第一章　概率论的基本概念

§1.1　随机试验

§1.2　样本空间、随机事件

§1.3　频率与概率

§1.4　等可能概型(古典概型)

§1.5　条件概率

§1.6　独立性

§1.5　条件概率

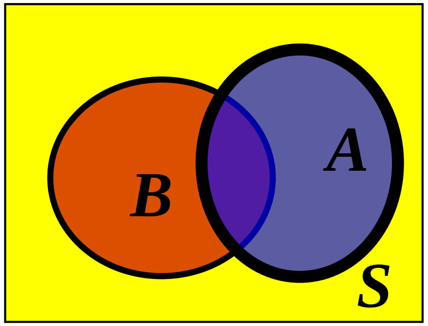
一、条件概率

引例 某班30名同学,其中男20名,女10名.身高1.70米以上者15名,其中男12名,女3名.任选一名学生,选出来后发现是个男生,问该学生的身高在1.70米以上的概率是多少?

解: 设事件A为“选出的是男生”，事件B为“选出的是身高1.70米以上”. 显然, $P(A)=20/30$.

而我们要求的是在设事件A发生的条件下，事件B发生的概率, 即$P(B|A)$.

由题意， $P(B|A)=12/20=\dfrac{12/30}{20/30}=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$



1. 定义: 设A ,B 是两个随机事件,且$P(A)>0$, 称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件A 发生的条件下事件B 发生的**条件概率**.

2. 性质: 条件概率$P(\cdot|A)$满足概率的三个基本属性:

(1) 对于任一事件B，有$P(B|A)\geq 0$

(2) $P(S|A)=1$

(3)设$B_1, B_2, \ldots$ 是两两不相容的事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i|A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A)$$

由于条件概率符合概率定义的三个条件，所以前面所证明的一些概率性质对于条件概率也同样适用.

例如

对于任意事件B_1, B_2，有：

$$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1B_2|A)$$

对于任意事件B，有：

$$P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A)$$

例1 设某种动物由出生算起活到20岁以上的概率是0.8，活到25岁以上的概率为0.4,动物现在已经20岁，问它能活到25岁以上的概率是多少？

解 A="活到20岁以上"，B="活到25岁以上"，

由题意 P(A)=0.8， P(B)=0.4

因为 $B \subset A$，故 $AB = B$

所以 P(AB)=P(B)=0.4，

因此 $P(B \mid A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{0.4}{0.8} = \dfrac{1}{2}$

例2 一袋中装有10个球，其中3个黑球，7个白球，先后两次从袋中各取一球（不放回）.

(1) 已知第一次取出的是黑球，求第二次取出的仍是黑球的概率；

(2) 已知第二次取出的是黑球，求第一次取出的也是黑球的概率.

解 记A_1="第一次取出的是黑球"，A_2="第二次取出的是黑球"，

(1)由题意直接可得 $P(A_2|A_1)=\frac{2}{9}$

或利用公式: $P(A_1A_2)=\frac{3\times 2}{10\times 9}=\frac{1}{15}$ $\quad P(A_1)=\frac{3}{10}$

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{1/15}{3/10}=\frac{2}{9}$$

(2) $P(A_2)=P(A_1A_2\cup\bar{A}_1A_2)=P(A_1A_2)+P(\bar{A}_1A_2)=\frac{3\cdot 2}{10\cdot 9}+\frac{7\cdot 3}{10\cdot 9}=\frac{3}{10}$

$$P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{1/15}{3/10}=\frac{2}{9}$$

二、乘法定理

定理(乘法定理) 对于任意的事件A, B, 若$P(A)>0$，

则 $$P(AB)=P(A)P(B|A) \text{ ------乘法公式}$$

或 $$P(AB)=P(B)P(A|B) \qquad (P(B)>0)$$

[注] 乘法公式可以推广到多个事件的情形：

1° 设A,B,C为事件，且$P(AB)>0$, 则有

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|BA)$$

2° 设$A_1, A_2, \ldots A_n$ 为n个事件，且$P(A_1A_2\ldots A_{n-1})>0$,

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

[注] 在某些问题中，条件概率是已知的或者是比较容易求得的，在这种情况下，就可以利用乘法公式来计算积事件的概率.

例3 今有3个布袋, 2个红袋, 1个绿袋. 在2个红袋中各装60个红球和40个绿球，在绿袋中装了30红球和50个绿球，现任取1袋，从中任取1球，问是红袋中红球的概率为多少？

解 设A=“取到红袋”, B=“取到红球”, 所求概率$P(AB)$.

显然，$P(A)=2/3$,

$$P(B|A)=60/100=3/5,$$

由乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)= (2/3)\cdot(3/5)= 2/5 .$$

例4 设袋中装有r只红球，t只白球. 每次自袋中任取一只球,观察其颜色然后放回,并再放入a只与所取出的那只球同色的球.若在袋中连续取球四次,试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率.

解: 记 A_i =“第i 次取到红球”，i=1,2,3,4, 则

$\overline{A_i}$ =“第i 次取到白球”，i=1,2,3,4,

所求概率为$P(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4})$

$$P(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(\overline{A_3}|A_1A_2)P(\overline{A_4}|A_1A_2\overline{A_3})$$

$$= \frac{r}{r+t}\cdot\frac{r+a}{r+t+a}\cdot\frac{t}{r+t+2a}\cdot\frac{t+a}{r+t+3a}$$

例5 今有1张电影票，4个人都想要，他们用抓阄的办法分这张票，试证明每人得电影票的概率都是1/4.

证明： 设第i次抓阄的人为第i人，i=1，2，3，4

并设A_i=“第i个人抓到‘有’”， i=1，2，3，4

(1) 显然 $P(A_1)=1/4$

(2) 第2个人抓到‘有’的必要条件是第一个人抓到‘无’，

故 $A_2 \subset \overline{A}_1$ ，所以，有 $A_2 \subset \overline{A}_1 A_2$

又显然有：$\overline{A}_1 A_2 \subset A_2$ ，故 $A_2 = \overline{A}_1 A_2$

因此 $P(A_2) = P(\overline{A}_1 A_2) = P(\overline{A}_1) P(A_2 | \overline{A}_1) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}$

(3) 类似地，$A_3=\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$

故 $$P(A_3)=P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1)$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

(4) 同样地，$A_4=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4$

$$P(A_4)=P(A_4|\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)P(\bar{A}_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1)$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{4}$$

一般地: 袋中有*a*只白球, *b*只红球, *k*个人依次在袋中取一球，则不论放回还是不放回，第*i*个人取到白球的概率为*a*/(*a*+*b*).

例6 设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时打破的概率为1/2，若第一次落下未打破，第二次落下打破的概率为7/10，第三次落下打破的概率为9/10，试求透镜落下三次而未打破的概率.

解: 设 A_i =“透镜第i次落下打破”，i=1,2,3,4,

B=“透镜落下三次而未打破”.

因为 $B=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$

故有 $P(B)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(\overline{A_3}\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2})$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{7}{10}\right)\left(1-\frac{9}{10}\right)$$

$$=\frac{3}{200}$$

例7 已知$P(A)=0.3$, $P(B)=0.4$, $P(A|B)=0.5$，

求 $P(B|A\cup B)$

解: 由乘法公式，

$P(AB)=P(B)P(A|B)=0.4\times0.5=0.2$，

$$P(B|A\cup B)=\frac{P(B(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(B)}{P(A\cup B)}$$

$$=\frac{P(B)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$$

$$=\frac{0.4}{0.3+0.4-0.2}=\frac{4}{5}$$

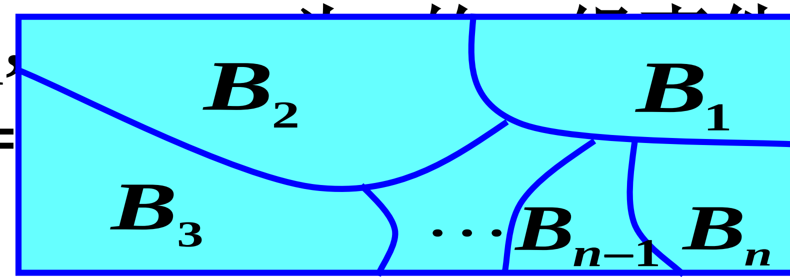
三、全概率公式和贝叶斯公式

1. 全概率公式

定义:设试验E，样本空间S, B_1,

若 (1) $B_iB_j=\Phi, i\neq j, i,j=$

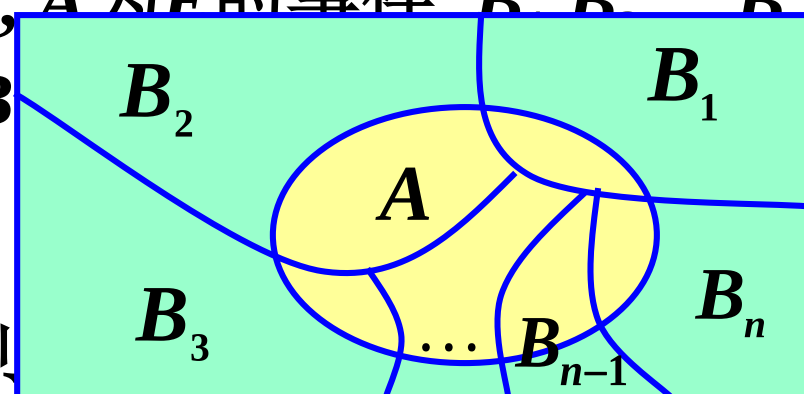
(2) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$,



则称$B_1,B_2,\ldots,B_n$为样本空间S的一个划分(完备事件组)。

定理 设试验E的样本空间为S, A为E的事件, $B_1, B_2, \ldots, B_n$

为样本空间S的一个划分, $P(B$



$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P$$

上式称为**全概率公式**. 特别

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$

2. 贝叶斯公式

定理 设试验E的样本空间为S, A为E的事件, $B_1,B_2,\ldots B_n$为样本空间S的一个划分,且$P(A)>0,P(B_i)>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$,则

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)},i=1,2,\cdots,n$$

——贝叶斯公式

[注]全概率公式是概率论的一个基本公式.直接计算P(A)不易时，可构造一完备事件组$B_1,\ldots B_n$,利用这个公式来计算$P(A)$.

贝叶斯公式给出的是，一事件已经发生，要考察引发该事件发生的各种原因的可能性的大小.

例8 设一仓库中有十箱同样规格的产品，已知其中有五箱、三箱、两箱依次为甲厂、乙厂、丙厂生产的.且甲厂、乙 厂、丙厂生产的该种产品的次品率依次为1/10、1/15、1/20. 从这十箱中任取一箱，再从取得的这箱中任取一件产品，求

(1)取得正品的概率;

(2)已知取得正品，该正品是甲厂生产的概率是多少？

解 设A=“取得的是正品”，

B_i=“该件产品是甲、乙、丙厂生产的”，i=1,2,3

显然，$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = S$，且$B_1$、$B_2$、$B_3$互斥

由已知得：$P(B_1)=5/10$，$P(B_2)=3/10$，$P(B_3)=2/10$，

$P(A|B_1)=9/10$，$P(A|B_2)=14/15$，$P(A|B_3)=19/20$

由全概公式 $$P(A)=\sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A\mid B_i)=\frac{5}{10}\frac{9}{10}+\frac{3}{10}\frac{14}{15}+\frac{2}{10}\frac{19}{20}=0.92$$

例9 甲胎免疫蛋白检测法(AFP)被普遍用于肝癌的早期诊断和普查. 已知肝癌患者经AFP诊断为肝癌的概率为95%，而未患肝癌通过AFP被诊断为肝癌的概率为2%，在人群中肝癌的发病率一般为0.4%, 现有一人经诊断为患肝癌，求此人确实患肝癌的概率.

解： 设 A=“此人患肝癌”， B=“经诊断为患肝癌”

先验概率

$$P(A)=0.004,\ P(\bar{A})=0.996$$

$$P(B\mid A)=0.95,\ P(B\mid \bar{A})=0.02$$

由贝叶斯公式得

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})}$$

后验概率

$$=\frac{0.004\times 0.95}{0.004\times 0.95+0.996\times 0.02}=0.193$$

练习（教材P_{26}第18题）

1.某人忘记电话号码最后一位数字, 因而随意拨最后一位数字, 求 (1)不超过三次而接通电话的概率;

(2)已知最后一个数字是奇数, 不超过三次而接通电话的概率.

解: 设A_i = {第 i 次接通电话}， i =1, 2, 3.

(1) A= {三次内接通电话}$=A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$

故 $P(A)=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$

$$=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{3}{10}$$

(2)已知最后一个数字是奇数, 不超过三次而接通电话的概率.

$$=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$$

小结

条件概率 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ $\longrightarrow$ 乘法定理

$$P(AB)=P(B|A)P(A)$$

全概率公式

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$$

贝叶斯公式

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n$$

条件概率 $P(A|B)$ 与积事件概率 $P(AB)$ 的区别

$P(AB)$ 表示在样本空间S 中, AB 发生的概率,而$P(B|A)$表示在缩小的样本空间S_A 中 , B 发生的概率 .

$$P(B|A)=\frac{AB\text{中基本事件数}}{S_A\text{中基本事件数}},$$

$$P(AB)=\frac{AB\text{中基本事件数}}{S\text{中基本事件数}},$$

一般来说, $P(B|A)$ 比 $P(AB)$ 大 .

作业

- **第一章习题14, 15, 17, 19, 21, 24, 26, 38**

§1.6 独立性

一般来讲，条件概率$P(B|A)$与概率$P(B)$是不等的，即事件A，B中某个事件发生对另一个事件发生是有影响的. 但在许多实际问题中常会遇到两个事件中任何一个发生都不会对另一个事件发生的概率产生影响，此时$P(B)= P(B|A)$。

定义1 设A，B是两事件，如果

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件A, B为**相互独立的**随机事件.

[注] 1° 当$P(A), P(B)>0$时，A、B相互独立

$$\Longleftrightarrow P(B|A)=P(B),\ P(A|B)=P(A);$$

2° 两事件互不相容与相互独立是完全不同的两个概念. 若$P(A)>0, P(B)>0$，则A与B相互独立和A与B互不相容不能同时成立.

定理 若四对事件A与$\overline{B}$、$\overline{A}$与$\overline{B}$、A与$\overline{B}$ 、 A与B 中有一对独立，则另外三对也独立. (即这四对事件或者都独立，或者都不独立).

证明 仅证明A与B独立时有$\overline{A}$与B 独立，

由于 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$

$$=P(A)-P(A)P(B) \qquad (A\text{与}B\text{独立})$$

$$=P(A)[1-P(B)] =P(A)P(\overline{B})$$

上式说明A与$\overline{B}$ 相互独立.

在实际应用中，对于事件的独立性，我们往往不是根据定义来判断，而是根据实际意义判断两事件是否独立, 利用事件的独立性解决实际问题.

定义2 设$A_1,A_2,\ldots,A_n$是n个事件，如果对于任意的$1\le i, j\le n$，有

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$$

则称这n个事件**两两相互独立**.

定义3 如果对于任意的$k(k\leqslant n)$，及任意的$1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n$，

都有 $$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称这n**个事件相互独立**.

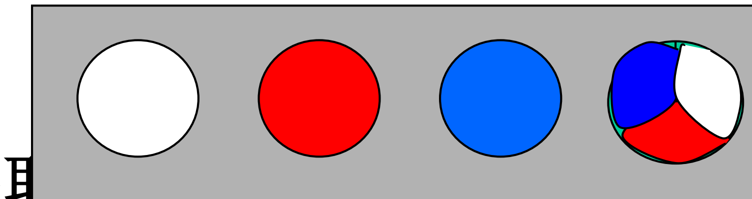
[注] 若n个事件$A_1,A_2,\ldots,A_n$相互独立，则

(1) $A_1,A_2\ldots A_n$两两独立，反之不然；

(2) $A_1,A_2\ldots A_n$中任意k个事件相互独立；

(3) $A_1,A_2\ldots A_n$中任意m $(1\le m\le n)$个事件换成它们的对立事件，所得的n个事件仍相互独立.

例1 设袋中有4个乒乓球，1个涂有白色，1个涂有红色，1个涂有蓝色，1个涂有白、红、蓝三种颜色.今从袋中随机地取一个球，设事件A=“取出的球涂有白色”，B=“取出的球涂有红色”，C=“取出的球涂有蓝色”，试验证事件A、B、C两两相互独立，但不相互独立.



证明 事件A、B同时发生，只能是取

三种颜色的球，因而 $P(AB)=1/4$,同理 $P(BC)=1/4$,$P(AC)=1/4$

事件A发生，只能是取到的球涂有白色的球或涂三种颜色的球，

因而 $P(A)=2/4=1/2$, 同理 $P(B)=1/2$, $P(C)=1/2$,

即 $P(A)P(B)=1/4=P(AB)$, 故事件A、B相互独立.

类似可证 $P(AC)=P(A)P(C)$, $P(BC)=P(B)P(C)$.

因此 A、B、C两两相互独立. 但是 $P(ABC)=1/4$,

而 $P(A)P(B)P(C)=1/8$所以, 事件A、B、C并不相互独立.

例2 设某类高射炮，每门炮发射一发炮弹击中飞机的概率为0.6，现若干门炮同时发射（每门炮发射一次，且各门炮工作是独立的），问欲以99%的把握击中来犯的一架敌机，至少需要几门炮？

解：设需要n门炮,

A= “敌机被击中”, A_i =“第i门炮击中敌机”，i =1,2,…,n

显然 $A= A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

于是要求n, 使得 $P(A)=P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \geq 0.99$

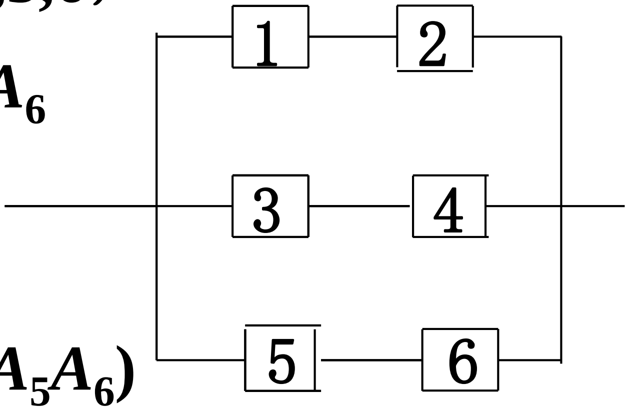
由于 而A_1，A_2，…,A_n 是相互独立的,

所以 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A_1})\,P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n})=1-(0.4)^n \geq 0.99$

得 n>=5.026, 因此至少需要6门大炮.

例3 一个元件能正常工作的概率称为此**元件的可靠性**，一个系统能正常工作的概率称为此**系统的可靠性**. 现有6个元件如图连接，每个元件的可靠性为p，如果各元件能否正常工作是相互独立的，求系统的可靠性.

解： 设A_i={第i个元件正常工作}，i=1,2,3,4,5,6，



A={系统正常工作}$=A_1A_2\cup A_3A_4\cup A_5A_6$

$$P(A)=P(A_1A_2\cup A_3A_4\cup A_5A_6)$$

$$=P(A_1A_2)+P(A_3A_4)+P(A_5A_6)-P(A_1A_2A_3A_4)$$
$$-P(A_1A_2A_5A_6)-P(A_3A_4A_5A_6)+P(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)$$

$$=P(A_1)P(A_2)+P(A_3)P(A_4)+P(A_5)P(A_6)-P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$
$$-P(A_1)P(A_2)P(A_5)P(A_6)-P(A_3)P(A_4)P(A_5)P(A_6)+$$
$$+P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5)P(A_6)=3p^2-3p^4+p^6$$

例4 要验收一批(100件)乐器验收方案如下：自该批乐器中随机地取3件测试(设3件乐器的测试是相互独立的)，如果3件中至少有一件在测试中被认为音色不纯，则这批乐器就被拒绝接．设一件音色不纯的乐器经测试查出其为音色不纯的概率为0.95；而一件音色纯的乐器经测试误认为不纯的概率为0.01．如果已知这100件乐器中恰有4件是音色不纯的．试问这批乐器被接收的概率是多少？

解: 设 A_i=“随机取3件乐器,其中恰有i 件音色不纯”, i=0,1,2,3

则A_0, A_1, A_2, A_3 是的 S 的一个划分,

A = “这批乐器被接收”， 本题是求P(A).

$$P(A_0)=C_{96}^3/C_{100}^3,\ P(A_1)=C_4^1C_{96}^2/C_{100}^3,\ P(A_2)=C_4^2C_{96}^1/C_{100}^3,\ P(A_3)=C_4^3/C_{100}^3$$

$$P(A|A_0)=(0.99)^3, \qquad P(A|A_1)=(0.99)^2\times 0.05,$$

$$P(A|A_2)=0.99\times(0.05)^2, \quad P(A|A_3)=(0.05)^3$$

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(A|A_i)P(A_i)=0.8629$$

小结

1. A, B 两事件独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)\,P(B)$

A,B,C 三个事件相互独立

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \end{cases}$$

2. 重要结论

A, B 相互独立 $\Leftrightarrow \overline{A}$ 与 B, A 与 $\overline{B}$, $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立.

作业

- **第一章习题28, 30. (2)(4), 35, 36**