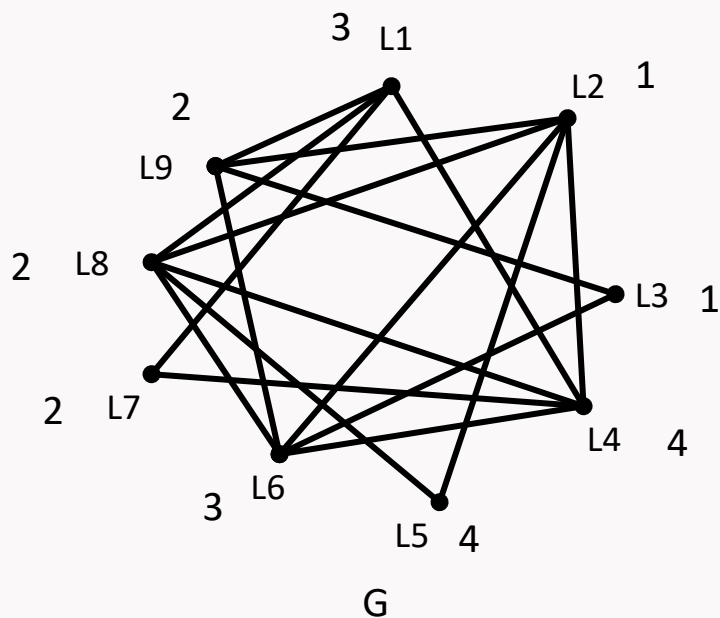


解：车道模型为顶点，两点连线当且仅当两个车道上的车不能同时安全地进入路口。



问题转化为求 $G$ 的点色数。一方面， $G$ 中含有 $K_4$ ，所以，点色数至少为4；

另一方面，通过尝试，用4种色实现了正常点着色。



所以，最小相位为4。



Thank You !