Resolución de ejercicios de álgebra

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Rubén Palancar López
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

Lista de procesos de resolución de ejercicios
Grado en Matemáticas

5 de abril de 2025

Índice general

1. Diagonalización de endomorfismos **1**

1.1. Resumen . . . 1

1.1.1. ¿Qué uso tiene? . . . 1

1.2. Teoria . . . 1

1.2.1. Vectores y valores propios . . . 1

1.2.2. Polinomio caracteristico . . . 1

1.2.3. Multiplicidad geométrica . . . 2

1.2.4. Cálculo de vectores propios . . . 2

1.2.5. Matriz cambio de base . . . 2

1.3. Resolución de ejercicios . . . 2

1.3.1. Ejemplo básico . . . 2

1.4. Herramientas . . . 3

1.4.1. Cálculo del polinomio característico . . . 3

1.4.2. Cálculo multiplicidad geometrica . . . 4

1.4.3. Vectores propios . . . 4

1.4.4. Observaciones . . . 4

2. Forma de Jordan **5**

2.1. Resumen . . . 5

2.2. ¿Qué uso tiene? . . . 5

2.3. Teoría . . . 5

2.3.1. Identificación de matriz de Jordan . . . 5

2.3.2. Vectores propios . . . 6

2.3.3. Bloques de Jordan . . . 6

2.3.4. Vectores generalizados . . . 6

2.3.5. Matriz de Jordan y de paso . . . 6

2.3.6. Polinomio mínimo y anulador . . . 7

2.4. Resolución de ejercicios . . . 7

2.4.1. Ejemplo1 7
2.4.2. Ejemplo2 8

A. Primer apéndice **10**
A.1. Teoremas muy importantes 10
A.1.1. Algunos teoremas aún más importantes 10

Bibliografía **11**

Capítulo 1

Diagonalización de endomorfismos

1.1. Resumen

La diagonalización de un endomorfismo (o de una matriz) es el proceso de encontrar una base de vectores propios en la que la matriz de la transformación se exprese como una matriz diagonal. Esto significa que la transformación en esa base simplemente escalariza los vectores en lugar de mezclarlos. En pocas palabras lo que buscamos es crear una base del endomorfismo a través de los vectores propios, que son aquellos que la aplicación solo los multiplica por un escalar, y gracias a ellos podemos hacer una matriz diagonal, lo que simplifica mucho los cálculos y ayuda al entendimiento del endomorfismo.

1.1.1. ¿Qué uso tiene?

Los principales usos de la diagonalización son: simplificar los cálculos, entendimiento de la representación geométrica, en la resolución de sistemas diferenciales, ciencia de datos y procesos físicos como la elasticidad o mecánica cuántica.

1.2. Teoria

1.2.1. Vectores y valores propios

Los vectores propios son aquellos de la forma $f(v) = kv, k \in K$, es decir los vectores a los que aplicados la transformación lineal no cambian su orientación. Los valores propios son los k que operan al vector propio y se obtienen de la siguiente forma: $det(A - xI)$ o lo que es lo mismo, buscando las raices del polinomio caracteristico.

1.2.2. Polinomio caracteristico

El polinomio caracteristico $P_{cA}(x) = (x - a_1)^{b_1}(x - a_2)^{b_2}...(x - a_n)^{b_n}$ es el resultado de la expresión $det(A - \lambda I)$, donde cada a representa a un valor propio, y cada b es las veces que aparece o multiplicidad algebráica. Para que una matriz sea diagonalizable su multiplicidad algebráica tiene que coincidir con la geométrica que veremos a continuación.

1.2.3. Multiplicidad geométrica

Una vez calculado el polinomio característico y visto su multiplicidad algebraica nos dispondremos a ver la geométrica.

Para ello lo que haremos será calcular lo siguiente $dim(ker(A - x_k I))$ siendo x_k los distintos valores propios obtenidos anteriormente.

Si todas las multiplicidades algebraicas coinciden con las geométricas, diremos que la matriz A será diagonalizable.

1.2.4. Cálculo de vectores propios

Visto que la matriz es diagonalizable buscamos los vectores propios asociados a cada valor propio.

Para ello tendremos que calcular $ker(A - xI)$ o lo que es lo mismo $(A - \lambda I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Operando nos dará los vectores buscados.

1.2.5. Matriz cambio de base

Una vez obtenidos los valores y vectores propios podremos conseguir la matriz diagonal buscada y la matriz cambio de base.

Para ello construimos la matriz diagonal D en la que colocaremos ceros, menos en la diagonal principal donde pondremos los valores propios obtenidos.

Para la matriz cambio de base C pondremos en cada columna los vectores propios obtenidos. Tendremos que ordenarlos de la misma manera que en la matriz D puesto que de lo contrario no será coherente la matriz cambio de base con la matriz diagonal.

Ambas matrrices se ralcionan de la forma :

$A = CDC^{-1}$

1.3. Resolución de ejercicios

1.3.1. Ejemplo básico

Vamos a diagonalizar la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando vemos que su polinomio caracteristico es $P_{cA}(x) = x(x-1)^2(x-2)$ Por lo que veremos que sus valores propios son 0,1,2

En el caso de x=0, x=2 se ve claramente que su multiplicidad algebraica es la misma que la geometrica.

Si x=1 analizamos $dim(ker(A-I))$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que resolviendo veremos que su dim=2 por lo que es diagonalizable

Calculamos autovectores:

- x=0: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = 0$

Para resolverlo haremos el sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -y + t = 0 \\ y + 2x + t = 0 \end{cases}$$

Por lo que el vector resultante será el (1,1,-1,1)

Hacemos lo mismo para x=2 que nos dará el vector (0,0,1,0), y para x=1 que nos salen los vectores (1,0,0,0) y (0,0,-1,1)

Por lo que la matriz diagonal será

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Y la matriz cambio de base

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4. Herramientas

1.4.1. Cálculo del polinomio característico

A la hora de calcular el polinomio caracteristico podemos calcular mediante la regla de Sarrus (operando las diagonales), lo cual es útil pero deja de servir para matrices grandes.

Por ello otras técnicas muy útiles son por adjuntos que sirve para matrices como la anterior, o en matrices infinitas.

Tambien es recomendable el uso de eliminación de Gauss para transformar la matriz a una triangular y poder calcular de manera sencilla su determinante.

Otras tecnicas no tan conocidas son la fórmula de Leibniz o el método montante, aunque con las citadas anteriormente no harian falta.

1.4.2. Cálculo multiplicidad geometrica

Si la multiplicidad algebraica de un valor propio es 1 sabremos que la geometrica también lo será por lo que no es necesario calcular la dimension de su nucleo (La explicación está en teoremas vistos en clase)
Si la multiplicidad algebraica es mayor o igual que 2, debemos ver la geométrica, para ello es muy útil en vez de calcular la dimensión del nucleo directamente podemos hacer lo siguiente:
dimensión del núcleo = dimensión del espacio - rango $(A - \lambda I)$

1.4.3. Vectores propios

A la hora de calcular los vectores propios lo más recomendable es simplemente expresar el producto $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = 0$ como un sistema de ecuaciones, y en función del numero de su multiplicidad algebraica y geometrica obtener esos n vectores

1.4.4. Observaciones

En muchos ejercicios teóricos nos pedirán demostraciones que tengan que ver con autovectores, por ello aplicaremos $f(v) = kv, k \in K$ y en muchas ocasiones operando salen las demostraciones.
En ejercicios que nos pidan calcular la matriz a la potencia n-ésima o relacionados es muy recomendable aplicar $A^n = CDC^{-1}CDC^{-1}....CDC^{-1} = CD^nC^{-1}$
También a la hora de ver si una matriz es diagonal podemos fijarnos si la matriz es simétrica. En el caso de que sea diremos que es diagonal por el Teorema Espectral

Capítulo 2

Forma de Jordan

2.1. Resumen

En el anterior capítulo hablamos de la diagonalización de matrices y su importancia. En este trataremos el caso de matrices no diagonalizables pero que podemos simplificar de una manera similar a las anteriores, las matrices de Jordan. La forma de Jordan es una generalización de la diagonalización para matrices que no son completamente diagonalizables. En lugar de una matriz diagonal, obtenemos una matriz compuesta por bloques de Jordan, que son matrices casi diagonales con unos en la diagonal superior inmediata.

Esto significa que, aunque no siempre sea posible encontrar una base de vectores propios que diagonalice la matriz, sí podemos transformarla en una forma más manejable que conserva sus propiedades algebraicas esenciales.

2.2. ¿Qué uso tiene?

Al ser una generalización de la diagonalización de endomorfismos, sus usos son análogos. Destacando en la simplificación de cálculos, la resolución de sistemas diferenciales lineales y en el estudio de endomorfismos y autovectores invariantes.

2.3. Teoría

Como hemos dicho anteriormente, es un caso particuar de diagonalización, por lo que se dará por sabido la teoría anterior.

2.3.1. Identificación de matriz de Jordan

Como dijimos en la introducción, es un caso particular para matrices no diagonalizables, por lo que a la hora de sacar los autovalores y el polinomio característico se realiza igual.

Veremos si se puede hacer la forma de Jordan si la suma de sus multiplicidades algbráicas es igual a la dimensión en la que se trabaje.

$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i)^{\alpha_i}$ para todo $i = 1, 2...n$, siendo α el exponente de cada autovalor

2.3.2. Vectores propios

Como no tiene la misma multiplicidad geométrica que algebráica, lo que implica es que no tendrá un autovalor correspondiente a cada vector propio. Lo que buscaremos hacer será dado el número de vectores propios que tengamos, dividir la matriz en distintos bloques, llamados bloques de Jordan, en los que cada vector propio se encontrará en cada bloque. Como no todos los valores propios tendrán un vector propio lo que haremos será calcular la máxima cantidad de vectores propios disponibles y de allí calcular los bloques de Jordan.

2.3.3. Bloques de Jordan

Cada bloque de Jordan es una submatriz cuadrada de la principal, formada por los valores propios de cada bloque en la diagonal principal, y unos sobre los valores propios $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

La dimensión del bloque de Jordan dependerá de cantidad de vectores generalizados que necesitemos, y la cantidad de bloques del número de vectores propios, puesto que a cada bloque se le relacionará un vector propio.

Cada bloque vendrá dado por un subespacio vectorial que será $ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$. El espacio en el que trabajemos se formará por suma directa de estos subespacios vectoriales en los que deberán estar elevados los núcleos a un índice mayor que el de nilpotencia (El exponente que tenga su raíz en el polinomio mínimo).

Si queremos ver el tamaño de los bloques deberemos de calcular la dimensión del núcleo de $(A - \lambda I)^n$ lo que nos dará la cantidad de bloques de orden $\geq n$

2.3.4. Vectores generalizados

Los vectores generalizados o de Jordan, serán los vectores que aplicados a $A - \lambda I$ un número n de veces nos lleve a los vectores propios.

Para obtenerlos necesitaremos calcular los vectores propios en primera instancia, que nos dirán el número de cadenas de Jordan que tenemos. Tras eso planteamos como es la matriz de Jordan y calculamos vectores de los núcleos de $(A - \lambda I)^{\alpha}$ (encontraremos α cuando la dimensión de el núcleo coincida con la multiplicidad geométrica).

Sabremos que el vector será generalizado si pertenece al núcleo de la máxima potencia pero no de la anterior. Con esos vectores aplicandolos a las potencias anteriores tendremos la cadena completa.

2.3.5. Matriz de Jordan y de paso

Una vez obtenidos los vectores propios y generalizados ya podremos formar la matriz de Jordan que se formará poniendo los bloques de Jordan en la diagonal principal.

Para la matriz de paso debemos de hacer un proceso similar al de diagonalización solo que debemos tener en cuenta ahora de poner en cada bloque de Jordan el vector propio en la primera posición.

2.3.6. Polinomio mínimo y anulador

Es importante en este caso hacer énfasis en los polinomios mínimo y anulador.

El polinomio anulador es un polinomio que anula cada uno de los vectores del conjunto.

Por otra parte, el mínimo es el polinomio de menor grado tal que, al evaluarlo en la matriz, se obtiene la matriz nula. Es decir, es el polinomio más simple que anula la matriz. Se escribe de la misma manera que el característico solo que las potencias que elevan a cada raíz hacen referencia al bloque de Jordan más grande que tiene.

$P_{cA}(x) = x(x-1)^3(x+1)^2$

$P_{mA}(x) = x(x-1)^2(x+1)$

En este ejemplo se ve las diferencias entre ambos.

2.4. Resolución de ejercicios

2.4.1. Ejemplo1

Buscaremos hallar la matriz de Jordan y la matriz de paso de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 5 & 5 & -10 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

Calculamos vemos que $P_{cA}(x) = -x^2(x-1)$ por lo que vemos que sus valores propios son 1 y 0

-x=1

En este caso vemos que la multiplicidad geométrica será igual que la algebráica al ser un valor propio simple. Por lo que realizando los mismos cálculos que en el tema pasado veremos que un vector propio asociado a este valor propio será (4,5,4)

-x=0

Vemos que su multiplicidad algebraica es 2, sin embargo al calcular la multiplicidad geométrica nos sale que $rg(A) = 2 => dim(ker(A)) = 3 - rg(A) = 1$, por lo que no sería diagonalizable. Como su polinomio caracteristico tiene 3 raices reales podemos encontrar una matriz de Jordan semejante.

Como su multiplicidad geométrica es 1, eso implica que solo tendremos un vector propio y que entonces solo tendremos un bloque de Jordan para este autovalor (Está claro que será un bloque 2x2 pero vamos a suponer que no lo sabemos).

Elevando al cuadrado la matriz:

$A^2 = \begin{pmatrix} 12 & 4 & -16 \\ 15 & 5 & -20 \\ 12 & 4 & -16 \end{pmatrix}$

Vemos que la dimensión de su núcleo es uno por lo que el bloque será de tamaño mayor o igual a 2, como la nultiplicidad geométrica es 2 que coincide con $dim(ker(A^2))$ el rango del bloque será 2.

Buscamos un vector de su núcleo será (1,-3,0)

Ahora aplicamos el vector obtenido sobre la primera matriz
$A\begin{bmatrix}1\\-3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10\\-10\\-10\end{bmatrix}$
siendo el vector (-10,-10,-10) un vector propio

Ahora ya podemos hacer la matriz de Jordan que será $J=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

y la de paso
$P=\begin{pmatrix}-10&1&4\\-10&-3&5\\-10&0&4\end{pmatrix}$

2.4.2. Ejemplo2

Sea B la matriz $B=\begin{pmatrix}2&0&3&0\\1&2&0&3\\0&0&2&0\\0&0&1&2\end{pmatrix}$

Hacemos el cálculo de su polinomio característico:

$P_{cA}(x)=(x-2)^4$

Vemos que su multiplicidad geométrica es 2 por lo que no es diagonalizable y su matriz de Jordan se descompone en dos bloques.

Ahora tenemos dos candidatas a ser matrices de jordan:
$J_1=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ $J_2=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$

Buscarmos entonces hacer potencias de $ker(A-2I)$ hasta que la dimensión de su núcleo coincida con su multiplicidad algebraica

Coincidirá en la potencia 3, por lo que habrá un bloque 3x3 y otro 1x1

Calculamos un vector de $ker(A-2I)^3$ que no pertenezca a los núcleos anteriores. Será el (0,0,1,0)

Aplicamos $B\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

Como el vector (3,0,0,1) no pertenece al núcleo anterior podemos aplicarlo a B otra vez $B\begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\\0\\0\end{pmatrix}$

Con lo que podemos completar la base siendo la matriz de paso $P=\begin{pmatrix}2&0&3&0\\1&2&0&3\\0&0&2&0\\0&0&1&2\end{pmatrix}$

Y la de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Apéndice A

Primer apéndice

A.1. Teoremas muy importantes

Aquí vamos a introducir algunos conceptos muy importantes.

A.1.1. Algunos teoremas aún más importantes

Bibliografía