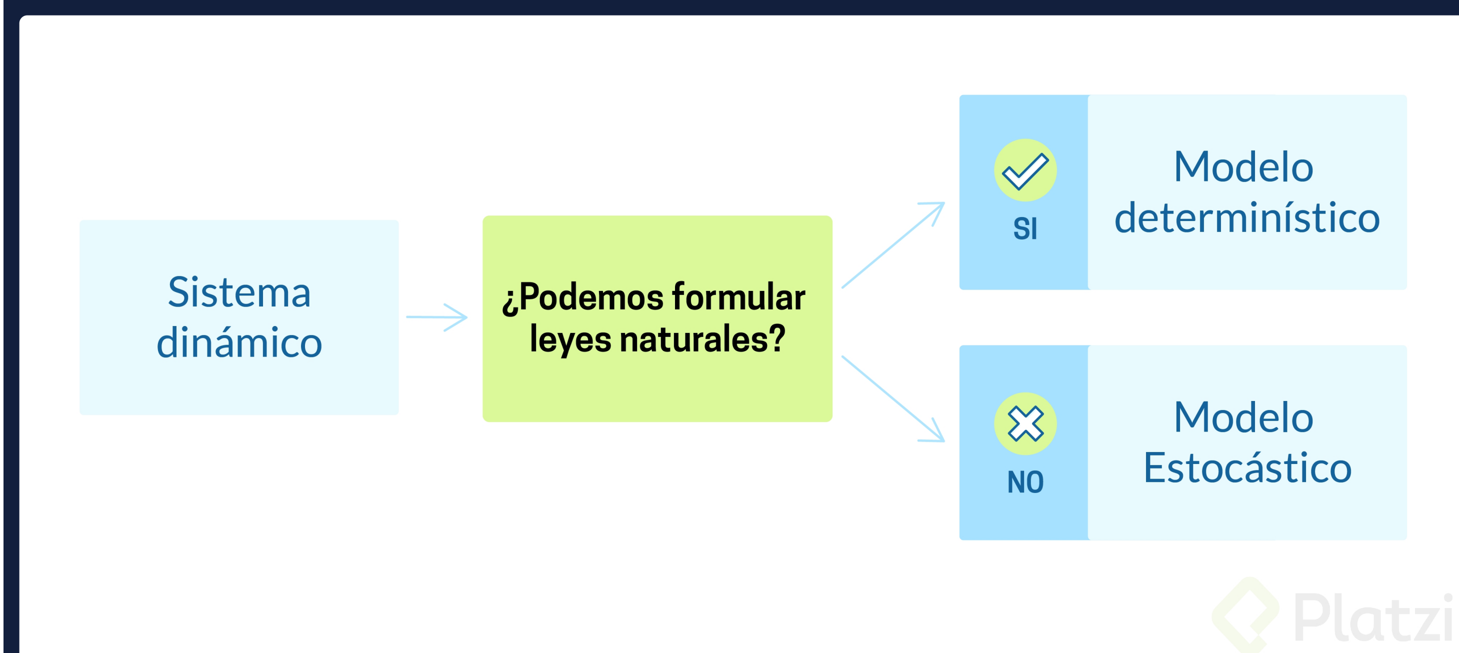
En la clase anterior vimos cómo **las funciones nos permiten describir de forma cuantitativa una parte simplificada de la realidad que denominamos sistema dinámico**. Sin embargo, tener conocimiento previo de estas funciones no es algo que se da a menudo. Lo que comúnmente sucede es que primero se formulan leyes naturales que reflejan la intuición o percepción que obtenemos de nuestras observaciones sobre lo que sucede en la realidad que nos rodea. Si estas leyes están bien formuladas y son lo suficientemente claras, podemos extraer lo que se denomina una ecuación. La idea de una ecuación es que nos permite encontrar una incógnita por medio de operaciones matemáticas fundamentales y en este curso nos enfocaremos específicamente en las **ecuaciones diferenciales ordinarias** o **EDOs.** Si quieres profundizar en esos temas, tenemos el Curso de Ecuaciones Diferenciales.

Cuando es posible formular leyes naturales, el modelo resultante se denomina **determinístico**. Sin embargo, cuando no es posible formular una ley natural sobre un sistema y su dinámica observable, se acostumbra recurrir a la teoría de la probabilidad. El modelo que resulta de esta segunda situación se denomina **modelo estocástico**.



La **probabilidad** es la **alternativa en la que se basan los modelos matemáticos cuando no es posible establecer leyes que determinen cómo va a evolucionar un sistema dinámico**. Aunque como dijo uno de los últimos grandes genios de nuestra era, **Henri Poincaré**:

El azar no es más que la medida de nuestra ignorancia. Los fenómenos fortuitos son, por definición, aquellos cuyas leyes simplemente ignoramos.

Y con esto, Poincaré, está queriendo decir que en el fondo todo debe tener leyes que rigen su comportamiento, pero que cuando no sabemos porque razón las cosas suceden, eso es lo que entendemos por azar y ahí es donde entra la teoría de la probabilidad. En este curso vamos a trabajar exclusivamente con modelos determinísticos, aunque veremos que algunas leyes de sistemas particulares que estudiaremos, en realidad viven sobre una delgada línea entre lo determinístico y lo estocástico. Esto ocurre porque en algunos casos la probabilidad puede resumirse en un tipo de modelo determinístico que describe solamente propiedades a nivel macro de nuestro objeto de estudio. Yo sé, esto suena un poco extraño, y por eso como especie nos tomó mucho tiempo entenderlo, pero verás que el resultado es muy interesante desde el punto de vista científico y ha resultado históricamente muy útil.

Ahora ya tenemos bien establecido el terreno sobre el cual nos vamos a mover: Vamos a construir modelos determinísticos de sistemas dinámicos que puedan traducirse en ecuaciones diferenciales ordinarias. En este punto quizá te preguntes: ¿Ya por fin vas a decirme qué es una EDO?. Pues sí, llegó el momento, pero para lograr entenderlo de la forma más sencilla posible, construiremos el concepto a partir de un ejemplo que sea intuitivo para todos sin caer en formalismos matemáticos.

Vamos a considerar el problema de la **propagación de una epidemia en una población de personas que son susceptibles de infectarse por un virus, bacteria o agente infeccioso en general**. Hay que comenzar por identificar qué nos puede interesar de este problema. Algunas variables que sería muy útil poder predecir serían:

1. ¿Qué tan rápido crecerá la epidemia?
2. ¿Cuál será el número de infectados día a día?
3. ¿Cuál será el total acumulado de infectados en una semana, un mes, un año?
4. ¿Cuántos infectados se recuperarán de la epidemia?
5. ¿Cuántos infectados morirán por causa de la epidemia?

Para formular la ecuación que nos permita responder al menos de manera aproximada este tipo de preguntas, primero debemos intuir cuál sería una ley que gobierne la dinámica de este problema. Aquí nuestro sistema dinámico se compone de una población de individuos, la cual se divide en compartimientos, listamos algunos por ponerlos de ejemplo, pero pueden variar en sus definiciones:

1. **Compartimiento 1**: Los individuos susceptibles de infección
2. **Compartimiento 2**: Los individuos infectados
3. **Compartimiento 3**: Los individuos que han muerto por causa de la infección
4. **Compartimiento 4**: Los individuos que se han recuperado de la infección.

En general, el número de compartimientos puede aumentar o disminuir dependiendo de las aproximaciones o simplificaciones que quieras incluir en el modelo. Vamos a comenzar con un modelo que asume solo dos compartimientos: susceptibles de infección e infectados. Sabemos que esto no es muy realista, pero tomaremos el ejemplo solamente para entender cómo construir una ecuación de esto.

El primer paso es formular una ley de crecimiento o expansión de la epidemia y esto lo haremos a partir de argumentos basados en observación y tal vez algo de sentido común. Esta ley, para quedar bien formulada, tenemos que escribirla en términos de las variables que caracterizan nuestro sistema, las cuales en este caso serían: el número de individuos susceptibles en el tiempo ***S(t)*** y el número de infectados en el tiempo ***I(t)***.

La manera de formular una ley sencilla que describa este sistema se consigue avanzando a través de la siguiente línea de razonamientos:

1. Cuando una persona susceptible entra en contacto con una persona infectada existe una posibilidad de que quede infectada. Esto lo expresamos con una probabilidad constante. Leíste bien, probabilidad. Aquí estamos en la línea entre lo estocástico y lo determinístico. Por ejemplo de cada 100 contactos, solamente 60 infectan a otro individuo.
2. El número de contactos posibles entre ambos compartimientos de la población es proporcional a ambas variables y esto lo expresamos como un producto de variables.
3. Lo anterior implica que la tasa de crecimiento de la población infectada es proporcional al número de contactos, así como la tasa de decrecimiento de la población de susceptibles.
4. Una vez que una persona es infectada, no se recupera y queda en ese estado por siempre.

De lo cual escribimos la ley en términos de dos relaciones de proporcionalidad (una relación por cada compartimiento de la población):

$$\frac{dS}{dt} \ \alpha \ -(S(t) \times I(t))$$

$$\frac{dI}{dt} \ \alpha \ S(t) \times I(t)$$

Las cuales a su vez se pueden escribir como ecuaciones, recordando que cualquier relación de proporcionalidad se puede escribir como una igualdad incluyendo una constante de proporcionalidad, que en este caso llamamos $\boldsymbol{\beta}$ (y cuyo significado descubriremos en la próxima clase):

$$\frac{dS}{dt} = -\beta(S(t)I(t))$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta\, S(t)I(t)$$

Aquí estamos usando derivadas para expresar las tasas de cambio de una variable como es usual en el Cálculo diferencial. En estas ecuaciones tenemos dos incógnitas que son ***S(t)*** e ***I(t)*** , y además se caracterizan porque incluyen derivadas de las incógnitas (observa que las incógnitas en realidad son funciones del tiempo). En este sentido, cuando tenemos una ecuación cuya incógnita es una función y esta ecuación incluye derivadas de la función incógnita, se le llama **Ecuación Diferencial Ordinaria o en forma breve EDO**.

Así pues, hemos encontrado una ley muy sencilla que describe matemáticamente cómo evoluciona una epidemia en el tiempo. El reto es que tenemos dos ecuaciones que debemos resolver para poder encontrar las funciones que nos permitirán predecir el número de infectados en el tiempo, así como ya lo teníamos resuelto con el ejercicio del péndulo en la clase anterior. En la próxima clase veremos cómo se pueden resolver este tipo de ecuaciones.