第三章　多维随机变量及其分布

☞第一节　二维随机变量

☞第二节　边缘分布

☞第三节　条件分布

☞第四节　相互独立的随机变量

☞第五节　两个随机变量的函数的分布

§1 二维随机变量

实例1 炮弹的弹着点的位置 (X,Y) 就是一个二维随机变量.

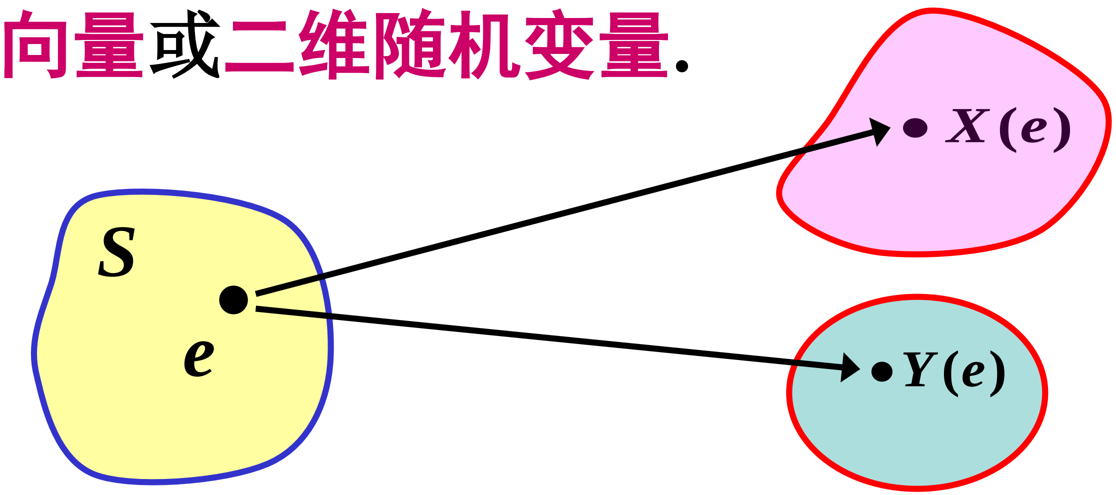
实例2 考查某一地区学前儿童的发育情况，则儿童的身高 H 和体重 W 就构成二维随机变量(H,W).

说明 二维随机变量 (X, Y) 的性质不仅与X 、Y 有关，而且还依赖于这两个随机变量的相互关系.

二维随机变量:

设E是一个随机试验, 样本空间$S=\{e\}$. 设$X=X(e)$和$Y=Y(e)$是定义在S上的两个随机变量, 向量(X,Y)叫做**二维随机向量**或**二维随机变量**.

图示



n维随机变量:

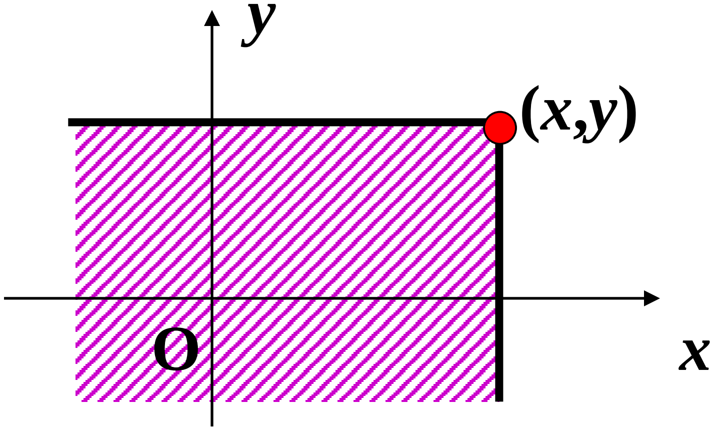
设随机试验E的样本空间$S=\{e\}$. $X_1, X_2, \dots, X_n$是定义在S上的n个随机变量, 则称向量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$为**n维随机变量（向量）**.

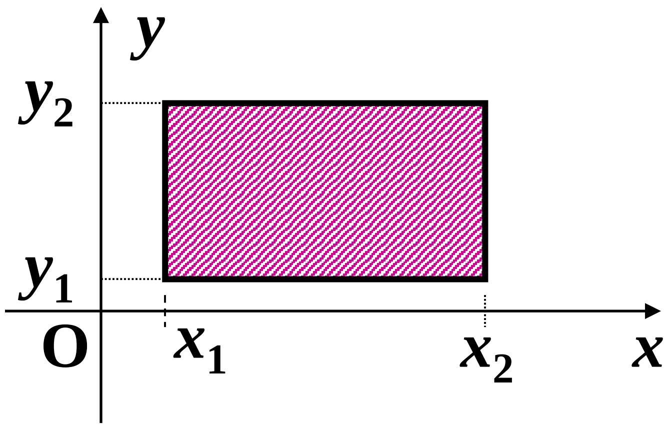
分布函数(联合分布函数)

定义 设(X,Y)是二维随机变量，对于任意实数x, y,

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\triangleq P\{X\le x,Y\le y\}$$

称$F(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的分布函数，或称为随机变量X和Y的联合分布函数.





$$P\{x_1<X\le x_2,y_1<Y\le y_2\}=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)$$

✪分布函数$F(x,y)$的性质：

1) $F(x,y)$是变量 x 和 y 的不减函数,即

对任意固定的y, 当$x_2>x_1$时,有$F(x_2, y)\geq F(x_1,y)$;

对任意固定的x ,当$y_2>y_1$时,有$F(x, y_2)\geq F(x,y_1)$.

2) $0\leq F(x,y)\leq 1$,且

$F(-\infty, y)=0$, $F(x, -\infty)=0$, $F(-\infty,-\infty)=0$, $F(+\infty,+\infty)=1$.

3) $F(x,y)$关于 x右连续, 关于 y右连续,

4) 对于任意$x_1<x_2$, $y_1<y_2$,有

$$F(x_2, y_2)-F(x_2, y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\geq 0$$

☺ 二维离散型随机变量

(X,Y)的所有可能取值是有限对或可列无限多对.

◆二维离散(X,Y)的分布律(联合分布律):

(X,Y)的所有可能取值(x_i, y_j), $i,j=1,2\ldots,$

$$P\{X=x_i, Y=y_j\} \hat{=} p_{ij}, (i,j=1,2,\cdots)$$

◆满足

1° $0 \le p_{ij} \le 1,$

2° $\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij} = 1.$

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$	

◆分布函数

$$F(x,y) = \sum_{\substack{x_i \le x \\ y_j \le y}} p_{ij}$$

例1 设随机变量X在1,2,3,4四个整数中等可能地取值,另一随机变量Y在1~X中等可能地取一整数值.试求(X,Y)的分布律.

解: $X=i,\ i=1,2,3,4,\quad Y=j,\ j\le i.$

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j\,|\,X=i\}P\{X=i\}=\frac{1}{i}\,\frac{1}{4}\ (i=1,2,3,4,\quad j\le i)$$

X \ Y	1	2	3	4	
1	1/4	0	0	0	1/4
2	1/8	1/8	0	0	1/4
3	1/12	1/12	1/12	0	1/4
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
	25/48	13/48	7/48	1/16	1

返回

例２ 某产品 8 件,其中有 2 件次品.每次从中抽取一件,不放回，抽取两次,分别以X、Y表示第一、二次取到的次品件数, 试求(X,Y)的分布律.

解 (X,Y)的所有取值为(i,j), $i,j=0,1$ 由乘法公式有

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}\cdot P\{Y=j|X=i\}$$

X \ Y	0	1
0	$\frac{15}{28}$	$\frac{6}{28}$
1	$\frac{6}{28}$	$\frac{1}{28}$

☺ 二维连续型随机变量

定义 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为$F(x, y)$, 若存在一个非负函数$f(x, y)$，使得对任意x, y，有

$$\boxed{F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv}$$

则称(X,Y)为**二维连续型随机变量**，$f(x,y)$称为(X,Y)的**概率密度**，或称为X和Y的**联合概率密度**.

性质

1° $f(x,y)\geq 0$, 2° $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$,

3° $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$, 在$f(x,y)$的连续点.

4° $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G} f(x,y)dxdy$, G是一平面区域.

说明

由性质3°，在连续点(x, y)处有

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0+ \\ \Delta y \to 0+}} \frac{P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0+ \\ \Delta y \to 0+}} \frac{1}{\Delta x \Delta y}[F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y)$$

$$- F(x, y + \Delta y) + F(x, y)]$$

$$= \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y).$$

这表示：

若$f(x,y)$在点(x,y)连续，则当$\Delta x,\Delta y$很小时，

$$P\{x < X \le x+\Delta x, y < Y \le y+\Delta y\} \approx f(x,y)\Delta x\Delta y,$$

即(X,Y)落在小长方形$(x,x+\Delta x]\times(y,y+\Delta y]$内的概率近似地等于$f(x,y)\Delta x\Delta y$.

在几何上$z=f(x,y)$表示空间的一个曲面.

由性质2°知，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1,$$

介于$z=f(x,y)$和xOy平面的空间区域的体积为1.

由性质4°,

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

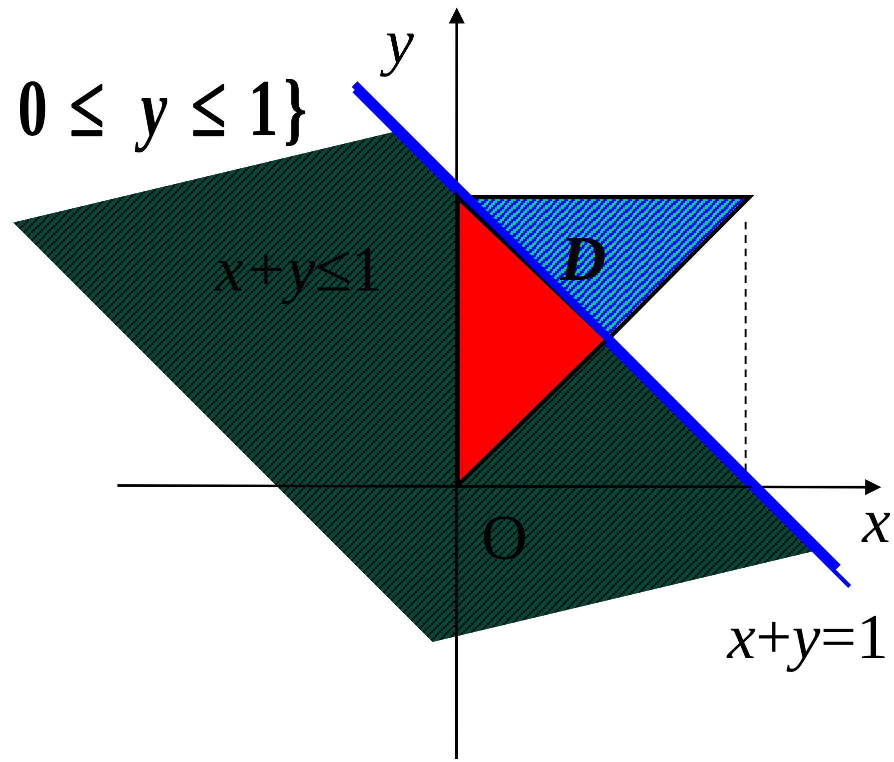
$P\{(X,Y)\in G\}$的值等于以G为底，以曲面 $z=f(x,y)$为顶面的柱体体积 .

例3 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}Cxy, & 0\le x\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(1) 确定常数C；(2) 求概率$P\{X+Y\le 1\}$；(3)求$F(x,y)$.

解 (1) $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le y, 0\le y\le 1\}$

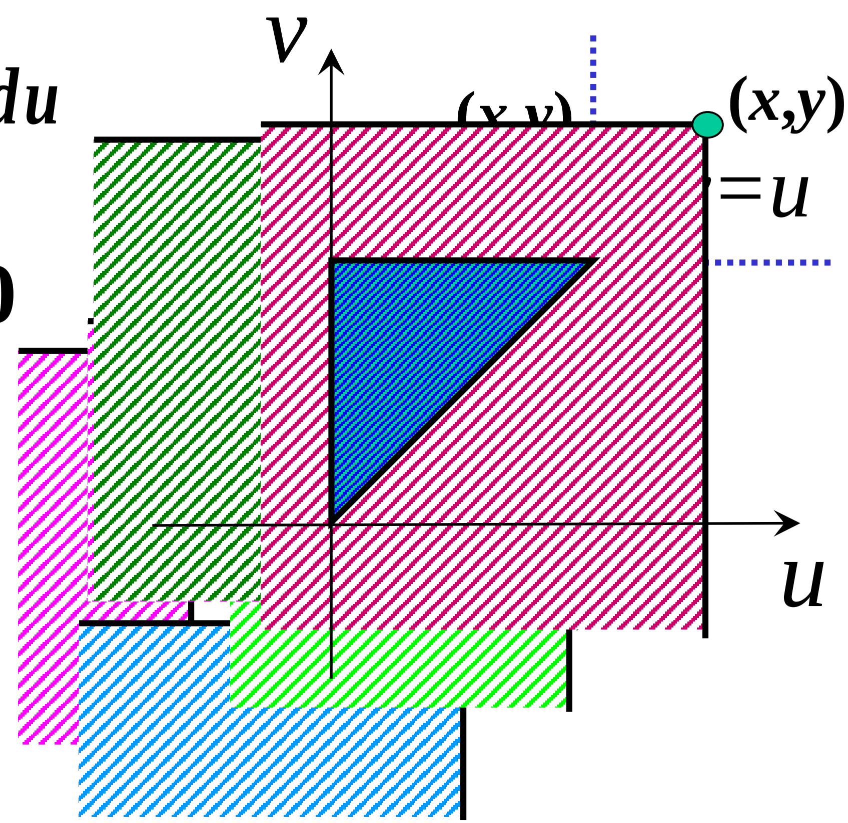


(2) $P\{X+Y\le 1\}$

$$=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}8xydy=\frac{1}{6}$$

(3) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du$



当$x<0$ 或 $y<0$ 时, $F(x,y)=0$

当$x\le y<1,\ 0\le x<1$ 时,

$$F(x,y)=\int_0^x du\int_u^y 8uv\,dv$$

$$=2x^2y^2-x^4$$

当$x>y,\ 0\le y<1$时, $F(x,y)=\int_0^y dv\int_0^v 8uv\,du=y^4$

当$y\ge 1,\ 0\le x<1$时, $F(x,y)=\int_0^x du\int_u^1 8uv\,dv=2x^2-x^4$

当 $x\ge 1, y\ge 1$ 时, $F(x,y)=1$

(3) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du$

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{当}x<0\text{ 或 }y<0\text{ 时,} \\ 2x^2y^2-x^4 & \text{当}x\le y<1,\ 0\le x<1\text{ 时,} \\ y^4 & \text{当}x>y,\ 0\le y<1\text{时,} \\ 2x^2-x^4 & \text{当}y\ge 1,\ 0\le x<1\text{时,} \\ 1, & \text{当 }x\ge 1,\ y\ge 1\text{ 时,} \end{cases}$$

例4 设二维随机变量具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

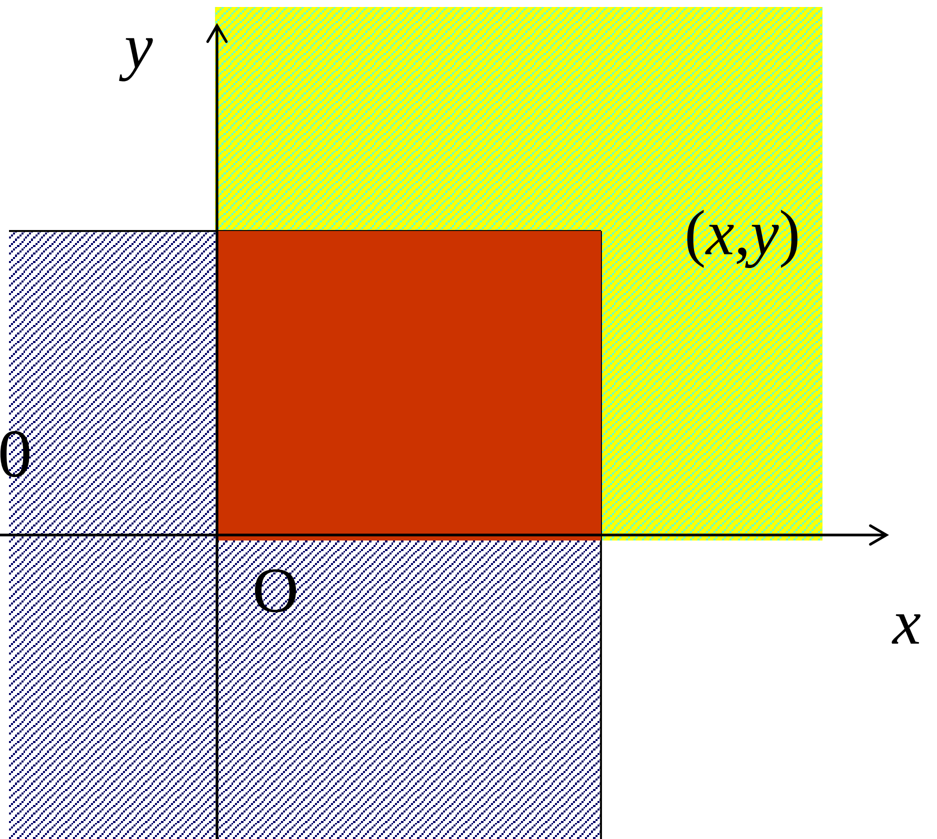
求（1）分布函数$F(x,y)$；（2）$P\{X\geq Y\}$

解

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$$

$$=\begin{cases}\int_{0}^{y}\int_{0}^{x} 2e^{-(2u+v)}dudv, & x>0, y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0, y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



(2) 设 $\{Y \le X\} = \{(X,Y) \in G\}$

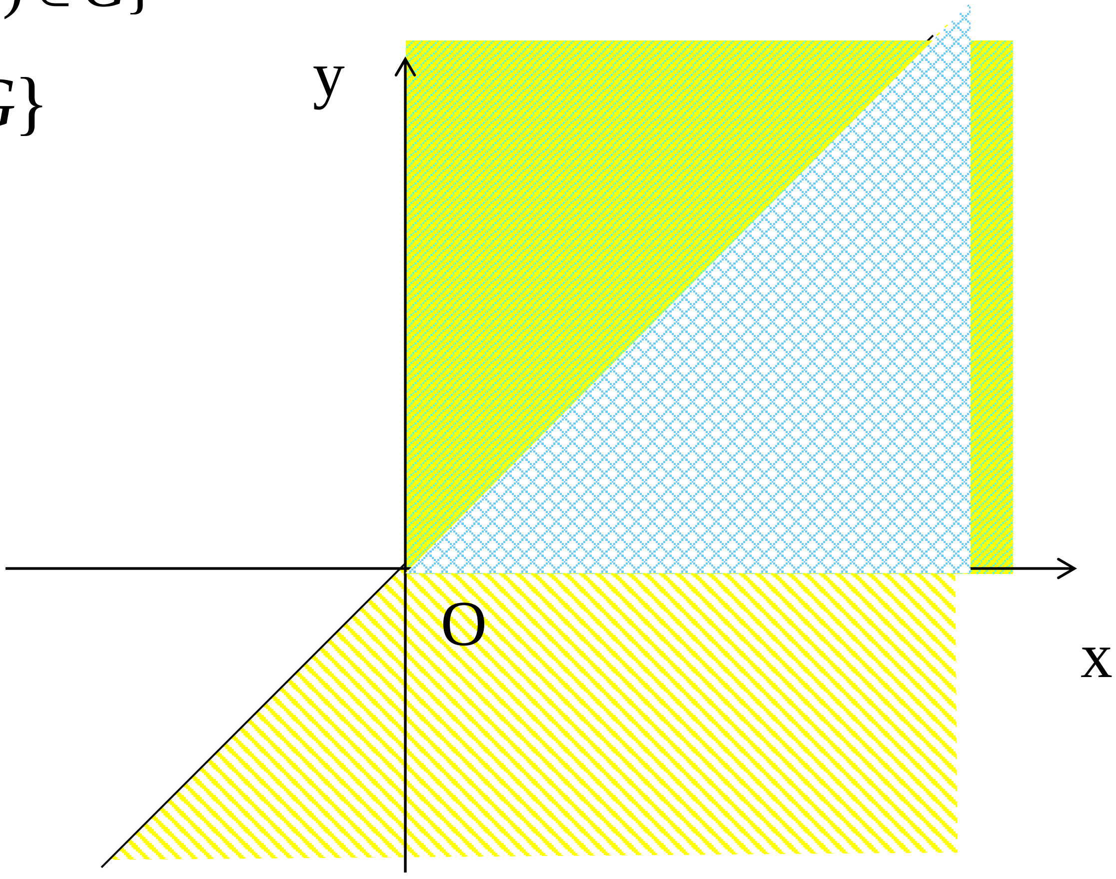
$$P\{Y \le X\} = P\{(X,Y) \in G\}$$

$$= \iint\limits_G f(x,y)dxdy$$

$$\overset{(1)}{=} \int_0^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} 2e^{-(2x+y)} dx$$

$$\overset{(2)}{=} \int_0^{+\infty} dx \int_0^{x} 2e^{-(2x+y)} dy$$

$$= \frac{1}{3}$$



概念的推广：

设E是一随机试验，S是其样本空间，$X_1,X_2,\ldots X_n$是定义S在上的n个随机变量，则称n维向量$(X_1,X_2,\ldots X_n)$为定义在S上的n维随机向量或n维随机变量.

对任意实数$x_1,x_2,\ldots x_n$，令

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\le x_1,X_2\le x_2,\cdots X_n\le x_n\}$$

称为n维随机变量$(X_1,X_2,\ldots X_n)$的分布函数.

类似可以定义离散型及连续型n维随机变量的分布律及概率密度，它们都具有类似于二维时的性质.

小 结

二维随机变量的分布函数

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}.$$

二维离散型随机变量的分布律及分布函数

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots;$$

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x,y_j\le y}p_{ij}.$$

二维连续型随机变量的概率密度

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

§2 边缘分布

一、边缘分布函数

定义1 设(X,Y)为二维随机变量，其分布函数为$F(x,y)$

$$\boxed{F_X(x)=P\{X\le x\}}$$

(X,Y)关于X的边缘分布函数

$$\boxed{F_Y(y)=P\{Y\le y\}}$$

(X,Y)关于Y的边缘分布函数

[注] 边缘分布函数可以由X与Y的联合分布函$F(x,y)$唯一确定:

$$F_X(x)=P(X\le x, Y<+\infty)=F(x,+\infty)$$

$$F_Y(y)=P(X<+\infty, Y\le y)=F(+\infty,y)$$

二、离散型随机变量的边缘分布律

若(X,Y)分布律为 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, (i,j=1,2,\cdots)$

$$\Longrightarrow P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{+\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}$$

$$P\{Y=x_i\}=\sum_{i=1}^{+\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}$$

$$p_{i\cdot}\triangleq\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}\quad(i=1,2,\cdots)\qquad p_{\cdot j}\triangleq\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}\quad(j=1,2,\cdots)$$

(X,Y)关于X的边缘分布律

(X,Y)关于Y的边缘分布律

$$0\le p_{i\cdot}\le 1,\ \ 0\le p_{\cdot j}\le 1,\ \ \sum_{i=1}^{+\infty}p_{i\cdot}=1,\ \ \sum_{i=1}^{+\infty}p_{\cdot j}=1.$$

离散型随机变量的边缘分布律列表

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

例1

例1 设随机变量X在1,2,3,4四个整数中等可能地取值，另一随机变量Y在1~X中等可能地取一整数值.试求(X,Y)的分布律.

解: $X=i,\ i=1,2,3,4,\quad Y=j,\ j\le i.$

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j|X=i\}P\{X=i\}=\frac{1}{i}\frac{1}{4}\ (i=1,2,3,4,\quad j\le i)$$

X \ Y	1	2	3	4	$p_{i\cdot}$
1	1/4	0	0	0	1/4
2	1/8	1/8	0	0	1/4
3	1/12	1/12	1/12	0	1/4
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
$p_{\cdot j}$	25/48	13/48	7/48	1/16	1

三、 连续型随机变量的边缘概率密度

设(X,Y) 概率密度为$f(x,y)$，则

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy}\right]dx, \quad -\infty<x<+\infty$$

由此知，X是连续型随机变量，且其概率密度为

$$\boxed{f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, \quad -\infty<x<+\infty}$$

同理，Y也是连续型随机变量，其概率密度为

$$\boxed{f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx, \quad -\infty<y<+\infty}$$

分别称为(X,Y)关于X和关于Y的边缘概率密度.

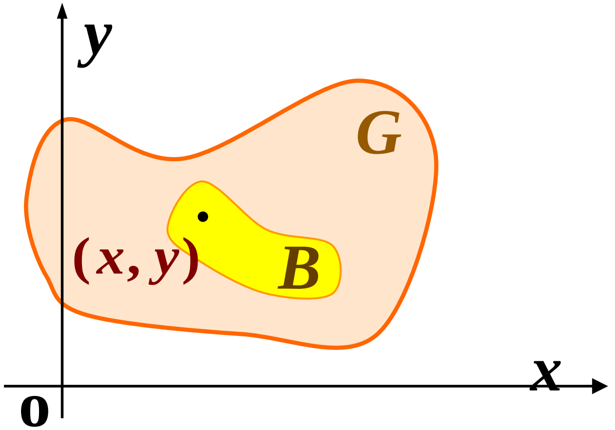
常见二维分布

☞**均匀分布**：设G为一面积为A平面有界区域，若(X,Y)具有概率密度

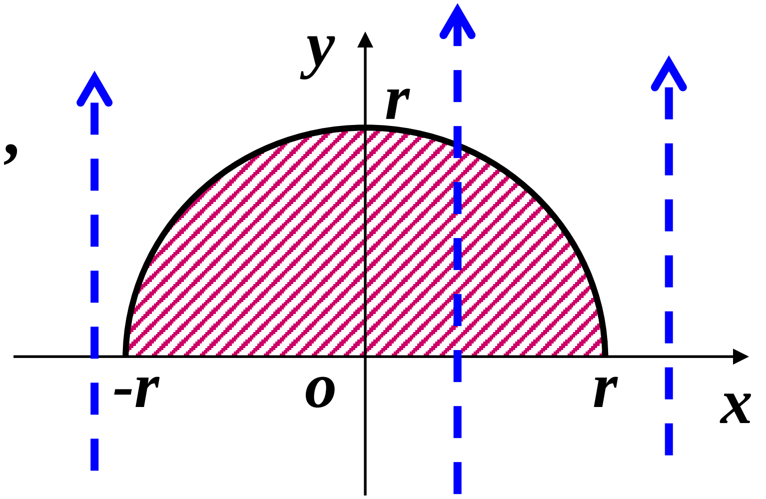
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则称(X,Y)在域G上服从均匀分布.

向平面上有界区域G内任投一质点，若质点落在G内任一小区域B的概率与小区域的面积成正比，而与B的形状及位置无关，则质点的坐标(X,Y)在G上服从均匀分布.



例2 设(X,Y)在域 G: $x^2+y^2\le r^2$, $y\ge 0$ 上服从均匀分布，求其边缘概率密度.



解 $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi r^2}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

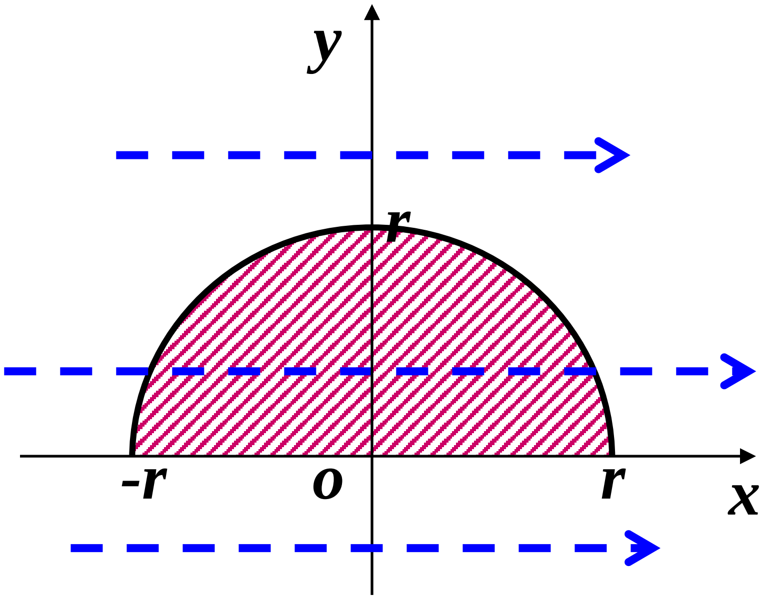
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{2}{\pi r^2}dy, & -r<x<r,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2}, & |x|<r\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$= \begin{cases} \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \frac{2}{\pi r^2} dx, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$



$$= \begin{cases} \frac{4}{\pi r^2}\sqrt{r^2 - y^2}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

均匀分布的边缘分布不一定是均匀分布。

☞二维正态分布

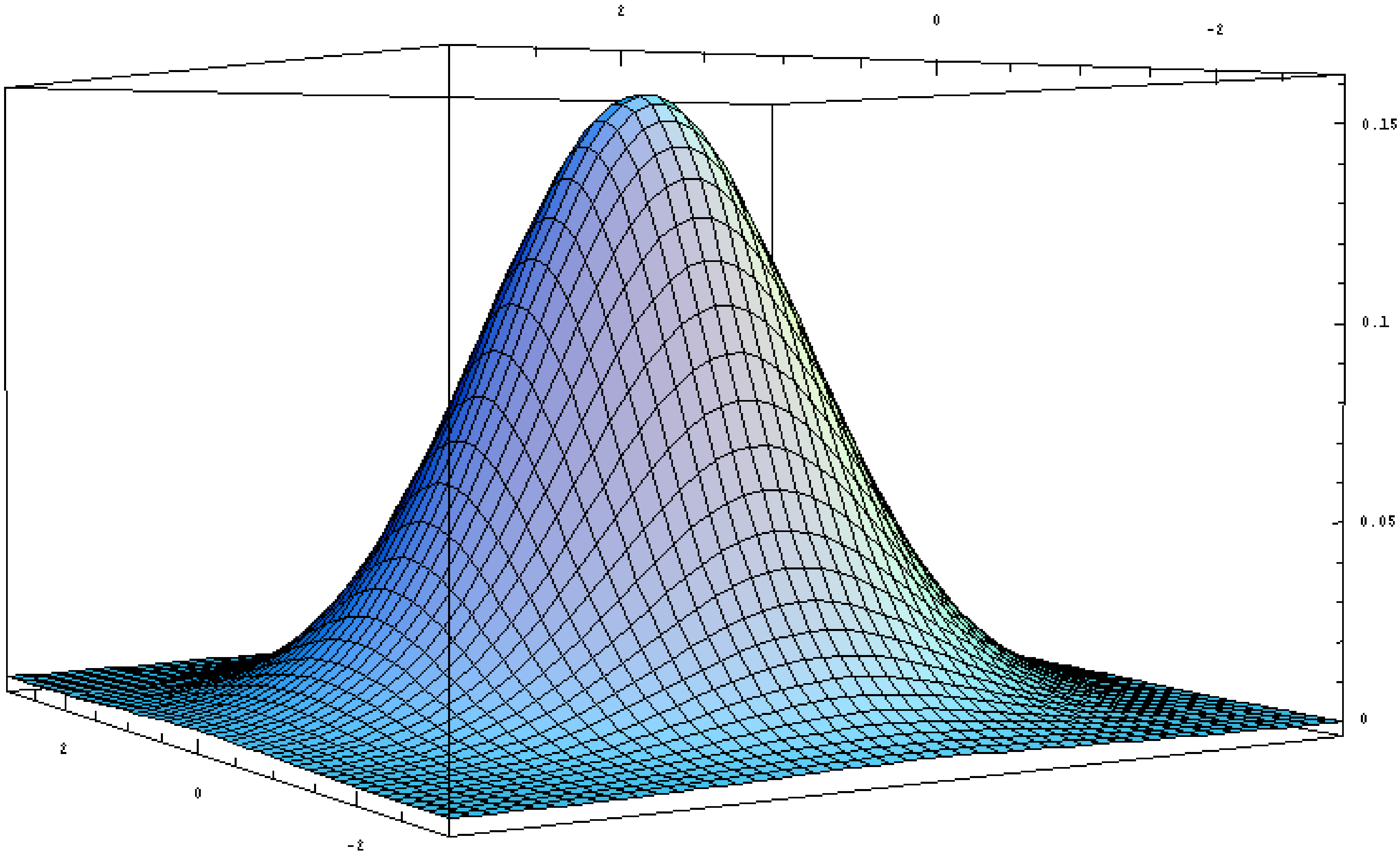
设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

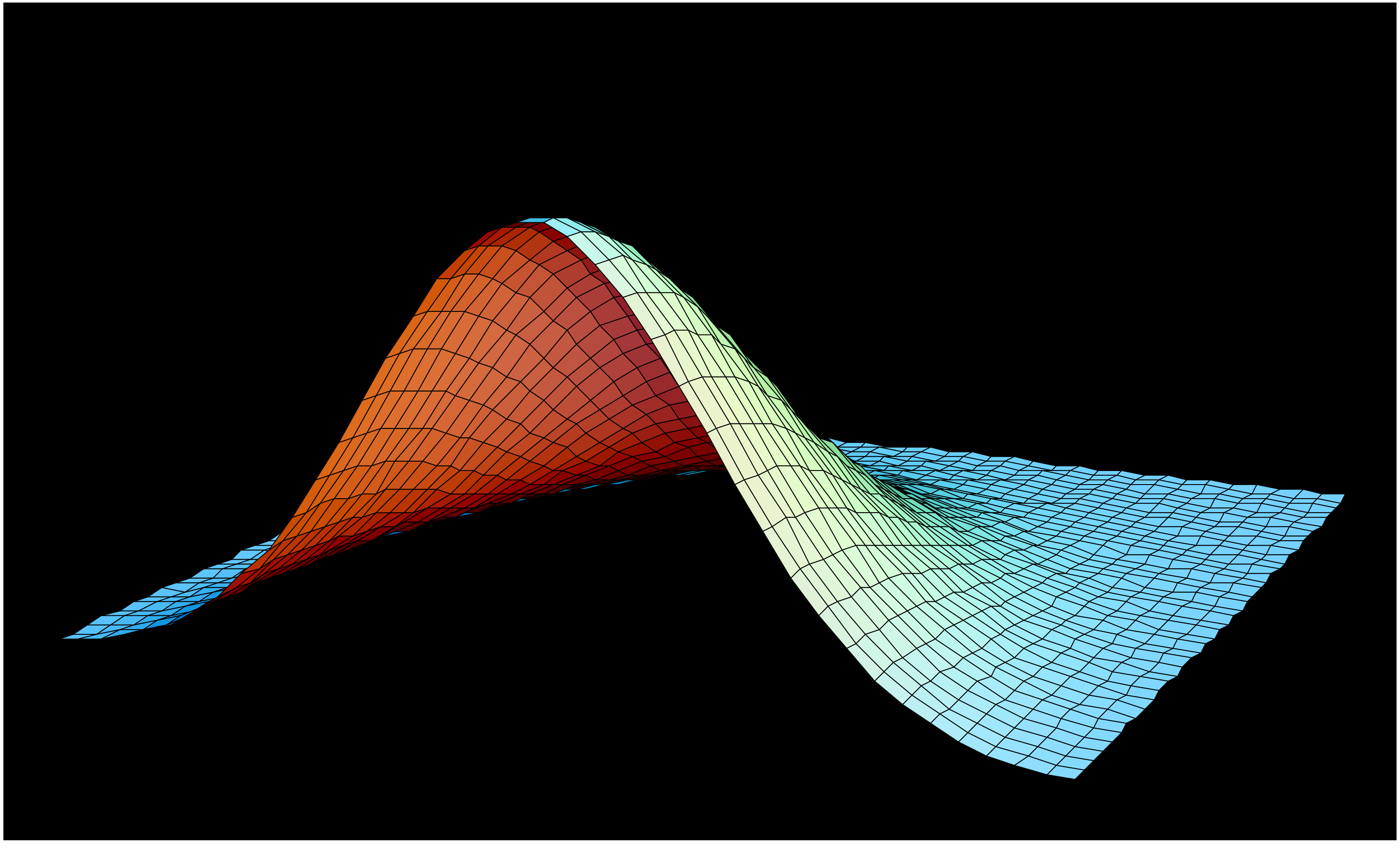
$$-\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$是常数，且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1$，则称(X,Y)服从参数为的，记为

$$\boxed{(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)}$$



二维正态分布图



二维正态分布剖面图

例 3 设 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,

求(X,Y)的边缘概率密度.

解

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},-\infty<x<+\infty$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},\quad -\infty<y<+\infty$$

即X和Y的边缘分布均为正态分布:

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y,$

由于 $\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}$

$$=\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2},$$

于是 $$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2}\mathrm{d}y,$$

令 $$t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),$$

则有 $$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

即

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\quad -\infty<x<\infty.$$

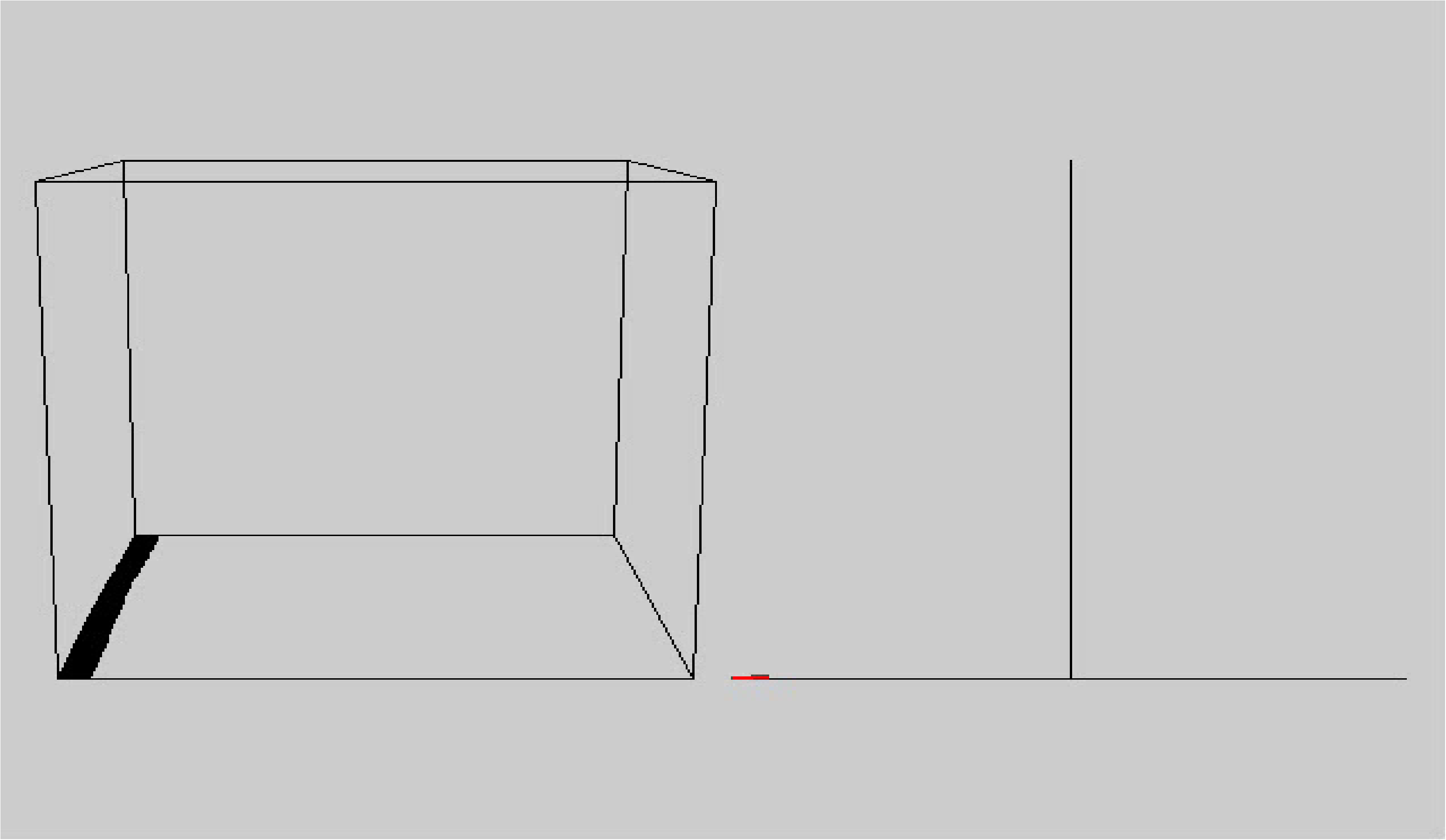
同理

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},-\infty<y<\infty.$$

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布,

并且都不依赖于参数ρ.

二维正态分布和其边缘分布的关系



思考

边缘分布均为正态分布的随机变量，其联合分布一定是二维正态分布吗？

答 不一定．举一反例以示证明．

解答： 令(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y),$$

显然,(X,Y)不服从正态分布,但是

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}.$$

因此边缘分布均为正态分布的随机变量, 其联合分布不一定是二维正态分布.

小 结

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

联合分布 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 边缘分布

作业

- **第三章习题2, 3, 6, 9**