第八章　假设检验

§8.1　假设检验

假设检验是统计推断的另一类重要组成部分. 它分为参数假设检验与非参数假设检验.

√ 参数假设检验是对总体分布函数中的未知参数提出某种假设，然后利用样本提供的信息对所提出的假设进行检验，根据检验的结果对所提出的假设作出拒绝或接受的判断.

非参数假设检验是对总体分布函数的形式或总体的性质提出某种假设进行的检验.

参数假设检验与参数估计是从不同的角度推断总体分布中的某些参数，参数检验解决定性问题，参数估计解决定量问题.

假设检验的基本原理

假设检验就是根据样本对所提出关于总体的假设作出判断: 是接受, 还是拒绝.

如何利用样本对一个具体的假设进行检验?

假设推断原理: “一个小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的” .

处理假设检验要做两件事:

1）确定一个检验统计量，它的值决定于样本值;

2）确定一个拒绝域（否定域），它是检验统计量的值的集合.

8.1.1 问题的提出

例1 设某车间用自动包装机装糖，生产中额定标准：每袋重量为0.5kg. 由长期经验知每袋重量服从正态分布$N(\mu, 0.015^2)$. 某日开工后，为检查包装机的工作状况，从包装好的糖中随机抽取9袋，称得净重(单位:kg)为:

0.499　0.514　0.508　0.514　0.498　0.515　0.513　0.524

试问该包装机工作是否正常?

由题意, 每袋糖重 $X\sim N(\mu, 0.015^2)$. 包装机正常工作是指 $X\sim N(0.5, 0.015^2)$. 若重 X不服从$N(0.5, 0.015^2)$，就认为包装机不正常工作. 换句话说，本题所要回答的问题是“$\mu=0.5$”成立吗?

现在的问题是，如何根据样本观察值来判断总体的均值μ是否等于μ_0（$\mu_0=0.5$）. 为此我们提出假设

$H_0: \mu=\mu_0=0.5$ ----------称为**原假设**或**零假设**,

$H_1: \mu\neq\mu_0$ ----------称为**备择假设**(**备选假设**).

于是问题转化为判断 H_0 是否成立. 我们要做的工作是根据样本提供的信息作出接受H_0 (拒绝H_1)还是拒绝H_0 (接受H_1)的判断.如果作出的判断是接受H_0，即认为包装机工作正常，否则认为包装机工作不正常。

8.1.2 假设检验的基本思想

假设检验的基本思想实质上是带有某种概率性质的反证法.

为了检验一个假设H_0是否正确, 首先假定该假设H_0正确, 然后根据抽到的样本对假设H_0作出接收或拒绝的决策.**如果样本观察值导致了不合理的现象发生, 就应拒绝假设H_0,否则应接受假设H_0.**

如何对一个假设进行判断（检验）呢？我们需要制定一个判断“**规则**”，使得根据每个样本值都能做出接受还是拒绝原假设的决定.

检验规则的制定常常是通过如下办法实现的：**从具体问题的直观背景出发，构造适用于所提出的假设的统计量（把样本所含的信息集中起来），并以此统计量来作判断（检验）.**

□ 判断“假设”的根据?------实际推断原理

由于要检验的假设涉及总体均值μ，故首先想到是否可借助样本均值这一统计量来进行判断.

由于$\bar{X}$是μ的无偏估计量, 如果H_0成立, 即$\mu=\mu_0$, 则$\bar{x}$与μ_0的偏差$|\bar{x}-\mu_0|$一般不应太大，若$|\bar{x}-\mu_0|$过分大，就怀疑H_0的正确性而拒绝H_0.

而衡量$|\bar{x}-\mu_0|$的大小可归结为衡量$\dfrac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}$的大小，

所以可适当选定一正数k, 使当观察值$\bar{x}$满足$\dfrac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq k$时，

就拒绝假设H_0，反之，若$\dfrac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} < k$，就接受假设$H_0$.

为了确定常数 k，我们考虑统计量，当H_0成立时，

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

当H_0成立时，$\left\{\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>z_{\alpha/2}\right\}$是概率为 α 的小概率事件.

由实际推断原理知，小概率事件在一次试验中实际上几乎是不可能发生的，而现在居然在一次抽样试验中发生了. 这表明“假设H_0成立”是错误的，因此我们拒绝H_0. 反之，我们没有理由拒绝H_0.

即：统计量$z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$进入$(-\infty,-z_{\alpha/2}]\cup[z_{\alpha/2},+\infty)$

区域, 就决策否定 H_0 ,这个区域就叫否定(拒绝)域.

对于例1: 取 $\alpha=0.05$, $z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$

$$\mu_0=0.5, n=9, \sigma_0^2=0.015, \bar{x}=0.511,$$

计算得: $|z|=2.2>1.96$, 从而拒绝H_0 ,即认为包装机工作不正常.

（“小概率事件”发生了）

□ 两类错误

由于抽样的随机性，由上述检验方法作出拒绝H_0或不拒绝H_0的判断，有可能犯以下两类错误：

第一类错误（弃真）：当H_0为真拒绝H_0（以真为假）

第二类错误（取伪）：当H_0为假接受H_0（以假为真）

显著水平

记：α =P{第一类错误}=P{拒绝H_0 | H_0真}

β =P{第二类错误}=P{接受H_0 | H_0伪}

当然,我们希望犯两类错误的概率都尽可能的小, 最好都为零．但当样本容量固定时是不可能的．在实际问题中, 通常的做法是: 先限制犯第一类错误的概率α，（显著性检验问题）即根据实际情况，指定一个较小的数α (如0.05,0.01等)，有了α的值, 就可以确定上述的数 k，从而可确定拒绝域.

假设检验的两类错误

真实情况 \ 所作判断	接受 H_0	拒绝 H_0
H_0 为真	正确	第一类错误 (弃真)
H_0 为假	第二类错误 (取伪)	正确

当样本容量 n 一定时，若减少犯第一类错误的概率，则犯第二类错误的概率往往增大.

若要使犯两类错误的概率都减小，除非增加样本容量.

总结：假设检验的基本思想：

(1) 假设检验的推理逻辑是一种**反证法**.

先给定一个统计假设，即原假设 (**零假设**):

$$H_0:\theta=\theta_0$$

并先假定它成立, 然后判断是接受还是拒绝它.

(2)判断“假设”的根据是“**实际推断原理**”；

(3) 建立一个检验法的关键:

选一个合适的统计量，依此构造一个小概率事件

参数的假设检验问题的基本步骤:

1. 根据实际问题的要求, 提出原假设H_0 及备择假设 H_1;

2. 确定**检验统计量**,并在原假设H_0成立的前提下导出统计量的分布;

3. 给定显著水平 α , 根据统计量的分布求出**拒绝域**;

4. **决策**: 将样本值代入统计量,若统计量的值落入拒绝域,则拒绝 H_0 ,否则接受H_0 .

说明：关于检验标准(显著水平)α:

(1) 一般说来,我们给定的假设H_0 是经过周密调查和考虑的, 所以否定H_0 要谨慎, 这就要求α取得要小些,反过来,也表明小概率α取的越小,一旦否定H_0 , 就越有说服力.

(2)**检验标准α**可以取值不同, 就决定着不同的否定域, 因此对于同一组样本值 $(x_1,x_2,\ldots x_n)$ 来说,可以得到相反的决策.

(3)只对犯第I类错误的概率加以控制，而不考虑犯第II类错误的检验问题, 称为**显著性检验问题**.

例1 设某车间用自动包装机装糖，生产中额定标准：每袋重量为0.5kg. 由长期经验知每袋重量服从正态分布$N(\mu, 0.015^2)$. 某日开工后，为检查包装机的工作状况，从包装好的糖中随机抽取9袋，称得净重(单位:kg)为:

0.497 0.506 0.518 0.524 0.498 0.511 0.520 0.515 0.512

试问该包装机工作是否正常？(设显著水平为$\alpha=0.05$)

解 (1)建立假设 $H_0: \mu=\mu_0=0.5,\ H_1: \mu\neq\mu_0;$

(2) 取检验统计量 $z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

(3)拒绝域为: $|z|\geq z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$ （$\alpha=0.05$）

(4)计算得 $|z|=\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=2.2>1.96$

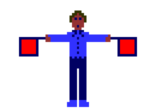
故应拒绝H_0，即认为包装机工作不正常.

注　**关于零假设与备择假设的选取**

在控制犯第一类错误的概率α的原则下，使得采取拒绝H_0的决策变得较慎重，即H_0得到特别的保护.

因而，通常把有把握的、有经验的、默认的结论作为原假设，或者尽可能使后果严重的错误成为第一类错误.

双边备择假设与双边假设检验



在 $H_0: \mu = \mu_0$ 和 $H_1: \mu \neq \mu_0$ 中，备择假设 H_1 表示 μ可能大于μ_0，也可能小于μ_0，称为双边备择假设，形如 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$ 的假设检验称为双边假设检验.

•单边假设检验: $H_0:\mu\le\mu_0, H_1:\mu>\mu_0$ 右边检验

$H_0:\mu\ge\mu_0, H_1:\mu<\mu_0$ 左边检验

下面讨论单边检验的拒绝域

设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2为已知, $x_1, x_2, \ldots x_n$ 是来自X的样本. 给定显著性水平α. 求下面检验问题(右边检验) 的拒绝域.

$$H_0:\mu\le\mu_0, H_1:\mu>\mu_0$$

当H_1为真时，观察值 $\bar{x}$往往偏大，故拒绝域的形式为: $\bar{x}\ge k$.

下面来确定常数k:

$$P\{H_0\text{真拒绝}H_0\}=P_{\mu\in H_0}\{\bar{X}\ge k\}=P_{\mu\in H_0}\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\ge\frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\}$$

$$\le P_{\mu\in H_0}\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\ge\frac{k-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\}\overset{\text{令}}{=}\alpha\Rightarrow \boxed{z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\ge z_\alpha}$$

一个有用的结论

当显著性水平均为α时,

比较正态总体$N(\mu,\sigma^2)$在方差σ^2已知时，对均值μ的两种检验问题

$H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu>\mu_0$ 和 $H_0:\mu\le\mu_0, H_1:\mu>\mu_0$,

尽管原假设H_0的形式不同,实际意义也不同，但对于相同的显著性水平 α, 它们的拒绝域相同.

第二类形式的检验问题可归结为第一类形式讨论.

同样的方法可得

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ 为已知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自x的样本. 给定显著性水平α．求检验问题（左边检验）：

$$H_0:\mu \ge \mu_0, H_1:\mu < \mu_0$$

的拒绝域为 $z \le -z_\alpha$

例 2 某工厂生产的固体燃料推进器的燃烧率服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2), \mu = 40cm/s, \sigma = 2cm/s$. 现在用新方法生产了一批推进器. 从中随机取 n=25只, 测得燃烧率的样本均值为 $\bar{x} = 41.25 cm/s$. 设在新方法下总体均方差仍为 $2cm/s$, 问这批推进器的燃烧率是否较以往生产的推进器的燃烧率有显著的提高? 取显著性水平 $\alpha = 0.05$.

解: (1)按题意需检验假设

$$H_0 : \mu \le \mu_0 = 40 \qquad \text{(假设新方法没有提高燃烧率)}$$

$$H_1 : \mu > \mu_0 \qquad \text{(假设新方法提高了燃烧率)}$$

(2)检验统计量: $z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ $\quad$ (n=25, σ=2)

(3)这是一个右边检验问题, 其拒绝域为 $z \ge z_{0.05} = 1.645$

(4)经计算 $z = \dfrac{41.25 - 40}{2/\sqrt{25}} = 3.125 > 1.645$

故拒绝 H_0 接受 H_1 , 认为这批推进器的燃烧率有显著的提高.

补充：设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自正态总体 $N(\mu, 9)$ 的一个样本，其中μ为未知参数，检验 $H_0: \mu = \mu_0$ $(H_1: \mu \neq \mu_0)$, 拒绝域 $W_1 = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid |\bar{x} - \mu_0| \geq C\}$,

(1) 确定常数 C, 使显著性水平为 0.05;

(2) 在固定样本容量 $n = 25$ 的情况下, 分析犯两类错误的概率 α 和 β 之间的关系.

解　(1) 若H_0成立，则 $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{3} \sim N(0,1)$,

$$P\{(X_1, \cdots, X_n) \in W_1)\} = P\{|\bar{X} - \mu_0| \geq C\}$$

$$= P\left(\frac{\sqrt{n}\left|\overline{X}-\mu_0\right|}{3} \geq \frac{\sqrt{n}C}{3}\right) = 2\left(1-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}C}{3}\right)\right) = 0.05,$$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}C}{3}\right) = 0.975, \qquad \frac{\sqrt{n}C}{3} = 1.96, \qquad C = \frac{5.88}{\sqrt{n}};$$

(2) $n = 25$时，若H_0成立,

$$\alpha = P((X_1, \cdots X_n) \in W_1)$$

$$= 2\left(1-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}C}{3}\right)\right) = 2\left(1-\Phi\left(\frac{5C}{3}\right)\right).$$

若H_0不成立，不妨假设 $\mu = \mu_1 \neq \mu_0$,

$$\beta = P((X_1, \cdots X_n) \overline{\in} W_1) = P(\left|\overline{X} - \mu_0\right| < C)$$
$$= P(-C + \mu_0 < \overline{X} < C + \mu_0)$$
$$= P\left(\frac{5}{3}(-C + \mu_0 - \mu) < \frac{5}{3}(\overline{X} - \mu) < \frac{5}{3}(C + \mu_0 - \mu)\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{5}{3}(C + \mu_0 - \mu_1)\right) - \Phi\left(\frac{5}{3}(-C + \mu_0 - \mu_1)\right),$$

当C 较小时, α 较大，β 较小;

当C 较大时, α 较小，β 较大 .

思考: 若 C 固定时, 样本容量 n 增大, α 如何变化?

若 α 固定时, 样本容量 n 增大, β 如何变化?

小结

假设检验的基本原理、相关概念和一般步骤.

假设检验的两类错误

真实情况（未知）	所作决策	
	接受 H_0	拒绝 H_0
H_0 为真	正确	犯第I类错误
H_0 不真	犯第II类错误	正确

作业

- 第八章习题3