

Отчет по лабораторной работе по вычислительной математике

Рубанов Евгений, Черниенко Владислав, группа Б01-105а

20 мая 2024 г.

Тема

Решение стационарного уравнения теплопроводности ($\Delta u = 0$) методами Якоби и Зейделя.

Цель работы

- * Реализовать алгоритмы метода Якоби и метода Зейделя для численного решения уравнения теплопроводности.
- * Сравнить скорость сходимости двух методов и визуализировать полученные результаты.

Описание задачи

В данной лабораторной работе решалось уравнение теплопроводности в двумерной области с заданными граничными условиями. Для решения были использованы два итерационных метода: метод Якоби и метод Зейделя.

Ход работы

1. **Разработка алгоритмов:** Были реализованы алгоритмы методов Якоби и Зейделя на языке Python. Алгоритмы были основаны на итерационном подходе к решению системы линейных уравнений, полученной из дискретизации уравнения теплопроводности с помощью метода конечных разностей. Точным решением дифференциальной задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

$$u(0, y) = 100, u(x, L) = 200, u(L, y) = 300, u(x, 0) = 400, \quad (2)$$

где $L = 0.1$ метр (геометрические размеры разреза балки), является функция:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{400}{\pi n} (1 - (-1)^n) \left[\frac{\sinh(10\pi n y)}{\sinh(\pi n)} + 2 \cdot \frac{\sinh(10\pi n(0, 1 - y))}{\sinh(\pi n)} \right] \sin(10\pi n x) + \quad (3)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{200}{\pi n} (1 - (-1)^n) \left[3 \cdot \frac{\sinh(10\pi n x)}{\sinh(\pi n)} + \frac{\sinh(10\pi n(0, 1 - x))}{\sinh(\pi n)} \right] \sin(10\pi n y). \quad (4)$$

2. **Проведение расчетов:** С помощью реализованных алгоритмов были произведены расчеты для заданных граничных условий. Количество узлов по осям X и Y, температура на гранях, размер грани, количество итераций и погрешность задавались в программе.
3. **Визуализация результатов:** Были получены графики распределения температуры в области для обоих методов, а также графики сходимости. Расчеты проводились по сетке 100 на 100 точек. Графики сходимости показывают изменение максимального изменения температуры на каждой итерации.

Результаты

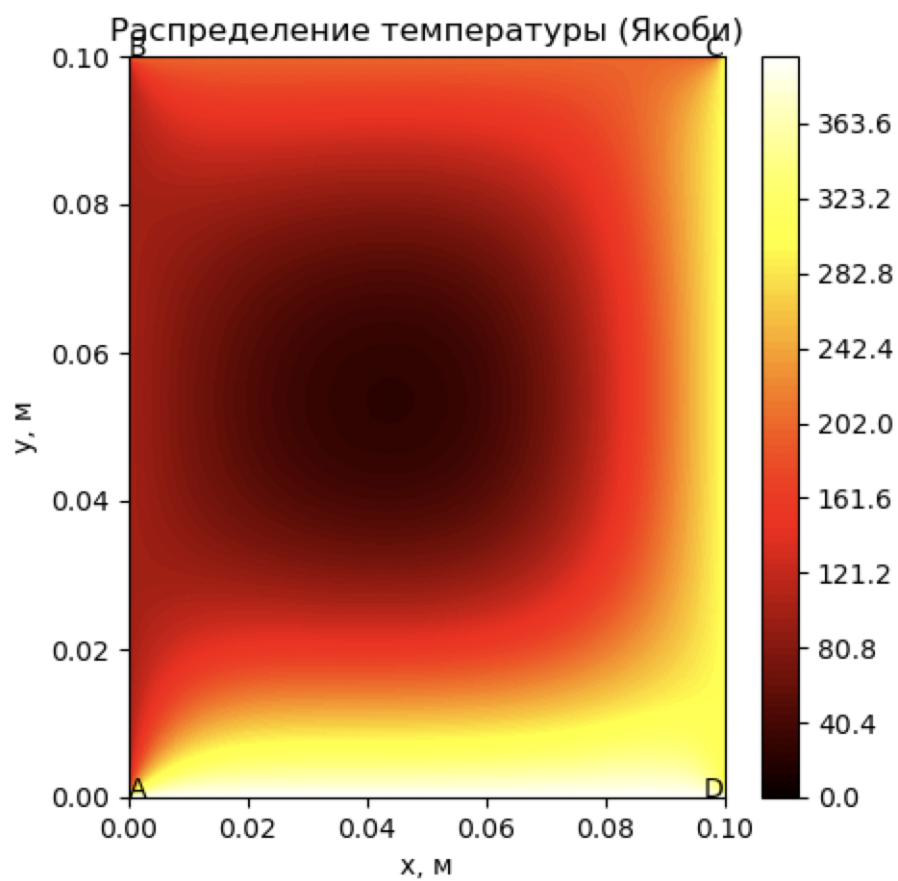


Рис. 1: Распределение температуры (метод Якоби, max iterations = 1000)

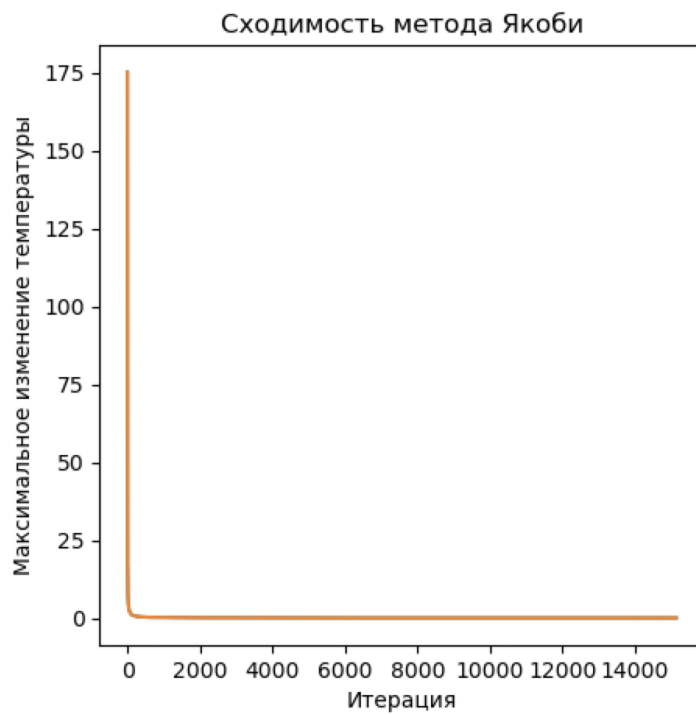


Рис. 2: Сходимость метода Якоби (max iterations = 20000)

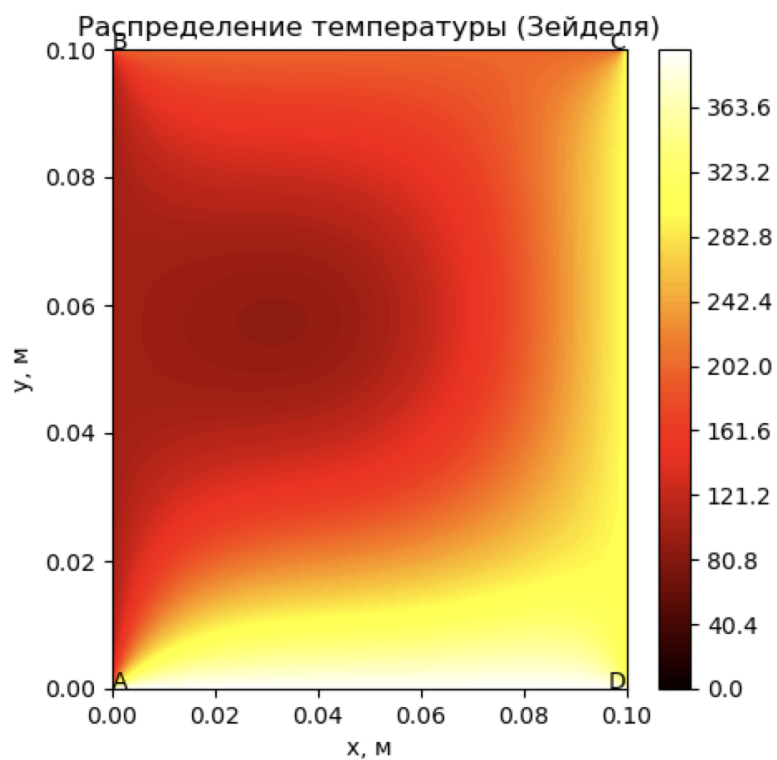


Рис. 3: Распределение температуры (Зейдель, max iterations = 1000)

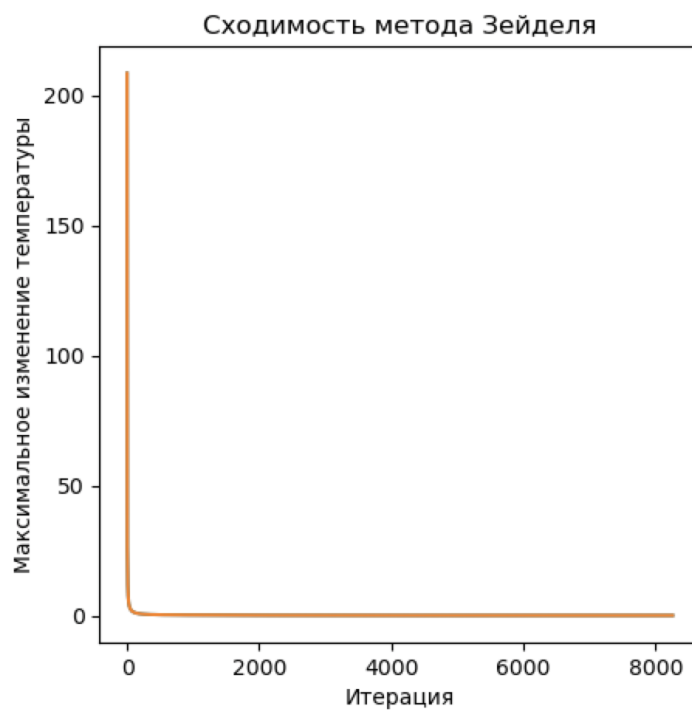


Рис. 4: Сходимость метода Зейделя (max iterations = 20000)

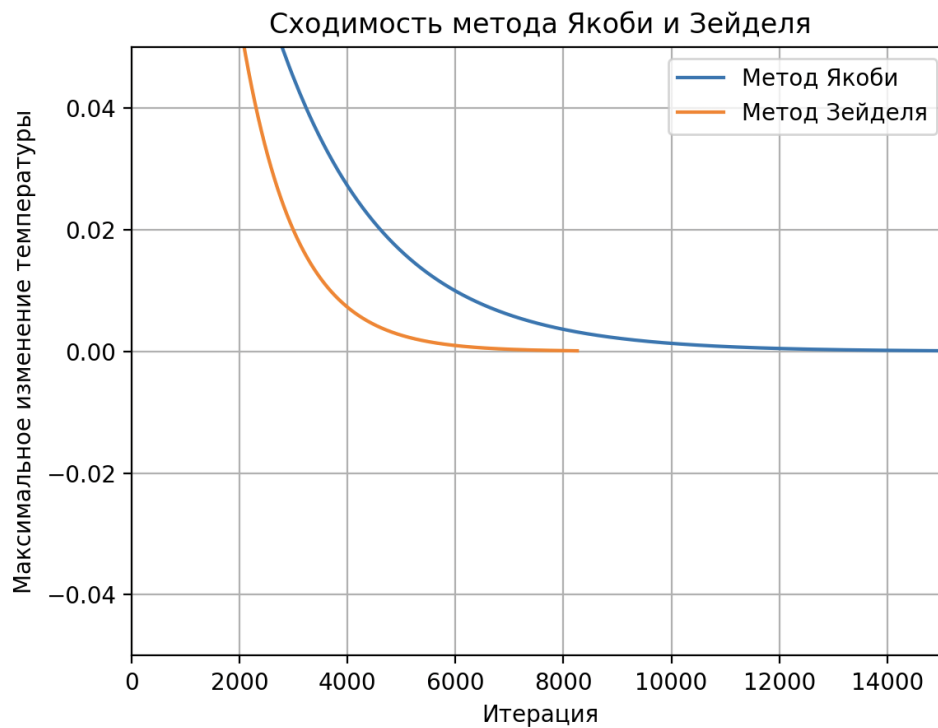


Рис. 5: Сходимости метода Якоби и Зейделя

На графике распределения температуры видно, что оба метода сходятся к одному и тому же решению, однако метод Зейделя сходится быстрее, чем метод Якоби. На графике сходимости видно, что метод Якоби требует больше итераций для достижения требуемой точности, чем метод Зейделя.

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были реализованы алгоритмы методов Якоби и Зейделя для численного решения уравнения теплопроводности, а также было проведено сравнение скорости сходимости двух методов.

Метод Зейделя оказался более эффективным, чем метод Якоби, так как сходится быстрее, что подтверждается графиками сходимости.