

3 Inferencia probabilística exacta



Camilo Palazuelos Calderón

REPRESENTACIÓN DEL CONOCIMIENTO
Grado en Ingeniería Informática
Mención en Computación

Curso 2023-2024

Información útil

Sobre la práctica y su entrega

■ Objetivos de la práctica

- Manejar estructuras de datos básicas en Python
- Implementar el algoritmo de eliminación de variables
- Calcular el coste temporal del algoritmo codificado

■ Laboratorio: 3 y 10 de noviembre de 14:30 a 16:30

- La fecha límite de entrega es el 16 de noviembre a las 23:59

L	M	X	J	V
		1	2	3
6	7	8	9	10
13	14	15	16	17
20	21	22	23	24
27	28	29	30	

■ Qué entregar

- Memoria con respuestas a las preguntas formuladas en el guion de la práctica
- Código desarrollado (y material adicional si lo consideráis oportuno)

Inferencia probabilística

Qué podemos preguntarle a una RB

Inferencia marginal

$$p(\mathbf{a}) = \sum_{\mathbf{b}} p(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

Inferencia condicional

$$p(\mathbf{a} \mid \mathbf{b}) = p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) / p(\mathbf{b})$$

- Responder estas preguntas es un problema **NP-duro**
 - Que la inferencia sea intratable depende de la propia RB;
 - en concreto, de las *variables \mathbf{X}* y la *estructura del grafo \mathcal{G}*
- **Variables discretas y continuas**
 - Asumiremos que \mathbf{X} es un conjunto de variables discretas
 - El coste temporal de razonar con RB continuas es $O(n^3)$
- **Inferencia probabilística exacta**
 - Algoritmo de *eliminación de variables*

Factores y sus operaciones

Qué son y qué representan

- Sea \mathbf{A} un conjunto de variables aleatorias
 - Un *factor* $\phi(\mathbf{a})$ es una función entre el dominio de \mathbf{A} y \mathbb{R}^+
 - Al conjunto de variables \mathbf{A} se lo denomina *ámbito* de $\phi(\mathbf{a})$
- Un factor no necesariamente representa una distribución

Producto de dos factores

$$\psi(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \phi_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot \phi_2(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

Marginalización

$$\tau(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \sum_{\mathbf{b}} \psi(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

- Sean \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} tres conjuntos disjuntos de variables binarias
 - ¿Cuántos parámetros para describir $\psi(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$?
 - ¿Y para $\tau(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \sum_{\mathbf{b}} \psi(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$?

Inferencia marginal

Cómo razonamos algorítmicamente

■ Eliminación de variables (EV)

- Permite razonar con inferencias *marginal* y *condicional*
- Multiplica y marginaliza factores en un proceso iterativo
- Se debe indicar el *orden* en que eliminar las variables

■ El orden determina la complejidad computacional de la EV

Para cada variable X_i (en orden)

① $\psi_i(\mathbf{w}, x_i) \leftarrow \prod_{j,k} \phi_j(x_i, \mathbf{y}_j) \cdot \tau_k(x_i, \mathbf{z}_k)$

② $\tau_i(\mathbf{w}) \leftarrow \sum_{x_i} \psi_i(\mathbf{w}, x_i)$

③ Sustituye los ϕ_j y τ_k por $\tau_i(\mathbf{w})$

$$\mathbf{W} = \bigcup_{j,k} \mathbf{Y}_j \cup \mathbf{Z}_k$$

marginalización de X_i

eliminación de X_i

Inferencia condicional

¿Y si hemos observado variables?

- El algoritmo de EV permite obtener distribuciones condicionales

$$p(\mathbf{a} \mid \mathbf{c}) = \frac{\sum_{\mathbf{b}} p(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{\sum_{\mathbf{a}', \mathbf{b}} p(\mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{c})}$$

❶ Elimina **B** (en orden)

$$p(\mathbf{a} \mid \mathbf{c}) = \frac{p(\mathbf{a}, \mathbf{c})}{\sum_{\mathbf{a}'} p(\mathbf{a}', \mathbf{c})}$$

❷ Elimina **A** (en orden)

$$p(\mathbf{a} \mid \mathbf{c}) = \frac{p(\mathbf{a}, \mathbf{c})}{p(\mathbf{c})}$$

- Sea **E** un conjunto de **variables observadas** tal que $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{C}$
 - Para todo i , $\phi_i[\mathbf{e}_i](\mathbf{y}_i) = \phi_i(\mathbf{e}_i, \mathbf{y}_i)$ tal que $\mathbf{E}_i = \mathbf{e}_i$, donde $\mathbf{E}_i \subseteq \mathbf{E}$

Tareas y preguntas

Qué hacer y a qué dar respuesta en la memoria

① [6 PUNTOS] **Codificación del algoritmo descrito**

- ☐ Producto y marginalización de factores
- ☐ Algoritmo de EV para inferencia marginal
- ☐ Algoritmo de EV para inferencia condicional

② [2 PUNTOS] **Eficacia de vuestra propuesta**

- ☐ Mostrad, con ejemplos variados, que funciona correctamente

③ [2 PUNTOS] **Evaluación de su coste temporal empírico**

- ☐ En función de algún parámetro de su coste temporal teórico