

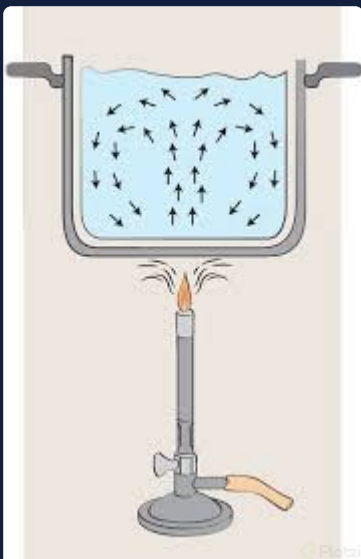


En la clase pasada vimos cómo construir las ecuaciones que definen un modelo sencillo de propagación de una epidemia. Este modelo puede ser mejorado de muchas formas, haciéndolo más complejo y en futuras clases veremos cómo hacerlo. Por otro lado, en esta clase verás otro ejemplo de un modelo que describe un fenómeno natural muy común en nuestra vida diaria aunque no nos demos cuenta y verás cómo las ecuaciones de ese modelo son tan difíciles que no podemos resolverlas usando cálculo o álgebra.

El fenómeno natural que vamos a discutir es particularmente interesante y es el responsable de la dinámica atmosférica en nuestro planeta que por lo general llamamos simplemente como “clima”. Las variaciones de temperatura y dirección de los vientos que suceden en todas partes del planeta son consecuencia de este fenómeno que en física se denomina convección. ¿Qué es la convección? Si lees la literatura técnica, verás algo como:

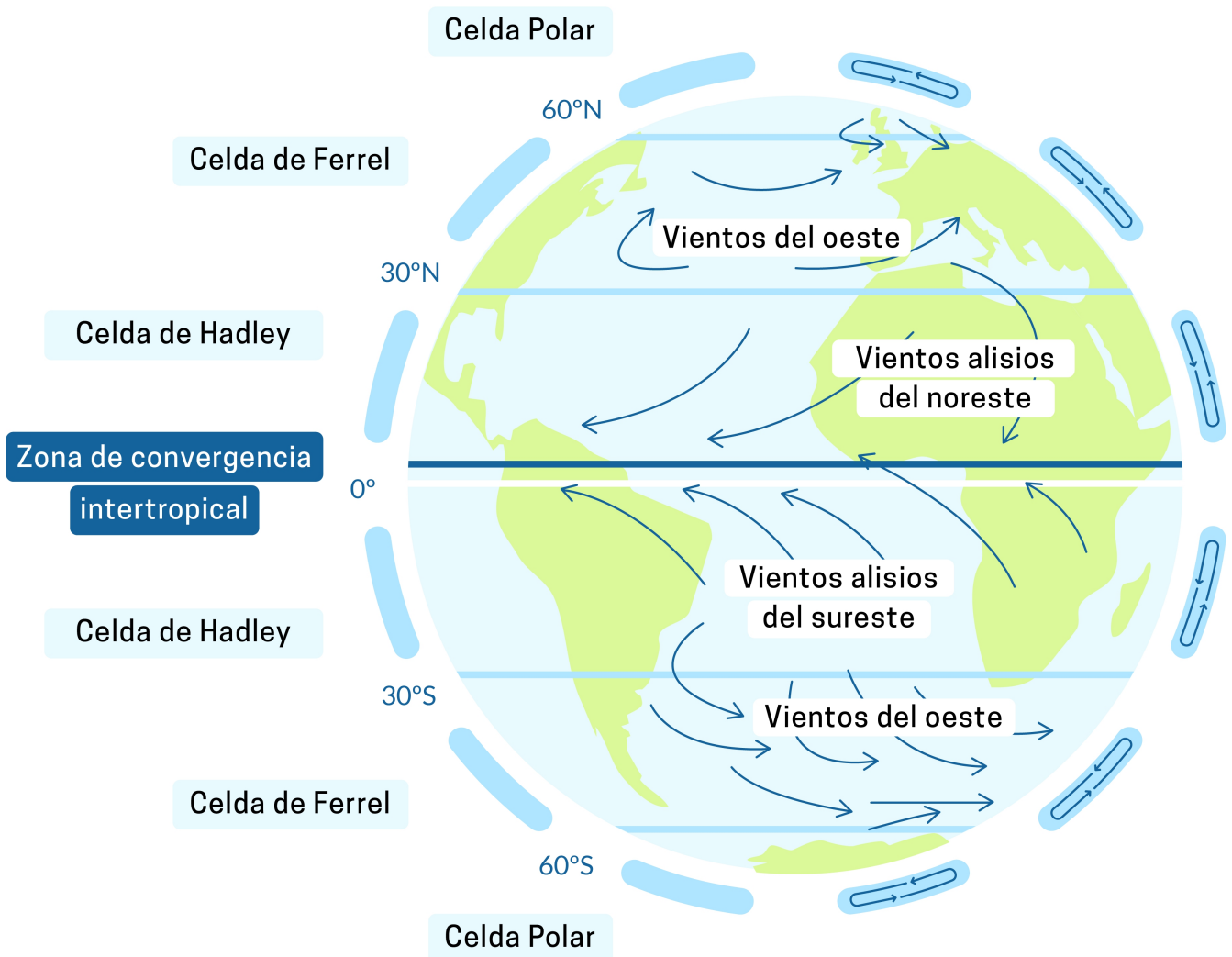
...es el mecanismo físico mediante el cual se transporta calor a través del movimiento de masas de fluido debido a un gradiente de temperatura...

Para entender esto mejor, veamos un ejemplo: imagina una olla llena de agua, la cual pones en tu estufa y la empiezas a calentar, al principio parece que el agua no se mueve y todo está quieto, luego de un tiempo, empiezas a ver pequeñas burbujas aparecer y cuando el agua alcanza su punto de ebullición se observa un patrón irregular de grandes burbujas emergiendo a la superficie del agua. Lo que está sucediendo en realidad es que el líquido que está al fondo de la olla es el más cercano a la superficie que está siendo calentada por el fogón, como resultado de esa proximidad este líquido se calienta antes que el resto y se expande. Al expandirse su densidad disminuye y eso lo obliga a ser empujado hacia arriba (esto sucede por el principio de Arquímedes el cual dice que un objeto menos denso que su alrededor líquido o gaseoso sufre una fuerza de empuje contraria a la fuerza de gravedad).



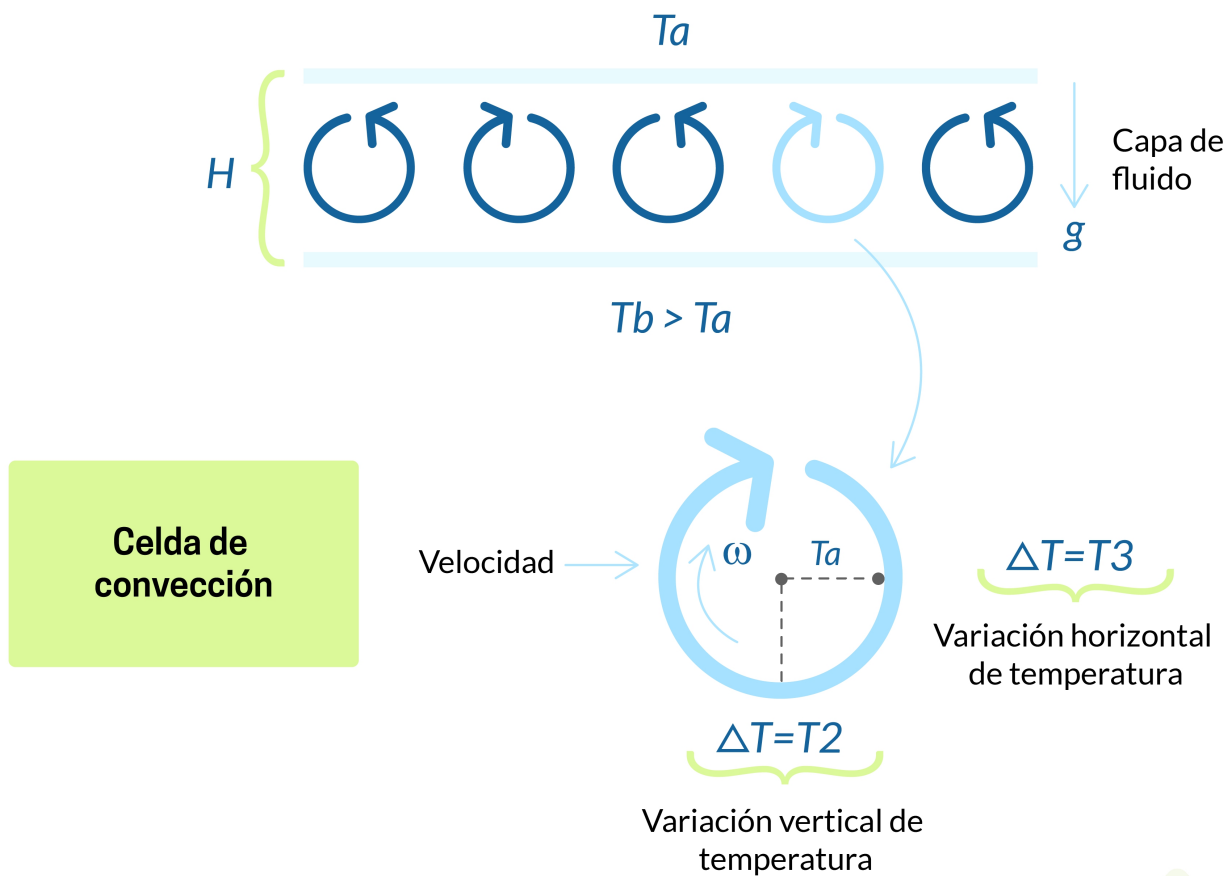
Esa parte de líquido caliente y poco denso empieza a subir y con eso genera una corriente de líquido hacia arriba. Cuando este líquido llega a la superficie parte de él logra evaporarse y la otra parte se enfría lo suficiente para volver a aumentar su densidad y descender hasta el fondo (ya que aquí aplica el principio de Arquímedes al revés y por tanto la fuerza de empuje va hacia abajo). El resultado global es que se generan estructuras circulares o cíclicas donde hay líquido subiendo y bajando. A esas estructuras las llamamos celdas de convección, y a este proceso completo es lo que denominamos convección.

Resulta que este fenómeno es más común de lo que parece, ya que el clima de todo el planeta es una consecuencia (en parte) de la convección. En nuestro caso supongamos que la superficie de la tierra es el fondo de la olla y la superficie superior es el límite alto de nuestra atmósfera. Tenemos un gas encerrado entre dos capas, donde la superficie de la tierra recibe la radiación del sol y en consecuencia se calienta, entonces el aire que es cercano a las superficies a nivel del mar se calienta primero y empieza a subir, a medida que sube se enfría y el efecto es que para lugares a mayor altitud el clima es más frío. Adicional a esto, existen efectos por la rotación de la tierra y las corrientes oceánicas que hacen que nuestro clima sea más diverso y aparezcan cosas como los huracanes o tifones, pero la base es la convección, porque siempre que sometes un fluido (ya sea líquido o gas) a una diferencia de temperaturas se va a generar movimiento del fluido. Entonces en la tierra también existen celdas de convección pero gigantes.



En 1963, Edward Lorenz usó las leyes fundamentales de la Hidrodinámica (las cuales son una consecuencia de las Leyes de Newton, que son la base de toda la física mecánica clásica) para formular un sistema de EDOs resumido que describe el comportamiento de la convección dentro de unas condiciones muy específicas que permitieron de cierta manera simplificar su estudio.

El problema simplificado asume que el fluido está encerrado entre dos placas a diferentes temperaturas donde la placa superior tiene una temperatura T_a y la placa inferior una temperatura T_b , que es mayor, emulando el fondo de la olla que está caliente. Cada celda de convección que se forma tiene una velocidad característica de rotación ω y una variación en temperatura horizontal y vertical T_3 y T_2 , respectivamente.



Entonces, nuestro sistema dinámico es la celda de convección y sus tres variables son (ω, T_a, T_b) , Lorenz escribe su sistema de EDOs para estas variables así:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\sigma x_1 + \sigma x_2 \quad [1] \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 x_3 + r x_1 - x_2 \quad [2] \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1 x_2 - b x_3 \quad [3] \end{aligned}$$



Donde las variables (x_1, x_2, x_3) son proporcionales a (ω, T_a, T_b) respectivamente. Y donde (σ, r, b) son parámetros que caracterizan las condiciones físicas del sistema. Resulta que para este sistema de ecuaciones es extremadamente complicado obtener soluciones en forma de funciones como lo hicimos con el ejercicio de la clase anterior y en muchos casos se desconoce la forma de resolverlo. Es decir, los métodos tradicionales del cálculo y las ecuaciones diferenciales no funcionan en este caso.

Cuando esto sucede, la alternativa que existe para poder obtener soluciones (al menos aproximadas) de sistemas de EDOs como el de Lorenz es mediante algoritmos numéricos y este será el tema de estudio en las próximas clases.