

2 Razonamiento con incertidumbre



Camilo Palazuelos Calderón

REPRESENTACIÓN DEL CONOCIMIENTO
Grado en Ingeniería Informática
Mención en Computación

Curso 2023-2024

Información útil

Sobre la práctica y su entrega

■ Objetivos de la práctica

- Familiarizarse con el manejo de grafos en Python
- Implementar un algoritmo para decidir $X \perp_{\mathcal{G}} Y \mid Z$
- Calcular el coste temporal del algoritmo codificado

■ Laboratorio: 20 y 27 de octubre de 14:30 a 16:30

- La fecha límite de entrega es el 2 de noviembre a las 23:59

L	M	X	J	V
2	3	4	5	6
9	10	11	12	13
16	17	18	19	20
23	24	25	26	27
30	31	1	2	3

■ Qué entregar

- Memoria con respuestas a las preguntas formuladas en el guion de la práctica
- Código desarrollado (y material adicional si lo consideráis oportuno)

Vértices hoja de \mathcal{G}

Cómo simplificamos una RB

- **Proposición 2.1.** Sean $\mathcal{G} = (V, E)$ y $\mathcal{G}' = \mathcal{G}[V \setminus \{v_i\}]$ los grafos de dos RB tales que v_i es un vértice hoja, donde $v_i \in V$.

$$p(\mathbf{x}_{-i} \mid \mathcal{G}) = p(\mathbf{x}_{-i} \mid \mathcal{G}')$$

□ *Demostración*

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{-i} \mid \mathcal{G}) &= \sum_{x_i} p(\mathbf{x}_{-i}, x_i \mid \mathcal{G}) \\ &= \sum_{x_i} \prod_{x \in \mathbf{x}_{-i}} p(x \mid \text{pa}(X), \mathcal{G}) \cdot p(x_i \mid \text{pa}(X_i), \mathcal{G}) \\ &= \prod_{x \in \mathbf{x}_{-i}} p(x \mid \text{pa}(X), \mathcal{G}) \cdot \sum_{x_i} p(x_i \mid \text{pa}(X_i), \mathcal{G}) = p(\mathbf{x}_{-i} \mid \mathcal{G}') \end{aligned}$$

Independencia condicional

Qué asumimos en $p(\mathbf{x})$ y cómo lo sabemos

- **Proposición 2.2.** Sea p una distribución y sean ϕ_1 y ϕ_2 dos funciones no negativas.

$$X \perp_p Y \mid \mathbf{Z} \iff \exists \phi_1 \exists \phi_2 [p(x, y, \mathbf{z}) = \phi_1(x, \mathbf{z}) \cdot \phi_2(y, \mathbf{z})]$$

Algunas equivalencias

- | | | |
|---|--|------------------------|
| 1 | $X \perp_p Y \mid \mathbf{Z} \iff p(x \mid y, \mathbf{z}) = p(x \mid \mathbf{z})$ | $p(y, \mathbf{z}) > 0$ |
| 2 | $X \perp_p Y \mid \mathbf{Z} \iff p(x, y \mid \mathbf{z}) = p(x \mid \mathbf{z}) \cdot p(y \mid \mathbf{z})$ | $p(\mathbf{z}) > 0$ |
| 3 | $X \perp_p Y \mid \mathbf{Z} \iff p(x, y, \mathbf{z}) = p(x \mid \mathbf{z}) \cdot p(y \mid \mathbf{z}) \cdot p(\mathbf{z})$ | $p(\mathbf{z}) > 0$ |
| 4 | $X \perp_p Y \mid \mathbf{Z} \iff p(x, y, \mathbf{z}) = p(x, \mathbf{z}) \cdot p(y, \mathbf{z})/p(\mathbf{z})$ | $p(\mathbf{z}) > 0$ |

Separación gráfica

Cómo se refleja $X \perp_p Y \mid \mathbf{Z}$ en \mathcal{G}

- **Teorema 2.3.** Sea p una distribución que factoriza de acuerdo con el grafo \mathcal{G} de una RB.

$$\underbrace{X \perp_{\mathcal{G}} Y \mid \mathbf{Z}}_{\text{Separación}} \implies \underbrace{X \perp_p Y \mid \mathbf{Z}}_{\text{Independencia}}$$

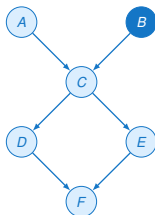
- $X \perp_{\mathcal{G}} Y \mid \mathbf{Z}$ si no hay caminos activos entre X e Y dado \mathbf{Z}
 - Un camino no dirigido en \mathcal{G} se denomina **activo** dado \mathbf{Z} si, para cada trío de variables consecutivas, estamos en una de estas situaciones
 - 1 $A \leftarrow B \leftarrow C$ y $B \notin \mathbf{Z}$
 - 2 $A \rightarrow B \rightarrow C$ y $B \notin \mathbf{Z}$
 - 3 $A \leftarrow B \rightarrow C$ y $B \in \mathbf{Z}$
 - 4 $A \rightarrow B \leftarrow C$ y $(\exists D \in \text{De}(B) \cup \{B\}) [D \in \mathbf{Z}]$

Un algoritmo de separación

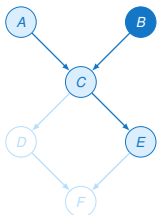
Cómo enfocamos el problema computacionalmente

■ Algoritmo para decidir $X \perp_{\mathcal{G}} Y \mid \mathbf{Z}$

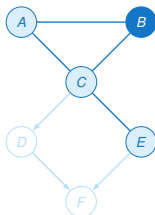
- ① Elimina los vértices hoja de \mathcal{G} de acuerdo con $\{X, Y\} \cup \mathbf{Z}$
- ② Une padres con hijos en común e ignora la dirección en $E(\mathcal{G})$
- ③ $X \perp_{\mathcal{G}} Y \mid \mathbf{Z}$ si no existen caminos entre X e Y sin ningún $Z \in \mathbf{Z}$



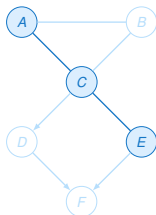
$A \not\perp_{\mathcal{G}} E \mid B$



Paso ①



Paso ②



Paso ③

Tareas y preguntas

Qué hacer y a qué dar respuesta en la memoria

1 [6 PUNTOS] Codificación del algoritmo descrito

- Para ello, os recomiendo utilizar el módulo de Python NetworkX

2 [2 PUNTOS] Eficacia de vuestra propuesta

- Mostrad, con ejemplos variados, que todo funciona correctamente

3 [2 PUNTOS] Cálculo de su coste temporal

- Expresadlo en función de n y m , donde $n = |V(\mathcal{G})|$ y $m = |E(\mathcal{G})|$