



BOSCH
Technik fürs Leben



Duale Hochschule
Baden-Württemberg

Sudoku Helper

Studienarbeit

Bachelor of Science

des Studiengangs Informatik

an der Dualen Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart

von

Ruben Hartenstein, Annika Harter

10.06.2022

Bearbeitungszeitraum
Matrikelnummer, Kurs
Ausbildungsfirma
Betreuer
Gutachter

22.10.2022 - 10.06.2022
2746235, 4810277, TINF19ITA
Robert Bosch GmbH, Stuttgart
Sebastian Trost
Sebastian Trost

Duale Hochschule Baden-Württemberg, Stuttgart

Ausbildungsbereich Technik, Fachrichtung IT-Automotive

Bericht über die Ausbildung in der betrieblichen Ausbildungsstätte im 5. und 6. Studienhalbjahr.

Name des Studierenden: Ruben Hartenstein, Annika Harter

Studienjahrgang: 2019

Einsatz in Abteilung:

Standort: Stuttgart

Thema: Sudoku Helper

Betreuer: Sebastian Trost

vom: 22.10.2022

bis: 10.06.2022

Stellungnahme des Betreuers:

Dieser Bericht wurde geprüft und ist sachlich und fachlich richtig.

Ort

Datum

Abteilung, Unterschrift

Selbstständigkeitserklärung des Studenten

Gemäß §5(2) der „Studien- und Prüfungsordnung DHBW Technik“ vom 29. September 2015: Ich habe die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet.

Ort

Datum

Unterschrift

Sperrvermerk

Die vorliegende Studienarbeit mit dem Titel

Sudoku Helper

enthält unternehmensinterne bzw. vertrauliche Informationen der Robert Bosch GmbH, ist deshalb mit einem Sperrvermerk versehen und wird ausschließlich zu Prüfungszwecken am Studiengang Informatik der Dualen Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart vorgelegt.

Der Inhalt dieser Arbeit darf weder als Ganzes noch in Auszügen Personen außerhalb des Prüfungsprozesses und des Evaluationsverfahrens zugänglich gemacht werden, sofern keine anders lautende Genehmigung der Ausbildungsstätte (Robert Bosch GmbH) vorliegt.

Stuttgart, 10.06.2022

Ruben Hartenstein, Annika Harter

Selbstständigkeitserklärung

Ich versichere hiermit, dass ich meine Studienarbeit mit dem Thema: *Sudoku Helper* selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Ich versichere zudem, dass die eingereichte elektronische Fassung mit der gedruckten Fassung übereinstimmt.

Stuttgart, 10.06.2022

Ruben Hartenstein, Annika Harter

Abstract

TODO: deutscher Abstract....

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis	VII
Abbildungsverzeichnis	VIII
Tabellenverzeichnis	IX
Formelgrößenverzeichnis	X
Formelverzeichnis	XI
Listings	XII
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Forschungsstand	2
1.3 Forschungsfrage	2
2 Rahmenbedingungen	4
2.1 Programmiersprachen	4
2.1.1 Python	4
2.1.2 JavaScript	5
2.2 Webserver	5
2.2.1 Apache HTTP Server	7
2.2.2 Nginx Webserver	7
2.2.3 Fazit	8
2.3 Framework	8
2.3.1 Django	9
2.3.2 Flask	9
2.3.3 Fazit	10
2.4 Entwurfsmuster	10
2.4.1 Model View Controller	11
3 Sudoku	12
3.1 Spielfeld Aufteilung	12
3.1.1 Zeile	12
3.1.2 Spalte	13

3.1.3	Box/Block	13
3.2	Regeln	14
3.3	Strategie	14
3.3.1	Lösungshilfen: Kandidaten-Notation	14
4	Die Mathematik hinter Sudoku	16
4.1	Abzählfragen	16
4.2	Komplexität	17
4.3	Eindeutige Lösbarkeit	18
4.3.1	Anzahl vorgegebene Ziffern für ein eindeutiges Sudoku	18
4.4	Algorithmische Lösungsmethode: Backtracking	18
4.4.1	Backtracking mit Brute-Force-Methode	19
4.4.2	Beweis Eindeutigkeit	21
5	Frontend	22
6	Backend	23
6.1	Serverseite	23
6.2	Board	23
6.3	Implementierung Lösungsstrategien	23
7	Testing/Validierung	24
	Literatur	A
	Anhang	B

Abkürzungsverzeichnis

BSD	Berkley Software Distribution
BSP	Board Support Package
CSS	Cascading Style Sheets
HTML	Hypertext Markup Language
HTTP	Hypertext Transport Protocol
HTTPS	Hypertext Transport Protocol Secure
MVC	Model View Controller

Abbildungsverzeichnis

2.1	Benutzungsstatistiken von Webservern [W3t]	6
2.2	Model View Controller (MVC) Konzept	11
3.1	Darstellung des Sudokugitters mit der Markierung einer Zeile	12
3.2	Darstellung des Sudokugitters mit der Markierung einer Spalte	13
3.3	Darstellung des Sudokugitters mit der Aufteilung in 9 Boxen	13

Tabellenverzeichnis

2.1	Vergleich der Webserver Apache HTTP Server und Nginx Webserver . . .	8
2.2	Vergleich der Frameworks Django und Flask	10

Formelgrößenverzeichnis

a	rad	Bedeutung von a
b	rad	Bedeutung von b
λ	rad	Bedeutung von lambda
ϕ	rad	Bedeutung von phi

Formelverzeichnis

4.1 Möglichkeiten vollständig ausgefüllte 9×9 Standard-Sudokus	16
4.2 Anzahl an Ergänzungen zu der ersten Reihe	16
4.3 Anzahl an Möglichkeiten zu den obersten drei Reihen	16
4.4 Zeitkomplexität	19

Listings

1 Einleitung

In vielen Zeitungen ist eine Vielzahl von Logikrätseln gedruckt. Darunter eines der häufigsten Logikrätsel: das Sudoku. In der üblichen Version ist es das Ziel, ein 9×9 -Gitter mit den Ziffern 1 bis 9 zu füllen. Dabei kann das Gitter in drei unterschiedliche Einheiten aufgeteilt werden. Diese Einheiten sind die Spalten, Zeilen und Blöcke des Gitters. Ein Block ist ein 3×3 -Unterquadrat des Gitters. In jeder Einheit darf jede Ziffer genau einmal vorkommen. Ausgangspunkt ist ein Gitter, in dem bereits mehrere Ziffern vorgegeben sind, damit das Sudoku eindeutig lösbar ist. Sudokus gibt es in unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden.

1.1 Motivation

Sudokus gibt es mittlerweile in vielen verschiedenen Varianten, mit modifizierten Regeln. In dieser Arbeit und für den **Sudoku Helper** wird jedoch nur das klassische Sudoku, wie es in der Einleitung beschrieben wurde, betrachtet. Es gibt verschiedene Schwierigkeitsstufen von Sudokus. Meistens werden Sudokus mit vielen vorgegebenen Zahlen als einfach eingestuft und Sudokus mit wenigen vorgegebenen Zahlen als schwierig. Ein weiterer Punkt, der Einfluss auf die Schwierigkeitsstufe eines Sudokus hat, ist die Anordnung der vorgegebenen Ziffern.

Wer schon einmal versucht hat ein schweres Sudoku zu lösen, ist vielleicht auch bereits an seine Grenzen gekommen. Gerade bei schwierige Sudokus mit wenigen vorgegebenen Zahlen kann es schwierig sein selbst eine passende Lösungsstrategie für das Sudoku zu finden. Oft sind anwendbare Lösungsstrategien schwierig zu erkennen und es lassen sich damit meist nur Kandidaten eliminieren. Einfachen Sudokus lassen sich oft durch simple logische Schlussfolgerungen lösen und Lösungsstrategien werden meist unbewusst und intuitiv eingesetzt.

In dieser Studienarbeit soll ein **Sudoku Helper** entwickelt werden, der Lösungsstrategien programmatisch erkennt und dem Benutzer bei dem Finden eines Lösungsschrittes unter-

stützt. Diese Unterstützung erfolgt dabei in mehreren Stufen, von der Visualisierung, über die Erklärung bis zur automatischen Umsetzung der Strategie.

1.2 Forschungsstand

Im Internet findet man immer wieder Websites mit dem Angebot Sudokus zu lösen. Hierbei können die angegebenen Zahlen eingegeben werden und das Sudoku wird korrekt vervollständigt, falls es eine eindeutige Lösung gibt. Dabei bekommt der Nutzer nur das gelöste Sudoku ohne Informationen darüber, wie man ein Sudoku als Mensch ohne die Rechenleistung eines Computers logisch lösen kann. Viele Websites erklären bereits, welche Lösungsstrategien existieren, wie sie funktionieren und wie sie sich anwenden lassen, nutzen dabei aber meist konkrete Beispiele.

1.3 Forschungsfrage

Für diese Studienarbeit ist die Zielsetzung, ein **Sudoku Helper** zu entwickeln. Ziel ist es nicht ein Sudoku automatisch zu lösen, sondern dem Benutzer Schritt für Schritt den Weg zur Lösung aufzuzeigen. Auf dieser Basis wird zunächst geprüft, ob das Sudoku eindeutig lösbar ist. Ist dies der Fall, muss der Nutzer die Möglichkeit haben sich Anweisungen geben zu lassen, wie man weiter vorgehen könnte und welche Lösungsstrategie der Benutzer anwenden kann, damit man beim lösen des Sudokus fortschreiten kann. Auf Basis der bereits eingetragenen Zahlen und den übrig gebliebenen Kandidaten, soll geprüft werden, welche Strategie momentan anwendbar ist. Dem Benutzer soll daraufhin die anwendbare Strategie genannt und anhand des konkreten Sudokus erklärt werden, damit der Benutzer das Sudoku Lösen kann. Diese Anweisungen, im folgenden auch Hilfestellungen genannt, sind in vier Varianten unterteilt.

Für die erste Hilfestellung soll das Programm dem Benutzer die anzuwendende Strategie nennen und den Bereich hervorheben, auf dem die Strategie angewendet werden soll. Wenn diese Hilfestellung nicht ausreichend ist, dann markiert das Programm die konkreten Zellen und Kandidaten, die von der Strategie betroffen sind. Mit der dritten Hilfestellung soll eine Erläuterung gezeigt werden, warum bestimmte Kandidaten laut Strategie gestrichen werden können. Mit der letzten Hilfestellungen löscht das Programm den betroffenen oder mehrere betroffene Kandidaten. Für Ausnahmen, in denen eine Strategie eine Zahl hervorhebt, die eingetragen werden kann, erfolgt das Eintragen der Zahl anstatt das Löschen von Kandidaten.

Um ein eindeutig lösbares Sudoku vervollständigen zu können, soll der **Sudoku Helper** etwa 25 Lösungsstrategien beherrschen.

Das Programm soll auf einem Ubuntu Server mit Apache und Django laufen. Des Weiteren gibt es zusätzlich die Anforderung, dass das Web-Frontend responsive sein soll und immer eine benutzeroptimierte Darstellungen liefert.

2 Rahmenbedingungen

Für das Projekt werden verschiedene Rahmenbedingungen festgelegt. Dazu gehört die Programmiersprache, indem der Sudoku Solver programmiert werden soll, ein Webserver auf dem das Programm später laufen wird und ein Framework, dass als Gerüst für das Programm auf dem Webserver fungiert. Wichtig ist, dass das Framework auf die Programmiersprache angepasst ist, um Probleme zu vermeiden. Im Zuge der Recherchen wurden verschiedenen Webserver in Betracht gezogen und besonders die Webserver Apache HTTP Server und Nginx Server aufgrund ihrer Beliebtheit miteinander verglichen. Auch bei den Frameworks gab es mehrere Optionen, von denen zwei insbesondere in Betracht gezogen und evaluiert wurden. Im Folgenden werden die Pros und Kontras der genannten Server und Frameworks aufgezählt und die schlussendliche Entscheidung begründet.

2.1 Programmiersprachen

2.1.1 Python

Für die Implementierung der Strategien und generell im Backend wurde sich für die Programmiersprache Python entschieden. Python ist eine höhere, universelle Sprache und ist als eine sehr vielseitige Programmiersprache anerkannt. Mit Python kann ein objektorientierter, aspektorientierter oder funktionaler Programmierstil umgesetzt werden und die Typisierung funktioniert dynamisch. Des Weiteren wird Python oft bei der Datenanalyse und bei der Verarbeitung großer Datenmenge verwendet. Zusätzlich spielt die Laufzeit zunächst nur eine untergeordnete Rolle und ist nicht sicherheitsrelevant, wodurch bei der Nutzung von Python keine größeren Probleme entstehen sollten. Ein weiterer Vorteil von Python ist die große Standardbibliothek, die falls nötig durch Module erweitert werden kann. Noch ein Vorteil ist die hohe Kompatibilität mit mehreren Frameworks. Im Laufe des Kapitels werden noch zwei Frameworks vorgestellt, die für das Projekt in Betracht gezogen worden.

Für das Backend ist eine objektorientierte Umsetzung vorgesehen, die mit Python umgesetzt werden kann. Zudem ist Python einfach zu lesen und klar strukturiert. Auch für die Umsetzung der Lösungsstrategien bietet sich Python durch Module für mathematische Berechnungen und Datenwissenschaft an.

In diesem Projekt wird mit der Version 3.10 von Python gearbeitet. [Ern20] [Sar20]

2.1.2 JavaScript

Im Frontend wurde sich für JavaScript mit jQuery entschieden. JavaScript ist eine der meist verwendeten Programmiersprachen der Welt. Als JavaScript erfunden wurde, ging man davon aus, dass es für kurze Codeschnipsel verwendet wird, eingebettet in eine Webseite. Es ist eine Skriptsprache und wurde für die Benutzerinteraktion entwickelt. Mithilfe von JavaScript lassen sich Inhalte verändern oder neu generieren. Für das Projekt ist die Interaktion mit dem Benutzer von entscheidender Bedeutung, da er ständig neue Zahlen oder Kandidaten eingeben kann.

Diese Anforderungen lassen sich mit JavaScript umsetzen. Daher wurde sich beim Frontenddevelopment für JavaScript mit der Erweiterung von jQuery entschieden.

jQuery

Neben JavaScript wird die freie Programmbibliothek jQuery für das Frontend verwendet. jQuery bietet die Funktionalität der Document Object Model Navigation und Manipulation sowie ein erweitertes Event-System. Mit jQuery wird die JavaScript-Programmierung vereinfacht und viele Methoden können in einer einzelnen Zeile von Code umgesetzt werden. Ein weiterer Vorteil ist, dass auch jQuery einfach erweitert werden kann und sehr populär ist. https://www.w3schools.com/jquery/jquery_intro.asp

2.2 Webserver

Ein Webserver ist in der Regel ein Server, der zur Verbreitung von Webinhalten im Internet oder Intranet dient. Die jeweiligen Informationen und Dokumentationen können demnach weltweit oder firmenintern erreicht werden. Damit eine Website jederzeit erreichbar sein kann, muss der Webserver permanent online sein. Der Rechner, auf dem der Webserver läuft, wird als Host bezeichnet. Der Webserver ist für die zuverlässige Übertragung von

statischen, wie beispielsweise von unveränderlichen Hypertext Markup Language (HTML)-Dateien, aber auch von dynamischen Dateien verantwortlich. Für dynamische Dateien muss der Webserver vor der Antwort Programmcode ausführen. Dieser Programmcode wird in diesem Fall in der Programmiersprache Python geschrieben. Mittels einer Cascading Style Sheets (CSS) Datei können die Inhalte der dynamischen Dateien weitestgehend von den Darstellungsvorgaben getrennt werden. In der HTML Datei wird folglich nur die inhaltliche Gliederung definiert und in der CSS Datei die Darstellung, wie etwa Farben oder Layout. Für die Übermittlung wird das Übertragungsprotokoll Hypertext Transport Protocol (HTTP) oder die verschlüsselte Variante Hypertext Transport Protocol Secure (HTTPS) verwendet. Ein Webserver ist in der Lage, die Inhalte auf viele verschiedene Rechner gleichzeitig zu übermitteln. Wie viele Nutzeranfragen (Requests) ein Server bearbeiten kann, hängt von der Hardware und der Auslastung des Hosts ab.

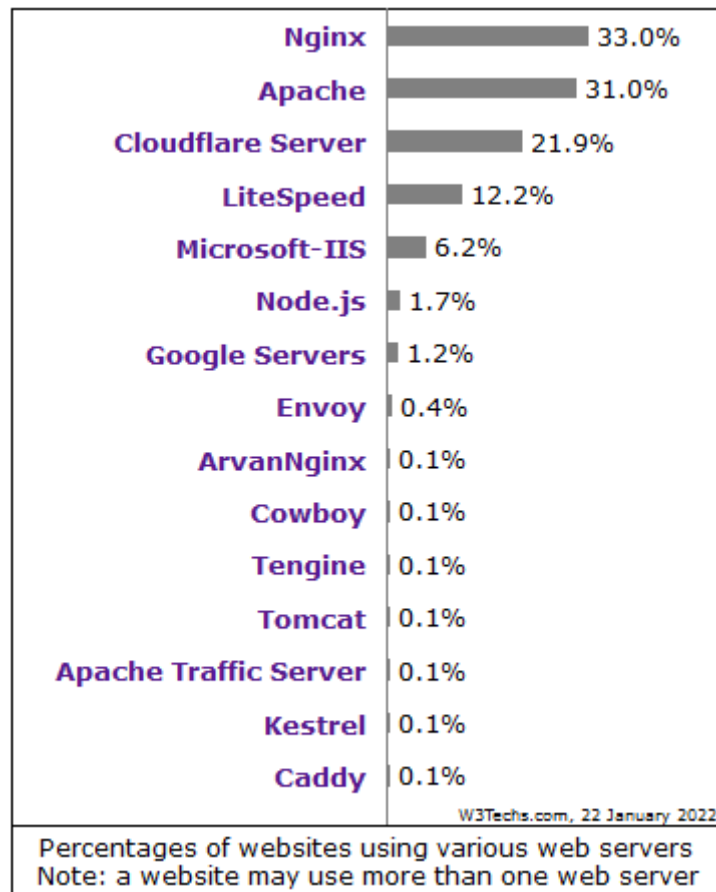


Abbildung 2.1: Benutzungsstatistiken von Webservern [W3t]

Am meisten verbreitet sind unter anderem die Webserver Apache HTTP Server und Nginx, wie in die Statistik 2.1 dargestellt. Beide Programme sind freie Software und wurden daher für das Projekt in Betracht gezogen. Im Folgenden werden diese beide Programme verglichen.

2.2.1 Apache HTTP Server

Der Apache Webserver wurde erstmals 1995 veröffentlicht und hat sich schnell zu einem der beliebtesten Webserver entwickelt. Er unterstützt neben Unix und Linux noch eine Vielzahl an weiteren Betriebssystemen.

Der Apache Server ist modular aufgebaut, wodurch benötigte Funktionen, die der Server nicht nativ bereitstellt, durch Module importiert werden können. Das Erstellen dynamischer Webseiten wird mittels serverseitiger Skriptsprachen bewerkstelligt. Über ein Modul kann der entsprechende Interpreter in den Server integriert werden.

Beim Apache-Webserver wird ein Ansatz verfolgt, bei dem jede Clientanfrage von einem separaten Prozess oder Thread bearbeitet wird. Dadurch werden Prozesse, die Schreib- oder Leseoperationen erfordern, nacheinander abgearbeitet und es kann passieren, dass ein Request in der Warteschlange verweilen muss, bis der vorherige Request durchgeführt werden konnte. Damit man dieses Problem umgehen kann, gibt es die Möglichkeit, mehrere Single-Threading-Prozesse gleichzeitig zu starten. Diese Strategie ist jedoch mit einem hohen Ressourcenaufwand verbunden. Um dies zu vermeiden, kommen Multi-Threading-Mechanismen zum Einsatz. Für die parallele Abfrage von Clientanfragen gibt es verschiedene Multi-Processing-Module, die integriert werden können.

2.2.2 Nginx Webserver

Der Marktanteil von Nginx ist in den letzten Jahren kontinuierlich gestiegen, weshalb auch dieser Webserver für die Studienarbeit in Betracht gezogen wurde. Nginx wurde erstmals 2004 veröffentlicht und ist wie der Apache Server auch mit diversen Betriebssystemen kompatibel.

Wie Apache ist auch Nginx modular aufgebaut und verschiedene Funktionen können über Module bereitgestellt werden. Zu diesen Modulen gehört jedoch nicht die Option, Interpreter für eine Programmiersprache entsprechend in den Webserver zu integrieren. Es wird also ein weiterer Anwendungsserver benötigt. Für kleine Webprojekte ist das ein Mehraufwand, der nicht immer eingegangen werden muss.

Dieser Server zeichnet sich durch eine hohe Performance aus. Dabei können eine möglichst große Anzahl an Clients gleichzeitig bedient werden und der Ressourcenverbrauch trotzdem gering gehalten. Durch die ereignisorientierte Architektur können Client-Anfragen asynchron bearbeitet werden, wodurch Arbeitsspeicher und Zeit gespart werden kann. Die Nebenläufigkeit ist realisiert, ohne dass für jede neue Verbindung ein zusätzlicher

Prozess oder Thread benötigt wird. Die Stärke dieser Architektur zeigt sich bei großen Webprojekten.

2.2.3 Fazit

Die folgende Tabelle 2.1 zeigt die Unterschiede und Gemeinsamkeiten der beiden Webserver auf.

Merkmal	Apache	NGINX
Funktion	Webserver, Proxy-Server	Webserver, Proxy-Server, E-Mail-Proxy, Load-Balancer
Betriebssystem	Alle unixoiden Plattformen, Windows	FreeBSD, Linux, Solaris, IBM AIX, HP-UX, macOS, Windows
Lizenz	Apache License v2.0	BSD-Lizenz
Entwickler	Apache Software Foundation	Nginx, Inc.
Statische Webinhalte	Ja	Ja
Dynamische Webinhalte	Ja	Nein
Software-Architektur	Prozess-/threadbasiert	Eventgesteuert

Tabelle 2.1: Vergleich der Webserver Apache HTTP Server und Nginx Webserver

Der Apache Webserver bietet eine breite Möglichkeit an Modulen, um die Software zu erweitern. Der ausschlaggebende Grund, warum sich in diesem Projekt für den Apache HTTP Server entschieden wurde, ist die Möglichkeit Interpreter für Programmiersprachen über ein Modul direkt in den Webserver zu integrieren. Zudem muss für das Projekt nur ein Client bedient werden. Dadurch wird für das Anzeigen von dynamischen Inhalten kein separaten Anwendungsserver benötigt. Damit bietet der Apache HTTP Server eine bequemere Lösung für kleine Websites, deren Inhalt dynamisch erzeugt wird.

2.3 Framework

Ein Framework ist ein Programmiergerüst. Es wird insbesondere bei komponentenbasierten und bei der objektorientierten Softwareentwicklung verwendet. Ein Framework ist kein fertiges Programm, sondern stellt den Rahmen, in der eine Anwendung erstellt werden soll, zur Verfügung. Frameworks lassen sich in Typen gliedern, wobei es nicht immer eine

strikte Trennung gibt. Zu diesen Typen gehören beispielsweise Application Frameworks oder Webframeworks.

Die beiden Frameworks, Django und Flask, die für das Projekt in Betracht gezogen wurden, gehören zu den beliebtesten Webframeworks für Python und sind für die Entwicklung von dynamischen Webanwendungen ausgelegt.

2.3.1 Django

Django ist ein kostenloses Open Source Webframework und kann plattformübergreifend genutzt werden. Es folgt dem MVC Entwurfsmuster, das auch in der Studienarbeit genutzt wird. Der Fokus von Django liegt in einer schnellen Entwicklung mit weniger Code. Mit dem Framework kommen viele bereits eingebaute Pakete, die genutzt werden können. Dazu gehört unter anderem die integrierte Anbindungen an verschiedenen Datenbanksysteme. Django hat verschiedene Mechanismen integriert, um die Sicherheit der Website zu garantieren. So können SQL Injektionen oder Cross-site Scripting ausgeschlossen werden.

Ein weiterer Vorteil von Django ist die große und aktive Community, wodurch viel Fragen schnell beantwortet werden können und es gibt es eine ausführliche Dokumentation zu dem Framework.

2.3.2 Flask

Webseiten, die Flask als Framework nutzen, sind meistens Single-Page-Webanwendungen. Flask ist im Gegensatz zu Django modular und eher minimalistisch aufgebaut. Daher muss in der Entwicklung tendenziell mit externen Bibliotheken gearbeitet werden. Man nennt Flask deshalb auch ein Mikroframework. Für die Sicherheit der Website gibt es die Flask-Security Bibliothek, die dieselben Mechanismen wie Django beinhaltet.

Aus diesen Gründen ist Flask eher für kleinere Projekte geeignet, die benutzerdefinierte Komponenten erfordern oder für das Prototyping. Die Anzahl der Webseiten, die Flask als Framework nutzen, steigt stetig weiter. Der Vorteil, warum Flask immer beliebter wird ist die Kontrolle, die man über das Projekt bekommt, indem man die Komponenten selbst bestimmen kann.

2.3.3 Fazit

Beide Frameworks wären für das Projekt geeignet. Die Django Community ist größer und aktiver als die von Flask. Daher gibt es mehr Informationen über Django. Jedoch wird Flask mittlerweile in mehreren Projekten genutzt. In der Tabelle 2.2 sind die wichtigsten Eigenschaften nochmals gegenübergestellt.

Merkmal	Django	Flask
Use cases	mittelgroße bis große Projekte	kleine bis mittelgroße Projekte
Community	große, aktive Community	kleinere Community
Packages	built-in Packages	modular
Performance	gut	gut

Tabelle 2.2: Vergleich der Frameworks Django und Flask

Aufgrund der Leichtigkeit wurde sich bei den Frameworks für Flask entschieden. Da es bei der Performance keine großen Unterschiede zwischen Django und Flask gibt, ist es als Merkmal für die Entscheidung eines Frameworks nicht relevant. Für den **Sudoku Helper** wird nur eine einseitige Anwendung ohne Datenbankbindung benötigt, wodurch Flask das geeignetere Framework ist. Auch der modulare Aufbau spricht für Flask, da nur wenige zusätzliche Pakete genutzt werden.

Das Entwurfsmuster MVC wird im Framework Flask übernommen.

2.4 Entwurfsmuster

Wie im Abschnitt der Frameworks schon erwähnt, wird in diesem Projekt eine bestimmte Softwarearchitektur verwendet. Damit wird einem Projekt die grundlegenden Komponenten und das Zusammenspiel dieser visualisiert. Damit ist es einfacher nicht-funktionale Eigenschaften wie die Modifizierbarkeit, Wartbarkeit oder Sicherheit darzustellen und zu verstehen.

Das Framework Django arbeitet immer mit dem MVC Architekturmuster. Da aber Flask als Framework genutzt wird, muss diese Architektur selbst implementiert werden. Im Folgenden wird das Architekturmuster mit seinen drei Komponenten kurz beschrieben.

2.4.1 Model View Controller

Das Ziel dieser Entwurfsarchitektur ist es, spätere Änderungen oder Erweiterungen zu vereinfachen und die Wiederverwendbarkeit der einzelnen Komponenten zu steigern. In der Abbildung 2.2 ist die Architektur visualisiert. Durchgezogene Linien stehen hierbei für eine direkte Assoziation und gestrichelte für eine indirekte Assoziation.

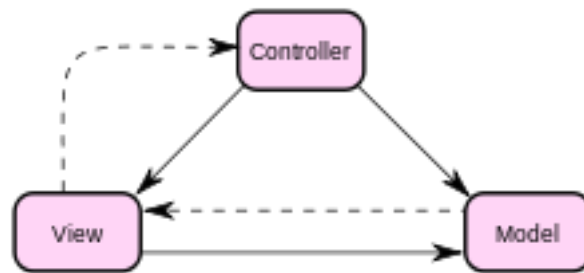


Abbildung 2.2: MVC Konzept

Model

Im Model sind die Daten enthalten, die dargestellt werden sollen. In Falle des Sudoku Solvers ist hier das Sudoku Board gespeichert.

View

In der View oder der Präsentation werden die Daten aus dem Model dargestellt. Außerdem wird in der View die Benutzerinteraktion geregelt. Die View kennt die Daten aus dem Model, soll diese aber nicht bearbeiten oder verändern und ist völlig unabhängig von dem Controller.

Controller

Im Controller werden das Model und die View verwaltet. Die View unterrichtet den Controller von Benutzerinteraktionen. Im Controller wird diese dann ausgewertet und gegebenenfalls das Model und die View angepasst. In dieser Komponente sind die Lösungsstrategien für den Sudoku Solver implementiert.

3 Sudoku

Nachdem in der Einleitung schon kurz auf das Spielfeld eines Sudokus und die Regeln eingegangen wurde, werden beides in diesem Kapitel noch einmal ausführlicher behandelt. Es wird auch auf Elemente des Spielfelds eingegangen, die relevant sind für die Strategien und wie das Spielfeld in dem Programm aufgebaut ist.

3.1 Spielfeld Aufteilung

Das Spielfeld, auf dem ein Sudoku gespielt wird, besteht aus einem 9x9 Gitter und damit aus 81 einzelnen Zellen. Diese Gitter wird weiterhin in je 9 Zeilen, Spalten und 3x3 Blöcke aufgeteilt. Jede Aufteilung, weiterhin auch Unit genannt, besteht immer aus 9 Zellen. Damit kann ein Sudoku also nochmal in 27 verschiedene Units aufgeteilt werden. Wie diese Units aussehen, wird im Folgenden gezeigt.

3.1.1 Zeile

Eine Zeile in einem Sudokuspielfeld sind Zellen, die horizontal zueinander ausgerichtet sind. In der Abbildung 3.1 wurde die oberste Zeile beispielhaft markiert.

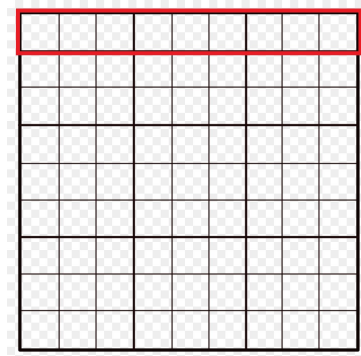


Abbildung 3.1: Darstellung des Sudokugitters mit der Markierung einer Zeile

3.1.2 Spalte

Analog zu einer Reihe sind Spalten Zellen, die vertikal zueinander ausgerichtet sind. In der Abbildung 3.2 wurde beispielhaft die erste Spalte markiert.

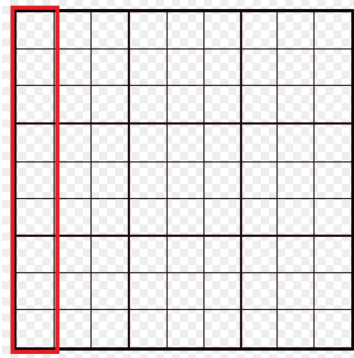


Abbildung 3.2: Darstellung des Sudokugitters mit der Markierung einer Spalte

3.1.3 Box/Block

Boxen bestehen aus 3x3 Zellen. Die 3x3 Boxen sind im Sudokufeld so angeordnet, dass jede Zelle in genau einer Box liegt und, dass es 9 Boxen geben kann. In der Abbildung 3.3 wurde eine Box markiert. Wie zu erkennen ist, sind die Boxen auch im Frontend durch dickere Linien voneinander abgegrenzt.

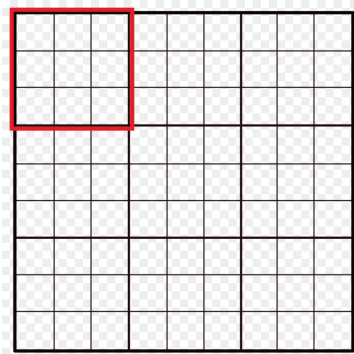


Abbildung 3.3: Darstellung des Sudokugitters mit der Aufteilung in 9 Boxen

3.2 Regeln

Die Regeln ergeben sich durch einfache Bedingungen, wenn man die Aufteilung des Spielfeldes kennt. In jeder Zeile, Spalte und Box dürfen und müssen die Zahlen von eins bis neun nur einmal vorkommen.

Am Ende kommen die Zahlen von eins bis neun also jeweils neunmal auf dem gesamten Sudokugitter vor, ohne dass sie sich gegenseitig sehen, also sich keine Zahl doppelt in einer Zeile, Spalte oder Box befindet.

Damit man das Sudokugitter ausfüllen kann und es nur eine mögliche Lösung gibt, sind zu Spielbeginn einige Ziffern vorgegeben. Mithilfe dieser Ziffern ist es möglich, mit den gerade erklärten Regeln das ganze Sudokugitter durch Logik und Deduktionen zu füllen. [\[Sud22\]](#)

3.3 Strategie

Um ein Sudoku zu lösen, können verschiedene Strategien eingesetzt werden. Das Ziel einer Strategie ist es hierbei eine passende Zahl in das Sudoku einzufügen oder mögliche Kandidaten zu eliminieren. Es gibt zwei grundlegende Strategien, um Zahlen direkt einzufügen: den Hidden Single und den Naked Single. Beide Strategien können oft intuitiv und ohne eine große Erklärung gefunden und umgesetzt werden. Weitere leichte Strategien wie ein Hidden Double oder ein Naked Double, bei denen Kandidaten eliminiert werden können, sind mithilfe der Kandidaten-Notation leicht gefunden.

Insgesamt gibt es über 30 gebräuchliche Strategien, die zur Unterstützung bei schweren Sudokus angewendet werden können. Oftmals sind anspruchsvollere Strategien für das menschliche Auge schwer zu entdecken. Wichtig bei diesen komplexeren Strategien ist eine gewissenhafte Ausführung der Kandidaten-Notation. [\[Mar\]](#)

3.3.1 Lösungshilfen: Kandidaten-Notation

Kandidaten sind Zahlen in einer Zelle des Sudokugitters, die, mit dem aktuellen Informationsstand, als feste Zahl noch infrage kommen. Das Problem liegt dabei, dass meistens mehrere Zahlen in eine Zelle können. Kandidaten können durch das Eintragen von weiteren Zahlen oder das Anwenden von Strategien eliminiert werden. Wenn man dabei jede

Zelle einzeln betrachtet, geben die Kandidaten keinen weiteren Nutzen. Wenn die Kandidaten jedoch über mehrerer Zellen in Bezug zueinander angeschaut werden, lassen sich Zusammenhänge erkennen. Die meisten Strategien basieren auf diesen Zusammenhängen.

Sobald eine Zahl eingetragen wird, müssen die Kandidaten aktualisiert werden. Wenn eine Zahl eingetragen wird, kann jeder gleichwertiger Kandidat, der diese Zahl sieht, gestrichen werden.

4 Die Mathematik hinter Sudoku

In diesem Kapitel sollen einige mathematische Fragen über Sudokus geklärt werden. Dazu gehören Fragen zur eindeutigen Lösbarkeit und wie diese bewiesen werden kann oder wie viele mögliche fertige Sudokus es denn überhaupt gibt.

4.1 Abzählfragen

Ein trivialer Ansatz, um die Frage zu beantworten, wie viele vollständig ausgefüllten 9×9 Standard-Sudokus es gibt, könnte sein zeilenweise von links nach rechts oder spaltenweise von oben nach unten Zahlen einzutragen. Damit würden sich pro Zeile, Spalte oder Block $9!$ Möglichkeiten ergeben. Daraus ergeben sich

$$(9!)^9 = 1,1 \cdot 10^{50} \quad (4.1)$$

Möglichkeiten, ein Sudokugitter auszufüllen. Von diesen ausgefüllten Gittern entsprechen aber nicht alle der Konvention, dass in den Zeilen, Reihen und Boxen jede Zahl von 1 bis 9 nur einmal vorkommen darf.

Felgenhauer und Jarvis hatten dieselbe Herangehensweise. Als Nächstes haben sie sich immer drei Reihen nebeneinander, oder drei Zeilen untereinander angeschaut. Im Grunde haben Sie die möglichen Lösungen von drei linear verbundenen Blöcken errechnet. Dabei gibt es

$$2 \cdot (3!)^6 + 18 \cdot 3 \cdot (3!)^6 = 56 \cdot (3!)^6 = 2612736 \quad (4.2)$$

mögliche Erweiterungen einer bereits ausgefüllten Reihe.

Damit gibt es

$$9! \cdot 2612736 = 948109639680 \quad (4.3)$$

Möglichkeiten, die oberen drei Reihen eines Sudokugitters auszufüllen.

Aus diesen 2612736 Möglichkeiten wollten Felgenhauer und Jarvis dann versuchen, die verbleibenden Blöcke des Sudokugitters mittels einer Brute-Force Methode auszufüllen. Da es mit den 2612736 Möglichkeiten immer noch ein zu großer Aufwand wäre, haben sich Felgenhauer und Jarvis drei Reduktionen überlegt, um die Anzahl an Möglichkeiten die ersten drei Reihen auszufüllen zu reduzieren.

Auf diese 2612736 Möglichkeiten haben Jarvis und Felgenhauer drei möglichen Reduktionen angewandt: die lexikographische Reduktion, die Reduktion der Permutationen und die Reduktion der Spalten. Durch diese Reduktionen werden Sudokus mit Lösungen, die sich durch Spiegeln, Drehen oder durch symmetrische Eigenschaften doppeln lassen, herausgefiltert. Aus Praktikabilitätsgründen kann in dieser Arbeit keine umfassende Übersicht der Reduktionen gegeben werden.

Nach den Reduktionen bleiben 44 Möglichkeiten, die Zeilen zwei und drei auszufüllen. Danach muss herausgefunden werden, wie viele Konfigurationen eines Sudokus es gibt, das Gitter zu vervollständigen.

Felgenhauer und Jarvis haben in ihrer Veröffentlichung von 2006 die These aufgestellt, dass es 6.670.903.752.021.072.936.960, also ca. 6,7 Trilliarden verschiedene, vollständig ausgefüllte Standard-Sudokus Rätsel gibt. Nach der Reduktion von symmetrischen Lösungen bleiben nur noch 5.5 Milliarden Lösungen. [FJ06]

4.2 Komplexität

Bei Sudokus, die in den Medien veröffentlicht werden, und immer eindeutig lösbar sein müssen, kann durch logische Schlussfolgerung das Sudokurätsel gelöst werden. Durch die eindeutige Lösbarkeit ist es nicht notwendig Fallunterscheidungen zu treffen, also auszuprobieren.

Mathematisch gesehen ist ein Sudoku ein Problem n -ter Ordnung. Dabei ist n eine natürliche Zahl. Auf einem $N \cdot N$ Gitter, wobei $N = n^2$ gilt, sind die Zahlen 1 bis N in das Gitter einzufügen. Dabei soll in jeder $1 \cdot n$ Zeile, $n \cdot 1$ Spalte und $n \cdot n$ Block, jede der Zahlen 1 bis N genau einmal vorkommen. N^2 Felder des Gitters können dabei vorbelegt sein. Ein $9 \cdot 9$ Sudoku ist damit ein Problem 3-ter Ordnung.

4.3 Eindeutige Lösbarkeit

Für ein Sudokugitter ohne vorgegebene Ziffern gibt es 5.472.730.538 (5,5 Milliarden) unterschiedliche, richtige Lösungen. Auch wenn nur eine oder zwei Ziffern vorgegeben werden, gibt es immer noch eine sehr große Anzahl an Lösungen für dieses Sudoku.

Sudokus, die in irgendeiner Form veröffentlicht werden, sind normalerweise mit der Vorgabe einer eindeutigen Lösung erstellt. Sobald ein Sudoku nur eine korrekte Vervollständigung hat, ist es eindeutig lösbar. Daraus lässt sich folgern, dass in eindeutigen Sudokus in jede freie Zelle nur eine einzige Ziffer eingetragen werden kann, ohne die Regeln zu brechen.

Als notwendiges Kriterium für ein eindeutig lösbares Sudoku, müssen unter den vorgegebenen Zahlen mindestens acht unterschiedliche Zahlen von 1 bis 9 vorkommen. Dieses Kriterium ist gegeben durch den Fakt, dass bei nur sieben vorgegebenen unterschiedlichen Ziffern die beiden übrigen in der zugehörigen Lösung vertauscht werden können. [HM07]

4.3.1 Anzahl vorgegebene Ziffern für ein eindeutiges Sudoku

Es gibt die Vermutung, dass die minimale Anzahl an vorgegebenen Ziffern 17 ist. Mittels Brute-Force Methoden wurden eindeutige Sudokus mit nur 17 vorgegebenen Zahlen gesucht. Daran wurde 2011 von einem Forschungsteam von Gary McGuire geforscht. Es gibt jedoch noch keinen mathematischen Beweis für die Vermutung. Diese Vermutung basiert also hauptsächlich auf dem Generieren und Ausprobieren von vielen unterschiedlichen Sudokurätseln mit nur 17 Ziffern und einer eindeutigen Lösung. [Zei12]

4.4 Algorithmische Lösungsmethode: Backtracking

Backtracking ist eine Problemlösungsstrategie und mit der Rekursion verwandt. Es werden alle möglichen Lösungen ausprobiert und in jedem Schritt nach einer Abbruchbedingung überprüft. Die Bedingungen an das Problem, dass mit Backtracking gelöst werden sollen sind die Folgenden:

1. Das Problem ist in endlich vielen Teilschritten lösbar
2. Jeder der Teilschritte besitzt Abbruchbedingungen
3. Jeder der Schritte hat eine endliche Anzahl Lösungsmöglichkeiten

Für jedes Element des Problems, in diesem Fall für jede freie Zelle, werden alle möglichen Zustände ausprobiert. Die Zustände sind im Fall des Sudokus die Zahlen von eins bis neun. Wenn ein Zustand zulässig ist, also in der Zeile, Reihe oder Box die Zahl nicht bereits eingetragen ist, so wird rekursiv überprüft, ob es für den aktuellen Zustand eine Lösung gibt. Wenn es diese nicht gibt, wird der vorherige Schritt rückgängig gemacht und eine neue Lösung gesucht. Damit basiert Backtracking auf dem Trial-and-Error Prinzip und versucht eine erreichte Teillösung in eine Gesamtlösung zu transferieren.

Bei z möglichen Verzweigungen jeder Teillösung und einem möglichen Verzweigungsbaum mit der Tiefe von N hat das Backtracking, sofern $z > 1$ ist im schlechtesten Fall mit $O(z^N)$ eine exponentielle Laufzeit.

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^N \quad (4.4)$$

Wenn mittels des Backtrackings keine Lösung für das Sudoku gefunden wurde, gibt es keine Lösung. Wenn jedoch eine Lösung gefunden wurde, so ist noch nicht bewiesen, dass diese Lösung eindeutig ist. Um eine eindeutige Lösbarkeit zu garantieren, wird mittels Backtracking überprüft, dass keine weitere Lösung existiert.

Da es für das Lösen eines Sudokus keinen effizienteren Algorithmus gibt und bereits vor der Anwendung der Lösungsstrategie überprüft werden soll, ob es eine eindeutige Lösbarkeit gibt, ist dieser Ansatz am sinnvollsten. [Log14, S. 209 ff.]

4.4.1 Backtracking mit Brute-Force-Methode

Backtracking mit der Brute-Force Methode funktioniert wie oben beschrieben auf dem Prinzip des Backtracking mit dem Ausprobieren aller möglichen Fällen. Mit dem ersten freien Feld probiert man mit der 1 beginnend, ob man zu einer Lösung kommt. Als Abbruchbedingung ist das nicht singuläre Auftreten der neu eingefügten Zahl in Reihe, Zeile und Box implementiert.

Bei der Brute-Force Methode wird für jede freie Zelle von 1 bis 9 überprüft, ob diese Zahl in die Zelle eingetragen werden darf. Sobald eine Zahl eingetragen werden darf, wird das gemacht und mit der nächsten freien Zelle fortgefahren. Falls in einer Zelle die Abbruchbedingung für jede Zahl ausgelöst wurde, also keine Zahl mehr in die Zelle eingetragen werden kann, wird bei der vorherigen Zelle weiter versucht. Bis das Sudoku entweder vollständig gelöst ist, oder es keine Möglichkeiten mehr gibt und das Sudoku damit nicht lösbar ist.

Die Laufzeit des Algorithmus hängt von der Anzahl der freien Zellen ab und damit auch von der Anzahl der vorgegebenen Zahlen. Wenn viele Zahlen vorgegeben sind, dann ist die Tiefe N des Verzweigungsbaums und damit auch die Laufzeit geringer.

```
def solve(self, numbers=(1, SIZE + 1), board=None):  
    """  
    Solves the SudokuBoard recursively via backtracking  
    :return: False if not solvable, True if solved  
    """  
    square = self.get_empty_square(board)  
  
    if not square:  
        return True  
  
    for i in range(*numbers):  
        if self.is_valid(i, square, board=board):  
            board[square[0]][square[1]][0] = i  
  
            if self.solve(numbers=numbers, board=board):  
                return True  
  
            board[square[0]][square[1]][0] = 0  
  
    return False
```

Abbruchbedingung

Die Abbruchbedingung für das Backtracking ist mit einer eigenen Funktion *is_valid* umgesetzt.

```
def is_valid(self, number, position, board=None):  
    ...  
    # Check row  
    for j in range(SIZE):  
        if board[position[0]][j][0] == number and j != position[1]:  
            return False  
    ...  
    # Check Box  
    box_x = (position[1] // 3) * 3  
    box_y = (position[0] // 3) * 3  
  
    for i in range(box_y, box_y + 3):
```

```
for j in range(box_x, box_x + 3):  
    if board[i][j][0] == number and (i, j) != position:  
        return False  
  
return True
```

Wie in dem Code implementiert, wird überprüft, ob eine *number* an einer bestimmten *position* eingesetzt werden darf, oder ob diese Zahl bereits in der entsprechenden Reihe, Zeile oder Box vorhanden ist. Wenn die Zahl gültig ist, gibt die Funktion *True* zurück, anderenfalls *False*, womit die Abbruchbedingung als erfüllt gilt. [Kno17]

4.4.2 Beweis Eindeutigkeit

Der Algorithmus des Backtrackings bricht nach dem Finden einer vollständigen Lösung für ein Sudoku ab. Damit ist bestätigt, dass es eine Lösung für das Sudoku Rätsel gibt, jedoch nicht, dass diese Lösung eindeutig ist. Um die Eindeutigkeit eines Sudokus zu beweisen, müsste nach dem Finden einer Lösung erfolglos versucht werden eine weitere Lösung zu finden.

Um die Eindeutigkeit eines Sudoku Rätsels zu beweisen, wird nach dem Finden einer Lösung das Backtracking nochmals von hinten begonnen. Damit ist gemeint, dass bei der ersten Lösungssuche in den freien Zellen die Zahlen von 1 bis 9 eingetragen werden und nach dem Abbruchkriterium überprüft wird. Beim Suchen nach einer zweiten Lösung beziehungsweise bei dem Beweis der Eindeutigkeit wird das Backtracking nochmals ausgeführt, dabei aber die Zahlen von 9 bis 1 in die freien Zellen eingetragen.

```
def is_uniquely_solvable(self):  
    temp_board = deepcopy(self.board)  
    self.solve(numbers=(9, 0, -1), board=temp_board)  
    return self.solved == temp_board
```

Nach dem Ausführen der beiden Backtracking Algorithmen werden die beiden gefundenen Lösungen miteinander verglichen. Wenn die dabei gefundenen Lösungen übereinstimmen, kann mit Garantie gesagt werden, dass das Sudoku eindeutig lösbar ist.

5 Frontend

6 Backend

6.1 Serverseite

6.2 Board

6.3 Implementierung Lösungsstrategien

7 Testing/Validierung

Literatur

- [Ern20] P. Ernesti J. und Kaiser. *Python 3, Das umfassende Handbuch*. 5., aktualisierte Auflage. Bonn: Rheinwerk Computing, 2020. ISBN: 978-3-8362-7926-0.
- [FJ06] Bertram Felgenhauer und Frazer Jarvis. „Mathematics of Sudoku I“. In: *Mathematical Spectrum* 39 (Jan. 2006).
- [HM07] Agnes Herzberg und Ram Murty. „Sudoku squares and chromatic polynomials“. In: *Internationale Mathematische Nachrichten* 54 (Juni 2007).
- [Kno17] Simon Knott. *Backtracking*. 2017. URL: <https://simonknott.de/articles/backtracking>.
- [Log14] D. Logofătu. *Grundlegende Algorithmen mit Java: Lern- und Arbeitsbuch für Informatiker und Mathematiker*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2014. ISBN: 9783834819727. URL: <https://books.google.de/books?id=GBcyngEACAAJ>.
- [Mar] Simon Martin. *Sudoku*. URL: <https://www.thinkgym.de/r%C3%A4tselarten/sudoku/>.
- [Sar20] Dejan Sarka. *A Python Data Analyst's Toolkit, Learn Python and Python-based Libraries with Applications in Data Analysis and Statistics*. 6., aktualisierte Auflage. Berkeley, CA: Apress, 2020. ISBN: 978-1-4842-7172-8.
- [Sud22] Sudopedia. 2022. URL: <http://www.sudopedia.org/>.
- [W3t] *Usage statistics of web servers*. URL: https://w3techs.com/technologies/overview/web_server.
- [Zei12] Frankfurter Allgemeine Zeitung. *Mathematik: Der heilige gral der sudokus*. 2012. URL: <https://www.faz.net/aktuell/wissen/physik-mehr/mathematik-der-heilige-gral-der-sudokus-11682905.html>.

Anhang