



中山大學  
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

# 《图论及其应用》 2023

潘嵘

计算机学院



# 本次课主要内容

(一)、生成树的概念与性质

(二)、生成树的计数

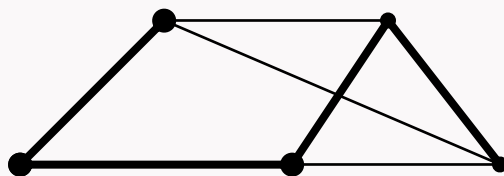
# (一)、生成树的概念与性质

## 1、生成树的概念

定义1 图 $G$ 的一个生成子图 $T$ 如果是树，称它为 $G$ 的一棵生成树；若 $T$ 为森林，称它为 $G$ 的一个生成森林。

生成树的边称为树枝， $G$ 中非生成树的边称为弦。

例如：



图G

粗边构成的子图为 $G$ 的生成树。



## 2、生成树的性质

定理1 每个连通图至少包含一棵生成树。

证明：如果连通图 $G$ 是树，则其本身是一棵生成树；

若连通图 $G$ 中有圈 $C$ ，则去掉 $C$ 中一条边后得到的图仍然是连通的，这样不断去掉 $G$ 中圈，最后得到一个 $G$ 的无圈连通子图 $T$ ，它为 $G$ 的一棵生成树。

定理1的证明实际上给出了连通图 $G$ 的生成树的求法，该方法称为**破圈法**。

利用破圈法, 显然也可以求出任意图的一个生成森林。



推论 若 $G$ 是 $(n, m)$ 连通图，则 $m \geq n - 1$ .

连通图 $G$ 的生成树一般不唯一！

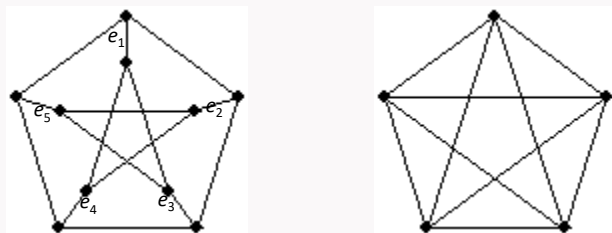
## (二)、生成树的计数

### 1、凯莱递推计数法

凯莱(Cayley 1821—1895)：剑桥大学数学教授，著名代数学家，发表论文数仅次于Erdos , Euler, Cauchy. 著名成果是1854年定义了抽象群，并且得到著名定理：任意一个群都和一个变换群同构。同时，他也是一名出色的律师，作律师14年期间，发表200多篇数学论文，著名定理也是在该期间发表的。

凯莱生成树递推计数公式是他在1889年建立的。

定义2 图 $G$ 的边 $e$ 称为被收缩, 是指删掉 $e$ 后, 把 $e$ 的两个端点重合, 如此得到的图记为 $G \cdot e$ .



用 $\tau(G)$ 表示 $G$ 的生成树棵数。


定理2 (Cayley) 设 $e$ 是 $G$ 的一条边, 则有:

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e).$$

证明: 对于 $G$ 的一条边 $e$ 来说,  $G$ 的生成树中包含边 $e$ 的棵数为 $G \cdot e$ , 而不包含 $e$ 的棵数为 $G - e$ .



3



凯莱公式的缺点之一是计算量很大，其次是不能具体指出每棵生成树。

## 2、关联矩阵计数法


定义3：  $n \times m$  矩阵的一个阶数为  $\min\{n, m\}$  的子方阵，称为它的一个主子阵；主子阵的行列式称为主子行列式。

显然，当  $n < m$  时，  $n \times m$  矩阵  $C_m^n$  个主子阵。

定理3 设  $A_m$  是连通图  $G$  的基本关联矩阵的主子阵，则  $A_m$  非奇异的充分必要条件是相应于  $A_m$  的列的那些边构成  $G$  的一棵生成树。

证明：





## 必要性

设 $A_m$ 是 $A_f$ 的一个非奇异主子阵，并设与 $A_m$ 的列相对应的边构成 $G$ 的子图 $G_m$ 。

由于 $A_m$ 有 $n-1$ 行，故 $G_m$ 应该有 $n$ 个顶点(包括参考点)；又 $A_m$ 有 $n-1$ 列，所以 $G_m$ 有 $n-1$ 条边。而 $A_m$ 非奇异，故 $A_m$ 的秩为 $n-1$ ，即 $G_m$ 连通。这说明 $G_m$ 是 $n$ 个点， $n-1$ 条边的连通图，所以，它是树。

## 充分性

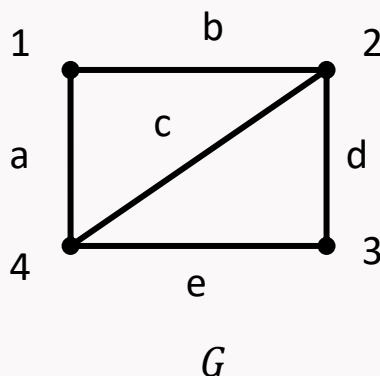
如果 $A_m$ 的列对应的边作成 $G$ 的一棵生成树，因树是连通的，所以，它对应的基本关联矩阵 $A_m$ 非奇异。

该定理给出了求连通图 $G$ 的所有生成树的方法：

(1) 写出 $G$ 的关联矩阵，进一步写出基本关联矩阵，记住参考点；

(2) 找出基本关联矩阵的非奇异主子阵，对每个这样的主子阵，画出相应的生成树。

例2，画出下图 $G$ 的所有不同的生成树。



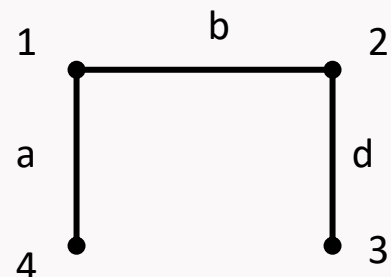
解：取4为参考点， $G$ 的基本关联矩阵为：

$$A_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

共有10个主子阵，非奇异主子阵8个，它们是：

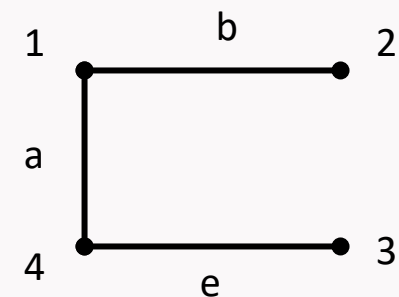
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1  
2  
3



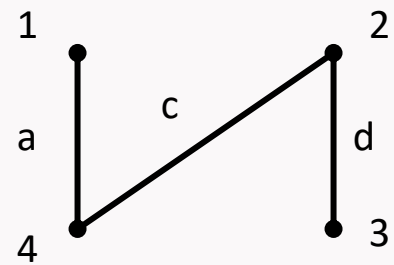
$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1  
2  
3



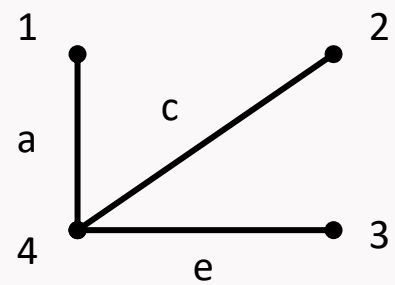
$$A_3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

1  
2  
3



$$A_4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & c & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

1  
2  
3

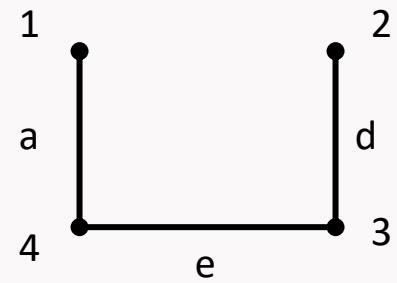


$$A_5 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & d & e \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

1

2

3

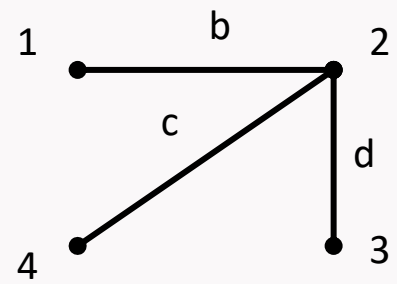


$$A_6 = \begin{matrix} & \begin{matrix} b & c & d \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

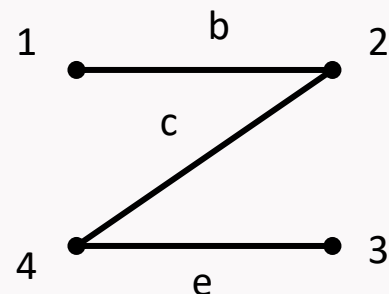
1

2

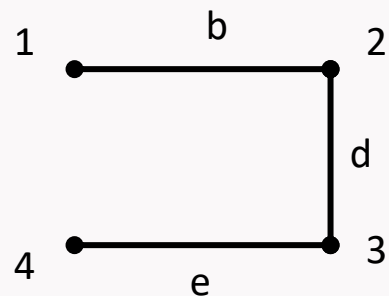
3



$$A_7 = \begin{matrix} & \begin{matrix} b & c & e \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$



$$A_8 = \begin{matrix} & \begin{matrix} b & d & e \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$



注：该方法的优点是不仅指出生成树棵数，而且能绘出所有不同生成树；缺点是找所有非奇异主子阵计算量太大！

**思考题：**凯莱递推计数法与关联矩阵计数法有什么关系？


### 3、矩阵树定理

定理3（矩阵树定理） 设 $G$ 是顶点集合为 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 的图，设 $A = (a_{ij})$ 是 $G$ 的邻接矩阵， $C = (c_{ij})$ 是 $n$ 阶方阵，其中：

$$c_{ij} = \begin{cases} d(v_i), i = j \\ -a_{ij}, i \neq j \end{cases}$$

则 $G$ 的生成树棵数为 $C$ 的任意一个元素的代数余子式。

说明：（1）该定理是由物理学家克希荷夫提出的。他于1824年出生于普鲁士的哥尼斯堡。1845年因宣布著名的克希荷夫电流电压定律而闻名，1847年大学毕业时发表了生成树计数文章，给出了矩阵树定理。他的一生主要花在实验物理上。担任过德国柏林数学物理会主席职务。



(2) 矩阵树定理的证明比较复杂，在此略去证明；

(3) 定理中的矩阵 $C$ 又称为图的拉普拉斯矩阵，又可定义为：

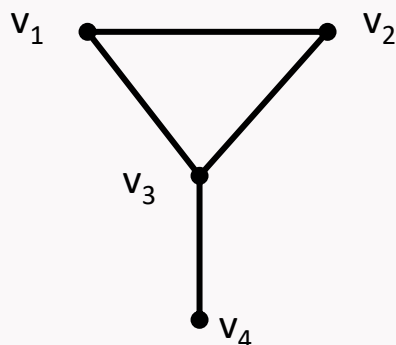
$$C = D(G) - A(G),$$

其中， $D(G)$ 是图的度对角矩阵，即主对角元为对应顶点度数，其余元素为0。 $A(G)$ 是图的邻接矩阵。

图的拉普拉斯矩阵特征值问题是代数图论或组合矩阵理论的主要研究对象之一。该问题因为在图论、计算机科学、流体力学、量子化学和生物医学中的重要应用而受到学者们的高度重视。研究方法大致有3种：代数方法、几何方法和概率方法。



例3 利用矩阵树定理求下图生成树的棵数。



解：图的拉氏矩阵为：
$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

一行一列对应的余子式为：
$$(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

例4 证明 $\tau(K_n) = n^{n-2}$ .

证明：容易写出 $K_n$ 的拉氏矩阵为：

$$C(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ & \cdots & & \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}.$$


一行一列对应的余子式为：

$$(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ & \cdots & & \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ & \cdots & & \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} \\
 = & \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ & \cdots & & \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} \\
 = & \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & n & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

所以：

$$\tau(K_n) = n^{n-2}.$$




注：例4的证明有好几种不同方法。用矩阵树定理证明是最简单的方法。1967年，加拿大的Moon用了10种不同方法证明，之后有人给出了更多证明方法。

Moon的学术生涯主要是对树和有向图问题进行研究。同时，正如大多数科学家一样，他对音乐也很感兴趣。他还认为：当一个人发现了新事物，而且很难对非数学工作者解释该发现时，他就会产生一种满足喜悦感。

例5 证明：若 $e$ 为 $K_n$ 的一条边，则：

$$\tau(K_n - e) = (n - 2)n^{n-3}.$$

证法一：若 $e$ 为 $K_n$ 的一条边，由 $K_n$ 中的边的对称性以及每棵生成树的边数为 $n - 1$ ， $K_n$ 的所有生成树的总边数为：


$$(n-1)n^{n-2}.$$

所以，每条边所对应的生成树的棵数为：

$$\frac{(n-1)n^{n-2}}{\frac{1}{2}n(n-1)} = 2n^{n-3}.$$

所以， $K_n - e$ 对应的生成树的棵数为：

$$\tau(K_n - e) = n^{n-2} - 2n^{n-3} = (n-2)n^{n-3}.$$

证法二：假设在 $K_n$ 中去掉的边 $e = v_1v_n$ ，则 $K_n - e$ 的拉氏矩阵为：

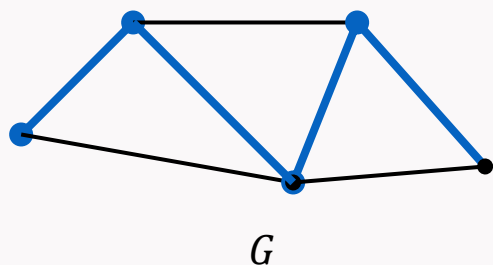
$$C = \begin{pmatrix} n-2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ & \cdots & & \\ 0 & -1 & \cdots & n-2 \end{pmatrix}.$$

于是由矩阵树定理：

$$\begin{aligned} \tau(K_n - e) &= \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ & & \cdots & & \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & n-2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ & & \cdots & & \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & 0 \\ & & \cdots & & \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= n^{n-2} - 2n^{n-3} \\ &= (n-2)n^{n-3}. \end{aligned}$$

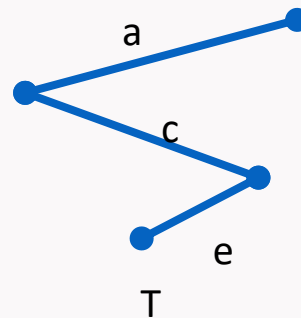
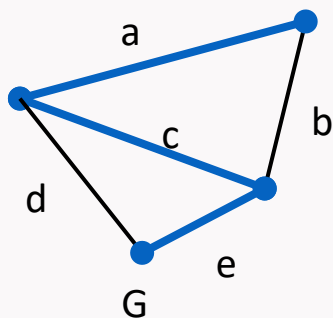
### (三)、回路系统简介

定义4 设 $T$ 是连通图 $G$ 的一棵生成树，把属于 $G$ 但不属于 $T$ 的边称为 $G$ 关于 $T$ 的连枝， $T$ 中的边称为 $G$ 关于 $T$ 的树枝。

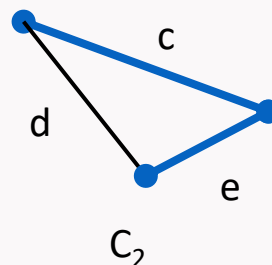
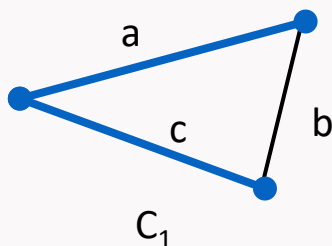


在上图中，蓝色边导出图的一棵生成树。则蓝色边为 $G$ 对应于该生成树的树枝，黑色边为 $G$ 对应于该生成树的连枝。

定义5 设 $T$ 是连通图 $G$ 的一棵生成树，由 $G$ 的对应于 $T$ 一条连枝与 $T$ 中树枝构成的唯一圈 $C$ ，称为 $G$ 关于 $T$ 的一个基本圈或基本回路。若 $G$ 是 $(n, m)$ 连通图，把 $G$ 对应于 $T$ 的 $m - n + 1$ 个基本回路称为 $G$ 对应于 $T$ 的基本回路组。记为 $C_f$ 。



基本回路为：





## 基本回路的性质：


定理 4 设  $T$  是连通图  $G = (n, m)$  的一棵生成树， $C_1, C_2, \dots, C_{m-n+1}$  是  $G$  对应于  $T$  的基本回路组。定义： $1 \cdot G_i = G_i$ ， $0 \cdot G_i = \Phi$ ，其中  $G_i$  是  $G$  的回路。则  $G$  的回路组作成的集合对于该数乘和图的对称差运算来说作成数域  $F = \{0, 1\}$  上的  $m - n + 1$  维向量空间。

证明：(1) 非空、两闭、8条容易证明。

(2) 首先证明  $C_1, C_2, \dots, C_{m-n+1}$  线性无关。

若不然，设  $C_1, C_2, \dots, C_{m-n+1}$  线性相关，那么存在一组不全为零的数  $a_1, a_2, \dots, a_{m-n+1}$ ，使得：

$$a_1 C_1 \Delta a_2 C_2 \Delta \cdots \Delta a_{m-n+1} C_{m-n+1} = \Phi.$$



但是，任意两个基本回路包含两条不同连枝，所以，若某个 $a_k \neq 0$ ，则

$$a_1 C_1 \Delta a_2 C_2 \Delta \cdots \Delta a_{m-n+1} C_{m-n+1} \neq \Phi.$$

矛盾！

其次证明 $G$ 的任意一个回路均可由 $C_1, C_2, \dots, C_{m-n+1}$ 线性表出。

设 $B$ 是 $G$ 的任一回路，显然，它至少含一条连枝，不失一般性，令：

$$B = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_j}, e_{i_{j+1}}, \dots, e_{i_k}\},$$

其中： $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_j}$ 为连枝， $e_{i_{j+1}}, \dots, e_{i_k}$ 为树枝。



又设包含连枝 $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_j}$ 的基本回路为 $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_j}$ .

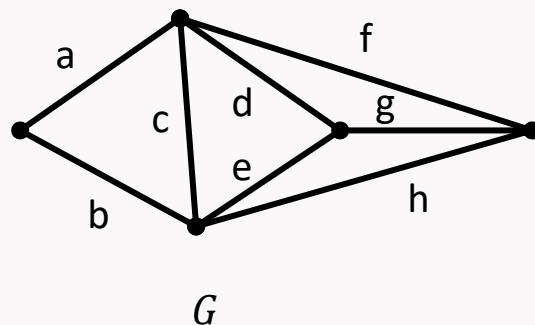
令： $B_1 = C_{i_1} \Delta C_{i_2} \Delta \dots \Delta C_{i_j}$ .

显然， $B_1$ 中只含有 $B$ 中连枝，于是 $B \Delta B_1$ 只含树枝不含连枝。但是，可以证明：两个回路的环和一定是回路。因此 $B \Delta B_1$ 中只含树枝不含连枝是不可能的。

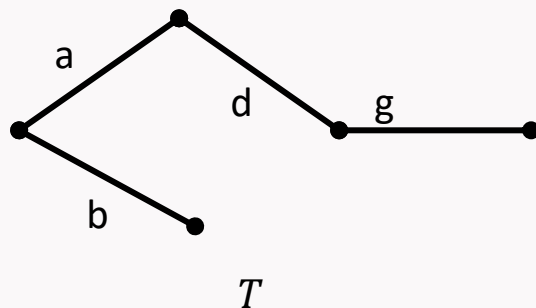
所以： $B_1 \Delta B = \Phi$ ，得 $B_1 = B$ .

定理4说明，连通图 $G$ 的所有回路作成子图空间的一个子空间，该空间称为回路空间或回路系统。

例6 求下图 $G$ 的回路空间的一个基底和它的全部元素。



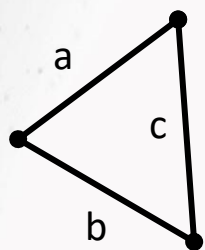
解：取 $G$ 的一棵生成树 $T$ 为：



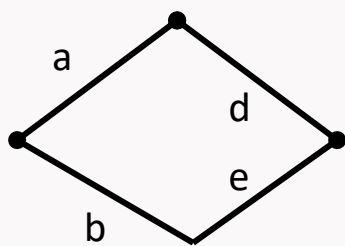
$G$ 对于生成树 $T$ 的基本回路为：

$$\begin{aligned} C_1 &= \{a, b, c\}, & C_2 &= \{a, b, d, e\}, \\ C_3 &= \{a, b, d, g, h\}, & C_4 &= \{d, f, g\}. \end{aligned}$$

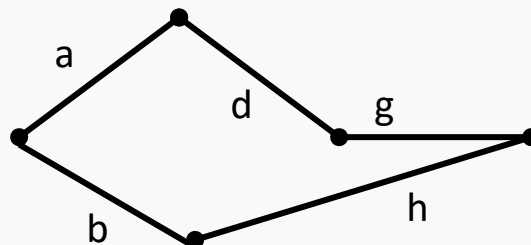
图形为：



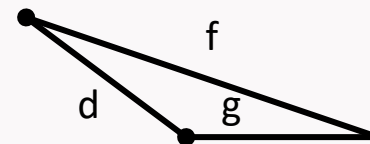
$C_1$



$C_2$



$C_3$



$C_4$

所有可能的环和为：

$$B_1 = C_1 \Delta C_2 = \{c, d, e\}$$

$$B_2 = C_1 \Delta C_3 = \{c, d, g, h\}$$

$$B_3 = C_1 \Delta C_4 = \{a, b, c, d, f, g\}$$

$$B_4 = C_2 \Delta C_3 = \{e, g, h\}$$

$$B_5 = C_2 \Delta C_4 = \{a, b, e, f, g\}$$

$$B_6 = C_3 \Delta C_4 = \{a, b, f, h\}$$

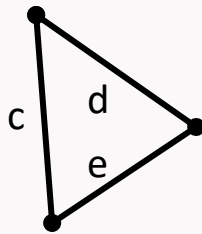
$$B_7 = C_1 \Delta C_2 \Delta C_3 = \{a, b, c, e, g, h\}$$

$$B_8 = C_1 \Delta C_2 \Delta C_4 = \{c, e, f, g\}$$

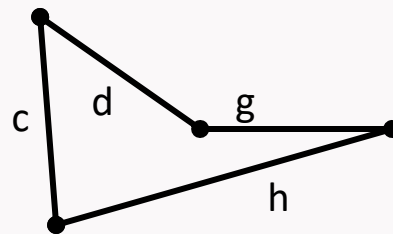
$$B_9 = C_1 \Delta C_3 \Delta C_4 = \{c, f, h\}$$

$$B_{10} = C_2 \Delta C_3 \Delta C_4 = \{d, e, f, h\}$$

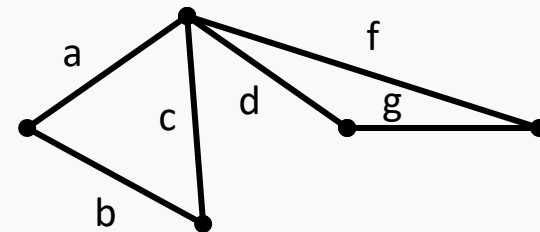
$$B_{11} = C_1 \Delta C_2 \Delta C_3 \Delta C_4 = \{a, b, c, d, e, f, h\}$$



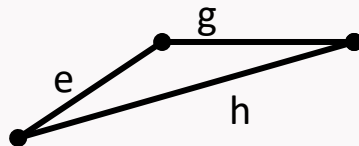
$B_1$



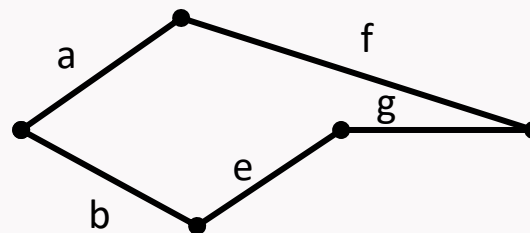
$B_2$



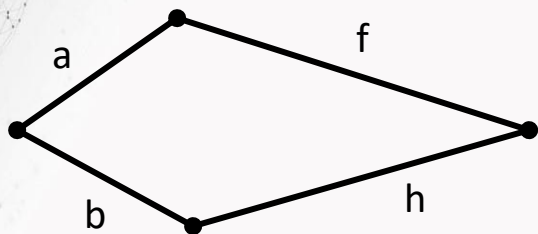
$B_3$



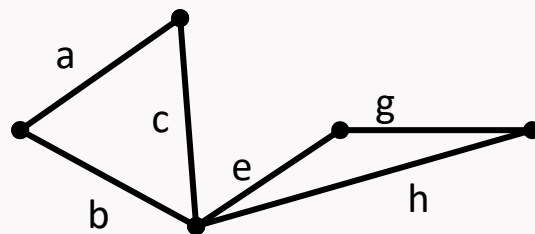
$B_4$



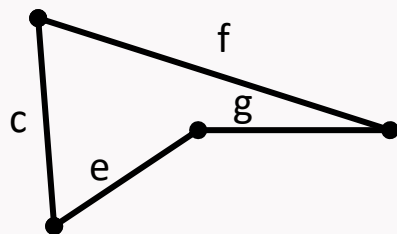
$B_5$



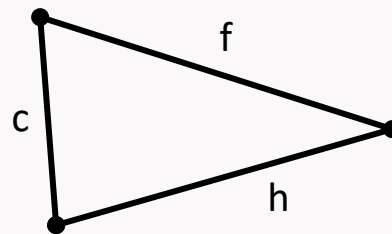
$B_6$



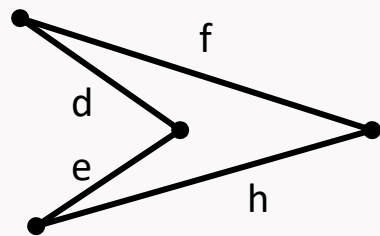
$B_7$



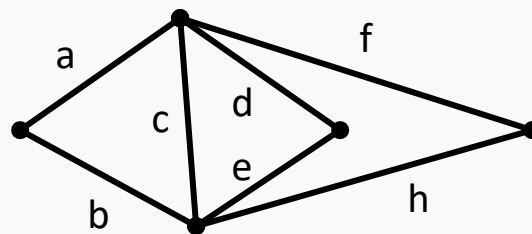
$B_8$




$B_9$



$B_{10}$



$B_{10}$



Thank You !