Modelos de cálculo
Práctica 1

Rubén García Javier Mier Yuhua Zhan

El objetivo de esta práctica es demostrar de manera formal que la función $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definida por
$f(n, m) = \begin{cases} 1 & \text{si } resto(n, m) = 0 \\ 0 & \text{si } resto(n, m) \neq 0 \end{cases}$
es primitiva recursiva (PR), sabiendo que:
Las funciones iniciales (a)-(c) son $primitivasrecursivas$

(a) La *función cero* $z(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

(b) La *función sucesor* $s(n) = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$

(c) La *función proyección*:

$p_i^k(n_1, ..., n_k) = n_i, \forall k \in \mathbb{N}^*, n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}, \forall k \in 1, ..., k$

Dadas $g_1, g_2, h, h_0, ..., h_l$ funciones primitivas recursivas, también lo son $f_1 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} y f_2 : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ obtenidas a través

(d) de la *composición*, $f_1(\vec{n}) = g_1(h_0(\vec{n}), ..., h_l(\vec{n}))$, o

(e) de la *recursión primitiva*:

$f_2(\vec{n}, 0) = g_2(\vec{n})$,

$f_2(\vec{n}, m + 1) = h(\vec{n}, m, f_2(\vec{n}, m))$,

donde $\vec{n} = (n_1, ..., n_k)$.

La función *resto* se define de la siguiente forma:

$resto(n, m) = \begin{cases} \text{el resto de dividir } m \text{ por } n & \text{si } \neq 0 \\ m & \text{si } n = 0 \end{cases}$

Se deben entregar los ficheros `practica1.tex` y `practica1.pdf` (la demostración se debe escribit en latex).

Se observa que $f(n,m) = \overline{sg}(resto(n,m))$, donde
$\overline{sg}(n) := \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ 0, & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$

Por lo tanto, si probásemos $\overline{sg}$ y *resto* son primitivas recursivas(PR), podríamos concluir que f también lo es (cf.*(d)*).

Empezamos con las funciones básicas $suma, mult, pred, resta, abs, sg$, definidas a continuación

- $suma(n,m) := n + m$
- $mult(n,m) := n * m$
- $pred(n) := \begin{cases} n-1, & \text{si } n \geq m \\ 0, & \text{si } n < m \end{cases}$
- $resta(n,m) := \begin{cases} n-m, & \text{si } n \geq m \\ 0, & \text{si } n < m \end{cases}$
- $abs(n,m) := \begin{cases} n-m, & \text{si } n \geq m \\ m-n, & \text{si } n < m \end{cases}$
- $sg(n) := \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0 \\ 1, & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$

Vamos a mostrar que todas estas funciones son PR:
$\begin{cases} suma(n,0) = n = p_1^1(n) \text{ es PR por } (c) \\ suma(n,m+1) = h^1(n,m,suma(n,m)), \end{cases}$
donde $h^1(x,y,z) := s(p_3^3(x,y,z))$ es una función PR por *(b)*,*(c)* y *(d)*

Por lo tanto, suma es una función PR por *(e)*.
$\begin{cases} mult(n,0) = 0 = z(n) \text{ es PR por } (a) \\ mult(n,m+1) = h^2(n,m,mult(n,m)), \end{cases}$
donde $h^2(x,y,z) := suma(p_1^3(x,y,z), p_3^3(x,y,z))$ es una función PR por *(c)*,*(d)* y porque *suma* es PR

Por lo tanto, *mult* es una función PR por *(e)*.
$\begin{cases} pred(0) = 0 \text{ es PR por ser constante} \\ pred(m+1) = h^3(m, pred(m)), \end{cases}$
donde $h^3(x,y) := p_1^2(x,y)$ es una función PR por *(c)*.

Por lo tanto, *pred* es una función PR por *(e)*.
$\begin{cases} resta(n,0) = n = p_1^1(n) \text{ es PR por } (c) \\ resta(n,m+1) = h^4(n,m,resta(n,m)), \end{cases}$
donde $h^4. = pred(p_3^3(x,y,z)))$ es una función PR por *(c)*,*(d)* y porque *pred* es PR.

Por lo tanto, *resta* es una función PR por *(e)*.
$abs(n,m) = suma(resta(n,m), h^5(n,m))$
donde $h^5(x,y) := resta(p_2^2(x,y), p_1^2(x,y))$ es una función PR por *(c)*,*(d)* y porque *resta* es PR

Por lo tanto, *abs* es una funcion PR por *(d)*

$$\begin{cases} sg(0) = 0 \text{ es PR por ser constante} \\ sg(m+1) = h^6(m, sg(m)), \end{cases}$$

donde $h^6(x, y) := 1 = s(z(p_1^2(x, y)))$ es una función PR por *(a)*,*(b)*,*(c)* y *(d)*.

Por lo tanto, *sg* es una función PR por *(e)*.

Falta por demostrar que las funciones $\overline{sg}$ y *resto* también son PR.

$\overline{sg}(n) = resta(s(z(n)), sg(n))$, y, por lo tanto, $\overline{sg}$ es una función PR por *(a)*,*(b)*,*(d)* y porque *resta* y *sg* son funciones PR.

$$\begin{cases} resto(n, 0) = 0 = z(n) \text{es PR por } (a) \\ resto(n, m+1) = h(n, m, resto(n, m)), \end{cases}$$

donde $h(x, y, z) = mult(h^7(x, y, z), h^8(x, y, z)), h^7(x, y, z) = s(p_3^3(x, y, z)), h^8(x, y, z) = sg(abs(p_1^3(x, y, z), s(p_3^3(x, y, z))))$ son funciones PR:

- h^7 es una función PR por *(b), (c)* y *(d)*
- h^8 en una función PR por *(b), (c), (d)* y porque *sg* y *abs* son funciones PR.
- h es una función PR por *(d)* y porque h^7, h^8 y *mult* son funciones PR.

Por lo tanto, *resto* es una función PR por *(e)*.