第三章 多维随机变量及其分布

- ☞第一节 二维随机变量
- ☞第二节 边缘分布
- ☞第三节 条件分布
- ☞第四节 相互独立的随机变量
- ☞第五节 两个随机变量的函数的分布

§4.3 条件分布

问题 考虑一大群人, 从其中随机挑选一个人,分别用 X 和 Y 记此人的体重和身高, 则X 和 Y 都是随机变量, 他们都有自己的分布.

现在如果限制Y取值从1.5米到1.6米, 在这个限制下求X 的分布.

◆离散型随机变量的条件分布

定义1 设(X,Y)是二维随机变量，其分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},$$

对固定i，若 $p_{i\cdot}>0$

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, \qquad j=1,2,\cdots$$

-------在条件$X=x_i$下,随机变量Y的条件分布律.

对固定j，若 $p_{\cdot j}>0$

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \qquad i=1,2,\cdots$$

------在条件 $Y=y_j$下,随机变量X的条件分布律.

例1 将两封信随机往编号为1,2,3的三个信箱内投.以X表示第一个信箱内信的数目，Y表示第二个信箱内信的数目，求X和Y的联合分布律及条件分布律.

解 据题意(X,Y)的所有可能取值为(i, j), $i, j=0,1,2$

$Y \backslash X$	0	1	2	
0	1/9	2/9	1/9	4/9
1	2/9	2/9	0	4/9
2	1/9	0	0	1/9
	4/9	4/9	1/9	

条件分布律用表格表示:

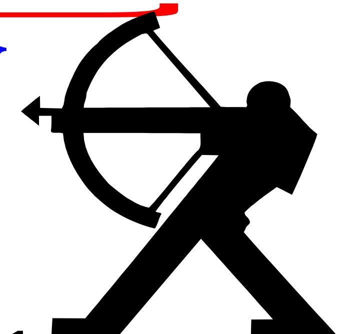
i	0	1	2
$P\{X=i\|Y=0\}$	1/4	1/2	1/4
$P\{X=i\|Y=1\}$	1/2	1/2	0
$P\{X=i\|Y=2\}$	1	0	0

同理可求$P\{Y=j|X=i\}$ $i, j=0,1,2$

例2 一射手进行射击,击中目标的概率为 $p(0 < p < 1)$, 射击直至击中目标两次为止. 设以 X 表示首次击中目标所进行的射击次数, 以 Y 表示总共进行的射击次数, 试求 X 和 Y 的联合分布律及条件分布律.

解 由题意知 X 取 m 且 Y 取 n 时, 有

$$P\{X=m,Y=n\}=p\cdot p\cdot \underbrace{(1-p)\cdot(1-p)\cdots(1-p)}_{(n-2)\text{个}}$$



即得 X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X=m,Y=n\}=p^2q^{n-2},$$

其中 $q=1-p, n=2,3,\cdots;\quad m=1,2,\cdots,n-1.$

现在求条件分布律.

$$P\{X=m \mid Y=n\},\quad P\{Y=n \mid X=m\},$$

由于 $$P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{\infty} P\{X=m,Y=n\}=\sum_{n=m+1}^{\infty} p^2 q^{n-2}$$

$$=p^2\sum_{n=m+1}^{\infty} q^{n-2}=\frac{p^2 q^{m-1}}{1-q}=pq^{m-1},$$

$$m=1,2,\cdots,$$

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1} P\{X=m,Y=n\}$$

$$=\sum_{m=1}^{n-1} p^2 q^{n-2}=(n-1)p^2 q^{n-2},\qquad n=2,3,\cdots.$$

是否满足:

1. $0 \le p_k \le 1$ 　可利用几何平均数≤算术平均数

2. $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ 　可利用幂级数求导证明

所以当 $n=2,3,\cdots$ 时,

$$P\{X=m|Y=n\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{Y=n\}}$$

$$=\frac{p^2q^{n-2}}{(n-1)p^2q^{n-2}}=\frac{1}{n-1},\quad m=1,2,\cdots,n-1.$$

当 $m=1,2,\cdots$ 时,

$$P\{Y=n|X=m\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{X=m\}}$$

$$=\frac{p^2q^{n-2}}{p\ q^{m-1}}=pq^{n-m-1},\qquad n=m+1,m+2,\cdots.$$

◆连续型随机变量的条件分布

定义２　给定y，设对于任意的 $\varepsilon>0$，

$$P\{y<Y\le y+\varepsilon\}>0$$

若对于任意实数x，极限

$$F_{X|Y}(x\mid y)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}P\{X\le x\mid y<Y\le y+\varepsilon\}$$

存在，则称此极限值为在条件Y=y下随机变量X的<u>**条件分布函数**</u>, 记为

$$F_{X|Y}(x\mid y)\quad 或\quad P\{X\le x\mid Y=y\}$$

类似可定义 $F_{Y|X}(y\mid x)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}P\{Y\le y\mid x<X\le x+\varepsilon\}$

注：注意区分条件分布和条件概率，由于 $P\{Y=y\}$ 可能为零(连续型时一定为零)，条件概率可能没有定义

$$
\begin{aligned}
F_{Y|X}(y \mid x) &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} P\{Y \le y \mid x < X \le x+\varepsilon\} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{P\{x < X \le x+\varepsilon, Y \le y\}}{P\{x < X \le x+\varepsilon\}} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{F(x+\varepsilon, y) - F(x, y)}{F_X(x+\varepsilon) - F_X(x)} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{[F(x+\varepsilon, y) - F(x, y)]/\varepsilon}{[F_X(x+\varepsilon) - F_X(x)]/\varepsilon} \\
&= \frac{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\dfrac{dF_X(x)}{dx}} = \frac{\int_{-\infty}^{y} f(x, v)\,dv}{f_X(x)}
\end{aligned}
$$

◆连续型随机变量的条件分布

定义2 设(X,Y)的概率密度$f(x, y)$，(X,Y)关于Y的边缘概率密度为 $f_Y(y)$. 若对固定的y，$f_Y(y)>0$，则称

$$f_{X|Y}(x|y) \triangleq \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$$

为在$Y=y$的条件下X的条件概率密度；

条件分布函数

若对固定的x，$f_X(x)>0$，则称

$$f_{Y|X}(y|x) \triangleq \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

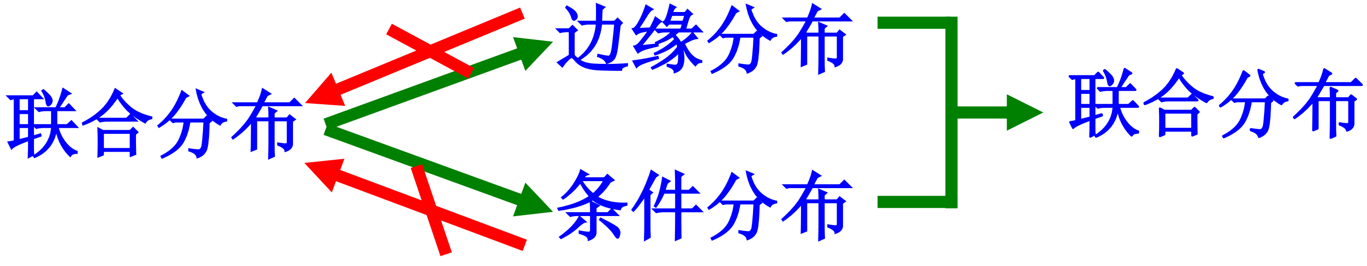
$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,v)}{f_X(x)}dv$$

为在$X=x$,的条件下Y的条件概率密度.

推导

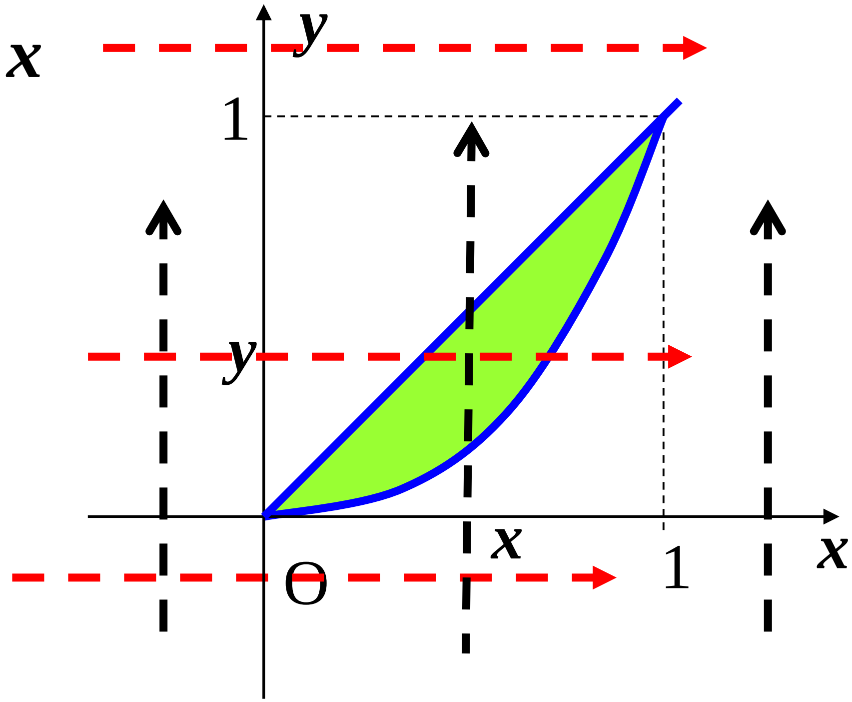
说明

联合分布、边缘分布、条件分布的关系如下：



例3 设(X,Y)的联合概率密度如下，求条件概率密度.

$$f(x,y)=\begin{cases}24xy, & x^2\le y\le x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



解 $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_{x^2}^{x}24xydy, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

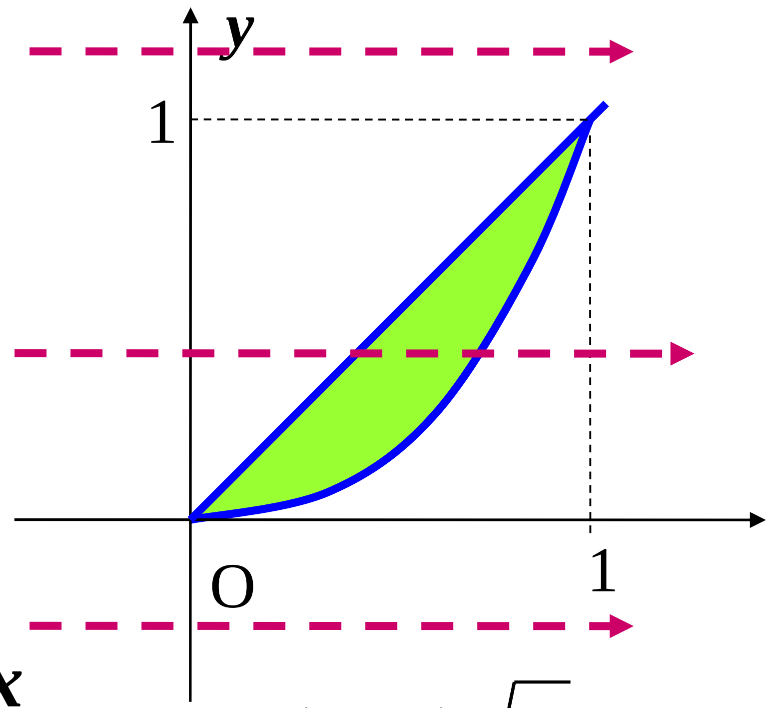
$$=\begin{cases}12x^3(1-x^2), & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

对于任意给定的值x $(0<x<1)$,在$X=x$条件下,有

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{2y}{x^2(1-x^2)}, & x^2<y<x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}12y(y-y^2), & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



对于y ($0<y<1$), 在$Y=y$条件下,有

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2x}{y-y^2}, & y\le x\le\sqrt{y}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

特别：在$Y=y=1/2$条件下,有

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}8x, & \dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

小　结

1. 设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，$p_{ij}(i,j=1,2\cdots)$ 为其联合分布律，在给定 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律为

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}$$

$$=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

在给定 $X = x_i$ 条件下随机变量Y 的条件分布律为

$$P\{Y = y_j \mid X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}}$$

$$= \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$$

其中$i, j = 1,2,\cdots.$

2. 设 (X,Y) 是二维连续型随机变量则有

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{x} [f(x,y)/f_Y(y)]\,\mathrm{d}x.$$

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{y} [f(x,y)/f_X(x)]\,\mathrm{d}y.$$

§4　相互独立的随机变量

定义 1 设$F(x, y)$,$F_X(x)$,$F_Y(y)$分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数．若对所有x, y，有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\} \cdot P\{Y \le y\}$$

$$\Longleftrightarrow F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

则称随机变量X与Y是**相互独立的**.

- **X与Y相互独立的条件等价于：**

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \qquad \text{（连续型）}$$

$$p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}, \quad i, j = 1, 2, \cdots \qquad \text{（离散型）}$$

例1 设X，Y相互独立，将其余数值填入表中空白处。

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i.}$
x_1	1/24	1/8	1/12	1/4
x_2	1/8	3/8	1/4	3/4
$p_{.j}$	1/6	1/2	1/3	1

两个重要结论：

- **定理** 设随机变量X与Y相互独立,令$U=h(X),V=g(Y)$ 其中$h(x),g(y)$为连续函数，则U与V也相互独立.
- 二维正态随机变量$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1{}^2,\sigma_2{}^2,\rho)$

  X与Y相互独立 $\Longleftrightarrow$ $\rho=0$

考察二维正态随机变量(X,Y).

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

$$f_X(x)f_Y(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

例2 学生甲,乙到达教室的时间均匀分布在7~9时,设两人到达的时刻相互独立，求两人到达教室的时间相差不超过5分钟的概率.

解 设X，Y分别表示甲，乙到达教室的时刻, 则

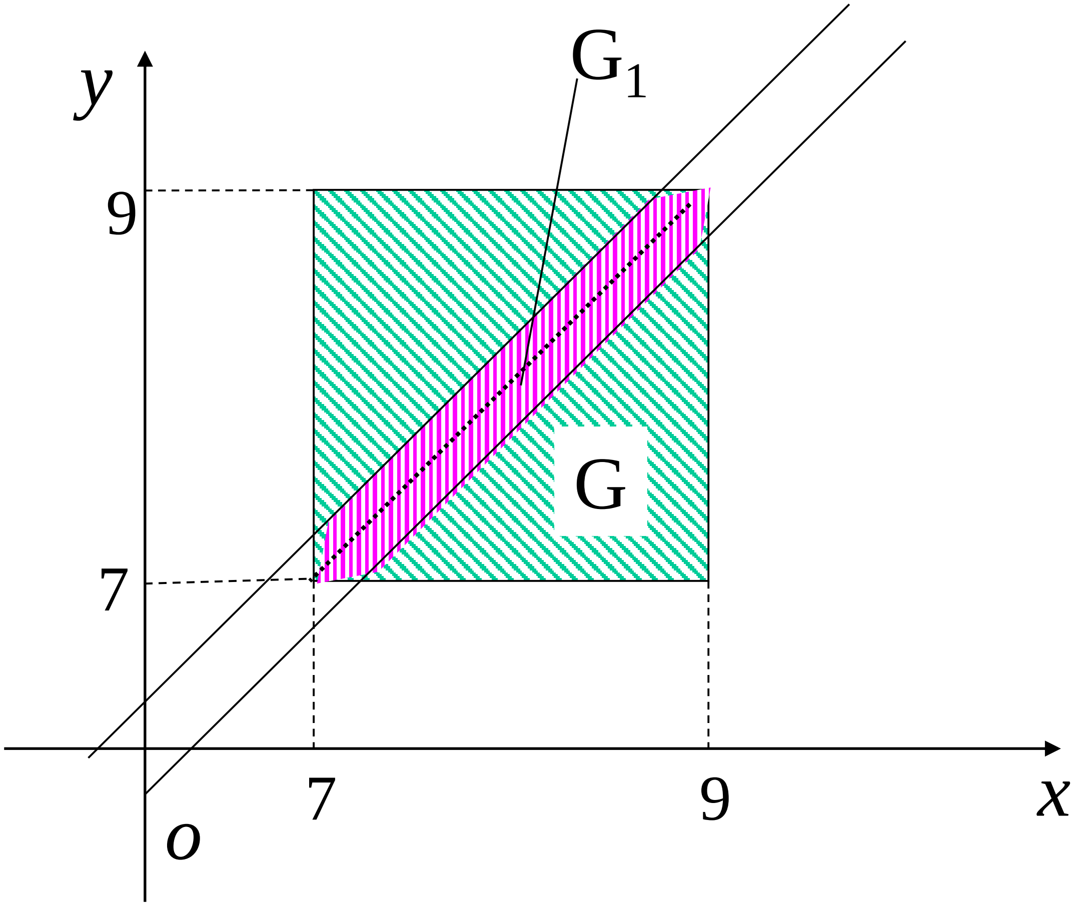
$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 7\le x\le 9,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 7\le y\le 9,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

图

由于X与Y相互独立，故(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}1/4, & (x,y)\in G\\ 0, & (x,y)\notin G\end{cases}$$

$$P\{|X-Y|\le\frac{1}{12}\}=\iint\limits_{G_1}f(x,y)dxdy=\frac{1}{4}\times G_1\text{的面积}=\frac{47}{576}$$



$$G_1\text{的面积} = 2\left[\frac{1}{2}\times 2\times 2 - \frac{1}{2}\times\left(2-\frac{1}{12}\right)^2\right] = \frac{47}{144}$$

推广：

设$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的分布函数为$F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$,

- 若对任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ， 均有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称 $X_1, X_2, \ldots, X_n$**相互独立**.

- 若对任意实数 $x_1, x_2, \ldots, x_m$；$y_1, y_2, \ldots, y_n$均有

$$F(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = F_1(x_1, \ldots, x_m)F_2(y_1, \ldots, y_n)$$

则称 $X_1, X_2, \ldots, X_n$与$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$**相互独立**.

- **定理** 设$(X_1, X_2, \ldots, X_m)$与$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ 相互独立，则 $X_i (i=1,2,\ldots, m)$与$Y_j\ (j=1,2,\ldots, n)$相互独立. 又若 h, g为连续函数，则$h(X_1, X_2, \ldots, X_m)$与$g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$**相互独立**.

小 结

1. 若离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=p_{ij},\ i,j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立 $\Longleftrightarrow$

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}.$$

2. 设连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$, 边缘概率密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$, 则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$

3. X 和 Y 相互独立, 则 $f(X)$ 和 $g(Y)$也相互独立.

4. 设 (X,Y) 是二维连续型随机变量, 且相互独立,

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x}[f(x,y)/f_Y(y)]\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,\mathrm{d}x=F_X(x)$$

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{y}[f(x,y)/f_X(x)]\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{y} f_Y(y)\,\mathrm{d}y=F_Y(y)$$

作业

- **第三章习题11, 13, 15, 17, 18**