

# 现代控制系统

## 第二章：系统数学模型

## 2. 系统数学建模

- 物理系统的数学建模是控制系统设计和分析过程中的关键环节。通常用常微分方程（组）来描述系统的动态特性。本章讨论的实际物理系统包括机械系统、流体系统和电器系统等。
- 预期收获
  - ✓ 体会到能够用微分方程描述物理系统的动态特性
  - ✓ 能够通过泰勒级数展开来实现模型的线性近似
  - ✓ 理解并掌握拉普拉斯变换及其在传递函数计算中的作用
  - ✓ 掌握框图模型和信号流图模型，认识到其在控制系统分析与设计中的作用
  - ✓ 理解数学建模在控制系统设计过程中的重要作用

## 2. 系统数学建模

- 2. 1 引言
- 2. 2 物理系统的微分方程
- 2. 3 物理系统的线性近似
- 2. 4 Laplace变换
- 2. 5 线性系统的传递函数
- 2. 6 框图模型
- 2. 7 信号流图模型
- 2. 8 控制系统的计算机辅助分析
- 2. 9 设计实例
- 2. 10 利用MATLAB进行系统仿真
- 2. 11 循序渐进设计示例：磁盘驱动读取系统
- 2. 12 小结

## 2.1 引言

- 数学模型 (Mathematical models)
  - 利用数学工具对系统行为进行的描述
- 线性系统 (Linear system)
  - 满足叠加性 (superposition) 和齐次性 (homogeneity) 的系统
  - 线性叠加原理
    - 若系统对激励  $x_1(t)$  的响应为  $y_1(t)$ ，对激励  $x_2(t)$  的响应为  $y_2(t)$ ，则线性系统对激励  $x_1(t) + x_2(t)$  的响应必须是  $y_1(t) + y_2(t)$
  - 齐次性准则
    - 若系统对输入激励  $x$  的输出响应为  $y$ ，则线性系统对缩放常数  $(\beta)$  倍的输入激励  $\beta x$  的响应必须是  $\beta y$

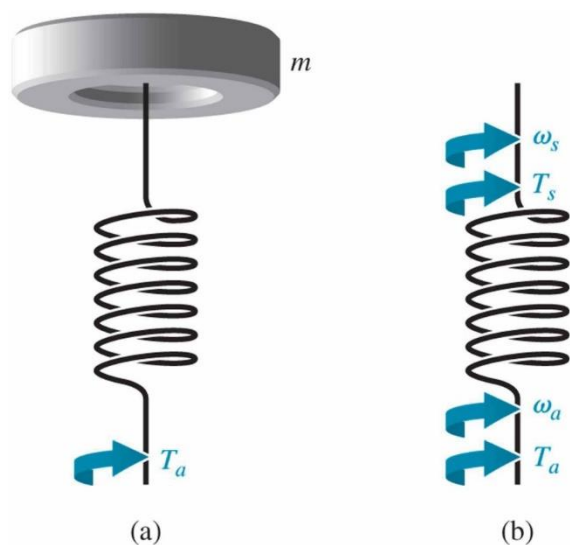
# 分析研究动态系统的步骤

1. 构建和定义系统及其元件
2. 基于基本的物理模型，确定必要的假设条件并推导数学模型
3. 列写描述该模型的微分方程（组）
4. 求解方程（组），得到所求输出变量的解
5. 检查假设条件和所得到的解
6. 如果必要，重新分析和设计系统

## 2.2 物理系统的微分方程（组）

根据受控过程自身遵循的物理规律，可以建立描述物理系统动态特性的微分方程。这种方法可以应用于机械系统（牛顿运动定律）、电气系统（基尔霍夫定律）、热力学系统（热力学定律）等，并能够取得同样好的效果。

如图2.1所示，考虑到扭矩 $T_a(t)$ 作用下的弹簧-质量（块）系统，假设弹簧的质量为零，需要测量的物理量是传送到质量块 $m$ 上的扭矩 $T_s(t)$ 。



由于弹簧的质量可以忽略不计，因此作用在弹簧上的扭矩为零： $T_a(t) - T_s(t) = 0$ 。由此可知，作用于弹簧另一端的外部扭矩，通过弹簧原封不动地传递到了另一端，因此，该扭矩称为通过型变量。

如果考虑弹簧两端的旋转角度之差： $\omega(t) = \omega_s(t) - \omega_a(t)$ ，则需要在弹簧两端测量角速度，才能测得角速度差，角速度因而称为跨越型变量。

图2.1 (a) 旋转弹簧—质量系统；  
(b) 弹簧元件

# 表2.1 物理系统的通过型和跨越型变量小结

系统	通过元件的变量	积分通过型变量	跨越元件的变量	积分跨越型变量
电力系统	电流, $i$	电荷, $q$	电压差, $v_{21}$	磁通匝连数, $\lambda_{21}$
机械传动系统	力, $F$	平动动量, $P$	速度差, $v_{21}$	位移差, $y_{21}$
机械旋转系统	扭矩, $T$	角动量, $h$	角速度差, $\omega_{21}$	角位移差, $\theta_{21}$
流体系统	流量, $Q$	容积, $V$	压强差 $P_{21}$	压力动量, $\gamma_{21}$
热力系统	热流量, $q$	热能, $H$	温差 $T_{21}$	

**Table 2.1 Summary of Through- and Across-Variables for Physical Systems**

电力系统

机械传动系统

机械旋转系统





流体系统

热力系统

System	Variable Through Element	Integrated Through-Variable	Variable Across Element	Integrated Across-Variable
Electrical	Current, $i$	Charge, $q$	Voltage difference, $v_{21}$	Flux linkage, $\lambda_{21}$
Mechanical translational	Force, $F$	Translational momentum, $P$	Velocity difference, $v_{21}$	Displacement difference, $y_{21}$
Mechanical rotational	Torque, $T$	Angular momentum, $h$	Angular velocity difference, $\omega_{21}$	Angular displacement difference, $\theta_{21}$
Fluid	Fluid volumetric rate of flow, $Q$	Volume, $V$	Pressure difference, $P_{21}$	Pressure momentum, $\gamma_{21}$
Thermal	Heat flow rate, $q$	Heat energy, $H$	Temperature difference, $\mathcal{T}_{21}$	

## 表2.2 理想元件遵循的微分方程


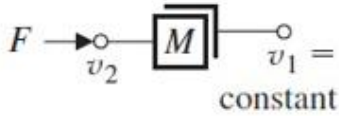
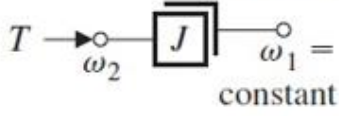
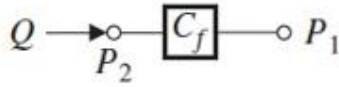
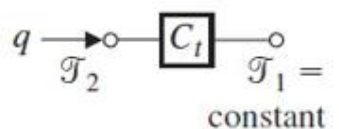
### 感性储能元件

	Physical Element	Governing Equation	Energy $E$ or Power $\mathcal{P}$	Symbol
电感	Electrical inductance	$v_{21} = L \frac{di}{dt}$	$E = \frac{1}{2} Li^2$	
平动弹簧	Translational spring	$v_{21} = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$	$E = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k}$	
旋转弹簧	Rotational spring	$\omega_{21} = \frac{1}{k} \frac{dT}{dt}$	$E = \frac{1}{2} \frac{T^2}{k}$	
流体惯量	Fluid inertia	$P_{21} = I \frac{dQ}{dt}$	$E = \frac{1}{2} IQ^2$	



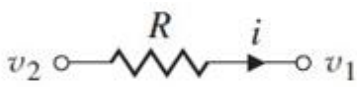
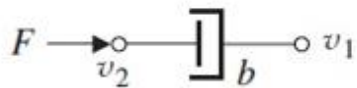
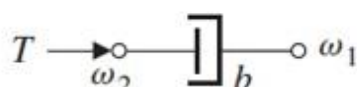
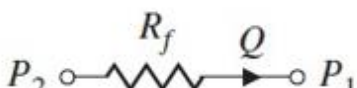
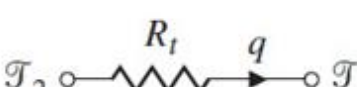
# 表2.2 理想元件遵循的微分方程

## 容性储能元件

电容	Electrical capacitance	$i = C \frac{dv_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2} C v_{21}^2$	
平动质量	Translational mass	$F = M \frac{dv_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2} M v_2^2$	
转动惯量	Rotational mass	$T = J \frac{d\omega_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2} J \omega_2^2$	
流体容量	Fluid capacitance	$Q = C_f \frac{dP_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2} C_f P_{21}^2$	
热容量	Thermal capacitance	$q = C_t \frac{d\mathcal{T}_2}{dt}$	$E = C_t \mathcal{T}_2$	

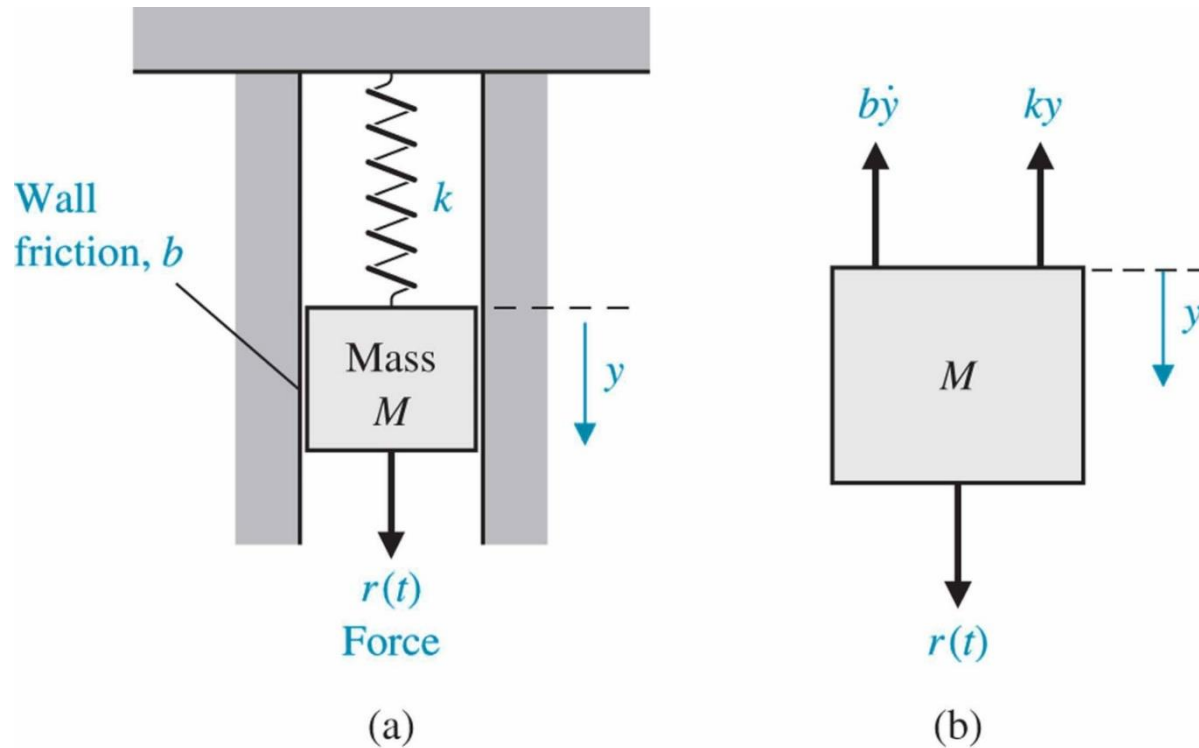
# 表2.2 理想元件遵循的微分方程

## 耗能型元件

	物理元件	微分方程	能量或功率	符号
电阻	Electrical resistance	$i = \frac{1}{R} v_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R} v_{21}^2$	
平动 阻尼器	Translational damper	$F = b v_{21}$	$\mathcal{P} = b v_{21}^2$	
旋转 阻尼器	Rotational damper	$T = b \omega_{21}$	$\mathcal{P} = b \omega_{21}^2$	
流阻	Fluid resistance	$Q = \frac{1}{R_f} P_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_f} P_{21}^2$	
热阻	Thermal resistance	$q = \frac{1}{R_t} \mathcal{T}_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_t} \mathcal{T}_{21}^2$	

# 弹簧-质量-阻尼系统

这个简单系统可用于描述汽车减震装置，假定壁摩擦为黏性阻尼，即摩擦力与质量块的运动速度成正比。



Copyright © 2011 Pearson Education, Inc. publishing as Prentice Hall

**图2.2** (a) 弹簧-质量-阻尼系统 (b) 质量的运动分析图

# 弹簧-质量-阻尼系统

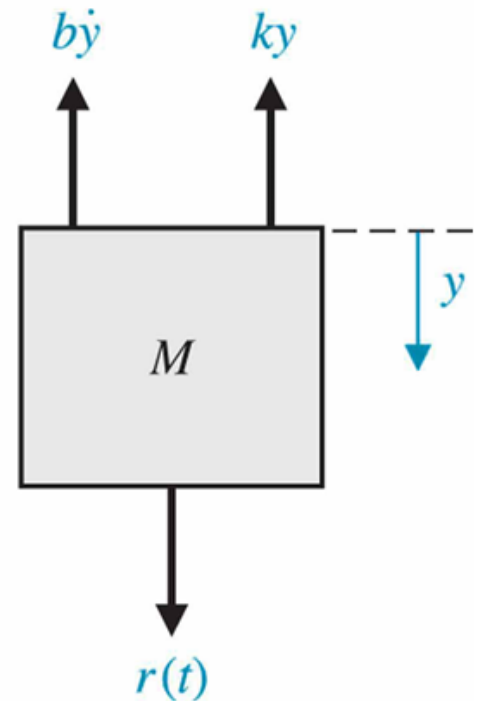
在质量块-弹簧-阻尼器系统中，分析质量块M的受力情况，由牛顿第二定律可得：

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = r(t)$$

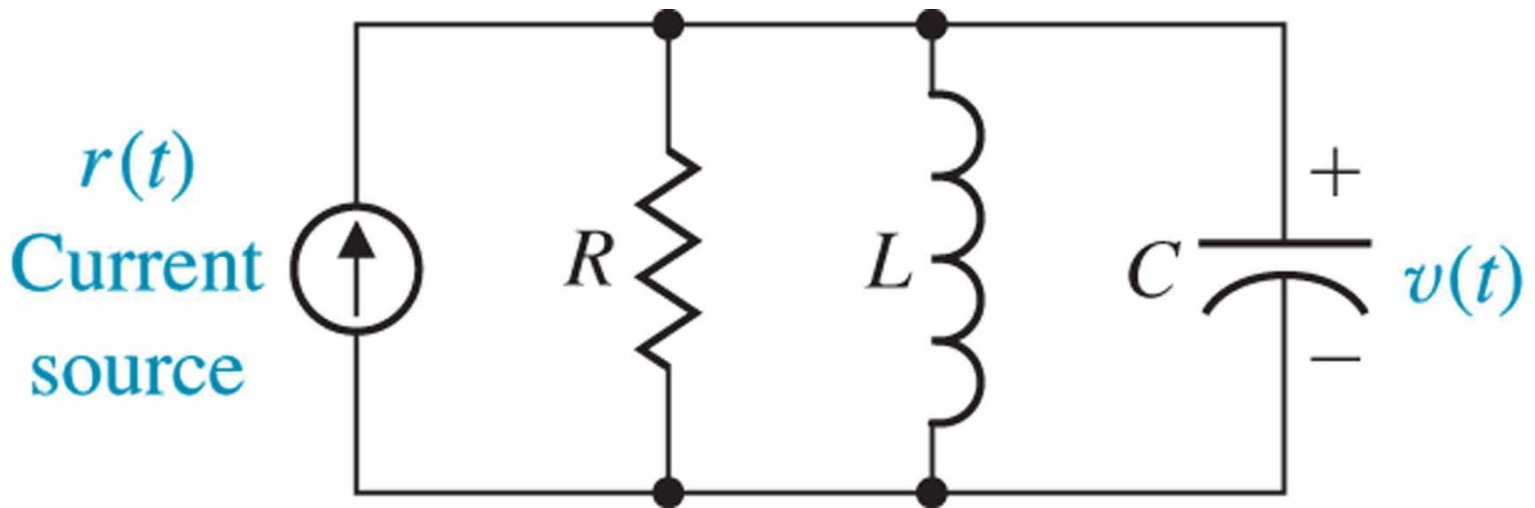
其中，k是理想弹簧元件的弹性系数，b为黏性摩擦的摩擦系数

令 
$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$M \frac{dv(t)}{dt} + bv(t) + k \int_0^t v(t) dt = r(t)$$



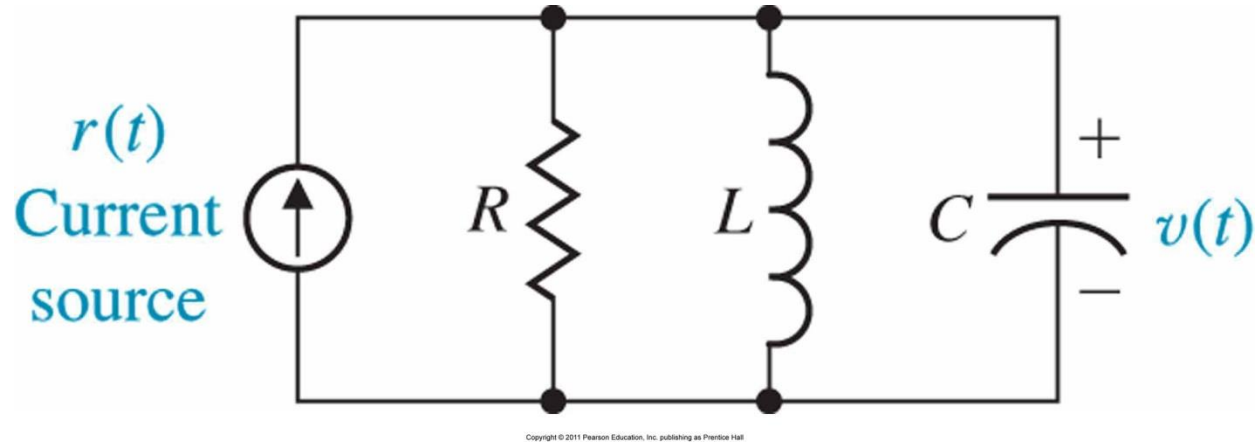
# RLC电路



Copyright © 2011 Pearson Education, Inc. publishing as Prentice Hall

图2.3 RLC电路

# RLC电路



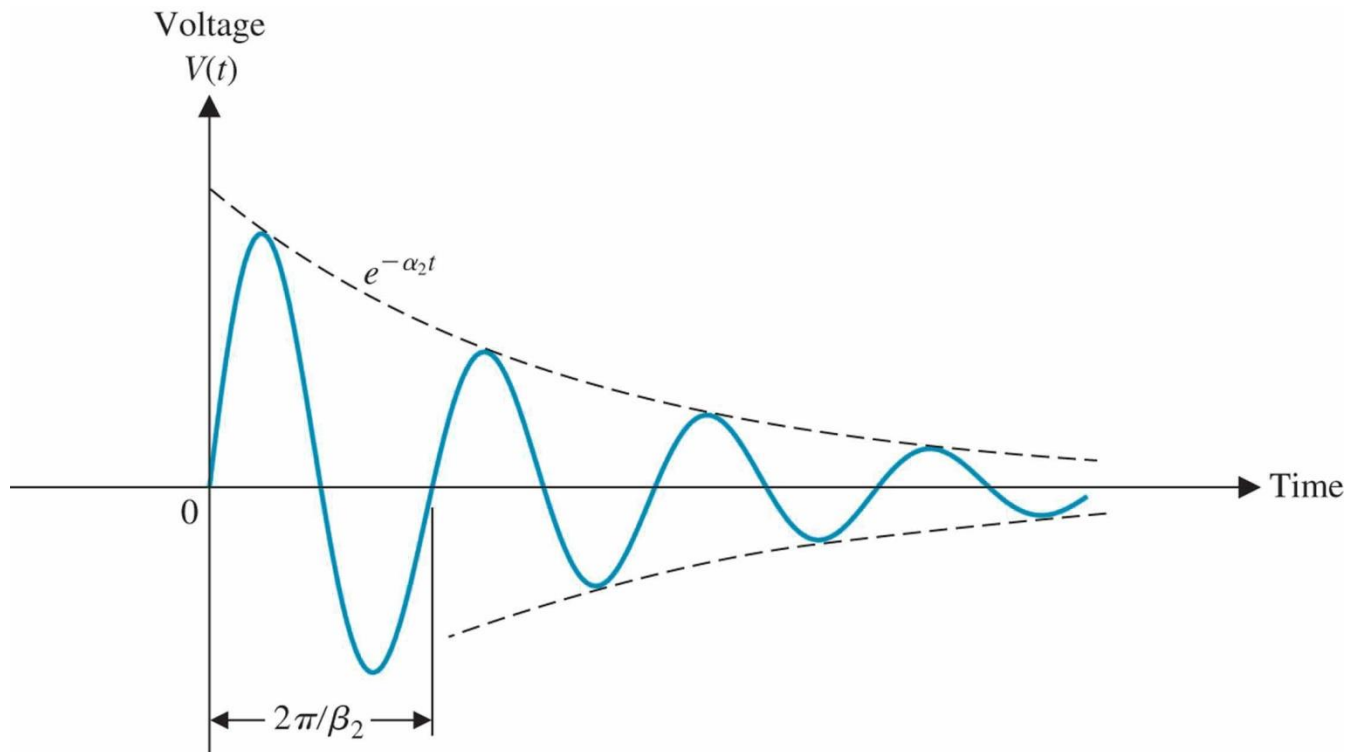
$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt = r(t)$$

# RLC电路

当RLC电路的电流恒定，RLC电路的输出电压的响应曲线



Copyright © 2011 Pearson Education, Inc. publishing as Prentice Hall

# 相似变量和相似系统

弹簧-质量-阻尼系统（机械系统）和RLC电路（电气系统）的微分方程：

$$M \frac{dv(t)}{dt} + bv(t) + k \int_0^t v(t) dt = r(t)$$

$$C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt = r(t)$$

速度和电压、力与电流在方程中是等效的变量，因此又称为相似变量，上述两个系统也就称为相似系统

相似系统

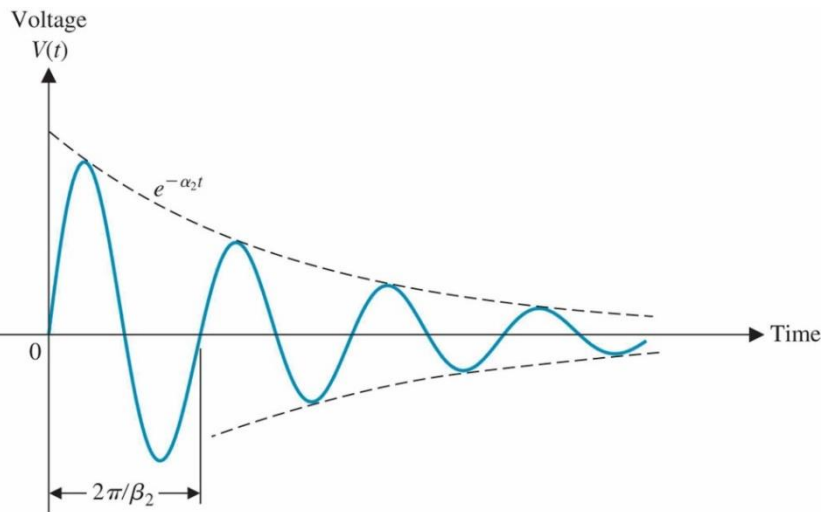


图2.4 典型响应

在系统建模中，相似系统这一概念的作用巨大，由于存在相似系统及相似的解，分析人员可以将一个系统的分析结果，推广到具有相同微分方程模型的其它系统。因此，我们所学的关于电气系统的知识，可以推广到机械、热力和流体等系统。



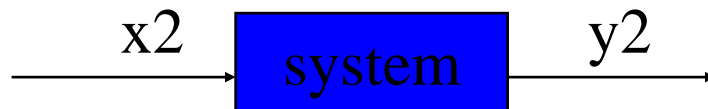
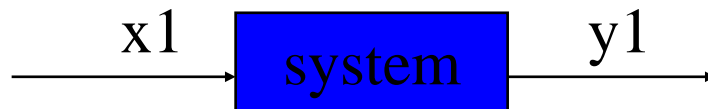
## 2.3 物理系统的线性近似

- ◆ 当不限制参数的变化范围时，所有的物理系统终究都是非线性系统
- ◆ 而在参数变化的一定范围内，绝大多数物理系统呈现出线性特性
- ◆ 在研究实际物理系统时，合理的假设和线性化处理是非常有用的。这样，就能够根据线性等效系统遵循的物理规律，得到物理系统的线性微分方程模型

## 2.3 物理系统的线性近似

线性系统：满足叠加性和齐次性的系统

已知



如果



则系统是线性的

## 2.3 物理系统的线性近似

### 非线性系统

如果叠加性和齐次性不满足，则系统是非线性的。

例如：

$$y = x^2$$

# 线性近似 (Linear approximation)

线性近似：指通过建立设备的输入与输出之间的线性关系而获得的近似模型。

考虑一个具有激励变量 $x(t)$ 和响应变量 $y(t)$ 的通用元件，两个变量之间的关系可以写为下面的一般形式：

$$y = g(x(t))$$

该系统的正常工作点为 $x_0$ ，由于函数曲线在工作点附近的区间内常常是连续可微的，因此，在工作点附近可以进行泰勒级数展开：

$$y = g(x_0) + \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_0} * (x - x_0) + \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_0} * \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots \quad (2.7)$$

## 线性近似 (Linear approximation)

当  $(x - x_0)$  在小范围内波动时，以函数在工作点处的导数

$$\left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_0}$$

为斜率的直线，能够很好地拟合函数的实际响应曲线。

因此，方程 (2.7) 可以近似为：

$$y = g(x_0) + \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_0} * (x - x_0) = y_0 + m(x - x_0) \quad (2.8)$$

其中， $m$ 表示工作点处的斜率。方程 (2.8) 可以改写为如下的线性方程：

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

或

$$\Delta y = m\Delta x$$

## 线性近似 (Linear approximation)

如图(2.5) (a)所示, 质量块M位于非线性弹簧之上, 非线性弹簧的弹力特征为  $f = y^2$ 。根据图(2.5) (b) 的线性化过程, 该系统的位移增量的小信号线性模型:

$$\Delta f = m \Delta y$$

其中  $m = \left. \frac{df}{dy} \right|_{y_0}$

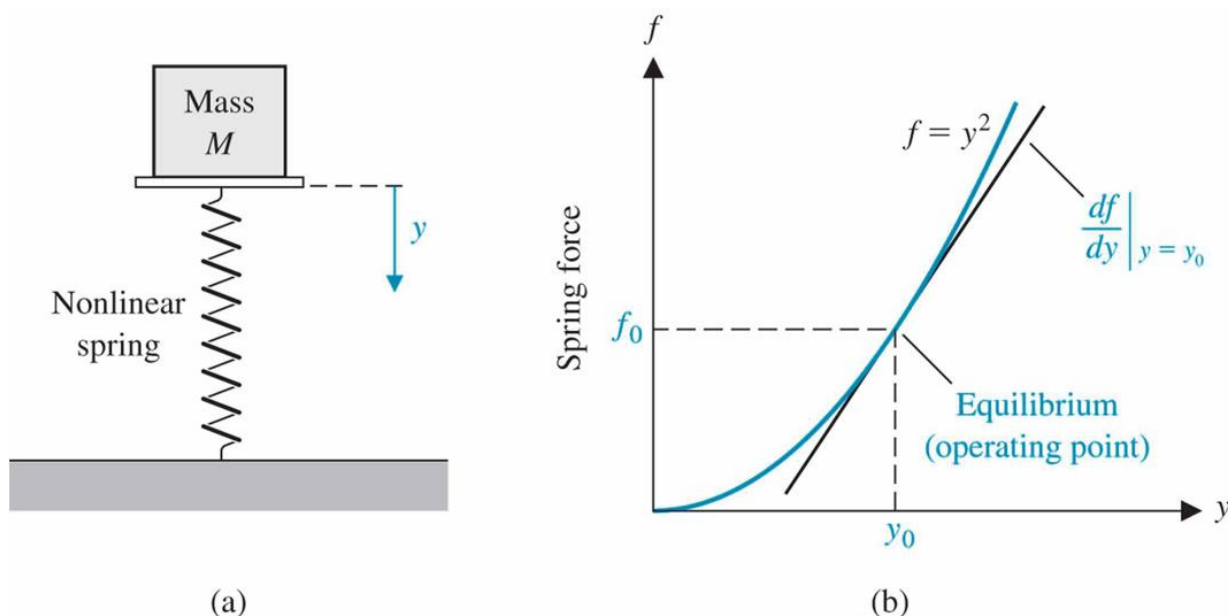


图2.5 (a) 质量块位于非线性弹簧之上; (b) 弹簧弹力与位移  $y$  的关系

# 线性近似 (Linear approximation)

如果响应变量 $y(t)$ 依赖于多个激励变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则函数关系可以写为:

$$y = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

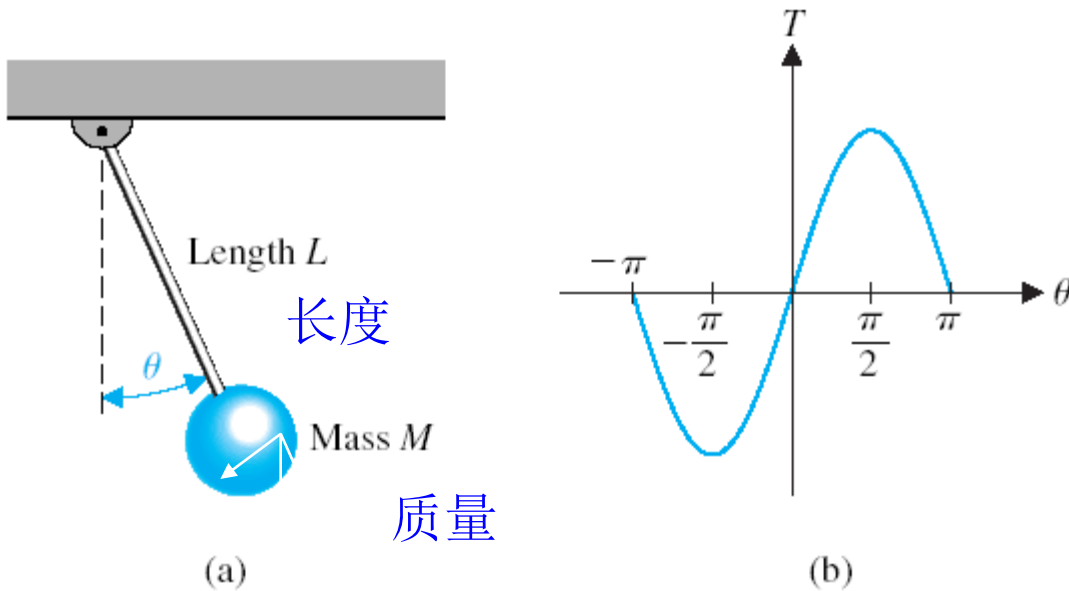
在工作点  $x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}$  处, 利用多元泰勒级数展开对非线性系统进行线性化近似, 当高阶项可以忽略不计时, 只取其一阶项, 线性近似式可以写为

$$y = g(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}) + \frac{\partial g}{\partial x_1} \Big|_{x=x_0} (x_1 - x_{1_0}) + \frac{\partial g}{\partial x_2} \Big|_{x=x_0} (x_2 - x_{2_0}) + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n} \Big|_{x=x_0} (x_n - x_{n_0})$$

(2.11)

## 2.3 物理系统的线性近似

### 例2.1 摆振荡器模型 Pendulum oscillator model



$T$  = 质量上的转矩, 输出  
 $\theta$  = 角位移, 输入  
 $M$  = 摆质量  
 $L$  = 摆长度

图2.6 摆的振荡器



## 例2.1 摆振荡器模型 Pendulum oscillator model

作用于质量块上的扭矩:  $T = MgL \sin \theta$  (2.12)

质量块的平衡位置:  $\theta_0 = 0^\circ$

利用式(2.12)在平衡点处的一阶导数, 可以得到系统的线性近似:

$$T - T_0 \cong MgL \left. \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} (\theta - \theta_0)$$

其中  $T_0 = 0$ , 于是可以得到

$$T = MgL(\cos 0^\circ)(\theta - 0^\circ) = MgL\theta \quad (2.13)$$

在  $(-\pi/4) \leq \theta \leq (\pi/4)$  的范围内, 式(2.13)的近似精度非常高。

## 2.4 Laplace变换

- Laplace变换

- 将时域函数 $f(t)$  转换成复频域函数 $F(s)$ 的变换
- 容易求解复杂的微分方程

# 线性微分方程的求解

线性微分方程的求解方法：

解析法、拉普拉斯变换法、计算机辅助求解

拉普拉斯变换法求解微分方程基本步骤：

- (1) 考虑初始条件，对微分方程中的各项进行拉式变换，  
变成变量s的代数方程。


$$f(t) \Rightarrow F(s)$$

- (2) 由变量s的代数方程求出系统输出输出量的拉式变换式。


$$F(s) \Rightarrow Y(s)$$

- (3) 对输出量的拉式变换式进行拉式反变换，得到系统微  
分方程的解。


$$Y(s) \Rightarrow y(t)$$

# 拉普拉斯变换与逆变换

(1) 拉氏变换定义:

设函数  $f(t)$  满足 ①  $t < 0$  时  $f(t) = 0$

②  $t > 0$  时,  $f(t)$  分段连续  $\int_0^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt < \infty$

则  $f(t)$  的拉氏变换存在, 其表达式记作:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

控制工程上函数满足拉氏变换要求: 能量有限

(2) 拉氏变换基本定理

- 线性定理  $L[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
- 位移定理  $L[e^{-at} f(t)] = F(s + a)$
- 延迟定理  $L[f(t - \tau)] = e^{-\tau s} F(s)$

# 拉普拉斯变换与逆变换

- 定义 :  $F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f(t)\}$
- 其中:  $F(s)$ 是像函数(image function)

$f(t)$ 是原函数 (object function)

- 逆 Laplace变换 :  $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{+st} ds$

Laplace变量  $s$  可看成微分算子

$$s \equiv \frac{d}{dt} \qquad \frac{1}{s} \equiv \int_{0-}^t dt$$

# 简单函数的 Laplace 变换

1. 阶跃函数 (Step function)  $1(t)$
2. 脉冲函数 (Pulse function)  $\delta(t)$
3. 斜坡函数 (Ramp function)  $t$
4. 指数延迟函数 (Decaying exponential)  $e^{at}$
5. 正弦函数 (Sinusoid)  $\sin\omega t$

# 阶跃和脉冲函数 $1(t), \delta(t)$

- 阶跃函数：
$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$L[1(t)] = \int_0^{\infty} 1(t) \cdot e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

- 脉冲函数：
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot f(t) dt = f(0)$$

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} dt = e^{-st} \bigg|_{t=0} = 1$$

# 斜坡函数 $t$

- 斜坡函数：
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$

- 用部分分式法：
$$\int u dv = uv - \int v du$$

则

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= \int_0^{\infty} t \cdot e^{-st} dt = -t \frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left( -\frac{e^{-st}}{s} \right) dt \\ &= \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-st}}{s} \right) dt = -\frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$



# 常见拉氏变换

微分  $s \equiv \frac{d}{dt}$

积分  $\frac{1}{s} \equiv \int_{0-}^t dt$

	原函数	像函数
脉冲	$\delta(t)$	1
阶跃	$1(t)$	$1/s$
斜坡	$t$	$\frac{1}{s^2}$

# 典型函数的拉氏变换

时域上函数	$f(t) \quad t \geq 0$	复数 (S) 域: $F(s)$
脉冲	$\delta(t)$	$1$
单位阶跃	$1[t]$	$1/s$
速度	$t$	$1/s^2$
加速度	$\frac{1}{2}t^2$	$1/s^3$
指数	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
正弦	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

# 指数延迟函数 $e^{at}$

- 指数延迟函数

$$e^{at}$$

指数延迟函数的拉氏变换

$$L[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = -\left. \frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

# 正弦函数 $\sin \omega t$

- 正弦函数

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

正弦函数的拉氏变换

$$\begin{aligned} L[\sin \omega t] &= \int_0^{\infty} \sin \omega t \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

# Laplace变换性质 (1)

- 叠加性Superposition

$$L[K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t)] = K_1 F_1(s) + K_2 F_2(s)$$

- 时间平移Translation in time  $L[f(t - a)] = e^{-as} \cdot F(s)$
- 复频域微分Complex differentiation  $L[t \cdot f(t)] = -\frac{d}{ds} F(s)$
- S域平移Translation in the s domain

$$L[e^{-at} f(t)] = F(s + a)$$

- 实域微分Real differentiation

$$L[f'(t)] = s \cdot F(s) - f(0^+)$$

# Laplace变换性质 (2)

- 时域积分Real integration

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0^+)$$

$$L\left[\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t f(t)(dt)^n\right] = \frac{1}{s^n} F(s) + \frac{1}{s^n} f^{(-1)}(0^+) + \frac{1}{s^{n-1}} f^{(-2)}(0^+) + \frac{1}{s} f^{(-n)}(0^+)$$

$$\text{其中 } \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t f(t)(dt)^n \Big|_{t=0} = f^{(-n)}(0^+)$$

- 终值定理Final value

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

- 初值定理Initial value

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

- 复频域积分Complex integration

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s)ds$$

## Laplace变换性质 (3)

- 周期函数的Laplace变换  
(Laplace transform of the periodic function)

若 $f(t+T) = f(t)$ , 则

$$L[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt$$

# Laplace变换性质 (3) 证明

设函数  $f(t)$  是以  $T$  为周期的周期函数, 即  $f(t+T)=f(t)$

$$\begin{aligned}\text{则 } L[f(t)] &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^T f(t)e^{-st} dt + \int_T^{2T} f(t)e^{-st} dt + \cdots + \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st} dt\end{aligned}$$

令  $t = t_1 + nT$  即  $dt = dt_1$   $t_1 = 0$  时  $t = nT$

$$\begin{aligned}L[f(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T f(t_1 + nT)e^{-s(t_1+nT)} dt_1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \int_0^T f(t_1)e^{-st_1} dt_1 \\ &= \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st} dt\end{aligned}$$



# Laplace变换性质 (4)

- 卷积定理Convolution theorem

$$\text{若: } F(s) = L[f(t)], G(s) = L[g(t)]$$

$$\text{则: } L\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = F(s) \cdot G(s)$$

其中

$$\text{若: } F(s) = L[f(t)], G(s) = L[g(t)]$$

$$\text{则: } L\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = F(s) \cdot G(s)$$

## Laplace变换性质 (4) 证明

证:

$$\begin{aligned} L[f(t) * g(t)] &= L\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] \\ &= L\left[\int_0^\infty f(t-\tau)1(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(t-\tau)1(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(t-\tau)1(t-\tau)e^{-s(t-\tau)} dt \cdot g(\tau)e^{-s\tau} d\tau \\ &\stackrel{\text{令 } t-\tau=\lambda}{=} \int_0^\infty f(\lambda)e^{-s\lambda} d\lambda \int_0^\infty g(\tau)e^{-s\tau} d\tau \\ &= F(s)G(s) \end{aligned}$$

# 拉普拉斯变换的初值定理、终值定理

## 初值定理

若  $L[f(t)] = F(s)$ ，且  $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$  存在，则

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

或

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

证明：根据拉氏变换的微分性质，有

$$L\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

令  $s \rightarrow \infty$ ，对等式两边取极限，得

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0)]$$

在时间区间  $[0_+, \infty)$  内， $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$ ，因此等式左边为

## 拉普拉斯变换的初值定理、终值定理

令  $s \rightarrow \infty$ ，对等式两边取极限，得

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0)]$$

在时间区间  $[0_+, \infty)$  内， $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$ ，因此等式左边为

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0_+}^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0_+}^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} dt = 0$$

于是

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0_+)] = 0$$

即

$$f(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

利用初值定理，我们可以从  $f(t)$  的拉氏变换，直接求出

$f(t)$  在  $t=0_+$  时的值。虽然初值定理不能严格地给出  $t=0$  时的

$f(t)$  值，但是能够给出时间略大于零时的  $f(t)$  值。

# 拉普拉斯变换的初值定理、终值定理

## 终值定理

若时间函数  $f(t)$  及其一阶导数都是可拉氏变换的, 而  $L[f(t)] = F(s)$ ,

且  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  存在, 则  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

证明: 根据拉氏变换的微分性质, 有

$$L\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

令  $s \rightarrow 0$ , 对等式两边取极限, 得  $\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)]$

等式左边为

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) e^{-st} dt &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) \lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} df(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t df(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0)] \end{aligned}$$

于是  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

# 拉普拉斯变换的初值定理、终值定理

## 终值定理

若时间函数  $f(t)$  及其一阶导数都是可拉氏变换的, 而  $L[f(t)] = F(s)$ ,

且  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  存在, 则  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

终值定理表明: 时间函数  $f(t)$  的稳态值与复频域中  $s=0$  附近的

$sF(s)$  的值相同。因此,  $f(t)$  在  $t \rightarrow \infty$  时的值可以直接由

$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$  得到。

利用该性质, 可在复频域中得到控制系统在时间域中的稳态值,

利用该性质还可以求得控制系统的稳态误差。

**特别指出:** 运用终值定理的前提是时间函数  $f(t)$  有终值存在,

即  $sF(s)$  的所有极点位于左半  $s$  平面。

## 拉普拉斯变换的初值定理、终值定理

**初值定理** 若  $L[f(t)] = F(s)$ ，且  $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$  存在，则  $\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

**终值定理** 若时间函数  $f(t)$  及其一阶导数都是可拉氏变换的，而  $L[f(t)] = F(s)$ ，

且  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  存在，则  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

**【例】已知**  $f(t) = e^{-t} \cos t \cdot u(t)$ ，求  $f(0_+)$  和  $f(\infty)$ 。

**解 由于**

$$L[\cos t \cdot u(t)e^{-t}] = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1}$$

**由初值定理，得**

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(s+1)}{(s+1)^2 + 1} = 1$$

**由终值定理，得**

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s+1)}{(s+1)^2 + 1} = 0$$

# 逆拉式变换

- 部分分式展开法 Partial-fraction expansion method

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

## 1) 一阶极点:

$$\text{设 } \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K_1}{(s - p_1)} + \frac{K_2}{(s - p_2)} + \cdots + \frac{K_n}{(s - p_n)}$$

其中  $K_1, K_2, \dots, K_n$  是未知常数.

$$\text{则 } f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^n \frac{B(p_i)}{A'(p_i)} \cdot e^{p_i t} \quad \text{其中 } A'(p_i) = \left. \frac{dA(s)}{ds} \right|_{s=p_i}$$



# 逆拉式变换

## 2)多重极点:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{a_n (s - p_1)^r (s - p_{r+1}) \cdots (s - p_n)} \\ &= \frac{K_{11}}{(s - p_1)^r} + \frac{K_{12}}{(s - p_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{K_{1r}}{s - p_1} + \frac{K_{r+1}}{s - p_{r+1}} + \frac{K_{r+2}}{s - p_{r+2}} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n} \end{aligned}$$

其中  $K_j = \left[ F(s)(s - p_j) \right] \Big|_{s=p_j} = \frac{B(s_{p_j})}{A'(s_{p_j})} (j = r+1, r+2, \cdots, n)$

$$K_{11} = \left[ F(s)(s - p_1)^r \right] \Big|_{s=p_1}$$

$$K_{12} = \frac{d}{ds} \left[ F(s)(s - p_1)^r \right] \Big|_{s=p_1}$$

$$K_{1r} = \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left[ F(s)(s - p_1)^r \right] \Big|_{s=p_1}$$

# 逆拉式变换

- 查表2.5可知  $L[t^{r-1}] = \frac{(r-1)!}{s^r}$        $L[e^{p_1 t} 1(t)] = \frac{1}{(s-p_1)}$
- 用s域平移定理：

$$L[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$$

$$\text{则 } L^{-1}\left[\frac{1}{(s-p_1)^k}\right] = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{p_1 t} 1(t)$$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \left[ \frac{K_{11}}{(r-1)!} t^{r-1} + \frac{K_{12}}{(r-2)!} t^{r-2} + \cdots + K_{1r} \right] e^{p_1 t} + K_{r+1} e^{p_{r+1} t} + \cdots + K_n e^{p_n t}$$

## 2.5 线性系统的传递函数 (Transfer Function)

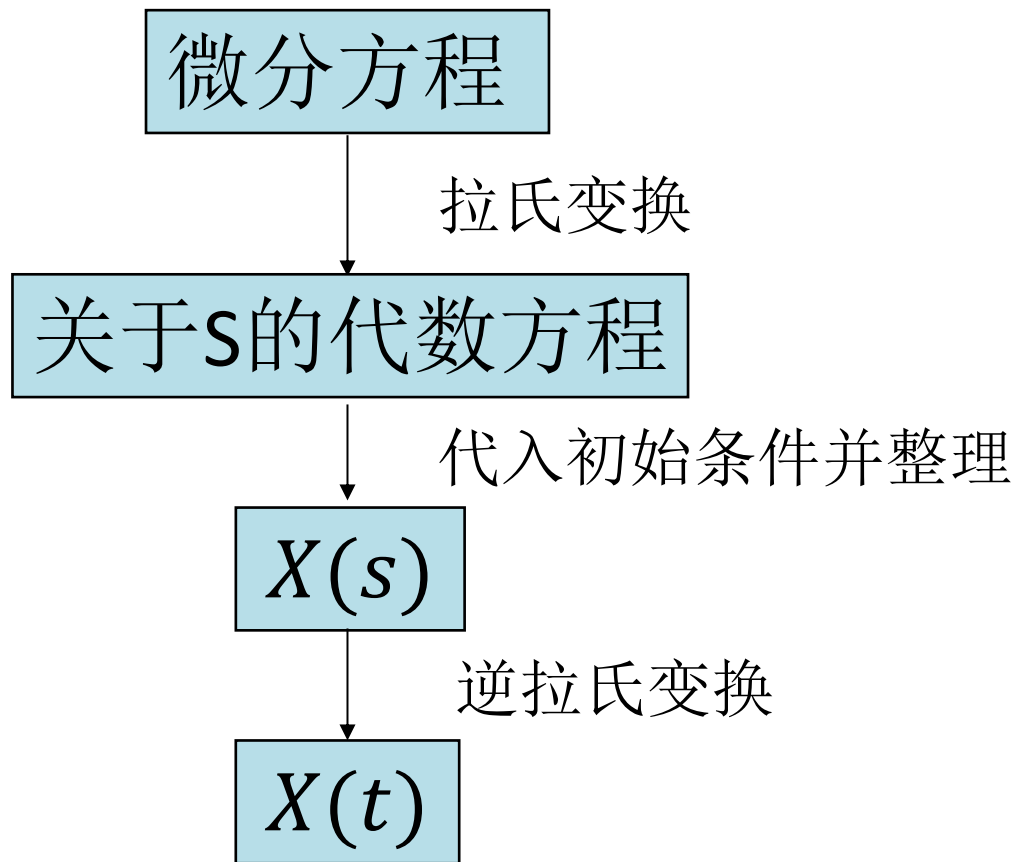
解微分方程分析系统的输出响应很麻烦  
能否不解微分方程进行系统分析？

--引申出新的概念---传递函数

- 定义：线性定常系统的传递函数，在零初始条件下，系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。

$$\text{传递函数} = \frac{\text{输出信号的拉氏变换}}{\text{输入信号的拉氏变换}} \bigg|_{\text{零初始条件}} = \frac{C(s)}{R(s)}$$

# 用拉氏变换求解微分方程



## 2.5 线性系统的传递函数 (Transfer Function)

- 例：弹簧-质量-阻尼系统

其传递函数为

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = r(t)$$

$$M(s^2 Y(s) - sy(0^-) - \frac{dy(0^-)}{dt}) + b(sY(s) - y(0^-)) + kY(s) = R(s)$$

$$\frac{\text{output}}{\text{input}} = G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k}$$

# 传递函数的性质

- 性质1 传递函数是复变量 $s$ 的有理真分式函数， $m \leq n$ ，且具有复变量函数的所有性质。（物理可实现）
- 性质2  $G(s)$ 取决于系统的结构和参数，与输入量的形式和初始条件等外部因素无关，可见传递函数有效地描述了系统的固有特性。
- 性质3  $G(s)$ 虽然描述了输出与输入之间的关系，但它不提供任何该系统的物理结构。因为许多不同的物理系统具有完全相同的传递函数。

性质4 传递函数与微分方程之间有联系

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

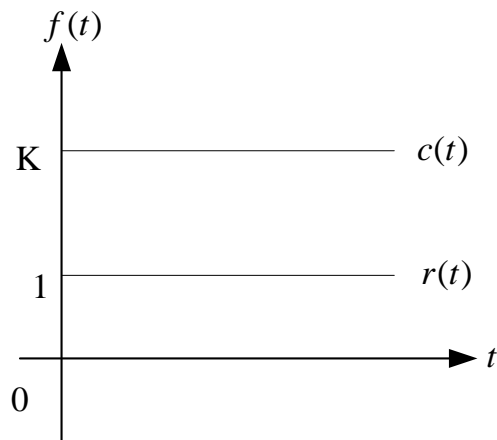
如果将  $s \Leftrightarrow \frac{d}{dt}$  置换， 传递函数  $\Leftrightarrow$  微分方程

# 典型环节的传递函数

- 1、比例环节：成比例的复现输入信号

微分方程：  $c(t) = K r(t)$

传递函数：  $G(s) = K$



实例有：放大器、减速机、杠杆机构等

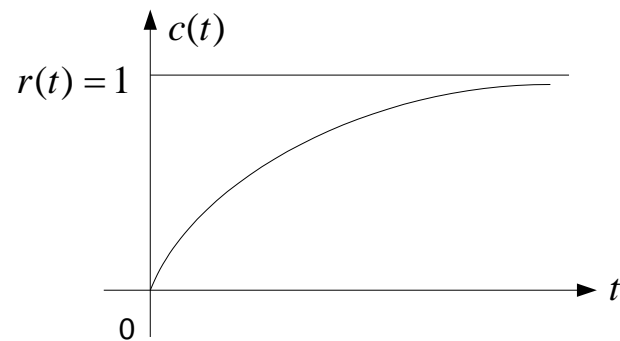
# 典型环节的传递函数

- 2、惯性环节：输出量延缓地反应输入量的变化规律

微分方程：
$$T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$$

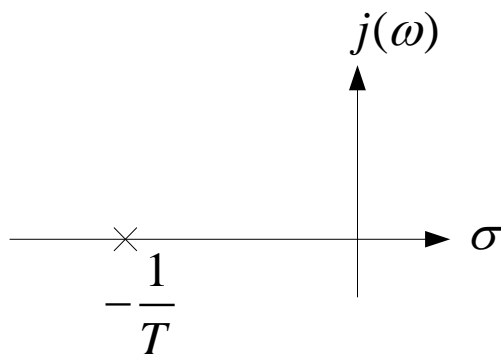
传递函数：
$$Ts \ c(s) + c(s) = R(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

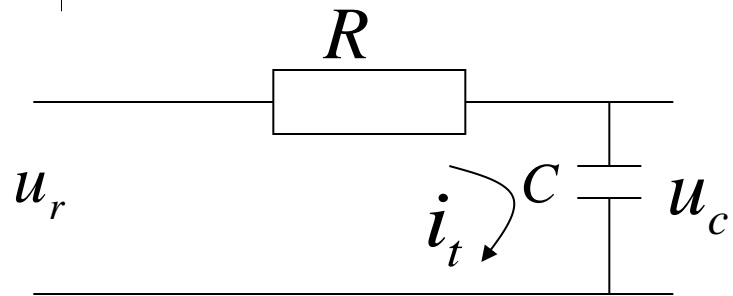


$T$  为惯性环节时间常数

零、极点图：



RC滤波网络属于惯性环节





# 典型环节的传递函数

**3. 积分环节：输出量为输入量的积分--具有记忆功能，用来改善系统的稳态性能。**

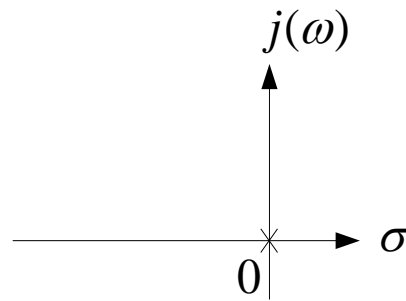
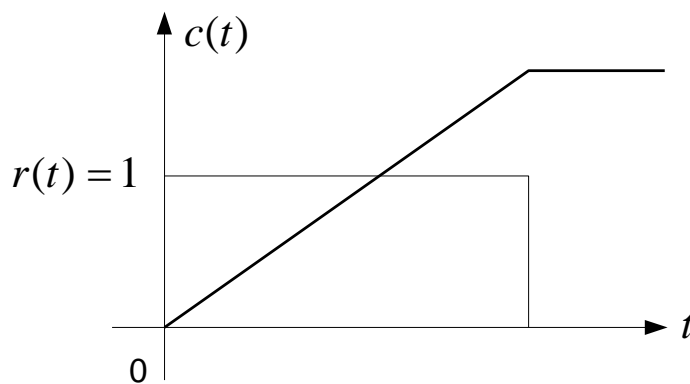
微分方程为：  $c(t) = \frac{1}{T} \int_0^t r(\tau) d\tau$

传递函数为：  $C(s) = \frac{1}{Ts} \cdot R(s)$

$$G(s) = \frac{1}{Ts}$$

$T$  为积分时间常数

零、极点图



# 典型环节的传递函数

**4、微分环节：输出量为输入量的微分—预示输入信号的变化趋势，监测系统的动态行为。**

微分方程为： 
$$c(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

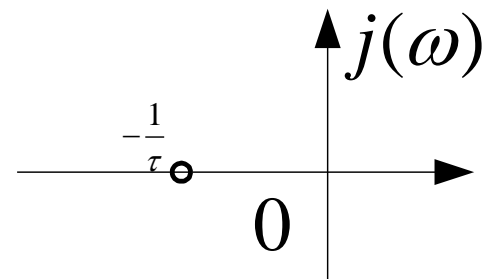
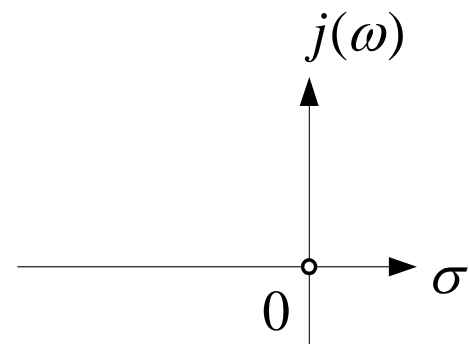
传递函数为： 
$$C(s) = s \cdot R(s)$$

$$G(s) = s$$

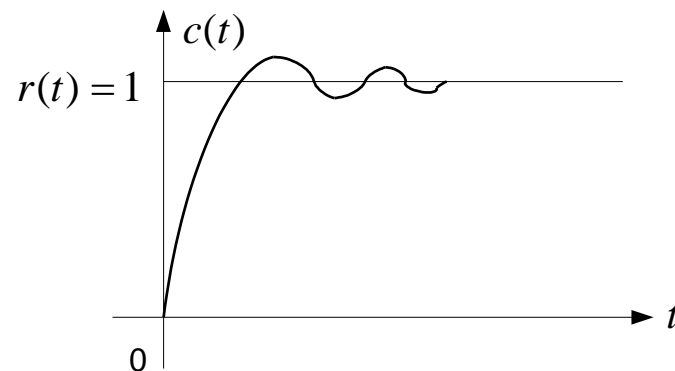
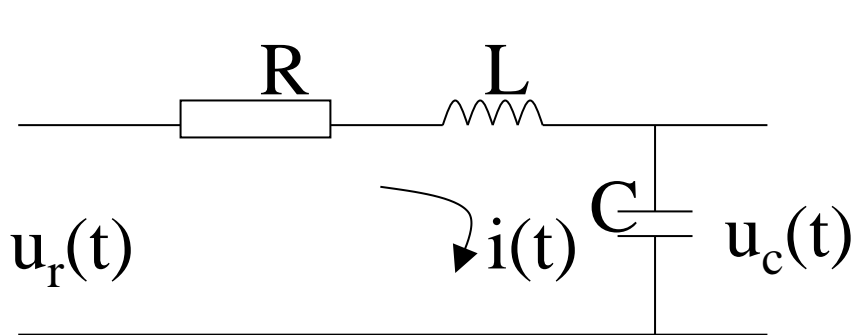
一阶微分方程为： 
$$c(t) = \tau \frac{dr(t)}{dt} + r(t)$$

$$G(s) = \tau s + 1$$

零、极点图：



**5.振荡环节：有两个储能元件，在运动过程中能量相互交换，输出带有振荡特性。**



微分方程为：
$$LC \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + RC \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$$

传递函数为：
$$G(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

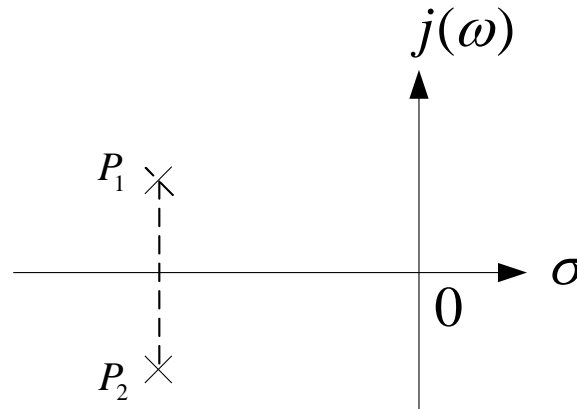
令： $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  称为自然振荡（无阻尼）角频率

$\xi = \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{C}{L}}$  为阻尼系数

$0 < \xi < 1$  时衰减振荡  
 $\xi > 1$  单调增

**5.振荡环节：有两个储能元件，在运动过程中能量相互交换，输出带有振荡特性。**

**零、极点图：**



振荡环节有一对位于S左半平面的共轭极点：

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

弹簧 - 质量 - 阻尼器串联系统也属于这一类：

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + fs + 1}$$

# 典型环节的传递函数

## 6.延迟环节：输出端要隔一定时间后才能复现输入信号

微分方程为：  $c(t) = r(t - \tau)$

传递函数为：  $G(s) = e^{-\tau s}$        $\tau$  为延迟时间

当延迟时间很小时可得：

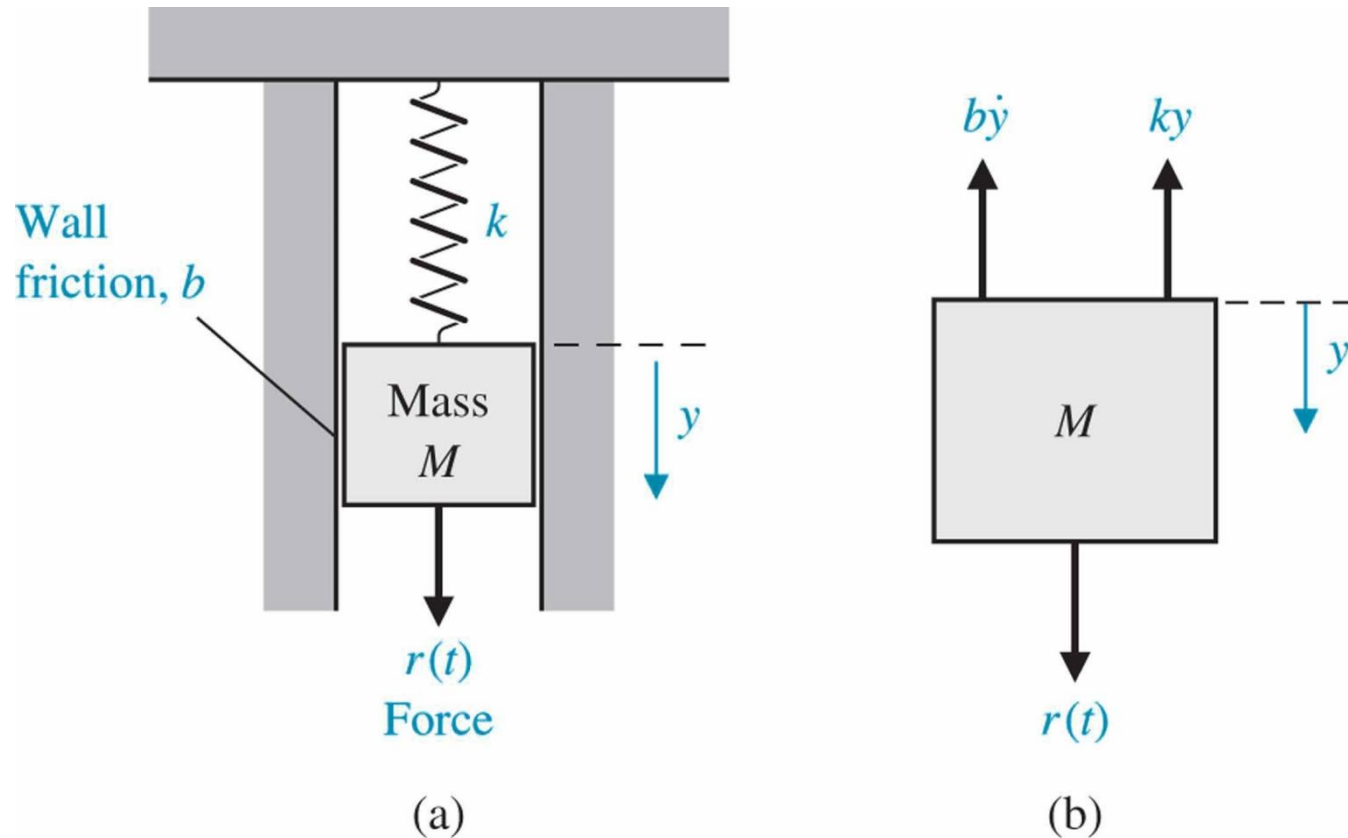
$$G(s) \approx \frac{1}{\tau s + 1}$$

特点：输出量能准确复现输入量，但须延迟一段时间。

实例：管道压力、流量、皮带运输等物理量的控制，其数学模型就包含有延迟环节。

# 实例：弹簧-质量-阻尼系统

## Spring-mass-damper system



Copyright © 2011 Pearson Education, Inc. publishing as Prentice Hall

图2.2 (a) 弹簧-质量-阻尼系统 (b) 质量的运动分析图

# 弹簧-质量-阻尼系统

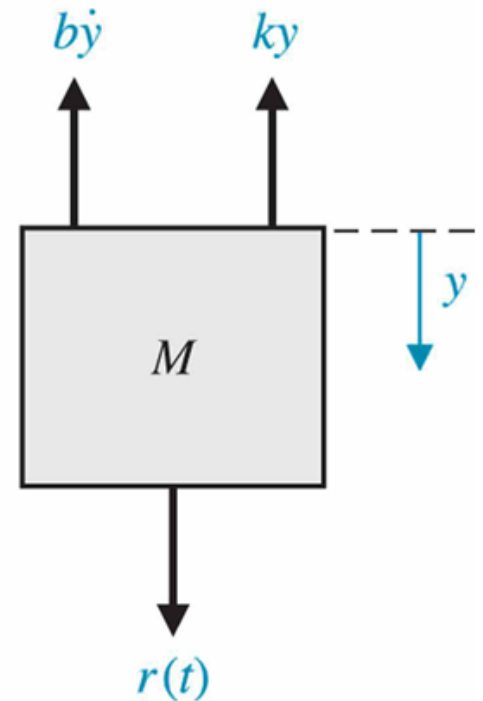
## Spring-mass-damper system

在质量块-弹簧-阻尼器系统中，分析质量块M的受力情况，有牛顿第二定律可得：

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = r(t)$$

令  $v(t) = \frac{dy(t)}{dt}$

$$M \frac{dv(t)}{dt} + bv(t) + k \int_0^t v(t) dt = r(t)$$



# 弹簧-质量-阻尼系统 (1)

考虑 (2.1)式所示的方程:  $M \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = r(t)$

Laplace 变换得:

$$M(s^2 Y(s) - sy(0^-) - \frac{dy(0^-)}{dt}) + b(sY(s) - y(0^-)) + kY(s) = R(s)$$

当  $r(t) = 0$ ,  $y(0^-) = y_0$  及  $\frac{dy}{dt}\big|_{t=0^-} = 0$

有 
$$Ms^2 Y(s) - Msy_0 + bsY(s) - by_0 + kY(s) = 0$$



## 弹簧-质量-阻尼系统 (2)

由  $Ms^2Y(s) - Msy_0 + bsY(s) - by_0 + kY(s) = 0$

解  $Y(s)$  得  $Y(s) = \frac{(Ms + b)y_0}{Ms^2 + bs + k} = \frac{p(s)}{q(s)}$

当  $\frac{k}{M} = 2$ ,  $\frac{b}{M} = 3$ , 则  $Y(s) = \frac{(s+3)y_0}{(s+1)(s+2)}$

用部分分式法展开, 设  $Y(s) = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2}$

## 弹簧-质量-阻尼系统 (3)

当  $y_0 = 1$ , 有

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{(s - s_1)p(s)}{q(s)} \Big|_{s=s_1} \\ &= \frac{(s+1)(s+3)}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s_1=-1} = 2 \end{aligned}$$

又  $k_2 = -1$ , 则

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s+2}\right\}$$

解得

$$y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

# 解线性系统微分方程

考虑下面的微分方程

$$\frac{d^n y}{dt^n} + q_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + q_0 y = p_{n-1} \frac{d^{n-1} r}{dt^{n-1}} + p_{n-2} \frac{d^{n-2} r}{dt^{n-2}} + \cdots + p_0 r$$

在零初始条件下，系统可用传递函数表示为

$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{p(s)}{q(s)} R(s) = \frac{(p_{n-1}s^{n-1} + p_{n-2}s^{n-2} + \cdots + p_0)}{(s^n + q_{n-1}s^{n-1} + \cdots + q_0)} R(s)$$

完整的输出响应包括**零输入响应**（由初始状态决定）和由输入作用激励的**零状态响应**。于是：

$$Y(s) = \frac{m(s)}{q(s)} + \frac{p(s)}{q(s)} R(s)$$

其中 $q(s)=0$ 构成了系统的特征方程。

# 解线性系统微分方程

若输入具有有理式的形式： $R(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$

$$\text{则 } Y(s) = \frac{m(s)}{q(s)} + \frac{p(s)}{q(s)} \frac{n(s)}{d(s)} = Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s) \quad (2.46)$$

- $Y_1(s)$ : 零输入响应的部分分式展开式
- $Y_2(s)$ : 部分分式展开式中与 $q(s)$ 的因式有关的部分分式
- $Y_3(s)$ : 部分分式展开式中与 $d(s)$ 的因式有关的部分分式

# 解线性系统微分方程

若对式（2.46）作Laplace逆变换可得

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$$

- 瞬态响应为  $y_1(t) + y_2(t)$
- 稳态响应为  $y_3(t)$

## 例2.2 一个微分方程的解

- 考虑下述微分方程所描述的系统：

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 3y = 2r(t)$$

其中初始条件为  $y(0) = 1, \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} = 0$  ,

输入激励为  $t \geq 0$  时  $r(t) = 1$

## 例2.2 一个微分方程的解

- 由 *Laplace* 变换可得:

$$[s^2 Y(s) - sy(0)] + 4[sY(s) - y(0)] + sY(s) = 2R(s)$$

- 由于  $R(s) = \frac{1}{s}$ ,  $y(0) = 1$ , 故有:

$$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+3} + \frac{2}{s^2+4s+3} \cdot \frac{1}{s}$$

其中  $q(s) = s^2 + 4s + 3 = (s+3)(s+1) = 0$  为特征方程,  
而  $d(s) = s$

## 例2.2 一个微分方程的解

- 于是 $Y(s)$ 的部分分式展开式为:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \left[ \frac{3/2}{s+1} + \frac{-1/2}{s+3} \right] + \left[ \frac{-1}{s+1} + \frac{1/3}{s+3} \right] + \frac{2/3}{s} \\ &= Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s) \end{aligned}$$

- 时间响应函数则为:

$$y(t) = \left[ \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \right] + \left[ -e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-3t} \right] + \frac{2}{3}$$

- 可见, 系统的稳态响应为 $\frac{2}{3}$



## 例2.3 运算放大器电路的传递函数

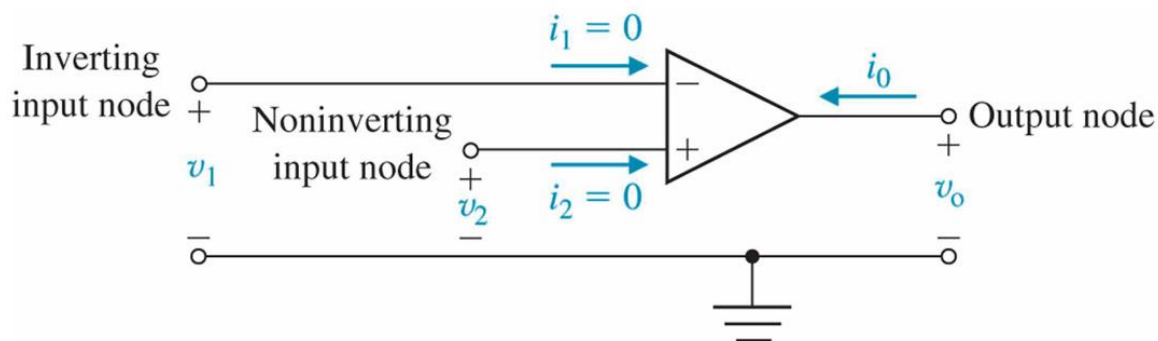


图2.14 理想的运算放大器

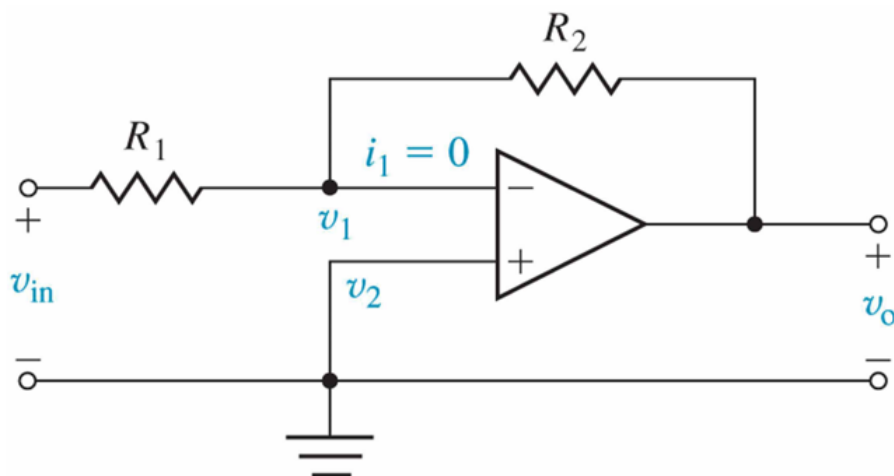
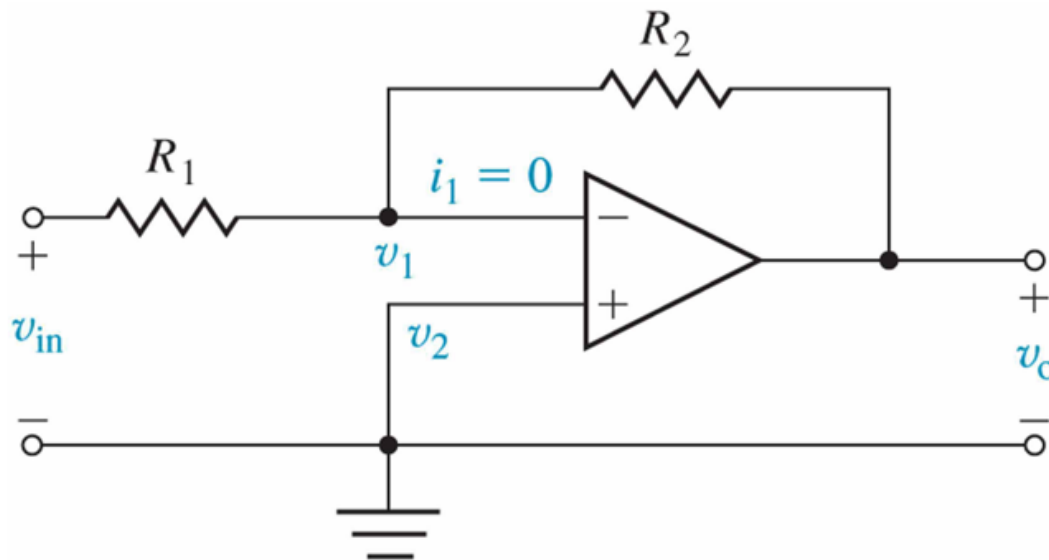


图2.15 工作在理想条件下的倒相放大器

## 例2.3 运算放大器电路的传递函数



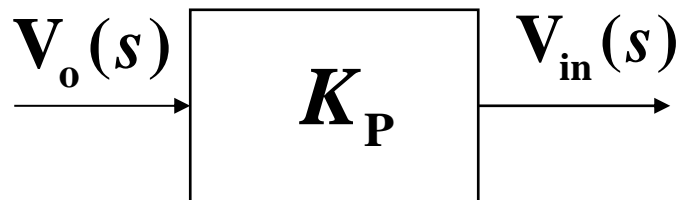
$$\text{解: } \frac{v_1 - v_{in}}{R_1} + \frac{v_1 - v_o}{R_2} = 0$$

理想情况下:  $v_1 = v_2 = 0$

$$\text{因此 } -\frac{v_{in}}{R_1} - \frac{v_o}{R_2} = 0$$

## 例2.3 运算放大器电路的传递函数

由此导出 
$$\frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{R_2}{R_1} = K_P$$



这个结论可以推广为：当负反馈端作为输入时，运算放大器的传递函数等于负的反饋复阻抗与输入复阻抗之比  
(自动控制中常用负极性端作为输入端)

## 例2.4 相似系统的传递函数

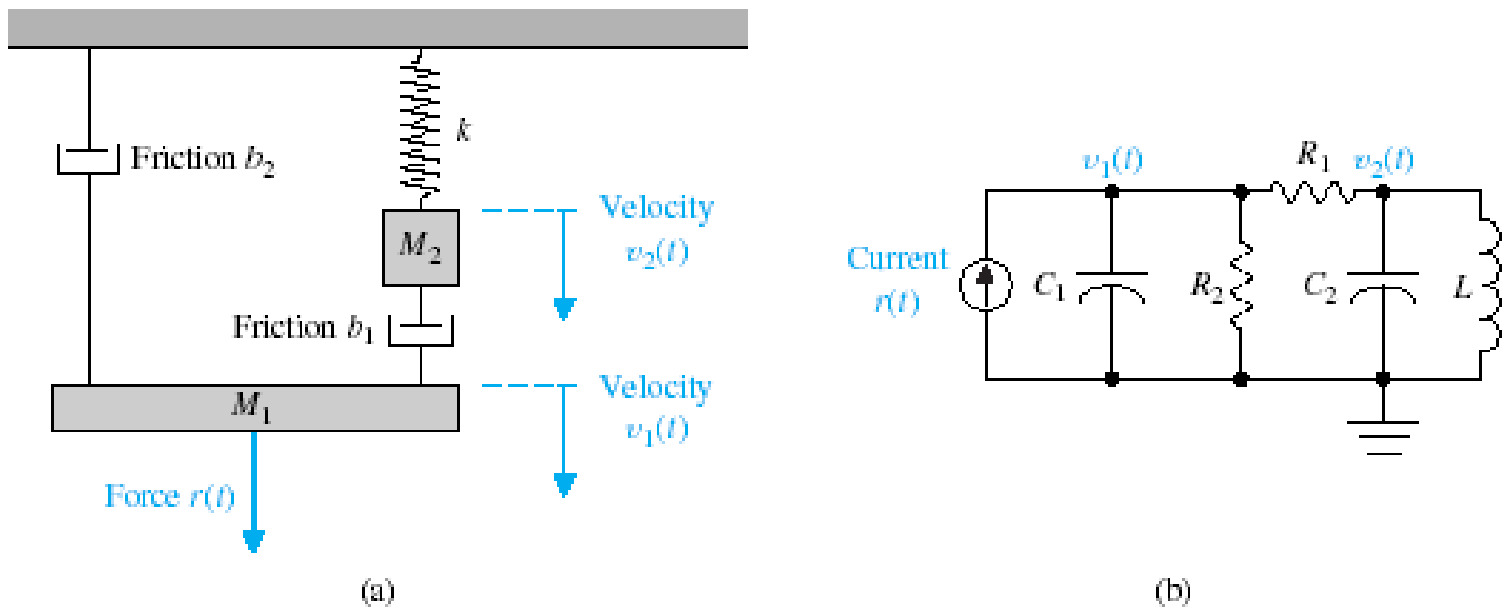
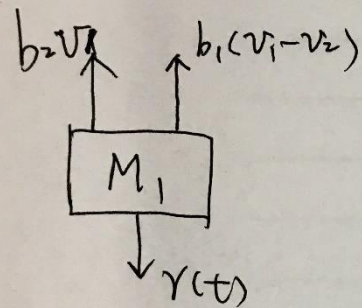
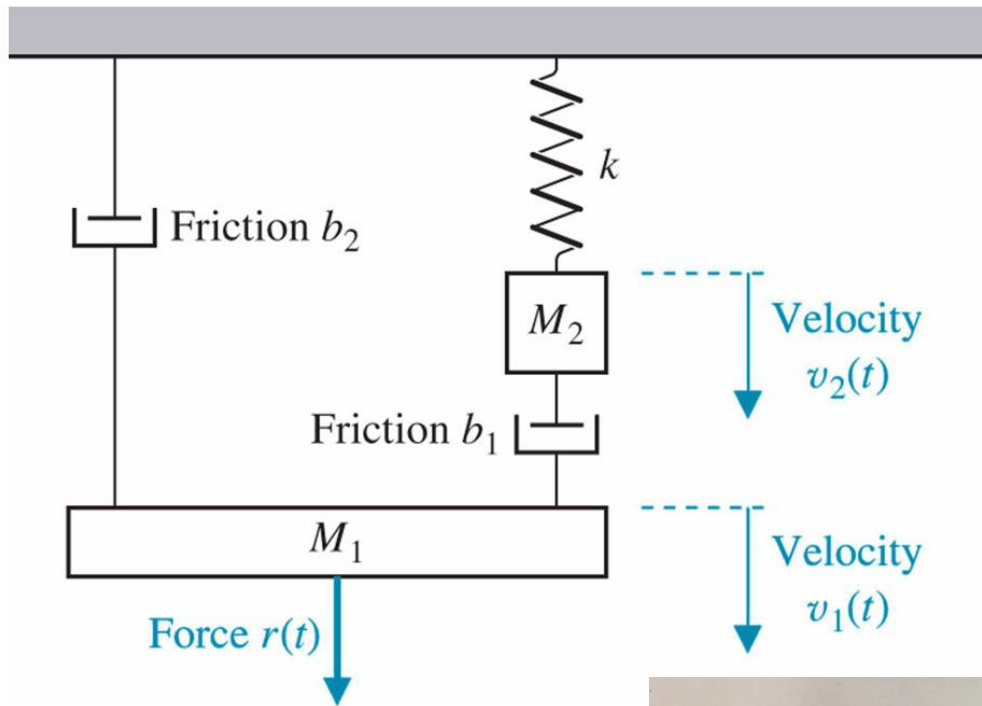
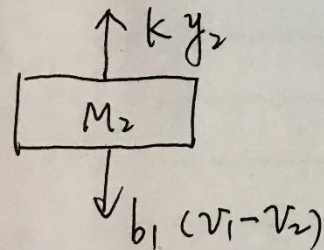


图2.16 (a) 双质量机械系统 (b) 相似的双节点电路系统

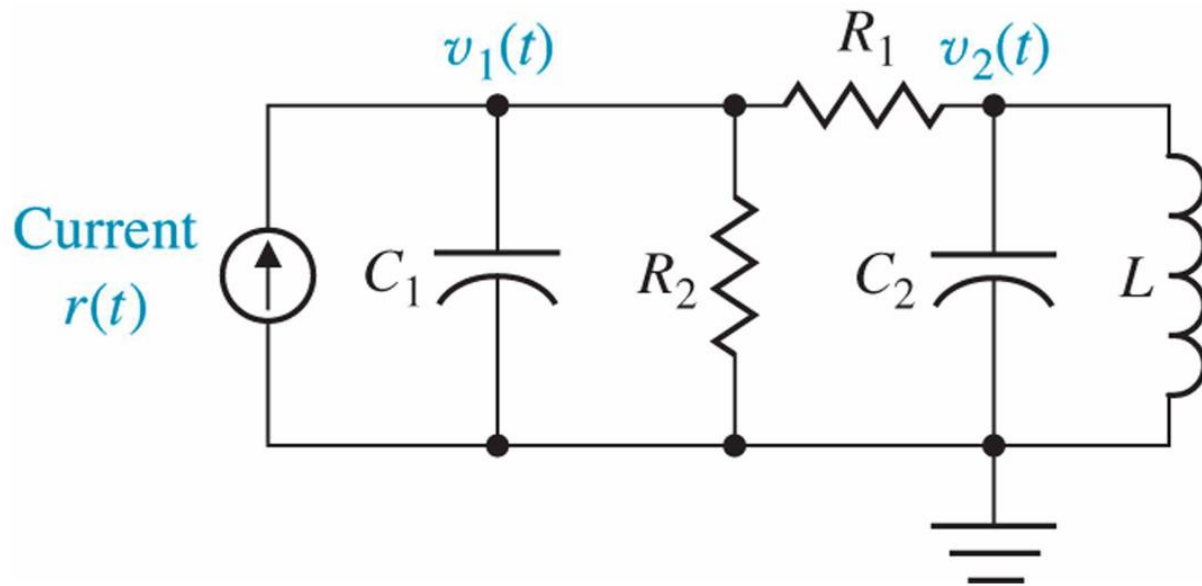
$$C_1 = M_1, C_2 = M_2, L = 1/K, R_1 = 1/b_1, R_2 = 1/b_2$$



$$r(t) = M_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + b_2 v_1(t) + b_1 (v_1(t) - v_2(t)) \quad (1)$$



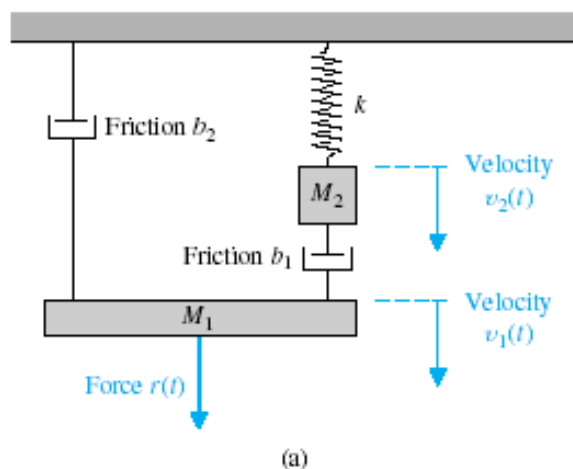
$$b_1 (v_1(t) - v_2(t)) = k \int v_2(t) dt + M_2 \frac{dv_2(t)}{dt} \quad (2)$$



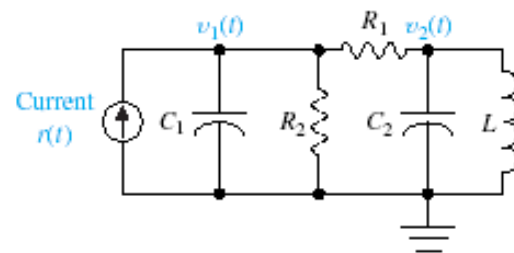
$$\underbrace{r(t)}_{\text{直流源}} = C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + \frac{v_1(t)}{R_2} + \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_1} \quad (1)$$

$$\dot{i}_L + \dot{i}_{C_2} = \dot{i}_{R_1} \quad (2)$$

$$\rightarrow \frac{1}{L} \int v_2(t) dt + C_2 \frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_1} \quad (2)$$



(a)



(b)

$$C_1 = M_1, C_2 = M_2, L = 1/K, R_1 = 1/b_1, R_2 = 1/b_2$$

- 上述机械（电气）系统的传递函数为：

$$\begin{aligned} \frac{R(s)}{V_1(s)} &= M_1 s + b_2 + b_1 \parallel (M_2 s + k / s) \\ &= M_1 s + b_2 + \frac{(M_2 s + k / s) b_1}{M_2 s + k / s + b_1} \\ &= \frac{(M_1 s + b_2)(M_2 s + k / s + b_1) + (M_2 s + k / s) b_1}{M_2 s + k / s + b_1} \\ \frac{V_1(s)}{R(s)} &= \frac{M_2 s + k / s + b_1}{(M_1 s + b_2)(M_2 s + k / s + b_1) + (M_2 s + k / s) b_1} \end{aligned}$$

## 例2.4 相似系统的传递函数

- 或者

$$\frac{V_1(s)}{R(s)} = \frac{1}{M_1 s} \parallel \frac{1}{b_2} \parallel \left( \frac{1}{b_1} + \frac{1}{M_2 s} \parallel \frac{s}{k} \right)$$

$$\frac{V_1(s)}{R(s)} = \frac{(M_2 s^2 + k + b_1 s)}{M_1 M_2 s^3 + (M_1 b_1 + b_1 M_2 + M_2 b_2) s^2 + (M_1 k + b_2 b_1) s + b_1 k + b_2 k}$$



# 对照表

机械系统			电路系统		
	微分方程	laplace		微分方程	laplace
力	$\sum_n F_n = 0$		电流	$\sum_n i_n = 0$	
速度	$\sum_i v_i = 0$		电压	$\sum_i V_i = 0$	
质量	$r(t) = M \frac{dv}{dt}$	$\frac{V(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ms}$	电容	$r(t) = C \frac{dv}{dt}$	$\frac{V(s)}{R(s)} = \frac{1}{Cs}$
弹簧	$r(t) = k \int v dt$	$\frac{V(s)}{R(s)} = \frac{s}{k}$	电感	$r(t) = \frac{1}{L} \int v dt$	$\frac{V(s)}{R(s)} = Ls$
阻尼	$r(t) = bv(t)$	$\frac{V(s)}{R(s)} = \frac{1}{b}$	电阻	$r(t) = \frac{1}{R} v(t)$	$\frac{V(s)}{R(s)} = R$

# 对照表

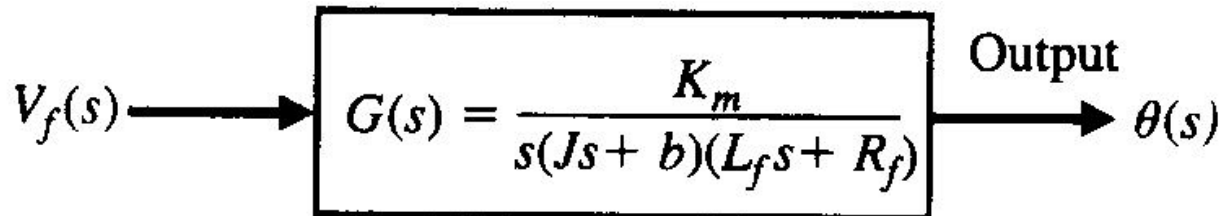
机械系统			电路系统		
	$V(s)/F(s)$	$F(s)/V(s)$		$V(s)/I(s)$	$I(s)/V(s)$
质量	$1/Ms$	$Ms$	电容	$1/Cs$	$Cs$
弹簧	$s/k$	$k/s$	电感	$Ls$	$1/Ls$
阻尼	$1/b$	$b$	电阻	$R$	$1/R$

# 作业

- Page 107: P2.22
- Page 108: P2.26
- Page 115: P2.50

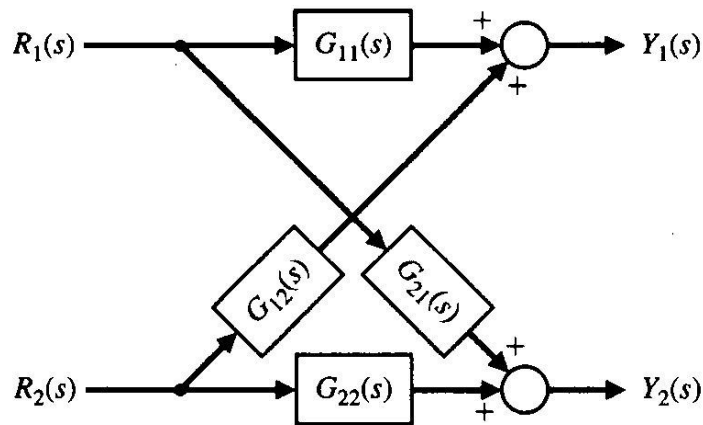
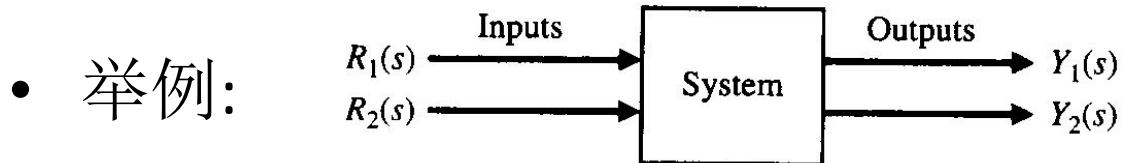
## 2.6 框图 (Block diagrams) 模型

- 定义:
  - 由单方向功能方框组成的一种结构图，这些方框代表了系统元件的传递函数。
- 举例:
  - 磁场电流控制电机



## 2.6 框图 (Block diagrams) 模型

- 多个受控变量的系统

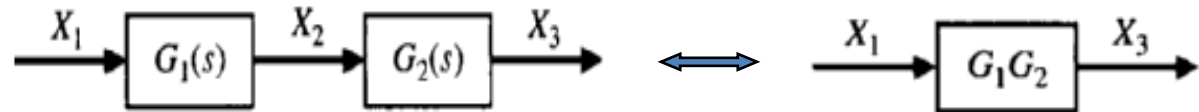


$$Y_1(s) = G_{11}(s)R_1(s) + G_{12}(s)R_2(s)$$

$$Y_2(s) = G_{21}(s)R_1(s) + G_{22}(s)R_2(s)$$

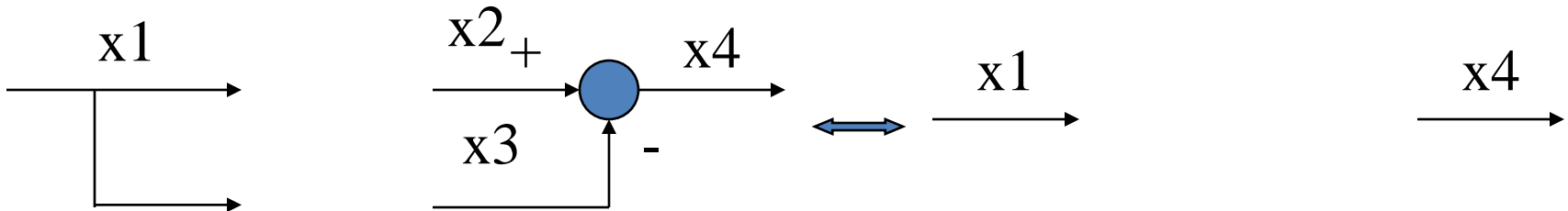
# 串联与并联

- 串联:



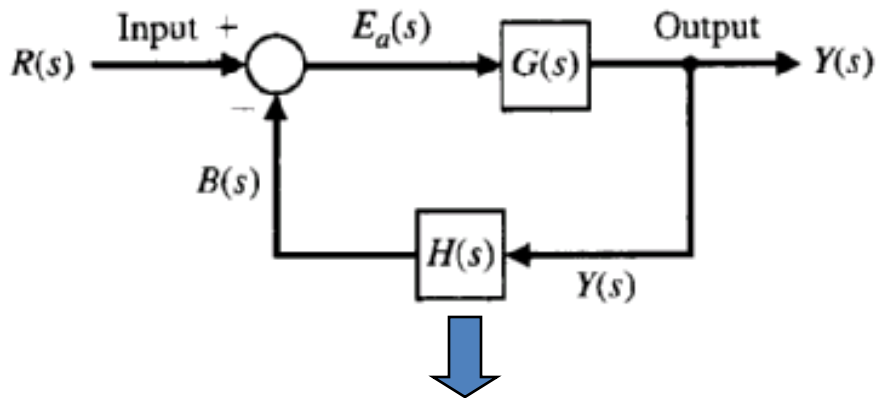
- 并联:

$$X_3(s) = G_2(s)X_2(s) = G_1(s)G_2(s)X_1(s)$$



$$X_4(s) = X_2(s) + X_3(s) = G_1(s)X_1(s) + G_2(s)X_1(s) = (G_1(s) + G_2(s))X_1(s)$$

# 负反馈系统



$$E_a(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)Y(s)$$

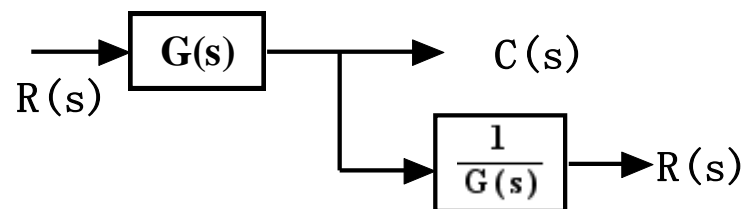
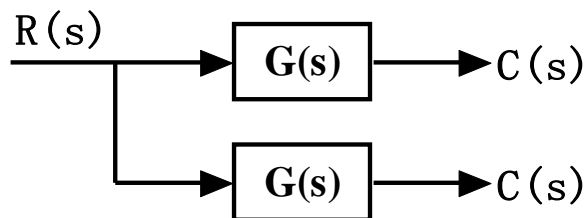
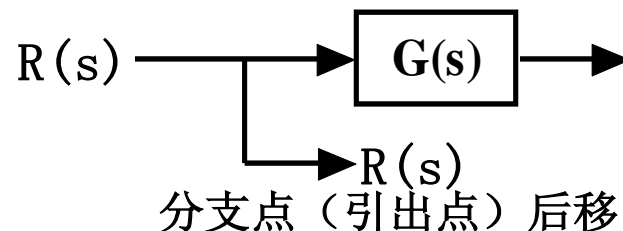
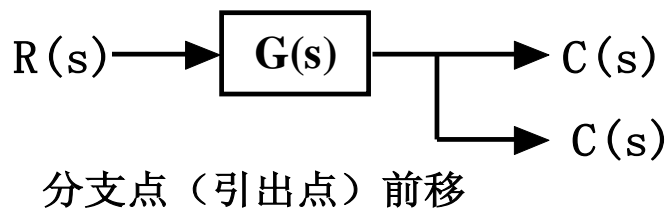
$$Y(s) = G(s)E_a(s)$$

Simplified block diagram of the negative feedback system. The input  $R(s)$  enters a single block labeled  $\frac{G}{1+GH}$ . The output of this block is  $Y(s)$ . A horizontal blue double-headed arrow connects this simplified block to the original block diagram on the left. A vertical blue arrow points from the equation  $Y(s)[1 + G(s)H(s)] = G(s)R(s)$  below up to the simplified block.

$$Y(s)[1 + G(s)H(s)] = G(s)R(s)$$

# 结构图的变位变换

## (1) 分支点的移动(前乘, 后除)

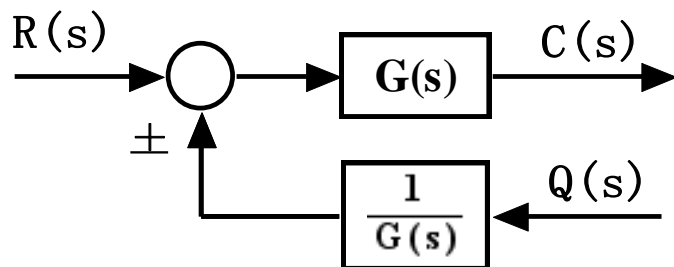
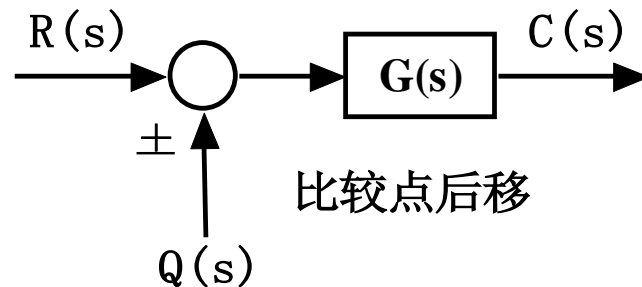
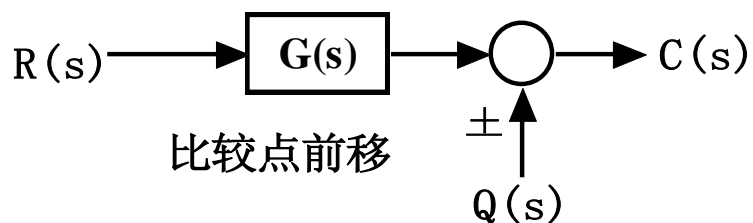


$$C(s) = R(s)G(s)$$

$$R(s) = R(s)G(s) \frac{1}{G(s)} = R(s)$$

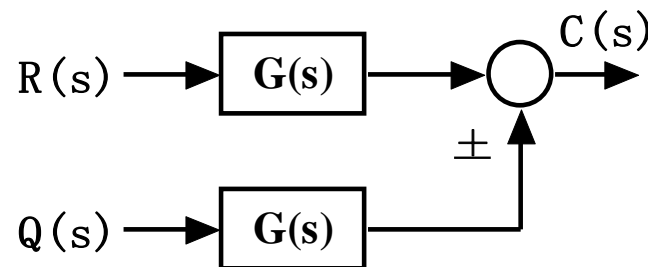


## (2) 比较点的移动(前除, 后乘)



$$C(s) = R(s)G(s) \pm Q(s)$$

$$= \left[ R(s) + \frac{Q(s)}{G(s)} \right] G(s)$$



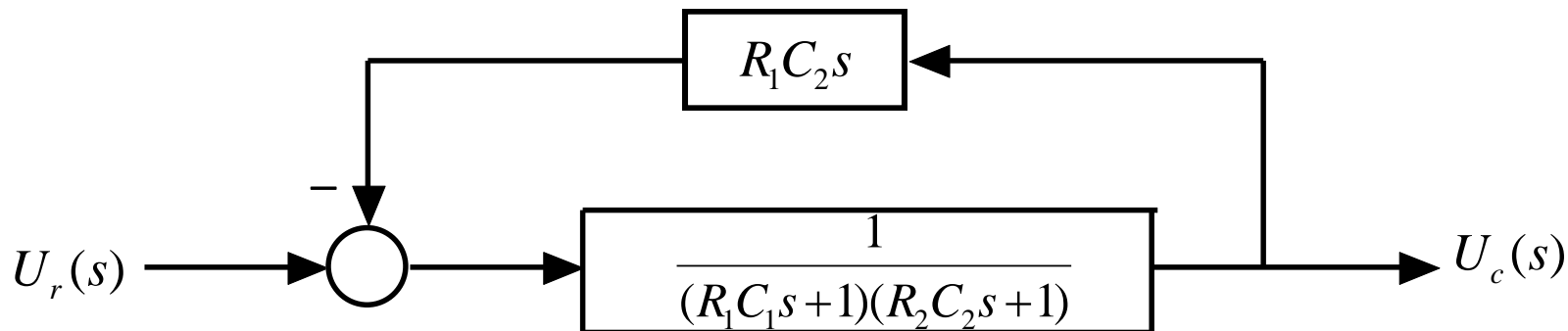
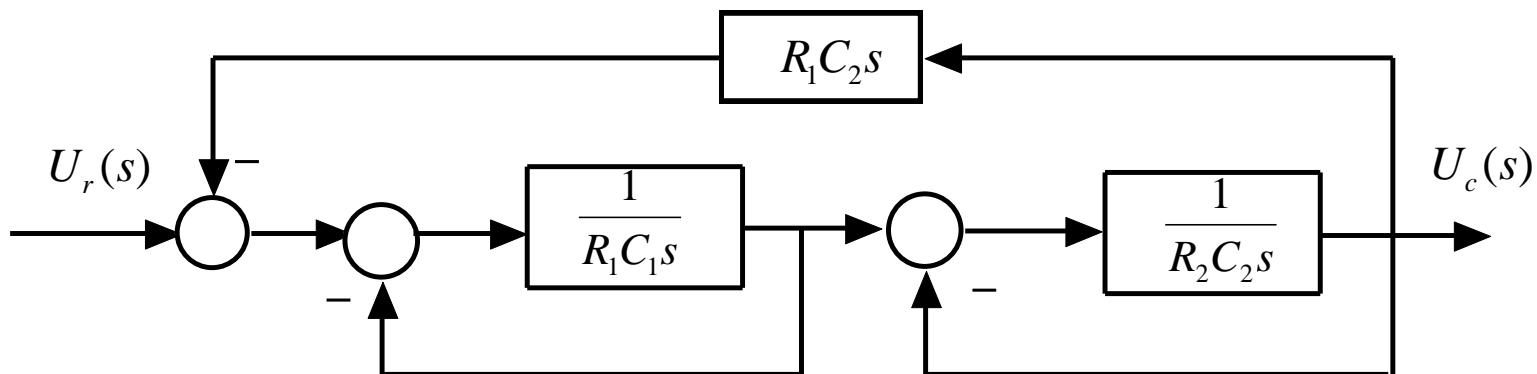
$$C(s) = [R(s) \pm Q(s)]G(s)$$

$$= R(s)G(s) \pm Q(s)G(s)$$

# 表2.6 框图的基本变换

Transformation	Original Diagram	Equivalent Diagram
1. Combining blocks in cascade 合并串联方框		
2. Moving a summing point behind a block 相加点后移		
3. Moving a pickoff point ahead of a block 分支点前移		
4. Moving a pickoff point behind a block 分支点后移		
5. Moving a summing point ahead of a block 相加点前移		
6. Eliminating a feedback loop 消去反馈回路		

# 方框图化简



## 例 2.7 方框图化简

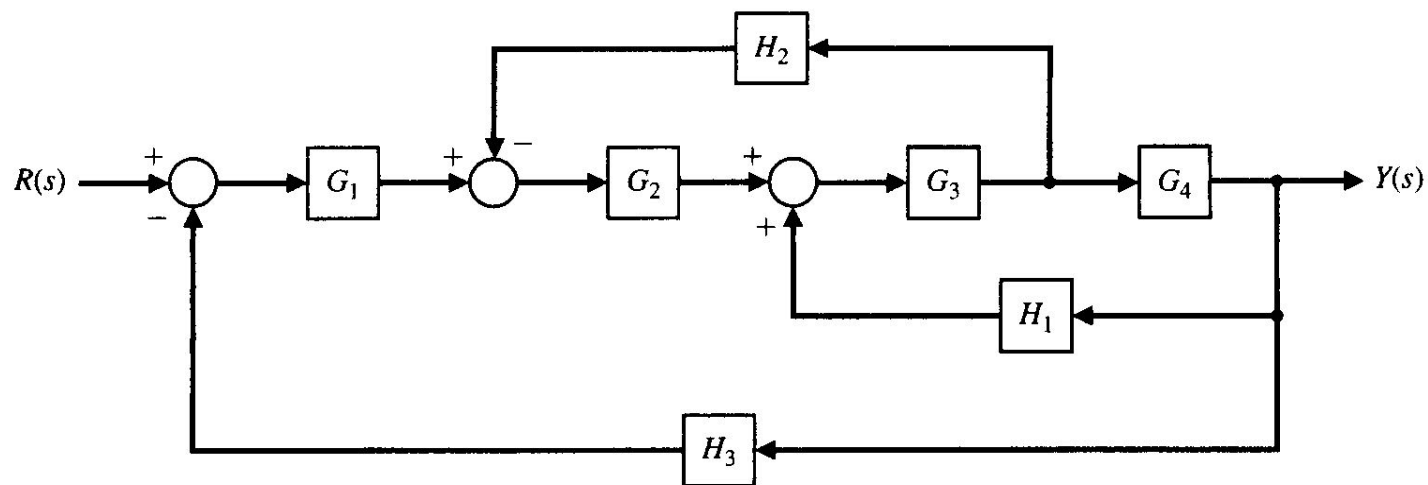
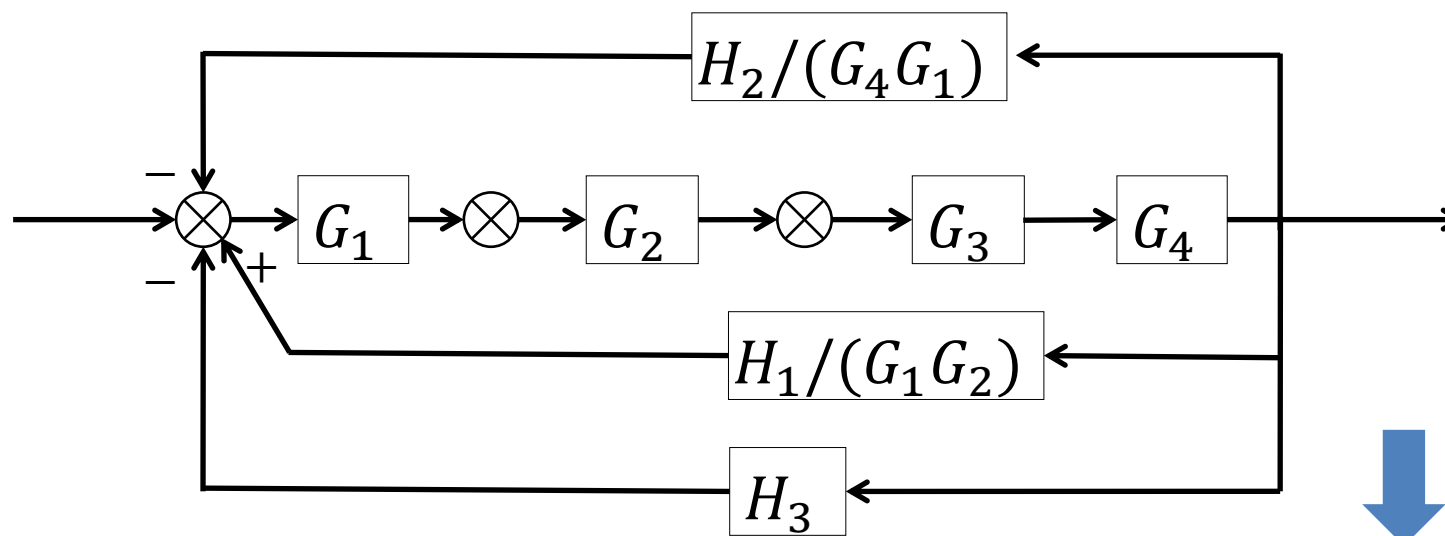
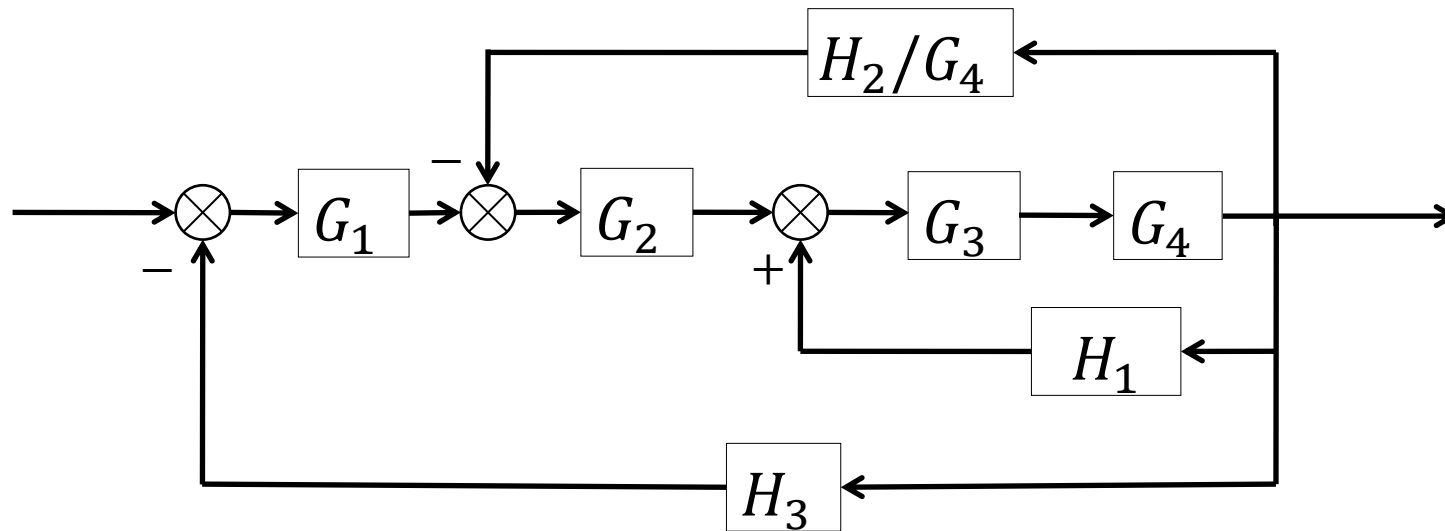
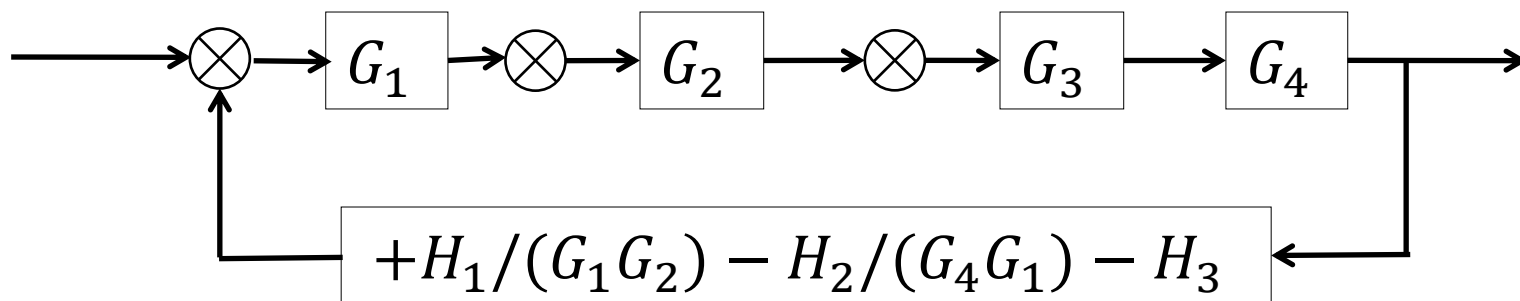


图2.26 多回路反馈控制系统





$$\frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4 \left( \frac{H_1}{G_1 G_2} - \frac{H_2}{G_4 G_1} - H_3 \right)}$$



$$\frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 - G_3 G_4 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_3}$$

- 对于有公共前向传函的闭环传函=  
前向传函之积  
1 ± 不同回路的传函之和

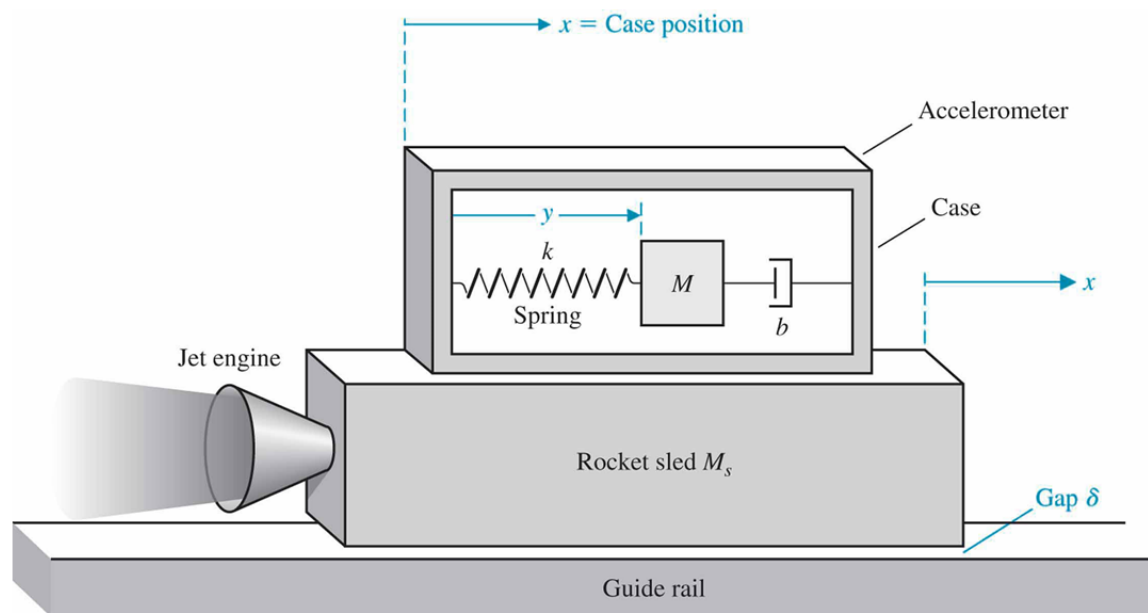
# 例题

- Page 111: P2.35
- Page 111: P2.36

## 2.8 设计实例



(a)



(b)

图2.45 (a) 喷气引擎火箭试验撬；  
(b) 装在试验撬上的加速度计



## 2.8 设计实例



图2.47 用于样品准备的实验用机器人

## 2.8 设计实例

**Table 2.9 ORCA Robot Arm Hardware Specifications**

Arm	Articulated, Rail-Mounted	Teach Pendant	Joy Stick with Emergency Stop
Degrees of freedom	6	Cycle time	4 s (move 1 inch up, 12 inch across, 1 inch down, and back)
Reach	$\pm 54$ cm	Maximum speed	75 cm/s
Height	78 cm	Dwell time	50 ms typical (for moves within a motion)
Rail	1 and 2 m	Payload	0.5 kg continuous, 2.5 kg transient (with restrictions)
Weight	8.0 kg	Vertical deflection	$< 1.5$ mm at continuous payload
Precision	$\pm 0.25$ mm	Cross-sectional work envelope	$1 \text{ m}^2$
Finger travel (gripper)	40 mm		
Gripper rotation	$\pm 77$ revolutions		

## 2.8 设计实例

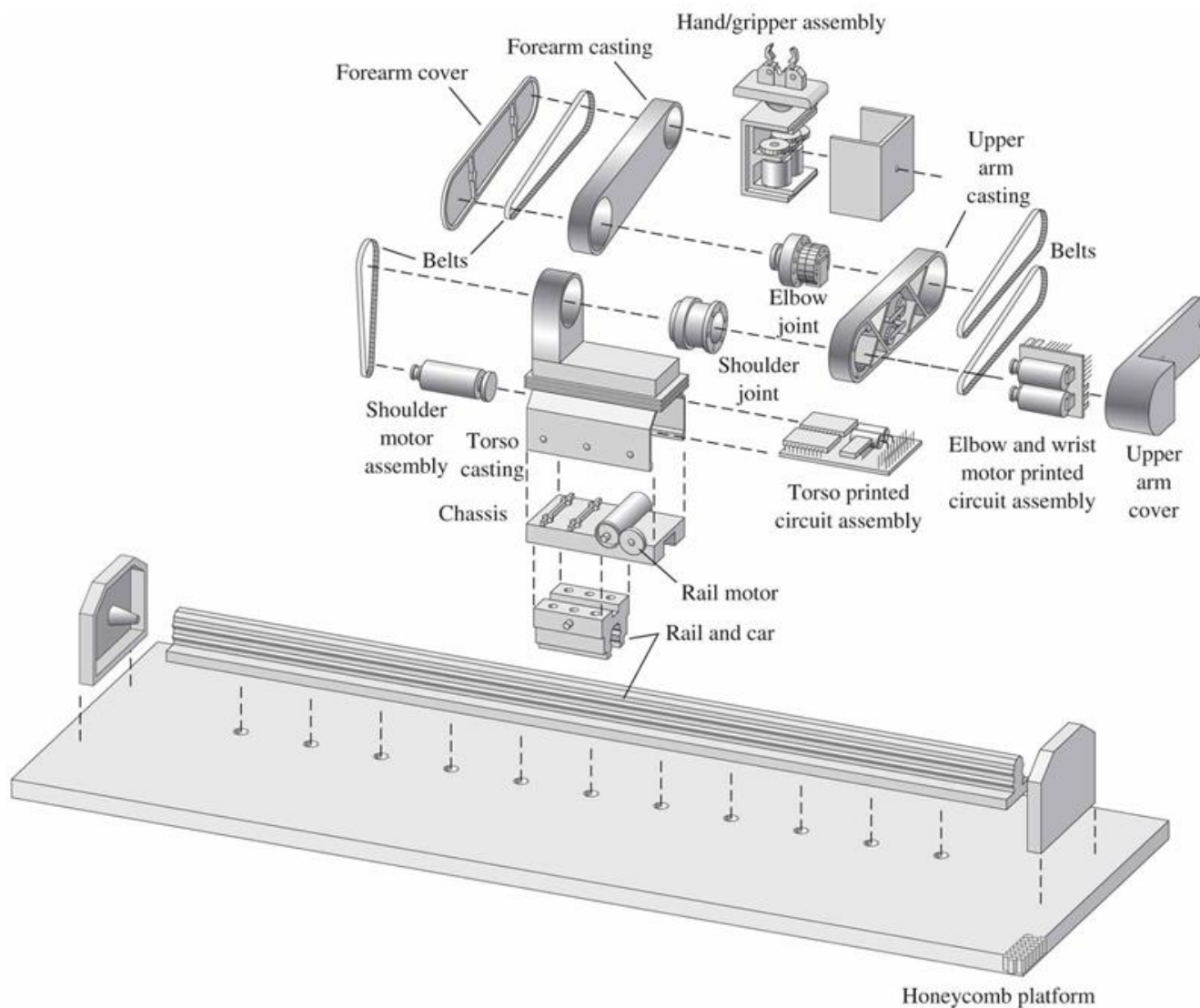


图2.48 ORCA机器人的元件拆分图

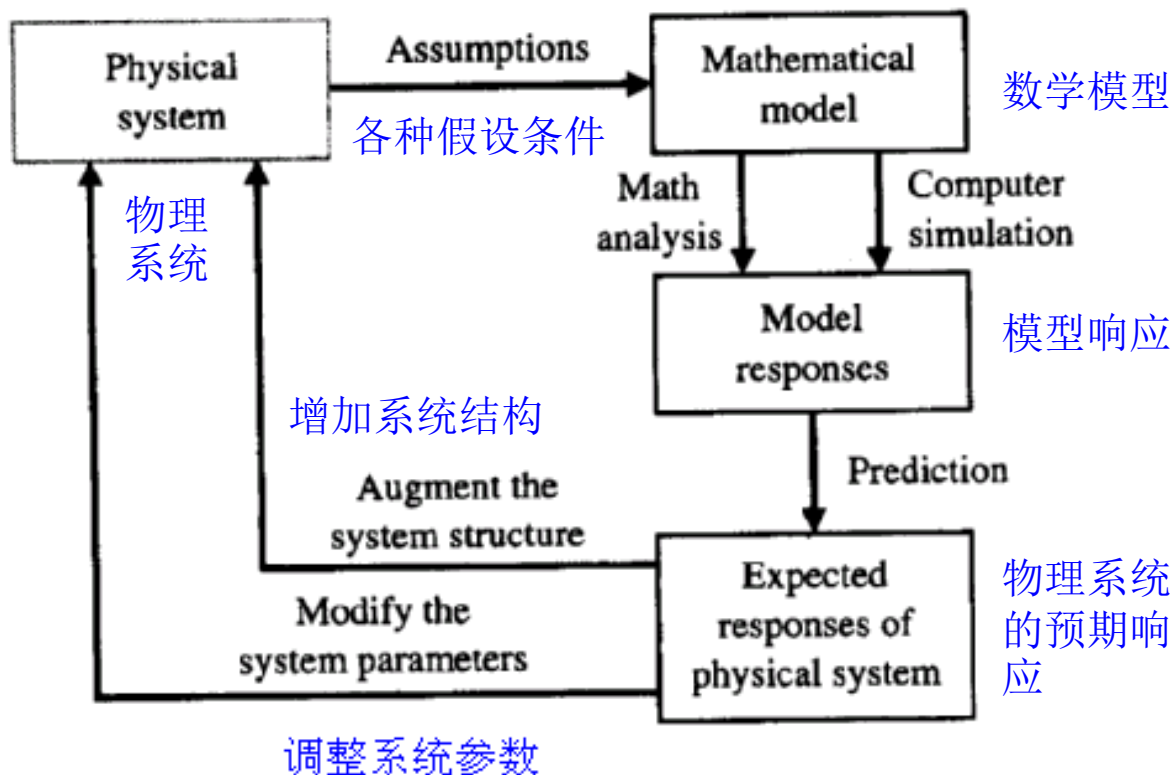
# 惠普公司的“化学分析优化机器人”



## 2.9 利用控制系统设计软件进行系统仿真

### 仿真(Simulation):

通过建立系统模型，利用实际输入信号对系统的行为进行研究的一种模拟活动。



利用系统仿真模型  
进行分析和设计

## 2.9 利用控制系统设计软件进行系统仿真

### 计算机仿真的好处

- 能大幅度缩减所需时间和费用
- 能在各种假定条件下，甚至是当前无法实现的条件  
条件下，对系统进行研究
- 可行的、安全的系统分析和评价技术

# 利用MATLAB进行系统仿真

Roots:          计算方程的根  
Tf:              计算传递函数  
Series:         计算串联多项式的传递函数  
Parallel:        计算并联多项式的传递函数  
Feedback:       计算闭环的传递函数  
Zero, Pole :    计算传递函数的零极点

# 利用MATLAB进行系统仿真

- Poly: 由根重组多项式
- Conv: 计算两个多项式的卷积
- Polyval: 计算一个多项式的值
- Minreal: 消去公因式
- Pzmap: 画零极点图
- Step: 计算系统对单位阶跃输入的响应



# 1. 系统瞬态响应

## 质量块-弹簧-阻尼器系统的零输入动态响应

$$y(t) = \frac{y(0)}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta)$$

$$y(0) = 0.15m, \quad \theta = \cos^{-1} \zeta, \quad \omega_n = \sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}, \quad \zeta_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \left( \frac{k}{M} = 2, \frac{b}{M} = 1 \right)$$

```
>>y0=0.15;
>>wn=sqrt(2);
>>zeta=1/(2*sqrt(2));
>>t=[0:0.1:10];
>>unforced
```

$\omega_n$

$\zeta$

unforced.m

```
%Compute Unforced Response to an Initial Condition
```

```
%
```

```
c=(y0/sqrt(1-zeta^2));
y=c*exp(-zeta*wn*t).*sin(wn*sqrt(1-zeta^2)*t+acos(zeta));
```

$y(0)/\sqrt{1-\zeta^2}$

```
%
```

```
bu=c*exp(-zeta*wn*t);bl=-bu;
```

$e^{-\zeta\omega_n t}$  envelope

```
%
```

```
plot(t,y,t,bu,'--',t,bl,'--'), grid
```

```
xlabel('Time (s)'), ylabel('y(t) (m)')
```

```
legend(['\omega_n=',num2str(wn), ' \zeta=',num2str(zeta)])
```

# 1. 系统瞬态响应

$$y(t) = \frac{y(0)}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta)$$

$$y(0) = 0.15m, \quad \theta = \cos^{-1} \zeta, \quad \omega_n = \sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}, \quad \zeta_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \left( \frac{k}{M} = 2, \frac{b}{M} = 1 \right)$$

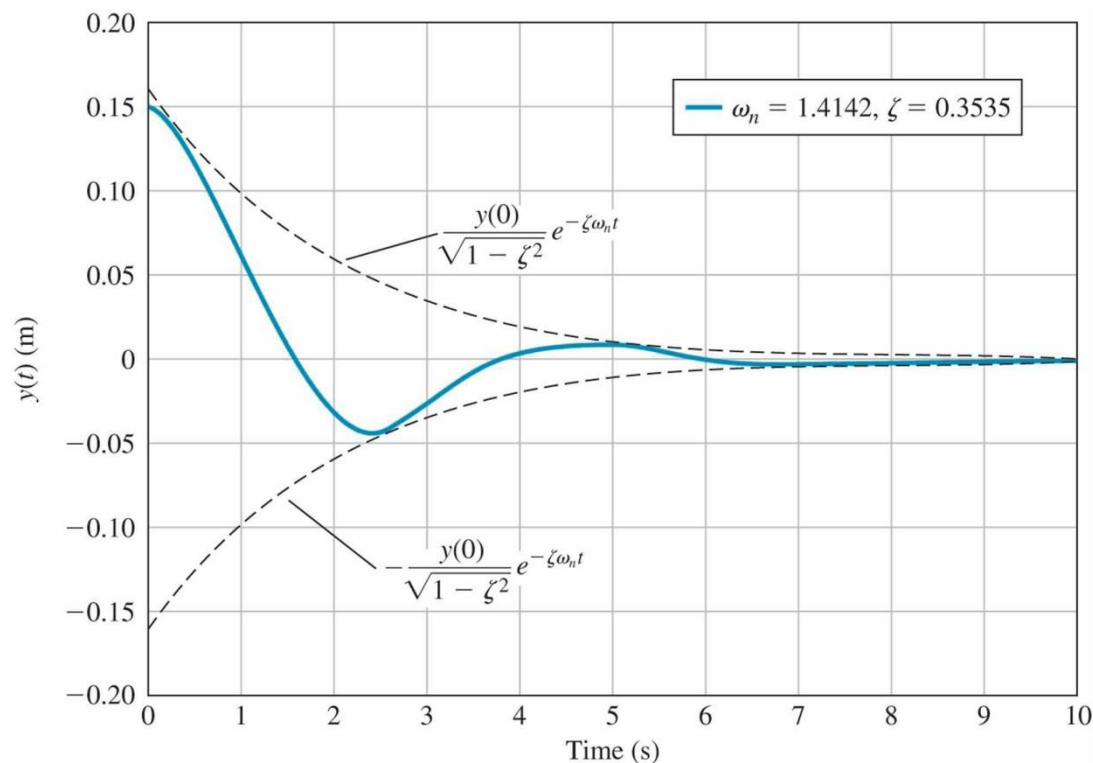
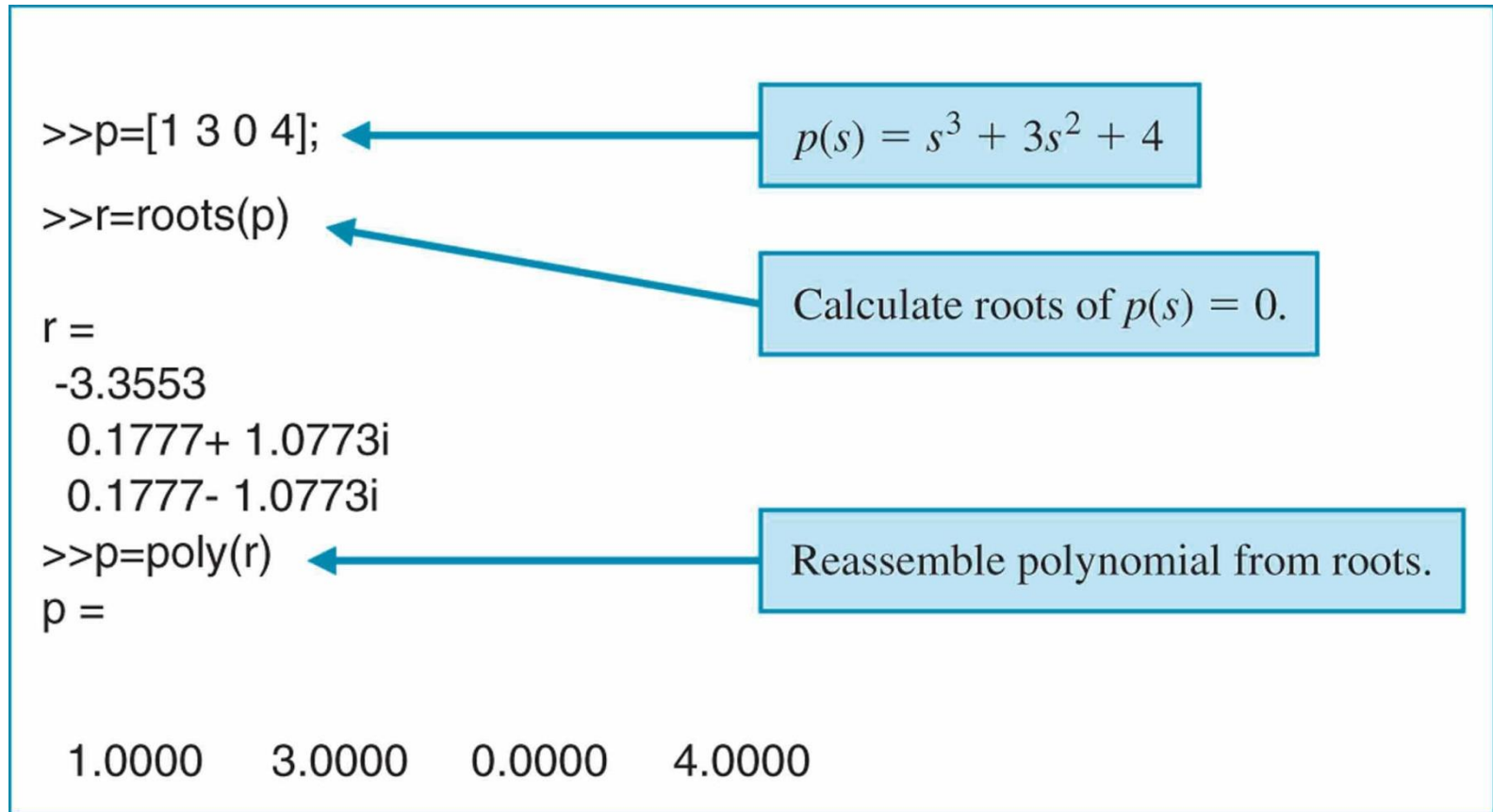


图 2.51  
质量-弹簧-阻尼器系统  
的零输入响应

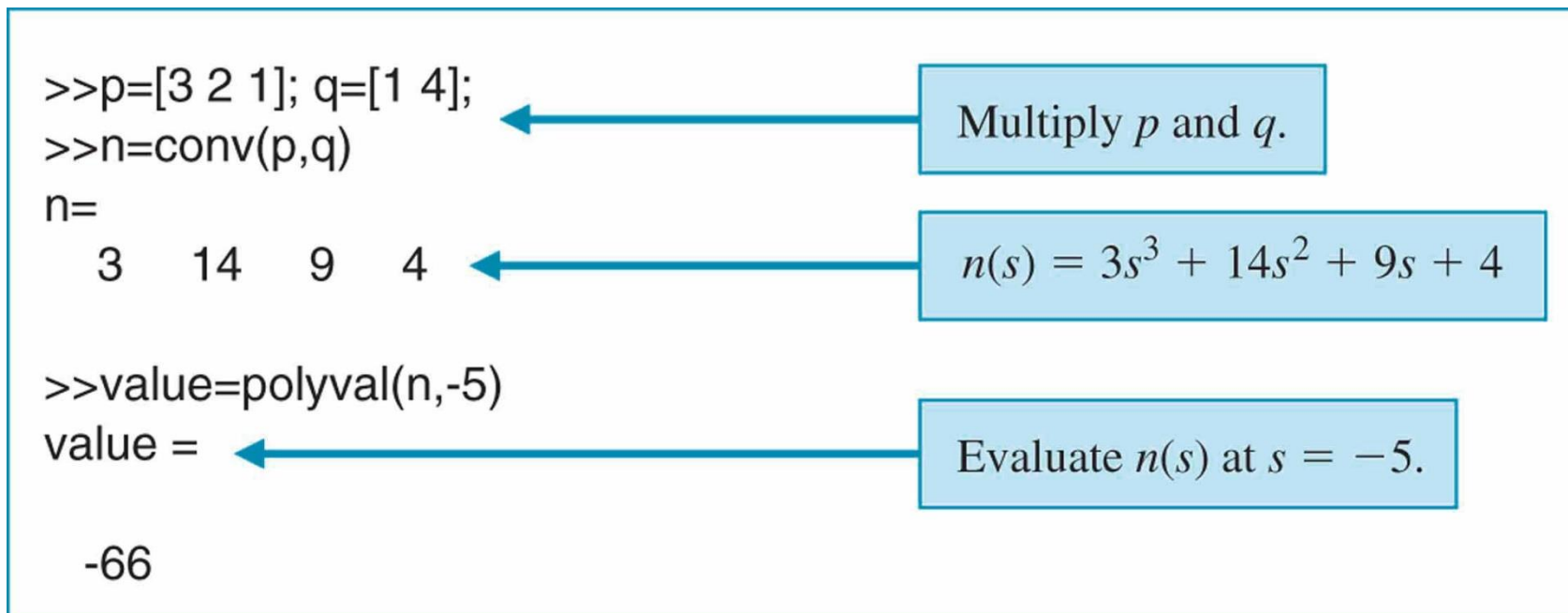
## 2. 多项式polynomial



Copyright © 2011 Pearson Education, Inc. publishing as Prentice Hall

图2.52 输入多项式并求解零化方程的根

## 2. 多项式polynomial



Copyright © 2011 Pearson Education, Inc. publishing as Prentice Hall

图2.53 多项式的乘积和求值

### 3. 传递函数 transfer function

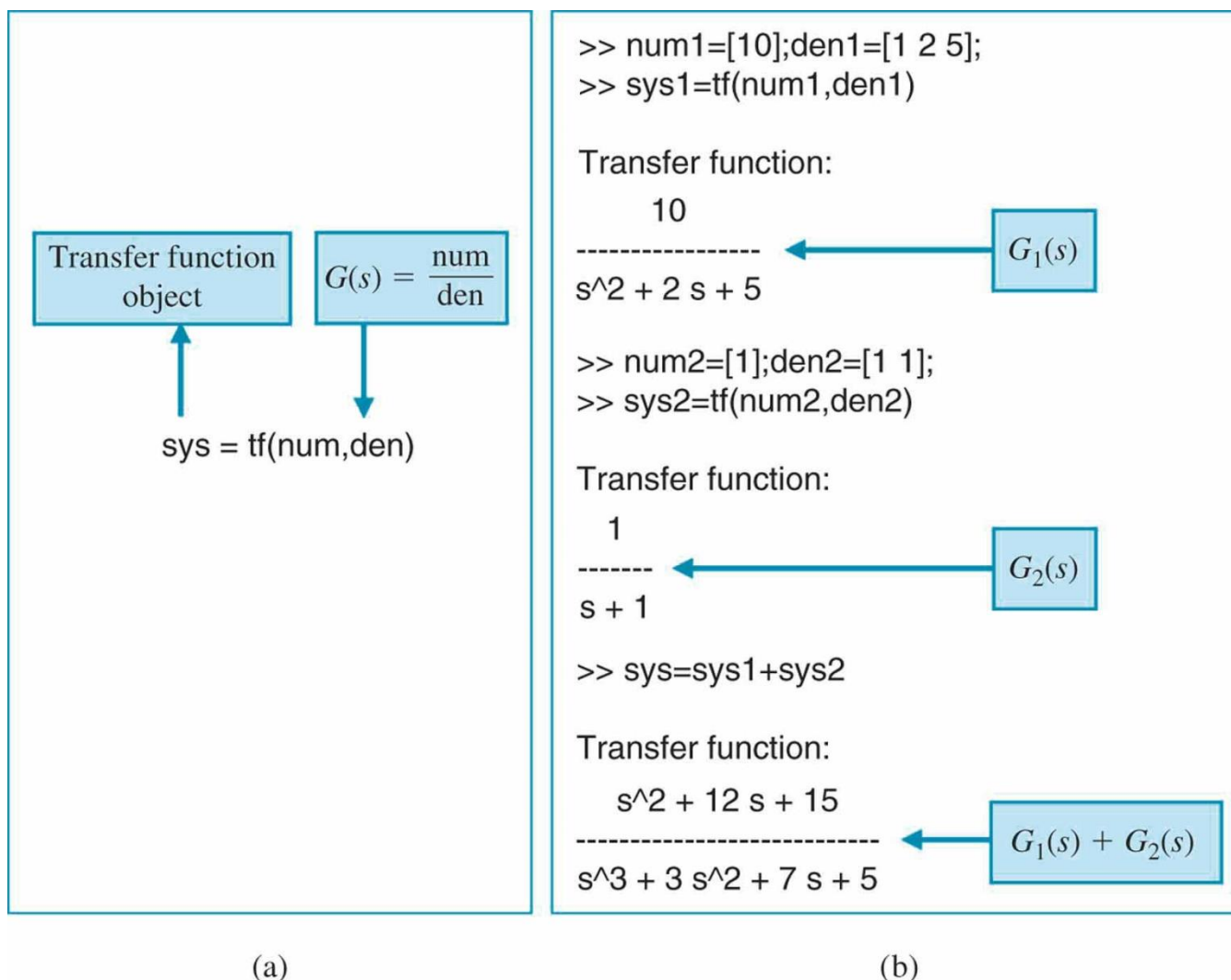


图2.54 传递函数的使用说明

## 4. 零极点 pole & zero

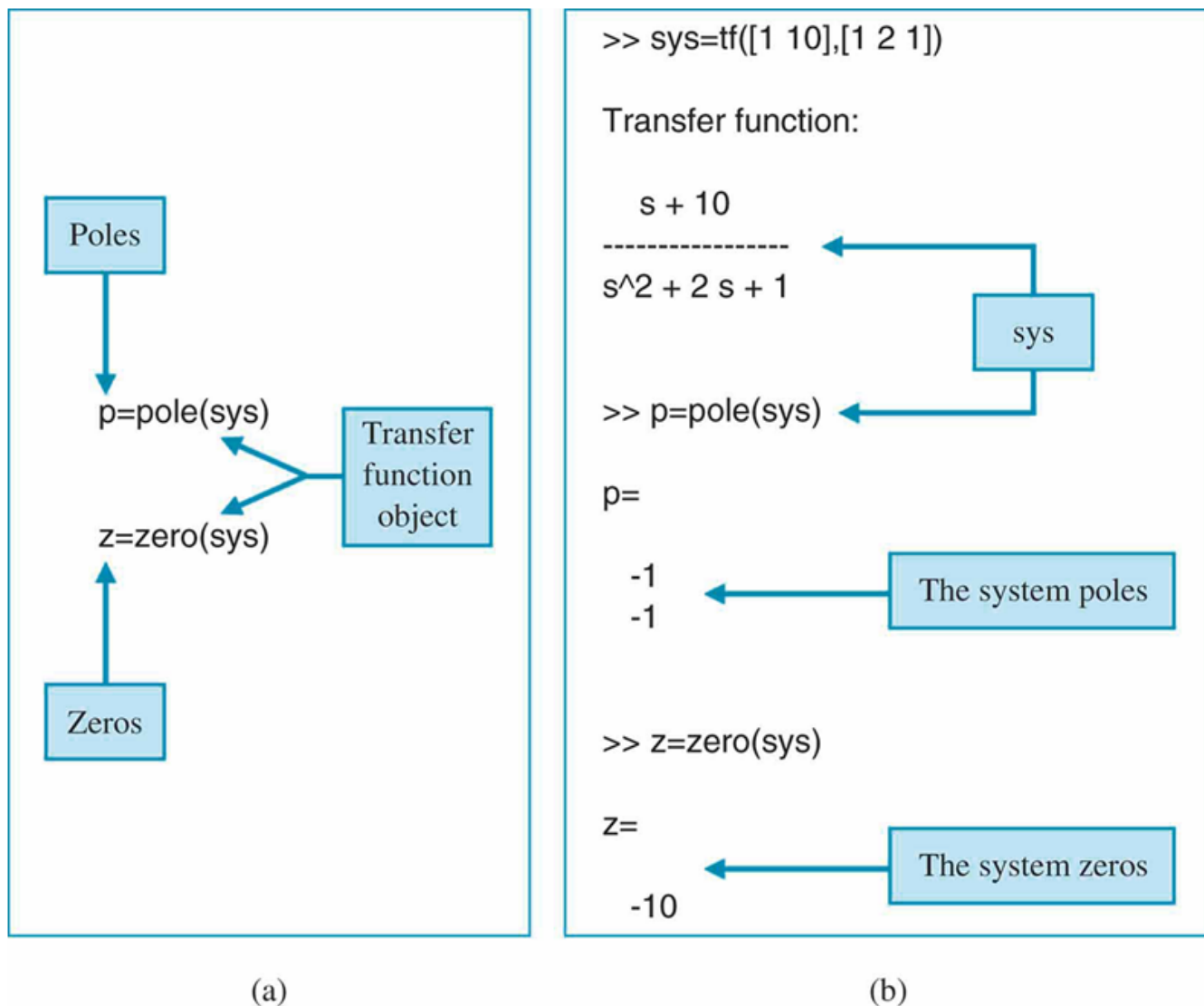


图2.55 函数 pole和zero的使用说明

## 4. 零极点 pole & zero

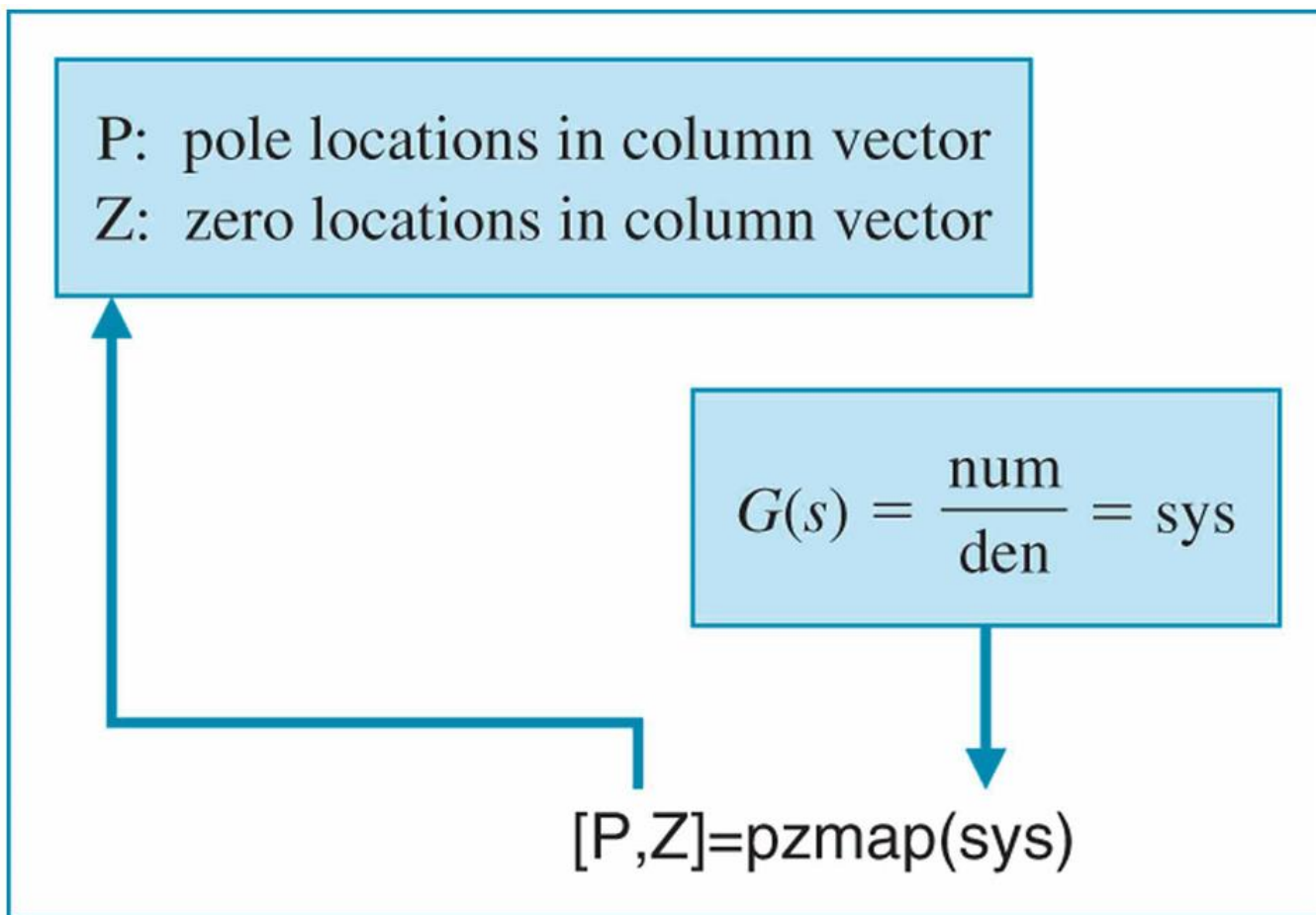


图2.56 函数 pzmap 的使用说明

## 例2.18

$$G(s) = \frac{6s^2 + 1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

$$H(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+2i)(s-2i)(s+3)}$$

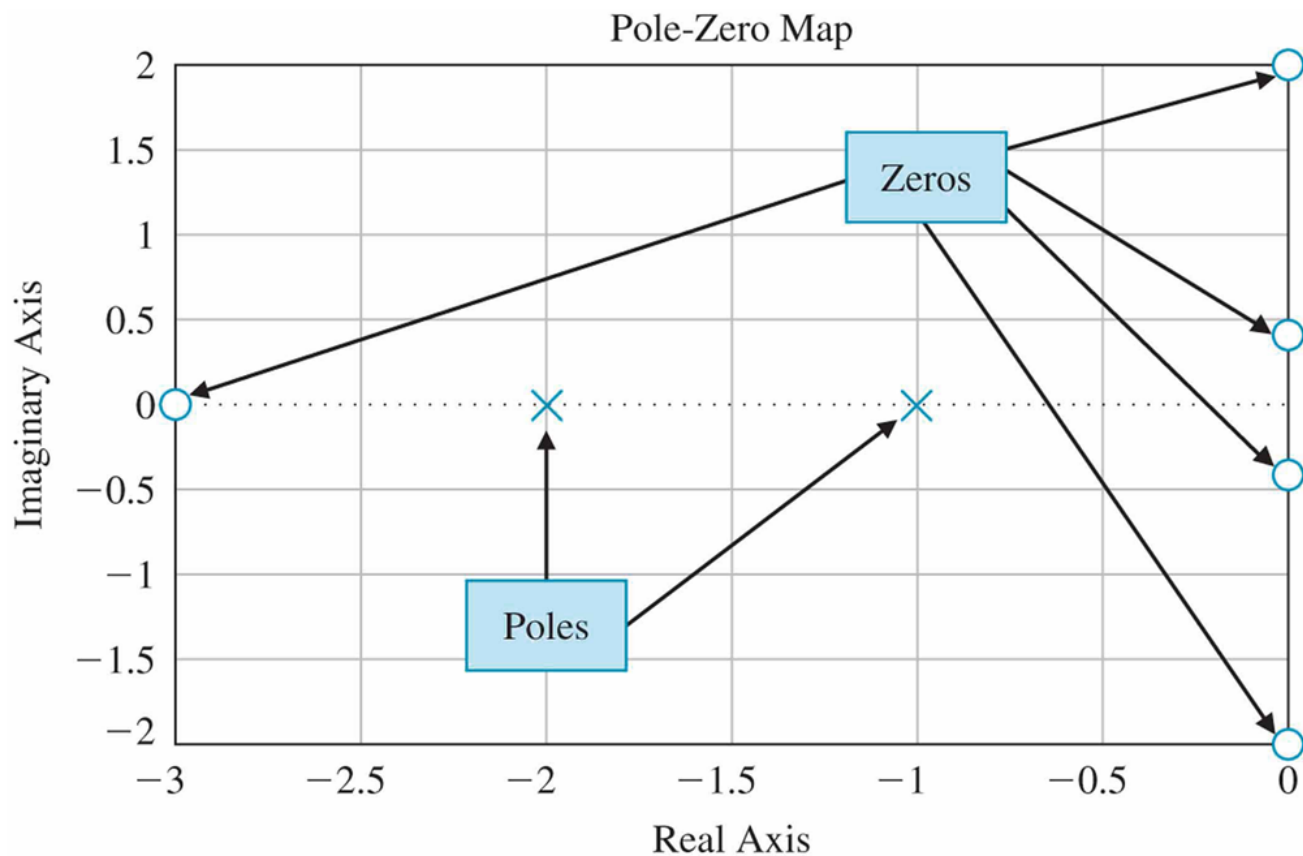


图 2.57  $G(s)/H(s)$  的零极点图



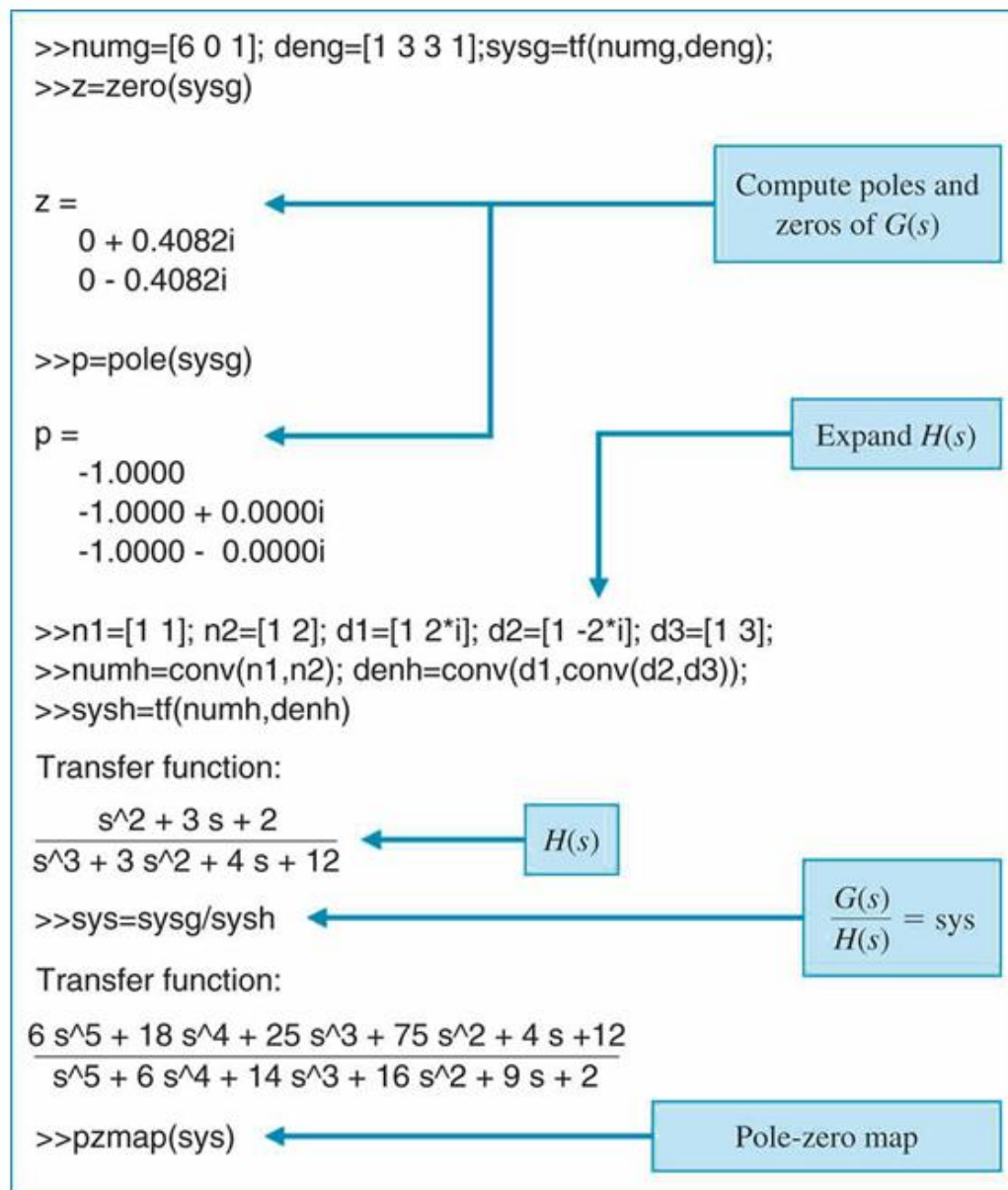


图 2.58 传递函数 $G(s)$ 和 $H(s)$ 的一些运算示例

## 2.10 循序渐进设计实例：磁盘驱动读取系统

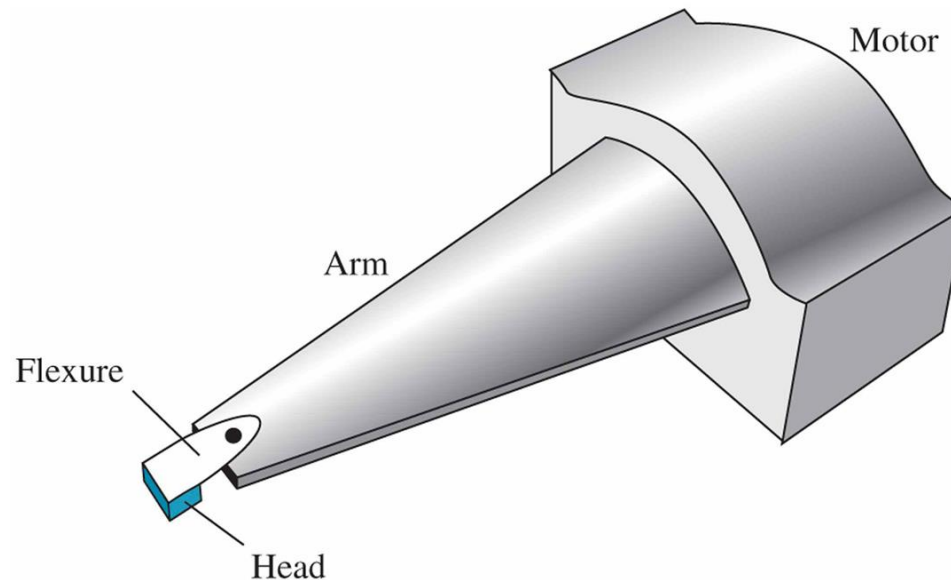


图2.75 磁头安装结构图

- 磁头安装在一个与手臂相连的片上，它读取磁盘上各点处不同的磁通量并将信号提供给放大器
- 弹性簧片flexure 用于使磁头浮于磁盘100 nm间隙的上方

## 2.10 循序渐进设计实例：磁盘驱动读取系统

偏差信号（**error signal**）是在磁头读取磁盘上预先录制的索引磁道（index track）时产生的

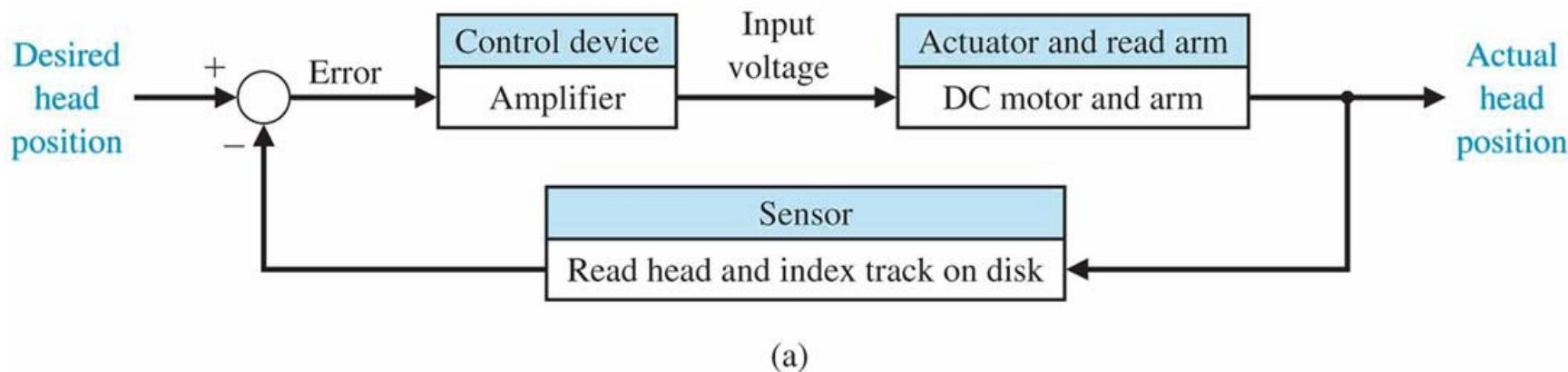


图2.76 磁盘驱动器读取系统框图模型

假定簧片是完全刚性的，不会出现明显的弯曲

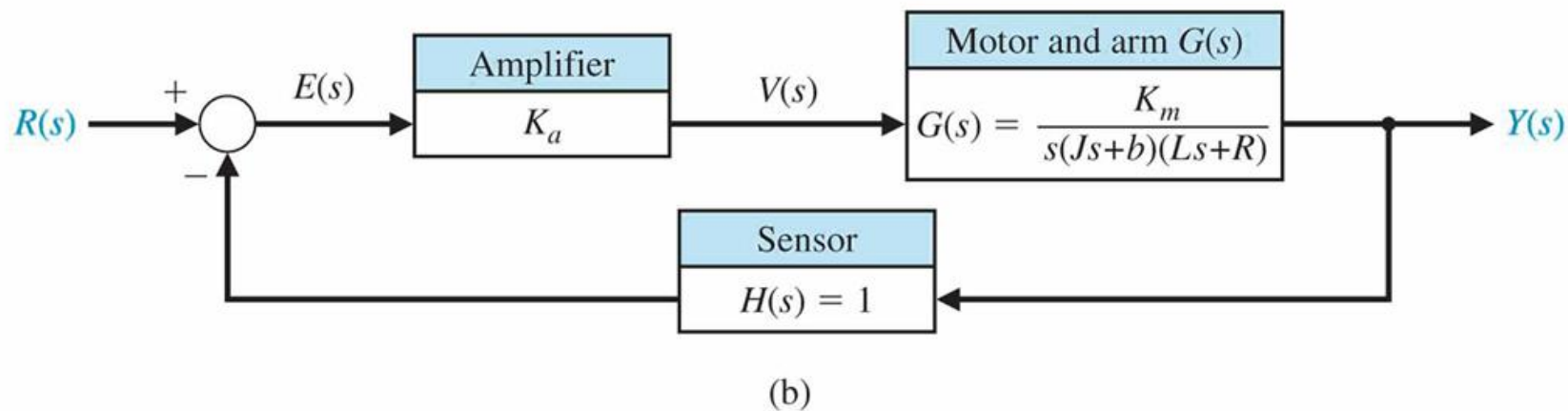


图2.76 磁盘驱动器读取系统框图模型

## 2.10 循序渐进设计实例：磁盘驱动读取系统

**表2.10 磁盘驱动器读取系统典型参数**

参数	符号	典型值
手臂与磁头的转动惯性	J	$1\text{N.m.s}^2/\text{rad}$
摩擦系数	b	$20\text{kg/m/s}$
放大系数	Ka	10—100
电枢电阻	R	$1\Omega$
电机系数	Km	$5\text{N.m/A}$
电枢电感	L	$1\text{mH}$

## 2.10 循序渐进设计实例：磁盘驱动读取系统

$$G(s) = \frac{K_m}{s(Js + b)(Ls + R)} = \frac{5000}{s(s + 20)(s + 1000)}$$

$$G(s) = \frac{K_m/bR}{s(\tau_L s + 1)(\tau s + 1)}$$

其中  $\tau_L = J/b = 50 \text{ ms}$  ,  $\tau = L/R = 1 \text{ ms}$ .

由于  $\tau \ll \tau_L$  , 我们经常忽略  $\tau$  , 可得

$$G(s) \approx \frac{K_m/bR}{s(\tau_L s + 1)} = \frac{0.25}{s(0.05s + 1)} \quad \text{或} \quad G(s) = \frac{5}{s(s + 20)}$$

闭环系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5K_a}{s^2 + 20s + 5K_a}$$

## 2.10 循序渐进设计实例：磁盘驱动读取系统

当  $K_a = 40$ , 有  $Y(s) = \frac{200}{s^2 + 20s + 200} R(s)$

当  $R(s) = \frac{0.1}{s}$ , 求得单位阶跃响应

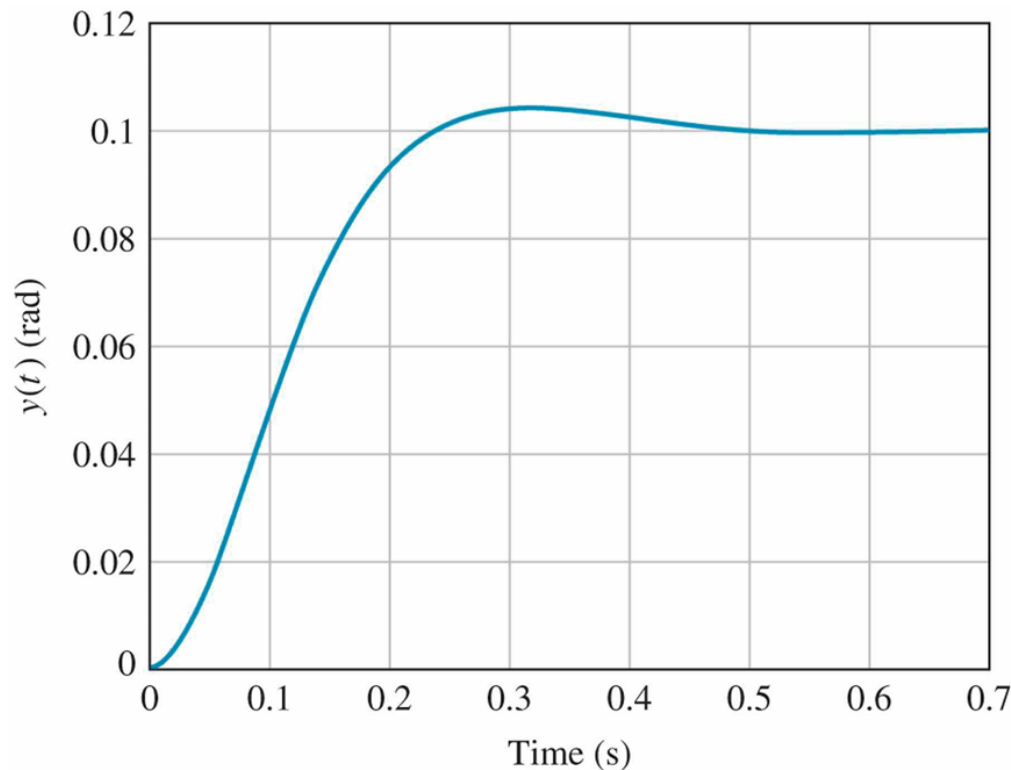


图2.78  
系统阶跃响应图

[Ansys Motion新一代强大的柔性多体动力学仿真软件介绍\\_哔哩哔哩\\_bilibili](#)

[Flightmare- 一个灵活的四旋翼模拟器\\_哔哩哔哩\\_bilibili](#)

[Isaac Gym - Preview Release | NVIDIA Developer](#)

[\[转\]NVIDIA ISAAC AI 机器人全栈开发平台\\_哔哩哔哩\\_bilibili](#)

[预瞄驾驶员模型、carsim\\_哔哩哔哩\\_bilibili](#)

[使用Airsim模拟无人机飞跃张家界\\_哔哩哔哩\\_bilibili](#)



## 2.11 小结

- 会用微分方程建立系统的数学模型
- 能对非线性元件进行线性化
- 拉普拉斯变换
- 传递函数
- 方框图
- 控制系统的计算机仿真