

第一章 概率论的基本概念

§ 1.1 随机试验

§ 1.2 样本空间、随机事件

§ 1.3 频率与概率

§ 1.4 等可能概型(古典概型)

§ 1.5 条件概率

§ 1.6 独立性

为什么要学概率论与数理统计

- 后续课程基础：大数据分析、人工智能、信息论、信号处理等；
- 应用广泛：现代工程、科学、经济等领域应用与研究的重要数学工具。
 - 正如法国数学家拉普拉斯：“生活中最重要的问题，其中绝大多数在实质上只是概率的问题。”

实例 如何确定投资决策方向：某人有10万元现金，想投资于某项目，预估成功的机会为 30%，可得利润8万元，失败的机会为70%，将损失 2 万元。若存入银行，同期间的利率为5%，问是否作此项投资？



第一章 概率论的基本概念

引言：概率论是研究什么的？



确定现象

研究和揭示随机现象的统计规律性的数学学科

例：

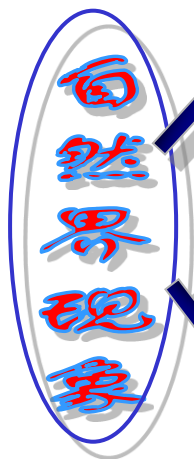
同一物体必然落向地面；
水加热到 100°C 必然沸腾；
异性电荷相吸引；
太阳从东边升起；... ..

随机现象

在试验或观察前无法预知出现什么结果

例：

抛一枚硬币，结果可能正(反)面朝上；
向同一目标射击，各次弹着点都不相同；
某地区的日平均气温；
掷一颗骰子，可能出现的点数；... ..



经过长期实践人们发现：尽管随机现象出现的结果是随机的，但当大量观察同类现象后，可以发现其确实存在**某种规律性**——随即现象的**统计规律性**。

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科；或者说是从数量化的角度来研究现实世界中的随机现象及其规律的一门应用数学学科。

本课程的基本内容：

概率论：研究**随机现象**的数量规律，统计学的数学基础

数理统计：利用大量重复试验研究**随机现象**的统计规律性

教学目的：熟悉研究随机现象的数学方法，掌握并熟练运用概率统计的基本概念和方法解决实际问题

概率论的起源

1654年, 一个名叫梅累 的骑士就 “两个赌徒约定赌若干局, 且谁先赢 c 局便算赢家, 若在一赌徒胜 a 局 ($a < c$), 另一赌徒胜 b 局 ($b < c$) 时便终止赌博, 问应如何分赌本” 为题求教于帕斯卡, 帕斯卡与费马通信讨论这一问题, 于1654 年共同建立了概率论的第一个基本概念——**数学期望**.



概率论的起源

- 随着时间推移，人们发现概率论应用领域广泛，跨越工程、科学、农业、商业、保险、医药和心理学等。
- 统计比概率论起源得更早，它主要处理收集、组织和表示数据资料。随着概率论的出现，人们明白了统计为何能够提取有用的结论。



- 许宝騄教授（1910—1970）是我国最早在概率论与数理统计方面达到世界先进水平的杰出数学家。1936年赴英国伦敦大学留学，学习数理统计，1938—1940年分别获得哲学博士和科学博士学位。抗日战争爆发后，他回到战火纷飞的祖国，执教于西南联合大学。1945年，应邀到美国加州大学等名校任教，1947年，他不顾美国大学的多方挽留，毅然回到祖国，之后一直在北京大学任教，为我国数理统计的发展做出了突出的贡献。

§ 1.1 随机试验

1. 试验: 在这里试验可指各种各样的科学试验, 也包括对事物特征的观察与检测等. 范围比较广泛.

2. 随机试验: 如果试验具有如下特点:

(1) **可重复性:** 在相同条件下可重复地进行;

(2) **可观察性:** 每次试验的结果不止一个, 但事先能明确试验的所有可能结果;

(3) **不确定性:** 进行一次试验之前, 不能确定哪一个结果会出现.

这种试验称为**随机试验**. 常用字母 E 表示.

注: 后面所提到的试验 (Experiment) 都是指随机试验.

★我们是通过研究随机试验来研究随机现象的。

例 E_1 :抛一枚硬币,观察正面H、反面T出现的情况.

E_2 :将一枚硬币抛掷三次,观察正面H、反面T出现的情况.

E_3 :将一枚硬币抛掷三次,观察反面出现的次数.

E_4 :抛掷一枚骰子,观察出现的点数.



E_5 :记录某城市120急救电话台(某固定)一昼夜内接到的呼叫次数.

E_6 :在一批灯泡中任意抽取一只,测试其寿命.



§ 1.1 随机试验：小结

1. 概率论是研究随机现象规律性的一门数学学科.

随机现象的特征：条件不能完全决定结果.

2. 随机现象是通过随机试验来研究的.

随机试验

- (1) 可以在相同的条件下重复地进行;
- (2) 每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果;
- (3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

§ 1.2 样本空间、随机事件

一、样本空间

- 1. 样本空间：**随机试验 E 的所有可能结果组成的集合.
称为 E 的**样本空间**，记为 S (或 Ω).
- 2. 样本点：**样本空间的元素，即 E 的每个可能结果，
称为**样本点**.

例 写出 § 1.1节中所列的试验 E_i 的样本空间

试验 E_1 ：抛一枚硬币,观察正面H、反面T出现的情况.

$$S_1 = \{H, T\} \quad (H \text{表示出现正面, } T \text{表示出现反面})$$

试验 E_2 ：将一枚硬币抛掷三次,观察正面H、反面T出现的情况.

$$S_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

试验E₃:将一枚硬币抛掷三次,观察反面出现的次数.

$$S_3=\{0,1,2,3\}$$

试验E₄:抛掷一枚骰子,观察出现的点数.

$$S_4=\{1,2,3,4,5,6\}$$



试验E₅:记录电话台(某固定)一分钟内接到的呼叫次数.

$$S_5=\{0,1,2,\dots\}$$

试验E₆:在一批灯泡中任意抽取一只,测试其寿命.

$$S_6=\{t \mid t \geq 0\} \quad (t \text{表示灯泡的寿命})$$



[注] 1. 试验不同, 对应的样本空间也不同.

2. 同一试验, 若试验目的不同, 则对应的样本空间也不同.

3. 建立样本空间，事实上就是建立随机现象的数学模型. 因此，一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

例如，只包含两个样本点的样本空间

$$S = \{H, T\},$$

它既可以作为抛掷硬币出现正面或出现反面的模型，也可以作为产品检验中合格与不合格的模型，又能用于排队现象中有人排队与无人排队的模型.

课堂练习

写出下列随机试验的样本空间.

同时掷三颗骰子, 记录三颗骰子之和.



所以在具体问题的研究中, 描述随机现象的第一步就是建立样本空间.

二、随机事件

1. **随机事件**：试验 E 的**样本空间 S 的子集**. 简称**事件**.
通常用字母 A, B, C 表示. (可测集)
2. **事件发生**：在每次试验中,当且仅当事件 A 中的一个**样本点出现时**, 称这一**事件 A 发生**.
3. **基本事件**：由一个样本点组成的单点集.
4. **必然事件**：**样本空间 S 称为必然事件**. 在每次试验中它总是发生的.
5. **不可能事件**：**空集 \emptyset 称为不可能事件**. 在每次试验中它都不发生.

例1 E_2 :抛硬币三次,观察正面H、反面T出现的情况.

事件 A_1 : “第一次出现的是T”, 即

$$A_1=\{THH, THT, TTH, TTT\}$$

事件 A_2 : “三次出现同一面”, 即

$$A_2=\{TTT, HHH\}$$

例2 试验E:“从4件产品中（2件正品，2件次品）任取两件，观察产品情况”。

事件 A : “两件都是正品”

B : “至少有一件次品”

例3 抛掷一枚骰子, 观察出现的点数.

骰子 “出现1点”, “出现2点”, ..., “出现6点”, “点数不大于4”, “点数为偶数” 等都为**随机事件**.

“出现1点”, “出现2点”, ..., “出现6点” 等都是**基本事件**.

“点数不大于6” 就是**必然事件**.

“点数大于6” 就是**不可能事件**.

注: 随机试验、样本空间与随机事件的关系

每一个随机试验相应地有一个样本空间,
样本空间的子集就是随机事件.

三、事件间的关系与事件的运算

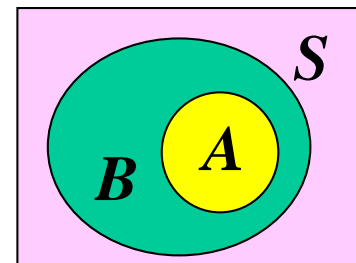
(一) 事件间的关系

1. 事件的包含 $A \subset B$: 称事件 B 包含事件 A , 或 A 是 B 的子事件.

其含义是: 事件 A 发生必导致事件 B 发生.

显然, 对于任何事件 A 有 $\emptyset \subset A \subset S$.

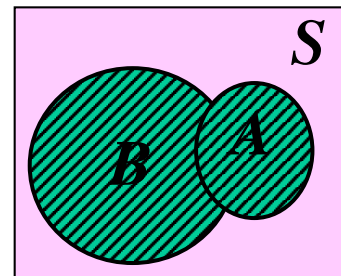
事件的相等 $A=B$: 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$.



2. 和事件: $A \cup B$ 称为事件 A 与 B 的和事件. 其含义是: 当且仅当事件 A, B 中至少有一个发生时, 事件 $A \cup B$ 发生.

类似地, (1) $\bigcup_{i=1}^n A_i$ ----- 事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的和事件;

(2) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ----- 可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的和.

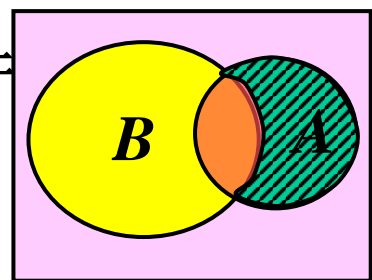
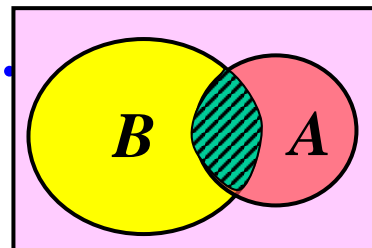


3. 积事件: $A \cap B$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件. 或记作 AB .

其含义是: 当且仅当 A, B 同时发生时, 事件 AB 发生.

类似地, $(1) \bigcap_{i=1}^n A_i$: 事件 A_1, A_2, \dots, A_n 积事件;

$(2) \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$: 事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 积事件



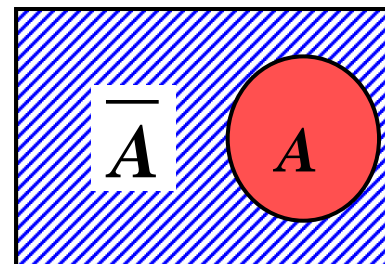
4. 差事件: $A - B$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件.

其含义是: 当且仅当 A 发生、 B 不发生时, 事件 $A - B$ 发生.

5. 互不相容 (互斥) 的事件: 若 $A \cap B = \emptyset$, 称事件 A 与 B 是互不相容事件, 或互斥事件, 指事件 A 与事件 B 不能同时发生.

6. 对立事件 (互逆事件): 若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与 B 互为逆事件. 又称 A 与 B 的互为对立事件.

A 的对立事件记作 \bar{A} . $\bar{A} = S - A$



实例 “长度不合格” 必然导致 “产品不合格”
所以事件 “产品不合格” **包含** 事件 “长度不合格”.

某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定, 因此 “产品不合格” 是 “长度不合格” 与 “直径不合格” 的**和事件**.

某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定, 因此 “产品合格” 是 “长度合格” 与 “直径合格” 的**积事件**.

“长度合格但直径不合格” 是 “长度合格” 与 “直径合格” 的**差事件**.

抛掷一枚骰子：



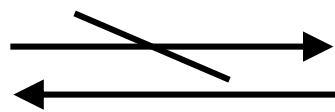
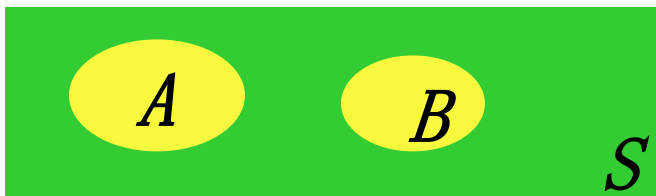
“骰子出现1点” $\xleftrightarrow{\text{互斥}}$ “骰子出现2点”

“骰子出现1点” $\xleftrightarrow{\text{对立}}$ “骰子不出现1点”

对立事件与互斥事件的区别

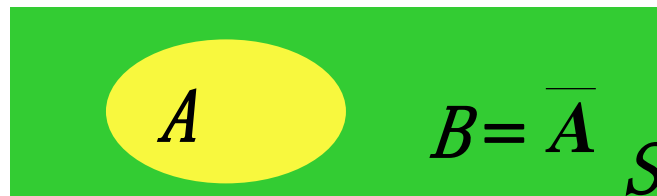
A 、 B 互斥

$$AB = \emptyset$$



A 、 B 对立

$$A \cup B = S \text{ 且 } AB = \emptyset$$



[注] (1) 事件之间的关系可用文氏图表示;

(2) 对于任意事件A, 显然

$$A\bar{A} = \emptyset, A \cup \bar{A} = S,$$

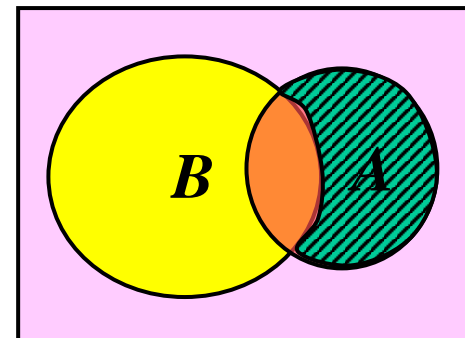
$$\bar{\bar{A}} = S - A, \bar{\bar{\bar{A}}} = A$$

(3) 基本事件都是互不相容的;

A与B-A也是互不相容的.

$$(4) B - A = B\bar{A} = B - AB$$

$$A \cup B = A \cup (B - A)$$



(二) 事件的运算法则

1. 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

2. 结合律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$;
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

3. 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

4. 德. 摩根律 (对偶律) :

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i, \quad \bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$$

5. 对必然事件的运算法则: $A \cup S = S, A \cap S = A$

6. 对不可能事件的运算法则: $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$.

7. 对同一事件的运算法则: $A \cup A = A, A \cap A = A$

例3 从大批产品中取产品检验,设事件 A_k 表示“第 k 次取到合格产品” ($k=1,2,3$), 用 A_k 表示下列各事件:

- (1) A 表示“三次都取到合格产品”;
- (2) B 表示“三次中至少有一次取到合格产品”;
- (3) C 表示“三次中恰有两次取到合格产品”;
- (4) D 表示“三次中最多有一次取到合格产品”.

解: (1) $A = A_1 A_2 A_3$

(2) $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ($B = \overline{\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}}$)

(3) $C = \overline{A_1} A_2 A_3 \cup A_1 \overline{A_2} A_3 \cup A_1 A_2 \overline{A_3}$

(4) $D = \overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} \cup A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3$
($D = \overline{A_1} \overline{A_2} \cup \overline{A_1} \overline{A_3} \cup \overline{A_2} \overline{A_3}$)

一个事件往往有多个等价的表达方式.

例5 化简下列事件:

$$(1) (\bar{A} \cup \bar{B})(\bar{A} \cup B) \quad (2) A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B}$$

解 (1) $(\bar{A} \cup \bar{B})(\bar{A} \cup B) \xlongequal{\text{分配律}} \bar{A} \cup (\bar{B}B)$
 $= \bar{A} \cup \emptyset = \bar{A}$

$$\begin{aligned} (2) \quad & A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B} \\ &= A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}\bar{B} \\ &= (A\bar{B} \cup \bar{A}\bar{B}) \cup (\bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B}) \\ &= (A \cup \bar{A})\bar{B} \cup \bar{A}(B \cup \bar{B}) \\ &= \bar{B} \cup \bar{A} = \overline{AB} \end{aligned}$$

课堂练习

从大批产品中取产品检验,设事件 A_k 表示“第 k 次取到合格产品” ($k=1,2,3$), 用 A_k 表示下列各事件:

- (1) 只有第一个零件是合格品 (B_1);
- (2) 三个零件中只有一个零件是合格品 (B_2);
- (3) 第一个是合格品, 但后两个零件中至少有一个次品 (B_3);
- (4) 三个零件中最多只有两个合格品 (B_4);
- (5) 三个零件都是次品 (B_5).

§ 1.2 样本空间、随机事件：小结

随机试验、样本空间与随机事件的关系

随机试验 \longrightarrow 样本空间 $\xrightarrow{\text{子集}}$ 随机事件

随机事件 {
基本事件
复合事件
必然事件
不可能事件

概率论与集合论之间的对应关系

记号	概率论	集合论
S	样本空间，必然事件	空间
\emptyset	不可能事件	空集
e	基本事件	元素
A	随机事件	子集
\overline{A}	A 的对立事件	A 的补集
$A \subset B$	A 出现必然导致 B 出现	A 是 B 的子集
$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	集合 A 与集合 B 相等

$A \cup B$	事件 A 与事件 B 的和	集合 A 与集合 B 的并集
AB	事件 A 与事件 B 的积	集合 A 与集合 B 的交集
$A - B$	事件 A 与事件 B 的差	A 与 B 两集合的差集
$AB = \emptyset$	事件 A 与 B 互不相容	A 与 B 两集合中没有相同的元素

作业

- 第一章习题1、2