第二章 随机变量及其分布

§2.1 随机变量

§2.2 离散型随机变量的概率分布

§2.3 随机变量的分布函数

§2.4 连续型随机变量的概率密度

§2.5 随机变量的函数的分布

§2.3 随机变量的分布函数

对于非离散型随机变量，由于它的可能取值不能一个一个地列举出来，因而就不能像离散型随机变量那样用分布律来描述它；另外，非离散型随机变量取指定实数值的概率通常等于零，因而我们主要来研究随机变量所取的值落在一个区间内的概率：$P\{x_1<X\leq x_2\}$，而

半开半闭区间$(x_1, x_2]$

$$P\{x_1<X\leq x_2\}=P\{X\leq x_2\}-P\{X\leq x_1\}$$

所以，只要知道 $P\{X\leq x_2\}$和$P\{X\leq x_1\}$就可以了.

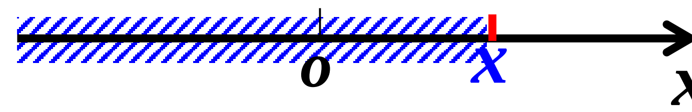
下面引入随机变量的分布函数的概念.

一、随机变量的分布函数

定义 设X是一随机变量，x是任意实数，函数

$$F(x)=P\{X\le x\}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

称为X的<u>**分布函数**</u>.



❖对于任意实数$x_1, x_2\,(x_1<x_2)$, 有

$$P\{x_1<X\le x_2\}=P\{X\le x_2\}-P\{X\le x_1\}=F(x_2)-F(x_1)$$

$$P\{X>x_2\}=1-P\{X\le x_2\}=1-F(x_2)$$

性质 1. $F(x)$ 是**非减**函数. 即若$x_1<x_2$, 则$F(x_1)\le F(x_2)$.

2. $0\le F(x)\le 1$, 且

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0;\qquad F(\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$$

3. $F(x)$是**右连续**的，即：$F(x+0)=F(x)$.

注： 若一个函数具有以上性质，则它一定是某个随机变量的分布函数.

例1 判别下列函数是否为某随机变量的分布函数.

$$(1)\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ 1/2, & -2<x<0\\ 1, & 0\le x\end{cases}$$

$$(2)\ F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin x, & 0\le x<\pi\\ 1, & \pi\le x\end{cases}$$

$$(3)\ F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x+\dfrac{1}{2}, & 0\le x<\dfrac{1}{2}\\ 1, & \dfrac{1}{2}\le x\end{cases}$$

例2 一袋中有6个球,其中2个标号为1, 3个标号为2, 1个标号为3, 任取1个球， 以X 表示取出的球的标号,(1) 求X 的分布函数；(2)求 $P\{2\le X\le 3\}$.

解： X的分布律为

X	1	2	3
p_k	1/3	1/2	1/6

$$F(x)=P\{X\le x\}$$

$$=\begin{cases} 0\ , & x<1 \\ P\{X=1\}, & 1\le x<2 \\ P\{X=1\}+P\{X=2\}, & 2\le x<3 \\ 1\ , & x\ge 3 \end{cases}$$

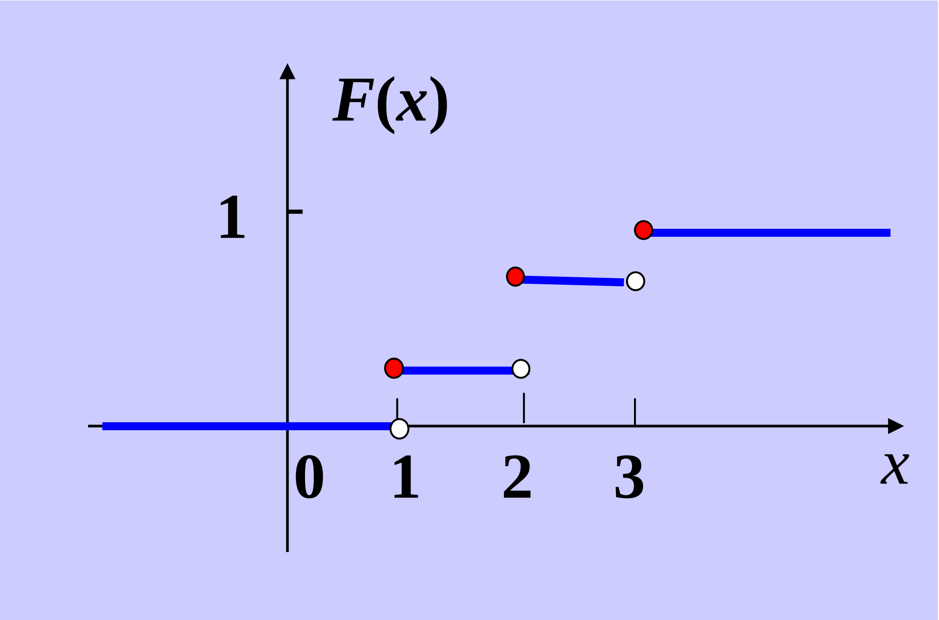
例2 一袋中有6个球,其中2个标号为1, 3个标号为2, 1个标号为3, 任取1个球，以X表示取出的球的标号,(1) 求X的分布函数；(2)求 $P\{2\le X\le 3\}$.

解： X的分布律为

X	1	2	3
p_k	1/3	1/2	1/6

$$F(x)=P\{X\le x\}$$

$$=\begin{cases} 0\ , & x<1 \\ 1/3\ , & 1\le x<2 \\ 5/6\ , & 2\le x<3 \\ 1\ , & x\ge 3 \end{cases}$$



$$(2)\ P\{2\le X\le 3\}=P\{X=2\}+P\{X=3\}=\frac{4}{6}.$$

二、离散型随机变量X的分布函数

设离散型随机变量X的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots$$

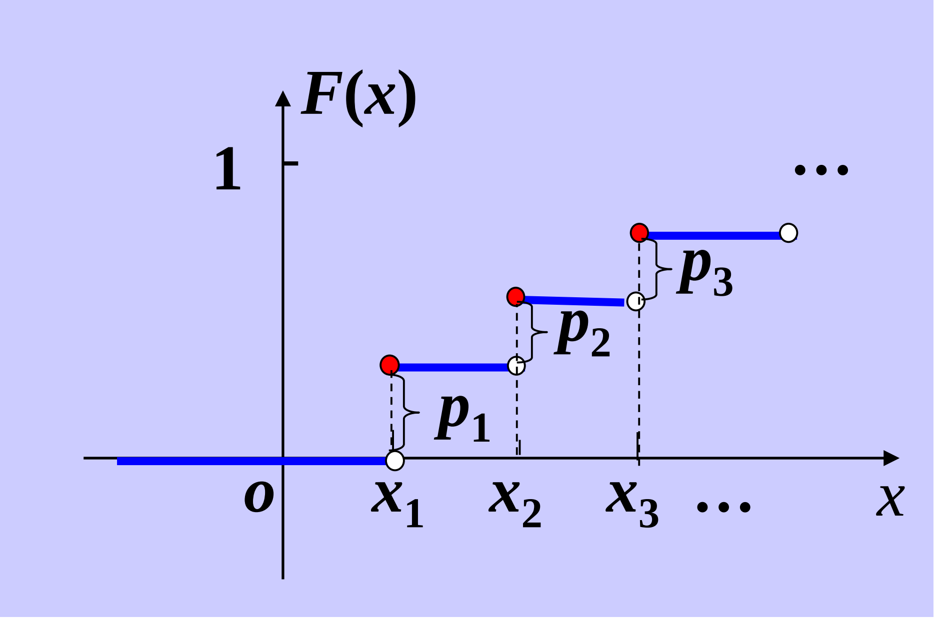
X的分布函数为:

$$F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{x_k\le x}P\{X=x_k\}=\sum_{x_k\le x}p_k$$

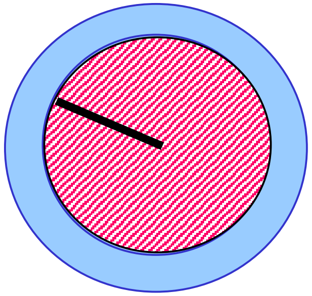
$F(x)$是阶梯函数,

跳跃点为x_1, x_2, x_3, …,

跳跃度为p_1, p_2, p_3, …

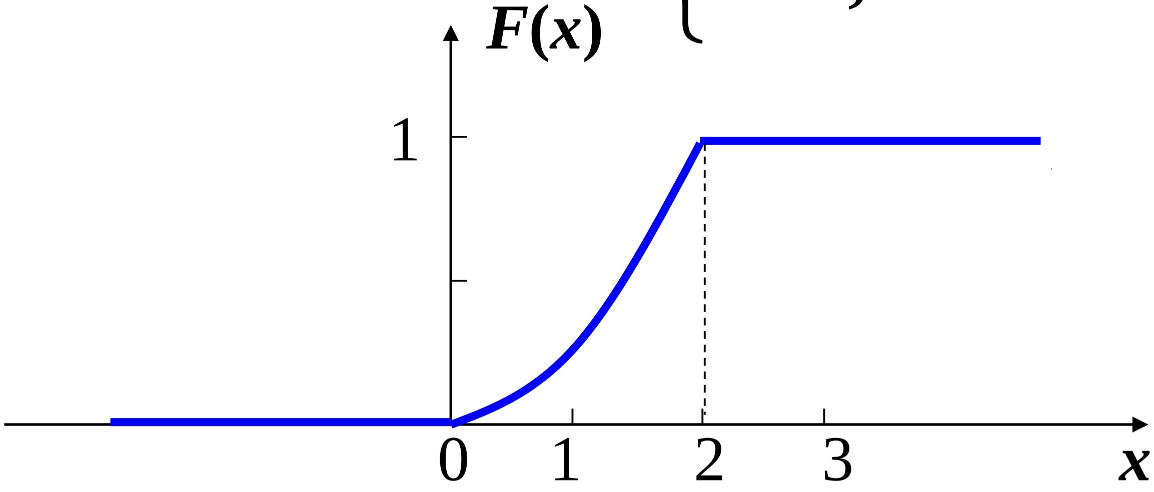


例3 一个靶子是半径为2米的圆盘, 设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比, 并设射击都能中靶, 以X表示弹着点与圆心的距离. 试求随机变量X的分布函数.



解

$$F(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\le x<2,\\ 1, & x\ge 2,\end{cases}$$



本例中的分布函数$F(x)$的图形是一条连续曲线，且对于任意 x 均有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

其中

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{2}, & 0<t<2\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

这说明随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 恰好是某个非负函数$f(x)$在$(-\infty, x]$上的积分，这种情况的随机变量 X 称为连续型随机变量. 这就是我们下节中要研究的连续型随机变量.

思考问题

不同的随机变量,它们的分布函数一定也不相同吗?

答　不一定.　例如抛均匀硬币, 令

$$X_1 = \begin{cases} 1, & \text{出正面}; \\ -1, & \text{出反面}. \end{cases} \qquad X_2 = \begin{cases} -1, & \text{出正面}; \\ 1, & \text{出反面}. \end{cases}$$

X_1 与 X_2 在样本空间上的对应法 则不同,是两个不同的随机变量 ,但它们却有相同的分布 函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ 1/2, & -1 \le x < 1; \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

小结

1. 离散型随机变量的分布函数

$$F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{x_i \le x} p_k .$$

2. 离散型随机变量分布律与分布函数的关系

分布律 $\quad p_k = P\{X = x_k\}$

$$\Updownarrow$$

分布函数 $\quad F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{x_k \le x} p_k$

作业

- **第二章习题17**

§2.4 连续型随机变量的概率密度

1. 定义 如果对于随机变量X 的分布函数$F(x)$存在非负函数 $f(x)$，使对于任意实数x 有

$$\boxed{F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt} \qquad (*)$$

则称X 为**连续型随机变量**，

$f(x)$-----X的**概率密度函数**，简称**概率密度**.

2. 概率密度$f(x)$的性质：

(1) $f(x)\geq 0$;　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$;

(3) $P\{x_1<X\leq x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$,　$(x_1\leq x_2)$

(4)若$f(x)$在点 x 处连续，则 $F'(x)=f(x)$

对 $f(x)$的进一步理解

若x是 $f(x)$的连续点，则：

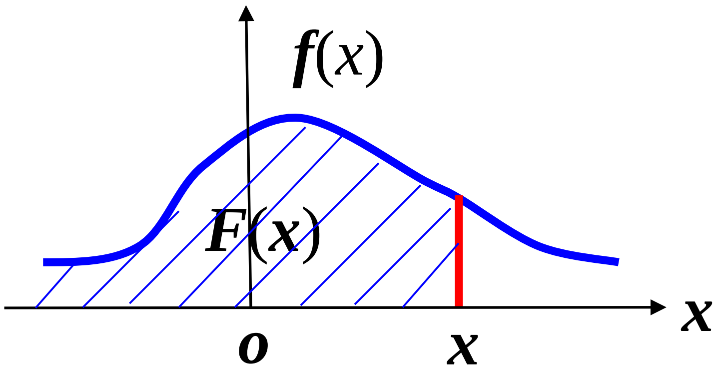
$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{P\{x < X \le x + \Delta x\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}$$

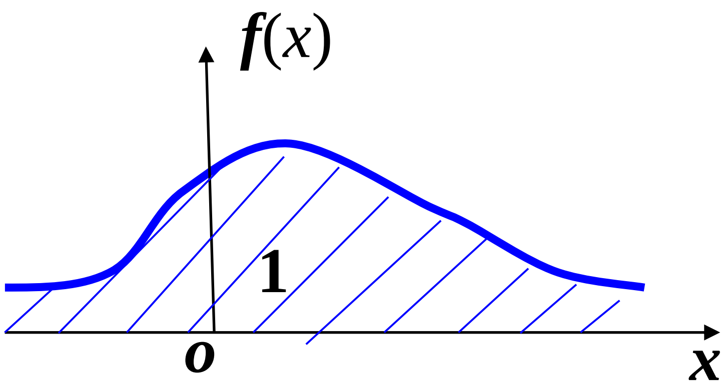
$$= f(x)$$

故 X的密度 $f(x)$ 在 x 这一点的值，恰好是X落在区间 $(x, x+\Delta x]$ 上的概率与区间长度 Δx 之比的极限. 这里，如果把概率理解为质量， $f(x)$相当于线密度.

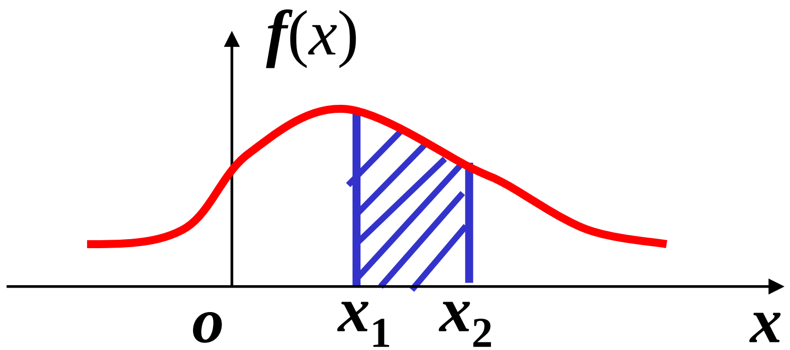
若$f(x)$在点x处连续，则有$F'(x) = f(x)$.

- 连续型随机变量的分布函数与概率密度的几何意义：





$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$



$$P\{x_1 < X \le x_2\}$$

[注]

(1)由定义知, 改变概率密度$f(x)$在个别点的函数值不影响分布函数$F(x)$的取值,因此**概率密度不是唯一的**.

(2)**连续型**随机变量的分布函数$F(x)$**是连续函数**;

(3)**连续型随机变量X取任一指定值 a 的概率为0，即**

$$P\{X=a\}=0.$$

因为,$P\{X=a\}=\lim\limits_{\delta\to 0^+}P\{a-\delta<X\le a\}$

$$=\lim_{\delta\to 0^+}[F(a)-F(a-\delta)]=0$$

故对连续性随机变量，有

$$P\{a<X<b\}=P\{a<X\le b\}=P\{a\le X<b\}=P\{a\le X\le b\}$$

连续型随机变量取值落在某区间的概率与端点无关

设 X 是离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$$

则

1) $F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{x_k\le x} p_k$

2) $P\{a\le X\le b\}=F(b)-F(a)+P\{X=a\}$

3) $P\{a\le X<b\}=F(b)-F(a)+P\{X=a\}-P\{X=b\}$

4) $P\{a<X<b\}=F(b)-F(a)-P\{X=b\}.$

注意

若X是连续型随机变量，$\{X=a\}$是不可能事件，则有$P\{X=a\}=0$.

若 $P\{X=a\}=0$,

则不能确定 $\{X=a\}$ 是不可能事件

连续型

若 X 为离散型随机变量,

$\{X=a\}$ 是不可能事件 $\Leftrightarrow P\{X=a\}=0$.

离散型

例1 已知连续型随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin x, & 0<x\le \pi/2\\ 1, & x>\pi/2\end{cases}$$

试求 X 的概率密度 $f(x)$ 及 $P\{\pi/4\le X\le 2\}$.

解 $f(x)=F'(x)=\begin{cases}\cos x, & 0<x<\pi/2\\ 0, & 其它\end{cases}$

$$P\{\pi/4\le X\le 2\}=F(2)-F(\pi/4)=1-\sin\pi/4=1-\sqrt{2}/2$$

或 $$=\int_{\pi/4}^{2}f(x)dx=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos x dx=1-\sqrt{2}/2$$

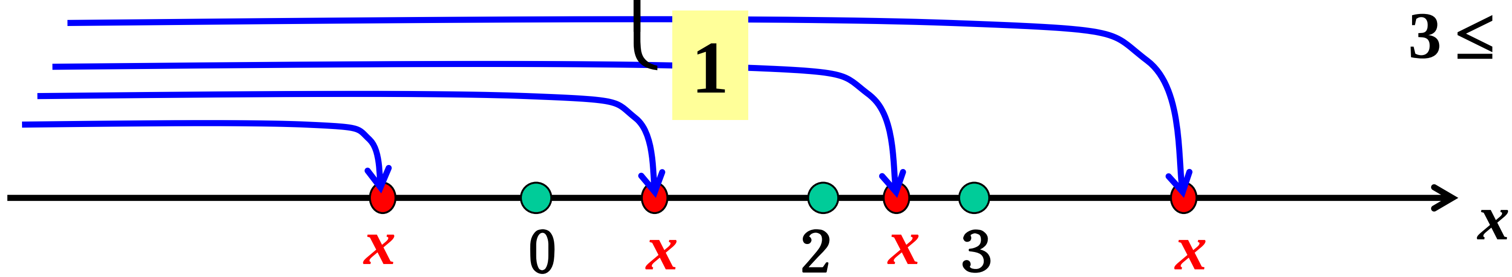
例2 设连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} kx^2, & 0\le x<2 \\ kx, & 2\le x\le 3, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 (1)常数 k; (2) X的分布函数 $F(x)$; (3) $P\{1<X<5/2\}$.

解 $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^2 kx^2dx+\int_2^3 kxdx=\dfrac{31}{6}k,\ \Longrightarrow\ k=\dfrac{6}{31}$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dx=0 & x<0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_0^x kx^2dx & 0\le x<2 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_0^2 kx^2dx+\int_2^x kxdx & 2\le x<3 \\ \boxed{1} & 3\le x \end{cases}$$



例3 设连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1\\ 0, & |x|\geq 1\end{cases}$$

求 (1) 系数A (2) $P\{-1/2<X<1/2\}$ (3) $F(x)$

答：(1) $A=1/\pi$，

(2) $P=1/3$

(3) $$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin x, & -1\leq x<1\\ 1, & x\geq 1\end{cases}$$

几种常见的连续型随机变量

(一)均匀分布

若连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

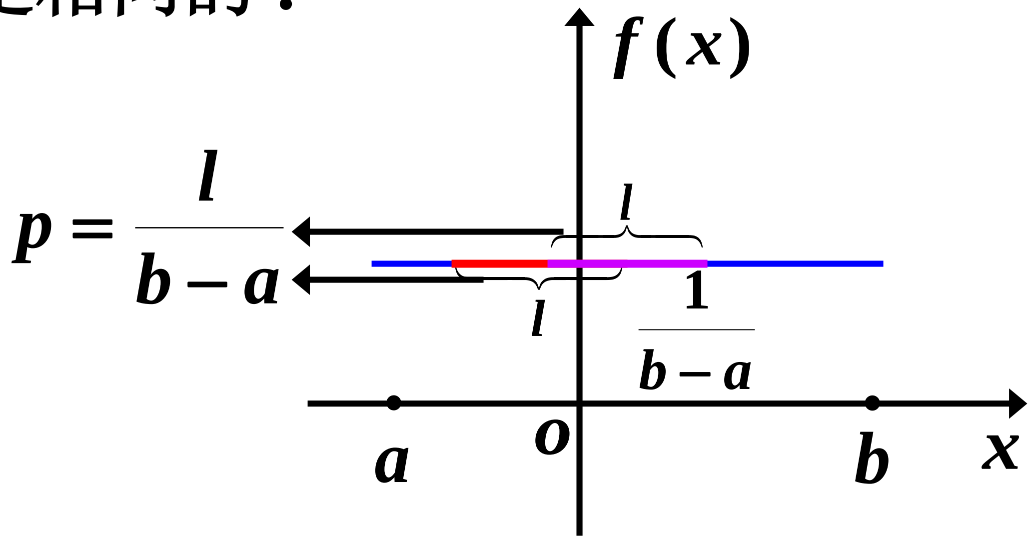
则称X在区间(a,b)上服从**均匀分布**，记作$X\sim U(a,b)$.

X的分布函数为

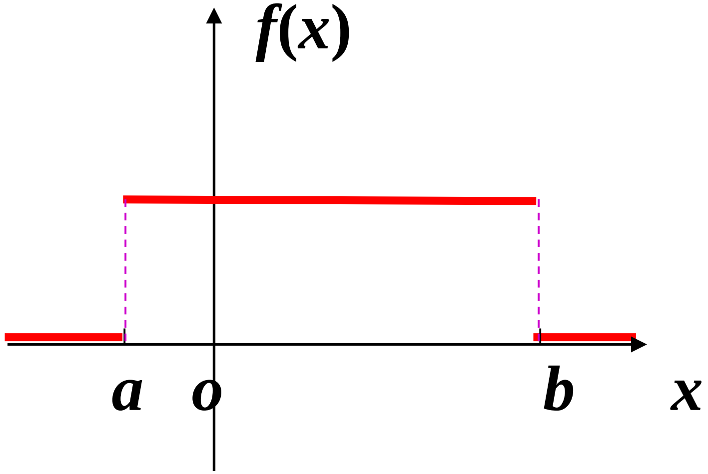
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$$

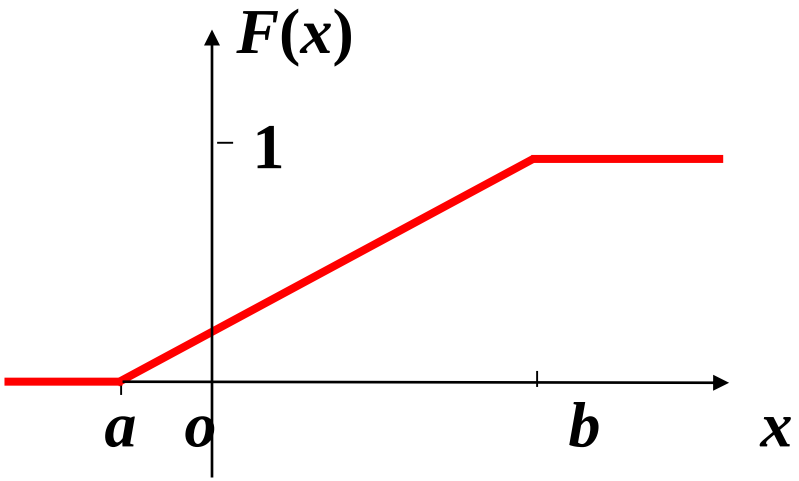
均匀分布的意义

在区间(a,b)上服从均匀分布的随机 变量X，落在区间(a,b)中任意等长度的子区间 内的可能性是相同的.



$f(x)$及$F(x)$的图形:





例4 某公共汽车站从上午7时起，每15分钟发一趟车，已知某乘客在7：00 到 7：30 任一时刻到达车站，求他候车时间少于5分钟的概率.

解: 由题意，乘客到达车站的时间$X \sim U(0, 30)$，

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30}, & 0<x<30\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$P\{\text{候车时间少于5分钟}\}$$

$$=P\{10<X<15\}+P\{25<X<30\}$$

$$=\int_{10}^{15}\frac{1}{30}dx+\int_{25}^{30}\frac{1}{30}dx=\frac{1}{3}$$

（二）指数分布

➢若X的概率密度为 $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中$\theta>0$为常数，则称X服从参数为θ的**指数分布**.

显然，$f(x)\ge 0$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$

➢X的分布函数为：$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

➢无记忆性：$\forall s,t>0, P\{X>s+t\mid X>s\}=P\{X>t\}$

指数分布的重要性质 :"无记忆性".

对于任意$s, t > 0$,有

$$P\{X > s+t \mid X > s\} = P\{X > t\}.$$

事实上

$$P\{X > s+t \mid X > s\} = \frac{P\{(X > s+t)\cap(X > s)\}}{P\{X > s\}}$$

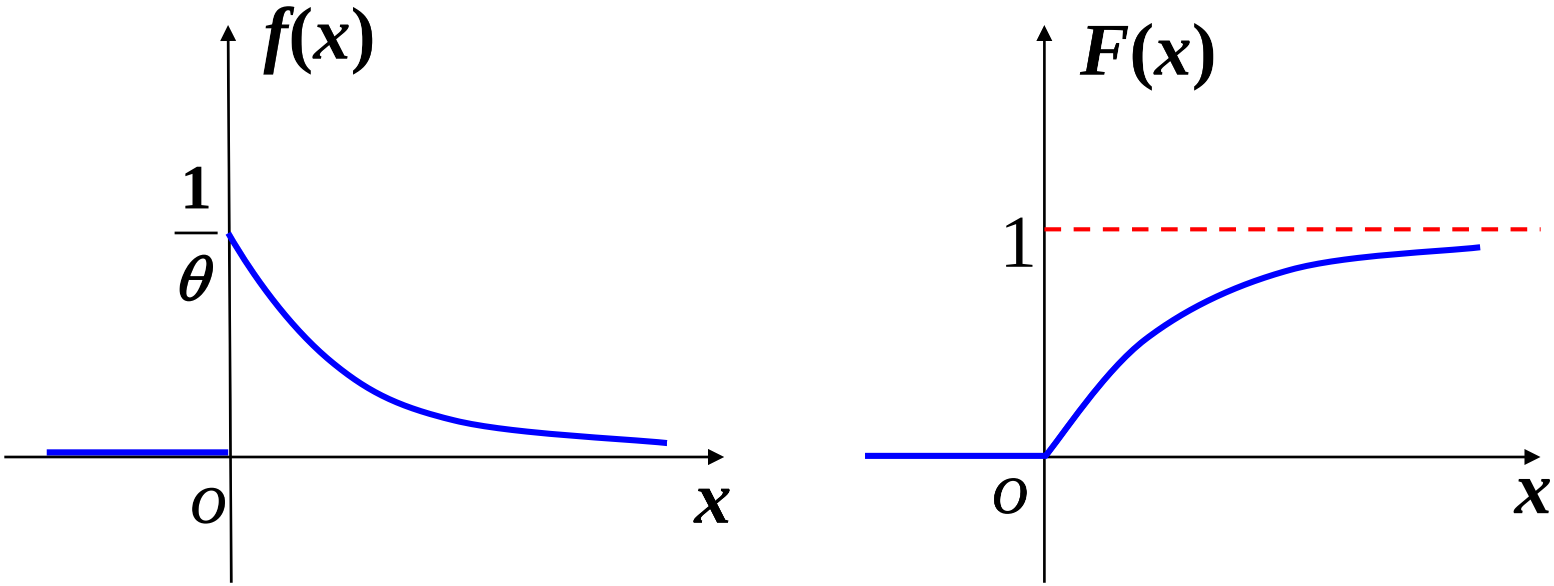
$$= \frac{P\{X > s+t\}}{P\{X > s\}} = \frac{1-F(s+t)}{1-F(s)}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-(s+t)/\theta}}{\mathrm{e}^{-s/\theta}} = \mathrm{e}^{-t/\theta} = P\{X > t\}.$$

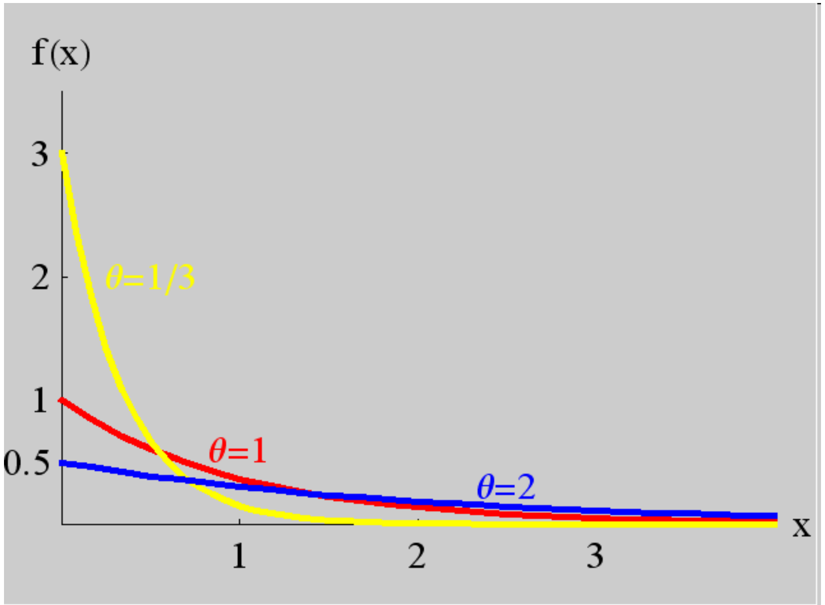
如果X是某一元件的寿命，那么**无记忆性**表明：已知元件已使用 s小时，它总共能使用至少 $s+t$小时的条件概率与从开始使用时算起，它至少能用t 小时的概率相等. 这就是说：

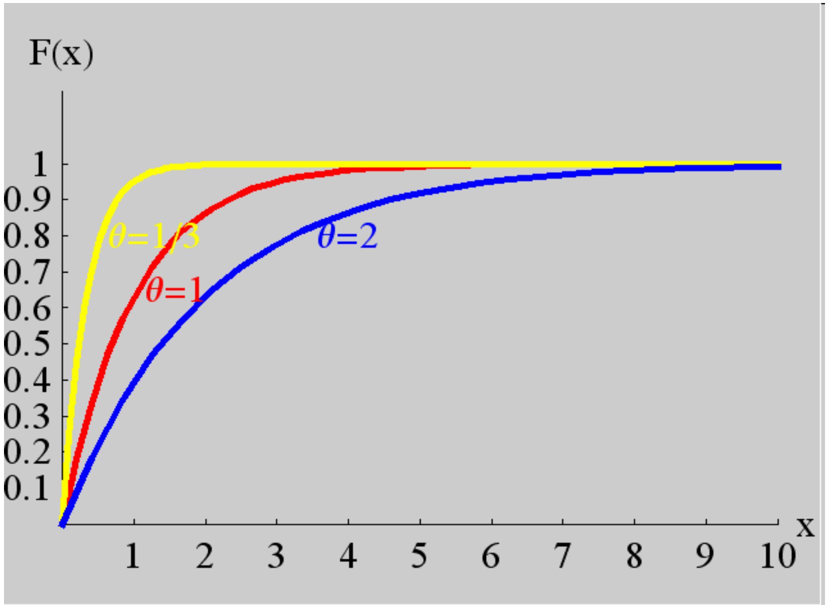
元件对它已使用过s小时没有记忆.

指数分布的$f(x)$及$F(x)$的图形:



指数分布的*f*(*x*)及*F*(*x*)的图形:





❖ 指数分布有着重要应用，如动植物的寿命、无线电元件的寿命，以及随机服务系统中的服务时间等都可用指数分布来描述，例如在排队论中它被用于描绘等待时间（泊松过程中随机事件出现的间隔）.

例5 设某种灯泡的使用寿命为X，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{100}e^{-\frac{x}{100}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

求 (1)此种灯泡使用寿命超过100小时的概率.

(2)任取5只产品, 求有2只寿命大于100小时的概率.

答：(1) e^{-1} (2) $C_5^2(e^{-1})^2(1-e^{-1})^3$

（三） 正态分布

若随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<\infty$$

其中 μ,σ (σ >0) 为常数, 则称X服从参数为 μ, σ 的正态分布，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

显然，$f(x)\geq 0$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$

正态分布的分布函数为:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$

显然$f(x)\geq 0$,下面来证明$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

令$(x-\mu)/\sigma = t$,得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}\mathrm{d}t,$$

记 $I = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$, 则有 $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(t^2+u^2)/2}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$

利用极坐标将它化成累次积分, 得到

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r\mathrm{e}^{-r^2/2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi,$$

而$I > 0$, 故有 $I = \sqrt{2\pi}$, 即有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2} \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}\,,$$

于是

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2} \mathrm{d}t = 1\,.$$

正态分布的 $f(x)$及$F(x)$的图形:

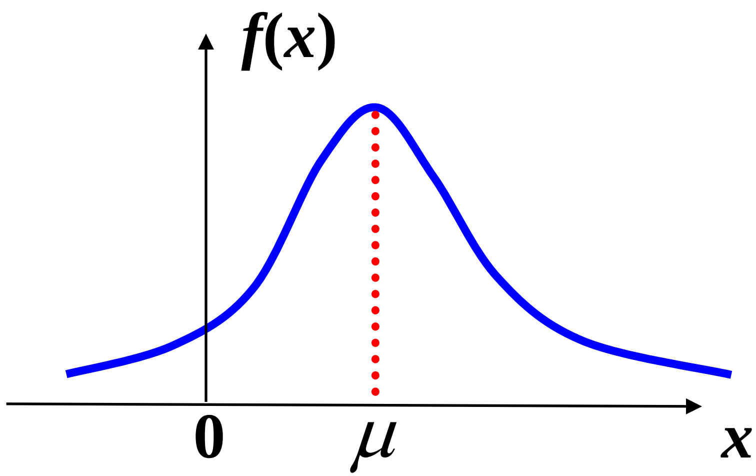


图1

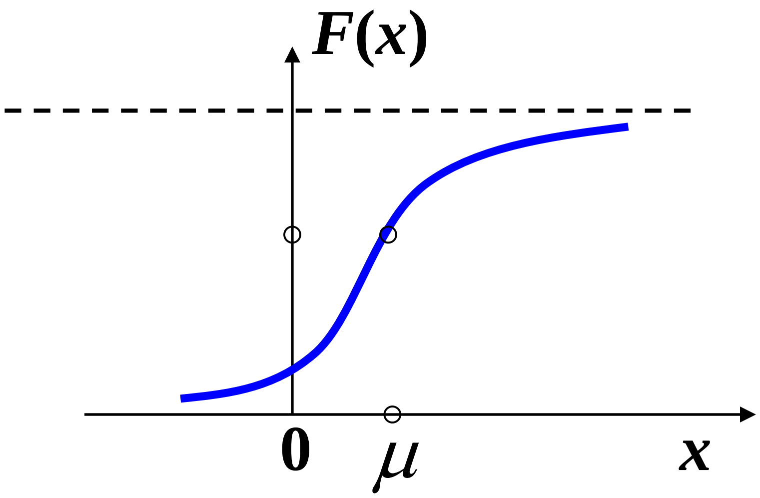
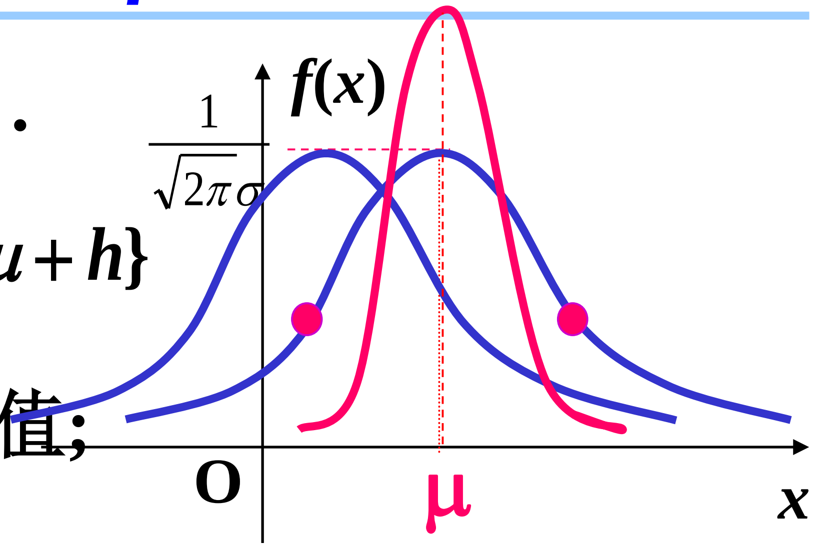


图2

◆ 正态分布的概率密度函数$f(x)$的性质

(1) 曲线关于直线 $x=\mu$ 对称 .

$$P\{\mu-h<X\le\mu\}=P\{\mu<X\le\mu+h\}$$



(2) 当 $x=\mu$ 时，$f(x)$取得最大值;

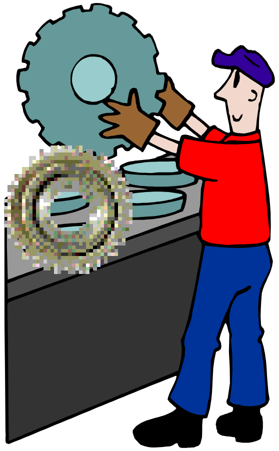
(3) 在 $x=\mu\pm\sigma$处曲线有拐点，且以x轴为渐近线；

(4) 对固定的σ, 改变位置参数μ的值, 图形沿x轴平移;

(5) 对固定的μ, 改变形状参数σ, σ越小, 图形越尖, X落在μ附近的概率越大.

正态分布的应用与背景

正态分布是最常见最重要的一种分布, 例如测量误差, 人的生理特征尺寸如身高、体重等；正常情况下生产的产品尺寸、直径、 长度、重量高度等都近似服从正态分布.



正态分布的计算

$$P\{X \leq x\} = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\boxed{\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}t}$$

原函数不是初等函数

$$= ?$$

方法一: 利用软件如MATLAB计算

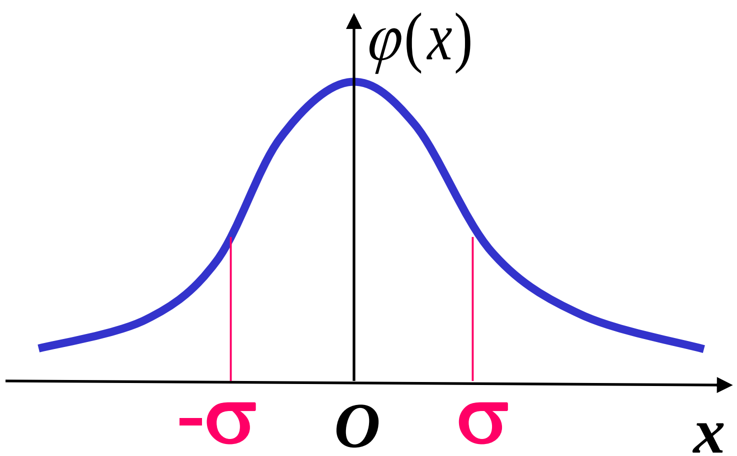
方法二: 转化为标准正态分布查表计算

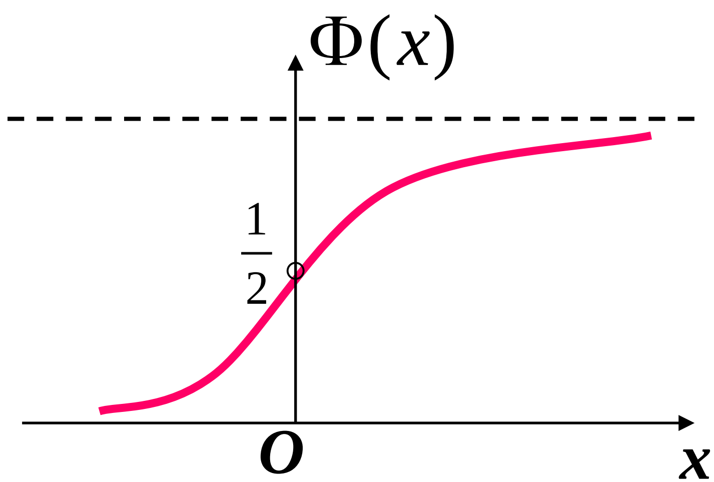
☞标准正态分布

当$\mu=0,\ \sigma=1$时，称X服从<u>标准正态分布</u>，记作$X\sim N(0,1)$.

其概率密度与分布函数分别用 $\varphi(x),\ \Phi(x)$. 即

$$\boxed{\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}\qquad \boxed{\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}$$





☞ φ(*x*)与Φ(*x*)的性质

(1) $\varphi(x)$是偶函数，即 $\varphi(-x)=\varphi(x)$;

(2) 当$x=0$时， $\varphi(x)$ 取得最大值$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$;

(3) $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$，$\Phi(0)=0.5$;

(4) 若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ → 标准正态分布

引理 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

1° 若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\boxed{F(x)=\Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)}$

2° $\boxed{P\{x_1 < X \le x_2\}=\Phi\left(\dfrac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{x_1-\mu}{\sigma}\right)}$

性质(3) $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

证明 $\Phi(-x)=\int_{-\infty}^{-x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$

$$=\int_{x}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x,$$

$$=1-\Phi(x).$$

证明性质(4)： $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 的分布函数为

$$P\{Z\le x\}=P\{\frac{X-\mu}{\sigma}\le x\}=P\{X\le\mu+\sigma x\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\mu+\sigma x}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{dt}$$

$$\boxed{\frac{t-\mu}{\sigma}=u}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du=\Phi(x)$$

由此知 $$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$$

例6 已知 $X \sim N(0,1)$，求 $P\{|X| \le 1.5\}$

解 $P\{|X| \le 1.5\}$

$$= P\{-1.5 \le X \le 1.5\} = \Phi(1.5) - \Phi(-1.5)$$

$$= \Phi(1.5) - [1 - \Phi(1.5)] = 2\Phi(1.5) - 1$$

$$= 2 \times 0.9332 - 1 = 0.8664$$

例7 设$X \sim N(1.5, 4)$，求 $P\{1<X<3.5\}$，$P\{X < -4\}$.

解 $P\{1<X<3.5\}$

$$= P\{\frac{1-1.5}{2} < \frac{X-1.5}{2} < \frac{3.5-1.5}{2}\}$$

$$= \Phi(\frac{3.5-1.5}{2}) - \Phi(\frac{1-1.5}{2}) = \Phi(1) - \Phi(-0.25)$$

$$= \Phi(1) - [1 - \Phi(0.25)] = 0.8413 - 1 + 0.5987 = 0.44$$

“3σ”法则（三倍标准差准则）

由标准正态分布的查表计算可以求得，

当$X \sim N(0,1)$时，

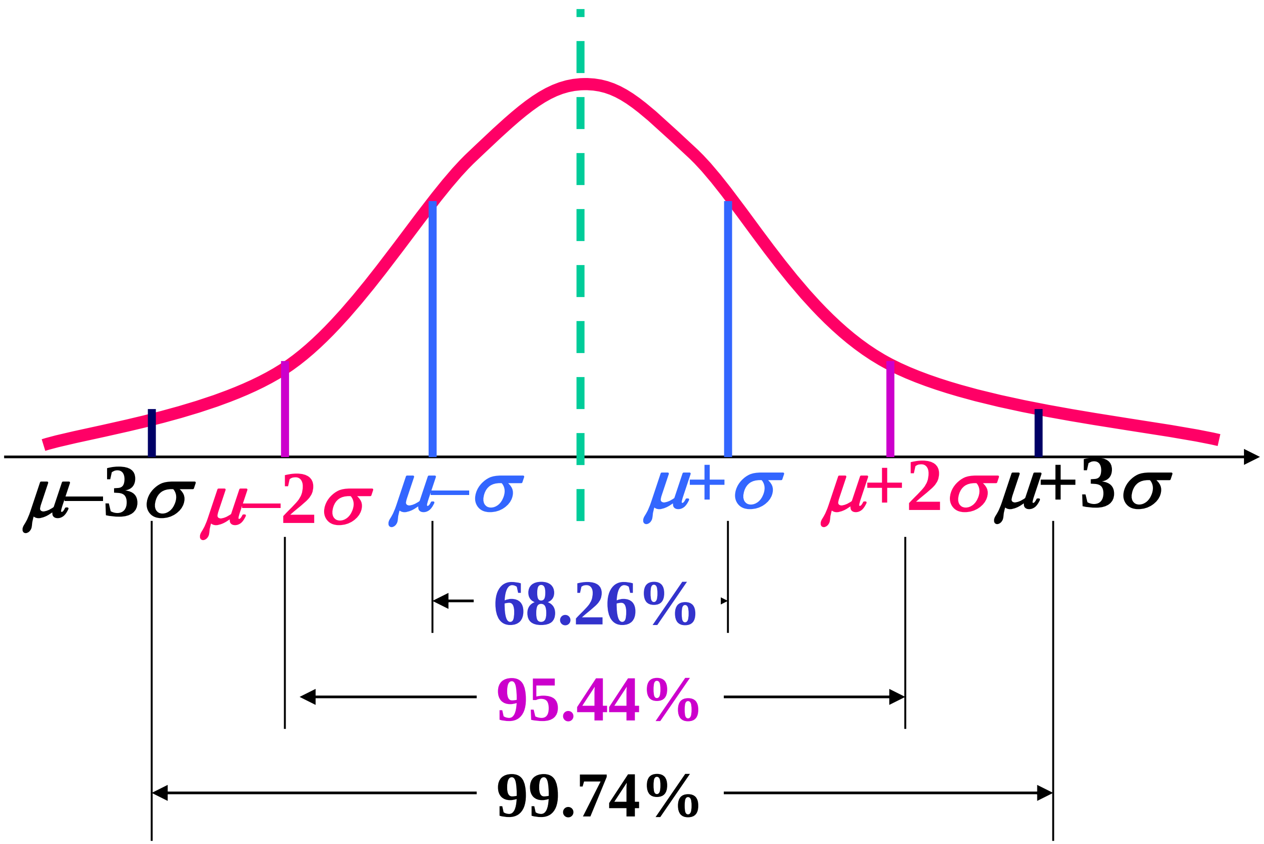
$$P\{|X| \le 1\} = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$$

$$P\{|X| \le 2\} = 2\Phi(2) - 1 = 0.9544$$

$$P\{|X| \le 3\} = 2\Phi(3) - 1 = 0.9974$$

这说明，X的取值几乎全部集中在[-3,3]区间内，超出这个范围的可能性仅占不到0.3%.

“3σ”法则（三倍标准差准则）



例8 将一温度调节器放置在储存着某种液体的容器内, 调节器定在d°C, 液体的温度X(以C计)是一个随机变量,且 $X\sim N(d, 0.5^2)$. (1)若d=90,求X小于89的概率. (2)若要求保持液体的温度至少为80的概率不低于0.99, 问d 至少为多少?

解: (1)所求概率为

$$P\{X<89\}=P\left\{\frac{X-90}{0.5}<\frac{89-90}{0.5}\right\}=\Phi\left(\frac{89-90}{0.5}\right)=\Phi(-2)$$

$$=1-\Phi(2)=1-0.9772=0.0228$$

(2) 按题意, 所求d 满足

$$0.99\le P\{X>80\}=P\left\{\frac{X-d}{0.5}>\frac{80-d}{0.5}\right\}=1-P\left\{\frac{X-d}{0.5}\le\frac{80-d}{0.5}\right\}$$

$$=1-\Phi\left(\frac{80-d}{0.5}\right)\Rightarrow\quad\Phi\left(\frac{d-80}{0.5}\right)\ge 0.99,\quad\Rightarrow\quad\frac{d-80}{0.5}\ge 2.327$$

$$\Rightarrow\quad d\ge 81.1635$$

定义 设$X \sim N(0, 1)$，若 z_α 满足条件

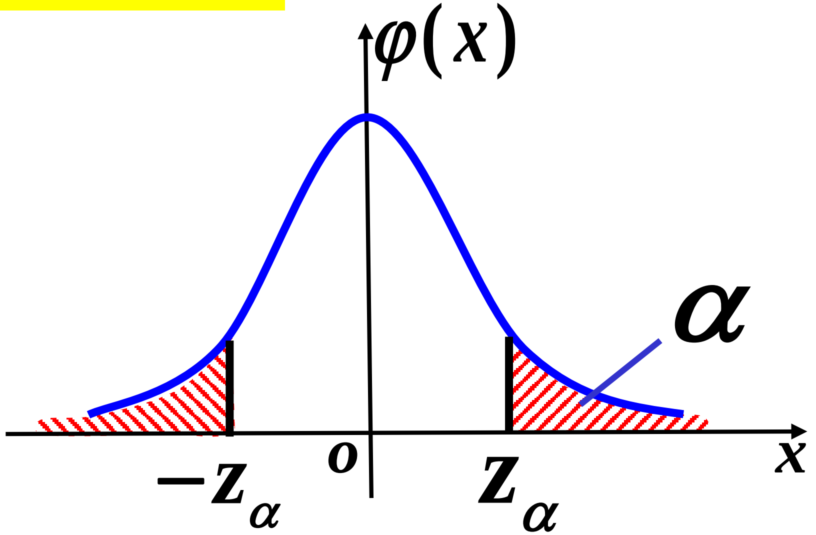
$$P\{X > z_\alpha\} = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

则称点 z_α 为标准正态分布的<u>上α分位点</u> (如图).

由于$\Phi(-z_\alpha) = 1 - \Phi(z_\alpha)$

$$= P\{X > z_\alpha\} = \alpha$$

$$\boxed{z_{1-\alpha} = -z_\alpha}$$



例如 $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$

$z_{0.05} = 1.645$

查表 $\Phi(1.645) = 0.95$

$z_{0.005} = 2.57$ $\quad$ $z_{0.95} = -1.645$

小结

1. 连续型随机变量 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

分布函数 概率密度

2. 常见连续型随机变量的分布

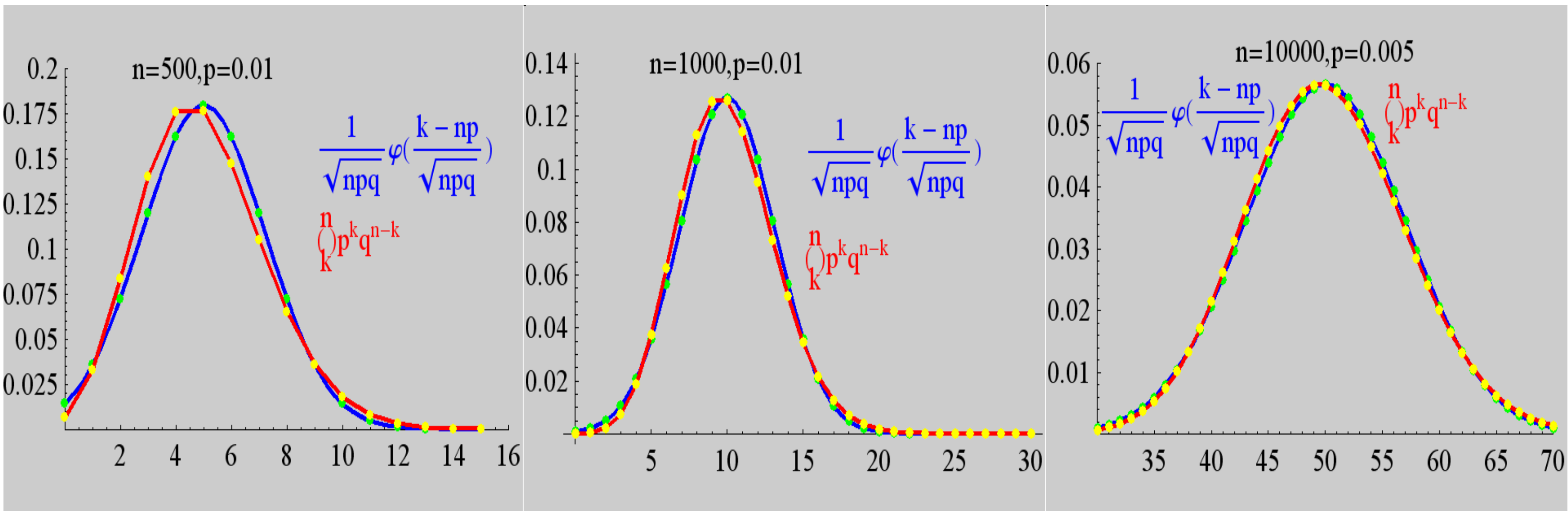
- 均匀分布
- 正态分布(或高斯分布)
- 指数分布

3. 正态分布是概率论中最重要的分布

正态分布有极其广泛的实际背景, 是自然界和社会现象中最为常见的一种分布, 一个变量如果受到大量微小的、独立的随机因素的影响, 那么这个变量一般是一个正态随机变量.

二项分布、泊松分布等的极限分布是正态分布．所以，无论在实践中，还是在理论上，正态分布是概率论中最重要的一种分布.

二项分布向正态分布的转换



作业

- **第二章习题19, 20.(2), 22.(2), 25, 27, 31**