《概率论与数理统计》练习题答案

1. 一批产品共20件，其中5件是次品，现从中不放回的任取3件，每次取1件，试求

   (1) 第三次才取到次品的概率；（5%）

   (2) 第三次取到次品的概率。（5%）

   解：(1) $\frac{15*14*5}{20*19*18}=\frac{35}{228}=0.1535$

   (2) $\frac{19*18*5}{20*19*18}=\frac{1}{4}=0.25$

2. 将A、B、C三个字母之一输入信道，输出原字母的概率是0.8，而输出其他字母概率为0.1。现将字符串AAAA，BBBB，CCCC之一输入信道，其中输入AAAA，BBBB，CCCC概率均为1/3。假设信道传输各字母的工作是相互独立的。已知输出为ABCA，问输入是AAAA，BBBB，CCCC的概率分别是多少？（10%）

   解：全概率公式，贝叶斯公式，独立性，0.8，0.1，0.1

3. 某车间有同类机床100台，各台机床工作相互独立，发生故障的概率都是0.01。

   (1) 利用二项分布求不小于2台机床发生故障的概率；（5%）

   (2) 利用泊松定理求不小于2台机床发生故障的概率。（5%）

   解：(1) 0.264238；　(2) 0.264241

4. 设随机变量X在区间(-1,1)服从均匀分布，

   (1) 求$Y=-\ln(1-X)/\ 2$的概率密度；（5%）

   (2) 求$Y=X^2$的概率密度。（5%）

   解：(1) $e^{-2y}, y\in\left(-\frac{\ln 2}{2},\infty\right)$；　(2) $\frac{1}{2\sqrt{y}}, y\in(0,1)$

5. 设某种鸡下蛋的个数X服从参数为λ的泊松分布$\pi(\lambda)$，而每一个蛋能孵化成小鸡的概率为p，记Y表示此鸡的下一代的个数。试求X与Y的联合分布律，并证明$Y\sim\pi(\lambda p)$。（10%）

   解：$P\{X=m,Y=n\}=P\{X=m\}\cdot P\{Y=n\mid X=m\}$

$$=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}C_m^n p^n(1-p)^{n-m},$$

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=n}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}$$

$$=\frac{\lambda^n p^n e^{-\lambda}}{n!}[1+\lambda(1-p)+\frac{\lambda^2(1-p)^2}{2!}+\cdots]=\frac{\lambda^n p^n e^{-\lambda}}{n!}e^{\lambda(1-p)}$$

$$=\frac{(\lambda p)^n e^{-\lambda p}}{n!}$$

6. 设某种商品一周的需求量是一个随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

若各周的需求量相互独立, 求两周需求量的概率密度。（10%）

解：设X, Y分别表示第一、二周的需求量，则两周的需求量为 Z=X+Y

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$=\begin{cases} \int_0^z xe^{-x}(z-x)e^{-(z-x)}dx, z>0 \\ 0, \qquad z\le 0 \end{cases}=\begin{cases} \frac{z^3}{6}e^{-z}, z>0 \\ 0, \qquad z\le 0 \end{cases}$$

7. 设$X \sim N(1,4)$, $Y \sim N(-1,9)$,

(1) 若X与Y相互独立，求$E(XY)$和$D(XY)$；（5%）

(2) 若X与Y的相关系数$\rho_{XY}=-0.5$，求$D(\frac{1}{2}X+\frac{1}{3}Y)$。（5%）

解：(1) $E(XY)$=-1, $D(XY)$=49; (2) $D\left(\frac{1}{2}X+\frac{1}{3}Y\right)=1$

8. 设随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} 8xy & y<x<1, 0<y<1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求协方差$Cov(X, Y)$，说明X与Y是否相关，是否独立。（10%）

解：$E(X)=4/5$, $E(Y)=8/15$, $E(XY)=4/9$, $Cov(X, Y)=4/225$，相关，不独立

9. 证明马尔科夫不等式：设X为连续型随机变量，若$E(|X|^k)$存在，$\forall\varepsilon>0$，总有

$P(|X|\ge\varepsilon)\le\frac{E(|X|^k)}{\varepsilon^k}$。（10%）

解：参考切比雪夫不等式证明

10. 为确定某城市成年男子中抽烟人所占的比例p，任意抽查n个成年男子，其中抽烟的有m个，问n至少为多大，才能保证m/n与p的差异小于0.01的概率大于等于0.95。已

知标准正态分布的分布函数取值$\Phi(1.645)=0.95,\Phi(1.96)=0.975$。（10%）

解：$2\Phi\left(\frac{0.01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)-1\geq 0.95$，$n\geq 196^2 p(1-p)$，$n\geq 196^2/4=9604$