

第六章

线性反馈系统的稳定性

目录

- 6.1 稳定性的概念
- 6.2 *Routh-Hurwitz*稳定性判据
- 6.3 反馈控制系统相对稳定性
- 6.4 状态变量系统稳定性
- 6.5 设计实例
- 6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性
- 6.7 系列设计案例：磁盘驱动器读取系统
- 6.8 总结

6.1 稳定性的概念

- 稳定是对自动控制系统最重要、最基本的要求
- 稳定性stability是控制工程、控制理论最重要的问题
- 分析、设计控制系统时，首先要考虑稳定性
- 稳定系统，受到扰动后，能在平衡态继续工作
- 不稳定系统，受到外部或内部扰动时，系统偏离原来的平衡工作点，并随时间推移而发散，即使扰动消失后，也不可能恢复原来的平衡状态
- 李雅普诺夫（Lyapunov）是常微分方程运动稳定性理论的创始人，**1892**年他的博士论文《运动稳定性的一般问题》奠定了常微分方程稳定性的理论基础

6.1 稳定性的概念

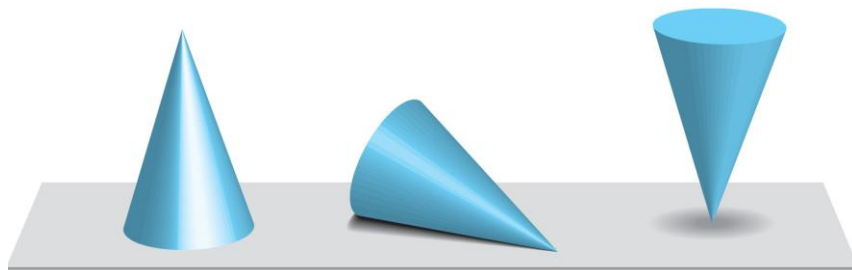
- ◆ 李雅普诺夫（1857-1918），俄国著名的数学家、力学家
- ◆ 19世纪以前，俄国的数学是相当落后的，直到切比雪夫创立了圣彼得堡数学学派以后，才使得俄罗斯数学摆脱了落后境地而开始走向世界前列。
- ◆ 李雅普诺夫与师兄马尔科夫是切比雪夫的两个最著名最有才华的学生，他们都是彼得堡数学学派的重要成员。
- ◆ 1892年，他的博士论文《论运动稳定性的一般问题》在莫斯科大学通过。李雅普诺夫在常微分方程定性理论和天体力学方面的工作使他赢得了国际声誉。
- ◆ 李雅普诺夫稳定性李雅普诺夫定理、李雅普诺夫函数、李雅普诺夫变换、李雅普诺夫曲面、李雅普诺夫球面、李雅普诺夫维数、李雅普诺夫稳定性等。



李雅普诺夫
(1857-1918)

6.1 稳定性的概念

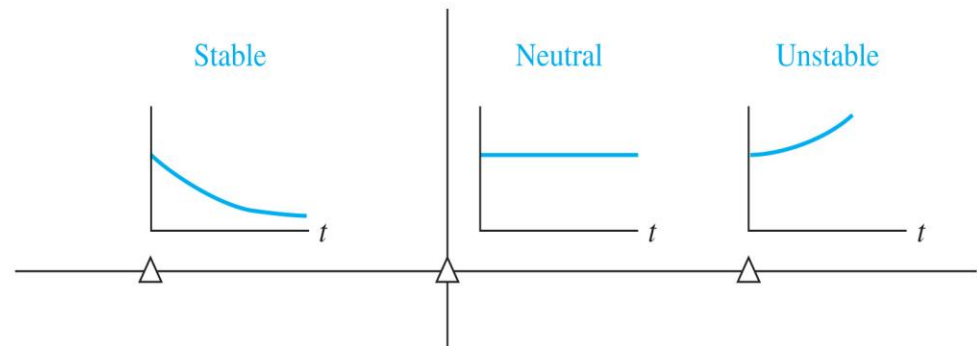
- 稳定stable、不稳定unstable、临界稳定critical stable
- 绝对稳定性absolute stability: 输入有界输出有界的系统，通常去掉绝对，称为稳定系统。系统特征根均在 s 左半平面
- 相对稳定性relative stability: 如果系统特征根均在 s 左半平面，且和虚轴有一段距离，则系统有一定的稳定裕量



稳定

临界稳定

不稳定



稳定

临界稳定

不稳定

6.1 稳定性的概念

塔科马市纽约湾海峡悬索桥，位于美国华盛顿州普吉特海湾地区的塔科马市，全长**1.6**公里。

第一座桥**1938**年开始建造，**1940**年**7月1**日通车，**1940**年**11月7**日倒塌，现在使用的是**1950**年重建的桥梁。

当时共有两个设计方案，第一个方案由克拉克·埃德里奇提出，桥面设计厚度**7.6**米；另一个方案由金门大桥设计师之一里昂·莫伊塞弗提出，为了降低造价，桥面设计厚度**2.4**米，成本从**1100**万美元降至**800**万美元。从经济角度考虑，采用了莫伊塞弗方案。

6.1 稳定性的概念

通车仅几个星期，桥面便开始出现上下摆动。有关人士安装了摄影机，以便观测摆动。大风时，桥面摆动幅度甚至可达**1.5米**。许多人慕名驾车而来，感受振荡的刺激。后来桥面的波动幅度不断增加，工程技术人员试图加建钢缆、液压缓冲装置降低波动，但不成功。

在持续数月的摆动下，桥梁最终于**1940年11月7日**倒塌，当天早上，桥面的上下摆动突然停止，出现左右的扭力摆动。有两人被困在桥上，后来逃离现场。桥面在几分钟内陆续崩塌。倒塌过程被人们拍摄记录。

6.1 稳定性的概念

调查显示，原设计为了追求美观、省钱，桥面厚度不足，使用物料过轻，造成发生共振的破坏频率与自然风接近，从而受到强风吹袭引起共振而不停摆动。

新桥的厚度增至**10米**，并在路面上加入气孔，使空气可在路面上穿越。新桥于**1950年10月14日**启用，两车道改为四车道，是目前全美第五长的悬索桥。

1998年在原桥东面加建一座新桥，是塔科马海峡第三条悬索桥。

塔科马峡谷大桥

(a) 开始晃动时

(b) 大桥垮塌时



6.1 稳定性的概念

➤ 线性定常系统输入 $r(t)=0$ ，在任何初始条件下，当 $t \rightarrow \infty$ 时，系统输出及各阶导数都为0，即：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}(t) = \cdots = \lim_{t \rightarrow \infty} y^{n-1}(t) = 0$$

则称该系统是渐近稳定的

➤ 线性定常系统渐近稳定的充分必要条件：系统全部极点都位于左半S平面，即系统特征方程的根都具有负实部

➤ 特征方程至少有一个根具有正实部， $t \rightarrow \infty$ 时，系统输出及各阶导数都趋于无穷大，系统不稳定

➤ 特征方程至少有一个根具有零实部，其余都具有负实部，当 $t \rightarrow \infty$ 时，系统输出趋于常数或等幅振荡（一对虚极点），系统临界稳定

6.1 稳定性的概念

➤ n 阶系统有一对共轭复极点，一个 k 重实极点，其余为单实极点，系统零输入响应为：

$$\begin{aligned}y(t) &= (b_1 \cos \beta t + b_2 \sin \beta t) e^{-\alpha t} + \left(\sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i \right) e^{-pt} + \sum_{i=3}^{n-k} A_i e^{-p_i t} \\ \dot{y}(t) &= (d_1 \cos \beta t + d_2 \sin \beta t) e^{-\alpha t} + \left(\sum_{i=0}^{k-1} e_i t^i \right) e^{-pt} + \sum_{i=3}^{n-k} -p_i A_i e^{-p_i t} \\ &\vdots \\ y^{n-1}(t) &= (f_1 \cos \beta t + f_2 \sin \beta t) e^{-\alpha t} + \left(\sum_{i=0}^{k-1} g_i t^i \right) e^{-pt} + \sum_{i=3}^{n-k} (-p_i)^{n-1} A_i e^{-p_i t}\end{aligned}$$

➤ 如果系统特征方程的根都具有负实部，则有：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}(t) = \cdots = \lim_{t \rightarrow \infty} y^{n-1}(t) = 0$$

➤ 因而系统渐近稳定

6.1 稳定性的概念

➤ 线性定常系统在零初始条件下，有界输入产生的输出响应也是有界的，则称其为**有界输入有界输出稳定**系统（**BIBO**稳定系统）。即当：

$$y(0) = \dot{y}(0) = \cdots = y^{n-1}(0) = 0$$
$$\text{如果 } \underbrace{|r(t)| \leq k_1 < \infty}_{0 < t < \infty}, \text{ 则 } \underbrace{|y(t)| \leq k_2 < \infty}_{0 < t < \infty}$$

➤ 线性定常系统**BIBO**稳定的**充分必要条件**：系统传递函数全部极点都位于左半S平面

➤ 外部稳定性：**BIBO**稳定只表明系统对输出而言是稳定的，并不能保证系统内部所有状态都是稳定的。**BIBO**稳定反应了系统外部特性

6.1 稳定性的概念

- 渐近稳定性反应了系统内在特性，因为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}(t) = \cdots = \lim_{t \rightarrow \infty} y^{n-1}(t) = 0$$

- 而 $y(t)$, $\dot{y}(t)$, \cdots , $y^{n-1}(t)$ 表示系统的所有状态，故渐近稳定性表明系统内部所有状态都是稳定的
- 渐近稳定系统是BIBO稳定的，反之不一定成立

6.1 稳定性的概念

- 不稳定系统的特征方程至少有一个根位于右半S平面，系统的输出对任何输入都是不稳定的。
- 如果特征方程有一对共轭根在虚轴上，而其他根均位于左半平面，则系统在有界的输入下，其稳态输出保持振荡。系统称为临界稳定系统。
- 例如，若闭环系统的特征方程为：

$$(s + 10)(s^2 + 16) = 0$$

系统为临界稳定

稳定性的判断

◆ 古典控制理论的局限性

劳斯判据、Nyquist判据、Bode图频域分析，都是基于分析系统或频率特性方程的根在复平面上的分布，不必求解方程的特征根，而是直接由方程的系数或者频率特性曲线判断稳定性。这类直接判断方法只适用于线性定常系统，不适用于时变系统和非线性系统。

◆ Lyapunov的特点

经典控制理论中的稳定性一般指输出稳定性，Lyapunov稳定性基于系统的状态空间描述法，对单变量、多变量、线性、非线性、定常、时变系统稳定性分析皆适用的通用方法。它不仅描述了系统的外部特性，而且揭示了系统的内部特性。

稳定性的判断

◆ Lyapunov第一法

通过解系统的微分方程式，然后根据解的性质来判断系统的稳定性。需要将非线性系统在平衡态附近近似线性化，然后讨论线性化系统的特征值分布来研究原非线性系统的稳定性问题，称为间接法。

◆ Lyapunov第二法：该方法建立在能量观点的基础上

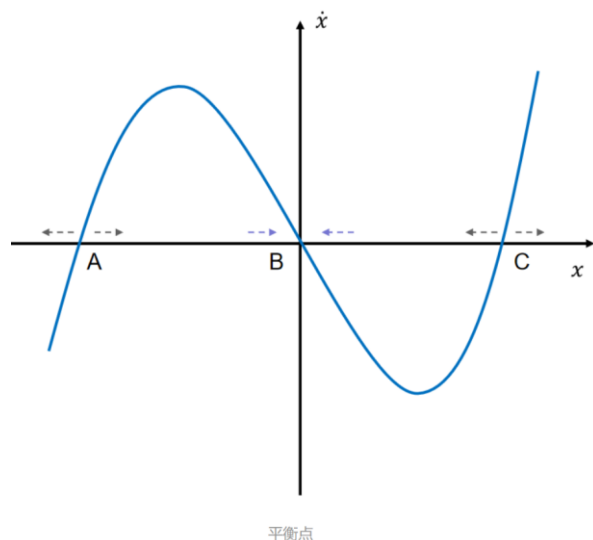
- ◆ 若系统的某个平衡状态是渐近稳定的，则随着系统的运动，其存储的能量将随着时间的增长而不断衰减，直至系统运动趋于平衡状态，而能量趋于极小值。
- ◆ Lyapunov创建了一个可以模拟系统能量的“广义能量”函数 $V(x, t)$ ，通过 V 与 \dot{V} 的符号特性判断平衡状态/平衡点的稳定性，即能量随时间单调递减。该方法不必求解系统微分方程，就可以直接判断其稳定性，称为直接法
- ◆ 优点：对于任何复杂系统都适用，对于运动方程求解困难的高阶系统、非线性系统、时变系统的稳定性分析，更能显示出优越性
- ◆ 应用Lyapunov关键在于能否找出一个合适的“广义函数”，通常称之为Lyapunov函数。对于一般非线性系统，尚未找到构造Lyapunov函数的通用方法

平衡点的定义：系统状态的变化量为 0

$$\dot{x} = f(x, u) = 0$$

平衡点的稳定性：一个稳定的平衡点，在该点处受到微小的扰动后，能重新回到该平衡点

考虑一个3次多项式的系统方程



从左到右系统有A、B、C三个平衡点，在B点时，若将其扰动到相平面右边，从曲线中可以看出， \dot{x} 为负， x 会变小；若将其扰动到相平面左边，系统的 \dot{x} 为正， x 会变大，则会回到相平面的原点；反观A、C点，当向右/左扰动时， \dot{x} 为正/负， x 继续往右/左走，无法回到平衡点，A、C是不稳定的平衡点。

在一维的情况，可以总结，在平衡点 x_{bal} ，当 $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_{bal}} < 0$ 时，平衡点是稳定的，反之则不稳定

由 $f(x + \Delta h) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta h$ ，B点往右， $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_B} < 0, \Delta h > 0$ ， $f(x)$ 的值减少；B点往左， $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_B} < 0, \Delta h < 0$ ， $f(x)$ 的值增大。

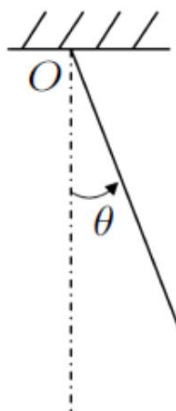
在高维的情况， $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} < 0$ 是一个雅可比矩阵，为了分析此时系统的稳定性，可以通过找到一组坐标线性变换方式，将系统的所有状态转化成独立的状态，即将n维系统转成n个独立的系统：对系统的雅可比矩阵进行特征值分解，分解后每个特征向量对应的特征值则是对应子系统的梯度值。因此，对于高维系统而言，平衡点稳定的条件是

$$Re \left[eig(\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}) | \mathbf{x} = \mathbf{x}_{bal} \right] < 0$$

对于如下图所示的单摆系统，可得：

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = \tau$$

其中， l 是单摆的长度， θ 是单摆的角度， τ 是输入的力矩。通过变换可得：



$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{g}{l} \sin \theta + \frac{1}{ml^2} u \end{bmatrix} = f(\mathbf{x}, u) = f(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})u \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{g}{l} \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u\end{aligned}$$

我们将单摆系统的状态方程带入上式，当输入 u 为0时，

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{g}{l} \sin \theta \end{bmatrix} = 0$$

可以得到在 $\theta = 0, \pi$ 和 $\dot{\theta} = 0$ 是系统的平衡点。

通过提供系统输入 u ，可以改变系统平衡点。

平衡点：系统状态的变化量为0，即 $\dot{x} = f(x, u) = 0$

在单摆系统中，有

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{g}{l} \sin \theta \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos \theta & 0 \end{bmatrix}$$

在平衡点 $\theta = \pi$ 处，有

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\theta=\pi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{eig}\left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\theta=\pi}\right) = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$$

有一个正的特征值，系统是不稳定的，符合实际情况。

在平衡点 $\theta = 0$ 处，有

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\theta=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{eig}\left(\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\theta=0}\right) = 0 \pm i \sqrt{\frac{g}{l}}$$

系统是临界稳定的。这意味着，在平衡点处施加小的扰动，在无空气阻力的情况下，单摆将会一直振荡。

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- 通过系统极点或特征方程的根判断稳定性，需要求解特征方程
如果只需要判别系统是否稳定，有没有简便方法，不用求解方程？
- **Routh-Hurwitz**稳定性判据不用求解系统特征方程即可确定系统稳定性
- 系统特征方程为：

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \\&= a_n (s - r_1)(s - r_2) \cdots (s - r_n) \\&= a_n s^n - a_n (r_1 + r_2 + \cdots + r_n) s^{n-1} + a_n (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3 + \cdots) s^{n-2} \\&\quad - a_n (r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 \cdots) s^{n-3} + \cdots + a_n (-1)^n r_1 r_2 r_3 \cdots r_n \\&= a_n s^n - a_n (\text{所有根之和}) s^{n-1} + a_n (\text{所有根两两乘积之和}) s^{n-2} \\&\quad - a_n (\text{所有根三三乘积之和}) s^{n-3} + \cdots + a_n (-1)^n (\text{所有根相乘})\end{aligned}$$

由式（6.5）可见，当所有根都位于s左半平面，多项式的所有系数都具有相同的符号

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- 必要条件：如果系统稳定，特征方程各系数同号，并且不能有系数为0
- 不满足，肯定不稳定；满足，不一定稳定。

$$\Delta(s) = q(s) = (s + 2)(s^2 - s + 4) = (s^3 + s^2 + 2s + 8)$$

所有系数都同号，也不缺项（没有系数为0），但共轭复极点的实部为+0.5，系统不稳定。

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- ◆ 劳斯-赫尔维茨稳定性判据（**Routh-Hurwitz stability criterion**）是控制理论中的一个数学测试，是线性时不变系统稳定的充分必要条件。
- ◆ 劳斯测试是由英国数学家爱德华·劳斯在**1876**年提出的快速算法，可以判断一线性系统其特征多项式的根是否都有负的实部。
- ◆ 德国数学家阿道夫·赫维兹在**1895**年独立的提出将多项式的系数放到一个方阵中（此方阵称为赫维兹矩阵），证明多项式稳定当且仅当赫维兹矩阵的主要子矩阵其行列式形成的数列均为正值。
- ◆ 二个程序是等价的，而劳斯测试提供一个有效计算赫维兹行列式的方法。
- ◆ 满足劳斯-赫尔维茨稳定性判据的多项式称为赫尔维茨多项式。

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- **Routh-Hurwitz**稳定性判据是判断线性系统稳定性的充分必要条件
- 将特征方程系数按阶次排作阵列或顺序表：

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

| | | | |
|-----------|-----------|-----------|------------------|
| s^n | a_n | a_{n-2} | $a_{n-4} \cdots$ |
| s^{n-1} | a_{n-1} | a_{n-3} | $a_{n-5} \cdots$ |
| s^{n-2} | b_{n-1} | b_{n-3} | b_{n-5} |
| s^{n-3} | c_{n-1} | c_{n-3} | c_{n-5} |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| s^2 | f_{n-1} | f_{n-2} | |
| s^1 | g_{n-1} | | |
| s^0 | h_{n-1} | | |

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

其中：

$$b_{n-1} = -\frac{a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2}}{a_{n-1}} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$
$$b_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}, \quad c_{n-1} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}, \dots$$
$$h_{n-1} = -\frac{f_{n-1} \times 0 - g_{n-1} f_{n-2}}{g_{n-1}} = -\frac{1}{g_{n-1}} \begin{vmatrix} f_{n-1} & f_{n-2} \\ g_{n-1} & 0 \end{vmatrix} = f_{n-2}$$

➤ Routh-Hurwitz判据

- 特征方程正实部根的个数等于Routh阵列第一列符号的变化次数
- 系统稳定的充分必要条件：Routh阵列第一列中所有系数具有相同符号，且不能为0

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- 计算Routh阵列时，为了简化计算，可以用一个正数除任一行中的各个数字，而不影响最后的稳定性判断结果
- Routh阵列第一列的构成，分为4种不同情况：
 - 首列中没有元素为零
 - 首列中有1个元素为零，零元素所在行中其余元素非零
 - 首列中有1个元素为零，零元素所在行中其余元素均为零
 - 首列中有1个元素为零，零元素所在行中其余元素均为零，且在虚轴上有重根

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- 情形1：首列中没有元素为零
- 例6.1 二阶系统，特征多项式：

$$q(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

Routh阵列：

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & 0 \\ s^0 & b_1 & 0 \end{array}$$

$$b_1 = -\frac{a_2(0) - a_0 a_1}{a_1} = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix} = a_0$$

∴ 系统稳定，要求 a_2 、 a_1 、 a_0 (b_1) 同号

- 二阶系统稳定，要求所有系数全为正或全为负

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

➤ 例6.2 三阶系统，特征多项式：

$$q(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

Routh阵列：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & a_3 & a_1 \\ s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & c_1 & 0 \end{array} \quad \begin{aligned} b_1 &= -\frac{a_3a_0 - a_1a_2}{a_2} \\ c_1 &= -\frac{a_2 \cdot 0 - a_0b_1}{b_1} = a_0 \end{aligned}$$

∴ 系统稳定，要求 a_3 、 a_2 、 b_1 、 a_0 (c_1) 同号

b_1 与 a_2 同号，则 $-(a_3a_0 - a_1a_2) > 0$ ，即 $a_1a_2 > a_3a_0$

➤ 三阶系统稳定的充分必要条件是特征多项式各个系数同号，并且：

$$a_1a_2 > a_3a_0$$

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

➤ 考虑特征多项式:

$$q(s) = (s - 1 + j\sqrt{7})(s - 1 - j\sqrt{7})(s + 3) = s^3 + s^2 + 2s + 24$$

➤ 所有系数存在且为正, 特征多项式满足系统稳定的必要条件。

➤ *Routh*阵列:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 24 \\ s^1 & -22 & 0 \\ s^0 & 24 & 0 \end{array}$$

➤ 首列中出现2次符号变化, 可以判断 $q(s)$ 有2个根在右半 S 平面, 系统不稳定

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- 情形2：首列中有1个元素为零，零元素所在行中其余元素非零。*Routh*阵列中有1个元素为0，用小正数 ε 代替它，补全阵列后令它趋于零

多项式： $q(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 2 & 11 \\ s^4 & 2 & 4 & 10 \\ s^3 & \varepsilon & 6 & 0 \\ s^2 & c_1 & 10 & 0 \\ s^1 & d_1 & 0 & 0 \\ s^0 & 10 & 0 & 0 \end{array}$$

$$c_1 = -\frac{12 - 4\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{12}{\varepsilon} + 4$$

$$d_1 = -\frac{10\varepsilon - 6c_1}{c_1} \rightarrow 6$$

- *Routh*阵列首列两次变号，系统不稳定，有两个根位于右半S平面

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

➤ 例6.3 不稳定系统

特征多项式: $q(s) = s^4 + s^3 + s^2 + s + K$

*Routh*阵列:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 1 & K \\ s^3 & 1 & 1 & 0 \\ s^2 & \varepsilon & K & 0 \\ s^1 & c_1 & 0 & 0 \\ s^0 & K & 0 & 0 \end{array}$$

$$c_1 = -\frac{K - \varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{K}{\varepsilon} + 1 \rightarrow -\frac{K}{\varepsilon}$$

➤ $K > 0$, *Routh*阵列首列两次变号, 系统不稳定。 $K < 0$, *Routh*阵列首列一次变号, 系统不稳定。所以对任何 K 值, 系统都不稳定。

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- 情形3：首列中有1个元素为零，零元素所在行中其余元素均为零
- 情形3包括：某行所有元素都为零；某行仅有一个元素，该元素为零。
- 当多项式包含关于 s 平面原点对称的奇异值，即出现 $(s + \sigma)(s - \sigma)$ 或 $(s + j\omega)(s - j\omega)$ 的因子。
- 采用辅助多项式 $U(s)$ 解决这个问题。辅助多项式 $U(s)$ 对应于Routh阵列中零元素的前一行，为偶数次多项式，其阶次表示了对称根的对数。
- 三阶系统特征多项式， K 为可调的环路增益：

$$q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K$$

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

➤ *Routh*阵列:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & K \\ s^1 & -\frac{K-8}{2} & 0 \\ s^0 & K & 0 \end{array}$$

➤ $0 < K < 8$ 时, 系统稳定

➤ $K=8$ 时, 系统临界稳定, 虚轴上有两个根。辅助多项式 $U(s)$ 是全零元素行的前一行, 即:

$$U(s) = 2s^2 + Ks^0 = 2s^2 + 8 = 2(s^2 + 4) = 2(s + j2)(s - j2)$$

➤ 辅助多项式 $U(s)$ 是特征多项式的因子, 以 $U(s)$ 除 $q(s)$, 得:

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}s + 1 \\ 2s^2 + 8 \overline{) s^3 + 2s^2 + 4s + 8} \\ \underline{s^3 \qquad + 4s} \\ 2s^2 + 8 \\ \underline{2s^2 + 8} \\ 0 \end{array}$$

➤ 当 $K=8$ 时，特征多项式的因式分解为：

$$q(s) = (s + 2)(s + j2)(s - j2)$$

➤ 临界稳定系统的响应会出现无法接受的持续振荡

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

➤ 辅助多项式 $U(s)$ 对 s 求导，用得到的多项式的系数代替全为零那一行的系数，按规则继续计算

➤ 系统特征多项式：

$$\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + 25s^3 + 50s^2 + 24s + 48 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 25 & 24 \\ s^4 & 2 & 50 & 48 \\ s^3 & 0 & 0 & \end{array}$$

第三行全为0，取前一行构造辅助多项式：

$$U(s) = 2s^4 + 50s^2 + 48$$

对 $U(s)$ 求导，得：

$$\dot{U}(s) = 8s^3 + 100s$$

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

用 $\dot{U}(s)$ 的系数代替第三行全部系数，得新Routh阵列：

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^5 & 1 & 25 & 24 \\
 s^4 & 2 & 50 & 48 \\
 s^3 & 8 & 100 & \\
 & 2 & 25 & \\
 s^2 & 25 & 48 & \\
 s^1 & \underline{529} & & \\
 s^0 & 25 & & \\
 & 48 & &
 \end{array}$$

首列没有变号，所以没有正实部的根

$$U(s) = 2s^4 + 50s^2 + 48 = 2(s^4 + 25s^2 + 24) = 2(s^2 + 1)(s^2 + 24)$$

特征方程有一个实数根 $s_1 = -2$ 、两对共轭虚根 $s_{2,3} = \pm j$ 、

$s_{4,5} = \pm j2\sqrt{6}$ 。系统临界稳定

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

- 情形4：首列中有1个元素为零，零元素所在行中其余元素均为零，且在虚轴上有重根
- 特征方程在虚轴上有单根，系统既不是稳定的，也不是不稳定的，称为临界稳定，具有不衰减的正弦模态
- 虚根是重根，系统响应不稳定，具有 $t \sin(\omega t + \phi)$ 的形式。*Routh-Hurwitz*判据不能发现这种形式的不稳定
- 考虑系统的特征多项式：

$$\begin{aligned} q(s) &= (s+1)(s+j)(s-j)(s+j)(s-j) \\ &= s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1 \end{aligned}$$

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 2 & 1 \\ s^4 & 1 & 2 & 1 \\ s^3 & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ s^2 & 1 & 1 & \\ s^1 & \varepsilon & 0 & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

- $\varepsilon \rightarrow 0$, 首列元素没有变号, 容易错误判定系统临界稳定。
- 而系统冲激响应 $t \sin(t + \phi)$ 随时间增大
- 与 s^2 行对应的辅助多项式为: $s^2 + 1$
- 与 s^4 行对应的辅助多项式为: $s^4 + 2s^2 + 1 = (s^2 + 1)^2$
- 特征方程虚轴上有重根

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

➤例6.4 虚轴上有根的五阶系统

➤特征多项式:

$$q(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 3s + 63$$

$$\begin{array}{l|rrr} s^5 & 1 & 4 & 3 \\ s^4 & 1 & 24 & 63 \\ s^3 & -20 & -60 & 0 \\ s^2 & 21 & 63 & 0 \\ s^1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

辅助多项式为:

$$U(s) = 21s^2 + 63 = 21(s^2 + 3) = 21(s + j\sqrt{3})(s - j\sqrt{3})$$

➤U(s)在虚轴上有2个根。

➤为检验特征多项式的其他根，用特征多项式除以辅助多项式，得：

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

$$\frac{q(s)}{s^2 + 3} = s^3 + s^2 + s + 21$$

➤ 对新的多项式，建立Routh阵列：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 1 & 21 \\ s^1 & -20 & 0 \\ s^0 & 21 & 0 \end{array}$$

➤ 首列元素出现2次变号，说明系统特征多项式还有两个根位于右半S平面，因而系统不稳定的。

➤ 计算可得，位于右半平面的根为：

$$s = +1 \pm j\sqrt{6}$$

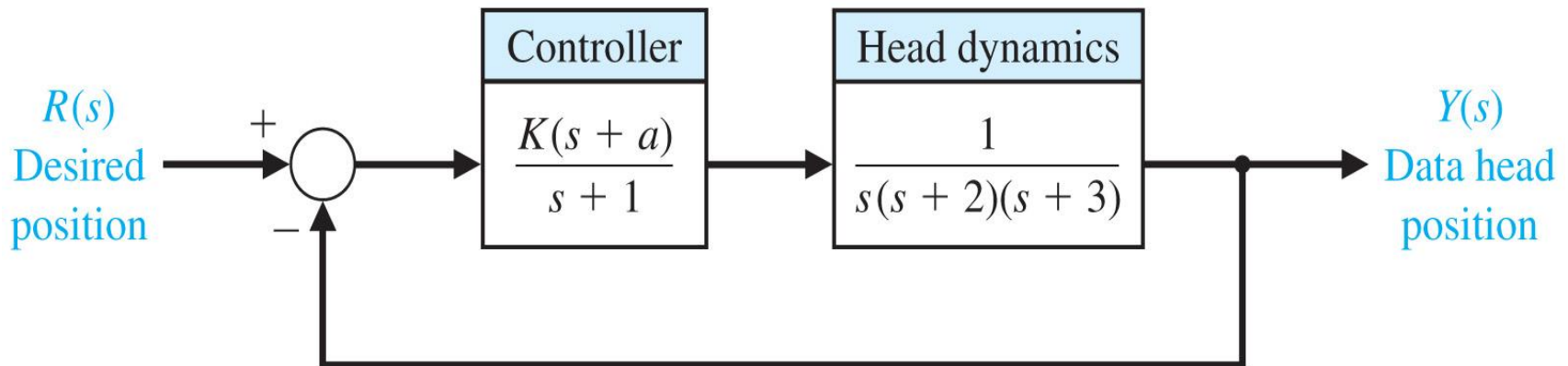
6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

►例6.5 焊接控制

焊接机器人在汽车厂广泛应用，焊接头定位系统需要快速、精确的响应。确定使系统稳定的 K 和 a 的范围。系统特征方程：

$$1 + G(s) = 1 + \frac{K(s + a)}{s(s + 1)(s + 2)(s + 3)} = 0$$

$$q(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + (K + 6)s + Ka = 0$$



6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^4 & 1 & 11 & Ka \\
 s^3 & 6 & K+6 & \\
 s^2 & b_3 & Ka & \\
 s^1 & c_3 & & \\
 s^0 & Ka & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{aligned}
 b_3 &= -\frac{K-60}{6} \\
 c_3 &= -\frac{6Ka - b_3(K+6)}{b_3}
 \end{aligned}$$

$$b_3 > 0, \quad K < 60$$

$$c_3 > 0, \quad (K-60)(K+6) + 36Ka < 0$$

$$Ka > 0, \quad K > 0, \quad a > 0$$

$$0 < K < 60$$

$$0 < a < \frac{(60-K)(K+6)}{36K}$$

如果 $K = 40$, 则 $a < 0.639$

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

➤ n 阶系统特征方程式的一般形式为：

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1s + \omega_n^n = 0$$

➤ 归一化特征方程：

$$\text{令： } s^* = s / \omega_n$$

$$s^{*n} + bs^{*^{n-1}} + cs^{*^{n-2}} + \cdots + 1 = 0$$

$$\text{例如： } s^3 + 5s^2 + 2s + 8 = 0$$

$$\text{等式两边除以 } \omega_n^3 = 8$$

$$\frac{s^3}{\omega_n^3} + \frac{5}{2} \frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2}{4} \frac{s}{\omega_n} + 1 = 0$$

$$\text{得归一化特征方程： } s^{*3} + 2.5s^{*2} + 0.5s^* + 1 = 0$$

$$b = 2.5, \quad c = 0.5, \quad bc = 1.25 > 1, \quad \text{系统稳定}$$

6.2 Routh-Hurwitz稳定性判据

| n | Characteristic Equation | Criterion |
|-----|--|--|
| 2 | $s^2 + bs + 1 = 0$ | $b > 0$ |
| 3 | $s^3 + bs^2 + cs + 1 = 0$ | $bc - 1 > 0$ |
| 4 | $s^4 + bs^3 + cs^2 + ds + 1 = 0$ | $bcd - d^2 - b^2 > 0$ |
| 5 | $s^5 + bs^4 + cs^3 + ds^2 + es + 1 = 0$ | $bcd + b - d^2 - b^2e > 0$ |
| 6 | $s^6 + bs^5 + cs^4 + ds^3 + es^2 + fs + 1 = 0$ | $(bcd + bf - d^2 - b^2e)e + b^2c - bd - bc^2f - f^2 + bfe + cdf > 0$ |

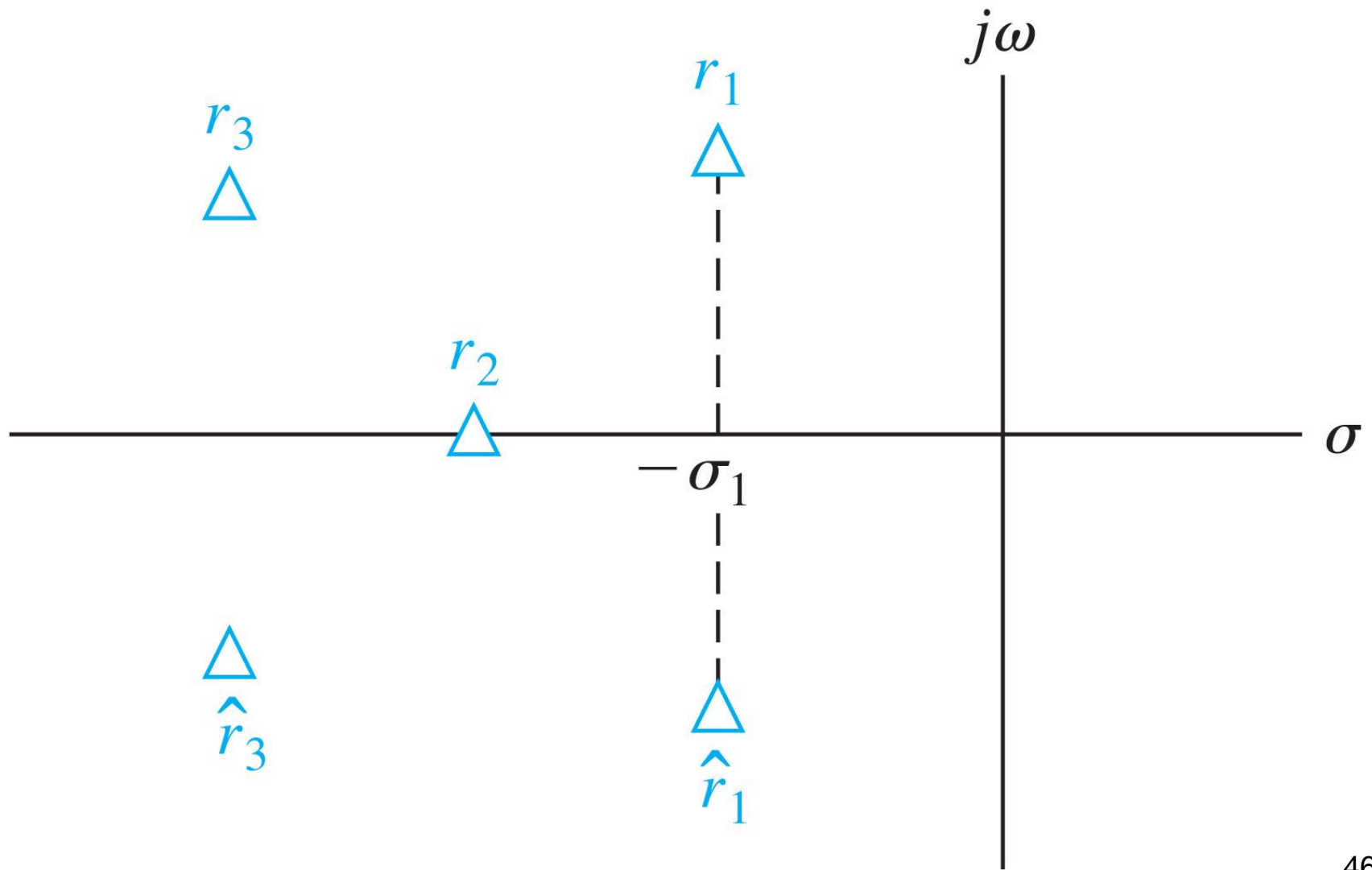
Note: The equations are normalized by $(\omega_n)^n$.

Routh-Hurwitz稳定性判据

6.3 反馈控制系统相对稳定性

- 利用 *Routh-Hurwitz* 判据，判断特征方程是否有位于右半 S 平面的根，可以确定系统的绝对稳定性，但这只是部分回答了稳定性问题。
- **相对稳定性 *relative stability*** 系统相对稳定性由特征方程根的位置描述，是由每个或每对根的实部所确定的系统特性，即每个根的相对阻尼。
- 可以通过 S 平面的变换，扩展 *Routh-Hurwitz* 判据的应用范围，并用它来确定相对稳定性。
- 移动 S 平面的虚轴，再应用 *Routh-Hurwitz* 判据确定相对稳定性。这需要反复的尝试，所以被称为试错法 **trial-and-error**

6.3 反馈控制系统相对稳定性



6.3 反馈控制系统相对稳定性

➤例6.6 虚轴的移动

➤考虑3阶特征方程：

$$q(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$$

令 $s_n = s + 1$ ，得：

$$(s_n - 1)^3 + 4(s_n - 1)^2 + 6(s_n - 1) + 4 = s_n^3 + s_n^2 + s_n + 1$$

$$\begin{array}{l|ll} s_n^3 & 1 & 1 \\ s_n^2 & 1 & 1 \\ s_n^1 & 0 & 0 \\ s_n^0 & 1 & 0 \end{array}$$

利用辅助多项式，得：

$$U(s_n) = s_n^2 + 1 = (s_n + j)(s_n - j) = (s + 1 + j)(s + 1 - j)$$

6.4 状态变量系统的稳定性

➤ 已知系统闭环传递函数 $T(s)$

- 令 $T(s)$ 的分母多项式等于零，得到特征方程

- 运用 $Routh-Hurwitz$ 判据确定其稳定性

➤ 已知系统的信号流图模型或方框图模型

- 运用 $Mason$ 公式或方框图化简方法获得系统的闭环传递函数

- 令闭环传递函数的分母多项式等于零，得到特征方程（若系统存在零极点相消，则特征方程为零极点相消前闭环传递函数的分母等于零的等式）

- 运用 $Routh-Hurwitz$ 判据确定其稳定性

6.4 状态变量系统的稳定性

➤例6.2 系统的稳定性

系统传递函数为：

$$T(s) = \frac{2s^2 + 8s + 6}{s^3 + 8s^2 + 16s + 6}$$

系统的特征多项式为： $q(s) = s^3 + 8s^2 + 16s + 6$

Routh阵列：

$$\begin{array}{c|cc} s_n^3 & 1 & 16 \\ s_n^2 & 8 & 6 \\ s_n^1 & \frac{61}{4} & 0 \\ s_n^0 & 6 & 0 \end{array}$$

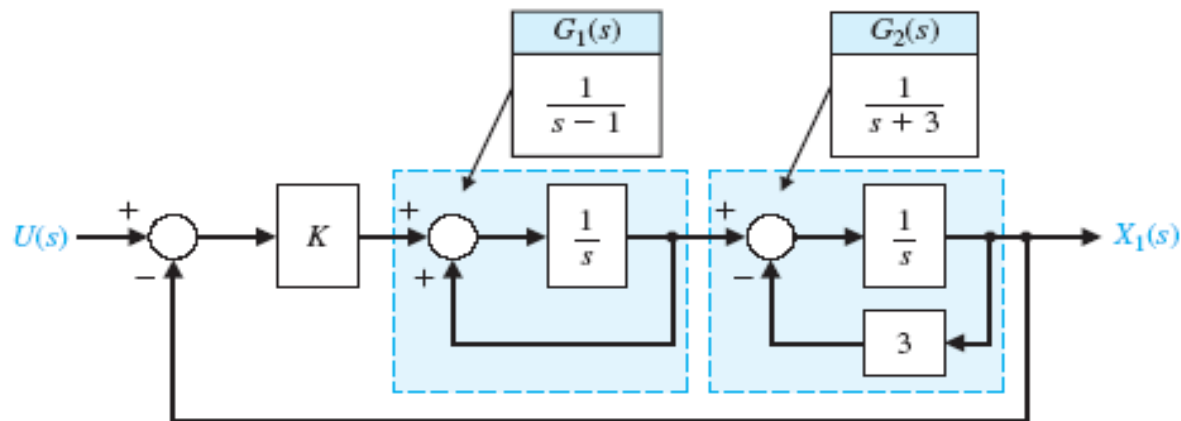
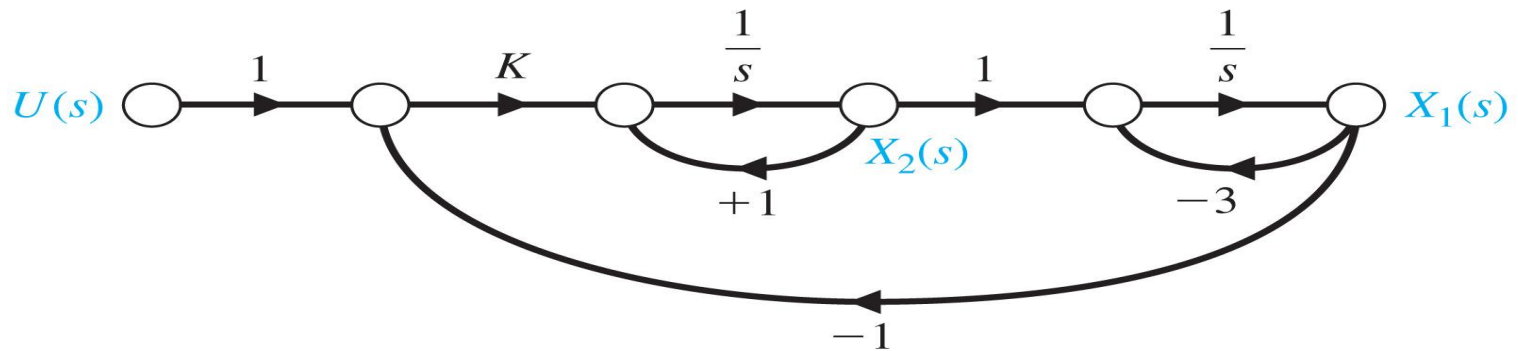
系统是稳定的

6.4 状态变量系统的稳定性

►例6.2 二阶系统的稳定性

一个二阶系统由两个一阶微分方程描述：

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 \quad \text{和} \quad \dot{x}_2 = +1x_2 - Kx_1 + Ku$$



6.4 状态变量系统的稳定性

应用**Mason**信号流图增益公式，记**3**个回路为：

$$L_1 = s^{-1}, \quad L_2 = -3s^{-1}, \quad L_3 = -Ks^{-2}$$

其中**L**₁和**L**₂没有公共节点，可得信号流图的特征式为：

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1L_2 = 1 - (s^{-1} - 3s^{-1} - Ks^{-2}) + (-3s^{-2})$$

乘以**s**²后，可得到特征方程为：

$$s^2 + 2s + (K - 3) = 0$$

∴ 只有当**K** > **3**时，系统才是稳定的。

6.4 状态变量系统的稳定性

应用方框图方法，两个反馈回路产生的传递函数为：

$$G_1(s) = \frac{1}{s-1} \quad \text{和} \quad G_2(s) = \frac{1}{s+3}$$

闭环传递函数：

$$T(s) = \frac{KG_1(s)G_2(s)}{1 + KG_1(s)G_2(s)}$$

特征方程为： $\Delta(s) = 1 + KG_1(s)G_2(s) = 0$

$$\text{即 } \Delta(s) = (s-1)(s+3) + K = s^2 + 2s + (K-3) = 0$$

\therefore 只有当 $K > 3$ 时，系统才是稳定的。

6.4 状态变量系统的稳定性

➤ 无输入的系统，因为其零输入响应是指数函数，可由状态变量微分方程直接得到特征方程。

系统状态方程为：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

其中 \mathbf{x} 为状态变量。由于方程的解具有指数形式，可以找到常数 λ ，使得系统状态的某个特解为：

$$x_i(t) = k_i e^{\lambda_i t}$$

其中 λ_i 是特征根。

6.4 状态变量系统的稳定性

令 $\mathbf{x} = \mathbf{k}e^{\lambda t}$

可得 $\lambda \mathbf{k}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{k}e^{\lambda t}$

或 $\lambda \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

也可写为 $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$

其中 \mathbf{I} 为单位矩阵, $\mathbf{0}$ 为零矩阵。当且仅当行列式

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

上述方程才有非零解。

\therefore 这个行列式得到的关于 λ 的 n 阶方程等价于 $\mathbf{T}(s)$ 得到的特征方程。

6.4 状态变量系统的稳定性

➤例6.9 传染病传播的闭环系统

传染病传播系统的向量微分方程为：

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta & 0 \\ \beta & -\gamma & 0 \\ \alpha & \gamma & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

特征方程为：

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta & 0 \\ \beta & -\gamma & 0 \\ \alpha & \gamma & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

6.4 状态变量系统的稳定性

$$\begin{aligned} &= \det \begin{bmatrix} \lambda + \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \lambda + \gamma & 0 \\ -\alpha & -\gamma & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda \left[(\lambda + \alpha)(\lambda + \gamma) + \beta^2 \right] \\ &= \lambda \left[\lambda^2 + (\alpha + \gamma)\lambda + (\alpha\gamma + \beta^2) \right] = 0 \end{aligned}$$

当 $\alpha\gamma + \beta^2 > 0$ 且 $\alpha + \gamma > 0$ 时，
系统是临界稳定的。

6.4 状态变量系统的稳定性

➤例3.4 倒摆系统

系统矩阵为:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mg/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & g/l & 0 \end{bmatrix}$$

特征方程为:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & mg/M & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -g/l & \lambda \end{bmatrix}$$

6.4 状态变量系统的稳定性

$$\begin{aligned} &= \lambda \left[\lambda \left(\lambda^2 - \frac{g}{l} \right) \right] \\ &= \lambda^2 \left(\lambda^2 - \frac{g}{l} \right) = 0 \end{aligned}$$

特征方程表明，系统有**2**重根 $\lambda = 0$ 以及另外**2**个根 $\lambda = +\sqrt{g/l}$ 和 $\lambda = -\sqrt{g/l}$ ？由于根 $\lambda = +\sqrt{g/l}$ 位于右半平面，**2**重根 $\lambda = 0$ 也将引起无界的响应，因此系统是不稳定的。

6.5 设计实例

➤例6.10 履带车转弯控制

➤转弯时，履带车的两组履带以不同速度运行。

➤设计目标：选择参数 K 和 a 使系统稳定，对斜波输入的稳态误差小于或等于指令幅度的24%

➤反馈系统特征方程：

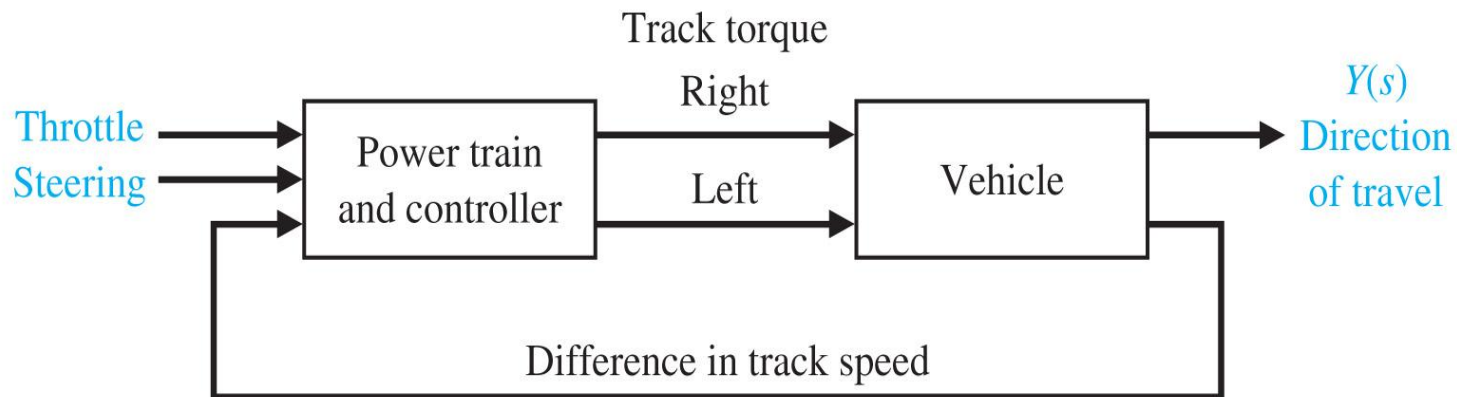
$$1 + G_c G(s) = 0$$

$$1 + \frac{K(s+a)}{s(s+1)(s+2)(s+5)} = 0$$

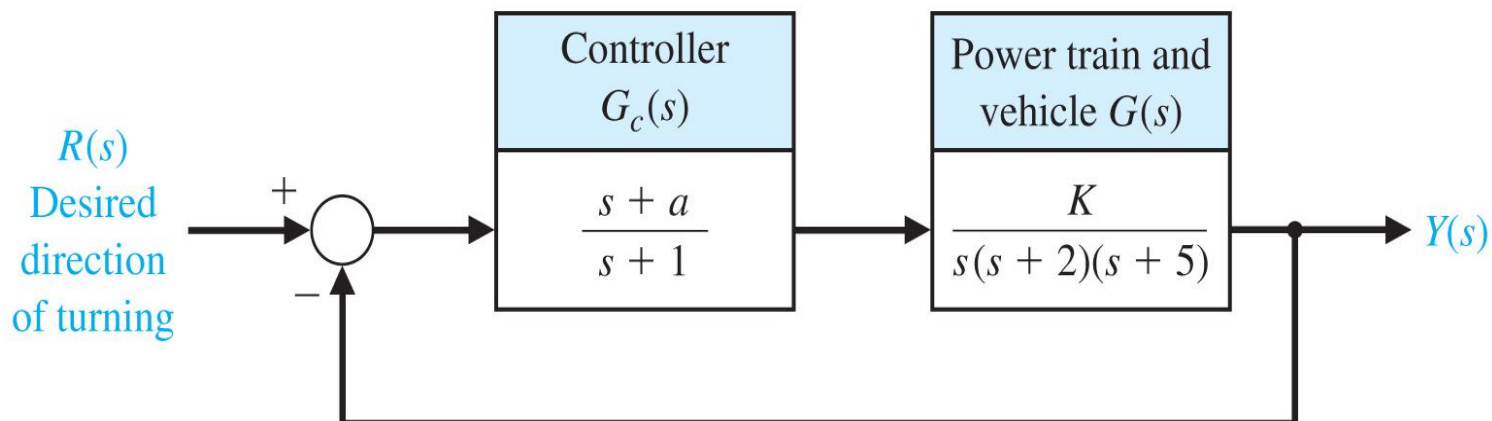
$$s(s+1)(s+2)(s+5) + K(s+a) = 0$$

$$s^4 + 8s^3 + 17s^2 + (K+10)s + Ka = 0$$

6.5 设计实例



双履带车转弯控制系统



方框图

6.5 设计实例

Routh阵列:

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^4 & 1 & 17 & Ka \\
 s^3 & 8 & K+10 & 0 \\
 s^2 & b_3 & Ka & \\
 s^1 & c_3 & & \\
 s^0 & Ka & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{aligned}
 b_3 &= -\frac{K-126}{8} \\
 c_3 &= -\frac{8Ka - b_3(K+10)}{b_3}
 \end{aligned}$$

首列元素不变号, 有:

$$b_3 > 0 \Rightarrow K < 126$$

$$c_3 > 0 \Rightarrow (K+10)(K-126) + 64Ka < 0$$

$$Ka > 0 \Rightarrow K > 0, a > 0; K < 0, a < 0 \text{ (系统正反馈, 舍弃)}$$

系统对斜坡输入 $r(t) = At, t > 0$ 的稳态误差为:

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v} = \frac{10A}{Ka}, \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c G = \frac{Ka}{10}$$

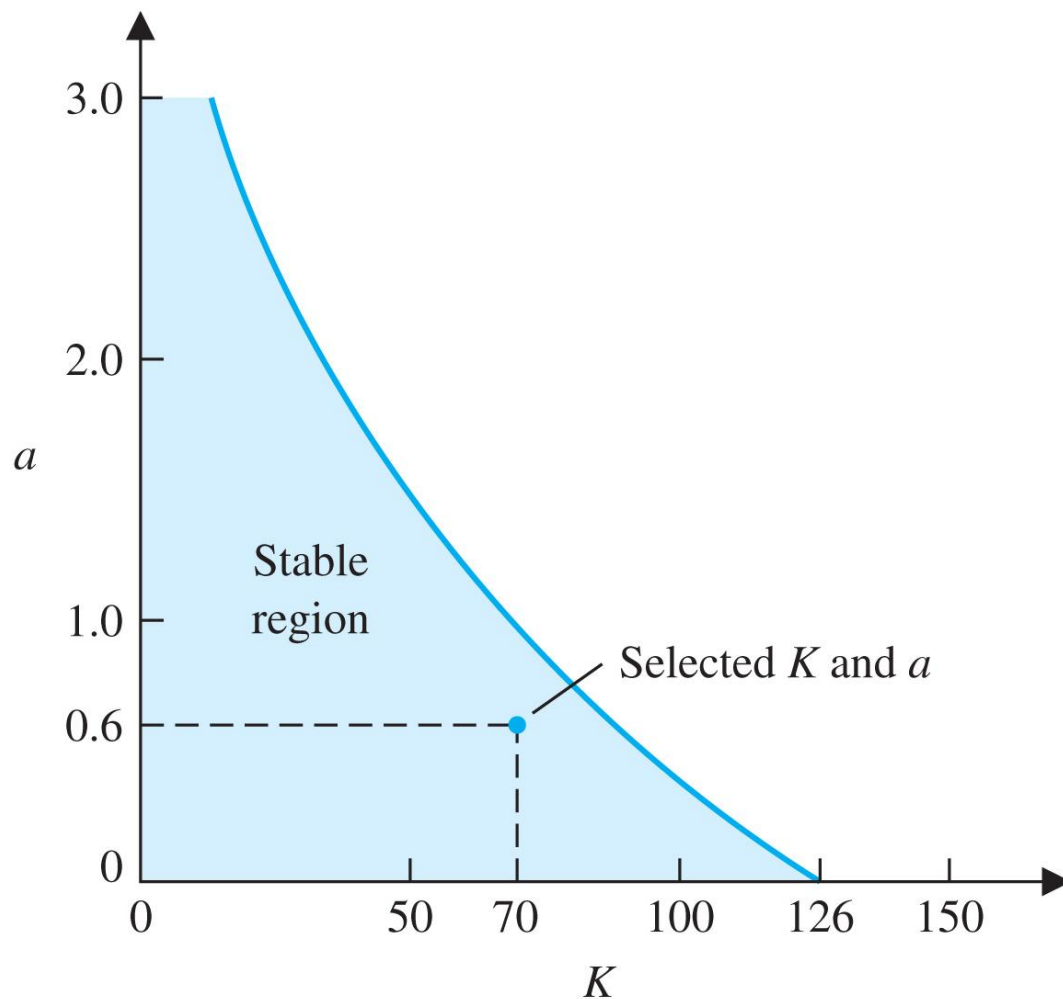
若取 $Ka = 42$, 有 $e_{ss} = 23.8\% A < 24\% A$

6.5 设计实例

在稳定区域内有一系列满足 $Ka=42$ 的参数组合，如：

$K=70$ 、 $a=0.6$

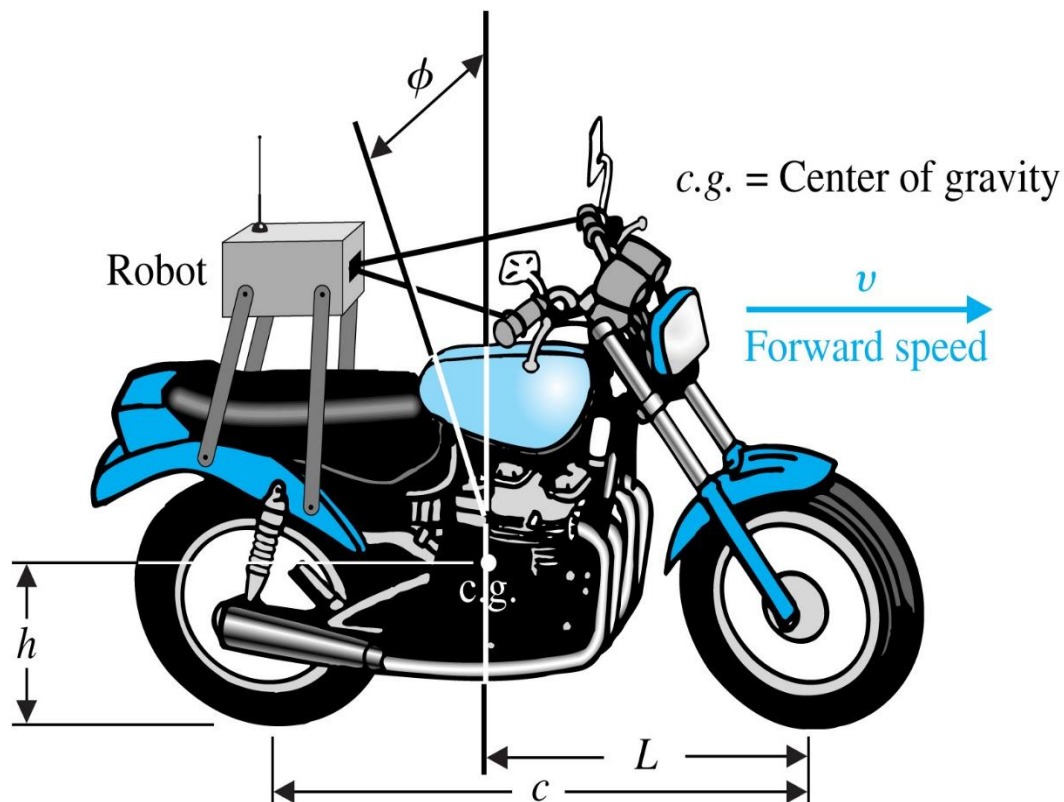
$K=50$ 、 $a=0.84$



6.5 设计实例

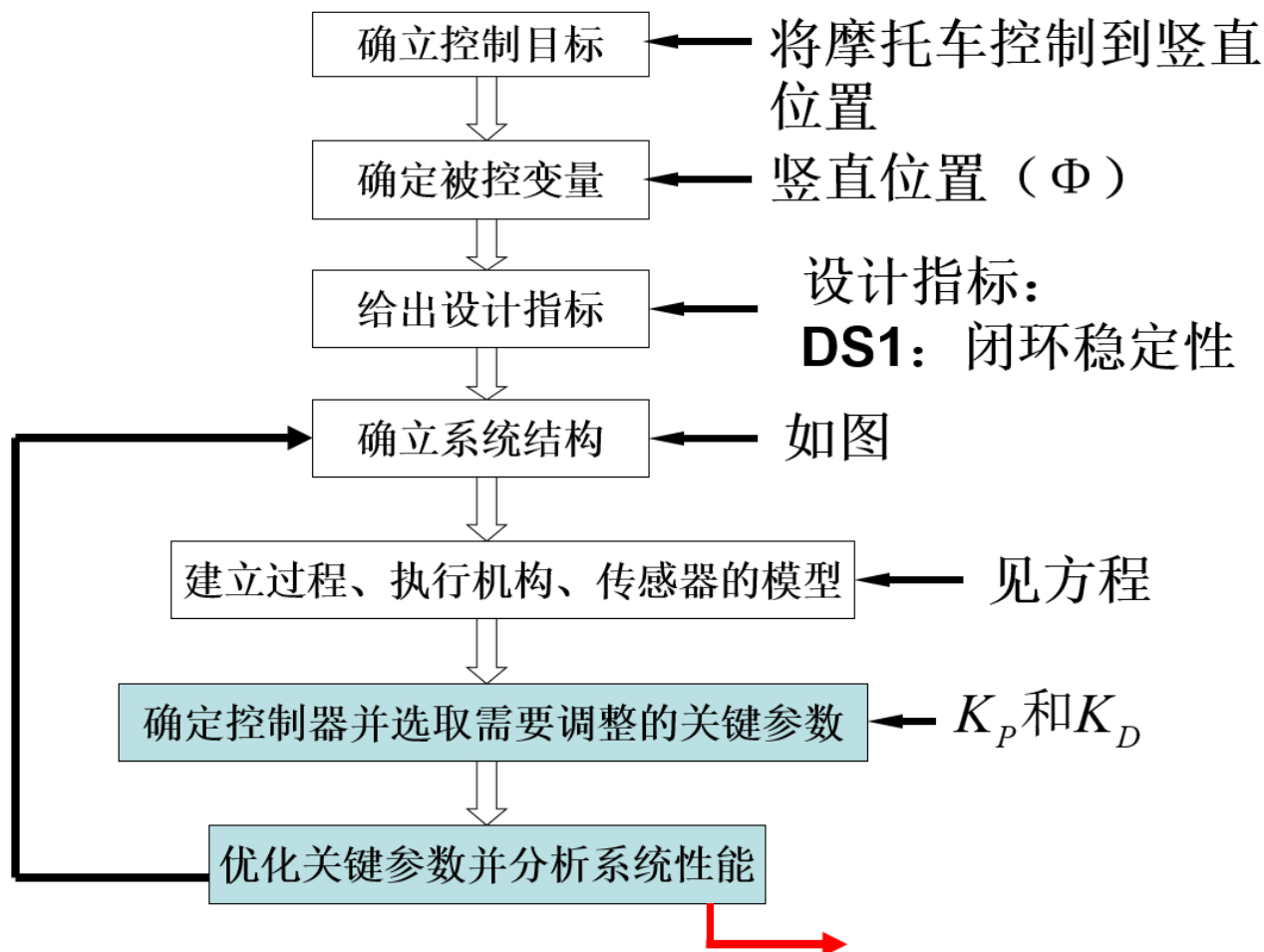
➤例6.11 机器人控制的摩托车

➤摩托车以恒定的前进速度 v 直线运动， Φ 表示摩托车对称面与竖直方向的夹角，期望角度为0



6.5 设计实例

➤ 机器人控制的摩托车控制系统设计过程中的要素



系统性能不满足设计指标则重新选择系统结构 系统性能满足设计指标结束设计

6.5 设计实例

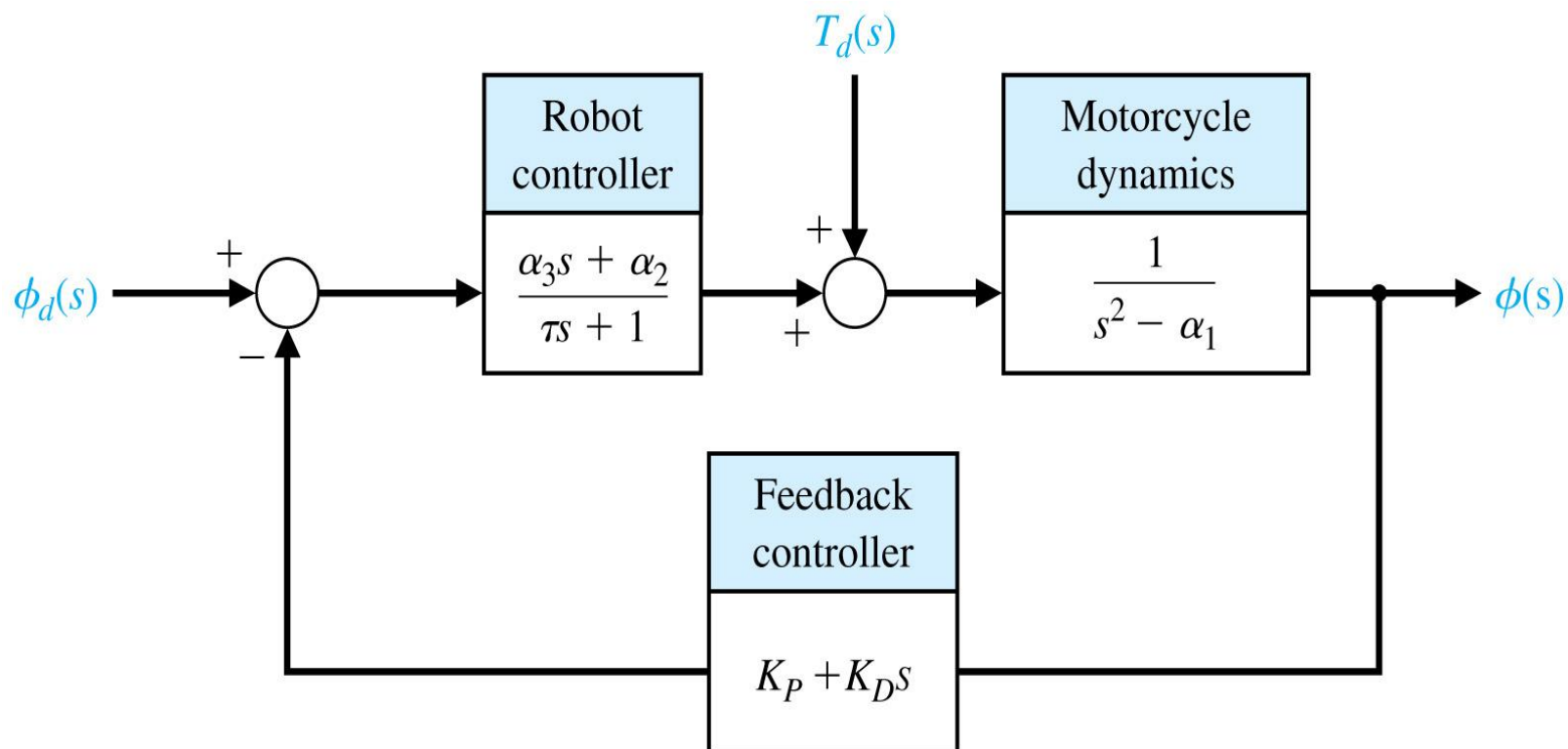
- **控制目标**：将摩托车控制在竖直位置，出现扰动时保持规定位置
- **被控变量**：摩托车位置与竖直方向的夹角 Φ
- **设计指标**：**DS1**：闭环系统必须稳定
- **系统结构**：摩托车、机器人、控制器、反馈测量元件
- **系统模型**：

■ 摩托车模型：

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - \alpha_1}, \text{ 摩托车是不稳定的, 有极点 } s = \pm\sqrt{\alpha_1}$$

$\alpha_1 = g/h$, $g = 9.806 \text{ m/s}^2$, h 是摩托车重心距地面高度

6.5 设计实例



机器人控制摩托车反馈控制系统方框图

6.5 设计实例

■ 机器人控制器模型:

$$G_c(s) = \frac{\alpha_2 + \alpha_3 s}{\tau s + 1}, \quad \alpha_2 = \frac{v^2}{hc}, \quad \alpha_3 = \frac{vL}{hc}$$

v 为摩托车前进速度； c 为前后轮轴距； L 为前轮轮轴与摩托车重心之间的水平距离； τ 为机器人控制器的时间常数，它代表机器人控制器的响应速度， τ 越小响应速度越快

➤ 选择关键调整参数：反馈增益 K_P 和 K_D

➤ 采用Routh-Hurwitz判据分析闭环系统稳定性

$$\text{闭环传递函数: } T(s) = \frac{\phi(s)}{\phi_d(s)} = \frac{\alpha_2 + \alpha_3 s}{\Delta(s)}$$

$$\Delta(s) = \tau s^3 + (1 + K_D \alpha_3) s^2 + (K_D \alpha_2 + K_P \alpha_3 - \tau \alpha_1) s + K_P \alpha_2 - \alpha_1 = 0$$

6.5 设计实例

| 物理参数 | |
|------------|----------------------------|
| τ | 0.2 s |
| α_1 | 9 1/s² |
| α_2 | 2.7 1/s² |
| α_3 | 1.35 1/s |
| h | 1.09 m |
| V | 2.0 m/s |
| L | 1.0 m |
| c | 1.36 m |

6.5 设计实例

Routh阵列:

$$\begin{array}{c|cc}
 s^3 & \tau & K_D\alpha_2 + K_P\alpha_3 - \tau\alpha_1 \\
 s^2 & 1 + K_D\alpha_3 & K_P\alpha_2 - \alpha_1 \\
 s & a & \\
 1 & K_P\alpha_2 - \alpha_1 &
 \end{array}$$

$$a = -\frac{\tau(K_P\alpha_2 - \alpha_1) - (K_D\alpha_2 + K_P\alpha_3 - \tau\alpha_1)(1 + K_D\alpha_3)}{1 + K_D\alpha_3}$$

系统稳定, 要求首列元素不变号, 有:

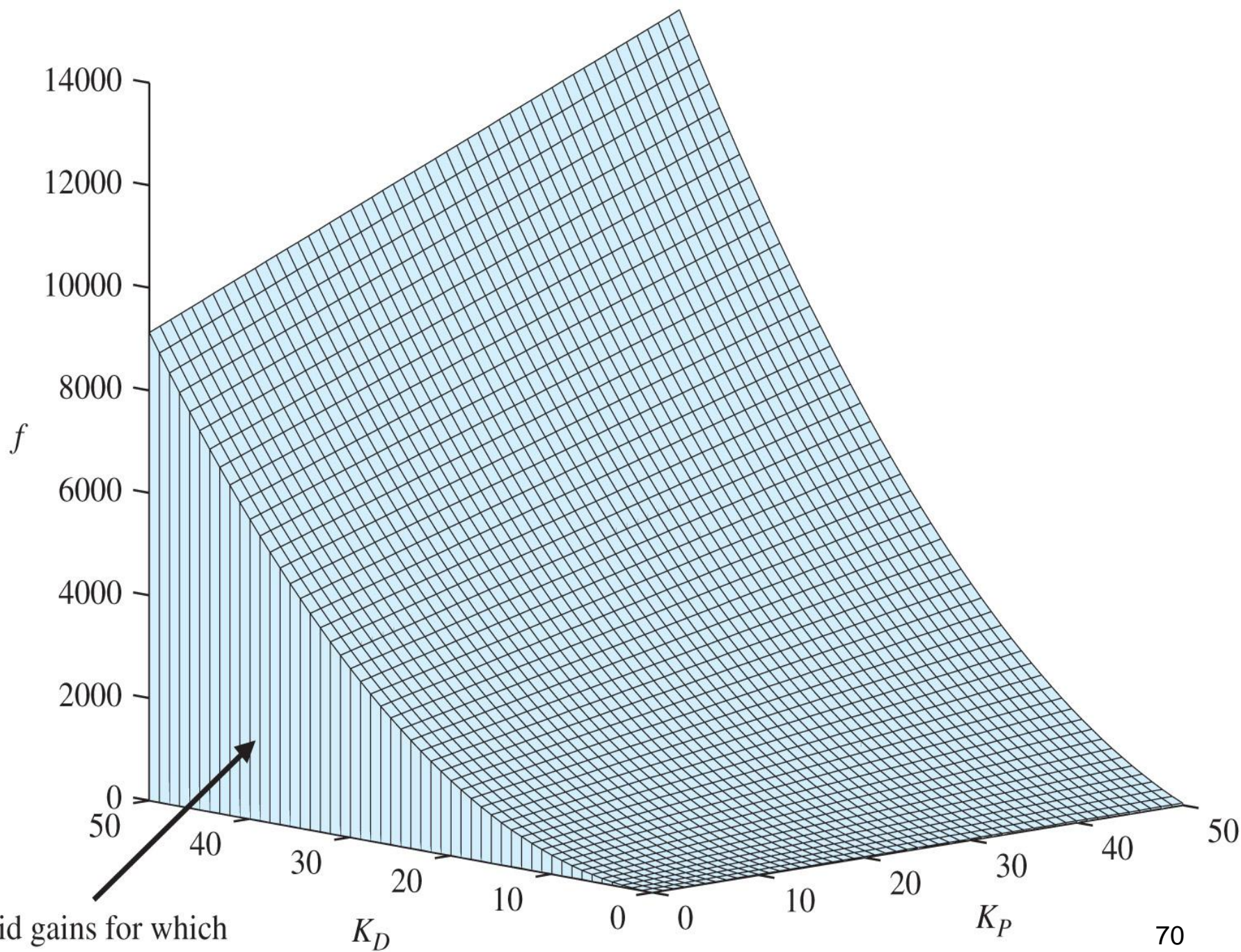
$$\tau > 0, \quad K_D > -1/\alpha_3, \quad a > 0, \quad K_P > \alpha_1/\alpha_2 = 3.33$$

选择 $K_P > 3.33$, $K_D > 0$, 并且:

$$f = \alpha_2\alpha_3K_D^2 + (\alpha_2 - \tau\alpha_1\alpha_3 + \alpha_3^2K_P)K_D + (\alpha_3 - \tau\alpha_2)K_P > 0$$

选择 $K_P = 10$ 、 $K_D = 5$ 时, 闭环系统稳定, 闭环极点:

$$s_1 = -35.2477, \quad s_2 = -2.4674, \quad s_3 = -1.0348$$



Valid gains for which
 $f > 0$. See Equation. (6.33).

6.5 设计实例

➤ 希望有外部扰动时机器人控制的摩托车保持竖直。从扰动 $T_d(s)$ 到输出 $\Phi(s)$ 的开环传递函数:

$$\frac{\phi(s)}{T_d(s)} = \frac{1}{s^2 - \alpha_1}$$

$$\text{特征方程: } q(s) = s^2 - \alpha_1 = 0$$

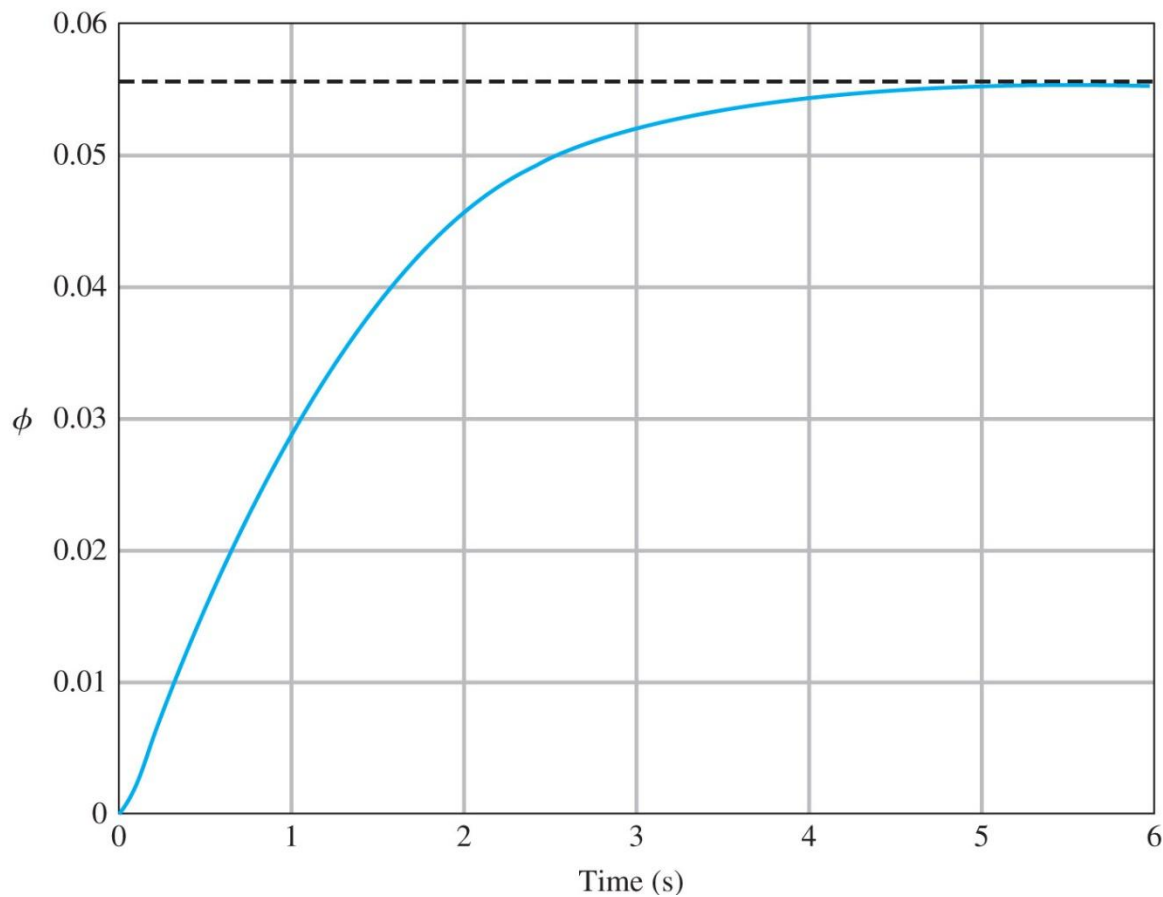
$$\text{系统极点: } s_1 = -\sqrt{\alpha_1}, \quad s_2 = +\sqrt{\alpha_1}$$

➤ 存在右半S平面极点，系统开环不稳定，任何一点扰动都会使摩托车跌倒

➤ 采用反馈控制器、机器人控制器，从扰动到输出的闭环传递函数为:

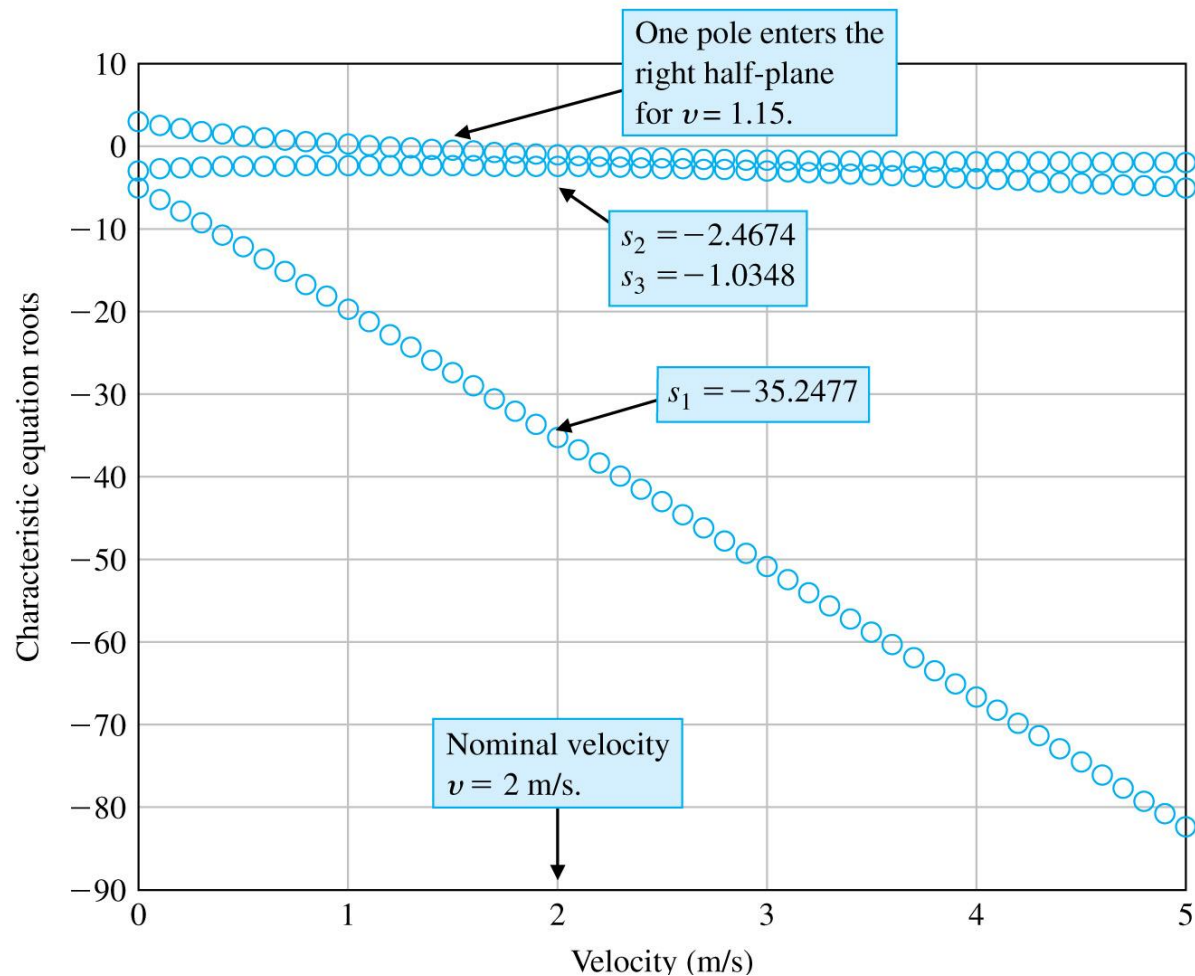
$$\frac{\phi(s)}{T_d(s)} = \frac{\tau s + 1}{\tau s^3 + (1 + K_D \alpha_3) s^2 + (K_D \alpha_2 + K_P \alpha_3 - \tau \alpha_1) s + K_P \alpha_2 - \alpha_1}$$

6.5 设计实例



单位阶跃扰动响应

摩托车保持竖直，略有倾斜， $\phi = 0.055\text{rad} = 3.18\text{deg}$



$K_P=10$ 、 $K_D=5$ 时特征方程的根随前进速度 v 的变化
速度增大相对稳定性增加，速度减小稳定性变差
 $v=1.15$ m/s时，出现一个不稳定根，摩托车不稳定

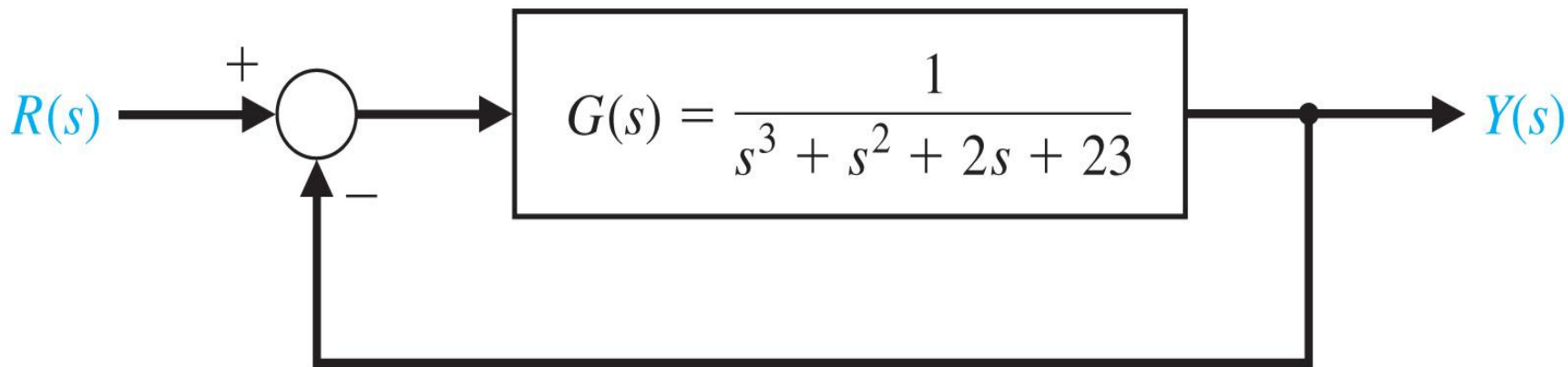
6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性

- *Routh-Hurwitz*判据是系统稳定性的充分必要判据。
- 如果特征方程的每个参数都已给定，我们就能利用*Routh-Hurwitz*阵列判定特征方程在右半 S 平面上根的数目。
- Matlab中利用roots或pole函数可以直接计算特征方程的根。

6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性

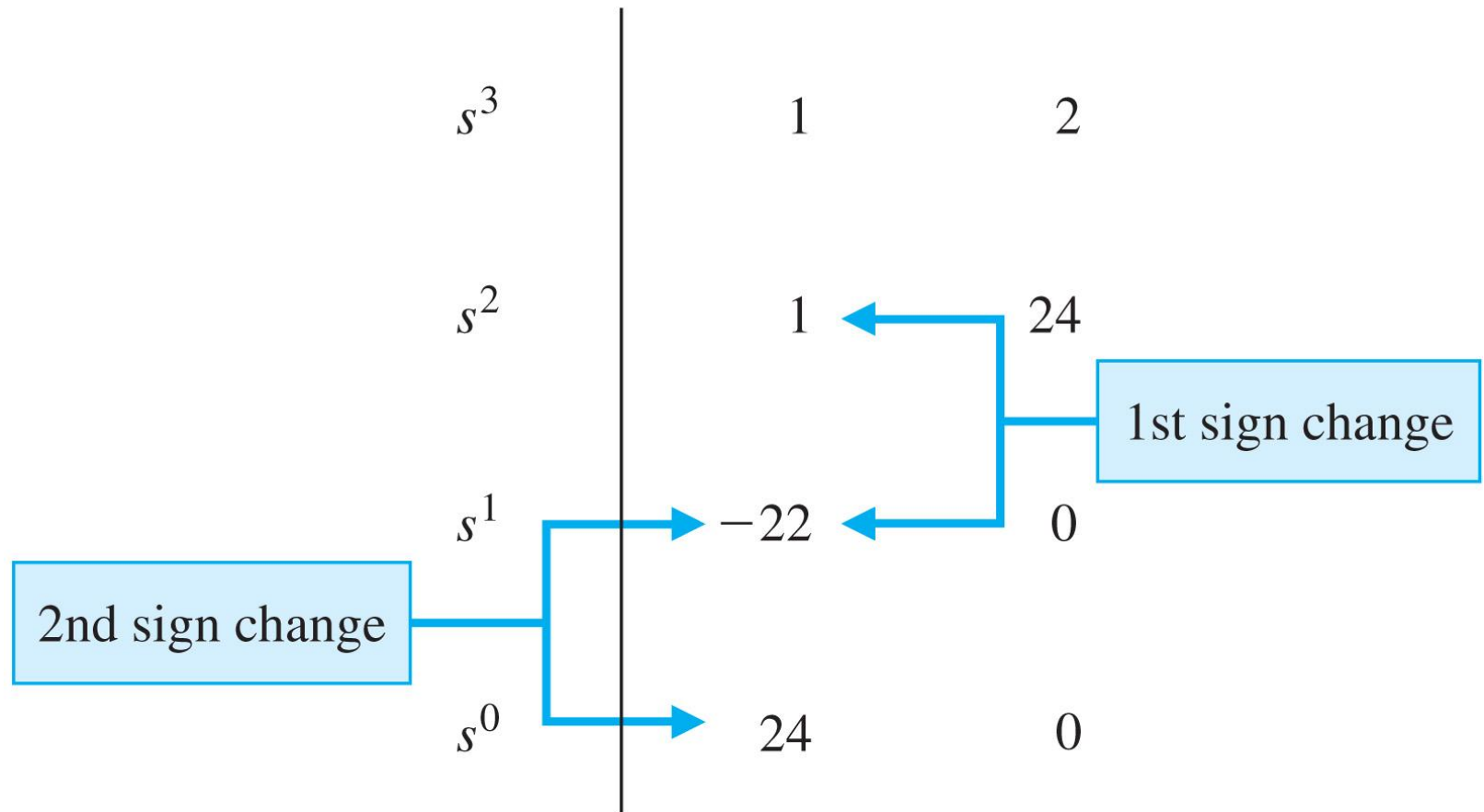
➤例 特征方程:

$$q(s) = s^3 + s^2 + 2s + 24 = 0$$



6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性

➤ *Routh*阵列



```
>>numg=[1]; deng=[1 1 2 23]; sysg=tf(numg,deng);  
>>sys=feedback(sysg,[1]);  
>>pole(sys)
```

ans =

-3.0000

$\left. \begin{array}{l} 1.0000 + 2.6458i \\ 1.0000 - 2.6458i \end{array} \right\}$

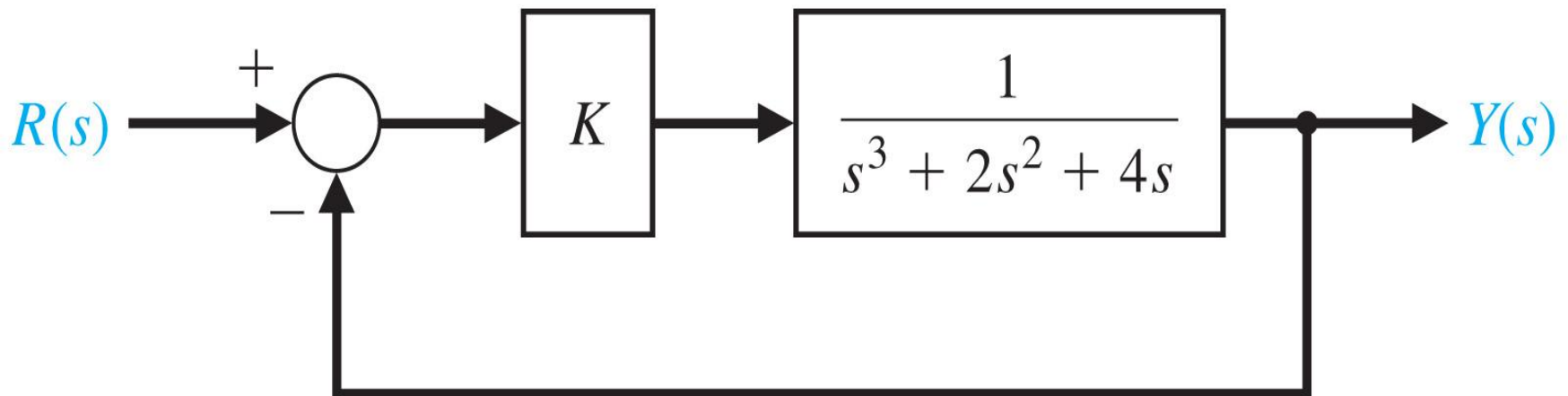
Unstable poles

6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性

➤ 特征方程是单个参数的函数，用 *Routh-Hurwitz* 方法来确定系统稳定的参数值范围。

➤ 例 特征方程为

$$q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K = 0$$



6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性

➤ Routh阵列

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & K \\ s^1 & \frac{8-K}{2} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

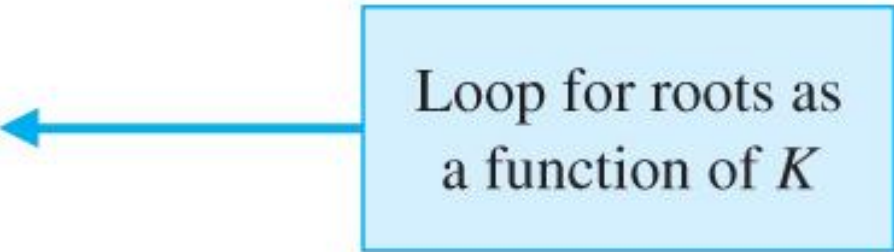
系统稳定应有 $0 \leq K \leq 8$

➤ MATLAB解决方法

- 在MATLAB文中建立K的取值向量
- 利用roots函数计算这些K值下特征方程的根
- 在图中画出这些根的位置

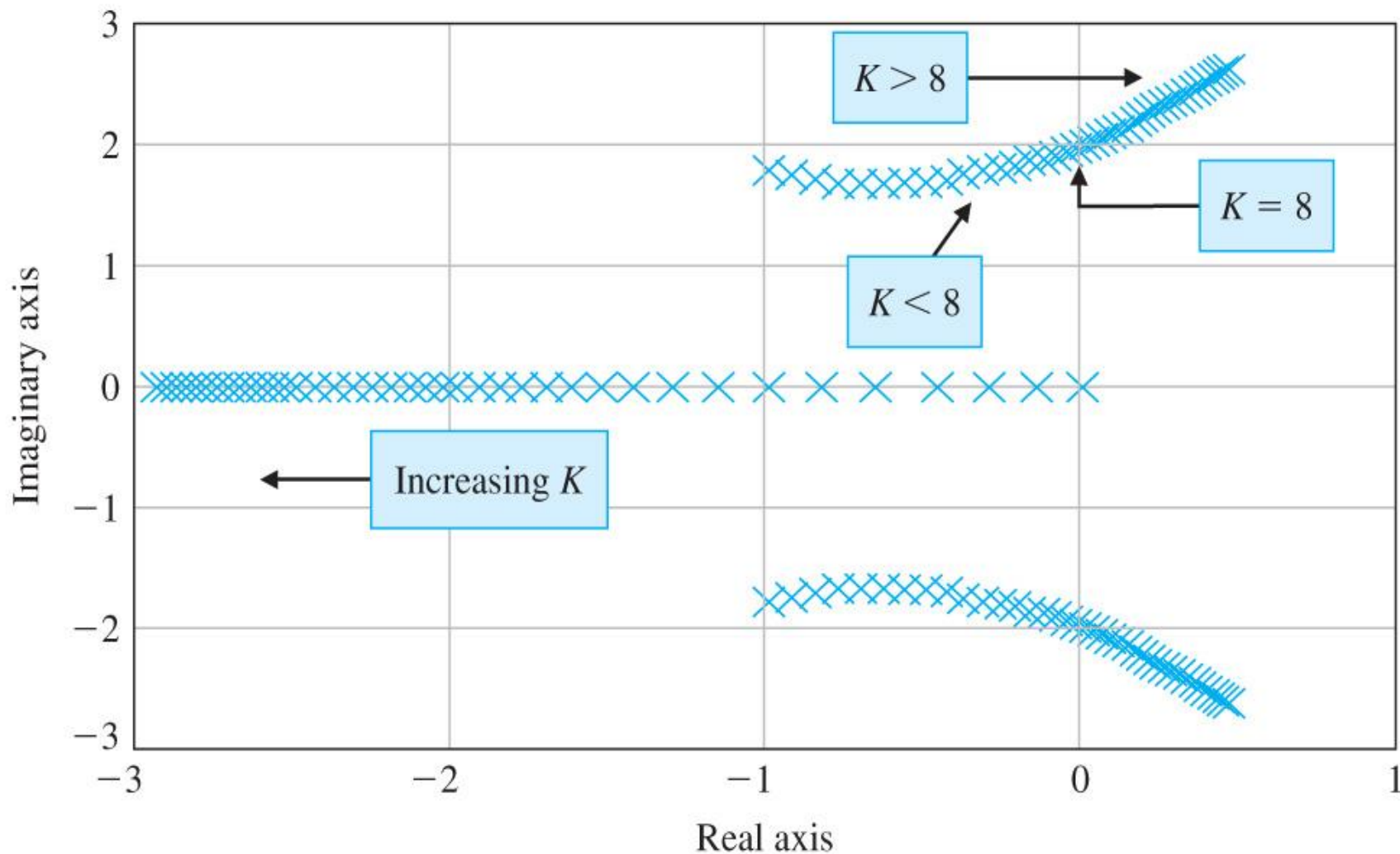
6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性

```
% This script computes the roots of the characteristic  
% equation  $q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K$  for  $0 < K < 20$   
%  
K=[0:0.5:20];  
for i=1:length(K)  
    q=[1 2 4 K(i)];  
    p(:,i)=roots(q);  
end  
plot(real(p),imag(p),'x'), grid  
xlabel('Real axis'), ylabel('Imaginary axis')
```

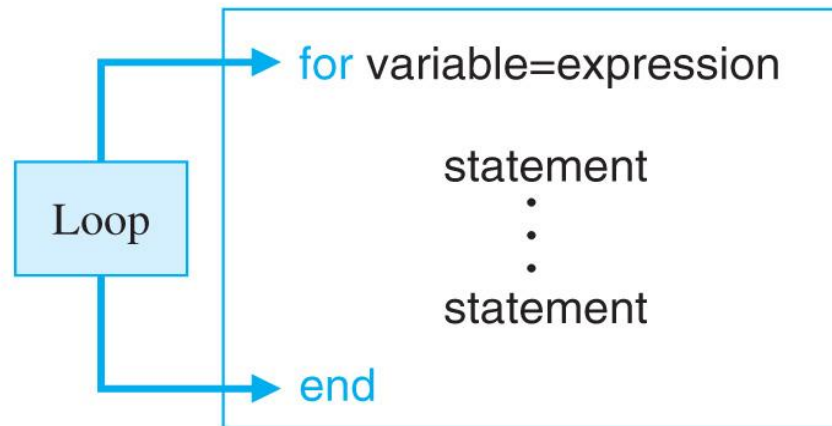


Loop for roots as
a function of K

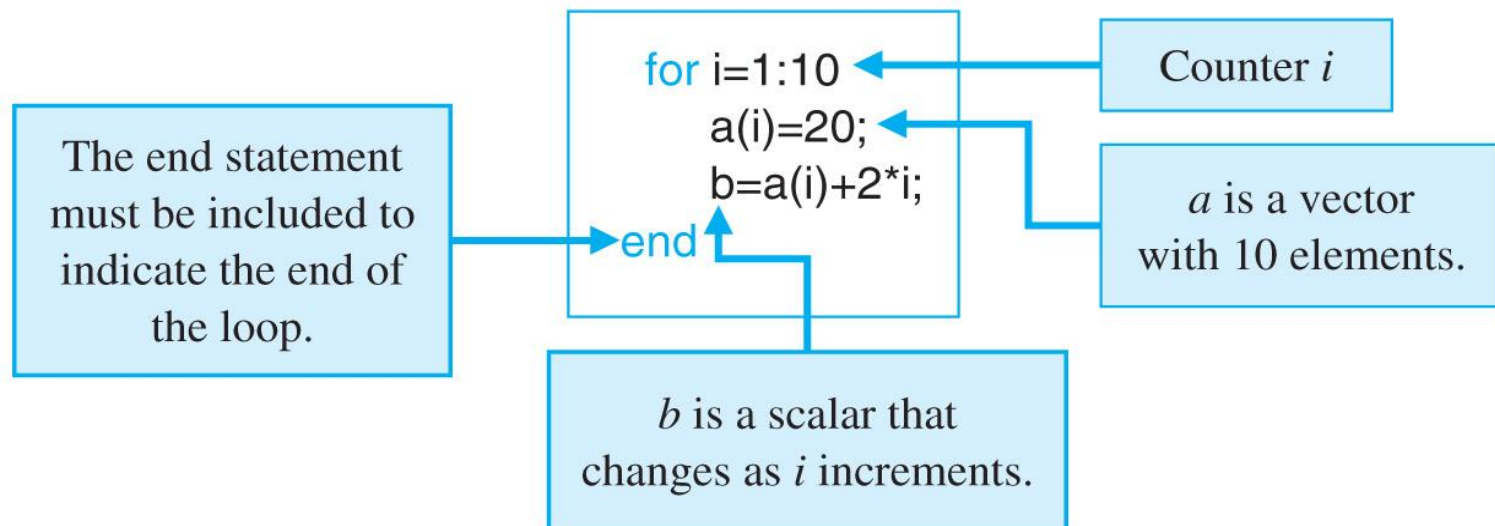
6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性



General format



Example



6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性

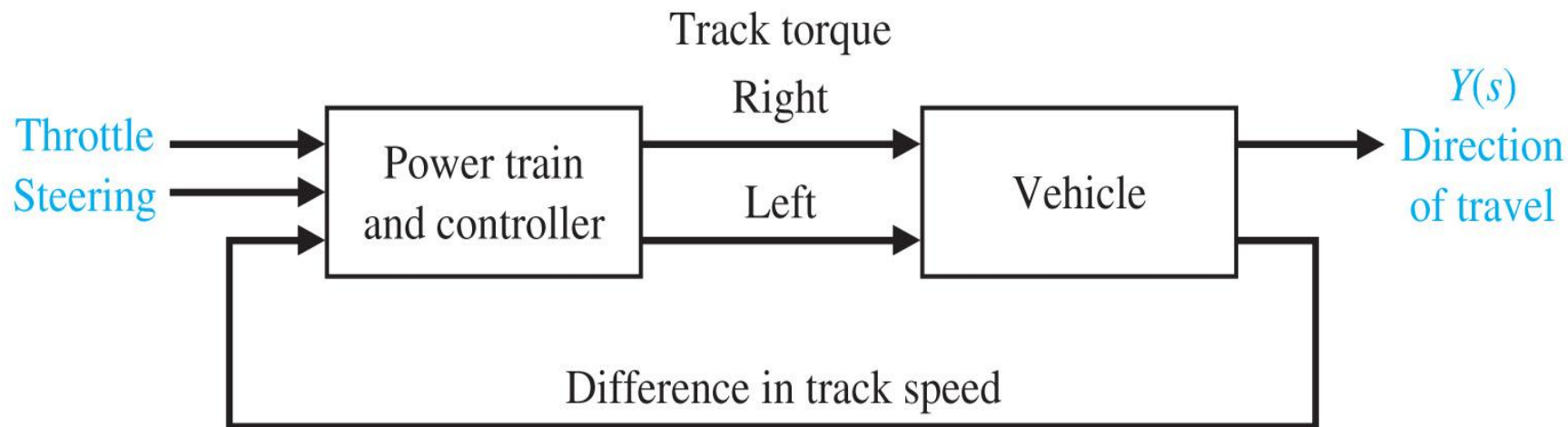
- 应用 *Routh-Hurwitz* 方法可以明确判断线性系统的绝对稳定性，但不能给出相对稳定性。相对稳定性同特征方程根的位置直接有关。*Routh-Hurwitz* 方法能告诉我们在右半 S 平面上有多少个极点，但不能给出极点的具体位置。
- 利用 **MATLAB**，很容易算出极点值，于是可以评估系统的相对稳定性。

6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性

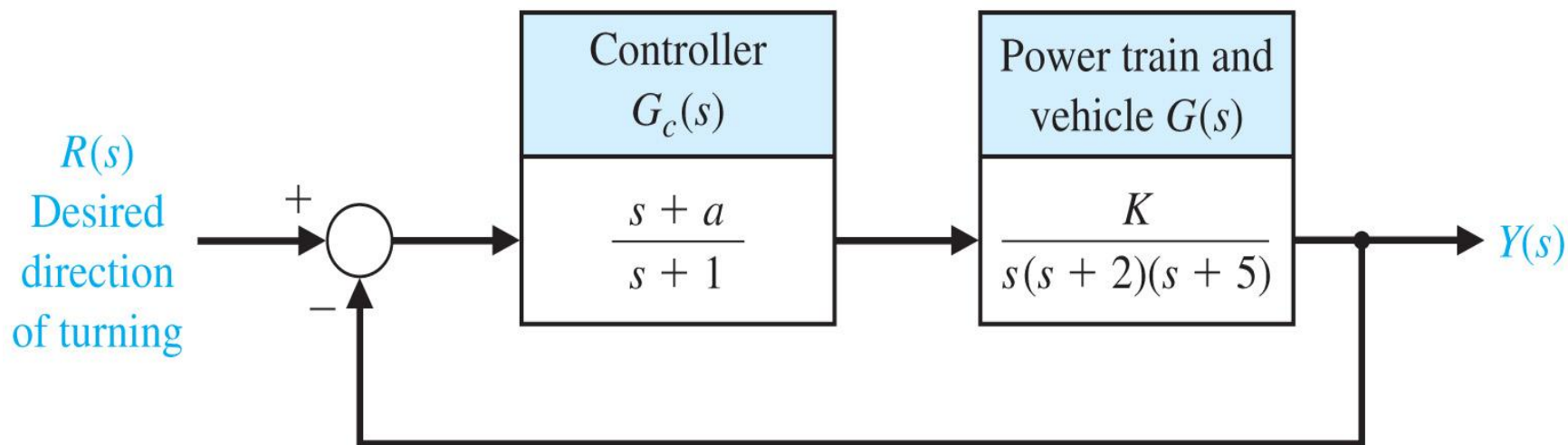
➤例6.12 履带车的控制

履带车转弯控制系统的方框图如下图所示。本设计的目的是确定参数 a 和 K 的值，使得系统稳定，且对斜波输入的稳态响应误差小于或等于指令幅值的**24%**。为此，可以用*Routh-Hurwitz*方法来寻找合适的 a 和 K 值。系统的闭环特征方程为：

$$q(s) = s^4 + 8s^3 + 17s^2 + (K + 10)s + aK = 0$$



(a)



(b)

6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性

➤ Routh 阵列

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 17 & Ka \\ s^3 & 8 & K+10 & 0 \\ s^2 & b_3 & Ka & \\ s^1 & c_3 & & \\ s^0 & Ka & & \end{array} \quad \begin{aligned} b_3 &= \frac{126-K}{8} \\ c_3 &= \frac{b_3(K+10)-8Ka}{b_3} \end{aligned}$$

满足稳定性条件，应有

$$K < 126, Ka > 0,$$

$$(K+10)(126-K)-64Ka > 0$$

6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性

```
% The a-K stability region for the two track vehicle
```

```
% control problem
```

```
%
```

```
a=[0.1:0.01:3.0]; K=[20:1:120];
```

```
x=0*K; y=0*K;
```

```
n=length(K); m=length(a);
```

```
for i=1:n
```

```
    for j=1:m
```

```
        q=[1, 8, 17, K(i)+10, K(i)*a(j)];
```

```
        p=roots(q);
```

```
        if max(real(p)) > 0, x(i)=K(i); y(i)=a(j-1); break; end
```

```
    end
```

```
end
```

```
plot(x,y), grid, xlabel('K'), ylabel('a')
```

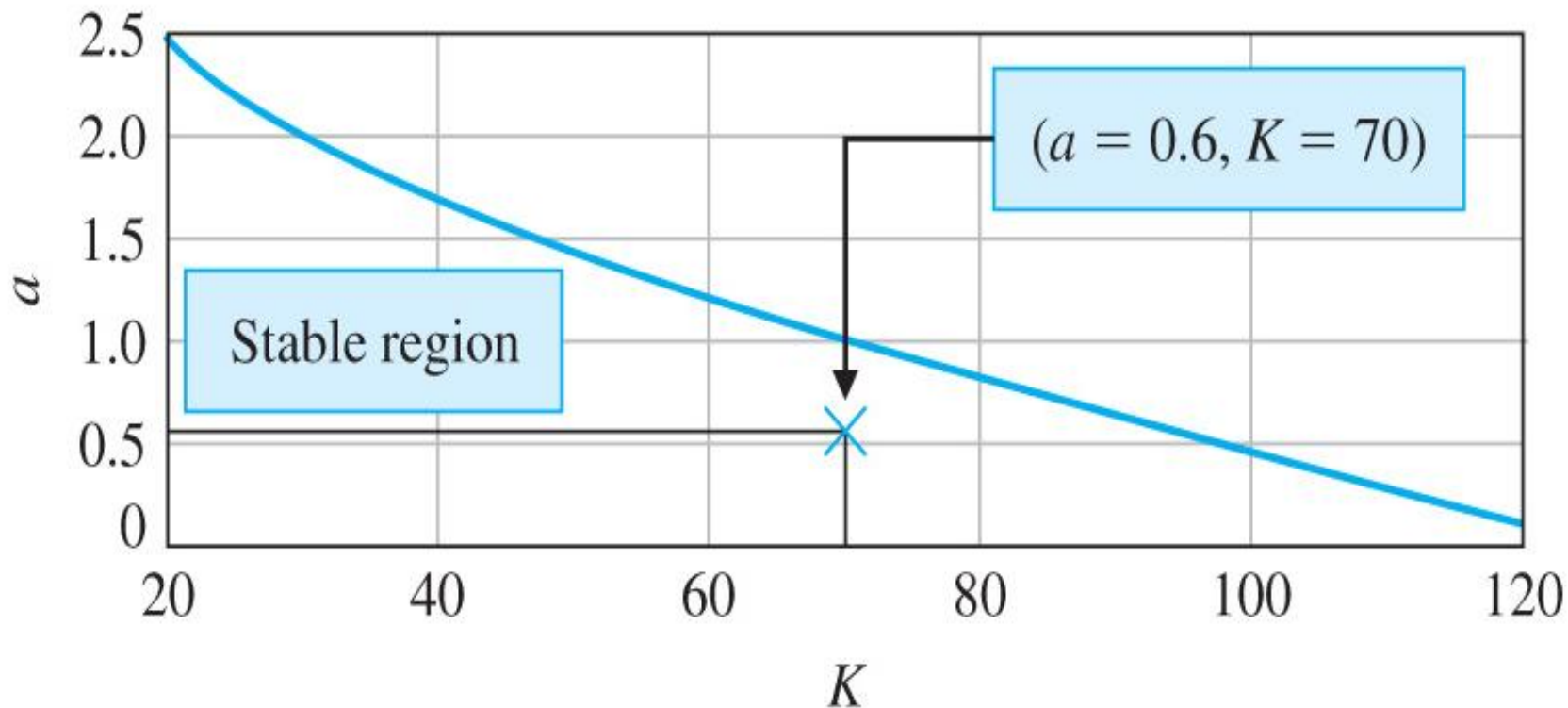
Range of a and K .

Initialize plot vectors as zero vectors of appropriate lengths.

Characteristic polynomial.

For a given value of K , determine first value of a for instability.

6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性



6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性

假设 $r(t) = At, t > 0$, 于是稳态误差为:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s(s+1)(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+2)(s+5) + K(s+a)} \cdot \frac{A}{s^2} = \frac{10A}{aK}$$

其中

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_c G(s)} R(s) = \frac{s(s+1)(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+2)(s+5) + K(s+a)} R(s)$$

给定的稳态误差要求为 $e_{ss} < 0.24A$ 。当下式成立时, 就可以满足这个设计要求

$$\frac{10A}{aK} < 0.24A \quad \text{即} \quad aK > 41.67$$

6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性

在图中稳定区域内，任何满足上式的取值都满足设计要求。

例如, $K = 70, a = 0.6$, 此时的闭环传递函数为:

$$T(s) = \frac{70s + 42}{s^4 + 8s^3 + 17s^2 + 80s + 42}$$

相应的闭环根为:

$$s = -7.0767, s = -0.5781,$$

$$s = -0.1726 + 3.1995i, s = -0.1726 - 3.1995i.$$

相应的单位斜波响应如下图所示，其稳态误差小于**0.24**。

6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性

```
% Two-track vehicle turning control ramp response
```

```
% with  $a=0.6$  and  $K=70$ .
```

```
%
```

```
t=[0:0.01:16]; u=t;
```

$u = \text{unit ramp input}$

```
numgc=[1 0.6]; dengc=[1 1]; sysgc=tf(numgc,dengc);
```

```
numg=[70]; deng=[1 7 10 0]; sysg=tf(numg,deng);
```

```
sysa=series(sysgc,sysg);
```

```
sys=feedback(sysa,[1]);
```

```
y=lsim(sys,u,t);
```

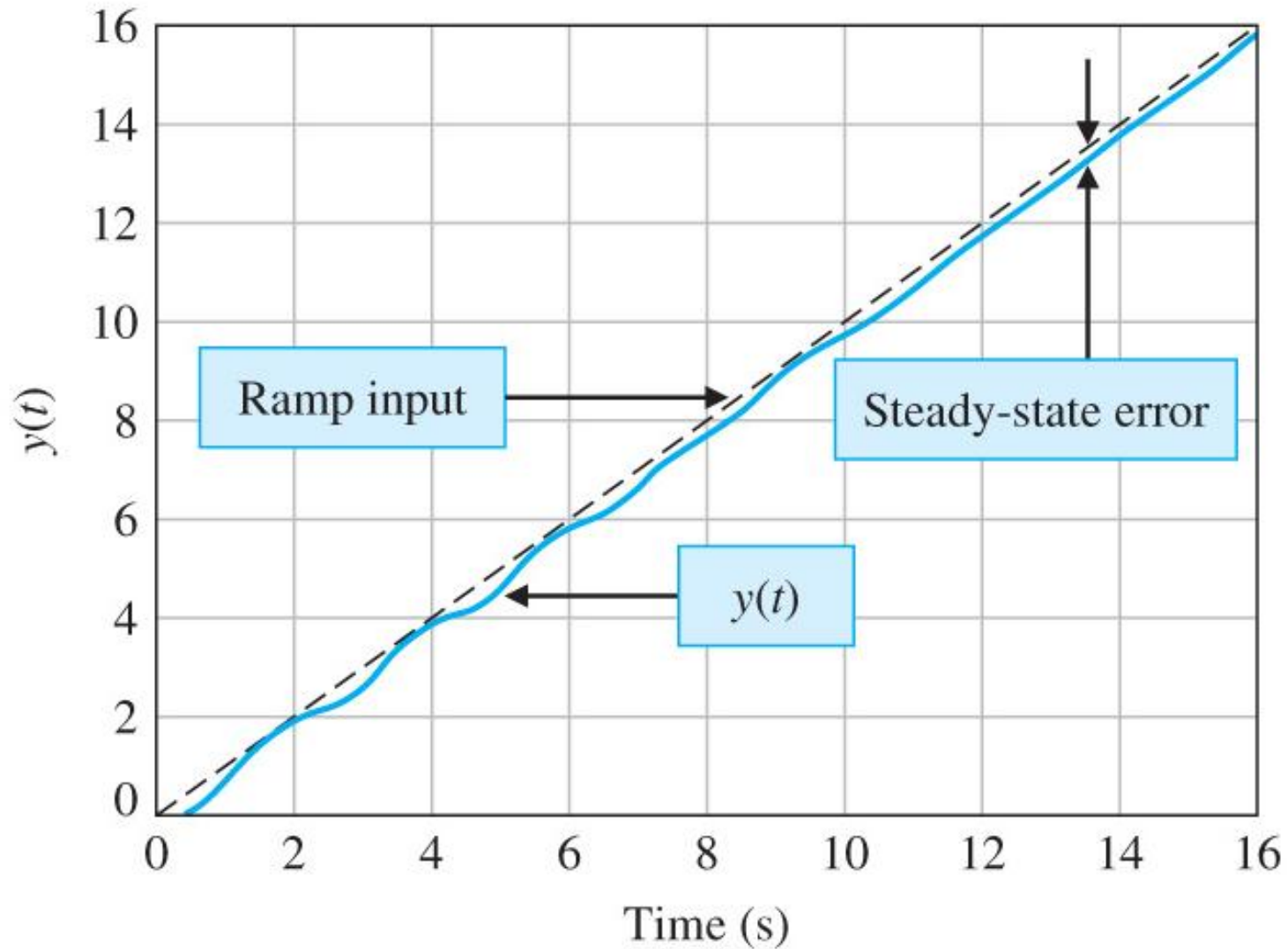
Linear simulation

$a = 0.6$ and $K = 70$

```
plot(t,y,t,u,'--'), grid
```

```
xlabel('Time (s)'), ylabel('y(t)')
```

6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性



6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性

➤ 状态变量的稳定性

➤ 假设系统具有 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 的状态空间模型，则系统的稳定性由与系统矩阵 \mathbf{A} 有关的特征方程所确定。实际上，状态变量系统的特征方程为

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

➤ 如果特征方程所有的根均有负实部，则系统是稳定的。

➤ 当系统的模型以状态变量的形式给出时，我们需要计算 \mathbf{A} 的特征多项式。

➤ **Matlab** 中利用 **poly** 函数计算 \mathbf{A} 的特征多项式。

6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性

矩阵 \mathbf{A} 为：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -8 & -16 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

特征多项式为：

$$s^3 + 8s^2 + 16s + 6 = 0$$

如果 \mathbf{A} 为 $n \times n$ 矩阵，则 **poly**(\mathbf{A})输出的是由向量表示的特征方程。输出向量有 $\mathbf{n} + 1$ 个元素，它由特征多项式的系数按降幂方式排列组成。

Coefficients of characteristic polynomial in descending order.

$n \times n$ matrix

$p = \text{poly}(A)$

```
>>A=[-8 -16 -6;1 0 0;0 1 0];  
>>p=poly(A)
```

```
p =  
    1.0000    8.0000   16.0000    6.0000
```

```
>>roots(p)
```

```
ans =  
   -5.0861  
   -2.4280  
   -0.4859
```

Characteristic polynomial

Stable

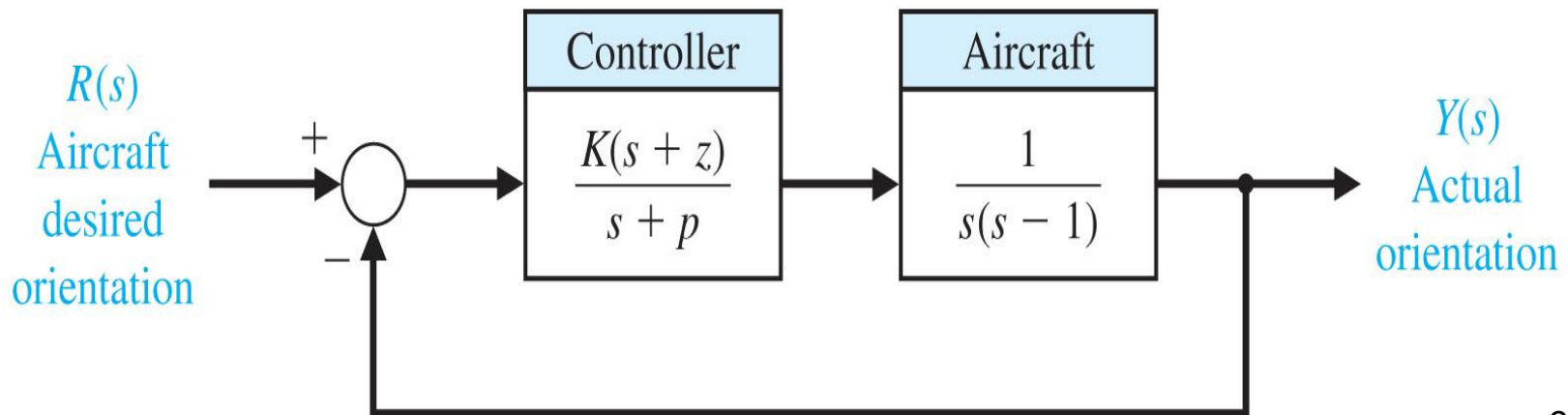
6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性

➤例6.13 不稳定对象的稳定区域

喷气式飞机的控制系统如下图所示。假定 $z > 0$ ，

$p > 0$ ，则系统是开环不稳定的。开环系统的特征方程为：

$$s(s-1)(s+p) = s[s^2 + (p-1)s - p] = 0$$



6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性

闭环系统的特征方程为：

$$s^3 + (p-1)s^2 + (K-p)s + Kz = 0$$

Routh阵列

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & K-p \\ s^2 & p-1 & Kz \\ s^1 & b_2 & \\ s^0 & Kz & \end{array}$$

其中

$$b_2 = \frac{(p-1)(K-p) - Kz}{p-1}$$

6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性

根据**Routh – Hurwitz**判据，应有 $Kz > 0$,

$p > 1$, $b_2 > 0$, 则

$$(p-1)(K-p) - Kz = K[(p-1) - z] - p(p-1) > 0$$

故

$$K > \frac{p(p-1)}{(p-1) - z}$$

6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性

下面分**3**种情况加以讨论：

(1) $z \geq p-1$ ：由于 $p > 1$ ，因此只要 $\mathbf{K} > 0$ ，就能满足稳定性要求。

(2) $z = p-1$ ：当 $0 < K < \infty$ 时，都不能满足稳定性要求。

(3) $z < p-1$ ：当 $0 < K < \infty$ 时，只有满足上式的 \mathbf{K} 值符合稳定性要求。

6.6 应用控制设计软件分析系统稳定性

```
% Jump-jet control system 3-D stability region.
```

```
%
```

```
[p,z]=meshgrid(1.2:0.2:10,0.1:.2:10);
```

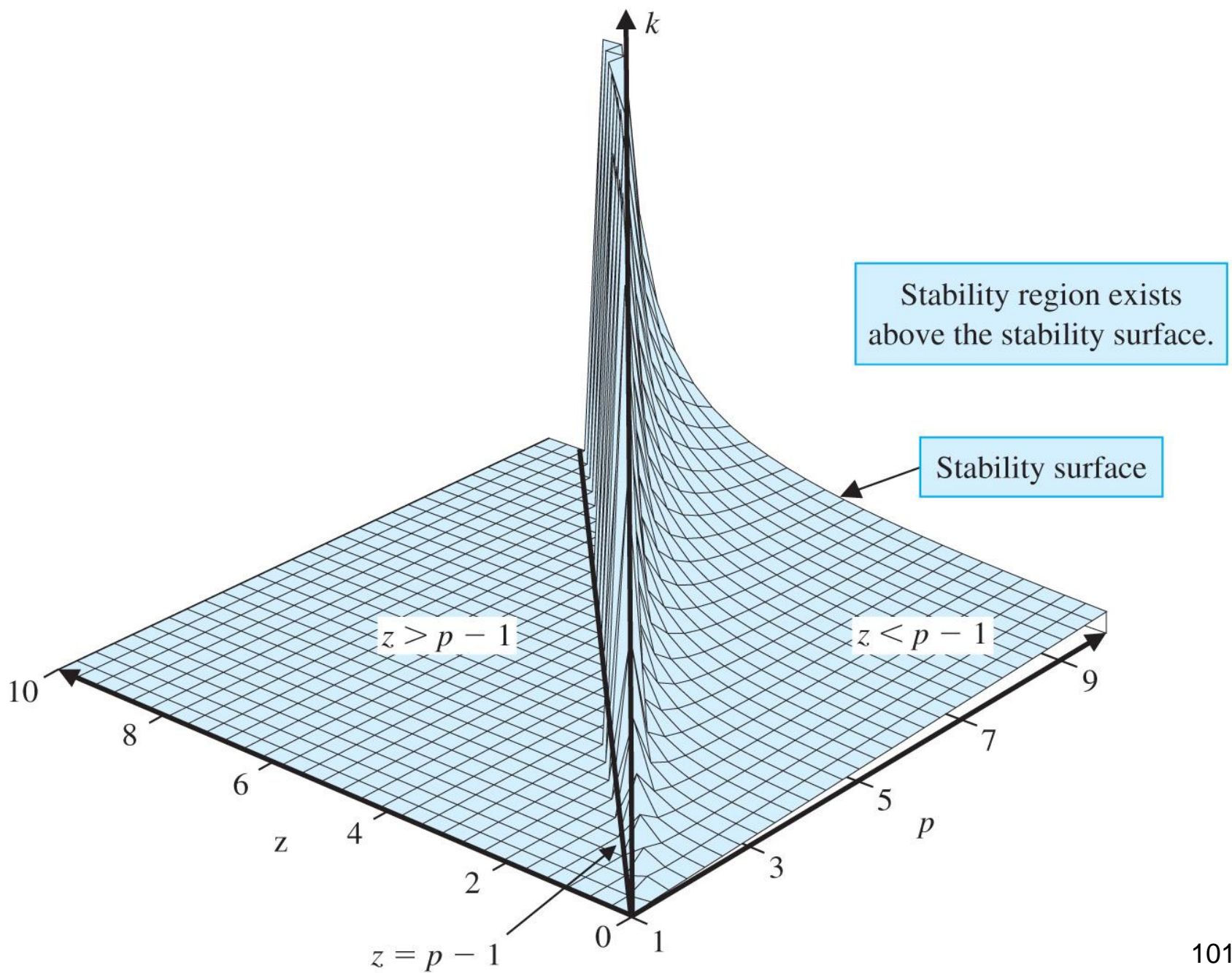
```
k=p.*(p-1)./(p-1-z);
```

```
mesh(k)
```

Transform domains for
 p and z for mesh plot.

Stability surface

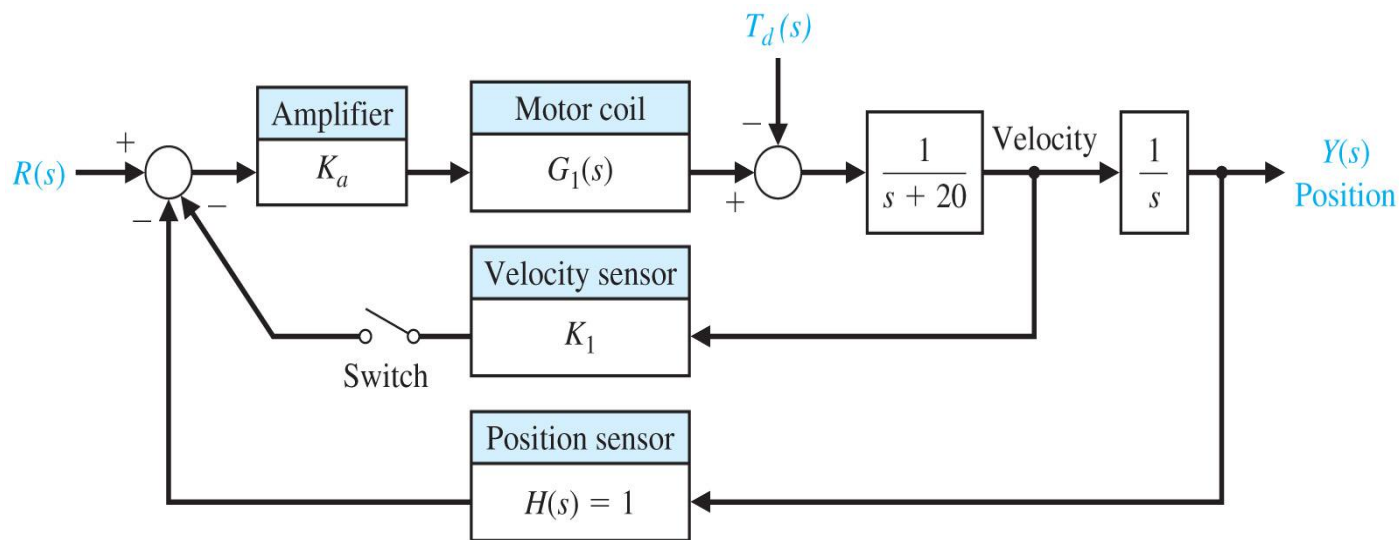
Generate 3D plot.



6.7 系列设计案例：磁盘驱动器读取系统

➤ 没有速度反馈时的闭环传递函数：

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_a G_1(s) G_2(s)}{1 + K_a G_1(s) G_2(s)}$$
$$G_1(s) = \frac{5000}{s + 1000}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s(s + 20)}$$



带有可选择的速度反馈的闭环磁盘驱动器读取系统

6.7 系列设计案例：磁盘驱动器读取系统

➤ 闭环系统特征方程：

$$s(s+20)(s+1000) + 5000K_a = 0$$

$$s^3 + 1020s^2 + 20000s + 5000K_a = 0$$

Routh阵列：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 20000 \\ s^2 & 1020 & 5000K_a \\ s^1 & b_1 & \\ s^0 & 5000K_a & \end{array} \quad b_1 = -\frac{5000K_a - (20000)1020}{1020}$$

为保证系统闭环稳定，要求 $0 < K_a < 4080$ 。

$K_a = 4080$ 时， $b_1 = 0$ ，系统临界稳定。由辅助方程：

$$1020s^2 + 5000(4080) = 0$$

系统在虚轴上有极点 $s = \pm j141.4$

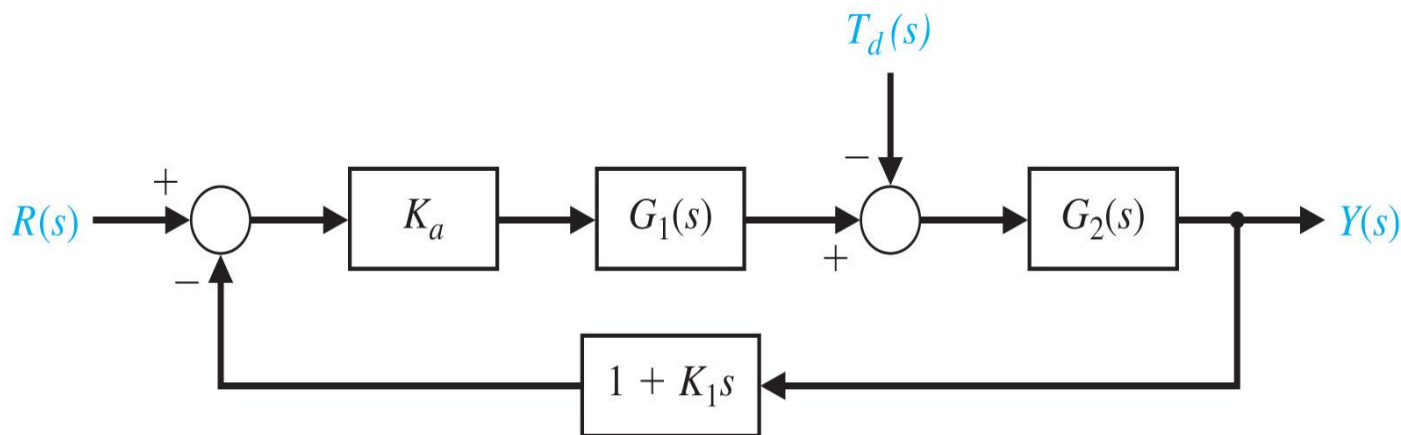
6.7 系列设计案例：磁盘驱动器读取系统

➤ 有速度反馈时的闭环传递函数：

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_a G_1(s) G_2(s)}{1 + [K_a G_1(s) G_2(s)](1 + K_1 s)}$$

反馈因子等价于 $1 + K_1 s$

特征方程为： $1 + [K_a G_1(s) G_2(s)](1 + K_1 s) = 0$



速度反馈开关闭合时的等价系统

6.7 系列设计案例：磁盘驱动器读取系统

$$s(s+20)(s+1000)+5000K_a(1+K_1s)=0$$

$$s^3+1020s^2+[20000+5000K_aK_1]s+5000K_a=0$$

Routh阵列:

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & 20000+5000K_aK_1 \\ s^2 & 1020 & 5000K_a \\ s^1 & b_1 & \\ s^0 & 5000K_a & \end{array}$$

$$b_1 = -\frac{5000K_a - (20000+5000K_aK_1)1020}{1020}$$

为保证稳定，在 $K_a > 0$ 时，选择 (K_a, K_1) ，使 $b_1 > 0$
 选 $K_a = 100$ ， $K_1 = 0.05$ ，百分比超调量0%，允许误差2%的调整时间260ms。再选 K_1 可以满足调整时间

6.7 系列设计案例：磁盘驱动器读取系统

```
Ka=100; K1=0.05;
ng1=[5000]; dg1=[1 1000]; sys1=tf(ng1,dg1);
ng2=[1]; dg2=[1 20 0]; sys2=tf(ng2,dg2);
nc=[K1 1]; dc=[0 1]; sysc=tf(nc,dc);
syso=series(Ka*sys1,sys2);
sys=feedback(syso,sysc); sys=minreal(sys);
t=[0:0.001:0.5];
y=step(sys,t); plot(t,y)
ylabel('y(t)'),xlabel('Time (s)'),grid
```

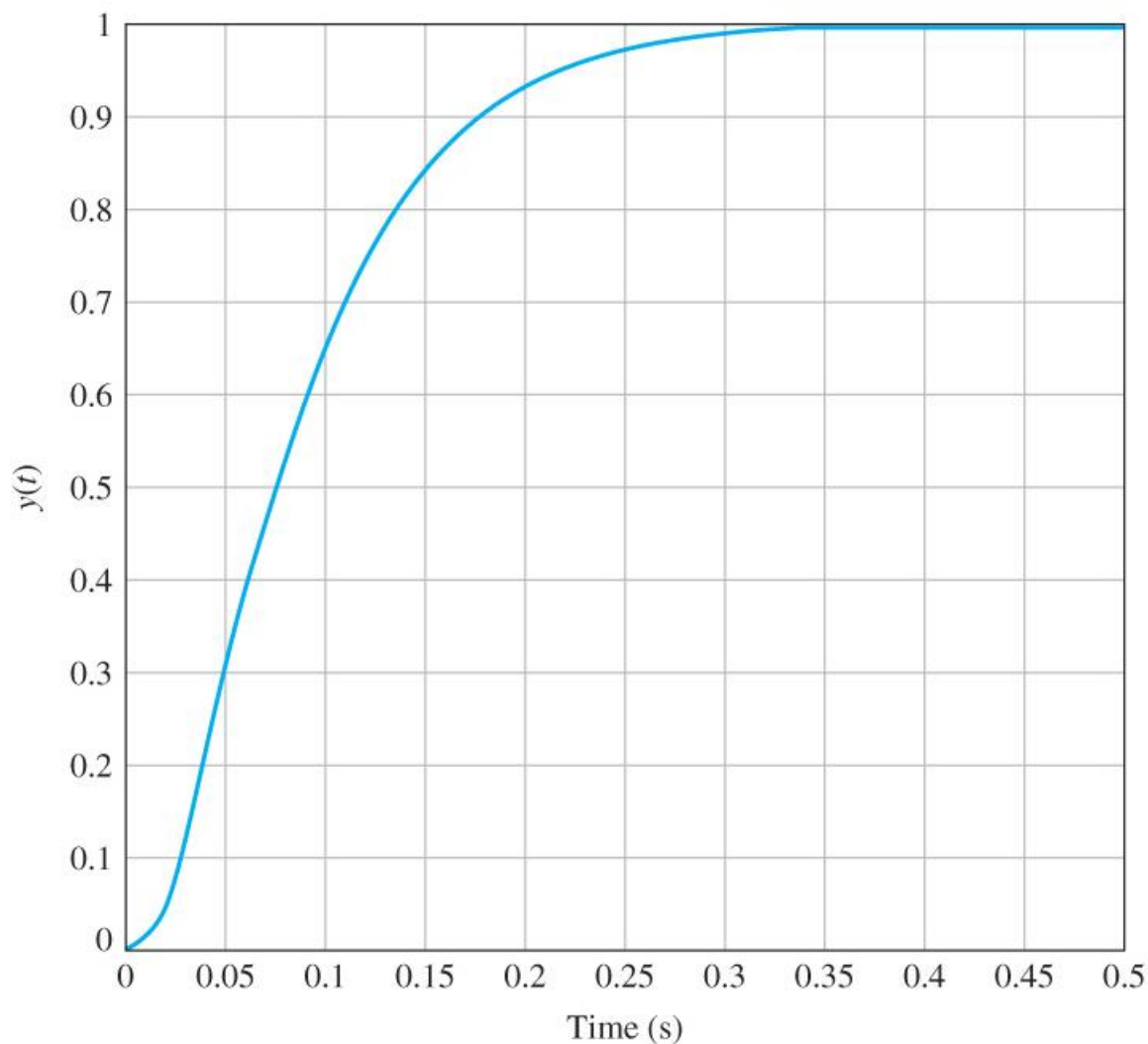
Select the velocity
feedback gain K_1 and
amplifier gain K_a .

磁盘驱动器系统性能与设计指标的对比

| 性能指标 | 期望值 | 实际值 |
|-----------|----------------------|--------------------|
| 百分比超调量 | <5% | 0% |
| 调整时间 | <250ms | 260ms |
| 单位扰动的最大响应 | $< 5 \times 10^{-3}$ | 2×10^{-3} |

有速度反馈的系统响应： **MatLab**文件

6.7 系列设计案例：磁盘驱动器读取系统



有速度反馈的系统响应： $Ka=100$ 、 $KI=0.05$

6.8 总结

- 反馈控制系统稳定性
- 有界输入有界输出 (**BIBO**) 稳定性
- **BIBO**稳定性与系统传递函数极点在 S 平面上位置的关系
- *Routh-Hurwitz*稳定性判据
- 相对稳定性