Resolución de ejercicios de álgebra

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Rubén Palancar López
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

Lista de procesos de resolución de ejercicios
Grado en Matemáticas

30 de marzo de 2025

Índice general

Capítulo 1

Diagonalización de endomorfismos

1.1. Resumen

La diagonalización de un endomorfismo (o de una matriz) es el proceso de encontrar una base de vectores propios en la que la matriz de la transformación se exprese como una matriz diagonal. Esto significa que la transformación en esa base simplemente escalariza los vectores en lugar de mezclarlos. En pocas palabras lo que buscamos es crear una base del endomorfismo a través de los vectores propios, que son aquellos que la aplicación solo los multiplica por un escalar, y gracias a ellos podemos hacer una matriz diagonal, lo que simplifica mucho los cálculos y ayuda al entendimiento del endomorfismo.

1.1.1. ¿Qué uso tiene?

Los principales usos de la diagonalización son: simplificar los cálculos, entendimiento de la representación geométrica, en la resolución de sistemas diferenciales, ciencia de datos y procesos físicos como la elasticidad o mecánica cuántica.

1.2. Teoria

1.2.1. Vectores y valores propios

Los vectores propios son aquellos de la forma $f(v) = kv, k \in K$, es decir los vectores a los que aplicados la transformación lineal no cambian su orientación. Los valores propios son los k que operan al vector propio y se obtienen de la siguiente forma: $det(A - xI)$ o lo que es lo mismo, buscando las raices del polinomio caracteristico.

1.2.2. Polinomio caracteristico

El polinomio caracteristico $P_{cA}(x) = (x - a_1)^{b_1}(x - a_2)^{b_2}...(x - a_n)^{b_n}$ es el resultado de la expresión $det(A - \lambda I)$, donde cada a representa a un valor propio, y cada b es las veces que aparece o multiplicidad algebráica. Para que una matriz sea diagonalizable su multiplicidad algebráica tiene que coincidir con la geométrica que veremos a continuación.

1.2.3. Multiplicidad geométrica

Una vez calculado el polinomio característico y visto su multiplicidad algebraica nos dispondremos a ver la geométrica.

Para ello lo que haremos será calcular lo siguiente $dim(ker(A - x_k I))$ siendo x_k los distintos valores propios obtenidos anteriormente.

Si todas las multiplicidades algebraicas coinciden con las geométricas, diremos que la matriz A será diagonalizable.

1.2.4. Cálculo de vectores propios

Visto que la matriz es diagonalizable buscamos los vectores propios asociados a cada valor propio. Para ello tendremos que calcular $ker(A - xI)$ o lo que es lo mismo $(A - \lambda I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Operando nos dará los vectores buscados.

1.2.5. Matriz cambio de base

Una vez obtenidos los valores y vectores propios podremos conseguir la matriz diagonal buscada y la matriz cambio de base.

Para ello construimos la matriz diagonal D en la que colocaremos ceros, menos en la diagonal principal donde pondremos los valores propios obtenidos.

Para la matriz cambio de base C pondremos en cada columna los vectores propios obtenidos. Tendremos que ordenarlos de la misma manera que en la matriz D puesto que de lo contrario no será coherente la matriz cambio de base con la matriz diagonal.

Ambas matrrices se ralcionan de la forma :

$A = CDC^{-1}$

1.3. Resolución de ejercicios

1.3.1. Ejemplo básico

Vamos a diagonalizar la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando vemos que su polinomio caracteristico es $P_{cA}(x) = x(x-1)^2(x-2)$ Por lo que veremos que sus valores propios son 0,1,2

En el caso de x=0, x=2 se ve claramente que su multiplicidad algebraica es la misma que la geometrica.

Si x=1 analizamos $dim(ker(A-I))$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que resolviendo veremos que su dim=2 por lo que es diagonalizable

Calculamos autovectores:

- x=0: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = 0$

Para resolverlo haremos el sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -y + t = 0 \\ y + 2x + t = 0 \end{cases}$$

Por lo que el vector resultante será el (1,1,-1,1)

Hacemos lo mismo para x=2 que nos dará el vector (0,0,1,0), y para x=1 que nos salen los vectores (1,0,0,0) y (0,0,-1,1)

Por lo que la matriz diagonal será

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Y la matriz cambio de base

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4. Herramientas

1.4.1. Cálculo del polinomio característico

A la hora de calcular el polinomio caracteristico podemos calcular mediante la regla de Sarrus (operando las diagonales), lo cual es útil pero deja de servir para matrices grandes.

Por ello otras técnicas muy útiles son por adjuntos que sirve para matrices como la anterior, o en matrices infinitas.

Tambien es recomendable el uso de eliminación de Gauss para transformar la matriz a una triangular y poder calcular de manera sencilla su determinante.

Otras tecnicas no tan conocidas son la fórmula de Leibniz o el método montante, aunque con las citadas anteriormente no harian falta.

1.4.2. Cálculo multiplicidad geometrica

Si la multiplicidad algebraica de un valor propio es 1 sabremos que la geometrica también lo será por lo que no es necesario calcular la dimension de su nucleo (La explicación está en teoremas vistos en clase)

Si la multiplicidad algebraica es mayor o igual que 2, debemos ver la geométrica, para ello es muy útil en vez de calcular la dimensión del nucleo directamente podemos hacer lo siguiente:

dimensión del núcleo = dimensión del espacio - rango $(A - \lambda I)$

1.4.3. Vectores propios

A la hora de calcular los vectores propios lo más recomendable es simplemente expresar el producto $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = 0$ como un sistema de ecuaciones, y en función del numero de su multiplicidad algebraica y geometrica obtener esos n vectores

1.4.4. Observaciones

En muchos ejercicios teóricos nos pedirán demostraciones que tengan que ver con autovectores, por ello aplicaremos $f(v) = kv, k \in K$ y en muchas ocasiones operando salen las demostraciones.

En ejercicios que nos pidan calcular la matriz a la potencia n-ésima o relacionados es muy recomendable aplicar $A^n = CDC^{-1}CDC^{-1}....CDC^{-1} = CD^nC^{-1}$

También a la hora de ver si una matriz es diagonal podemos fijarnos si la matriz es simétrica. En el caso de que sea diremos que es diagonal por el Teorema Espectral

Capítulo 2

Forma de Jordan

2.1. Resumen

En el anterior capítulo hablamos de la diagonalización de matrices y su importancia. En este trataremos el caso de matrices no diagonalizables pero que podemos simplificar de una manera similar a las anteriores, las matrices de Jordan.

Apéndice A

Primer apéndice

A.1. Teoremas muy importantes

Aquí vamos a introducir algunos conceptos muy importantes.

A.1.1. Algunos teoremas aún más importantes

Bibliografía