第四章 随机变量的数字特征

第一节 数学期望

第二节 方差

第三节 协方差及相关系数

第四节 矩、协方差矩阵

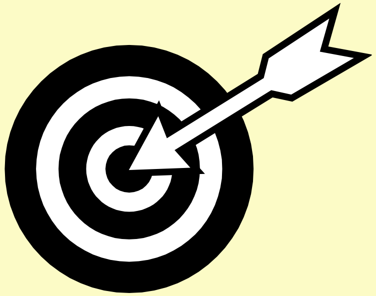
前面讨论了随机变量的分布函数，从中知道随机变量的分布函数能完整地描述随机变量的统计规律，但分布函数一般较难确定。

在许多实际问题中，人们并不需要去全面考察随机变量的变化情况，而只需要知道它的数字特征即可。

§4.1 数学期望

引例 射击问题

设某射击手在同样的条件下,瞄准靶子相继射击90次(命中的环数是一个随机变量).射中次数记录如下



命中环数 k	0	1	2	3	4	5
命中次数 n_k	2	13	15	10	20	30
频率 $\frac{n_k}{n}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{13}{90}$	$\frac{15}{90}$	$\frac{10}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{30}{90}$

试问: 该射手每次射击平均命中靶多少环?

解 平均射中环数 $= \dfrac{\textbf{射中靶的总环数}}{\textbf{射击次数}}$

$$= \frac{0\times2+1\times13+2\times15+3\times10+4\times20+5\times30}{90}$$

$$= 0\times\frac{2}{\underline{90}}+1\times\frac{13}{\underline{90}}+2\times\frac{15}{\underline{90}}+3\times\frac{10}{\underline{90}}+4\times\frac{20}{\underline{90}}$$

$$+5\times\frac{30}{\underline{90}}$$

$$= \sum_{k=0}^{5} k\cdot\frac{n_k}{n} = 3.37.$$

设射手命中的环数为随机变量 Y.

$\boxed{\text{平均射中环数}} = \sum_{k=0}^{5} k \cdot \boxed{\frac{n_k}{n}}$

随机波动

频率随机波动

“平均射中环数”的稳定值$=$?

$$\sum_{k=0}^{5} k \cdot \frac{n_k}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \sum_{k=0}^{5} k \cdot p_k$$

随机波动 → 稳定值

“平均射中环数”等于

射中环数的可能值与其概率之积的累加

引例 设甲、乙两射手在同样条件下进行射击，其命中环数是一随机变量，分别记为X、Y，并具有如下分布律

X	10	9	8	7
P_k	0.6	0.1	0.2	0.1

Y	10	9	8	7
P_k	0.4	0.3	0.1	0.2

试问甲、乙两射手的射击水平哪个较高？

解

$$\frac{1}{100}(10\times 60+9\times 10+8\times 20+7\times 10)$$

$$=10\times 0.6+9\times 0.1+8\times 0.2+7\times 0.1$$

$$=9.2 \text{（环）}$$

$$\frac{1}{100}(10\times 40+9\times 30+8\times 10+7\times 20)$$

$$=10\times 0.4+9\times 0.3+8\times 0.1+7\times 0.2$$

$$=8.9(\text{环})$$

由此可见，射手甲的射击水平略高与射手乙的射击水平。

引例 如何确定投资决策方向?

某人有10万元现金，想投资于某项目，预估成功的机会为 30%，可得利润8万元， 失败的机会为70%，将损失 2 万元. 若存入银行，同期间的利率为5%， 问是否作此项投资?

解 设 X 为投资利润, 则

X	8	-2
p	0.3	0.7

$$E(X)=8\times 0.3-2\times 0.7=1(\text{万元}),$$

存入银行的利息:

$$10\times 5\%=0.5(\text{万元}),$$ 故应选择投资.

定义1 设离散型随机变量X的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称此级数的和为随机变量X的数学期望.记为$E(X)$. 即 $\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k}$

定义2 连续型随机变量X的概率密度为 $f(x)$, 若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ 绝对收敛，则称此积分值为随机变量X的数学期望，记为$E(X)$, 即 $\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx}$

[注] 数学期望简称为期望，又称为均值.

关于定义的几点说明

(1) $E(X)$是一个实数 , 而非变量, 它是一种加权平均, 与一般的平均值不同, 它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的真正的平均值 , 也称均值.

(2) 级数的绝对收敛性保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变 , 之所以这样要求是因为数学期望是反映随机变量X 取可能值的平均值, 它不应随可能值的排列次序而改变.

几个重要离散型随机变量的期望

1) **0-1分布的数学期望**

X	1	0
P	p	$1-p$

$\Rightarrow$ $E(X) = 1*p+0*(1-p) = p$

2) 二项分布$b(n, p)$的数学期望

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad k=0,1,\ldots n$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k}(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}$$

$$\underline{\underline{令 l=k-1}}\ np\sum_{l=0}^{n-1}C_{n-1}^{l}p^{l}(1-p)^{n-1-l}$$

$$=np$$

3) 设$X\sim\pi(\lambda)$, 求 $E(X)=\lambda$

解 X的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots,$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}k\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

4) 设$X\sim U(a, b)$, 求 $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$

解 X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$$

5) 指数分布的数学期望

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^{\infty}\frac{x}{\theta}e^{-x/\theta}\mathrm{d}x=-\int_0^{\infty}x\mathrm{d}e^{-x/\theta}$$

$$=-xe^{-x/\theta}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-x/\theta}\mathrm{d}x=\theta$$

6) 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$的数学期望

$$X \sim f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x$$

$$\overset{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma t + \mu}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

$$= \mu$$

思考：是否所有随机变量都存在数学期望？

例 设随机变量 X 密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$　　$-\infty<x<+\infty$,

试证 $E(X)$不存在.

柯西分布

证明　$\because \int_{-\infty}^{\infty}|x|\,f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}dx$

$$=2\int_0^{\infty}\frac{x}{\pi(1+x^2)}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\ln(1+x^2)\ =\ +\infty,$$

$\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)\mathrm{d}x$　不绝对收敛

$\therefore\ E(X)$不存在.

例1 设有5个相互独立的电子元件,其寿命X_k (k=1,2,..,5)均服从同一指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad(\theta>0)$$

求将这5个元件(1)串联，(2)并联组成系统的平均寿命.

解 X_k的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

(1) 串联时系统寿命 $N=\min(X_1,X_2,\cdots,X_5)$ ，

其分布函数为

$$F_{\min}(x)=1-[1-F(x)]^5=\begin{cases}1-e^{-\frac{5x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

$$f_{\min}(x)=\begin{cases}\frac{5}{\theta}e^{-\frac{5x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

$$E(N)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f_{\min}(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\frac{5}{\theta}e^{-\frac{5x}{\theta}}dx=\frac{\theta}{5}$$

例2 某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式.记使用寿命为X(以年记), 规定:

$X \le 1$, 一台付款1500元; $1 < X \le 2$, 一台付款2000元;

$2 < X \le 3$, 一台付款2500元; $X > 3$, 一台付款3000元.

设寿命X服从指数分布, 概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

试求该商店一台电器收费Y的数学期望.

解 一台收费Y的分布律

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

$$P\{X \le 1\} = \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = 1 - e^{-0.1} = 0.0952,$$

$$P\{1 < X \le 2\} = \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = e^{-0.1} - e^{-0.2} = 0.0861,$$

$$P\{2 < X \le 3\} = \int_2^3 \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = e^{-0.2} - e^{-0.3} = 0.0779,$$

$$P\{3 < X\} = \int_3^\infty \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = e^{-0.3} = 0.7408,$$

$\Rightarrow$ $E(Y)=2732.15$

◆随机变量的函数的数学期望

定理1 设Y是随机变量X的函数：$Y=g(X)$ (g为连续函数)

(1) X(离散型)的分布律为：$p_k=P\{X=x_k\},k=1,2,\cdots$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则

$$\boxed{E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k,}$$

(2) X(连续型)的概率密度为 $f(x)$,若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛，则

$$\boxed{E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx}$$

证明:设 X 是连续型随机变量,且 $y=g(x)$ 满足第二章第五节中定理的条件.

随机变量 $Y=g(X)$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)]\,|h'(y)|\,\mathrm{d}y.$$

当 $h'(y)$ 恒 >0 时,

$$E(Y)=\int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)]h'(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

当 $h'(y)$ 恒 <0 时,

$$E(Y)=-\int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)]h'(y)\mathrm{d}y$$

$$=-\int_{\infty}^{-\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注：由此可知求$E[g(X)]$不需要先求出$g(X)$的分布

例3 设风速V在$(0,a)$上服从均匀分布，飞机机翼受到的压力 $W=kV^2$, $(k$为常数), 求W的数学期望.

解 风速V的概率密度为

$$f(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & 0<v<a\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$E(W)=E(kV^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}kv^2 f(v)dv$$

$$=\int_0^a kv^2\frac{1}{a}dv=\frac{1}{3}ka^2$$

例4 国际市场每年对我国某种商品的需求量X（吨）是一随机变量，它服从(a, b)上的均匀分布．设每售出该商品一吨可以为国家创汇 s万元，但若销不出去而压于仓库，则每吨亏损 l 万元，问应组织多少货源才使国家收益的期望值最大?

解 设组织货源为t（吨）,由题意a≤t ≤b,

收益Y是X的函数：

$$Y = g(X) = \begin{cases} sX-(t-X)l, & a < X \le t \\ st, & t < X \le b \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_a^b g(x) f(x) dx$$

$$= \int_a^t [x-(t-x)l] \frac{1}{b-a} dx + \int_t^b st \frac{1}{b-a} dx$$

$$= \frac{1}{2(b-a)} [-(l+s)t^2 + 2(la+sb)t - (l+s)a^2]$$

令 $\dfrac{d}{dt} E(Y) = 0$

$$-(l+s)t + (la+sb) = 0$$

得: $t = \dfrac{la+sb}{l+s}$

二维随机变量函数的数学期望

定理推广： 设 $Z=g(X,Y)$（g为二元连续函数),

(3) 若(X,Y)是离散型，其分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1,2,\cdots,$$ 则

$$\boxed{E(Z) = E[g(X,Y)] = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j)p_{ij}}$$

(4) 若(X,Y)是连续型，其概率密度为$f(x,y)$，则

$$\boxed{E(Z) = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy}$$

例5 设(X,Y)的联合分布律为

Y \ X	1	2
1	0.4	0.2
2	0.3	0.1

求 $Z_1 = XY^2, Z_2 = X + Y$ 的数学期望.

解 (X,Y)的取值及对应的概率如下表:

(X,Y)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
XY^2	1	4	2	8
$X+Y$	2	3	3	4
p_k	0.4	0.3	0.2	0.1

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}_1) = \mathrm{E}(XY^2) = 1\times 0.4 + 4\times 0.3 + 2\times 0.2 + 8\times 0.1 = 2.8$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}_2) = \mathrm{E}(X+Y) = 2\times 0.4 + 3\times 0.3 + 3\times 0.2 + 4\times 0.1 = 2.7$$

结论:

(1) 若(X,Y)是离散型，其分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots \text{则}$$

$$\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i p_{ij}}$$

$$\boxed{E(Y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} y_j p_{ij}}$$

(2) 若(X,Y)是连续型，其概率密度为$f(x,y)$，则

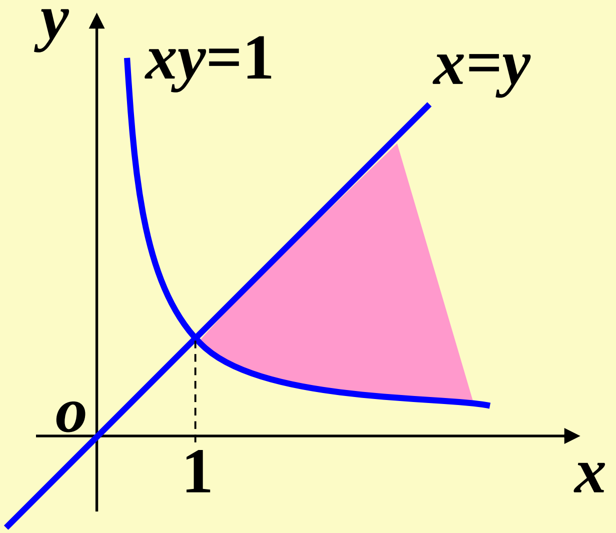
$$\boxed{E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)dxdy}$$

$$\boxed{E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y)dxdy}$$

例6 设(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^3y^2}, & \dfrac{1}{x}<y<x, x>1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求数学期望$E(Y)$，$E(1/XY)$.



解 $$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy=\int_{1}^{+\infty}dx\int_{1/x}^{x}\frac{3}{2x^3y}dy=\frac{3}{4}$$

$$E\left(\frac{1}{XY}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{xy}f(x,y)dxdy=\int_{1}^{+\infty}dx\int_{1/x}^{x}\frac{3}{2x^4y^3}dy=\frac{3}{5}$$

➢数学期望的性质:

假设以下随机变量的数学期望均存在.

1. $E(C)=C$, （C是常数）

2. $E(CX)=CE(X)$, （C是常数）

3. $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$,

推广： $$E\left[\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i),$$

其中$c_i, i=1,2,\cdots,n$为常系数。

4. 设X与Y相互独立, 则 $E(XY)=E(X)E(Y)$

推广： $$E\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right]=\prod_{i=1}^{n} E(X_i),$$

其中X_i之间相互独立。

证 (仅对(X,Y)为连续型随机变量证明性质3,4)

设(X,Y)的概率密度为f（x,y），其边缘概率密度分别为f_X（x,y），f_Y（x,y），则

$$E(X\pm Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x\pm y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy\pm\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx\pm\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dx=E(X)\pm E(Y)$$

又若X与Y相互独立，则 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(xy)f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_X(x)f_Y(y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=E(X)\cdot E(Y)$$

说明

连续型随机变量 X 的数学期望与离散型随机变量数学期望的性质类似.

例 求二项分布的数学期望

设：$X\sim b(n,p)$， X表示n重伯努利试验中的“成功”次数.

若设 $$X_i=\begin{cases}1 & \text{如第}i\text{次试验成功}\\ 0 & \text{如第}i\text{次试验失败}\end{cases}\qquad i=1,2,\ldots,n$$

则 $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$

因为 $P\{X_i=1\}=p$, $P\{X_i=0\}=1-p$

$$E(X_i)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$$

所以 $E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np$

例7 一民航机场的送客车，载有20名乘客自机场开出，旅客有10个车站可以下车，如到达一站没旅客下车就不停车．假设每位旅客在各站下车是等可能的，且旅客之间在哪一站下车相互独立．以X表示停车次数，求E(X).

解 引入随机变量 $X_i=\begin{cases}0, & \text{第}i\text{站无人下车,}\\ 1, & \text{第}i\text{站有人下车,}\end{cases} \quad i=1,2,\cdots,10$

则 $\mathbf{X}=\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2+\cdots+\mathbf{X}_{10}$

由题意 $P(X_i=0)=(\frac{9}{10})^{20}, P(X_i=1)=1-(\frac{9}{10})^{20}$

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_i)=1-0.9^{20}, \quad i=1,2,\cdots,10$$

$$E(X)=E(X_1+\cdots X_{10})=10\times(1-0.9^{20})\approx 8.784$$

[注] 这种引进新的随机变量，将原随机变量分解成有限个随机变量之和,再求数字特征的方法具有一定的普遍意义.

例8 设X,Y相互独立, 分别服从参数为α, β的指数分布

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{x}{\alpha}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\beta}e^{-\frac{y}{\beta}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

试求 $E[e^{-(cX+dY)}],(c>0,d>0)$.

解 由于X与Y相互独立，则 $e^{-(cX)}$ 与 $e^{-(dY)}$ 也相互独立，

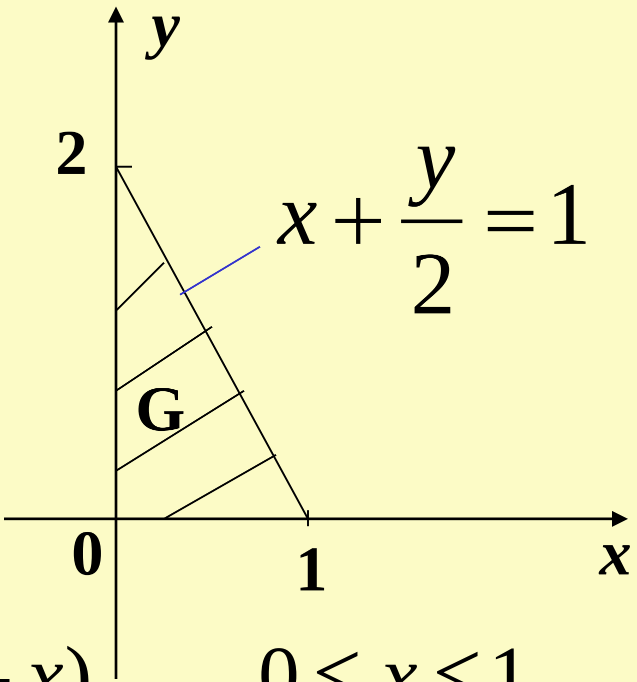
$$E[e^{-(cX+dY)}]=E(e^{-cX})E(e^{-dY})$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-cx}\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{x}{\alpha}}dx\cdot\int_0^{+\infty}e^{-dy}\frac{1}{\beta}e^{-\frac{y}{\beta}}dy$$

$$=\frac{1}{(c\alpha+1)(d\beta+1)}$$

练习： 设(X,Y)服从G上的均匀分布（如图）

求X、Y及XY的数学期望



解法一：由已知得

$$f(x,y)=\begin{cases}1\ , & (x,y)\in G\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}2(1-x)\ , & 0\le x\le 1\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 2x(1-x)dx=\frac{1}{3}$$

解法二：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}xdy$$

$$=\int_0^1 2x(1-x)dx=\frac{1}{3}$$

同理

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}ydy$$

$$=\frac{2}{3}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}xydy$$

$$=\frac{1}{6}$$

例 设甲、乙两射手在同样条件下进行射击，其命中环数分别用X、Y表示，分布律分别为

X	10	9	8	7
p	0.5	0.1	0.2	0.2

Y	10	9	8	7
p	0.4	0.3	0.1	0.2

试评定甲、乙的技术水平.

解 甲乙平均命中环数为 E(X)=8.9 (环)，E(Y)=8.9 (环)

从平均水平看，甲、乙的技术水平不相上下，

进一步考虑他们射击的稳定性

小结

1. 数学期望是一个实数,而非变量,它是一种加权平均,与一般的平均值不同,它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的真正的平均值.

2. 数学期望的性质

1° $E(C)=C.$

2° $E(CX)=CE(X).$

3° $E(X+Y)=E(X)+E(Y).$

4° X和Y相互独立$\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y).$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

$$E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k,$$

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

$$E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$$

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i p_{ij}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)dxdy$$

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} y_j p_{ij}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y)dxdy$$

作业

- **第四章习题2, 4(1), 5, 6(2), 8(3), 9(1), 12, 14**