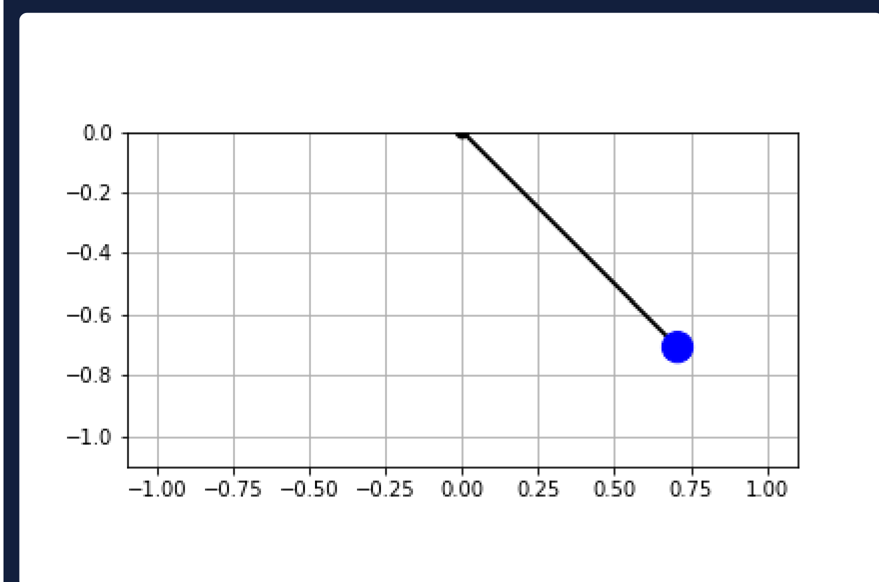
En la clase anterior te diste cuenta de que el concepto de modelo va mucho más allá de la noción matemática moderna que hoy en día se tiene. Es un concepto íntimamente ligado con nuestra capacidad para imaginar y construir abstracciones de la realidad, la cual a su vez, es una consecuencia de la capacidad evolutiva que nos permitió llegar a ser la especie dominante en este planeta.

En esta clase vamos a profundizar en la formulación matemática necesaria para hacer modelos y veremos cómo las funciones matemáticas describen la realidad con un ejemplo sencillo de un péndulo en movimiento como el que ves a continuación:



Ahora que entendemos que un modelo es una representación simplificada de la realidad, debes preguntarte: ¿Qué parte de la realidad quieres modelar ¿Con qué propósito? ¿Quieres predecir un evento o la ocurrencia de una situación particular? ¿Cuáles son las variables y sus relaciones? ¿Puedes obtener datos para validar el modelo?

Primero, voy a tomar como caso particular un péndulo y quiero saber cuál será su posición en el futuro. Al decir esto, he identificado la parte de la realidad que quiero modelar: *un objeto sólido que cuelga de una cuerda muy fina que puedo disponer para que efectúe oscilaciones alrededor de un punto fijo*. Esta parte de la realidad que quiero modelar se denomina el **sistema** y cuando el sistema cambia a medida que el tiempo avanza, se le denomina **sistema dinámico**.

Una vez que tengo identificado el sistema, lo siguiente es determinar cuáles son las variables que son relevantes para el objetivo que quiero lograr. Aquí se dice que lo que quiero cuantificar es la **posición del objeto**, pero resulta que la posición del péndulo viene dada por la ubicación específica del peso que cuelga de la cuerda, y dependiendo de qué tanto quiera simplificar el sistema, necesitaré dos o tres coordenadas en el espacio. Supongamos que etiqueto estas coordenadas como

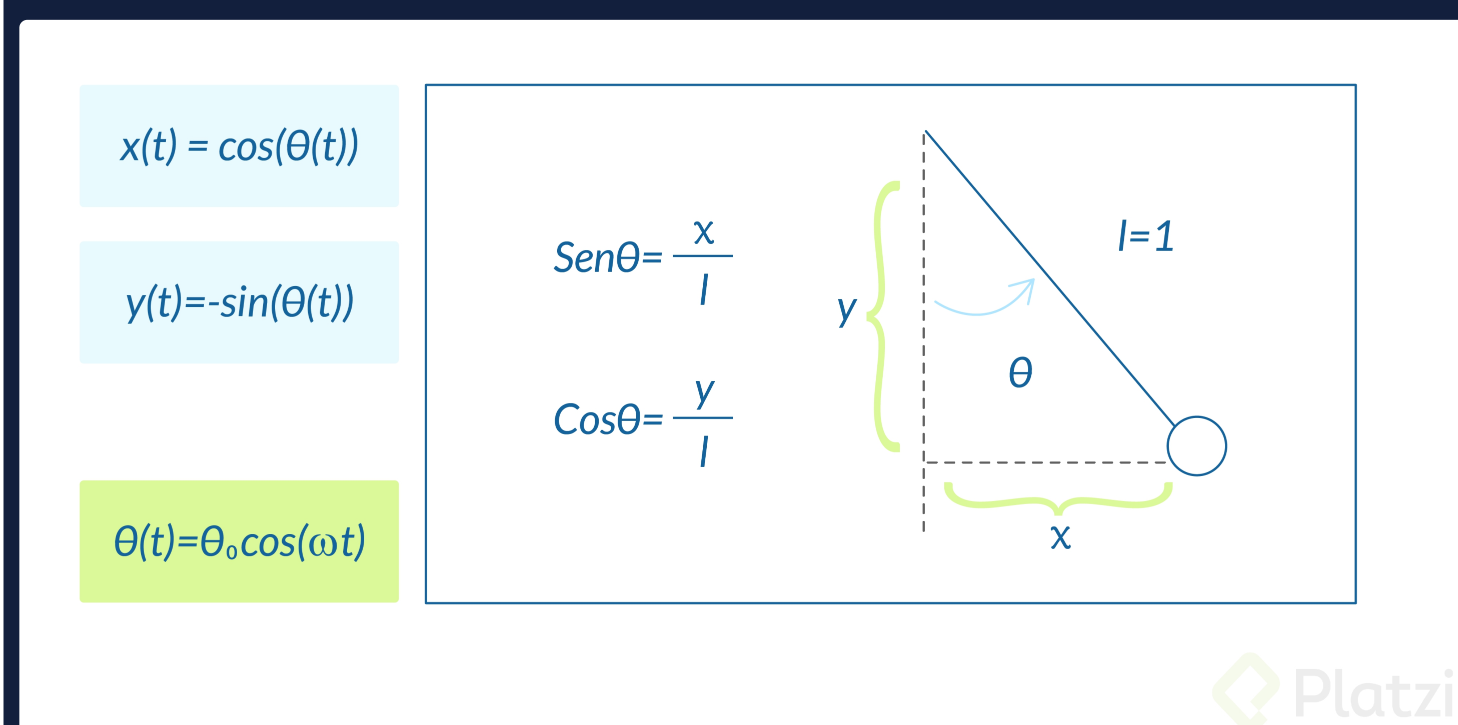
Ahora, como el objeto en general estará en movimiento, decimos que estas coordenadas (que ahora son nuestras **variables** del modelo) dependen del instante de tiempo en el cual observamos el objeto (aquí la **relación** del modelo es entre el tiempo y las coordenadas) y escribimos:

$x = x(t)$
$y = y(t)$
$z = z(t)$

En matemáticas existen muchos tipos de relaciones entre variables, así que nos vamos a enfocar en el único tipo de relación que nos interesa: las relaciones que denominamos **funciones**. No vamos a profundizar en los detalles de lo que una función matemática es pero vamos a dejar claro que las funciones son el tipo de relación que necesitamos porque permiten crear modelos donde, por ejemplo, *un objeto no puede estar en dos lugares al mismo tiempo*, ya que eso va contra la lógica de nuestra realidad observable. Para profundizar sobre el concepto de función matemática te recomiendo tomar el curso de **Cálculo para análisis de datos** aquí.

Dicho esto, las funciones serán la base para construir nuestros modelos matemáticos ya que nos permiten hacer descripciones exactas de las variables que caracterizan el sistema (o trozo de realidad) del cual queremos hacer predicciones. En este curso vamos a trabajar con estas funciones usando Python, así que vamos a comenzar escribiendo un código en este lenguaje que te permitirá hacer una simulación de este sistema dinámico.

Antes conviene que definamos cuáles son las funciones que describen el movimiento del péndulo. Por simplicidad, tomaremos un péndulo que se mueve en un plano bidimensional así:



Aquí, θ_0 y ω son el ángulo inicial de apertura y la frecuencia de oscilación del péndulo, respectivamente, y la función $\theta(t)$ describe cómo varía el ángulo de oscilación del péndulo según el tiempo t. Estos valores son constantes y se toman como condiciones iniciales del problema, es decir, definen el estado inicial del péndulo (qué tanto va a oscilar y qué tan rápido). Escribir estas ecuaciones en Python no requiere muchas líneas de código, y para este ejercicio primero vamos a usar las siguientes librerías:

```
[13]
import numpy as np
import scipy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.patches import Circle
from matplotlib.animation import FuncAnimation
import imageio
```

Luego definimos las posiciones en las coordenadas ***x*** e ***y*** definidas previamente, así:

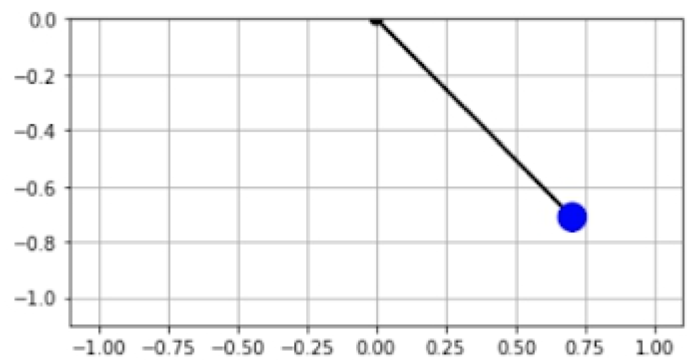
```
[14]
theta0 = np.pi/4
w = sp.pi

def theta(t): return theta0*np.cos(w*t)
def x(t): return np.sin(theta(t))
def y(t): return -np.cos(theta(t))
```

Donde tenemos un ángulo inicial θ_0 de $\pi/4$ radianes y la frecuencia ω con un valor de π radianes por segundo. Veamos ahora cómo se ve el movimiento de un péndulo descrito por estas funciones, para ello vamos a definir una función que dibuja la posición del péndulo dependiendo del valor de tiempo que quieras ver:

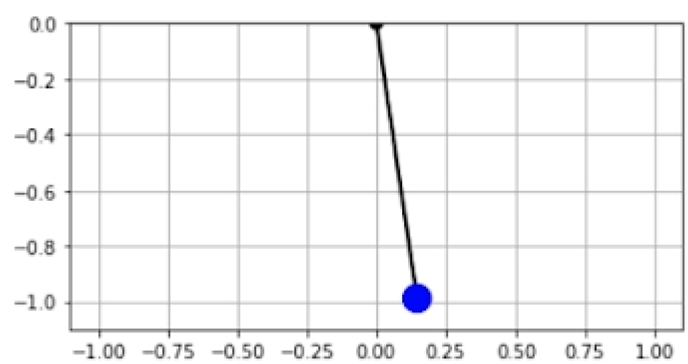
```
[15]
tmax, dt = 10, 0.05
t = np.arange(0,tmax, dt)
filenames = []
def make_plot(i):
    r = 0.05
    n = int(i/dt)
    fig = plt.figure(dpi = 72)
    ax = fig.add_subplot(111)
    ax.plot([0,x(i)], [0,y(i)], lw = 2, c = 'k')
    c0 = Circle((0,0), r/2, fc = 'k', zorder = 10)
    c1 = Circle((x(i), y(i)), r, fc = 'b', ec = 'b', zorder = 10)
    ax.add_patch(c0)
    ax.add_patch(c1)
    ax.set_xlim(-1.1, 1.1)
    ax.set_ylim(-1.1, 0)
    ax.set_aspect('equal', adjustable = 'box')
    plt.grid(True)
    filenames.append('frames_img{:04d}.png'.format(n))
    plt.savefig('frames_img{:04d}.png'.format(n))
```

En este caso, ***i*** representa el valor de tiempo para el cual nuestra función dibuja la posición del péndulo. Los valores ***tmax*** y ***dt*** representan el máximo tiempo (en segundos) que puede dibujar la función y el intervalo de tiempo que separa instantes sucesivos en el proceso de simular el movimiento del péndulo, respectivamente. Ahora puedes ejecutar la función para un valor particular de tiempo así:

```
make_plot(0.04)
```




```
make_plot(0.44)
```



De aquí ves cómo diferentes tiempos en las ecuaciones, reflejan los diferentes estados de posición del objeto y por lo tanto se evidencia que estas ecuaciones describen un movimiento pendular. Así, vemos cómo las funciones nos ayudan en la descripción de sistemas dinámicos. En el notebook de esta clase está el código completo para que puedas generar un gif animado del péndulo en movimiento a partir de lo que viste aquí.

De este ejercicio debemos tener en cuenta dos puntos muy importantes:

1. En general, no es usual tener el conocimiento de cuáles son las funciones que describen un sistema dinámico particular, ya que eso implicaría tener conocimiento del futuro de cualquier situación que veamos en la realidad. Así que las ecuaciones, que viste y que codificaste en Python, no me las inventé sino que son una consecuencia de un principio fundamental (o lo que en ciencia se llama una ley fundamental) que está basado en un conocimiento o intuición que yo tengo de la realidad. Normalmente este conocimiento se traduce en algo que en matemáticas llamamos: **una ecuación diferencial ordinaria** o ***EDO***. En próximas clases veremos cómo a partir de una *EDO* puedo obtener la función o funciones que permiten

modelar mi sistema dinámico.

2. Tener un modelo de la realidad, implica tener una o varias funciones que describen cómo evoluciona ese fragmento de realidad que estoy modelando. A ese fragmento lo denominamos **sistema dinámico**.