第七章　参数估计

§1　点估计

~~§2~~　基于截尾样本的最大似然估计

§3　估计量的评选标准

§4　区间估计

§5　正态总均值与方差的区间估计

§6　(0--1)分布参数的区间估计

§7　单侧置信区间

§7.4 区间估计

为了估计总体X的未知参数θ，前面已经介绍了矩估计法和极大似然估计法．由于总体X的未知参数θ的估计量$\hat{\theta}$是随机变量，无论这个估计量的性质多么好，它只能是未知参数的近似值，但**近似程度如何**？**误差范围多大**？**可信程度又如何**？这些问题是点估计无法回答的。

那么θ的真值在什么范围内呢？是否能通过样本寻求一个**区间**，并且给出此**区间包含参数θ真值的可信程度**．这就是总体未知参数的**区间估计问题**．

在区间估计理论中，被广泛接受的一种观点是**置信区间**，它是由奈曼（Neymann)于1934年提出的。

一、置信区间的概念

定义1 设总体X的分布函数 $F(x;\theta)$，θ为未知参数，$X_1, X_2, \ldots, X_n$是取自总体的样本，对给定值α $(0<\alpha<1)$，若存在统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$和 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$满足

$$P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}\geq 1-\alpha$$

则称随机区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 为θ的置信水平为$1-\alpha$ 的置信区间，$\underline{\theta}$和 $\overline{\theta}$分别称为置信度为$(1-\alpha)$ 的双侧置信下限与双侧置信上限，$(1-\alpha)$称为置信水平（置信度）.

这种估计θ 的方法叫做区间估计.

➢评价置信区间好坏标准：

(1) 精度：$\overline{\theta}-\underline{\theta}$ 越小越好；

(2) 置信度：$P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}$ 越大越好.

注：➢当X是连续型随机变量时，对于给定的α，我们总是按要求

$$P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} = 1-\alpha$$

➢**置信度 (1-α)的含义：**若重复多次抽样, 得到样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$的多个样本值$x_1, x_2, \ldots, x_n$，对应每个样本值都确定了一个置信区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$，每个这样的区间要么包含了的真值$\theta$，要么不包含真值$\theta$. 据伯努利大数定律，当抽样次数充分大时，这些区间中包含真值的区间大约占 100 (1-α) %个，不包含的区间大约占 100 α %.

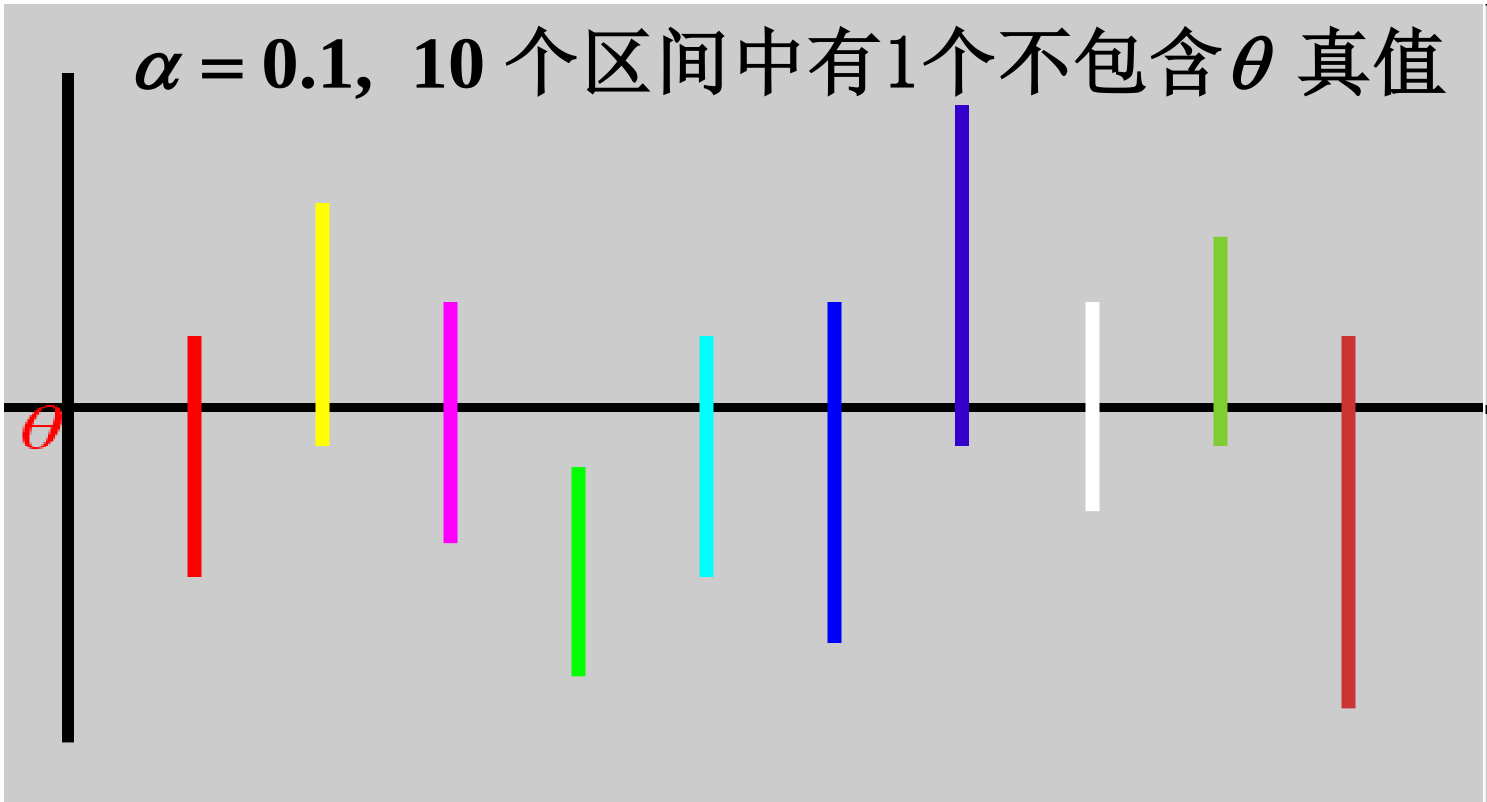
➢**置信区间的估计精度：置信区间的长度=** $\overline{\theta}$ - $\underline{\theta}$ ；

➢**置信度与估计精度是一对矛盾.**

- 置信水平高，则区间大，区间精度差
- 置信区间小，则精度高，但置信水平低
- **一般准则：在保证**置信度的条件下尽可能提高精度.

例如　若 $\alpha = 0.01$,　反复抽样 1000 次,

则得到的1000个区间中不包含 θ 真值的约为10个.



随机区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$以$1-\alpha$的概率包含着参数$\theta$的真值,

而不能说参数θ以$1-\alpha$的概率落入随机区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$.

二、寻求置信区间的方法

➢**寻求置信区间的基本思想：**在点估计的基础上，构造合适的含样本及待估参数的函数U，且已知 U 的分布，再根据给定的置信度导出待估参数置信区间.

➢**一般步骤：**

(1)选取未知参数θ的某个较优估计量 $\hat{\theta}$ （如无偏估计），

(2)围绕 $\hat{\theta}$ 构造一个与待估参数θ有关的函数U, 且分布已知;

枢轴量： $U = U(X_1, X_2, \cdots, X_n, \theta)$

(3)对给定的置信水平$1-\alpha$，确定 λ_1与 λ_2，使

$$P\{\lambda_1 < U < \lambda_2\} = 1-\alpha$$

(4)对上式作恒等变形，化为

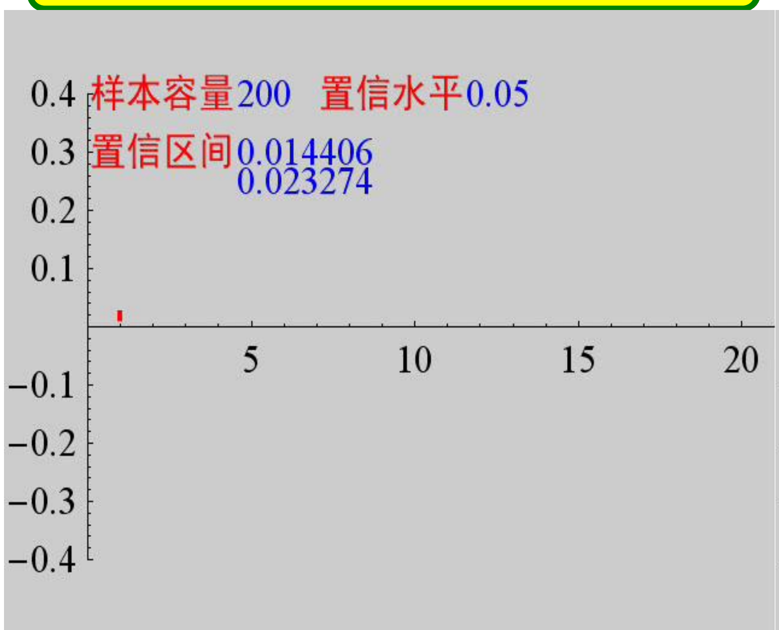
$$P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} = 1-\alpha$$

则 $(\overline{\theta}-\underline{\theta})$ 就是θ的置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间.

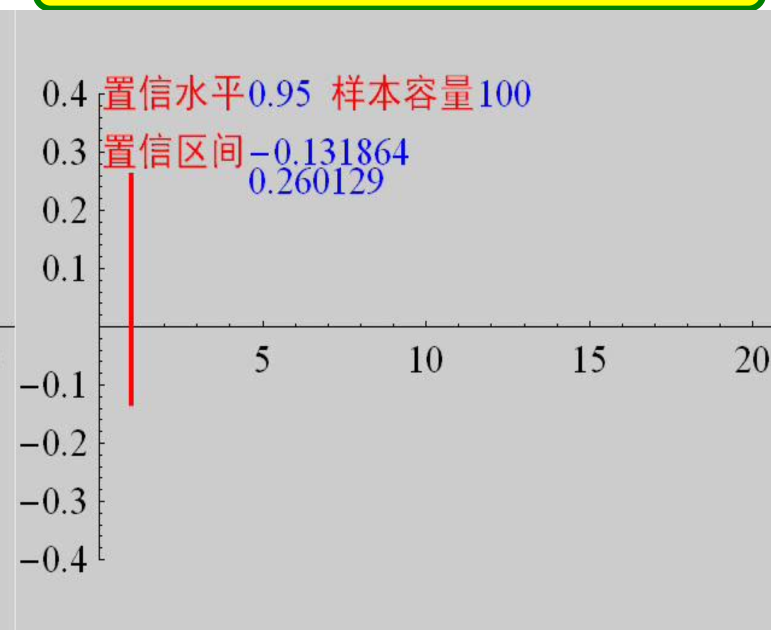
样本容量 n 固定，置信水平 $1-\alpha$ 增大，置信区间长度增大，可信程度增大，区间估计精度降低 .

置信水平 $1-\alpha$ 固定，样本容量 n 增大，置信区间长度减小，可信程度不变，区间估计精度提高 .

单击图形播放/暂停　ESC键退出



单击图形播放/暂停　ESC键退出



小结

点估计不能反映估计的精度，故而本节引入了区间估计.

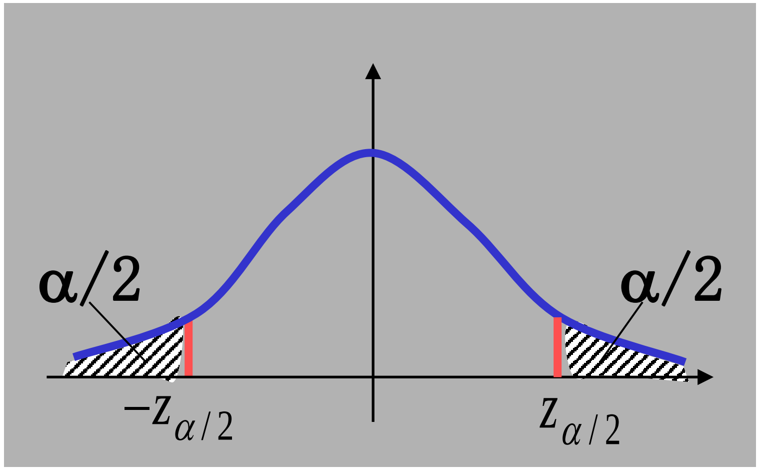
置信区间是一个随机区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$，它覆盖未知参数具有预先给定的高概率(置信水平)，即对于任意的$\theta \in \Theta$，有 $P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} \geq 1 - \alpha$.

求置信区间的三个步骤.

§7.5 正态总均值与方差的区间估计

单个正态总体的情况

设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体X的样本，求μ,σ^2 的置信水平为$(1-\alpha)$的置信区间.



(1) 均值μ的置信区间

(*a*) σ^2为已知时, 因为 $\overline{X}$是μ的无偏估计, 且 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

对于给定的$\alpha(0<\alpha<1)$, 令

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\le z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha \Longrightarrow P\left\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

求得μ的置信度水平为(1–α)的置信区间:（σ^2为已知）

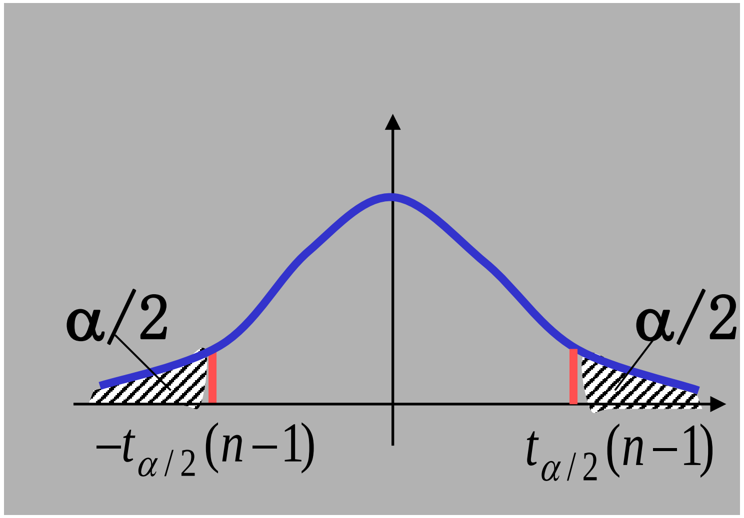
$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$$

或

$$\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$$

(b) σ^2为未知时, 因为S^2是σ^2的无偏估计量, 所以用S替换σ,

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$



$$P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

$$P\left\{\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

求得 μ 的置信水平为$(1-\alpha)$的置信区间:(σ^2未知)

$$\left(\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

注:可证明$t_{\alpha/2}(n-1)$是n的严格单调递减函数,因此$t_{\alpha/2}(n-1) > z_{\alpha/2}$,即$\sigma^2$已知时,置信区间的估计精度更高

1） 例如当α=0. 05 时, 即1−α=0. 95, $\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}, \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}\right)$

又若$\sigma=1, n=16$, 查表得 $\frac{\alpha}{2}=0.025, z_{0.025}=1.96$

于是得到μ 的置信水平为0. 95 的置信区间:

$$\left(\bar{X}-\frac{1}{\sqrt{16}}\times 1.96, \bar{X}+\frac{1}{\sqrt{16}}\times 1.96\right) \quad \text{即} \left(\bar{X}\pm 0.49\right)$$

2)若样本值为$\bar{x}=5.20$, 则得到一个置信区间 (5.20 ± 0.49)

即(4.71, 5.69)这时已不是随机区间, 说明 μ 的真值含在

(4.71, 5.69)的可信程度为95%.

3)置信水平为(1−α)的置信区间不唯一. 如上例α=0. 05, 可证

$$P\left\{-z_{0.04}\le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\le z_{0.01}\right\}=0.95 \Longrightarrow \left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.01}, \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.04}\right)$$

置信区间长度越短表示估计的精度越高.

比较两个置信区间的长度

$$L_1 = 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025} = 3.92 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$L_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.04} + z_{0.01}) = 4.08 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

显然 $L_1 < L_2$. 置信区间短表示估计的精度高.

说明: 对于概率密度的图形是单峰且关于纵坐标轴对称的情况, 易证取 a 和 b 关于原点对称时, 能使置信区间长度最小.

例1 有一大批糖果，现从中随机地取16袋，称得重量（以克计）如下：506 508 499 503 504 510 497 512 514 505 493 496 506 502 509 496 ，设袋装糖果的重量近似地服从正态分布，试求总体均值μ的置信度为0.95的置信区间。

解：σ^2未知, $1-\alpha=0.95$, $\alpha/2=0.025$, $n-1=15$, $t_{0.025}(15)=2.1315$

由已知的数据算得 $\bar{x}=503.75, s=6.2022$

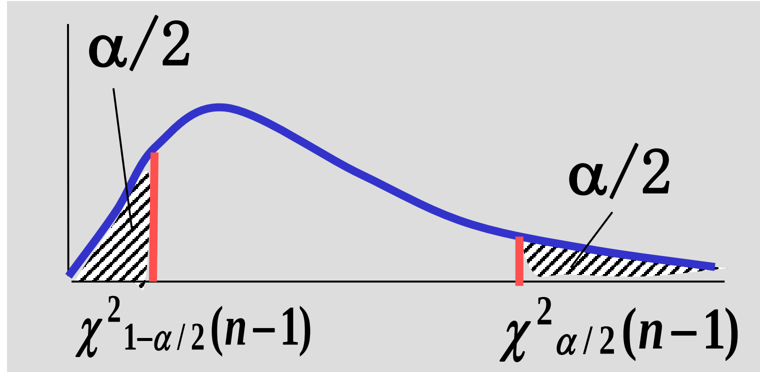
由公式(2)得均值μ的置信度为0.95的置信区间为

$$\left(503.75 \pm \frac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315\right)$$ 即（500.4，507.1）

这就是说估计袋装糖果重量的均值在500.4与507.1之间，这个估计的可信程度为95%。若以此区间内任一值作为μ 的近似值，其误差不大于 $\frac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315 \times 2 = 6.61$ （克），这个误差估计的可信程度为95%。

(2) 方差σ^2 的置信区间 (只介绍μ 未知的情况)

σ^2的无偏估计量为S^2，当$1-\alpha$ 给定后，



因为 $$\boxed{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)}$$

$$\Rightarrow P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

即 $$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$$

注意：在密度函数不对称时，如χ^2和 F分布，习惯上仍取对称的分位点来确定置信区间(如图).

得到方差 σ^2 的一个置信度为$1-\alpha$ 的置信区间：

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) \quad \left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$$

标准差σ 的一个置信度为$1-\alpha$ 的置信区间

思考：若样本容量n增大，置信区间的精度如何变化？

例2 有一大批糖果,现从中随机地取16袋,称得重量（以克计）如下：506 508 499 503 504 510 497 512 514 505 493 496 506 502 509 496 ,设袋装糖果的重量近似地服从正态分布，试求总体标准差 σ的置信度为0.95的置信区间。

解： 现在 $\alpha/2 = 0.025, 1-\alpha/2 = 0.975, n-1 = 15$

查表得 $\chi^2_{0.025}(15) = 27.488, \chi^2_{0.975}(15) = 6.262,$

又 s =6.2022， 由(4)式

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}} \right),$$

得所求的标准差σ的置信区间为 (4.58，9.60)

两个正态总体的情况

在实际中常遇到下面的问题：已知产品的某一质量指标服从正态分布，但由于原料、设备条件、操作人员不同，或工艺过程的改变等因素，引起总体均值、总体方差有所改变，我们需要知道这些变化有多大，这就需要考虑两个正态总体均值差或方差比的估计问题。

□两个正态总体的情况

设总体$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$,$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，$X_1, X_2, \ldots, X_{n1}$是$X$的样本, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n2}$是Y的样本.这两个样本相互独立，$\overline{X}, \overline{Y}$, S_1^2, S_2^2 分别为第一、二个总体的样本均值与方差.

(1) 两个总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间 (置信度为(1−α))

(a) σ_1^2, σ_2^2均为已知: 因$\overline{X} - \overline{Y}$为$\mu_1 - \mu_2$的无偏估计量, 而由 $\overline{X}$, $\overline{Y}$ 的独立性及

$$\overline{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right), \qquad \overline{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right),$$

$$\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)\Rightarrow\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

即得σ_1^2, σ_2^2均为已知时，$\mu_1-\mu_2$ 的(1−α)置信区间:

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

(b)$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, 但$\sigma^2$为未知. 由第六章 § 2 定理四知

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

从而可得 $\mu_1-\mu_2$ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

此处 $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}, S_w=\sqrt{S_w^2}$

例3 为比较I，II两种型号步枪子弹的枪口速度，随机地取I型子弹10发，得到枪口速度的平均值为 $\overline{x_1}=500(m/s)$ ，标准差 $s_1=1.1(m/s)$．随机地取II型子弹20发，得到枪口速度的平均值为 $\overline{x_2}=496(m/s)$ ，标准差 $s_2=1.20(m/s)$。假设两总体都可认为近似地服从正态分布，且由生产过程可认为它们的方差相等。求两总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为0.95的置信区间。

解： 按实际情况，认为分别来自两个总体的样本是相互独立的。又由假设两总体的方差相等，但数值未知，故可用（7）式求均值差的置信区间。 $1-\alpha=0.95,\quad \alpha/2=0.025$

$$n_1=10,\ \ n_2=20, n_1+n_2-2=28,\qquad t_{0.025}(28)=2.0484$$

$$S_w^2=(9\times1.10^2+19\times1.20^2)/28, s_w=\sqrt{s_w^2}=1.1688$$

故所求的两总体均值差 $\mu_1-\mu_2$的置信度为0.95的置信区间是

$$\left(\overline{x_1}-\overline{x_2}\pm s_w\times t_{0.025}(28)\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}}\right)=(4\pm 0.93)$$

即（3.07, 4.93）.

(2) 两个总体方差比σ_1^2/σ_2^2的置信区间

仅讨论总体均值μ_1，μ_2为未知的情况。

由于 $$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

$$\Rightarrow P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) < \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\right\} = 1-\alpha$$

即 $$P\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\right\} = 1-\alpha$$

于是得σ_1^2/σ_2^2的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2}\boxed{\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}}\right)$$

$$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1)$$

例5 研究由机器A和机器B生产的钢管的内径，随机抽取机器A生产的管子18只，测得样本方差$s_1^2=0.34(mm^2)$；抽取机器B生产的管子13只，测得样本方差 $s_2^2=0.29(mm^2)$。设两样本相互独立，且设由机器A、机器B生产的管子的内径分别服从正态分布$N(\mu_1,\sigma_1{}^2),N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$，这里 $\mu_i,\sigma_i^2(i=1,2)$ 均未知。试求方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信度为**0.90**的置信区间。

解 现在$n_1=18,s_1^2=0.34,n_2=13\quad s_2^2=0.29,\alpha=0.10$

$$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.05}(17,12)=2.583$$

$$F_{0.95}(17,12)=\frac{1}{F_{0.05}(12,17)}=\frac{1}{2.38}$$ 即（**0.45，2.79**）

由于σ_1^2/σ_2^2的置信区间包含**1**，在实际中我们就认为σ_1^2,σ_2^2两者没有显著差别。

(3) $\sigma_1^{\ 2}$和$\sigma_2^{\ 2}$均为未知，

只要n_1和n_2都很大(实际上 >50即可),则有

$\mu_1-\mu_2$的一个置信度为$1-\alpha$的近似置信区间

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^{\ 2}}{n_1}+\frac{S_2^{\ 2}}{n_2}}\right).$$

由于$\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$

n_1和n_2都很大时，$\sigma_1^{\ 2}$和$\sigma_2^{\ 2}$可分别用$S_1^{\ 2}$和$S_2^{\ 2}$近似

正态总体均值、方差的置信区间（置信度$1-\alpha$）

	待估参数	其他参数	枢轴量及其分布	置信区间
一个正态总体	μ	σ^2已知	$Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$
	μ	σ^2未知	$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\bar{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$
	σ^2	μ未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$
两个正态总体	$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2已知	$Z=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$
	$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知	$t=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$
	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2未知	$F=\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$

§7.6 （0-1）分布参数的区间估计

设总体X~b(1, p), p为未知参数, X的分布律为

$$f(x;p)=p^x(1-p)^{1-x},\ x=0,1$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ (n> 50)是X的大样本，求p 的置信度为(1–α)的置信区间.

已知 (0-1)分布的均值和方差分别为$\mu=p, \sigma^2=p(1-p)$

由中心极限定理，知

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{n\overline{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0，1)$$

于是有 $P\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{n\overline{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}\right\} \approx 1-\alpha$

而不等式 $-z_{\alpha/2} < \dfrac{n\overline{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}$

等价于 $(n + z_{\alpha/2}^2)p^2 - (2n\overline{X} + z_{\alpha/2}^2)p + n\overline{X}^2 < 0$

记 $a = n + z_{\alpha/2}^2, b = -(2n\overline{X} + z_{\alpha/2}^2), c = n\overline{X}^2$

$$p_1 = \frac{1}{2a}\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right), \quad p_2 = \frac{1}{2a}\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$$

于是得 p 的近似的置信度为 $(1-\alpha)$ 置信区间为: (p_1, p_2)

例 设自一大批产品的100个样品中，得一级品60个，求这批产品的一级品率p 的置信度为0.95的置信区间。

解 一级品率 p是（0-1）分布的参数，此处

$$n = 100, \overline{x} = \frac{60}{100} = 0.6, 1 - \alpha = 0.95, \alpha/2 = 0.025, z_{\alpha/2} = 1.96$$

按(5.7)、(5.8)式来求p 的置信区间，其中

$$a = n + z_{\alpha/2}^2 = 103.84,$$

$$b = -(2n\overline{X} + z_{\alpha/2}^2) = -123.84, \quad c = n\overline{x}^2 = 36$$

而 $p_1 = 0.50, p_2 = 0.69$

故得 p 的置信度为0.95的近似置信区间为(0.50，0.69).

§7.7 单侧置信区间

问题的引入

在以上各节的讨论中，对于未知参数 θ, 我们给出两个统计量 $\underline{\theta},\overline{\theta}$, 得到$\theta$的双侧置信区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$. 但在某些实际问题中, 例如, 对于设备、元件的寿命来说, 平均寿命长是我们希望的, 我们关心的是平均寿命θ的“下限”; 与之相反, 在考虑化学药品中杂质含量的均值 μ时, 我们常关心参数 μ 的“上限”. 这就引出了单侧置信区间的概念.

对于给定值 α (0<α<1) ,若由样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 确定的统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 对任意θ ∈Θ满足

$$P\{\theta > \underline{\theta}\}=1-\alpha$$

称随机区间$(\underline{\theta}, +\infty)$是 θ 的置信水平为 1-α 的<u>单侧置信区间</u>, $\underline{\theta}$ 称为 θ 的置信水平为 1-α 的<u>单侧置信下限</u>。

又若统计量$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 对任意θ ∈Θ满足

$$P\{\theta < \overline{\theta}\}=1-\alpha$$

称随机区间$(-\infty, \overline{\theta})$ 是 θ 的置信水平为 1-α 的<u>单侧置信区间</u>, $\overline{\theta}$ 称为θ的置信度为 1-α 的<u>单侧置信上限</u>。

例如 对于正态总体X, 若均值μ, 方差σ^2均为未知，设$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是一个样本，由

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \quad \Longrightarrow \quad P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

即

$$P\left\{\mu > \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

于是得到 μ 的一个置信度为 1-α 的单侧置信区间

$$\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), +\infty\right) \qquad \underline{\mu} = \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)$$

μ 的置信度为 1-α 的单侧置信下限为

又由 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

有 $P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\} = 1-\alpha$

即 $P\left\{\sigma^2 < \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$

于是得σ^2的一个置信度为$1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right) \qquad \overline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$$

σ^2的置信度为$1-\alpha$ 的单侧置信上限为

例 从一批灯泡中随机地取5只作寿命试验，测得寿命（以小时计）为 1050 1100 1120 1250 1280，设灯泡寿命服从正态分布。求灯泡寿命平均值的置信度为0.95的单侧置信下限.

解 现在 $1-\alpha=0.95, n=5, t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(4)=2.1318$

$$\bar{x}=1160, s^2=9950$$

公式得所求单侧置信下限为

$$\underline{\mu}=\bar{x}-\frac{\sqrt{9950}}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)=1065$$

作业

- **第七章习题16, 17, 20, 23, 24, 27**