

Wolfram Jehne, Herbert Wingen  
**Eine mathematische Theorie der Sudokus**



Wolfram Jehne, Herbert Wingen

# Eine mathematische Theorie der Sudokus

---

DE GRUYTER

**Mathematics Subject Classification 2010**

05A15, 05B15, 05C30, 05C40, 05C75, 05E18, 20E22, 20E45, 68R05, 68R10

**Autoren**

Prof. Dr. Wolfram Jehne

Dr. Herbert Wingen

wingen.sudoku@web.de

ISBN 978-3-11-030673-6

e-ISBN 978-3-11-030681-1

**Library of Congress Cataloging-in-Publication Data**

A CIP catalog record for this book has been applied for at the Library of Congress.

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

© 2013 Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston

Umschlagabbildung: Hendrik und Gerrit Hermann

Satz: le-tex publishing services GmbH, Leipzig

Druck und Bindung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG, Göttingen

♾ Printed on acid-free paper

Printed in Germany

[www.degruyter.com](http://www.degruyter.com)

---

Für meine Kinder  
Sabine, Martin, Eva



# Vorwort

Sudokus sind wahre Wunderwerke der Kombinatorik. Sie sind Verfeinerungen von *Eulers Lateinischen Quadraten*, über die er so viele Erkenntnisse gewonnen hat. Man kann vermuten, dass er auch die Sudokus entdeckt hätte, wenn er die Sonderrolle quadratischer Reihenzahlen erkannt hätte. So gingen zwei Jahrhunderte ins Land, ehe die wundersamen Gesellen entdeckt wurden. Der japanische Name „Sudoku“ bedeutet soviel wie „Ziffern schreiben“, erfunden wurden sie nicht im Land der Namensgeber. In der Literatur wird als Entdecker ein amerikanischer Architekt *Howard Garns* genannt, der das Rätsel 1979 einem Rätselverlag angeboten hatte. Nach der folgenden Ausbreitung und Namensgebung in Japan erfolgte der weltweite Siegeszug erst im Jahr 2004. Der Neuseeländer *Wayne Gould* hatte ein Computerprogramm zur Herstellung der Rätsel entwickelt und der London Times zur Vermarktung angeboten. Lesenswert ist der Artikel des Redakteurs *R. Morrison*, in dem dokumentiert wird, wie sich das Rätsel in nur 600 Tagen weltweit ausgetragen hat.

Das Verdienst dieser Entdeckung kann nicht hoch genug eingeschätzt werden. Sie hat unzähligen Menschen weltweit, ob jung oder alt, ein Rätselvergnügen im Reich der Zahlen eröffnet, das keine Konsole benötigt. Dabei darf nicht verkannt werden, dass hinter den Rätseln ernsthafte Mathematik steckt, die die Eindeutigkeit der Lösungen garantiert.

Sudokufreunde sind jedoch keine Freunde der Sudokus im eigentlichen Sinn. Für sie ist der Weg das Ziel: Es werden Ziffernverteilungen zu Sudokus vervollständigt, das eigentliche Ergebnis, das Sudoku, wird keines Blickes gewürdigt. Diese wirren, unübersichtlichen Gebilde haben keinen Erkennungswert und schon gar keinen Erinnerungswert. Und wenn man dann erfährt, dass die Anzahl der 9er-Sudokus in die Trilliarden geht, wird man umso weniger einen der Gesellen näher kennen lernen wollen.

Anders der Mathematiker. Er möchte den Sudokus ihre Geheimnisse entreißen, soweit sie denn welche haben. Langwierige Bemühungen waren erforderlich, bis Strukturen, gegenseitige Beziehungen und ihre Clanbildung erkennbar wurden.

Das Ergebnis liegt nun in diesem Buch vor. Es sei betont, dass Zielsetzung und Ergebnisse nicht im Mainstream der überbordenden Literatur über Sudokus liegen.

Zum einen bleibt das Feld der Sudoku-Aufgaben, der Rätsel also, unberücksichtigt. Zum anderen geht es hier vorrangig um die strukturelle Erfassung der Individuen und ihrer Klassifikation. Das rechtfertigt die Beschränkung auf den  $9 \times 9$ -Fall.

Danksagungen sind angezeigt an Kollegen, die das Werden des Buches begleitet haben. Zum ersten Kapitel ergab sich eine fruchtbare Zusammenarbeit mit *Arnold Schönhage* und *Fritz Ostermann*. Ein Wechselspiel zwischen theoretischen und numerischen Ergebnissen fügte sich am Ende zu einem klaren Bild zusammen.

Mal kamen aus der Theorie Fragen numerischer Art auf, nach Existenz oder Anzahlen, die Antworten ließen nicht lange auf sich warten. Mal gab es numerische Er-

gebnisse, die einer strukturellen Deutung zugänglich waren. Von Anfang an war mir bewusst, dass die Geheimnisse der Sudokuwelt oft nur mit ergänzender Hilfe computergestützter Methoden zu entschlüsseln waren. Für ihre substantiellen Beiträge gebührt beiden Herren mein herzlicher Dank. Ihre Beiträge werden im Text dargestellt und auf ihren homepages ausführlich dokumentiert.

In der späteren Hauptphase des Projekts konnte ich mich der freundschaftlichen Mitarbeit von *Herbert Wingen* erfreuen. Mit fortschreitender Zusammenarbeit am Projekt nahmen seine Beiträge das Ausmaß einer Koautorschaft an. Seine Klassifikation der Dominographen war der krönende Abschluss der Theorie dieser neuen Art von Graphen. Darüber hinaus sind seine Ergebnisse zur Allgemeinen Fixgleichung hervorzuheben. Es gelingen dazu weitreichende Erkenntnisse über die Lösungsstrukturen dieser Gleichungen, die man – algebraisch ausgedrückt – als Eigenwertprobleme deuten kann. Diese eigenständigen Leistungen gaben dem Projekt einen deutlichen Schub, sie stellen einen wichtigen Beitrag zu diesem Buch dar.

Ich denke gern an die harmonische Zusammenarbeit zurück.

Die Herren *Frank Nübel* und *Hans-Joachim Burscheid* haben Teile des Textes kritisch gelesen und kleinere Unstimmigkeiten beseitigt. H.-J. Burscheid hat mir bei der Beschaffung der Literatur in dankenswerter Weise zur Seite gestanden. Ihren Bemühungen gilt mein besonderer Dank.

Notwendige Dokumentationen, Beweise und Ergänzungen werden in einem Anhang dargestellt.

Bergisch Gladbach, am 31.07.2012

Wolfram Jehne

# Inhalt

Vorwort — vii

Einleitung — 1

Notationen — 7

## Teil I Klassifikation der Fixesudoku

1 Die Sudokugruppe im 9er-Fall — 11

2 Fixesudoku und Bahnen — 19

2.1 Blockschemata — 19

2.2 Zwei Konstruktionsverfahren — 23

2.3 Fixpunktfreiheit und Fixoperatoren — 27

2.4 Fixesudoku — 32

2.5 Superfixe — 38

2.6 Die Charakteristik — 41

2.7 Lösung des Winkelproblems: Die Sondersudoku 1. Art — 45

2.8 Fixe und neutrale Sudokus: Zwei Kriterien — 51

2.9 Die Sondersudoku der 2. Art — 57

3 Anzahlen,  $G^*$ -Mengen und Parametrisierung — 61

3.1 Mischgruppen — 61

3.2 Anzahlen und  $M$ -Bahnen — 67

3.3 Die  $G$ -Fixsudoku als  $G^*$ -Mengen — 75

3.4 Parametrisierung — 88

3.5 Permutationsmerkmale — 90

3.6 Determinanten und Restsysteme mod 9 — 94

4 Die allgemeine  $G^*$ -Fixgleichung — 97

4.1 Die lokale Fixgleichung und Konjugationsklassen — 99

4.2 Die  $G^*$ -Fixgleichung für einen Streifen — 106

4.3 Struktureigenschaften von  $G^*$ -Fixsudoku — 108

4.4 Eingrenzung der möglichen  $G^*$ -Fixoperatoren — 119

4.5 Existenz von Semifixsudoku in Ausnahmefällen — 137

## Teil II Dominographen und Sudoku-Clans

5 Dominographen und Sudokus — 149

5.1 Dominographen und Singularitäten — 149

5.2 Isometrien von Dominographen — 159

5.3	Schaltprozess und Clanbildung — <b>164</b>
5.4	Der Stamm eines Sudokus und der Großclan — <b>176</b>
5.5	Globale Isometrien — <b>183</b>
<b>6</b>	<b>Klassifikation der konkreten <i>D</i>-Graphen und Beispiele — 188</b>
6.1	Zerlegung von Dominographen — <b>188</b>
6.2	Die Klassifikation — <b>191</b>
6.3	Zweige der <i>G</i> -Fixsudoku — <b>198</b>
6.4	Individuelle Sudokus — <b>209</b>
6.5	Viele Rechteckeeffekte — <b>212</b>
6.6	Intersektionsmatrizen und Singularitäten-Verteilungen — <b>215</b>
6.7	Abgrenzung der Zweige von $G^*$ -fixen Sudokus zum Leitoperator $\sigma$ — <b>222</b>
6.8	Algebraische und transzendentale Sudokus — <b>227</b>
<b>7</b>	<b>Beweis des Klassifikationssatzes für konkrete <i>D</i>-Graphen — 234</b>
7.1	Diagramme — <b>234</b>
7.2	Adjungierte Graphen und Zusammenhangskomponenten — <b>247</b>
7.3	Identifikation kleiner Komponenten von <i>D</i> -Graphen — <b>252</b>
7.4	Klassifikation der <i>D</i> -Graphen mit mindestens einer regulären Eckenmenge — <b>256</b>
7.5	Klassifikation der <i>D</i> -Graphen mit zwei singulären Eckenmengen — <b>263</b>
7.6	Charakteristik und Schaltprozesse — <b>275</b>
<b>8</b>	<b>Nachbetrachtungen — 278</b>
8.1	Algebraische Interpretationen — <b>278</b>
8.2	Nachbetrachtungen und offene Probleme — <b>282</b>
8.3	Sudokus als Kunstwerk — <b>285</b>
<b>Anhang — 287</b>	
1	Ausführung der Fälle im Beweis von Satz 4.15 in Abschnitt 4.4 — <b>287</b>
2	Auflistung der Graphiken zu allen <i>D</i> -Graphen — <b>295</b>
3	Bestimmung der Anzahl der abstrakten <i>D</i> -Graphen und Beweis von Satz 6.5 — <b>302</b>
4	Beweis von Satz 6.12 in Abschnitt 6.7 — <b>308</b>
5	Abschätzung der Anzahl der algebraischen Sudokus — <b>312</b>
<b>Literatur — 315</b>	
<b>Stichwortverzeichnis — 317</b>	

# Einleitung

Das Buch besteht aus zwei methodisch und inhaltlich gänzlich unterschiedlichen Teilen. In Teil I wird der Raum der Sudokus – wir beschränken uns auf den 9er-Fall – unter der Wirkung seiner beiden Symmetriegruppen untersucht, der Sudokugruppe und der Mischgruppe. Es zeigt sich, dass Fixsudokus der Sudokugruppe besondere strukturelle Eigenschaften haben. Sie können konstruiert, in ihrer Anzahl bestimmt und letztendlich klassifiziert werden. Diese Fixsudokus nehmen nur einen verschwindend kleinen Anteil im Raum aller Sudokus ein. Die Mischgruppe  $G^*$  berücksichtigt auch die Wirkung der symmetrischen Gruppe  $S_9$  auf die in den Sudokus enthaltenen Ziffern 1, …, 9. Die  $G^*$ -Fixoperatoren und  $G^*$ -Fixsudokus zu bestimmen und zu klassifizieren ist ein wesentlich schwierigeres Problem, der kombinatorische Aufwand erheblich.

In Teil II werden Sudokus unter graphentheoretischen Gesichtspunkten untersucht. Dazu wird ein neuer Typus von metrischen Graphen eingeführt, die sog. Dominographen. Jedem Sudoku kann ein Paket solcher  $D$ -Graphen zugeordnet werden, das gewissermaßen seine innere Struktur erkennen lässt. Die  $D$ -Graphen können vollständig klassifiziert und durch Graphiken visualisiert werden.  $D$ -Graphen induzieren Schaltprozesse, die aus einem Sudoku neue Sudokus erzeugen, die in verschiedene Clans zusammengefasst werden. Die Clanbildung ist ein neuer Prozess, einem Sudoku weitere zuzuordnen. Kein Clanmitglied kann aus dem Gründer durch Anwendung von Operatoren der beiden Symmetriegruppen gewonnen werden. Bis auf den Clangründer sind die Clans also disjunkt zu dessen Bahnen unter der Sudokugruppe.

In Kapitel 1 wird die Sudokugruppe geometrisch eingeführt. Sie basiert auf der Blockrasterstruktur des  $9 \times 9$ -Schemas, das den Sudokubedingungen zugrunde liegt. Ein Automorphismus des Sudokuraumes  $X$  muss dieses Schema respektieren. Grundlegend sind die Figuren von 3 angrenzenden Blöcken, die *Blockstreifen* oder auch kurz *Streifen*, und dies horizontal und vertikal. Ein Automorphismus sollte also folgende Bedingungen erfüllen:

- (a) Er sollte Streifen in Streifen überführen, und zwar parallele Streifen wieder in solche, und
- (b) er sollte Permutationen von Reihen, also von Zeilen und Spalten, nur innerhalb von Streifen vollziehen.

Dann und nur dann führt eine Permutation der 81 Kästchen Sudokus wieder in solche über, wenn (a) und (b) erfüllt ist. Die Menge aller solchen Permutationen, die horizontale und vertikale Streifen wieder in solche der gleichen Art überführen, bildet eine Gruppe  $G_0$  der Ordnung  $6^8$ . Nimmt man die Transposition  $t$  noch hinzu, entsteht die *Sudokugruppe*

$$G = [G_0, t] \quad \text{der Ordnung } 2 \cdot 6^8.$$

Der Stabilisator aller Streifen, also die Menge aller Operatoren aus  $G_0$ , die jeweils nur die Reihen in den Streifen permutieren, bildet die *lokale Sudokugruppe*  $T^*$ .

Die Operatoren aus  $G_0$ , die nur die Streifen permutieren, ohne die enthaltenen Reihen zu verändern, bilden die *rein-globale Sudokugruppe*  $H^*$ .  $G_0$  wird von beiden Gruppen erzeugt

$$G_0 = [T^*, H^*].$$

$H^*$  operiert auf  $T^*$  durch Konjugation auf explizit bekannte Weise

$$T^{*\varphi} = \varphi^{-1} T^* \varphi = T^* \quad \text{für alle } \varphi \in H^*.$$

Wir sind nun in der Lage, zwei Hauptergebnisse von Kapitel 2 zu beschreiben.

Es hat sich gezeigt, dass die *Fixsudokus* unter der Wirkung der Sudokugruppe konstruiert und klassifiziert werden können, und auch die verschiedenen Anzahlen liegen vor.

Fixoperatoren liegen sämtlich in der Gruppe

$$Q = [T^*, \sigma, \sigma^\circ].$$

Hierbei sind  $\sigma$  und  $\sigma^\circ$  die Operatoren, die die Horizontal- bzw. Vertikalstreifen zyklisch vertauschen. Sie haben die Ordnung 3. Man unterscheidet 3 Typenklassen I–III von Fixsudokus. Unter Typ I fallen die *Superfixe* mit einer Fixgruppe der Ordnung 9.

Die *Einfachfixe* mit Fixgruppen der Ordnung 3 bilden 2 Typenklassen II und III, je nachdem ihre Fixoperatoren in den Nebenklassen

$$\sigma T^*, \sigma^\circ T^* \quad \text{oder in} \quad \sigma\sigma^\circ T^*, \sigma^{-1}\sigma^\circ T^*$$

liegen. Alle 3 Typenklassen sind vollständig klassifiziert. Bestimmte normierte Sudokus in den einzelnen Typenklassen sind numerisch bekannt, sie können auch durch Blockoperatoren konstruiert und ihre Teilanzahlen bestimmt werden.

Ein schönes Ergebnis betrifft Fixsudokus mit einer besonderen Normierung. Das sind Sudokus mit einer Blockdiagonalen, die aus lauter Grundblöcken besteht

$$e = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}.$$

Das sog. *Winkelproblem* stellt die Frage: Gibt es Sudokus der Form

$$S = \begin{matrix} e & b & c \\ c & e & b \\ b & c & e \end{matrix} \quad \text{mit Blöcken } b \text{ und } c,$$

und wenn ja wie viele?

Können also numerische Blöcke  $b$  und  $c$  gefunden werden, so dass  $S$  ein Sudoku ist? Die Antwort ist:

Es gibt genau 40 Sudokus der genannten Art, darunter 4 Superfixe und 36 sog. *Sondersudokus der 1. Art*, die im Verlauf für eine merkwürdige Anomalie sorgen. Alle 40 sind fix unter  $\sigma' = \sigma\sigma^\circ$  und numerisch wie in Operatordarstellung bekannt.

Der Sudokuraum  $X$  zerlegt disjunkt

$$X = X_f \cup X_n \quad (\dagger)$$

in den Raum  $X_f$  der  $G$ -fixen und den Raum  $X_n$  der *neutralen* Sudokus, die nur vom neutralen Element von  $G$  festgelassen werden. Offenbar ist für ein fixes bzw. neutrales Sudoku auch die ganze Bahn von gleicher Art. Daher ist  $(\dagger)$  eine Zerlegung von  $G$ -Mengen. Der bisherige Stand ist: Über die Fixe wissen wir viel, über die Neutralen wenig, jedenfalls was die Methoden der Kapitel 1 und 2 angeht. Dabei ist der Fixanteil von  $X$  verschwindend gering. Immerhin gibt es ein Kriterium, um Neutrale aus ihrer numerischen Form zu erkennen. Was die Aktion der Sudokugruppe  $G$  auf  $X$  angeht, können die bisherigen Ergebnisse als erschöpfend angesehen werden.

Um weitere Erkenntnisse zu gewinnen, wird die Automorphismengruppe erweitert. Die symmetrische Gruppe  $S_9$  operiert auf den Ziffern  $1, \dots, 9$  eines Sudokus und führt es wieder in solche über. Es ist entscheidend, dass diese Operation als Transformationsgruppe  $Z$  auf den Streifen und Reihen der Sudokus aufgefasst wird, nur so ist sie mit der Wirkung von  $G$  vergleichbar.  $G$  und  $Z$  sind elementweise vertauschbar. Die *Mischgruppe*

$$G^* = G \times Z$$

wirkt auf  $X$  und macht  $(\dagger)$  zu einer Zerlegung von  $G^*$ -Mengen.

Um die Wirkung von  $G^*$  auf  $X$  zu verstehen, müssen tiefere Methoden angewendet werden. Es handelt sich hier im Wesentlichen um die Lösungen der *Allgemeinen Fixgleichung*

$$\tau w A = \alpha A \quad \text{für } A \in X. \quad (\ddagger)$$

Hierbei ist  $\alpha \in Z$  ein Ziffernoperator und  $w \in T^*$  ein lokaler Operator. Als „Leitoperatoren“  $\tau$  werden hier alle rein-globalen Operatoren aus  $H^*$  und die Transposition  $t$  zugelassen. Algebraisch gesehen ist  $(\ddagger)$  ein kombinatorisches Eigenwert-Problem mit Eigenwert  $\alpha$ .

Für welche Tripel  $(\tau, w, \alpha)$  ist  $(\ddagger)$  lösbar und wie viele Lösungen gibt es? Was sind die strukturellen Bindungen der Operatoren des Tripels als notwendige Lösungsbedingungen? Welche strukturellen Eigenschaften ergeben sich für die Lösungen  $A$ ?

Hierzu gibt es in der Literatur ein wichtiges Ergebnis von *Russel-Jarvis*. Sie bestimmen die Anzahl der „essentially different“ Sudokus. Genauer werden mit Hilfe des Gruppen-Paketes GAP die Konjugationsklassen von  $G$  bestimmt und die zugehörigen Anzahlen der Fixsudoku „up to relabelling“. Es werden also Lösungsanzahlen

von  $(\#)$  bestimmt unter Vernachlässigung von  $\alpha$ . Es gibt 27 Konjugationsklassen, die *Semifixoperatoren* enthalten, d. h. die  $(\#)$  lösen mit irgendeinem  $\alpha \in Z$ .

In Kapitel 4 werden obige strukturelle Fragen gelöst. Die Lösungen  $A$  erfüllen an einer Auswahl von Blockpositionen lokale Fixgleichungen, deren Lösungsblocks  $A$  bestimmen. Die entstehenden Klassen von Tripeln  $(\tau, w, \alpha)$  werden in eine 1 : 1-Beziehung zu Konjugationsklassen von  $G^*$  gesetzt. In der überwiegenden Zahl der Fälle ist zu  $(\tau, w)$  nur *ein*  $\alpha$ -Typus möglich. Einige Ausnahmefälle werden in Abschnitt 4.5 abschließend behandelt. Computergestützte Methoden werden nicht angewendet.

Die abschließenden Ergebnisse in Kapitel 4 führen zu einem notwendigen Kriterium für ein Sudoku, um eine Eigenwert-Gleichung  $(\#)$  zu erfüllen. Solche Sudokus sind die *algebraischen*. Für die Erkennung der nicht-algebraischen, der *transzententalen* Sudokus ergibt sich dann ein hinreichendes Kriterium. Die Transzendenten stellen mit über 999,948 Promille die überwältigende Mehrheit aller Sudokus dar (Abschnitt 6.8).

In Kapitel 3 wird ein Spezialfall von  $(\#)$  mit einfacheren Methoden gelöst, nämlich die Wirkung von  $G^*$  auf die Teilmenge  $X_f$  aller unter  $G$  fixen Sudokus. Hier können die  $G^*$ -Mengen auf  $X_f$  vollständig klassifiziert werden, mit einer Methode, der die kleine Idee der *Ziffernwirkung* zugrunde liegt. Der Begriff erklärt sich selbst: Ein  $G$ -Operator hat Ziffernwirkung, wenn er auf einem Sudoku  $A$  wie ein Operator aus  $Z$  wirkt.

In Teil II spielen *Dominographen* die entscheidende Rolle. Sie entstehen auf den 6 Streifen eines Sudokus durch einen etwas komplizierten Prozess, der einleitend nur grob beschrieben werden kann. Jeder Block eines Streifens übt auf die anderen beiden Blöcke eine gewisse Wirkung aus, die auf diesen zu einer Dominobelegung führt. Das heißt: Jedes der 18 Kästchen des Doppelblocks trägt ein bestimmtes *Domino*  $ij$  aus Ziffern aus  $\{1, \dots, 9\}$  derart, dass eine der beiden Ziffern zur ursprünglichen Belegung durch das Sudoku gehört. Ein Einzeldomino  $ss = s$  bestimmt eine *singuläre Ecke*. Die Kanten werden vertikal und horizontal gezogen nach dem Anlageprinzip von Dominos: 2 Ecken, bestimmt durch die belegenden Dominos  $ij$  und  $i'j'$ , sind *benachbart* genau dann, wenn 2 der Ziffern gleich sind. Es entsteht ein *Dominograph* auf einem Raster von 18 Ecken, vertikal oder horizontal angeordnet, das durch die beiden Blöcke durch eine natürliche Trennlinie in 2 Hälften von 9 Ecken geteilt wird. In Längsrichtung sind nur Kanten zwischen den beiden Hälften zulässig.

Die Eigenschaften der *konkreten* Dominographen, basierend auf den Dominobelegungen, führen zur Definition der *abstrakten D-Graphen*, indem nur die Kanten übernommen werden. Die Isomorphismen von *D*-Graphen werden auf *Isometrien* beschränkt, die ihre metrische Art respektieren. Sie bestehen aus gewissen Zeilen- und Spaltenvertauschungen, die *D*-Graphen wieder in solche überführen. Die Isometrien bilden die Isometriegruppe.

Das *Klassifikationsproblem* der *D*-Graphen ist gelöst:

Es gibt genau 39 Isometrieklassen von *konkreten D*-Graphen, und sie sind explizit bekannt. Ihre Graphiken können hergestellt werden, sie werden in einigen Beispielen in Kapitel 6 und im Anhang anschaulich gemacht.

Wie zu erwarten, ist die Lage bei *abstrakten D*-Graphen erheblich vielfältiger. Es stellt sich heraus, dass hier mindestens 367 950 Isomorphieklassen vorliegen. Für die Sudokutheorie haben die abstrakten *D*-Graphen aber keine Auswirkungen.

Ein *D*-Graph hat – wie im Fall gewöhnlicher Graphen – eine eindeutige disjunkte Zerlegung in zusammenhängende Untergraphen, die *Komponenten*. Diese sind *singulär*, wenn sie eine singuläre Ecke enthalten, sonst *regulär*.

Auch hier ist das *Klassifikationsproblem* gelöst:

Die Komponenten von konkreten *D*-Graphen sind ihrer Struktur und Anzahl nach explizit bekannt. Auch hier veranschaulichen Graphiken den Kantenverlauf. Es sei erwähnt, dass bei *D*-Graphen eine Komplikation zwischen ihren Isometrien und denen der Komponenten auftritt. Gewöhnliche Graphen sind isomorph genau dann, wenn ihre Komponenten es sind. Das ist bei *D*-Graphen nicht immer der Fall.

Zu Beginn von Kapitel 6 wird darauf kurz eingegangen.

Ein computerfreier Beweis der *D*-Graphen-Klassifikation wird in Kapitel 7 geführt, wobei auch die Diskrepanz zwischen Isometrie und komponentenweiser Isometrie deutlich wird. Die Klassifikation gelingt durch gewisse Graphenpaare, die sog. *Diagramme*, die an die Dynkin-Diagramme erinnern. Sie stellen den ästhetischen Abschluss des Buches dar.

Wenn jeder Streifen, vertikal oder horizontal, je 3 *D*-Graphen trägt, hat man 18 *D*-Graphen, die sog. *Zweige*, die einem Sudoku zugeordnet sind. Die Zweige, an bestimmten Stellen des Rasterschemas positioniert, bilden den *Stamm* des Sudokus.

Die Komponentenzerlegung kann für jedes Sudoku per Hand hergestellt werden, indem man die Dominobelegungen zu einem Streifen herstellt. Wird dies für alle 18 Zweige durchgeführt, so stellt der Stamm die explizite graphentheoretische Struktur des Sudokus dar. In einer Reihe von Beispielen wird das in Kapitel 6 durchgeführt.

Nun haben konkrete *D*-Graphen über ihre strukturelle Bedeutung hinaus noch eine andere Funktion: Sie produzieren sog. *Clans* zu den Sudokus durch gewisse Schaltprozesse in ihren Komponenten. Durch Einschränkung tragen die Komponenten Dominobelegungen. Jedes Domino enthält genau eine Ziffer von der Ausgangsbelegung durch das Sudoku. Diese ersetze man nun durch die anderen komplementären Ziffern auf allen Ecken der Komponente. Man erhält ein neues Sudoku aber nur dann, wenn die Komponente *regulär* ist, also keine Singularitäten vorliegen. Das neue Sudoku ist ein Clanmitglied.

Dieser Elementarprozess wird nun ausgedehnt auf *simultane* Schaltungen in gewissen Figuren von Zweigen, die Vertäglichkeitsbedingungen erfüllen müssen. Es entstehen weitere Sudokus und damit Clans, die von der Art der Figuren, den sog. *Gestalten*, abhängen. Die Vereinigung aller Teilclans ergibt dann den *Großclan* des Sudokus.

Alle diese Prozesse sind vollständig konstruktiv: Die Clanzahlen werden in *universellen* Formeln dargestellt, die für alle Sudokus gelten. Bei den Anzahlen der Großclans können beide Extreme, Maximum und Minimum, angegeben werden:

Es gibt total-singuläre Sudokus, etwa ein bestimmtes Sondersudoku, deren Großclan nur aus dem Clangründer besteht. Auf der anderen Seite erreichen total-reguläre Superfixe maximale Clangröhren von Mitgliedern.

Abschließend soll noch ein Problem erwähnt werden, das ganz am Anfang der Untersuchungen stand, das *Parametrisierungsproblem*. Die 3 Blöcke der Blockdiagonalen sind keinerlei Bedingungen unterworfen, wenn man davon absieht, dass alle 9 Ziffern im Block vorkommen müssen. Die Blockdiagonale bietet sich also als *freier Parameterraum* an. Die Sudokus sind dann parametrisiert, wenn jede Blockdiagonale zu einem Sudoku fortgesetzt werden kann. A. Schönhage hat dieses Problem positiv gelöst, und sogar die Vielfachheiten bestimmt, also die Anzahl der Fortsetzungen zu festem Parameter. Die Clantheorie hat darüber hinaus ergeben, dass gewisse Clans in der Faser über jedem Parameter liegen.

Der Text ist mathematisch elementar und voraussetzungslos, kein Satz der Gruppentheorie und der Graphentheorie findet Anwendung. Nur eine gewisse Vertrautheit mit den elementaren Grundlagen zu Gruppen sollte vorliegen oder erworben werden. Eine kurze Einführung in die verwendeten Begriffe wird nachstehend gegeben. Der Leser wird bei Lektüre feststellen, dass der Stoff ausführlich dargestellt wird. Es wäre erfreulich, wenn ein Interesse an Gymnasien geweckt werden könnte.

## Notationen

In einer Gruppe  $G$  mit Elementen  $a, b, c \dots$  ist die Konjugation mit einem Element  $c$  eine wichtige Operation

$$a^c = c^{-1}ac \quad \text{mit Relation} \quad (ab)^c = a^c b^c.$$

Die Zuordnung  $a \mapsto a^c$  stiftet einen inneren Automorphismus von  $G$ . Für eine Untergruppe  $U$  von  $G$  (in Zeichen  $U < G$ ) ist  $U^c = \{u^c \mid u \in U\}$  konjugiert zu  $U$ .

$U$  ist Normalteiler von  $G$  ( $U \triangleleft G$ ), wenn  $U^c = U$  gilt für alle  $c$  in  $G$ .

Die Gruppe  $G$  ist semidirektes Produkt eines Normalteilers  $N$  mit einer Untergruppe  $U$  – Schreibweise  $G = N \rtimes U$  – wenn gilt

- (a)  $N \cap U = \{1\}$  und
- (b)  $G = N U$ .

$N$  heißt der Kern,  $U$  das Komplement. In (b) ist  $N U = \{ab \mid a \in N, b \in U\}$  das Kompositum, das Einselement wird durchgehend mit 1 bezeichnet. Wenn auch  $U$  Normalteiler in  $G$  ist, dann folgt aus (a), dass  $N$  und  $U$  kommutieren, also elementweise vertauschbar sind  $ab = ba$ . Dann ist  $G$  das direkte Produkt

$$G = N \times U.$$

Bei einer Abbildung  $\varphi: X \rightarrow Y$  zweier Mengen wird für das Bild von  $x \in X$  einfach  $\varphi x$  ( $= \varphi(x)$ ) und bei Hintereinanderausführung zweier Abbildungen  $\varphi$  und  $\psi$  einfach  $\psi \varphi x$  geschrieben. Wo auch immer möglich werden also Klammern wegge lassen.

Ist  $G$  eine Gruppe von Abbildungen von  $X$  in sich, so operiert  $G$  auf  $X$ . Dabei kann es durchaus passieren, dass gewisse Gruppenelemente  $\neq 1$  die Menge festlassen, also trivial operieren. Lassen alle Gruppenelemente  $X$  fest, so operiert  $G$  trivial.

Die Gruppenelemente einer operierenden Gruppe werden im Text Operatoren genannt. Im Fall von semidirekten Produkten operiert  $U$  auf  $N$  durch Konjugation:

Mit  $u \in U: N \rightarrow N^u = N$  vermöge  $a \mapsto a^u$  für  $a \in N$ .

Ist die Operation trivial, so liegt ein direktes Produkt vor.

Die Sudokugruppe  $G$  operiert auf dem Raum  $X$  aller  $9 \times 9$ -Sudokus.



---

## **Teil I: Klassifikation der Fixsudokus**



# 1 Die Sudokugruppe im 9er-Fall

Ein *Sudoku* ist eine mit den Ziffern  $1, 2, \dots, 9$  belegte  $9 \times 9$ -Matrix  $A$ , die mit einem *Rasterschema* versehen ist

$$A = \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{matrix}, \quad (1.1)$$

bestehend aus 9  $3 \times 3$ -Blöcken  $A_{ij}$ . Die Verteilung der Ziffern genügt den *Sudoku-Bedingungen*:

Die Reihen (Zeilen und Spalten) von  $A$  und alle Blöcke  $A_{ij}$  enthalten *alle* Ziffern  $1, \dots, 9$ , oder äquivalent, keine Ziffer tritt darin mehrfach auf.

Die Referenz auf den 9er-Fall wird fortan weggelassen. Der Raum aller Sudokus wird mit  $X$  bezeichnet.

In allen mathematischen Bereichen, in denen Strukturen eine Rolle spielen, bietet sich eine Gruppe von Transformationen an – Automorphismengruppe oder Symmetriegruppe – deren Operatoren die Struktur erhalten. Diese Gruppen liefern oft Erkenntnisse über die strukturellen Objekte. Diese Situation liegt auch bei den Sudokus vor.

Es ist intuitiv leicht, Permutationen der Eingänge  $1, \dots, 9$  anzugeben, die Sudokus wieder in Sudokus überführen. Um zu einer intrinsischen Definition der Sudokugruppe zu gelangen, sind 2 Gesichtspunkte zu beachten:

- Die Sudokugruppe operiert auf den Positionen.
- Sie sollte die geometrische Struktur berücksichtigen.

Diese besteht aus folgenden Figurenarten:

- den Streifen von 3 benachbarten Blöcken, den Horizontalstreifen HS und den Vertikalstreifen VS

$$\begin{matrix} & & a \\ abc & & \text{und} & b \\ & & & c \end{matrix}$$

- den Reihen (Zeilen und Spalten)
- den 9 Blöcken.

Eine *zulässige Transformation* (auch *Operator*) ist eine Permutation der Einträge eines Sudokus, die die geometrische Struktur respektiert, also

- Streifen in Streifen, Reihen in Reihen, Blöcke in Blöcke überführt,
- die Parallelität erhält, soll heißen: wird ein horizontaler Streifen in einen vertikalen überführt, so auch die beiden parallelen Streifen.

Da Reihen in Reihen und Streifen in Streifen übergehen, sind es notwendig nur die Reihen *innerhalb* eines Streifens, die permutiert werden. Dabei werden auch die gleichen Reihenvertauschungen in den 3 *Streifenblöcken* vorgenommen. Ein zulässiger Operator führt Sudokus wieder in solche über.

Die Hintereinanderausführung von zulässigen Transformationen ist wieder zulässig. Die zulässigen Transformationen bilden also eine Gruppe, die *Sudokugruppe*  $G$  (9-ten Grades).  $G$  operiert auf dem Raum  $X$ ,  $X$  ist also eine  $G$ -Menge.

Ein Operator  $\varphi \in G$  heißt *lokal*, wenn er im Rasterschema die Lage aller Streifen festlässt.  $\varphi$  bewirkt dann also Permutationen der Reihen in den Streifen, permutiert also nur die Zeilen in den Horizontalstreifen HS und die Spalten in den Vertikalstreifen VS.

Die Menge aller lokalen Operatoren ist eine Untergruppe von  $G$ , die *lokale Sudokugruppe*  $T^*$ .

Ein lokaler Operator  $\varphi \in T^*$  transformiert auch jeden Block  $A_{ij}$  in sich, induziert also auf diesem eine Permutation der Zeilen und/oder Spalten. Denn  $\varphi$  transformiert den  $i$ -ten Horizontalstreifen und  $j$ -ten Vertikalstreifen in sich, also auch die Schnittmenge  $A_{ij}$ . Somit ist die Einschränkung von  $T^*$  auf  $A_{ij}$  eine von  $i, j$  unabhängige Permutationsgruppe  $\Gamma_0$  eines Blockes, genauer ist sie ein Gruppenepimorphismus

$$T^* \rightarrow \Gamma_0$$

auf die Gruppe aller Reihenpermutationen eines Blocks, die *Blockgruppe*  $\Gamma_0$ .

Es fällt die Ähnlichkeit auf zwischen dem *Blockraster* als quadratische Anordnung von 9 Blöcken und dem *Eckenraster* eines Blocks als quadratische Anordnung von 9 Ecken: Den Zeilen und Spalten im Block entsprechen die horizontalen und vertikalen Streifen. Nummeriert man in beiden Rasterschemata die Zeilen bzw. Horizontalstreifen  $HS_i$  von oben nach unten und die Spalten und Vertikalstreifen  $VS_j$  von links nach rechts:

$$\begin{array}{ccccc} & & & \text{Sp.1} & \text{Sp.2} & \text{Sp.3} \\ b = \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \text{HS}_1 & \text{Zeile 1} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \text{HS}_2 & \text{Zeile 2} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \text{HS}_3 & \text{Zeile 3} \end{matrix} & \text{bzw. } & \text{VS}_1 & \text{VS}_2 & \text{VS}_3 \end{array} \quad (1.2)$$

so werden die respektiven Vertauschungen der Reihen bzw. Streifen durch die Symmetrische Gruppe  $S_3$  von  $\{1, 2, 3\}$  beschrieben.

Dazu wird die Permutationsgruppe der Zeilen von  $b$  mit  $S_3$  identifiziert, die Gruppe der Spaltenpermutationen mit einem zu  $S_3$  isomorphen Exemplar  $S_3^\circ$ :

$$S_3 \longrightarrow S_3^\circ \quad \text{vermöge} \quad p \mapsto p^\circ \quad \text{mit Setzung} \quad p^{\circ\circ} = p. \quad (1.3)$$

Zeilen- und Spaltenpermutationen sind vertauschbar und disjunkt, die Blockgruppe ist daher direktes Produkt

$$\Gamma_0 = S_3 \times S_3^\circ.$$

Jedem  $p \in S_3$  und  $q^\circ \in S_3^\circ$  entspricht eine Permutation  $\pi$  der Horizontalstreifen bzw.  $\omega^\circ$  der Vertikalstreifen vermöge

$$\pi HS_i = HS_{\pi i}, \quad \omega^\circ VS_i = VS_{\omega^\circ i}.$$

Beide Operationen  $\pi$  und  $\omega^\circ$  sind zulässig. Die Zuordnung  $(p, q^\circ) \mapsto (\pi, \omega^\circ)$  stiftet einen Isomorphismus

$$\Gamma_0 = S_3 \times S_3^\circ \longrightarrow H \times H^\circ = H^* \quad (1.4)$$

der Blockgruppe auf die *Streifenpermutationsgruppe*  $H^*$  in  $G$ .  $H^*$  ist die *rein-globale* Sudokugruppe. Denn auf ein Sudoku angewandt permutiert ein Operator aus  $H^*$  die Streifen *der Lage nach* und lässt deren „Inhalt“, die Ziffernbelegung fest. Die Aktion enthält keine „lokalen Anteile“.

Auch die lokale Sudokugruppe  $T^*$  zerlegt in ein direktes Produkt aus Gruppen  $T$  und  $T^\circ$ , die die Zeilen in den Horizontalstreifen bzw. die Spalten in den Vertikalstreifen permutieren

$$T^* = T \times T^\circ.$$

Sei  $T_i$  die Gruppe aller Zeilenpermutationen im  $i$ -ten Horizontalstreifen  $HS_i$  und  $T_j^\circ$  die analoge Bildung zum  $j$ -ten Vertikalstreifen  $VS_j$ . Dann gilt offenbar

$$T = T_1 \times T_2 \times T_3 \quad \text{und} \quad T^\circ = T_1^\circ \times T_2^\circ \times T_3^\circ.$$

Wir sprechen von den *dualen* Gruppen  $T^\circ, H^\circ$  zu den „horizontalen“ Gruppen  $T, H$ .

Die lokale Gruppe  $T^*$  ist Normalteiler in der Sudokugruppe  $G$ . Sei  $\varphi \in G$  und  $w \in T^*$ . Dann haben  $\varphi$  und  $w\varphi$  den gleichen Effekt auf die Streifen, also ist  $\varphi^{-1}w\varphi$  wieder lokal. Konjugation mit  $G$  lässt also  $T^*$  stabil. Da  $T^* \cap H^*$  trivial ist, liegt für das Erzeugnis ein semidirektes Produkt vor:

$$[T^*, H^*] = T^* \rtimes H^*.$$

Sei  $G_0$  die Untergruppe von  $G$ , deren Operatoren die Richtungen der Streifen respektieren, die also horizontale bzw. vertikale Streifen in solche der gleichen Art transportieren.  $G$  enthält offenbar  $T^*$  und  $H^*$ . Sei  $\varphi \in G$ . Dann existiert genau ein  $\psi \in H^*$ , das die gleiche Streifenoperation wie  $\varphi$  ausführt. Also ist  $\psi^{-1}\varphi = w$  lokal, somit

$$G_0 = T^* \rtimes H^*.$$

Wegen der Aufspaltung der Gruppen  $T^*$  und  $H^*$  in einen horizontalen und den dualen Bestandteil gilt

$$G_0 = (T \rtimes H) \times (T^\circ \rtimes H^\circ). \quad (1.5)$$

Zu klären ist, wie  $H$  auf  $T$  durch Konjugation wirkt.

Die Zeilen in den Horizontalstreifen sind durch ihre Abschnitte in den Blöcken bestimmt. Ein Blockoperator  $g \in S_3$  legt also eindeutig einen Operator  $g_i$  in  $T_i$  fest, der

die Zeilen im Horizontalstreifen  $\text{HS}_i$  entsprechend  $g$  permutiert. Die durch  $g \mapsto g_i$  entstehenden Isomorphismen  $S_3 \simeq T_i$  sind gekoppelt: Für jedes  $\tau \in H$  bewirkt  $g_i^\tau = \tau^{-1}g_i\tau$  die entsprechende Zeilenpermutation im Horizontalstreifen  $\text{HS}_{\tau^{-1}i}$ . Somit gilt

$$g_i^\tau = g_{\tau^{-1}i} \in T_{\tau^{-1}i} \quad \text{für alle } i \quad (1.6)$$

und

$$T_i^\tau = \tau^{-1}T_i\tau = T_{\tau^{-1}i} \quad \text{für alle } i, \quad (1.6')$$

analog im dualen Fall.

### Die Transposition

Auf ein Sudoku angewandt vertauscht  $t$  zuerst die  $i$ -ten horizontalen mit den  $i$ -ten vertikalen Streifen, und in jedem Block in gleicher Weise Zeilen mit Spalten.

$t$  ist also zulässig, gehört der Sudokugruppe an. Und  $t$  wirkt *lokal* und *global*, ist also ein *gemischter* Operator. Für die lokalen und rein-globalen Gruppen bedeutet dies die Konjugation

$$T_i^t = T_i^\circ \quad \text{und} \quad H^t = H^\circ.$$

Die Konjugation mit  $t$  transformiert also  $T^*$  und  $H^*$  in sich. Und damit wird gerechtfertigt, von *Dualität* zu sprechen.

$t$  ist eine universelle Matrixoperation, die auf Blöcken wie auf Sudokus gleich bezeichnet wird. So ist  $t$  auch eine Operation auf den Blöcken, die zur Blockgruppe hinzugenommen werden muss

$$\Gamma = [\Gamma_0, t] \quad \text{die volle Blockgruppe.} \quad (1.7)$$

Man erkennt leicht, dass  $G$  von  $G_0$  und  $t$  erzeugt wird. Sei  $\varphi$  ein Operator, der horizontale – nach Definition also alle 3 horizontalen – Streifen in vertikale überführt.  $t\varphi$  macht dies rückgängig, also ist  $t\varphi$  in  $G_0$ .

Es wurde gezeigt

**Satz 1.1.** *Die Sudokugruppe ist iteriertes semidirektes Produkt aus dem lokalen Normalteiler  $T^*$ , der rein-globalen Gruppe  $H^*$  und der Transposition:*

$$G = G_0 \rtimes [t] \quad \text{und} \quad G_0 = T^* \rtimes H^*. \quad (1.8)$$

Die Konjugation von  $H^*$  auf  $T^*$  erfolgt nach Formel (1.6).

Die Konjugation mit  $t$  bewirkt die Dualitätsisomorphismen

$$T \simeq T^\circ \quad \text{und} \quad H \simeq H^\circ. \quad (1.9)$$

Die Gruppen  $T^* = T \times T^\circ$  und  $H^* = H \times H^\circ$  haben die Ordnungen  $6^6$  bzw.  $6^2$ .

Die Sudokugruppe hat also die Ordnung

$$\#G = 2 \cdot 6^8 = 3\,359\,232. \quad (1.10)$$

Der Sachverhalt des Satzes ist wohlbekannt (siehe etwa [14]). Die Gruppe  $G_0$  ist direktes Produkt von 2 sog. *Kranzprodukten* der  $S_3$ , mit dem typischen Konjugationsverhalten (1.6). Die Transposition  $t$  vertauscht die beiden Kranzprodukte.

### Die $S_3$

Die Sudokugruppe setzt sich aus Gruppen zusammen, die alle zur symmetrischen Gruppe  $S_3$  kanonisch isomorph sind. Die Erzeugung von  $S_3$  ist denkbar einfach, sie besteht aus den

- 3er-Zyklen  $s = (1\ 2\ 3), s^{-1} = (3\ 2\ 1)$  und den
- 2er-Zyklen  $r_i = (jk)$  mit  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ .

Es gelten die *Relationen*

- (a)  $s^3 = 1, r_i^2 = 1, s^{r_i} = s^{-1}$  für alle  $i$ .
- (b) Die Konjugation mit  $[s]$  permutiert die  $r_i$  transitiv
- (c)  $sr_1 = r_3, sr_2 = r_1, sr_3 = r_2$ .  
Also permutiert auch die Multiplikation mit  $s$  die  $r_i$  transitiv.
- (d)  $r_i^{r_j} = r_j r_i r_j = r_k$  mit  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ .

Alle 4 Regeln finden Anwendungen. Zu (d) bemerken wir:

Da die  $r_i$  nicht vertauschbar sind, ist  $r_i^{r_j} \neq r_i$ . Aus  $r_i^{r_j} = r_j$  folgt der Widerspruch  $r_i = r_j$ .

Die Relationen lassen sich leicht bestätigen, entweder geometrisch oder durch Zykelrechnungen.

### Erzeugung von $\Gamma_0, H^*$ und $T^*$

Bei der Interpretation von  $S_3$  als Permutationsgruppe der Blockzeilen nach (1.3) verschiebt  $s = (1\ 2\ 3)$  die Zeilen zyklisch von oben nach unten, und  $r = (1\ 3)$  vertauscht die obere mit der unteren Zeile. Damit ist  $r$  geometrisch als die Spiegelung an der Mittellinie ausgezeichnet vor den anderen 2er-Zyklen. Die Erzeugung von  $\Gamma_0$  ist also

$$\Gamma_0 = [s, r] \times [s^\circ, r^\circ].$$

Der Isomorphismus (1.4) bestimmt dann Bilder

$$s \mapsto \sigma, \quad r \mapsto \rho \quad \text{und} \quad s^\circ \mapsto \sigma^\circ, \quad r^\circ \mapsto \rho^\circ,$$

die auf den Streifen die analogen Permutationen bewirken:

$$\begin{aligned} H = [\sigma, \rho], \quad H^\circ = [\sigma^\circ, \rho^\circ] & \quad \text{mit} \\ \sigma^3 = 1, \quad \rho^2 = 1, \quad \sigma^\rho = \sigma^{-1}, & \quad \text{etc. dual.} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Von Bedeutung sind noch gewisse Diagonalgruppen, die man durch folgende isomorphe Zuordnungen erhält

$$s, r \mapsto s' = ss^\circ, r' = rr^\circ \quad \text{bzw.} \quad \sigma, \rho \mapsto \sigma' = \sigma\sigma^\circ, \rho' = \rho\rho^\circ.$$

Wir heben dies in folgendem Diagramm hervor:

$$\begin{array}{ccc} S_3 & \rightarrow & S'_3 \leq \Gamma_0 = S_3 \times S_3^\circ \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \rightarrow & H' \leq H^* = H \times H^\circ. \end{array} \tag{1.13}$$

Dabei sind  $S'_3 = [s', r']$  und  $H' = [\sigma', \rho']$  die *Diagonalen* in  $\Gamma_0$  bzw. in  $H^*$ .

Alle Abbildungen in (1.13) sind Isomorphismen.

Die Wirkung von  $T^*$  wird am einfachsten durch eine Operatormatrix beschrieben. Seien  $g = (g_1, g_2, g_3)$  und  $h^\circ = (h_1^\circ, h_2^\circ, h_3^\circ)$  Tripel von Zeilen- bzw. Spaltenvertauschungen aus  $S_3$  bzw.  $S_3^\circ$ . Die Operatormatrix  $w = (w_{ij}) = (g_i h_j^\circ)$  operiert blockweise auf den Sudokus  $A$ :

$$w \cdot A = (w_{ij} A_{ij}) = (g_i h_j^\circ A_{ij}). \tag{1.14}$$

Man erkennt, dass in dem  $i$ -ten Blockstreifen eine konstante Blockzeilenpermutation  $(g_i, g_i, g_i)$  bzw.  $(h_i^\circ, h_i^\circ, h_i^\circ)$  angewandt wird, also ein Operator aus  $T_i$  bzw.  $T_i^\circ$ . Hiermit ist die allgemeine Wirkung von  $T^*$  auf Sudokus festgelegt.

Die Beschreibung durch das „allgemeine Element“ von  $T^*$  ist etwas sperriger.

Hier muss für den Operator  $g_i = (g_i, g_i, g_i)$  festgelegt werden, in welchem Streifen operiert wird, etwa

$_k g_i$  operiert als  $g_i$  auf dem  $k$ -ten Streifen.

Das allgemeine Element von  $T^*$  ist dann

$$w = \Pi_i {}_i g_i \quad \Pi_j {}_j h_j^\circ. \tag{1.14'}$$

Beide Konzepte haben den gleichen Effekt.

Im Folgenden von besonderer Bedeutung sind die *konstanten Operatoren*:

Als Operatoren

$${}^*s = (s_{ij}) \quad \text{mit} \quad s_{ij} = s \quad {}^*r = (r_{ij}) \quad \text{mit} \quad r_{ij} = r \quad \text{für alle } i, j, \tag{1.15}$$

dual analog. Oder

$${}^*_s = \Pi_i {}_i s \quad \text{und} \quad {}^*_r = \Pi_i {}_i r. \tag{1.15'}$$

## Induzierte Operatoren – Diedergruppe

Es gibt noch eine weitere Art von Sudokuoperatoren. Der geometrische Hintergrund ist die Symmetriegruppe des Quadrats, die *Diedergruppe*  $D$  der Ordnung 8. Sie besteht aus allen Drehungen und Spiegelungen des Quadrats. Sie wird erzeugt von der Drehung  $d$  um  $90^\circ$  (mathematisch positiv) und der Spiegelung  $t$  an der Hauptdiagonalen:

$$D = [d, t]$$

mit den Relationen

$$d^4 = 1, \quad t^2 = 1, \quad d^t = tdt = d^{-1}.$$

$D$  besteht aus allen Drehungen  $d, d^2, d^{-1}$ , den Spiegelungen  $t, t^\circ$  an den Diagonalen, den Spiegelungen an den Mittellinien und der Identität 1.

Diese geometrisch motivierte Diedergruppe hat 2 Realisierungen im Sudoku-Setting, als Untergruppe der Blockgruppe  $\Gamma$  und der Sudokugruppe  $G$ .

Im Fall der Blockgruppe sind die Spiegelungen an den Mittellinien gerade die Reihenvertauschungen  $r$  und  $r^\circ$  aus  $\Gamma_0$ .

**Lemma 1.1** (Blockgruppe). *Die Elemente der Diedergruppe  $D$  in  $\Gamma$  genügen den folgenden Relationen*

- (a)  $d = rt = tr^\circ,$
  - (b)  $d^t = d^{-1}, \quad r^t = r^\circ$
  - (c)  $rr^\circ = r^\circ r, \quad tt^\circ = t^\circ t$
  - (d)  $d^2 = tt^\circ = rr^\circ.$
- (1.16)

Ferner gilt

- (e)  $s^t = s^\circ, r^t = r^\circ$
- (f)  $s^d = s^{\circ -1}, r^d = r^\circ.$

Die 2-Sylowgruppe der Blockgruppe  $\Gamma$  ist eine Diedergruppe, und nach (e) und (f) ist die 3-Sylowgruppe  $[s, s^\circ]$  Normalteiler in  $\Gamma$ . Also ist  $\Gamma$  semidirektes Produkt

$$\Gamma = [s, s^\circ] \rtimes D \quad (1.16')$$

aus seinen Sylowgruppen.  $D$  ist der Stabilisator des Eckenquadrats.

**Beweis.** Bei guter Anschauung lassen sich die Relationen geometrisch erkennen. Man kann sie aber auch leicht rechnerisch bestätigen. Dazu werden die Ecken des Quadrats im Uhrzeigersinn von 1 bis 4 nummeriert, beginnend mit der linken oberen Ecke. Dadurch hat  $D$  eine Darstellung als Ziffernpermutationsgruppe mit den Erzeugenden

$$d = (1\ 2\ 3\ 4), \quad t = (2\ 4), \quad t^\circ = (1\ 3), \quad r = (1\ 4)(2\ 3), \quad r^\circ = (1\ 2)(3\ 4).$$

Durch Ausmultiplikation erhält man die Relationen. Die Drehung  $d = rt$  liegt also in der Blockgruppe, und (f) folgt aus (a)–(d).  $\square$

## Der Sudokufall

Man stellt zunächst fest, dass die Drehung  $d$  um  $90^\circ$  zulässig ist, also  $G$  angehört.

Denn  $d$  dreht einmal alle Horizontalstreifen in die vertikale Lage und dann noch jeden Block um  $90^\circ$ .  $G$  enthält also die Diedergruppe  $D = [d, t]$ .

Die 2-Sylowgruppe von  $\Gamma$  ist also isomorph zur globalen Diedergruppe. Dabei entsprechen die Spiegelungen  $r, r^\circ$  den globalen Spiegelungen  $\mu, \mu^\circ$  an den Mittellini- en.  $\mu$  vertauscht zuerst den 1. Horizontalstreifen mit dem 3. und in diesen dann die 1. und 3. Zeilen, also gilt

$$\mu = \rho^* r, \quad \mu^\circ = \rho^\circ * r^\circ. \quad (1.17)$$

**Korollar.** *Mit der globalen Diedergruppe*

$$D = \{1, d, d^2, d^{-1}, t, t^\circ, \mu, \mu^\circ\}$$

*besteht die kanonische Isomorphie*

$$\Gamma = [s, s^\circ] \rtimes Syl_2 \Gamma \longrightarrow [\sigma, \sigma^\circ] \rtimes D. \quad (1.18)$$

*Daher gelten global die entsprechenden Relationen aus Lemma 1.1, wobei die  $r, r^\circ$  und  $s, s^\circ$  durch die  $\mu, \mu^\circ$  und  $\sigma, \sigma^\circ$  zu ersetzen sind, z.B.*

$$d = \mu t = t \mu^\circ, \quad d^2 = tt^\circ = \mu \mu^\circ = \rho \rho^\circ * r^\circ * r^\circ. \quad (1.18')$$

**Bemerkung 1.1.** Die Operatoren der Diedergruppe sind genau die *induzierten* Operatoren, die erst eine Operation *an* den Blöcken, und dann die gleiche Operation *in* den Blöcken ausführen. Sie wirken also lokal-global.

Wir haben hier einen geometrischen Zugang zur Sudokugruppe gewählt. Man kann aber auch ganz anders herangehen, wie A. Schönhage auf seiner Homepage [17] darlegt.

Es sei bemerkt, dass Struktur und Ordnung der Sudokugruppe auch für beliebige quadratische Reihenzahlen unschwer bestimmt werden können.

## 2 Fixesudokus und Bahnen

### 2.1 Blockschemata

Hauptanliegen dieses Kapitels 2 ist das Studium der Wirkung der Sudokugruppe  $G$  auf den Raum  $X$  aller Sudokus. Von besonderem Interesse sind die  $G$ -Bahnen

$$G.A = \{\varphi A | \varphi \in G\}$$

von Sudokus  $A$  und deren Länge. Bei der numerischen Komplexität der 9-er Sudokus kann man homogene Wirkung von  $G$ , d. h. konstante Längen der Bahnen nicht erwarten. So werden maximale Bahnlängen  $n = \#G$  ebenso auftreten wie kürzere Bahnlängen. Bei kürzerer Bahngröße müssen Fixpunkte der Aktion vorliegen.

Ein Sudoku ist ein *Fixpunkt* oder *Fixsudoku*, wenn ein  $1 \neq \varphi \in G$  existiert mit  $\varphi A = A$ .  $\varphi$  ist dann ein *Fixoperator*. Eine Untergruppe  $U$  von  $G$  heißt *fixpunktfrei*, wenn sie keine Fixpunkte hat. Die *Fixgruppe*  $F_U(A)$  eines Sudokus besteht aus der Gesamtheit aller  $\varphi \in U$  mit  $\varphi A = A$ . Nichtfixsudokus heißen *neutral*, sie werden nur durch das neutrale Element von  $G$  festgelassen.

Dass es Fixpunkte der Aktion von  $G$  wirklich gibt, ist eine entscheidende Entdeckung, da diese Objekte in Struktur und Vielfalt weitgehend beherrschbar sind. Ihre Anzahl ist deutlich geringer als die der neutralen. Das Studium der Fixpunkte setzt Kenntnisse über Fixoperatoren voraus. Ferner besteht mit einem Fixpunkt  $A$  auch die ganze Bahn  $G.A$  aus Fixpunkten. Es erweist sich als angemessen, zunächst nur die Gruppe  $G_0$  heranzuziehen, die Transponierte  $t$  erfordert häufig Sonderbetrachtungen.

Für eine Untergruppe  $U \leq G$  heißen 2 Sudokus  $A, A'$  *U-konjugiert*, wenn  $gA = A'$  gilt für ein  $g \in U$ , also wenn beide in der gleichen  $U$ -Bahn liegen. Der trivialen Äquivalenz

$$\varphi A = A \Leftrightarrow \varphi^g(g^{-1}A) = g^{-1}A \quad \text{für } \varphi \in U, g \in G \quad (2.1)$$

entnimmt man die

#### Bemerkung 2.1.

- $G$ -konjugierte  $A$  haben  $G$ -konjugierte  $U$ -Fixgruppen

$$Fix_{U^g}(g^{-1}A) = Fix_U(A)^g \quad \text{mit } g \in G.$$

- $G$ -konjugierte  $U$  und  $U^g$  haben beide Fixpunkte oder sind beide fixpunktfrei.
- Die Ordnung  $u$  einer fixpunktfreien Untergruppe  $U$  teilt die Anzahl  $N = \#X$  aller Sudokus:  $u|N$ .

Denn die Bahnen von  $U$  der Länge  $u$  bilden eine disjunkte Überdeckung von  $X$ .

Die Aufgabe, die nichtkonjugierten Fixsudokus zu klassifizieren, ist im Hinblick auf die extreme numerische Vielfalt auf direktem Wege ein hoffnungsloses Unterfangen. Hier bedarf es neuer Strukturen, die es gestatten, ganze Scharen von Fixsudokus „generisch“ zu erzeugen. Dazu wird ein neuer Begriff des Blockschemas eingeführt, der geeignet ist, eine gute Theorie der Sudokuspezialisierungen zu leisten.

Wird ein  $9 \times 9$ -Sudoku-Raster mit  $3 \times 3$ -Blockeinteilung mit Unbestimmten auf den 81 Kästchen belegt, so entsteht ein *Blocksystem*

$$B = \begin{matrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{matrix}$$

von 9 Blöcken  $B_{ij}$ . Ein solches Blocksystem wird *Blockschema* genannt, wenn gewisse Axiome (a)–(e) erfüllt sind. Diese Axiome werden schrittweise plausibel gemacht.

Die ersten beiden Axiome sind:

- (a) Jeder der 9 Blöcke wird mit 9 verschiedenen Unbestimmten belegt.
- (b) Sind  $a = (a_{ij})$  und  $b = (b_{ij})$  Blöcke und  $\{a\}$  bzw.  $\{b\}$  die Mengen der Unbestimmten auf diesen, so gilt entweder  $\{a\} = \{b\}$  oder  $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$ . (2.2)

2 Blöcke  $a = (a_{ij})$  und  $b = (b_{ij})$  heißen *gleich*, wenn  $a_{ij} = b_{ij}$  für alle  $i, j$  gilt.

Sie heißen *mengengleich*, wenn  $\{a\} = \{b\}$  ist.

2 Blöcke  $a, b$  heißen *konjugiert*, wenn sie durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen auseinander hervorgehen, wenn also ein  $w \in \Gamma_0 = S_3 \times S_3^\circ$  existiert mit  $b = w.a$ . Die gleiche Definition besteht auch für Sudoblöcke.

Weitere Axiome sind:

- (c) Keine 2 gleichen Blöcke dürfen übereinander oder nebeneinander stehen, (2.2')
- (d) das Blocksystem  $B$  ist *lokal*: mengengleiche Blöcke sind konjugiert.

Sind alle 4 Axiome erfüllt, liegt ein *Blockscheme* vor.

Eine maximale Menge nichtkonjugierter Blöcke heißt eine *Blockbasis*, oder gleichwertig, eine maximale Menge disjunkter Blöcke. Ihre Anzahl ist der *Rang*  $r = rgB$  des Blockschemas. Der Rang ist also die Maximalzahl nichtkonjugierter Blöcke. Diese Rangdefinition überträgt sich auch auf Sudokus. Der Rang liegt zwischen 1 und 9.

Jeder Block eines Blockschemas  $B$  ist konjugiert zu einem Block der Blockbasis. Für zwei Blockbasen ist daher jeder Block des einen zu einem Block des anderen konjugiert. Es entsteht eine Bijektion der beiden Blockbasen. Denn wäre ein Block der einen zu zwei verschiedenen Blöcken der anderen Blockbasis konjugiert, so wären auch letztere Blöcke konjugiert, also mengengleich, ein Widerspruch. Zwei Blockbasen sind also *blockkonjugiert*.

Ist die Konjugation der Blöcke zu einer festen Blockbasis explizit durch Blockoperatoren aus  $\Gamma_0$  dargestellt, so liegt eine Art *Koordinatendarstellung* vor. Ist ein Blockschema auf diese Weise aus 2 Blockbasen durch  $\Gamma_0$ -Operatoren dargestellt, so lassen sich diese ineinander umrechnen. Wir sprechen dann von einem *Initialwechsel*, einer Art *Koordinatenwechsel*.

Ein Blockschema vom Rang 9 ist ohne Struktur, also sinnlos. Solche vom Rang 1 haben durchweg konjugierte Blöcke, sie spielen im Folgenden eine besondere Rolle.

Der entscheidende Schritt zu den Sudokus wird vollzogen durch die

### **S-Spezialisierung**

Wird in einem Blockschema  $B$  jede Unbestimmte durch eine Ziffer aus  $\{1, \dots, 9\}$  ersetzt – natürlich gleiche Unbestimmte durch gleiche Ziffern – so entsteht eine Matrix mit Eingängen aus  $1, \dots, 9$ , eine *Spezialisierung* von  $B$ . Hat  $B$  sogar eine Spezialisierung zu einem Sudoku, so werde  $B$  *generisch* genannt. Mit  $\text{Sud } B$  wird dann die Menge aller *Sudoku-Spezialisierungen* – kurz auch *S-Spezialisierung* – bezeichnet. Ist  $A$  aus  $\text{Sud } B$ , wird auch die Redeweise verwendet: „ $A$  liegt auf  $B$ “. Wie betont, ist auch der Rang eines Sudokus  $A$  als maximale Anzahl nichtkonjugierter Blöcke definiert.

$$\text{Für } A \in \text{Sud } B \text{ gilt } \text{rg } A \leq \text{rg } B. \quad (2.3)$$

In der Folge der Theorie werden Sudokus häufig aus Teilbelegungen zusammengesetzt.

Einige weitere Begriffe sind erforderlich.

Sei  $M$  eine Teilmenge der 81 Positionen auf dem  $9 \times 9$ -Rasterschema. Ein *Praesudoku* auf  $M$  ist eine Ziffernbelegung von  $M$  aus  $\{1, \dots, 9\}$  derart, dass die *Sudoku-Bedingung* erfüllt ist:

Keine Ziffer darf in Reihen und Blöcken mehrfach auftreten.

Als Analogon der Praesudokus sind bei Unbestimmten-Belegung nur Mengen aus positionierten Blöcken relevant. Den Sudokubedingungen entspricht dann die Forderung, dass alle 4 Axiome der Blockschemata erfüllt sind. Eine solche Menge von Blöcken heißt eine *Blockfigur*, kurz eine *Figur*. Eine Figur  $F$  heißt dann *generisch*, wenn sie eine Spezialisierung zu einem Praesudoku besitzt.  $\text{Praes } F$  ist dann die Menge aller Praesudokus auf der Figur  $F$ .

Eine Menge von Blöcken kann „unbestimmt“ oder numerisch belegt sein, wir wollen in beiden Fällen von einer *Figur* sprechen. Spezielle Figuren sind die Streifenfiguren

$$\begin{array}{c} a \\ abc \quad \text{und} \quad b \\ c \end{array}$$

und natürlich die Blockbasen auf einem Blockschema.

Sei  $Bb$  eine solche Blockbasis und  $F$  eine Figur. Ist  $B$  generisch und  $A \in \text{Sud } B$  eine  $S$ -Spezialisierung, dann erfüllt die Einschränkung  $A_0 = A|Bb$  die Sudokubedingungen und  $A_0$  ist ein Praesudoku auf  $Bb$ . Nun ist jeder nicht in  $Bb$  liegende Block  $b'$  eindeutiges Bild eines Blockes  $b \in Bb$  durch einen Blockoperator  $w \in \Gamma_0$ :

$b' = w.b$ : Die Einschränkungen  $b'_0, b_0$  von  $A$  auf  $b'$ ,  $b$  erfüllen somit  $b'_0 = wb_0$ .

Es gilt also

**Lemma 2.1.** *Sei  $B$  generisch und  $Bb$  eine Blockbasis. Dann ist jedes Sudoku  $A \in \text{Sud } B$  eindeutig durch sein eingeschränktes Praesudoku  $A_0$  auf  $Bb$  bestimmt.*

Für 2 Blockbasen  $Bb$  und  $Bb'$  von  $B$  gilt

$$\text{Praes } Bb = \text{Praes } Bb'. \quad (2.4)$$

Ist jedes Praesudoku auf  $Bb$  fortsetzbar zu einem Sudoku auf  $B$ , so ergibt die Einschränkung eine Bijektion

$$\text{Sud } B \longrightarrow \text{Praes } Bb. \quad (2.4')$$

Es genügt dann also, die Praesudokus auf einer Blockbasis zu bestimmen.

Die Fortsetzbarkeit läuft auf Bedingungen an die Blockoperatoren eines Blockschemas hinaus, wie sie im Folgenden explizit auftreten.

Offenbar operiert die Sudokugruppe  $G$  auch auf dem Raum  $X$  aller Blockschemata. Man überlegt sich leicht, dass die  $G$ -Konjugation eines generischen Blockschemas  $B$  zu  $G$ -konjugierten  $S$ -Spezialisierungen führt:

$$\varphi \text{ Sud } B = \text{Sud } \varphi B \quad \text{für } \varphi \in G.$$

Also operiert  $G$  auch auf dem Raum  $X_g$  aller generischen Blockschemata.

Nun stehen in diesem Kapitel die Fixsudokus von  $G$  im Fokus des Interesses. Es wird sich zeigen, dass nicht jedes fixe Blockschema zu Sudokus spezialisiert. Ist das aber der Fall, so entstehen Fixsudokus. Bezeichnet  $X_f$  den Raum aller fixen Blockschemata, so spezialisiert der Raum  $X_{gf} = X_g \cap X_f$  zu Fixsudokus.  $G$  operiert auch auf  $X_{gf}$ , durch  $S$ -Spezialisierung entsteht dann folgendes Diagramm von  $G$ -Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} X_g & \rightarrow & PX \\ \uparrow & & \uparrow \\ X_{gf} & \rightarrow & PX_f \end{array}$$

der Räume der Blockschemata in die Potenzmengen der Fixsudokus.

**Bemerkung 2.2.** Das Hauptziel dieses Kapitels ist die Klassifikation der Fixsudokus auf fixen Blockschemata, also die Mengen

$$\text{Sud } B \quad \text{für } B \in X_{gf}.$$

Methodisch entscheidend ist dabei eine Rückführung von Sudokus auf Praesudokus im Sinn von Lemma 2.1. Hierzu kann Rang  $\leq 3$  vorausgesetzt werden, wie sich herausstellen wird.

Neutrale Sudokus können von den fixen durch ein Kriterium unterschieden werden.

## 2.2 Zwei Konstruktionsverfahren

Wir stellen zwei einfache Beobachtungen an Sudokus voran.

- Spaltenvertauschungen in den Vertikalstreifen erhalten die Sudoku-eigenschaften in den Horizontalstreifen, und Zeilenvertauschungen fechten die vertikalen Bedingungen nicht an.
- Eine mit Ziffern  $1, \dots, 9$  belegte  $9 \times 9$ -Matrix ist ein Sudoku genau dann, wenn alle 6 Streifen Praesudokus sind.

Diese Beobachtungen suggerieren bereits die Bedeutung der Blöcke und ihrer Figuren für einen theoretischen Ansatz, um Sudokus zu beschreiben und zu konstruieren. Und hierzu sind die Blockschemata die geeigneten Konzepte. In diesem Abschnitt wird ein Verfahren angegeben, wie aus Streifenfiguren – horizontalen und vertikalen – Sudokus und generische Blockschemata zusammengesetzt werden können.

Ein erster Praesudokutest auf Streifenfiguren ist

**Lemma 2.2.** *Die allgemeinen Streifenfiguren mit den Blockbasen  $a, b, c$*

$$(a) \quad w_1a \quad w_2b \quad w_3c \quad \text{bzw.} \quad w_2b \quad \text{mit} \quad w_i = g_i h_i^\circ \epsilon \Gamma_0 \quad (2.5)$$

$$\quad \quad \quad w_3c$$

sind generisch, wenn die reduzierten Streifenfiguren

$$(b) \quad g_1a \quad g_2b \quad g_3c \quad \text{bzw.} \quad \begin{matrix} h_1^\circ a \\ h_2^\circ b \\ h_3^\circ c \end{matrix} \quad (2.5')$$

generisch sind.

Streifenfiguren vom Rang 3 sind stets generisch, sie haben alle die gleiche Anzahl von Praesudokus.

**Beweis.** Zur Existenz von  $S$ -Spezialisierungen spielen in (a) für die horizontalen Figuren die Operatoren  $h_i^\circ$  und für die vertikalen die  $g_i$  keine Rolle, können also weggelassen werden. So entstehen die reduzierten Figuren (b).

Sind die Figuren in (a) 3-rangig, spezialisieren die disjunkten unbestimmten Blöcke  $a b c$  zu jeder numerischen Blockfigur  $a_0 b_0 c_0$ , insbesondere derart, dass ein Praesudoku  $w_1 a_0 w_2 b_0 w_3 c_0$  auf der Figur (a) entsteht. Damit wird auch jedes Praesudoku auf (a) erfasst.  $\square$

Lemma 2.2 führt für Blockschemata zum

### Reduktionstest

Sei  $B$  ein Blockschema mit der Blockbasis  $a, b, c$  und den Blockoperatoren  $w_{ij} = g_i h_j^\circ$ , die an den Positionen  $(i, j)$  auf die Blöcke wirken. Dann sind alle Streifen von  $B$  generisch genau dann, wenn das für den *reduzierten* Fall gilt:

Lässt man in allen vertikalen/horizontalen Streifen die Zeilenvertauschungen  $g_i$ /Spaltenvertauschungen  $h_j^\circ$  weg, so entstehen generische Streifen.

Das folgende einfache Lemma ist von zentraler Bedeutung.

#### Lemma 2.3.

(a) 1-rangige reduzierte Streifenfiguren

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & a & & & & \\ a & p a & q a & b \text{ bzw. } & p^\circ a & (p, q \in S_3, p^\circ, q^\circ \in S_3^\circ) & & & (2.6) \\ & & & & q^\circ a & & & & \end{array}$$

sind generisch genau dann, wenn gilt

$$\{p, q\} = \{s, s^{-1}\} \quad \text{bzw.} \quad \{p^\circ, q^\circ\} = \{s^\circ, s^{\circ-1}\}. \quad (2.6')$$

Jede  $S$ -Spezialisierung von  $a$  führt dann auf ein Praesudoku.

(b) Ein 1-rangiges Blockschema  $B$  mit Blockbasis  $a$  ist generisch genau dann, wenn alle 6 Streifenfiguren generisch sind.

Jede  $S$ -Spezialisierung von  $a$  erzeugt dann ein Sudoku.

*Beweis.* Es genügt, (a) im horizontalen Fall zu beweisen.

(2.6') ist hinreichend. Denn  $s, s^{-1}$  verschieben die Zeilen von (2.6) modulo 3 nach unten bzw. nach oben. Mit der Spezialisierung  $a \rightarrow e$  von  $a$  in die Grundmatrix  $e$

$$\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 3 \\ e = 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \quad \text{wird} \quad \begin{array}{rrr} 1 & 2 & 3 \\ e \rightarrow s^{-1}e = 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{rrr} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

ein Praesudoku.

(2.6') ist notwendig. Denn wäre etwa  $p$  nicht in  $\{s, s^{-1}\}$ , also  $p = r_i$  ein 2er-Zykel, der die  $i$ -te Zeile von  $a$  festlässt, so hätte schon  $a \rightarrow pa$  die  $i$ -te Zeile doppelt, kein Praesudoku ist darauf möglich.

Aussage (b) ist evident, denn  $a$  steht in jedem Streifen und ist der einzige Block, der spezialisiert werden kann.  $\square$

**Beispiel** (Der 1-rangige Fall). Die beiden Blockschemata zu  $s' = ss^\circ$

$$C(a) = \begin{array}{ccc|ccc} a & s'a & s'^{-1}a \\ s'^{-1}a & a & s'a \\ s'a & s'^{-1}a & a \end{array} \quad \text{und} \quad C^\circ(a) = \begin{array}{ccc|ccc} a & s'^{-1}a & s'a \\ s'a & a & s'^{-1}a \\ s'^{-1}a & s'a & a \end{array} \quad (2.7)$$

sind generisch. Die Sudokuanzahlen sind

$$\#\text{Sud } C(a) = \#\text{Sud } C^\circ(a) = 9!,$$

und es besteht die Dualität  $tC(a) = C^\circ(ta)$ .

Denn die beiden reduzierten Schemata von  $C(a)$  werden hergestellt, indem man in  $s' = ss^\circ$  horizontal alle  $s^\circ$  und vertikal alle  $s$  weglässt. Man erkennt so nach Lemma 2.2, dass  $C(a)$  generisch ist.

Die Spezialisierung  $a \rightarrow e$  von  $a$  in die Grundmatrix  $e$  ergibt das Sudoku

$$C = C(e) = \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 9 & 7 & 8 & 5 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 1 & 2 & 8 & 9 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 & 9 & 7 & 8 \\ 8 & 9 & 7 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 \\ \hline 9 & 7 & 8 & 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 9 & 7 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{array} \quad (2.7')$$

Der *mehrrangige Fall* ist insofern aufwändiger, als ein Blockschema nicht notwendig generisch ist, wenn alle 6 Streifen generisch sind. Der Grund liegt darin, dass  $S$ -Spezialisierungen der  $a, b, c$  etwa in Horizontalstreifen keinesfalls in den Spalten Praesudokus induzieren müssen. Die Horizontalstreifen müssen koordiniert werden.

Wir gehen daher von folgendem Blockschema aus

$$B^\wedge = \begin{array}{ccc} a & b & c \\ g_1 h_1^\circ a & g_1 h_2^\circ b & g_1 h_3^\circ c \\ g_2 h_1^{\circ-1} a & g_2 h_2^{\circ-1} b & g_2 h_3^{\circ-1} c \end{array} \quad \text{mit } g_i \in S_3, h_j^\circ \in S_3^\circ. \quad (2.8)$$

**Satz 2.1.** Sei  $B^\wedge$  vom Rang 3, also  $abc$  eine Blockbasis.

Dann ist  $B^\wedge$  generisch genau dann, wenn

$$h_i^\circ \in \{s^\circ, s^{\circ-1}\} \quad \text{für alle } i = 1, 2, 3 \text{ ist.} \quad (2.9)$$

Jede  $S$ -Spezialisierung der Blockbasis  $abc$  zu einem Praesudoku ergibt ein Sudoku auf  $B^\wedge$ , also nach Lemma 2.1:

Die Restriktion von Sud  $B^\wedge$  auf den Horizontalstreifen ist eine Bijektion

$$\text{Sud } B^\wedge \longrightarrow \text{Praes } abc \quad (2.10)$$

auf die horizontalen Praesudokus.

**Korollar.** Die Anzahl der Sudokumenge  $\# \text{Sud } B^\wedge$  ist unabhängig von der Parameterwahl der  $g_i, h_j^\circ \in \Gamma_0$ .

*Beweis.* Lässt man horizontal alle  $h_j^\circ$  weg, so werden die Horizontalfiguren durch  $(g_i, g_i, g_i)$  unter  $G$  konjugiert. Jedes Praesudoku auf  $abc$  geht also wieder in ein  $G$ -konjugiertes über.

Bei den Vertikalfiguren lassen wir die  $g_i$  weg. Es entstehen 1-rangige Figuren, die nach Voraussetzung (2.9) wegen Lemma 2.3 für jede Spezialisierung der  $a, b, c$  auf ein vertikales Praesudoku führen. Nach dem Reduktionstest für Sudokus und der Vorbereitung entsteht ein Sudoku bei jeder  $S$ -Spezialisierung der Blockbasis.  $\square$

Satz 2.1 ergibt eine Vorschrift zur Konstruktion vieler Sudokus. Wir geben ein Beispiel. Zunächst benötigt man ein Praesudoku

$$a_0 b_0 c_0 \quad \text{auf einer Horizontalfigur} \quad abc.$$

Durch beliebige Zeilenvertauschungen stellt man 2 weitere Praesudokus her und erhält eine Anordnung

$$\begin{array}{ccc} a_0 & b_0 & c_0 \\ a'_0 & b'_0 & c'_0 \\ a''_0 & b''_0 & c''_0 \end{array} . \quad (\dagger)$$

Nach dem Satz hat man Sorge zu tragen, dass die vertikalen Operatoren  $h_i^\circ$  die Bedingung (2.9) erfüllen. Das heißt, man hat in jedem Vertikalstreifen von  $(\dagger)$  in den unteren beiden Blöcken „gegenläufige“ Spaltenvertauschungen vorzunehmen, etwa die folgenden

$$S = \begin{array}{ccc} a_0 & b_0 & c_0 \\ s^\circ a'_0 & s^{\circ-1} b'_0 & s^\circ c'_0 \\ s^{\circ-1} a''_0 & s^\circ b''_0 & s^{\circ-1} c''_0 \end{array} . \quad (\ddagger)$$

$S$  ist dann ein Sudoku aus Sud  $B^\wedge$ .

Als Start-Praesudoku nehmen wir den 1-ten Horizontalstreifen von einem Sudoku LT aus der London Times, das den Beinamen „super fiendish“ trägt:

	4	6	9	5	1	2	7	3	8
	2	1	8	9	7	3	5	6	4
	7	3	5	6	8	4	1	2	9
	3	8	4	7	9	5	6	1	2
$LT =$	5	2	6	1	4	8	9	7	3
	1	9	7	2	3	6	4	8	5
	8	7	3	4	5	1	2	9	6
	6	5	1	3	2	9	8	4	7
	9	4	2	8	6	7	3	5	1

Auf den 1. Horizontalstreifen von LT wenden wir eine Zeilenvertauschung an, etwa  $s$ , und gewinnen den 2. Streifen gemäß ( $\dagger$ ), der 3. Streifen bleibe ungeändert,  $a''_0 = a_0$  etc. Dann führen wir die gegenläufigen Spaltenvertauschungen durch gemäß ( $\ddagger$ ). Es entsteht das Sudoku

	4	6	9	5	1	2	7	3	8
	2	1	8	9	7	3	5	6	4
	7	3	5	6	8	4	1	2	9
	5	7	3	8	4	6	9	1	2
$S =$	9	4	6	1	2	5	8	7	3
	8	2	1	7	3	9	4	5	6
	6	9	4	2	5	1	3	8	7
	1	8	2	3	9	7	6	4	5
	3	5	7	4	6	8	2	9	1

Nun kann man bei einem „Spendersudoku“ mit jedem Streifen, vertikal oder horizontal, beginnen. An Manipulationen hat man 2 mal 6 Zeilenpermutationen, und  $2^3$  Spaltenvertauschungen bzw. dual umgekehrt. Also

**Bemerkung 2.3.** Aus jedem Sudoku kann man durch Chirurgie

$$6^2 \cdot 2^3 \cdot 6 = 1728$$

neue Sudokus herstellen.

## 2.3 Fixpunktfreiheit und Fixoperatoren

Das Ziel dieses Abschnitts ist die Suche nach möglichen Fixoperatoren. Dies geschieht im Ausschlussverfahren durch Angabe von möglichst großen fixpunktfreien

Untergruppen und Teilmengen von  $G$ . Die Grundlage ist Satz 1.1, die Relationen (1.18') sind methodisch hilfreich.

Die explizite Wirkung von  $\sigma'$ ,  $\rho'$  auf ein Blockschema  $B = (B_{ij})$  bzw. auf ein Sudoku wird häufig benötigt:

$$\begin{array}{ccccccccc} B_{33} & B_{31} & B_{32} & & B_{33} & B_{32} & B_{31} \\ \sigma' B = B_{13} & B_{11} & B_{12} & , & \rho' B = B_{23} & B_{22} & B_{21} \\ & B_{23} & B_{21} & B_{22} & & B_{13} & B_{12} & B_{11} \end{array} \quad (2.11)$$

Die Wirkung von  $T^*$  auf  $B$  wurde in (1.14) bzw. (1.14') angegeben:

$$wB = (w_{ij}B_{ij}) \quad \text{mit} \quad w_{ij} = g_i h_j^\circ \quad \text{für} \quad w \in T^*,$$

wobei  $(g_1, g_2, g_3)$  bzw.  $(h_1^\circ, h_2^\circ, h_3^\circ)$  Tripel aus  $S_3^3$  bzw.  $S_3^{\circ 3}$  sind.

**Bemerkung 2.4.** Eine Potenz  $\neq 1$  eines Fixoperators ist wieder ein solcher. Als Test für Fixpunktfreiheit ergibt sich: Ist eine Potenz  $\neq 1$  eines Operators  $\varphi$  fixpunktfrei, so gilt dies auch für  $\varphi$ . Versagt der Potenztest, müssen Fixpunktgleichungen gelöst werden.

### Satz 2.2. Die Gruppen

$$P_{ij} = T^* \rtimes [\rho_i, \rho_j^\circ] \quad \text{mit} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}$$

und alle Nebenklassen

$$t \cdot P_{ij} \quad (2.12)$$

sind fixpunktfrei auf dem Sudokuraum  $X$  und auf dem Raum  $X_g$  der generischen Blockschemata.

Fixoperatoren aus  $G$  sind sämtlich in der Gruppe

$$Q = T^* \rtimes [\sigma, \sigma^\circ] \quad (2.13)$$

enthalten.

*Beweis.* Es genügt offenbar, die Behauptungen für den Sudokuraum zu beweisen.

Sei also  $A = (A_{ij})$  ein Sudoku.

(a) Der Fall  $P_{ij}$

Nach (1.11)(b) sind die  $r_i$  unter  $[s]$  konjugiert, also sind die  $\rho_i$  unter  $[\sigma]$  konjugiert. Es genügt also, den Nachweis für  $P = P_{22}$  zu führen. Mit  $\rho$  und  $\rho' = \rho\rho^\circ$  sind auch  $\rho w$  und  $\rho' w$  fixpunktfrei für jedes  $w \in T^*$ .

Denn  $\rho$  und  $\rho'$  vertauschen die untereinander stehenden Blöcke  $A_{12}$  und  $A_{32}$ , die ja zueinander disjunkte Spaltenmengen haben. Daran können keine unabhängigen Zeilenpermutationen in diesen, noch Spaltenpermutationen von  $A$ , etwas ändern. Anwendung von  $\rho w$  und  $\rho' w$  verändert  $A$  stets.

(b) Der Fall  $tP = tP_{22}$ 

Zunächst ist  $tT^*$  fixpunktfrei. Hätte  $\text{tw}$  einen Fixpunkt  $A$ , so wirkte  $t$  wie  $w_{11}$  auf dem oberen Eckblock  $A_{11}$ , also wäre  $t \in \Gamma_0$ , ein Widerspruch.

Angenommen,  $t\varphi A = A$  mit  $\varphi \neq 1 \in P$ . Quadrieren ergibt  $(\varphi)^2 = \varphi^t \varphi$ . Wegen  $P^t = P$  ist  $\varphi^t \varphi \in P$ , nach (a) also fixpunktfrei, somit ist  $\varphi^t = \varphi^{-1}$ . Enthält  $\varphi$  nur  $\rho$  oder  $\rho^\circ$ , so folgt  $\rho^\circ = \rho^{-1} = \rho$ , was nicht geht. Enthält  $\varphi$  aber  $\rho'$ , so wirkt wieder  $t\varphi$  auf  $A_{22}$  wie  $tw_{22}A_{22} = A_{22}$ , was wieder den Widerspruch  $t \in \Gamma_0$  ergibt.

Der Fall  $tP_{ii}$  verläuft analog, nur dass hier  $A_{ii}$  von  $tw_{ii}$  festgelassen wird mit dem gleichen Widerspruch.

(c) Der Fall  $tP_{ij} (i \neq j)$ 

Obwohl die  $P_{ij}$  zu  $P$  konjugiert sind, gilt dies nicht mehr für das Paar  $tP_{ij}$  und  $tP$  für  $i \neq j$ . Auch sind die  $P_{ij}$  nicht mehr  $t$ -invariant:  $P_{ij}^t = P_{ji}$ .

Der einzige Operatortyp aus  $tP_{ij}$ , der nicht in einem  $tP_{ii}$  liegt, ist  $t\varphi = t\rho_i \rho_j^\circ w$  mit  $w \in T^*$ . Die 3-te Potenz wird mit  $v \in T^*$

$$(t\varphi)^3 = t\rho_i \rho_j^\circ t\rho_i \rho_j^\circ t\rho_i \rho_j^\circ v = t\rho_i \rho_j^\circ \rho_j \rho_i^\circ \rho_i \rho_j^\circ v = t\rho_i^{\circ \rho_j^\circ} \rho_j^{\rho_i} v.$$

Aber nach (1.11) (d) ist auch hier

$$\rho_i^{\circ \rho_j^\circ} = \rho_k^\circ, \quad \rho_j^{\rho_i} = \rho_k \quad \text{für } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}.$$

Also wird  $(t\varphi)^3 = t\rho'_k v \in tP_{kk}$  und somit fixpunktfrei.

Damit ist (2.12) bewiesen.

Zum Nachweis von (2.13) ist zu zeigen, dass alle Operatoren aus  $G \setminus Q$  fixpunktfrei sind.

(d) Der Fall  $G_0 \setminus Q$ 

Sei  $\varphi \in G_0$ .

Wie gezeigt können die  $\varphi \in P_{ij}$  ausgeschlossen werden. Und da diese alle zu  $P = P_{22}$  konjugiert sind, genügt es, die  $\varphi \in G_0 \setminus (P \cup Q)$  zu untersuchen. Aber nach (1.11) (c) liegen alle Produkte aus  $[\sigma]$  mit  $[\rho]$ , aus  $[\sigma^\circ]$  mit  $[\rho^\circ]$ , aus  $[\sigma']$  mit  $[\rho']$  und aus  $[\sigma \sigma^{\circ -1}]$  mit  $[\rho']$  in einem der  $P_{ij}$ . Die restlichen Produkte aus  $P$  mit  $Q$ , die nicht in einem der beiden liegen, sind sämtlich unter  $G$  konjugiert zu

$$\varphi = \sigma \rho^\circ w \quad \text{mit } w \in T^*.$$

Da  $\sigma$  und  $\rho^\circ$  vertauschbar sind, wird

$$\varphi^3 = \rho^\circ w' \quad \text{mit geeignetem } w' \in T^*.$$

Also ist  $\varphi$  kein Fixoperator.

(e) Der Fall  $tG$ .

Die Operatoren in  $tQ$  werden durch Konjugation unter  $\{\rho, \rho^\circ\}$  in geeignete  $tP_{ij}$  transportiert, sind also sämtlich fixpunktfrei. Der simple Grund dafür liegt in der Konjugation von  $t$  mit  $\rho$  und  $\rho^\circ$

$$t^\rho = t\rho' = t^{\rho^\circ}.$$

So wird zum Beispiel ( $\rho = \rho_2$ )

$$\begin{aligned}(t\sigma)^\rho &= t\rho'\sigma^{-1} = t\rho\rho^\circ\sigma^{-1} = t\rho_i\rho^\circ \in tP_{i2} && \text{mit } i \neq 2 \\ (t\sigma\sigma^{\circ-1})^\rho &= t\rho'\sigma^{-1}\sigma^{\circ-1} = t\rho\sigma^{-1}\rho^\circ\sigma^{\circ-1} = t\rho_i\rho_i^\circ \in tP_{ii}.\end{aligned}$$

Die möglichen weiteren Kandidaten für  $\varphi$  sind Produkte aus  $[\sigma, \sigma^\circ]$  mit  $[\rho, \rho^\circ]$ . Wie im ersten Fall ausgeführt, führen „gleichartige“ Produkte wieder zu Elementen aus  $P_{ij}$ . Also bleiben „gemischte“ Produkte der Form

$$\varphi = \sigma\rho^\circ \quad \text{und} \quad \sigma^\circ\rho \quad (\text{bzw. mit } \sigma^{-1} \text{ statt } \sigma)$$

die beide offenbar t-konjugiert sind. Wieder ergibt die Konjugation mit  $\rho^\circ$

$$(t\sigma\rho^\circ)^{\rho^\circ} = t\rho\rho^\circ\sigma\rho^\circ = t\rho\sigma = t\rho_i \in tP_i.$$

Auch  $t\sigma\rho^\circ$  ist also fixpunktfrei.

Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

Aus Satz 2.2 ergibt sich

**Korollar.** *Mit der globalen Diedergruppe  $D$  aus Kapitel 1 sind folgende beiden Untergruppen von  $G$  fixpunktfrei auf den Räumen  $X$  und  $X_g$ :*

- $$\begin{aligned}(\text{a}) \quad & [\sigma, \sigma^\circ] \rtimes D \\ (\text{b}) \quad & L = T^* \rtimes D\end{aligned} \tag{2.14}$$

*Beweis.* Man überzeugt sich leicht:

Jeder Operator  $1 \neq \varphi$  aus  $L$  lässt den Mittelblock  $B_{22}$  eines Blockschemas oder Sudokus stabil und bewirkt auf diesem einen lokalen Operator  $\neq 1$ . Dagegen lässt jeder Operator  $1 \neq \omega \in Q \setminus T^*$  den Mittelblock nicht stabil.

Also ist

$$Q \cap L = T^*, \text{ somit } [\sigma, \sigma^\circ] \cap L = \{1\}.$$

Nach Satz 2.2 ist  $L$  also fixpunktfrei.

Ein Fixoperator  $\omega\varphi$  mit  $\varphi \in D$ ,  $\omega \in [\sigma, \sigma^\circ]$  läge in  $Q$ , also wäre  $\varphi \in Q$ .

Aber nach Bemerkung 1.1 enthält  $Q$  keine induzierten Operatoren.  $\square$

Nach Satz 2.2 sind mögliche Fixoperatoren in der Gruppe  $Q$  zu suchen, und wegen der Fixpunktfreiheit von  $T^*$  genauer in den Nebenklassen nach  $T^*$  der Menge

$$\Sigma = \{\sigma, \sigma^\circ, \sigma' = \sigma\sigma^\circ, \sigma\sigma^{\circ-1}\}.$$

Deren Inverse sind zu denen aus  $\Sigma$  unter  $[\rho, \rho^\circ]$  konjugiert. Die 4 Operatoren  $\tau \in \Sigma$  heißen *Leitoperatoren*.

Wir erinnern zunächst daran, dass das allgemeine Element von  $T^*$  nach (1.14), (1.14') die Form hat

$$gh^\circ = \Pi_i g_i \cdot \Pi_j h_j^\circ,$$

die aus Tripeln  $g = (g_1, g_2, g_3)$  und  $h = (h_1^\circ, h_2^\circ, h_3^\circ)$  der Blockgruppe entstehen.

**Satz 2.3.**

(i) Sei  $\tau^\wedge = \tau w$  mit  $\tau \in \Sigma$  und  $w \in T^*$  Fixoperator auf  $X$  oder auf  $X$ .

Dann bestehen folgende äquivalente Relationen:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \tau^{\wedge 3} = 1 \\ (b) \quad & N_\tau w = w^{\tau^2} w^\tau w = 1. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Der Fixoperator  $\tau^\wedge$  hat also die Ordnung 3. Für die Komponenten  $g \in T$  und  $h^\circ \in T^\circ$  von  $w$  spaltet die Normrelation (b) wie folgt auf

$$\begin{aligned} (c) \quad & N_\sigma g = 1, \quad h^{\circ 3} = 1 \quad \text{für } \tau = \sigma \\ & g^3 = 1, \quad N_{\sigma^\circ} h^\circ = 1 \quad \text{für } \tau = \sigma^\circ \\ & N_\sigma g = 1, \quad N_{\sigma^\circ} h^\circ = 1 \quad \text{für } \tau = \sigma' = \sigma \sigma^\circ \\ & N_\sigma g = 1, \quad N_{\sigma'^{-1}} h^\circ = 1 \quad \text{für } \tau = \sigma \sigma^{-1}. \end{aligned}$$

(ii) Für die  $g$  und  $h^\circ$  definierenden Tripel  $g \in S_3^3$  und  $h^\circ \in S^{\circ 3}$  drücken sich die Relationen (c) für die 4 Fälle wie folgt aus

$$\begin{aligned} (d) \quad & g_3 g_2 g_1 = 1, \quad \text{alle } h_i^3 = 1 \\ & \text{alle } g_i^3 = 1, \quad h_3^\circ h_2^\circ h_1^\circ = 1 \\ & g_3 g_2 g_1 = 1, \quad h_3^\circ h_2^\circ h_1^\circ = 1 \\ & g_3 g_2 g_1 = 1, \quad h_1^\circ h_2^\circ h_3^\circ = 1. \end{aligned}$$

Die Eigenschaften (a)–(d) sind äquivalent.

*Beweis.* Wegen  $\tau^3 = 1$  ist

$$\tau^{\wedge 3} = \tau w \tau w \tau w = \tau w \tau^2 w^\tau w = \tau^3 w^{\tau^2} w^\tau w = N_\tau w.$$

$N_\tau w \in T^*$  ist fixpunktfrei, also ist der Fixoperator  $\tau^{\wedge 3} = 1$ , was (a), (b) bestätigt.

Auf  $w = gh^\circ$  in  $T^* = T \times T^\circ$  ist die  $\tau$ -Norm multiplikativ, da  $g$  und  $h^\circ$  vertauschbar sind:

$$N_\tau w = N_\tau g \cdot N_\tau h^\circ, \quad N_{\sigma'} w = N_{\sigma'} g \cdot N_{\sigma^\circ} h^\circ, \quad N_\sigma h^\circ = h^{\circ 3}.$$

Daraus folgen die Relationen (c). Denn  $N_\tau w = 1$  gilt genau dann, wenn die Faktoren  $= 1$  sind.

$N_\tau w = 1$  impliziert die Relationen in (d). Der Nachweis wird nur für  $\tau = \sigma$  durchgeführt.

Nach der bekannten Konjugationswirkung von  $[\sigma]$  auf die  $i g_i$  wird wegen

$$g^{\sigma^{-1}} = {}_2 g_1 {}_3 g_2 {}_1 g_3 \quad \text{und} \quad g^\sigma = {}_3 g_1 {}_1 g_2 {}_2 g_3$$

die Norm

$$N_\sigma g = {}_1 g_3 {}_1 g_2 {}_1 g_1 \cdot {}_2 g_1 {}_2 g_3 {}_2 g_2 \cdot {}_3 g_2 {}_3 g_1 {}_3 g_3 = {}_1 (g_3 g_2 g_1) {}_2 (g_1 g_3 g_2) {}_3 (g_2 g_1 g_3).$$

Hierbei durften die  ${}_j\mathcal{G}_i$  zu verschiedenen  $j$  vertauscht werden. Da die Klammerausdrücke in verschiedenen  $T_i$  liegen, impliziert  $N_\sigma \mathcal{G} = 1$  die Relationen

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_3 \mathcal{G}_2 \mathcal{G}_1 &= 1, \quad \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_3 \mathcal{G}_2 = 1, \quad \mathcal{G}_2 \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_3 = 1 \quad \text{und} \\ h^\circ{}^3 &= 1, \text{ also } h^\circ{}_i{}^3 = 1 \text{ für alle } i.\end{aligned}\tag{†}$$

Eine der drei Produktrelationen (†) impliziert die beiden anderen, da z. B.  $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{G}_3 \mathcal{G}_2)^{-1}$  gilt. Somit sind die Aussagen (a)–(d) sämtlich äquivalent, der Satz ist bewiesen.  $\square$

Ein Tripel  $\mathbf{g} = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3)$  bzw.  $\mathbf{h}^\circ = (h_1^\circ, h_2^\circ, h_3^\circ)$  heiße ein *Sudoku-Tripel* (kurz *S-Tripel*), wenn

$$\mathcal{G}_3 \mathcal{G}_2 \mathcal{G}_1 = 1 \text{ bzw. } h_3^\circ h_2^\circ h_1^\circ = 1 \text{ gilt.}$$

Der Satz leistet keinerlei Existenzaussagen. Ein Nachweis dafür, dass die Leitoperatoren  $\sigma, \sigma^\circ, \sigma'$  zu fixen Blockschemata und Sudokus führen, wird in Abschnitt 2.4 gegeben.

## 2.4 Fixsudokus

In diesem Abschnitt wird die Existenz von Fixsudokus und fixen Blockschemata nachgewiesen, nachdem in Abschnitt 2.3 die 4 möglichen Leitoperatoren zu Fixoperatoren bestimmt wurden. Dazu müssen Fixgleichungen gelöst werden.

Das allgemeine Element von  $T^*$  wird bestimmt durch 2 Tripel

$$\mathcal{G} = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3) \text{ und } h^\circ = (h_1^\circ, h_2^\circ, h_3^\circ) \text{ aus } S_3^3 \times S^\circ_3{}^3,$$

indem der Blockoperator  $w = (w_{ij})$  mit  $w_{ij} = \mathcal{G}_i h_j^\circ$  blockweise wirkt.

Wir beginnen mit der zugehörigen Fixgleichung zum Leitoperator  $\sigma$ .

### Fixgleichung

$$\sigma w B = B \quad \text{für ein Blockschema } B. \tag{2.16}$$

$\sigma$  wirkt auf  $wB = (w_{ij} B_{ij})$  wie folgt

$$\begin{array}{ccc}\sigma w B & = & \begin{matrix} \mathcal{G}_3 h_1^\circ B_{31} & \mathcal{G}_3 h_2^\circ B_{32} & \mathcal{G}_3 h_3^\circ B_{33} \\ \mathcal{G}_1 h_1^\circ B_{11} & \mathcal{G}_1 h_2^\circ B_{12} & \mathcal{G}_1 h_3^\circ B_{13} \\ \mathcal{G}_2 h_1^\circ B_{21} & \mathcal{G}_2 h_2^\circ B_{22} & \mathcal{G}_2 h_3^\circ B_{23} \end{matrix}\end{array}$$

Vergleich der beiden Seiten in (2.16) ergibt

$$\begin{aligned}B_{11} &= \mathcal{G}_3 h_1^\circ B_{31}, & B_{31} &= \mathcal{G}_2 h_1^\circ B_{21}, & B_{21} &= \mathcal{G}_1 h_1^\circ B_{11} \\ B_{22} &= \mathcal{G}_1 h_2^\circ B_{12}, & B_{12} &= \mathcal{G}_3 h_2^\circ B_{32}, & B_{32} &= \mathcal{G}_2 h_2^\circ B_{22} \\ B_{33} &= \mathcal{G}_2 h_3^\circ B_{23}, & B_{23} &= \mathcal{G}_1 h_3^\circ B_{13}, & B_{13} &= \mathcal{G}_3 h_3^\circ B_{33}.\end{aligned}\tag{2.16'}$$

Mit der Abkürzung  $a, b, c$  für die Diagonalblöcke  $B_{11}, B_{22}, B_{33}$  erhält man durch sukzessives Einsetzen

$$a = g_3 g_2 g_1 h_1^{\circ 3} a, \quad b = g_1 g_3 g_2 h_2^{\circ 3} b, \quad c = g_2 g_1 g_3 h_3^{\circ 3} c.$$

Somit ergeben sich die notwendigen Bedingungen

- (a)  $g_3 g_2 g_1 = 1, g_1 g_3 g_2 = 1, g_2 g_1 g_3 = 1$   
 (b)  $h_i^{\circ 3} = 1 \quad \text{für alle } i.$

Nach Benutzung von (2.17) und der Festlegung von  $a, b, c$  ergibt sich das Blockschema

$$B = B(\sigma) = \begin{matrix} a & g_1^{-1} h_2^{\circ -1} b & g_3 h_3^{\circ} c \\ g_1 h_1^{\circ} a & b & g_2^{-1} h_3^{\circ -1} c \\ g_3^{-1} h_1^{\circ -1} a & g_2 h_2^{\circ} b & c \end{matrix}, \quad (2.18)$$

das die Fixgleichung löst, sofern (2.17) gilt. Der Existenzbeweis für fixe Blockschemata ist erbracht.

**Satz 2.4 ( $\sigma$ -Fall).** *Der Rang von  $B(\sigma)$  sei 3, also  $a \ b \ c$  eine Blockbasis.*

Dann ist  $B(\sigma)$  eine generische Lösung der Fixgleichung (2.16) genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (a)  $g = (g_1, g_2, g_3)$  ist S-Tripel  
 (b)  $h_i^{\circ} \in \{s^{\circ}, s^{\circ -1}\} \quad \text{für } i = 1, 2, 3.$

$B(\sigma)$  ist die einzige Lösung der Fixgleichung (2.16) in Diagonallage zu den Operatortripeln  $g$  und  $h^{\circ}$  als generisches Blockschema.

In Abhängigkeit von all seinen Parametern wird  $B$  auch notiert

$$B(\sigma) = B(\sigma; g, h^{\circ} | a \ b \ c) = B(\sigma | a \ b \ c). \quad (2.18')$$

$B$  hängt also ab vom Leitoperator  $\sigma$ , dem S-Tripel  $g$  und dem Sondertripel  $h^{\circ} \in \{s^{\circ}, s^{\circ -1}\}^3$ .

**Beweis.** Es ist zu zeigen, dass  $B(\sigma)$  generisch ist.

Zum Erkennen dieses entscheidenden Merkmals wurde in 3. ein Reduktionstest für Blockschemata angegeben, der ein solches Erkennen erleichtert.

Der Test besteht aus 2 Vorgängen, bei denen jeweils die horizontalen bzw. vertikalen Streifenfiguren von „überflüssigen“ Operatoren befreit werden. Ein positiver Testausgang ist nur eine notwendige Bedingung für das Merkmal „generisch“.

Die Reduktion der 1-rangigen Vertikalfiguren ergibt

$$\begin{matrix} a & h_2^{\circ -1} b & h_3^{\circ} c \\ h_1^{\circ} a & b & h_3^{\circ -1} c \\ h_1^{\circ -1} a & h_2^{\circ} b & c \end{matrix}.$$

Nach Lemma 2.3 muss die Bedingung (2.17') (b) verlangt werden, und nach Lemma 2.2 die 3-Rangigkeit. Schließlich müssen die reduzierten Horizontalstreifen unter  $T$  konjugiert sein. Die folgende Rechnung

$$H_2 = g_1 H_1, \quad H_3 = g_3^{-1} H_1 \quad \text{mit} \quad H_1 = a \quad g_1^{-1} h_2^{\circ -1} b \quad g_3 h_3^{\circ} c$$

bestätigt dies. Daher sind die Bedingungen (2.17') auch hinreichend.  $\square$

Aber wir zeigen mehr, nämlich die

*Initialäquivalenz von  $B(\sigma)$  und  $B^\wedge(\sigma)$*

- (1) Man setze für die neue Blockbasis im 1. Horizontalstreifen von  $B(\sigma)$

$$H_1: \quad a' \quad b' \quad c' = a \quad g_1^{-1} h_2^{\circ -1} b \quad g_3 h_3^{\circ} c .$$

Man berechne die weiteren Horizontalstreifen in der neuen Blockbasis  $a', b', c'$  nach der Vorgabe (2.18)

- (2) Der 2. Horizontalstreifen wird

$$H_2: \quad g_1 h_1^{\circ} a' \quad g_1 h_2^{\circ} b' \quad g_1 h_3^{\circ} c' .$$

- (3) Der 3. Horizontalstreifen wird

$$H_3: \quad g_3^{-1} h_1^{\circ -1} a' \quad g_3^{-1} h_2^{\circ -1} b' \quad g_3^{-1} h_3^{\circ -1} c' .$$

Für die Umrechnungen wurde die  $S$ -Tripeleigenschaft benutzt

$$g_2^{-1} g_3^{-1} h_3^{\circ -1} h_3^{\circ -1} = g_1 h_3^{\circ}, \quad g_2 g_1 h_2^{\circ 2} = g_3^{-1} h_2^{\circ -1} .$$

Nach einem Bezeichnungswechsel entsteht das 3-rangige generische Blockschema

$$B^\wedge = B^\wedge(\sigma; g, h^\circ | a \ b \ c) = \begin{array}{ccc} a & b & c \\ g_1 h_1^{\circ} a & g_1 h_2^{\circ} b & g_1 h_3^{\circ} c \\ g_3^{-1} h_1^{\circ -1} a & g_3^{-1} h_2^{\circ -1} b & g_3^{-1} h_3^{\circ -1} c \end{array} . \quad (2.8')$$

aus Satz 2.1, bis auf die Umbenennung  $g_2 = g_3^{-1}$ .

Es wurden die Initialblöcke von  $B(\sigma)$  bijektiv in die von  $B^\wedge(\sigma)$  umgerechnet, und damit auch deren Spezialisierungen. Ergibt eine Spezialisierung von  $B(\sigma)$  ein Sudoku  $A$ , so gibt die umgerechnete Spezialisierung das gleiche Sudoku auf  $B^\wedge(\sigma)$ , und umgekehrt.

**Bemerkung 2.5.** Die beiden Blockschemata sind initial-äquivalent

$$B(\sigma) \approx B^\wedge(\sigma)$$

Es gilt also

$$B(\sigma) \text{ generisch} \iff B^\wedge(\sigma) \text{ generisch}$$

$$\text{Sud } B(\sigma) = \text{Sud } B^\wedge(\sigma).$$

Die Sudokumengen sind gleich. Bei der Umwandlung ist das  $S$ -Tripelglied  $g_2$  herausgefallen, für Anzahlaussagen spielt die  $S$ -Tripel-Eigenschaft also keine Rolle!

Beide Initialformen haben ihre eigenen Vorteile.  $B(\sigma)$  erzwingt die Fixeigenschaft vom  $\sigma$ -Typ und suggeriert den Übergang zum dualen Typ  $\sigma^\circ$ ,  $B^\wedge$  ist geeignet für die Konstruktion von Fixsudokus und Anzahlbestimmungen.

## Duale Situation

Auch für den dualen Leitoperator  $\sigma^\circ$  wird ein zugehöriges fixes Blockschema in Diagonallage angegeben. Naheliegenderweise entsteht dieses durch Anwendung der Transposition auf das fixe Blockschema  $B$  aus (2.18).

Der  $t$ -konjugierte Fixoperator  $(\sigma w)^t$  hat das  $t$ -konjugierte fixe Blockschema  $t B$ . Der neue Fixoperator ist

$$(\sigma w)^t = \sigma^t g^t h^{\circ t} = \sigma^\circ g^\circ h .$$

Als globaler Operator spiegelt  $t$  zunächst die Blöcke an der Blockdiagonalen und transponiert dann die Blöcke. Es entstehen Blöcke vom Typ

$$t g_i h_j^\circ a = g_i^\circ h_j t a = g_i^\circ h_j a' .$$

Somit folgt aus (2.18)

$$t B = \begin{matrix} a' & g_1^\circ h_1 a' & g_3^\circ h_1^{-1} a' \\ g_1^\circ h_2^{-1} b' & b' & g_2^\circ h_2 b' \\ g_3^\circ h_3 c' & g_2^\circ h_3^{-1} c' & c' \end{matrix}, \quad (2.18^\circ)$$

Hierbei ist  $a'$  die Matrixtransponierte, wie üblich.

**Satz 2.4°** ( $\sigma^\circ$ -Fall). Unter der Voraussetzung  $rgB = 3$  hat die

Fixgleichung

$$\sigma^\circ w^\circ B = B \text{ mit Tripeln } g^\circ = (g_1^\circ, g_2^\circ, g_3^\circ), h = (h_1, h_2, h_3) \quad (2.16^\circ)$$

genau dann eine generische Lösung in Diagonallage, wenn für die Tripel  $g^\circ$  und  $h$  gilt

- (a)  $g^\circ$  ist ein  $S$ -Tripel aus  $S_3^{\circ 3}$
- (b)  $h_i \in \{s, s^{-1}\}$  für alle  $i$ .

Die eindeutige Lösung als generisches Blockschema in Diagonallage ist dann

$$B(\sigma^\circ | a b c) = B(\sigma^\circ; h, g^\circ | a b c) = \begin{matrix} a & g_1^\circ h_1 a & g_3^\circ h_1^{-1} a \\ g_1^\circ h_2^{-1} b & b & g_2^\circ h_2 b \\ g_3^\circ h_3 c & g_2^\circ h_3^{-1} c & c \end{matrix} . \quad (2.18^\circ)$$

In Analogie zum  $\sigma$ -Fall hat man das

**Korollar.** Durch Einschränkung der Sudokus auf  $(2.18^\circ)$  auf die 1. Vertikalfigur entsteht eine Bijektion

$$\text{Sud } B(\sigma^\circ | a \ b \ c) \longrightarrow \text{Praes } V_1(a \ b \ c).$$

auf die Praesudokus von  $V_1$ .

### Die symmetrische Situation

Der Leitoperator  $\sigma' = \sigma\sigma^\circ$  operiert auf den Horizontal- und Vertikalfiguren symmetrisch. Die zugehörige

Fixgleichung

$$\sigma' w B = B \text{ mit } w = (g_i h_j^\circ) \quad (2.19)$$

ist zunächst in Blockschemata  $B \in \mathbf{X}$  zu lösen. Nach (2.11) wirkt  $\sigma'$  auf  $gh^\circ B$  so:

$$\begin{array}{lll} g_3 h_3^\circ B_{33} & g_3 h_1^\circ B_{31} & g_3 h_2^\circ B_{32} \\ \sigma' g h^\circ B = g_1 h_3^\circ B_{13} & g_1 h_1^\circ B_{11} & g_1 h_2^\circ B_{12} \\ g_2 h_3^\circ B_{23} & g_2 h_1^\circ B_{21} & g_2 h_2^\circ B_{22} \end{array}$$

Vergleich mit  $B$  ergibt, wenn  $a = B_{11}$  gesetzt wird

$$a = g_3 h_3^\circ B_{33}, \quad B_{33} = g_2 h_2^\circ B_{22}, \quad B_{22} = g_1 h_1^\circ a,$$

also

$$g_3 g_2 g_1 = 1, \quad h_3^\circ h_2^\circ h_1^\circ = 1,$$

die Tripel  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{h}^\circ$  sind also  $S$ -Tripel.

Der weitere Vergleich erzwingt die Festlegung der anderen Initialblöcke

$$b = B_{12} = g_3 h_1^\circ B_{31}, \quad B_{31} = g_2 h_3^\circ B_{23}, \quad B_{23} = g_1 h_2^\circ b,$$

somit  $B_{31} = g_3^{-1} h_1^{\circ -1} b$ , und weiter

$$c = B_{13} = g_3 h_2^\circ B_{32}, \quad B_{32} = g_2 h_1^\circ B_{21}, \quad B_{21} = g_1 h_3^\circ c,$$

also  $B_{32} = g_3^{-1} h_2^{\circ -1} c$ . Insgesamt ergibt sich

**Satz 2.4'** ( $\sigma'$ -Fall). Die Fixgleichung (2.19) hat eine Lösung durch das Blockschema

$$B = B(\sigma'; \mathbf{g}, \mathbf{h}^\circ | a \ b \ c) = \begin{matrix} a & b & c \\ g_1 h_3^\circ c & g_1 h_1^\circ a & g_1 h_2^\circ b \\ g_3^{-1} h_1^{\circ -1} b & g_3^{-1} h_2^{\circ -1} c & g_3^{-1} h_3^{\circ -1} a \end{matrix}, \quad (2.20)$$

genau dann, wenn beide Tripel  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{h}^\circ$   $S$ -Tripel sind. In dieser Form ist die Lösung eindeutig.

Der Fall des Leitoperators  $\sigma\sigma^{\circ-1}$  wird durch Konjugation mit  $\rho^\circ$  auf den  $\sigma'$ -Fall zurückgeführt

$$(\sigma' w)^{\rho^\circ} = \sigma\sigma^{\circ-1}w^{\rho^\circ} \quad \text{lässt } \rho^\circ B(\sigma') \text{ fest.}$$

Dabei ist  $h^{\circ\rho^\circ}$  das inverse  $S$ -Tripel

$$h_1^\circ h_2^\circ h_3^\circ = 1.$$

Wieder stellt sich die

*Frage*

Wann ist  $B(\sigma')$  in (2.20) generisch?

Dazu gehen wir zunächst zu dem Spezialfall mit trivialen  $S$ -Tripeln über

$$B^* = B(\sigma'; \mathbf{1}, \mathbf{1} | a \ b \ c) = \begin{matrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{matrix},$$

1-rangige Sudokus auf  $B^*$  wurden bereits in (2.7') angegeben.

Ist dieses Blockschema generisch, wenn es 3-rangig ist?

Zunächst erkennt man, dass sich  $B^*$  aus „gleichartigen“ Streifenfiguren zusammensetzt:

$$\begin{matrix} a & b & c & b & c \\ c & & & c & a & b & b \\ b & & & c & & b & c & a \end{matrix} \quad (2.21)$$

den *Winkelfiguren*. Wenn ein Praesudoku auf der linken Winkelfigur

$$\begin{matrix} a & b & c \\ \text{WF:} & c \\ & b \end{matrix}$$

existiert, so bestimmt dieses auch Praesudoku auf den anderen beiden Winkelfiguren, die sich dann zu einem Sudoku zusammensetzen.

Die Frage ist also: Hat die linke Winkelfigur WF eine Spezialisierung zu einem Praesudoku? Salopp: Gibt es Praesudokus, die auf der Winkelfigur WF leben?

Die schärfere Frage ist das

## Winkelproblem

Man bestimme die Anzahl # Praes WF der Praesudokus auf der Winkelfigur.

Dazu ist „numerische Hilfe“ erforderlich.

Wir fassen zunächst das Bisherige zusammen:

**Satz 2.5.**

(a) Jeder Leitoperator  $\tau \in \Sigma$  hat Parametersysteme  $w(\tau) \in T^*$  derart, dass gilt:

$\tau^\wedge = \tau w(\tau)$  ist Fixoperator auf dem Raum  $X$  der Blockschemata genau dann, wenn die  $\tau$ -Norm 1 ist

$$N_\tau w(\tau) = 1. \quad (\alpha)$$

Zu jedem  $w(\tau) \in T^*$  mit  $(\alpha)$  existiert ein explizit bekanntes fixes Blockschema  $B(\tau)$  zu  $\tau^\wedge$  in besonderer Lage der Initialblöcke:

- Diagonallage in den Fällen  $\sigma, \sigma^\circ$
- Streifenlage im Fall  $\sigma'$ .

In den Parametertripeln  $g$  und  $\mathbf{h}^\circ$  drückt sich die Relation  $(\alpha)$  in den  $\tau$ -abhängigen Schließungsbedingungen aus, z.B. im Fall  $\tau = \sigma$  durch

$$(\beta) \quad g_3 g_2 g_1 = 1 \quad \text{und} \quad h_i^\circ i^3 = 1 \quad \text{für alle } i.$$

(b) Hat  $B(\tau)$  in den Fällen  $\sigma, \sigma^\circ$  den Rang 3, so ist es generisch genau dann, wenn die Zusatzbedingung erfüllt ist

$$(\gamma) \quad h_i^\circ \in \{s^\circ, s^{\circ-1}\} \quad \text{im Fall } \sigma, \quad g_i \in \{s, s^{-1}\} \quad \text{im Fall } \sigma^\circ.$$

In allen Fällen: Fixoperatoren haben die Ordnung 3.

## 2.5 Superfixe

Bisher wurden vorwiegend 3-rangige Blockschemata und deren Fixeigenschaften untersucht. Die Ergebnisse zeigten, dass die 3-Rangigkeit in den betrachteten Fällen sogar eine Voraussetzung dafür war, dass fixe Blockschemata Sudoku-Spezialisierungen besitzen, also generisch sind.

Als Folge des vorbereitenden Lemmas 2.2 tauchten auch 1-rangige Blockschemata  $C(a)$  und  $C^\circ(a)$  auf, über die zunächst nichts weiter ausgesagt wurde. Man erkennt aber sofort, dass sie fix unter  $\sigma'$  sind

$$\sigma' C(a) = C(a), \sigma' C^\circ(a) = C^\circ(a),$$

und sie sind trivialerweise generisch durch die Spezialisierung  $a \rightarrow e$  von  $a$  auf die Grundmatrix  $e$ . Es entstehen die beiden 1-rangigen unter  $\sigma'$  fixen Sudokus  $C$  und  $C^\circ$  aus Abschnitt 2.2. Dass sie weitere Eigenschaften haben, erkennt man nicht ohne weiteres.

Arnold Schönhage [17] hat nun 1-rangige Sudokus entdeckt mit einer Fixgruppe der Ordnung 9, die er *Superfixe* nannte. Sein Ergebnis ist

**Satz 2.6 (i).** Es gibt genau 4 superfixe Sudokus mit der Blockdiagonalen  $\begin{array}{ccc} e & & e \\ & e & : \\ & & e \end{array}$

1	2	3	9	7	8	5	6	4	1	2	3	8	9	7	6	4	5
4	5	6	3	1	2	8	9	7	4	5	6	2	3	1	9	7	8
7	8	9	6	4	5	2	3	1	7	8	9	5	6	4	3	1	2
5	6	4	1	2	3	9	7	8	6	4	5	1	2	3	8	9	7
$C^\circ =$	8	9	7	4	5	6	3	1	2	und	$U =$	9	7	8	4	5	6
	2	3	1	7	8	9	6	4	5			3	1	2	7	8	9
	9	7	8	5	6	4	1	2	3			8	9	7	6	4	5
	3	1	2	8	9	7	4	5	6			2	3	1	9	7	8
	6	4	5	2	3	1	7	8	9			5	6	4	3	1	2

Die anderen beiden sind zu diesen  $\rho'$ -konjugiert.

Man erkennt in dem ersten Sudoku das bekannte  $C^\circ$  wieder. Es als superfix zu erkennen, ist leicht, wenn man die Operatorschreibweise (2.7) hinzuzieht:

$$C^\circ = \begin{matrix} e & s'^{-1}e & s'e \\ s'e & e & s'^{-1}e \\ s'^{-1}e & s'e & e \end{matrix}$$

hat 2 unabhängige Fixoperatoren, die G-Fixgruppe ist

$$Fix_{G_0} C^\circ = [\sigma^* s', \sigma^\circ * s'^{-1}] .$$

Man kann natürlich aus der numerischen Gestalt von  $U$  auch die Operatorschreibweise herstellen und daraus die beiden Fixoperatoren finden. Das Ergebnis von Satz 2.6 (i) wurde numerisch mit dem Computer gewonnen. Es stellt sich die *Frage*: Kann das Ergebnis auch mit theoretischen Mitteln gewonnen werden?

Dies gelingt durch

*Verschmelzung*

Nach Satz 2.2 hat man Fixoperatoren in

$$Q = T^* \rtimes [\sigma, \sigma^\circ]$$

zu suchen. Dabei kann man sich auf die Leitoperatoren

$$\sigma, \sigma^\circ, \sigma'$$

beschränken, denn ihre Inversen und auch solche  $\sigma \sigma^{\circ -1}$  sind unter  $[\rho, \rho^\circ]$  konjugiert.

Nun suchen wir ja 2 unabhängige Fixoperatoren, deren Paare von Leitoperatoren

$$\sigma, \sigma^\circ - \sigma, \sigma' - \sigma^\circ, \sigma'$$

sein können. Aber wenn  $\sigma, \sigma'$  zu Fixoperatoren gehören, so auch  $\sigma^{-1}\sigma' = \sigma^\circ$ .

Es genügt also, unabhängige Fixoperatoren mit Leitoperatoren  $\sigma, \sigma^\circ$  zu suchen.

Nach diesen Vorbemerkungen beginnen wir mit den 3-rangigen generischen Blockschemata aus Satz 2.4 und 2.4° zu den Leitoperatoren  $\sigma, \sigma^\circ$ . Dabei werden die Parameter im  $\sigma^\circ$ -Fall anders bezeichnet.

Die fixen Blockschemata

$$B(\sigma) = \begin{array}{ccc} a & g_1^{-1} h_2^{\circ -1} b & g_3 h_3^{\circ} c \\ g_1 h_1^{\circ} a & b & g_2^{-1} h_3^{\circ -1} c \\ g_3^{-1} h_1^{\circ -1} a & g_2 h_2^{\circ} b & c \end{array} \quad (2.22)$$

und

$$B(\sigma^\circ) = \begin{array}{ccc} a & u_1 v_1^{\circ -1} b & u_1^{-1} v_3^{\circ -1} a \\ u_2^{-1} v_1^{\circ -1} b & b & u_2 v_2^{\circ} b \\ u_3 v_3^{\circ} c & u_3^{-1} v_2^{\circ -1} c & c \end{array} \quad (2.22')$$

werden gleichgesetzt

$$B^\wedge = B(\sigma) = B(\sigma^\circ), \text{ woraus sogleich } a = b = c \text{ folgt.}$$

Daraus folgen die Relationen

$$\begin{array}{ll} g_1^{-1} = u_1, & h_2^{\circ -1} = v_1^{\circ}; \\ g_1 = u_2^{-1}, & h_1^{\circ} = v_1^{\circ -1}; \\ g_3^{-1} = u_3, & h_1^{\circ -1} = v_3^{\circ}; \end{array} \quad \begin{array}{ll} g_3 = u_1^{-1}, & h_3^{\circ} = v_3^{\circ -1} \\ g_2^{-1} = u_2, & h_3^{\circ -1} = v_2^{\circ} \\ g_2 = u_3^{-1}, & h_2^{\circ} = v_2^{\circ -1} \end{array}$$

Gemäß Satz 2.4 ergeben sich daraus die Mengenbeziehungen

$$\{g_i : i = 1, 2, 3\} = \{u_i^{-1}\} = \{s, s^{-1}\}; \quad \{h_i^{\circ}\} = \{v_i^{\circ -1}\} = \{s^\circ, s^{\circ -1}\} \quad (2.23)$$

Nun sind die Tripel  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{v}^\circ$   $S$ -Tripel nach Satz 2.4 und 2.4°. Da sie im „Vorrat“  $\{s, s^{-1}\}$  bzw.  $\{s^\circ, s^{\circ -1}\}$  liegen, müssen sie konstante  $S$ -Tripel sein:

$$\mathbf{g} = (s, s, s) \text{ oder } = s^{-1} \text{ und } \mathbf{v}^\circ = s^\circ \text{ oder } = s^{\circ -1}.$$

Wegen  $\mathbf{g} = \mathbf{u}^{-1}, \mathbf{h}^\circ = \mathbf{v}^{\circ -1}$  folgt, dass auch die  $u_i$  bzw.  $h_i^{\circ}$  konstante Werte haben, also  $s$  oder  $s^{-1}$  bzw.  $s^\circ$  oder  $s^{\circ -1}$ . Die Tripelparameter  $\mathbf{g}, \mathbf{h}^\circ$  von  $B(\sigma)$  bestimmen die  $\mathbf{u}, \mathbf{v}^\circ$  von  $B(\sigma^\circ)$ .

Aus der Gleichsetzung beider Blockschemata folgt für die Parameter

$$\mathbf{g} \text{ und } \mathbf{h}^\circ \text{ sind konstant aus } \{\mathbf{s}, \mathbf{s}^{-1}\} \text{ bzw. } \{\mathbf{s}^\circ, \mathbf{s}^{\circ -1}\}.$$

Die zugehörigen Operatoren aus  $T^*$  sind dann

$$g = {}^*s \text{ oder } {}^*s^{-1} \text{ und } h^\circ = {}^*s^\circ \text{ oder } {}^*s^{\circ -1}.$$

Dabei sind die beiden alternativen Entscheidungen für  $g$  und  $h^\circ$  unabhängig. Die möglichen Paare von Fixoperatoren von  $B^\wedge$  sind daher

- (a)  $\sigma {}^*s', \sigma^\circ {}^*s'^{-1}$  und  $\sigma {}^*s'^{-1}, \sigma^\circ {}^*s'$
- (b)  $\sigma {}^*s {}^*s^{\circ -1}, \sigma^\circ {}^*s^{-1} {}^*s^\circ$  und  $\sigma {}^*s^{-1} {}^*s^\circ, \sigma^\circ {}^*s {}^*s^{\circ -1}$ . (2.24)

Diese Paare führen auf Blockschemata  $C(a)$ ,  $C^\circ(a)$  im Fall (a) und auf  $U(a)$ ,  $U^\circ(a)$  im Fall (b). Sie haben die konstante Blockdiagonale gemeinsam, sind also 1-rangig. Multipliziert man die Paare von Fixoperatoren in allen 4 Fällen, so erhält man stets  $\sigma'$ . Nach Spezialisierung  $a \mapsto e$  ergibt sich

**Satz 2.6 (ii).** *Die Verschmelzung ergibt die Existenz von 2 Paaren 1-rangiger superfixer Sudokus mit Blockdiagonale  $\begin{array}{ccc} e & e & e \\ e & e & e \\ e & e & e \end{array}$ , nämlich  $C, C^\circ, U, U^\circ$ .*

*Sie liegen auf dem Blockschema  $B^*$ , da sie unter  $\sigma'$  fix sind. Es kann keine weiteren Superfixe dieser Art geben.*

Die Operatorschreibweise von  $U$  ist

$$U = s^{-1}s^\circ e \quad \begin{matrix} e \\ e \\ ss^{\circ-1}e \end{matrix} \quad \begin{matrix} ss^{\circ-1}e \\ e \\ s^{-1}s^\circ e \end{matrix} \quad \begin{matrix} s^{-1}s^\circ e \\ ss^{\circ-1}e \\ e \end{matrix} .$$

## 2.6 Die Charakteristik

Bereits in [18] schlug Schönhage vor, Kardinalitäten der wechselseitigen Durchschnitte von Zeilen- bzw. Spaltenmengen von Sudokus zu betrachten. Dass dies in der Tat zu nützlichen Sudoku-Invarianten führt, zeigt die folgende Einführung der Charakteristik und später (Abschnitt 6.6) auch der Distanz.

Jedem Streifen eines Sudokus lässt sich ein charakteristischer Zahlwert zuordnen. Diese Charakteristik verhält sich übersichtlich bei Sudoku-Transformationen und ist daher bei der Untersuchung von Fixsudokus nützlich.

**Lemma 2.4.** *Sei  $S = abc$  ein horizontales Praesudoku.*

*Dann haben die Anzahlen der „versetzten“ Durchschnitte der Zeilenmengen*

$$\#(a_i \cap b_{i+1}) \text{ mit Indizes } \mod 3$$

*für alle  $i$  den gleichen Wert. Dieser gemeinsame Wert in  $\{0, 1, 2, 3\}$  wird mit  $\chi(a, b)$  bezeichnet.*

*Weiter haben  $\chi(a, b)$ ,  $\chi(b, c)$  und  $\chi(c, a)$  den gleichen Wert, der mit  $\chi(S) = \chi(a, b, c)$  bezeichnet und Charakteristik des Praesudokus genannt wird.*

$\chi'(S) := 3 - \chi(S)$  heißt die komplementäre Charakteristik.

Es gelten folgende Eigenschaften:

Eine Zeilenpermutation  $g$  von  $S$  wirkt je nach Parität invariant bzw. komplementär auf die Charakteristik:

$$\chi(gS) = \begin{cases} \chi(S) & \text{für } g \text{ gerade} \\ \chi'(S) & \text{für } g \text{ ungerade} \end{cases} \quad (2.25)$$

Eine Permutation  $\pi$  der Blöcke von  $S$  wirkt je nach Parität invariant bzw. komplementär auf die Charakteristik:

$$\chi(\pi S) = \begin{cases} \chi(S) & \text{für } \pi \text{ gerade} \\ \chi'(S) & \text{für } \pi \text{ ungerade} \end{cases} \quad (2.26)$$

Die Charakteristik eines Vertikalstreifens ist als die Charakteristik des durch Transposition entstehenden Horizontalstreifens definiert. Es gelten analoge Eigenschaften.

Unter den horizontalen bzw. vertikalen Charakteristiken eines Sudokus  $A$  verstehen wir die Charakteristiken

$$\begin{aligned} \chi_i(A) &= \chi(A_i) \text{ des } i\text{-ten Horizontalstreifens} \\ \chi^j(A) &= \chi(A^j) \text{ des } j\text{-ten Vertikalstreifens.} \end{aligned}$$

*Beweis.* Zunächst wird das Praesudoku  $a, b$  untersucht. Wir betrachten die  $3 \times 3$ -Matrix  $I$  mit dem  $(i, j)$ -Eintrag

$$I_{ij} := \#(a_i \cap b_j)$$

In dieser Matrix sind offenbar alle Zeilen- und Spaltensummen 3. Wegen der Sudoku-Bedingung sind alle Diagonalelemente  $I_{ii} = 0$ . Setzt man  $\chi := I_{12}$ , so folgt sukzessive  $I_{13} = 3 - \chi$ ,  $I_{23} = \chi$ ,  $I_{21} = 3 - \chi$ ,  $I_{31} = \chi$ ,  $I_{32} = 3 - \chi$ .

Also ist  $I_{12} = I_{23} = I_{31}$  und somit  $\chi(a, b)$  wohldefiniert. Auch folgen (2.25) und (2.26) analoge Eigenschaften für das Praesudoku  $ab$ :

Eine Zeilenpermutation  $g$  von  $ab$  wirkt je nach Parität invariant bzw. komplementär auf die Charakteristik:

$$\chi(g(ab)) = \begin{cases} \chi(a, b) & \text{für } g \text{ gerade} \\ \chi'(a, b) & \text{für } g \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$\chi(b, a) = \chi(a, b)$$

Für das Praesudoku  $bc$  erhält man analoge Eigenschaften für die durch

$$J_{ij} := \#(b_i \cap c_j)$$

gegebene Matrix  $J$ .

Wegen  $a_i \cup b_i \cup c_i = \Omega := \{1, \dots, 9\}$  besteht folgender Zusammenhang zwischen  $I$  und  $J$ :

$$I_{ij} + J_{ji} = \#(b_j \cap a_i) + \#(b_j \cap c_i) = \#(b_j \cap \Omega) - \#(b_j \cap b_i) = 3 \text{ für } i \neq j.$$

Hieraus folgt aufgrund der speziellen Gestalt von  $I$  offenbar  $J = I$  und somit  $\chi(b, c) = \chi(a, b)$ . Analog folgt auch  $\chi(c, a) = \chi(a, b)$ .

Somit ist  $\chi(S)$  wohldefiniert. Die Gültigkeit von (2.25) und (2.26) folgt aus den oben angegebenen analogen Eigenschaften für das 2-Block-Praesudoku  $a, b$ .  $\square$

Das folgende Lemma beschreibt das Verhalten der horizontalen und vertikalen Charakteristiken von Sudokus unter Ziffernwirkungen sowie unter Sudoku-Transformationen.

Bei den lokalen Operatoren  $w \in T^*$  wird die im  $i$ -ten Horizontalstreifen bewirkte Zeilenpermutation mit  $w_i$  und die im  $j$ -ten Vertikalstreifen bewirkte Spaltenpermutation mit  $w^j$  bezeichnet.

Die Wirkung eines globalen Operators  $\tau \in H^*$  wird zerlegt  $\tau = \rho \pi$  in die Wirkung  $\rho$  „parallel“ und  $\pi$  „orthogonal“ zum gegebenen Streifen. Für einen Horizontalstreifen ist also  $\rho \in H$  und  $\pi \in H^\circ$ , für einen Vertikalstreifen ist es umgekehrt.

**Lemma 2.5.** *Sei A ein Sudoku.*

*Ziffernwirkungen  $\alpha \in Z$  lassen die Charakteristiken invariant:*

$$\chi_i(\alpha A) = \chi_i(A), \quad \text{bzw.} \quad \chi^j(\alpha A) = \chi^j(A). \quad (2.27)$$

*Der lokale Operator  $w \in T^*$  wirkt je nach Parität seiner Wirkung im jeweiligen Streifen invariant oder komplementär auf dessen Charakteristik:*

$$\chi_i(wA) = \begin{cases} \chi_i(A) & \text{für } w_i \text{ gerade} \\ \chi'_i(A) & \text{für } w_i \text{ ungerade} \end{cases} \quad \chi^j(wA) = \begin{cases} \chi^j(A) & \text{für } w^j \text{ gerade} \\ \chi'^j(A) & \text{für } w^j \text{ ungerade} \end{cases} \quad (2.28)$$

*Der parallele globale Operator  $\rho$  verschiebt die Charakteristik:*

$$\chi_i(\rho A) = \chi_{\rho^{-1}i}(A) \quad \text{bzw.} \quad \chi^j(\rho A) = \chi^{\rho^{-1}j}(A). \quad (2.29)$$

*Der orthogonale globale Operator  $\pi$  wirkt je nach Parität invariant oder komplementär auf die Charakteristik:*

$$\chi_i(\pi A) = \begin{cases} \chi_i(A) & \text{für } \pi \text{ gerade} \\ \chi'_i(A) & \text{für } \pi \text{ ungerade} \end{cases} \quad \chi^j(\pi A) = \begin{cases} \chi^j(A) & \text{für } \pi \text{ gerade} \\ \chi'^j(A) & \text{für } \pi \text{ ungerade} \end{cases} \quad (2.30)$$

*Bei Anwendung der Transposition  $t$  ist die Charakteristik des Bildstreifens gleich der Charakteristik des Ausgangsstreifens:*

$$\chi_i(tA) = \chi^i(A) \quad \text{bzw.} \quad \chi^j(tA) = \chi_j(A). \quad (2.31)$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt o. E. nur für die horizontalen Charakteristiken.

*Ziffernwirkung  $\alpha$*

Die horizontale Charakteristik ist definiert über Mächtigkeiten von Durchschnitten von Zeilenmengen. Diese werden durch Ziffernwirkungen nicht verändert.

*Lokaler Operator  $w \in T^*$*

Vertikale Komponenten von  $w$  verändern die Zeilenmengen nicht, also auch nicht die horizontale Charakteristik. Horizontale Komponenten von  $w$  außerhalb

des betrachteten Streifens verändern dessen Charakteristik offenbar auch nicht. Die zum betrachteten Streifen gehörende horizontale Komponente von  $w$  schließlich wirkt nach (2.25) entsprechend ihrer Parität invariant oder komplementär auf die Charakteristik.

#### *Paralleler globaler Operator $\rho \in H$ (Permutation der Horizontalstreifen)*

Der  $i$ -te Horizontalstreifen von  $\rho A$  ist identisch mit dem  $(\rho^{-1}i)$ -ten Horizontalstreifen von  $A$ , daher stimmen ihre Charakteristiken überein:  $\chi_i(\rho A) = \chi_{\rho^{-1}i}(A)$ .

#### *Orthogonaler globaler Operator $\pi \in H^\circ$ (Permutation der Vertikalstreifen)*

$\pi$  bewirkt im Horizontalstreifen  $A_i$  eine Permutation der Blöcke. Nach (2.26) ist die Wirkung auf die Charakteristik von  $A_i$  invariant bei geradem  $\pi$  und komplementär bei ungeradem  $\pi$ .

#### *Die Transposition*

$\chi^i(A) = \chi_i(tA)$  und  $\chi^j(tA) = \chi_j(A)$  gelten nach Definition der vertikalen Charakteristik.  $\square$

Für spätere Verwendung wird der folgende Satz bewiesen, der für ein horizontales Praesudoku  $a, b, c$  in Abhängigkeit von seiner Charakteristik die Zeilenmengen von  $b$  und  $c$  als Modifikation der Zeilenmengen von  $a$  beschreibt.

Auch hier sind Indizes mod 3 zu verstehen.

Ferner werden für eine Ziffernmenge  $a$  und eine Ziffer  $x$  folgende abkürzende Schreibweisen verwendet:

Die 1-elementige Menge  $\{x\}$  wird, wenn der Kontext Verwechslungen ausschließt, auch nur mit  $x$  bezeichnet.

$a - x$  bezeichnet im Fall  $x \in a$  die Differenzmenge  $a \setminus \{x\}$ .

$a + x$  bezeichnet im Fall  $x \notin a$  die Vereinigungsmenge  $a \cup \{x\}$ .

**Satz 2.7.** Im horizontalen Praesudoku  $abc$  der Charakteristik  $\chi$  entstehen die Zeilenmengen von  $b$  und  $c$  aus denen von  $a$  in folgender Weise:

Für  $\chi \in \{0, 3\}$  ist

$$b_i = a_{i-\delta} \quad \text{und} \quad c_i = a_{i+\delta} \quad \text{für alle } i. \quad (2.32)$$

Für  $\chi \in \{1, 2\}$  existieren Ziffern  $x_i \in a_i$ , so dass mit  $u_i := a_i - x_i$  gilt:

$$b_i = u_{i-\delta} + x_{i+\delta} \quad \text{und} \quad c_i = u_{i+\delta} + x_{i-\delta} \quad \text{für alle } i. \quad (2.33)$$

Dabei bezeichnet  $\delta := \begin{cases} -1 & \text{für } \chi \leq 1 \\ +1 & \text{für } \chi \geq 2 \end{cases}$ .

Für ein vertikales Praesudoku  $acb$  der Charakteristik  $\psi$  gilt entsprechend für die Spaltenmengen von  $b$  und  $c$ :

Für  $\psi \in \{0, 3\}$  ist

$$b^j = a^{j+\varepsilon} \quad \text{und} \quad c^j = a^{j-\varepsilon} \quad \text{für alle } j. \quad (2.34)$$

Für  $\psi \in \{1, 2\}$  existieren Ziffern  $y_j \in a^j$ , so dass mit  $v_j := a^j - y_j$  gilt:

$$b^j = v_{j+\varepsilon} + y_{j-\varepsilon} \quad \text{und} \quad c^j = v_{j-\varepsilon} + y_{j+\varepsilon} \quad \text{für alle } j. \quad (2.35)$$

Dabei bezeichnet  $\varepsilon := \begin{cases} -1 & \text{für } \psi \leq 1 \\ +1 & \text{für } \psi \geq 2 \end{cases}$ .

**Bemerkung 2.6.** Die verschiedenen Bezeichnungen in Satz 2.7 für den horizontalen und vertikalen Fall sowie die andere Reihenfolge der Blöcke im vertikalen Praesudoku sind in Hinblick auf die Anwendung zum Beweis von Satz 2.9 gewählt.

*Beweis von Satz 2.7.* Der Beweis erfolgt o. E. nur für horizontale Praesudokus.

*Fall  $\chi = 3$*

Nach Definition ist  $\chi(a, b) = \chi(c, a) = 3$  und  $\#(a_i \cap b_{i+1}) = 3$ ,  $\#(c_i \cap a_{i+1}) = 3$  für alle  $i$ , also  $b_i = a_{i-1}$  und  $c_i = a_{i+1}$  für alle  $i$ .

*Fall  $\chi = 2$*

Nach Definition ist  $\chi(a, b) = \chi(c, a) = 2$  und  $\#(a_i \cap b_{i+1}) = 2$ ,  $\#(c_i \cap a_{i+1}) = 2$  für alle  $i$ . Bezeichne jeweils  $x_i$  dasjenige Element von  $a_i$ , welches nicht in  $a_i \cap b_{i+1}$  liegt. Dann ist also  $u_i := a_i - x_i \subset b_{i+1}$ .

$b_i$  enthält also  $u_{i-1}$ . Da  $b_i$  zu  $a_i$  disjunkt ist, muss das dritte Element von  $b_i$  aus  $a_{i+1}$  kommen. Da  $a_{i+1} = u_{i+1} + x_{i+1}$  ist und  $u_{i+1}$  in  $b_{i-1}$  liegt, kommt dafür nur das verbleibende Element  $x_{i+1}$  in Frage. Somit ist  $b_i = u_{i-1} + x_{i+1}$  für alle  $i$ .

Schließlich ist  $c_i = \Omega \setminus (a_i \cup b_i) = (a_i \cup a_{i-1} \cup a_{i+1}) \setminus (a_i \cup u_{i-1} + x_{i+1}) = x_{i-1} + u_{i+1}$ , also  $c_i = u_{i+1} + x_{i-1}$  für alle  $i$ .

*Fall  $\chi = 0$  und 1*

Die Behauptung folgt mit Hilfe des bereits Gezeigten so: Man betrachte das Praesudoku  $acb$ . Dieses hat die komplementäre Charakteristik 3 bzw. 2, die schon bewiesenen Teile können also angewandt werden.

Für  $\chi = 0$  ist  $\chi(a, c, b) = 3$ , man erhält:  $b_i = a_{i+1}$ ,  $c_i = a_{i-1}$  für alle  $i$ , was zu zeigen war.

Für  $\chi = 1$  ist  $\chi(a, c, b) = 2$ , man erhält: Es existieren Ziffern  $x_i \in a_i$  mit  $c_i = u_{i-1} + x_{i+1}$  und  $b_i = u_{i+1} + x_{i-1}$  für alle  $i$ , was zu zeigen war.  $\square$

## 2.7 Lösung des Winkelproblems: Die Sondersudokus 1. Art

In Abschnitt 2.4 wurden die Winkelfiguren (2.21) eingeführt und festgestellt, dass die Existenz von 3-rangigen Praesudokus auf der Winkelfigur

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ WF : c \\ & b & \end{array}$$

gleichwertig ist mit der Existenz von 3-rangigen Sudokus auf dem Blockschema

$$B^* = \begin{matrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{matrix}.$$

Da sich die Existenz gegenseitig bedingt, sind sogar die Anzahlen gleich:

$$\#\text{Sud}_3 B^* = \#\text{Praes}_3 WF. \quad (2.36)$$

Der Index 3 weist hin auf einen Rang 3. Die 1-rangigen Lösungen mit Grundblock  $e$  in der Blockdiagonalen sind nach Satz 2.6 bereits bekannt, es sind die  $C, C^\circ, U, U^\circ$ .

Man bemerkt, dass jedes Sudoku  $A$  auf  $B^*$  ein Fixsudoku ist, es gilt offenbar

$$\sigma' B^* = B^*.$$

Ein Praesudoku auf WF muss bei festen Blöcken  $a, b, c$  die Sudokubedingungen horizontal und vertikal erfüllen. Dies sind sehr einschränkende Bedingungen, die vermuten lassen, dass es nur wenige solche Praesudokus gibt. Und so ist es auch.

Das *Winkelproblem* wurde von A. Schönhage in folgender schärferen Form gelöst:

**Satz 2.8.** *Es gibt genau 36 explizit angebbare 3-rangige Sudokus auf dem Blockschema  $e$  mit der Blockdiagonalen  $e$ .*

*Es gibt also genau 40 Sudokus auf  $B^*$  mit Blockdiagonalen aus Grundblöcken  $e$ , es sind sämtlich Fixsudokus zu  $\sigma'$ .*

Die 36 3-rangigen werden als *Sondersudokus 1. Art* bezeichnet.

Ersichtlich vertauscht der Operator  $\rho' = \rho\rho^\circ$  die Blöcke  $b$  und  $c$  von  $B^*$

$$\rho' B^* = \begin{matrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{matrix}.$$

$\rho'$  operiert also auf den Sondersudokus, so dass es für ihre Auflistung genügt, 18 nichtkonjugierte unter  $\rho'$  anzugeben. Dazu genügt es, die Praesudokus auf der Winkelfigur WF mit  $a = e$  anzugeben. Alle Information steckt dann bereits in den zwei numerischen Blöcken  $b$  und  $c$ , die die Sudokus eindeutig bestimmen. Es genügt, diese anzugeben.

### Auflistung der Sondersudokus der 1. Art von Schönhage

1.	5 6 8 9 7 4	2.	5 7 8 9 6 4	3.	5 6 4 9 7 8	4.	6 4 5 9 7 8	5.	6 4 5 9 7 8
	3 9 7 8 1 2		3 9 2 8 1 7		8 9 7 2 3 1		8 9 7 3 1 2		8 9 7 2 3 1
	2 4 1 6 3 5		6 4 1 2 3 5		3 1 2 6 4 5		2 3 1 5 6 4		3 1 2 5 6 4
6.	5 6 7 9 4 8	7.	5 7 4 9 6 4	8.	8 6 4 9 7 5	9.	8 6 7 9 4 5	10.	6 9 7 8 4 5
	8 9 1 3 7 2		8 9 2 8 1 7		2 9 7 3 1 8		2 9 1 3 7 8		2 3 8 9 7 1
	2 3 4 6 1 5		6 3 1 2 4 5		5 3 1 6 4 2		5 3 4 6 1 2		5 1 4 3 6 2
11.	6 9 5 8 4 7	12.	5 9 4 6 7 8	13.	5 9 7 6 4 8	14.	8 9 4 6 7 5	15.	8 9 7 6 4 5
	2 7 8 9 3 1		8 3 7 9 1 2		8 3 1 9 7 2		2 3 7 9 1 8		3 1 2 9 7 8
	3 1 4 5 6 2		2 6 1 3 4 5		2 6 4 3 1 5		5 6 1 3 4 2		5 6 4 2 3 1
16.	8 9 7 5 6 4	17.	8 9 7 5 6 4	18.	8 9 5 6 4 7				
	2 3 1 9 7 8		3 1 2 9 7 8		2 7 1 9 3 8				
	6 4 5 3 1 2		6 4 5 2 3 1		3 6 4 5 1 2				

Die 40 Lösungen des Winkelproblems wurden von *Fritz Ostermann* auch durch eine einfache Konstruktion mittels eines Entscheidungsbaumes gewonnen. Es wird dazu auf seine Homepage [13] verwiesen.

In Kapitel 3 wird die Konjugation der Sondersudokus unter einer erweiterten Sudokugruppe  $G^*$  untersucht.

Sudokus mit der Blockdiagonalen  $e = \begin{smallmatrix} & e \\ e & \end{smallmatrix}$  werden  $e$ -normiert genannt. Die Sätze 2.6 und 2.8 besagen also:

**Korollar.** *Die Sondersudokus der 1. Art und die Superfixe  $C, C^\circ, U, U^\circ$  sind die einzigen  $e$ -normierten unter  $\sigma'$ -fixen Sudokus.*

Es gibt also genau 40  $e$ -normierte Sudokus auf dem Blockschema  $B^*$ , nämlich die oben genannten.

Es sei bemerkt, dass nicht jedes Fixsudoku zu einem  $e$ -normierten konjugiert ist.

Das Winkelproblem kann alternativ zum Vorgehen von Schönhage und Ostermann mit Satz 2.7 angegangen werden. Bilden die Blöcke  $abc$  horizontal bzw.  $acb$  vertikal ein Praesudoku der Charakteristik  $\chi$  bzw.  $\psi$ , so gibt der Satz an, wie die Zeilen- bzw. Spaltenmengen von  $b$  und  $c$  mit denen von  $a$  zusammenhängen. Dabei spielen für  $\chi \in \{1, 2\}$  gewisse Ziffern  $x_i \in a_i$  bzw. für  $\psi \in \{1, 2\}$  gewisse Ziffern  $y_j \in a^j$  eine Rolle.

Beim Winkelproblem liegt die horizontale und vertikale Praesudoku-Eigenschaft gleichzeitig vor. Dann folgen aus Satz 2.7 Aussagen über die Zeilen- und Spaltenmengen der Blöcke  $b$  und  $c$ , wodurch sie vollständig bestimmt sind. Variabilität ist durch die  $x_i$  und / oder  $y_j$  gegeben. Diese wird durch den folgenden Satz für die Situation des Winkelproblems eingeschränkt:

**Satz 2.9.** Liegt in der Winkelfigur

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ c & & \\ b & & \end{array}$$

gleichzeitig horizontal und vertikal ein Praesudoku vor (die Charakteristik sei  $\chi$  bzw.  $\psi$ ), so gilt für die in Satz 2.7 auftretenden Mengen  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  und / oder  $Y = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ :

Für  $\chi \in \{1, 2\}, \psi \in \{0, 3\}$  ist  $X$  eine Spaltenmenge von  $a$ .

Für  $\chi \in \{0, 3\}, \psi \in \{1, 2\}$  ist  $Y$  eine Zeilenmenge von  $a$ .

Für  $\chi, \psi \in \{1, 2\}$  ist  $X = Y$  eine Diagonalmenge von  $a$ ; die Diagonale ist fallend für  $\chi = \psi$  und steigend für  $\chi \neq \psi$ .

*Beweis.* Fall  $\chi \in \{1, 2\}, \psi \in \{0, 3\}$

Nach Satz 2.7 existieren Ziffern  $x_i \in a_i$ , so dass für  $u_i := a_i - x_i$  gilt:

$$\begin{aligned} b_{i+\delta} &= u_i + x_{i-\delta}, & c_{i-\delta} &= u_i + x_{i+\delta} & \text{für alle } i, \\ b^{j-\varepsilon} &= a^j, & c^{j+\varepsilon} &= a^j & \text{für alle } j. \end{aligned} \tag{2.37}$$

In jedem Sudoku-Block schneidet jede Zeilenmenge jede Spaltenmenge in genau einem Element, daher gilt  $\#(a_i \cap a^j) = 1$ ,  $\#(b_{i+\delta} \cap b^{j-\varepsilon}) = 1$ ,  $\#(c_{i-\delta} \cap c^{j+\varepsilon}) = 1$  für alle  $i, j$ . Setzt man hier  $a_i = u_i + x_i$  und die Beziehungen aus (2.37) ein, so lassen sich die 3 erhaltenen Aussagen zusammenfassen zu

$$\#((u_i + x_{i+\delta k}) \cap a^j) = 1 \quad \text{für alle } i, j, k$$

oder

$$\#(u_i \cap a^j) + \#(x_{i+\delta k} \cap a^j) = 1 \quad \text{für alle } i, j, k.$$

Summation über  $k$  ergibt mit  $X := \{x_1, x_2, x_3\}$ :

$$\#(X \cap a^j) = 3 \cdot (1 - \#(u_i \cap a^j)) \quad \text{für alle } i, j.$$

Also ist für alle  $j$   $\#(X \cap a^j)$  durch 3 teilbar, also  $X \cap a^j = \emptyset$  oder  $X = a^j$ .

Offenbar muss für genau ein  $j$  der zweite Fall  $X = a^j$  eintreten.

Fall  $\chi \in \{0, 3\}, \psi \in \{1, 2\}$

Nach Satz 2.7 existieren Ziffern  $y_j \in a^j$ , so dass für  $v_j := a^j - y_j$  gilt:

$$\begin{aligned} b_{i+\delta} &= a_i, & c_{i-\delta} &= a_i & \text{für alle } i, \\ b^{j-\varepsilon} &= v_j + y_{j+\varepsilon}, & c^{j+\varepsilon} &= v_j + y_{j-\varepsilon} & \text{für alle } j. \end{aligned}$$

Entsprechend wie im vorigen Fall folgt

$$\begin{aligned} \#(a_i \cap (v_j + y_{j-\varepsilon k})) &= 1 & \text{für alle } i, j, k \\ \#(a_i \cap v_j) + \#(a_i \cap y_{j-\varepsilon k}) &= 1 & \text{für alle } i, j, k. \end{aligned}$$

Summation über  $k$  ergibt mit  $Y := \{y_1, y_2, y_3\}$ :

$$\#(a_i \cap Y) = 3 \cdot (1 - \#(a_i \cap v_j)) \quad \text{für alle } i, j.$$

Also ist für alle  $i$   $\#(a_i \cap Y)$  durch 3 teilbar, also  $a_i \cap Y = \emptyset$  oder  $Y = a_i$ .

Offenbar muss für genau ein  $i$  der zweite Fall  $Y = a_i$  eintreten.

Fall  $\chi, \psi \in \{1, 2\}$

Nach Satz 2.7 existieren Ziffern  $x_i \in a_i$  und  $y_j \in a^j$ , so dass für  $u_i := a_i - x_i$  und  $v_j := a^j - y_j$  gilt:

$$\begin{aligned} b_{i+\delta} &= u_i + x_{i-\delta}, & c_{i-\delta} &= u_i + x_{i+\delta} & \text{für alle } i, \\ b^{j-\varepsilon} &= v_j + y_{j+\varepsilon}, & c^{j+\varepsilon} &= v_j + y_{j-\varepsilon} & \text{für alle } j. \end{aligned}$$

Analog wie in den vorigen Fällen folgt

$$\#((u_i + x_{i+\delta k}) \cap (v_j + y_{j-\varepsilon k})) = 1 \quad \text{für alle } i, j, k. \quad (2.38)$$

Mit

$$\begin{aligned} q_{i,j} &:= \#(u_i \cap v_j), & r_{i,j} &:= \#(u_i \cap y_j) \\ s_{i,j} &:= \#(x_i \cap v_j), & t_{i,j} &:= \#(x_i \cap y_j) \end{aligned} \quad (2.39)$$

schreibt sich (2.38) als

$$q_{i,j} + r_{i,j-\varepsilon k} + s_{i+\delta k,j} + t_{i+\delta k,j-\varepsilon k} = 1 \quad \text{für alle } i, j, k. \quad (2.40)$$

Mit folgenden Bezeichnungen

$$X := \{x_1, x_2, x_3\}, \quad Y := \{y_1, y_2, y_3\}, \quad U := \bigcup u_i, \quad V := \bigcup v_j$$

ist

$$\Omega = U \dot{\cup} X = V \dot{\cup} Y \quad (2.41)$$

$$\#(U \cap V) = \#(X \cap Y) + 3 \quad (2.42)$$

Zu (2.42):

$$\#(U \cap V) = \#\Omega - \#(X \cup Y) = \#\Omega - \#X - \#Y + \#(X \cap Y) = 9 - 3 - 3 + \#(X \cap Y).$$

Wir betrachten nun den Fall:

$$\text{Es existiert ein } l, \text{ so dass } t_{k,l-\delta\varepsilon k} = 0 \text{ für alle } k. \quad (2.43)$$

Ersetzt man hierin  $k$  durch  $i + \delta k$ , so folgt  $t_{i+\delta k,l-\delta\varepsilon i-\varepsilon k} = 0$ , also verschwindet in (2.40) für  $j = l - \delta\varepsilon i$  der vierte Summand:

$$r_{i,l-\delta\varepsilon i-\varepsilon k} + s_{i+\delta k,l-\delta\varepsilon i} = 1 - q_{i,l-\delta\varepsilon i} \quad \text{für alle } i, k$$

oder nach Ersetzung von  $k$  durch  $k - \delta i$ :

$$r_{i,l-\varepsilon k} + s_{\delta k,l-\delta \varepsilon i} = 1 - q_{i,l-\delta \varepsilon i} \quad \text{für alle } i, k \quad (2.44)$$

Summation über  $i$  ergibt:

$$\#(U \cap \gamma_{l-\varepsilon k}) + \#(x_{\delta k} \cap V) = 3 - \sum_i q_{i,l-\delta \varepsilon i} \quad \text{für alle } k$$

Mit (2.41) folgt

$$\#(X \cap \gamma_{l-\varepsilon k}) + \#(x_{\delta k} \cap Y) = \sum_i q_{i,l-\delta \varepsilon i} - 1 \quad \text{für alle } k$$

Summation über  $k$  ergibt:

$$2 \cdot \#(X \cap Y) = 3 \cdot \left( \sum_i q_{i,l-\delta \varepsilon i} - 1 \right)$$

Es folgt:  $\#(X \cap Y)$  ist durch 3 teilbar, also

$$X \cap Y = \emptyset \quad \text{oder} \quad X = Y \quad (2.45)$$

Angenommen  $X \cap Y = \emptyset$ . Dann ist (2.43) für jedes  $l$  erfüllt, also gilt auch (2.44) für jedes  $l$ . Summation von (2.44) über  $k$  ergibt:

$$\#(u_i \cap Y) + \#(X \cap v_{l-\delta \varepsilon i}) = 3 \cdot (1 - q_{i,l-\delta \varepsilon i}) \quad \text{für alle } i, l$$

Ersetzt man hier  $l$  durch  $j + \delta \varepsilon i$ , so ergibt sich

$$\#(u_i \cap Y) + \#(X \cap v_j) = 3 \cdot (1 - q_{i,j}) \quad \text{für alle } i, j \quad (2.46)$$

Wegen  $\#u_i = 2, \#Y = 3$  und der gegenseitigen Disjunktheit der  $u_i$  existiert höchstens ein  $i$  mit  $u_i \subset Y$  und höchstens ein  $j$  mit  $v_j \subset X$ . Für die übrigen 4 Kombinationen von  $i$  und  $j$  gilt  $\#(u_i \cap Y) \leq 1$  und  $\#(X \cap v_j) \leq 1$ , die linke Seite in (2.46) ist also  $\leq 2$  und folglich ist  $q_{i,j} = 1$ .

Dann ist also für 4 Kombinationen von  $i$  und  $j$   $\#(u_i \cap v_j) = 1$ , d. h.  $\#(U \cap V) \geq 4$ .

Nach (2.42) ist aber  $\#(U \cap V) = 3$ . Somit ist der Fall  $X \cap Y = \emptyset$  zum Widerspruch geführt, nach (2.45) folgt  $X = Y$ .

Ist andererseits (2.43) für kein  $l$  erfüllt, so existiert zu jedem  $l$  ein  $k$  mit  $t_{k,l-\delta \varepsilon k} = 1$ . Die drei Paare  $(k, l - \delta \varepsilon k)$  sind offenbar verschieden, da aus den beiden Koordinaten  $l$  zurückgerechnet werden kann. Daher folgt  $\#(X \cap Y) = \sum_i \sum_j t_{i,j} \geq 3$ , also auch hier  $X = Y$ .

Für  $X = Y$  sind  $U$  und  $V$  disjunkt zu  $X$  und  $Y$ . Daher vereinfacht sich in diesem Fall (2.38) zu

$$\#(u_i \cap v_j) + \#(x_{i+\delta k} \cap \gamma_{j-\varepsilon k}) = 1 \quad \text{für alle } i, j, k.$$

Nun existiert sicherlich ein Paar  $(i, j)$  mit  $\#(u_i \cap v_j) = 0$ . Dann ist also  $x_{i+\delta k} = y_{j-\varepsilon k}$  für alle  $k$  oder nach Ersetzung von  $k$  durch  $\delta(k - i)$ :  $x_k = y_{j-\delta\varepsilon(k-i)}$ . Die Positionen der Elemente von  $X$  in  $a$  sind also  $(k, j - \delta\varepsilon(k - i))$ . Diese bilden eine fallende Diagonale für  $\delta = \varepsilon$  und eine steigende Diagonale für  $\delta \neq \varepsilon$ . Das bedeutet gerade  $\chi = \psi$  bzw.  $\chi \neq \psi$ .  $\square$

Aus den Sätzen 2.7 und 2.9 erhält man eine Maximalaussage über die Lösungen des Winkelproblems: Zu jeder Kombination  $\chi, \psi \in \{0, 3\}$  existiert maximal eine Lösung, zu jeder übrigen Kombination von  $\chi, \psi$  existieren maximal drei Lösungen, da es nur 3 Spalten- bzw. Zeilen- bzw. fallende oder steigende Diagonalmengen in  $a$  gibt.

Da Satz 2.7 die Lösungen konstruktiv angibt, kann überprüft werden, welche Kombinationen von  $\chi, \psi$  und Wahlen von  $X$  bzw.  $Y$  tatsächlich zu Lösungen führen. Es zeigt sich, dass alle nach der Einschränkung von Satz 2.9 verbliebenen Möglichkeiten tatsächlich zu Lösungen führen. Das folgende Korollar ordnet die so gefundenen Lösungen Schönhages Liste zu:

**Korollar.** *Die folgende Tabelle gibt alle Sondersudokus 1. Art zu vorgegebenen Charakteristiken  $\chi$  und  $\psi$  der Horizontal- und Vertikalstreifen an.  $C, C^\circ, U, U^\circ$  bezeichnen die 4 Superfixen. Die Nummern beziehen sich auf Schönhages Liste. Ein \* hinter der Nummer deutet an, dass die Rollen der dort angegebenen Blöcke  $b$  und  $c$  zu vertauschen sind.*

$\chi \backslash \psi$	0	1	2	3
0	$C^\circ$	6, 8, 12	14, 13, 9	$U$
1	3, 4, 17*	2*, 1, 7	11*, 18, 10	15, 16, 5*
2	15*, 16*, 5	11, 18*, 10*	2, 1*, 7*	3*, 4*, 17
3	$U^\circ$	14*, 13*, 9*	6*, 8*, 12*	$C$

## 2.8 Fixe und neutrale Sudokus: Zwei Kriterien

Es ist eine fundamentale Aufgabe, aus der numerischen Gestalt eines Sudokus zu entscheiden, ob ein fixes oder neutrales Sudoku vorliegt. A. Schönhage [17] hat die Fixsudokus durch gewisse Bedingungen charakterisiert, die im Prinzip eine solche Entscheidung ermöglichen. Wir geben hier 2 weitere Kriterien an. Obwohl eine gewisse methodische Verwandtschaft in der Vorgehensweise zwischen Schönhages und unserem ersten Verfahren besteht, ist unser Kriterium durch Fokussierung auf die Blöcke theoretisch besser fassbar und numerisch effektiv.

Zunächst soll ein hinreichendes Kriterium angegeben werden, das sich auf die Ergebnisse der Abschnitte 2.4–2.6 stützt.

Wir erinnern an die Definition in Abschnitt 1, wonach 2 Blöcke  $a, b$  konjugiert sind  $a \simeq b$ , wenn es einen Blockoperator  $y \in \Gamma_0$  gibt mit  $ya = b$ .

Es ist oft opportun, die Typeneinteilungen von Fixsudokus nach deren Leitoperatoren vorzunehmen. Die definierenden 4 fixen Blockschemata vom Rang 3 haben – unter Weglassung der Blockoperatoren aus  $\Gamma_0$  – folgende Gestalt:

$$\sigma, \quad \sigma^\circ, \quad \sigma' = \sigma\sigma^\circ, \quad \sigma^{-1}\sigma^\circ$$

bestimmen die Typen

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	(2.47)
$a \ b \ c$	$a \ a \ a$	$a \ b \ c$	$a \ b \ c$	
$a \ b \ c$	$b \ b \ b$	$c \ a \ b$	$b \ c \ a$	
$a \ b \ c$	$c \ c \ c$	$b \ c \ a$	$c \ a \ b$	

Dabei stehen die Blöcke gleicher Bezeichnung  $a$  für 3 Blöcke  $a_1, a_2, a_3$ , die nach den Ergebnissen der Abschnitte 2.4–2.6 zueinander konjugiert sind

$$a_1 \simeq a_2 \simeq a_3, \text{ entsprechend für } b \text{ und } c.$$

Die Blöcke  $a, b, c$  sind nicht zueinander konjugiert, sie bilden eine Blockbasis.

Geht man nun zu den  $S$ -Spezialisierungen über, so entstehen zu jedem Leitoperator  $\tau$  die Mengen  $\text{Sud } \tau$  aller zu  $\tau$  gehörigen Fixsudokus, die wieder die entsprechende Blockgestalt in (2.47) haben. Bei  $S$ -Spezialisierung gehen konjugierte „unbestimmte“ Blöcke in konjugierte numerische Blöcke über, aber es können auch Blöcke der Blockbasen in konjugierte übergehen. Die Sudokus aus  $\text{Sud } \tau$  haben daher Rang  $\leq 3$ .

Wir haben mit den Blocktypen (2.47) eine erhebliche Vergrößerung der bisherigen Erkenntnislage vorgenommen. Es interessieren nicht mehr Konjugationen unter der lokalen Sudokugruppe  $T^*$ , sondern nur noch Blockkonjugationen. Das reicht oft schon aus, um fixe und neutrale Sudokus zu trennen.

**Bemerkung 2.7.** Die Fixsudokus zu jedem Leitoperator  $\tau$  haben sämtlich die entsprechende Bauart in (2.47), und die 3 gleichbezeichneten Blöcke jeweils vom Typ  $a, b$  oder  $c$  sind konjugiert. Jeder Block ist also zu 2 verschiedenen Blöcken konjugiert.

**Lemma 2.6.** Seien  $b_i$  und  $b^j$  bzw.  $c_i$  und  $c^j$  die Zeilen- und Spaltenmengen der Blöcke  $b$  und  $c$  eines Sudokus. Dann sind  $b$  und  $c$  konjugiert genau dann, wenn gilt

$$\{b_1, b_2, b_3\} = \{c_1, c_2, c_3\} \text{ und } \{b^1, b^2, b^3\} = \{c^1, c^2, c^3\}, \quad (2.48)$$

also die Mengen der Zeilen- und Spaltenmengen gleich sind.

Liegt Konjugation vor, so ist der Blockoperator  $\gamma$  mit  $\gamma b = c$  auch eindeutig bestimmt durch:

Sind  $g \in S_3$  und  $h^\circ \in S_3^\circ$  mit  $c_i = b_{gi}$  und  $c^i = b^{h^\circ i}$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$ , so gilt  $\gamma = (g.h^\circ)^{-1}$ .

*Beweis.* Sind  $b$  und  $c$  konjugiert durch  $\gamma b = c$  mit  $\gamma = (g.h^\circ)^{-1}$ , so folgen die Mengengleichheiten, weil  $g^{-1}$  die Zeilenmengen permutiert und die Spaltenmengen unverändert lässt, umgekehrt  $h^{\circ-1}$  die Spaltenmengen permutiert und die Zeilenmengen unverändert lässt.

Sei umgekehrt (2.48) erfüllt. Dann existieren  $g \in S_3$  und  $h^\circ \in S_3^\circ$  mit  $c_i = b_{gi}$  und  $c^i = b^{h^\circ i}$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Sei  $\gamma = (g.h^\circ)^{-1} \in \Gamma$ . Dann ist

$$(\gamma b)_{ij} = b_{gi, h^\circ j} \in b_{gi} \cap b^{h^\circ i} = c_i \cap c^j = c_{ij}, \text{ also } \gamma b = c$$

□

Aus Bemerkung 2.7 und dem Lemma ergibt sich das

### Neutralitätskriterium

*Hat ein Sudoku einen Block mit höchstens einem weiteren konjugierten Block, so ist es neutral. Oder mit Lemma 2.6 explizit: Wenn es eine Spaltenmenge – oder eine Zeilmenge – eines Blockes gibt, die sich in keinem oder höchstens in einem weiteren Block findet, so ist das Sudoku neutral.*

Dieses Kriterium lässt neutrale Sudokus leicht erkennen, oft reicht ein bloßes Hinsehen. Es ist aber kein notwendiges Kriterium, wenngleich die „Dunkelmenge“ gering ist.

### Blockmatrizen und Operatormatrizen

Es ist für weitere Einsichten nützlich, allgemeinere Anordnungen von Blöcken zuzulassen, wie auch allgemeinere Operationen als die der Sudokugruppe. Hierbei gehen wir nach wie vor davon aus, dass die 3er-Blöcke mit Ziffern von 1 bis 9 belegt sind.

Schon bei der Beschreibung der Elemente der lokalen Sudokugruppe  $T^*$  traten sog.  $T^*$ -Operatormatrizen  $w = (w_{ij})$  mit  $w_{ij}$  aus der Blockgruppe  $\Gamma_0$  auf, wobei die  $w_{ij}$  untereinander gekoppelt sind. Hier sollen nun allgemeiner die Menge  $M_3(\Gamma_0)$  aller beliebigen Operatormatrizen  $v = (v_{ij})$  mit  $v_{ij} \in \Gamma_0$  betrachtet werden. Sie operieren blockweise auf beliebigen Matrizen aus Blöcken, also auf  $M_3(X_0)$ , wobei  $X_0$  die Menge der Blöcke bezeichnet.

Die Multiplikation von Operatormatrizen ist komponentenweise definiert, daher gilt

$$v(wA) = (vw)A \text{ für } v, w \in M_3(\Gamma_0), A \in M_3(X_0).$$

Da ein Blockoperator aus  $\Gamma_0$  durch seine Wirkung auf einen beliebigen Block eindeutig bestimmt ist, ist eine Operatormatrix aus  $M_3(\Gamma_0)$  durch ihre Wirkung auf eine beliebige Blockmatrix aus  $M_3(X_0)$  eindeutig bestimmt.

Jede Operatormatrix  $v$  lässt sich gemäß der Zerlegung  $\Gamma_0 = S_3 \times S_3^\circ$  eindeutig als Produkt einer Operatormatrix  ${}^\circ v \in M_3(S_3)$  und einer Operatormatrix  $v^\circ \in M_3(S_3^\circ)$

darstellen, indem jede Komponente  $v_{ij}$  entsprechend zerlegt wird.  ${}^\circ v$  heißt der *horizontale* und  $v^\circ$  der *vertikale* Anteil von  $v$ .

Die Kennzeichnung der  $T^*$ -Operatormatrizen leistet das

**Lemma 2.7.** *Die Operatormatrix  $v \in M_3(\Gamma_0)$  ist genau dann eine  $T^*$ -Operatormatrix, wenn der horizontale Anteil  ${}^\circ v$  konstante Zeilen und der vertikale Anteil  $v^\circ$  konstante Spalten hat.*

*Beweis.* Operatoren aus  $T^*$  haben die Form  $w_{ij} = (g_i h_j^\circ)_{ij} = (g_i)_{ij} \cdot (h_j^\circ)_{ij}$  mit  $g_i \in S_3$  und  $h_j^\circ \in S_3^\circ$ , sind also von der angegebenen Form. Umgekehrt kann  ${}^\circ v$  mit konstanten Zeilen in der Form  $(g_i)_{ij}$  mit  $g_i \in S_3$  dargestellt werden, und  $v^\circ$  mit konstanten Spalten in der entsprechenden Form. Somit hat  $v$  die Form eines  $T^*$ -Operators.  $\square$

Zwei Blockmatrizen  $A, B \in M_3(X_0)$  heißen *ähnlich*  $A \sim B$ , wenn  $A = vB$  mit einer Operatormatrix  $v \in M_3(\Gamma_0)$  ist.

Eine Kennzeichnung der Sudokus unter den allgemeinen Blockmatrizen leistet

**Lemma 2.8.** *Sei  $A \in M_3(X_3)$  ähnlich zu einer Blockmatrix aus lauter gleichen Blöcken:*

$$A \sim B = \begin{array}{ccc|ccc} b & b & b & b & b & b \\ & b & b & b & b & b \\ b & b & b & b & b & b \end{array}, \quad \text{also } A = vB \text{ mit } v \in M_3(\Gamma_0). \quad (2.49)$$

*A ist genau dann ein Sudoku, wenn folgende Bedingungen gelten:*

- Alle Zeilenmengen von  ${}^\circ v$  sind gleich  $\{1, s, s^{-1}\}$  oder gleich der Nebenklasse  $r[s]$ .
- Alle Spaltenmengen von  $v^\circ$  sind gleich  $\{1, s^\circ, s^{\circ -1}\}$  oder gleich  $r^\circ[s^\circ]$ .

*Beweis.*  $A$  ist Sudoku genau dann, wenn für alle  $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$  mit  $j \neq k$  entsprechende Zeilen der Blöcke  $A_{ij}$  und  $A_{ik}$  disjunkt sind, ebenso entsprechende Spalten der Blöcke  $A_{ij}$  und  $A_{kj}$  mit  $i \neq k$  disjunkt sind.

Entsprechende Zeilen in  $v_{ij}b$  und  $v_{ik}b$  sind disjunkt genau dann, wenn dies für  ${}^\circ v_{ij}b$  und  ${}^\circ v_{ik}b$  gilt (da  $v_{ij}^\circ$  und  $v_{ik}^\circ$  die Zeilenmengen nicht verändern) und weiter, wenn dies für  $b$  und  ${}^\circ v_{ij}^{-1} {}^\circ v_{ik}b$  zutrifft. Das aber bedeutet, dass  ${}^\circ v_{ij}^{-1} {}^\circ v_{ik}$  eine fixpunktfreie Permutation der Zeilen darstellt, also gleich  $s$  oder  $s^{-1}$  ist. Somit liegen  ${}^\circ v_{ij}$  und  ${}^\circ v_{ik}$  in der gleichen Nebenklasse nach  $[s]$  und sind verschieden. Die  $i$ -te Zeilenmenge von  ${}^\circ v$  ist somit eine volle Nebenklasse nach  $[s]$ : entweder  $[s]$  oder  $r[s]$ . Entsprechend zeigt man die Aussage für die Spaltenmengen von  $v^\circ$ .  $\square$

### Konvention der Wirkung von $H^*$

Die Operation von  $H^*$  auf den Horizontal- und Vertikalstreifen von  $X$  lässt sich in natürlicher Weise auf  $M_3(X_0)$  erweitern. Die Streifen im Sudokufall entsprechen den

Reihen im Blockfall, d. h. von  $M_3(X_0)$ . Die Sudokustreifen – horizontal und vertikal – wurden kanonisch von 1 bis 3 nummeriert. Es ist also gleichwertig und sinnvoll, die Operation von  $H^*$  als eine solche auf dem Produkt  $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}^\circ$ , kurz auf  $\{1, 2, 3\}^2$  zu betrachten.  $H^*$  operiert also auf Paaren  $(i, j)$ ,  $H$  auf  $i$  und  $H^\circ$  auf  $j$ .

Damit operiert  $H^*$  natürlich auf  $A \in M_3(X_0)$  durch

$$\tau A_{ij} = A_{\tau^{-1}(i,j)} \quad \text{für } \tau \in H^*. \quad (2.50)$$

Also insbesondere (Indizes mod 3)

$$\begin{aligned} (\sigma A)_{ij} &= A_{i-1,j}, & (\sigma^\circ A)_{i,j} &= A_{i,j-1}, \\ (\sigma \sigma^\circ A)_{i,j} &= A_{i-1,j-1}, & (\sigma^{-1} \sigma^\circ A)_{i,j} &= A_{i+1,j-1} \end{aligned} \quad (2.51)$$

### Fixe und quasifixe Blockmatrizen

Für  $\tau \in H^*$  und  $v \in M_3(\Gamma_0)$  entsteht  $v^{\tau^{-1}} = \tau v \tau^{-1} \in M_3(\Gamma_0)$  aus  $v$  durch dieselben Zeilen- und Spaltenvertauschungen, die  $\tau$  in  $M_3(\Gamma_0)$  bewirkt, also  $(v^{\tau^{-1}})_{i,j} = v_{\tau^{-1}(i,j)}$ , oder suggestiver

$$(v^\tau)_{i,j} = v_{\tau(i,j)}. \quad (2.52)$$

Wir deuten dies gruppentheoretisch:

**Bemerkung 2.8.** Die Menge  $M_3(\Gamma_0)$  der Operatormatrizen bilden eine Gruppe bei Hintereinanderausführung auf der Menge  $M_3(X_0)$  der Blockmatrizen. Das Kompositum mit  $H^*$  ist semidirektes Produkt

$$M_3(\Gamma_0) \rtimes H^*$$

mit der angegebenen Konjugationswirkung (2.52).  $M_3(\Gamma_0)$  besteht aus den *lokalen* Operatormatrizen,  $H^*$  aus den *rein-globalen* Operatoren.

Eine Blockmatrix  $A$  heißt *fix unter  $\tau \in H^*$* , wenn  $\tau A = A$ , also

$$A_{\tau(i,j)} = A_{i,j} \text{ gilt für alle } i, j.$$

Sie heißt *quasifix unter  $\tau$* , wenn  $\tau A$  ähnlich zu  $A$  ist, also ein  $v \in M_3(\Gamma_0)$  existiert mit

$$A_{\tau(i,j)} = v_{i,j} A_{i,j} \text{ für alle } i, j.$$

$v$  ist der zugehörige *Ähnlichkeitstransformator*.

Eine Charakterisierung der Fixesudokus leistet der

**Satz 2.10.** Folgende Aussagen für ein Sudoku  $A$  sind äquivalent:

- (a)  $A$  ist Fixesudoku zum Leitoperator  $\tau$
- (b)  $A$  ist quasifix unter  $\tau$

und für das dann existierende  $w \in M_3(\Gamma_0)$  mit

$$A_{\tau(i,j)} = w_{i,j} A_{i,j} \text{ für } i, j \in \{1, 2, 3\}$$

und den Zerlegungen

$$w_{i,j} = g_{i,j} h_{i,j}^\circ \text{ mit } g_{i,j} \in S_3, h_{i,j}^\circ \in S_3^\circ$$

gilt

$$g_{i,j} = g_{i,j'} \text{ und } h_{i,j}^\circ = h_{i',j}^\circ \text{ für alle } i, i', j, j'. \quad (2.53)$$

- (c)  $A$  ist ähnlich zu einer unter  $\tau$  fixen Blockmatrix  $B \in M_3(X_0)$ , und für den Ähnlichkeitstransformator  $v \in M_3(\Gamma_0)$  mit  $A = vB$  gilt

$$v^\tau \cdot v^{-1} \in T^*.$$

*Beweis.*

$$(a) \Rightarrow (b)$$

Sei  $A = wA$  mit  $w \in T^*$ , also  $w_{i,j} = g_i h_j^\circ$  mit  $g_i \in S_3$  und  $h_j^\circ \in S_3^\circ$ . Dann ist  $\tau^{-1}A = wA$ , also in Komponenten  $A_{\tau(i,j)} = g_i h_j^\circ A_{i,j}$ , und  $g_i$  und  $h_j^\circ$  erfüllen die Bedingungen (2.53).

$$(b) \Rightarrow (a)$$

Seien  $g_i$  und  $h_j^\circ$  die gemeinsamen Werte der  $g_{i,j}$ ,  $h_{i,j}^\circ$ . Dann ist  $w = (g_i h_j^\circ)$  Element von  $T^*$ .  $A_{\tau(i,j)} = w_{i,j} A_{i,j}$  bedeutet  $\tau^{-1}A = wA$ , also ist  $A$  fix unter  $\tau w$ .

$$(a) \Rightarrow (c)$$

Sei  $\tau w$  mit  $w \in T^*$  ein Fixoperator von  $A$ . Nach Satz 2.3 ist  $N_\tau(w) = w^{\tau^2} w^\tau w = 1$ .

Es wird nun ein  $v$  aus  $M_3(\Gamma_0)$  konstruiert mit  $(*)$   $v^\tau = wv$ .

Mit  $B = v^{-1}A$  ist dann  $A = vB$  und

$$\tau B = \tau v^{-1}A = \tau(v^\tau)^{-1}wA = v^{-1}\tau wA = v^{-1}A = B.$$

Die Konstruktion von  $v$  mit  $(*)$  erfolgt über die  $\tau$ -Bahn in  $\{1, 2, 3\}^2$ . Man wähle zu jeder  $\tau$ -Bahn einen Punkt  $(i, j)$ , setze  $v_{ij} = 1$  und definiere  $v_{\tau(i,j)}$  und  $v_{\tau^2(i,j)}$  so, dass  $(*)$  an den Stellen  $(i, j)$  und  $\tau(i, j)$  erfüllt ist:

$$v_{\tau(i,j)} = (v^\tau)_{ij} := (wv)_{ij} = w_{ij}$$

$$\text{und } v_{\tau^2(i,j)} = (v^\tau)_{\tau(i,j)} := (wv)_{\tau(i,j)} = w_{\tau(i,j)} w_{ij}.$$

Dann ist  $(*)$  auch an der Stelle  $\tau^2(i, j)$  erfüllt:

$$(v^\tau)_{\tau^2(i,j)} = v_{\tau^3(i,j)} = v_{ij} = 1 = w_{\tau^2(i,j)} v_{\tau^2(i,j)},$$

$$\text{da } w_{\tau^2(i,j)} w_{\tau(i,j)} w_{ij} = N_\tau(w)_{ij} = 1 \text{ ist.}$$

Somit ist  $v$  mit (\*) konstruiert, es folgt  $v^\tau v^{-1} = w$  aus  $T^*$ .

(c)  $\Rightarrow$  (a)

Ist  $A = vB$  und  $\tau B = B$  so folgt  $\tau v^\tau v^{-1} A = \tau v^\tau B = v\tau B = vB = A$ .

Wegen  $v^\tau \cdot v^{-1} \in T^*$  ist  $\tau v^\tau v^{-1} \in G$  Fixoperator von  $A$ .  $\square$

Die Bestimmung der unter den 4 Leitoperatoren fixen bzw. quasifixen Blockmatrizen aus  $M_3(X_0)$  führt auf spezielle Anordnungen der Blöcke, wie sie schon bei den 4 Typen der Fixsudokus in (2.47) auftraten

$$\begin{array}{llll} \sigma, & \sigma^\circ, & \sigma' = \sigma\sigma^\circ, & \sigma^{-1}\sigma^\circ \\ b \ c \ d & b \ b \ b & b \ c \ d & b \ c \ d \\ b \ c \ d & c \ c \ c & d \ b \ c & c \ d \ b \\ b \ c \ d & d \ d \ d & c \ d \ b & d \ b \ c \end{array}, \quad (2.54)$$

hier aber in einem anderen Sinn!

**Lemma 2.9.** Die fixen und quasifixen Blockmatrizen unter den 4 Leitoperatoren  $\tau$  haben die in (2.54) angegebene Gestalt mit folgender Interpretation:

- Für die  $\tau$ -fixen  $A \in M_3(X_0)$  sind die 3 gleichbezeichneten Blöcke wirklich gleich.
- Für die  $\tau$ -quasifixen  $A$  sind die 3 gleichbezeichneten Blöcke nur konjugiert.

*Beweis.* Er beruht auf den Formeln (2.51) und wird hier am Beispiel  $\tau = \sigma\sigma^\circ$  durchgeführt.

$A$  ist fix unter  $\tau$ , wenn  $A_{\tau(i,j)} = A_{i,j}$  für alle  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  ist. Für  $\tau = \sigma\sigma^\circ$  ist dann  $A_{i+1,j+1} = A_{i,j}$ , was die Übereinstimmung in allen Diagonalen bedeutet.

$A$  ist quasifix unter  $\sigma\sigma^\circ$  genau dann, wenn es ein  $v \in M_3(\Gamma_0)$  gibt mit

$$A_{i+1,j+1} = v_{i,j} A_{i,j} \text{ für alle } i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Das bedeutet die Blockkonjugiertheit in allen Diagonalen.  $\square$

## 2.9 Die Sondersudokus der 2. Art

Fritz Ostermann [13] hat in einer Liste alle 24 e-normierten Einfachfixe zu den Leitoperatoren  $\sigma$  und  $\sigma^\circ$  in Blockoperator-Darstellung aufgeführt. Diese Liste folgt ohne Rückgriff auf die numerische Form dieser Fixe auch aus den allgemeinen Ergebnissen des vorigen Abschnitts.

Wir beschränken uns auf den Leitoperator  $\sigma$ , da diese Fixe durch Transponieren in die Fixe zu  $\sigma^\circ$  übergehen.

Sei  $A$  ein Fixsudoku zum Leitoperator  $\sigma$ . Nach Satz 2.10 ist  $A$  ähnlich zu einer  $\sigma$ -fixen Blockmatrix, die nach Lemma 2.9 die in (2.54) angegebene Form hat:

$$A = v \begin{array}{ccc} b & c & d \\ b & c & d \\ b & c & d \end{array} \text{ für geeignete Blöcke } b, c, d.$$

Dabei hat der Fixoperator  $\varphi = \sigma w$  den lokalen Anteil

$$w = v^\sigma v^{-1} \in T^*.$$

Für e-normiertes  $A$  sind dann alle  $b, c, d$  gleich  $e$  und für  $v$  folgt  $v_{11} = v_{22} = v_{33} = 1$ .

Also hat  $A$  die Darstellung

$$A = vE,$$

wobei  $E$  die Blockmatrix aus lauter Blöcken  $e$  bezeichnet. Die Formel  $wv = v^\sigma$  bedeutet in Komponenten

$$w_{ij}v_{ij} = v_{\sigma(i,j)} = v_{i+1,j} \quad \text{für alle } i, j.$$

- Die Einsetzung  $j = i$  ergibt  $v_{i+1,i} = w_{ii}v_{ii} = w_{ii} = g_i h_i^\circ$ ,
- die Einsetzung  $i = j - 1$  ergibt

$$v_{j-1,j} = w_{j-1,j}^{-1} v_{j,j} = w_{j-1,j}^{-1} = g_{j-1}^{-1} h_j^{\circ-1}.$$

Diese Ergebnisse werden zur Matrixdarstellung von  $v$  zusammengefasst und horizontal-vertikal separiert

$$\begin{array}{ccc} 1 & g_1^{-1} & g_3 \\ g_1 & 1 & g_2^{-1} \\ g_3^{-1} & g_2 & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} 1 & h_2^{\circ-1} & h_3^\circ \\ h_1^\circ & 1 & h_3^{\circ-1} \\ h_1^{\circ-1} & h_2^\circ & 1 \end{array} \quad (2.55)$$

Da  $A = vE$  Sudoku ist, folgt aus Lemma 2.8, dass alle Zeilensymmetrien von  $v$  gleich  $[s]$  oder  $r[s]$  sind, hier also gleich  $[s]$ , und daher alle  $g_i \in \{s, s^{-1}\}$  sind.

Wieder wegen der Sudoku-Eigenschaft von  $vE$  folgt aus der Bauart von  $v$ , dass sogar alle  $g_i$  gleich sein müssen:  $g_1 = g_2 = g_3$ .

Ebenso folgt, dass alle Spaltenmengen von  $v^\circ$  gleich  $[s^\circ]$  sind, und daraus  $h_j^\circ \in \{s^\circ, s^{\circ-1}\}$ .

Für  $v^\circ$  hat man 2 Möglichkeiten der Auswahl, für die unabhängige Wahl der  $h_j^\circ$  dagegen  $2^3 = 8$  Möglichkeiten. Es wurde gezeigt

**Satz 2.11.** *Es gibt 16 e-normierte Fixsudokus zum Leitoperator  $\sigma$ . Sie haben eine Darstellung*

$$A = vE, \quad (2.56)$$

deren Operatormatrix  $v$  in Komponenten der Form (2.55) aufspaltet.

Die 4 Fälle mit  $h_1^\circ = h_2^\circ = h_3^\circ \in \{s^\circ, s^{\circ-1}\}$  ergeben die Superfixe, die übrigen 12 die Einfachfixe.

Zur Auflistung der Superfixe und Einfachfixe zu  $\sigma$  durch die Operatormatrizen  $v$  und  $v^\circ$  aus (2.55) lässt sich der Aufwand halbieren. Dazu wird zu jedem der Operatormatrizen  $v, v^\circ$  ein Zwilling erzeugt, indem man die Einträge  $s$  bzw.  $s^\circ$  durch ihre Inversen ersetzt.

Für den horizontalen Anteil  $\circ v$  gibt es 2 Möglichkeiten

$$\begin{matrix} 1 & s & s^{-1} \\ \circ v_1 = s^{-1} & 1 & s \\ s & s^{-1} & 1 \end{matrix} \quad \text{und Zwilling } \circ v_2. \quad (2.57)$$

Für die Superfixe ergeben sich 2 vertikale Operatormatrizen

$$\begin{matrix} 1 & s^\circ & s^{\circ-1} \\ v_1^\circ = s^{\circ-1} & 1 & s^\circ \\ s^\circ & s^{\circ-1} & 1 \end{matrix} \quad \text{und Zwilling } v_2^\circ.$$

Durch Ausmultiplizieren der  $\circ v^i, v^{\circ j}$  erhält man die Operatorgestalt der e-normierten Superfixe in Satz 2.6 (ii).

Für die Einfachfixe genügt die Angabe von 3 Operatormatrizen  $v_i^\circ$ , bei denen jeweils zwei der  $h_i^\circ$  ( $i = 1, 2, 3$ ) in (2.55) übereinstimmen:

$$\begin{matrix} 1 & s^\circ & s^{\circ-1} & 1 & s^\circ & s^\circ \\ v_1^\circ = s^\circ & 1 & s^\circ & s^{\circ-1} & 1 & s^{\circ-1} \\ s^{\circ-1} & s^{\circ-1} & 1 & s^\circ & s^{\circ-1} & 1 \end{matrix}, \quad v_3^\circ = s^{\circ-1} \quad \begin{matrix} 1 & s^\circ & s^\circ \\ s^\circ & s^{\circ-1} & 1 \end{matrix}, \quad (2.55')$$

$$\begin{matrix} 1 & s^{\circ-1} & s^{\circ-1} \\ v_5^\circ = s^{\circ-1} & 1 & s^\circ \\ s^\circ & s^\circ & 1 \end{matrix}.$$

Die Zwillinge zu  $v_i^\circ$  sind  $v_{i+1}^\circ$  für  $i = 1, 3, 5$ .

Diese 6 vertikalen Operatormatrizen, multipliziert mit den beiden horizontalen aus (2.57) ergeben alle 12 Einfachfixe zum Leitoperator  $\sigma$ . Durch „erweiterte“ Transposition entstehen die weiteren 12 Einfachfixe zum Leitoperator  $\sigma^\circ$ .

Die 24 e-normierten Einfachfixe zu den Leitoperatoren  $\sigma, \sigma^\circ$  heißen *Sondersudoku der 2. Art*. Sie stehen in Analogie zu den Sondersudokus vom Typ  $(\sigma', \sigma^{-1}\sigma^\circ)$  aus Abschnitt 2.6.

Nach den Sätzen 2.1 und 2.4 können alle Einfachfixe zu Leitoperatoren  $\sigma$  und  $\sigma^\circ$  durch Chirurgie aus einem Praesudoku gewonnen werden, aus einem horizontalen für  $\sigma$ , einem vertikalen für  $\sigma^\circ$ . Dem liegt die initiale Äquivalenz der beiden fixen Blockschemata zugrunde.

*Frage:* Wie sehen die erzeugenden Praesudokus für die Chirurgie der Sondersudokus 2. Art aus?

Die Antwort ergibt sich unmittelbar aus den obigen Formeln (2.57) und (2.55').

Die folgende sukzessive Anwendung der Operatorpaare

$$(s^\circ) = \frac{s^\circ}{s^{\circ-1}} \quad \text{bzw. } (s^{\circ-1}) = \frac{s^{\circ-1}}{s^\circ} \quad (\text{gegenläufige zyklische Spaltenvertauschungen})$$

auf die oberen Zeilen der  $v_i^\circ$  ( $i = 1, 3, 5$ )

$$\begin{matrix} 1 & s^\circ & s^{\circ-1} \\ (s^\circ) & (s^{\circ-1}) & (s^{\circ-1}) \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & s^\circ & s^\circ \\ (s^{\circ-1}) & (s^{\circ-1}) & (s^\circ) \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & s^{\circ-1} & s^{\circ-1} \\ (s^{\circ-1}) & (s^\circ) & (s^{\circ-1}) \end{matrix} \quad (2.58)$$

ergeben offenbar die Operatormatrizen in (2.55'). Die Operatormatrizen  ${}^\circ v_1 v_i^\circ$  bestimmen die zugehörigen Sondersudokus

$${}^\circ v_1 v_i^\circ E \quad \text{mit } i = 1, 3, 5 \quad (2.59)$$

mit den oberen Horizontalstreifen

$$e \quad s^\circ se \quad s^{\circ-1} s^{-1} e, \quad e \quad s^\circ se \quad s^\circ s^{-1} e, \quad e \quad s^{\circ-1} se \quad s^{\circ-1} s^{-1} e. \quad (2.60)$$

Aus diesen Praesudokus entstehen die 3 Sudokus (2.59) durch den Chirurgie-Prozess in (2.58). Ersetzt man in (2.60) und im Prozess (2.58) simultan  $s, s^\circ$  durch die Inversen, so entstehen die restlichen erzeugenden Praesudokus.

### 3 Anzahlen, $G^*$ -Mengen und Parametrisierung

Ein erheblicher methodischer Fortschritt wird durch Einführung einer größeren Transformationsgruppe  $G^*$  erreicht, indem man die Wirkung der symmetrischen Gruppe  $S_9$  auf die in Sudokus verteilten Ziffern von  $1, \dots, 9$  hinzunimmt. Die Aktion von  $G^*$  wirft auch ein neues Licht auf die Fixsudokus unter  $G$ , deren  $G^*$ -Mengen klassifiziert werden können.

Nachdem in Kapitel 2 die Fixe unter  $G$  im Vordergrund standen und die Erkennung der Neutralen geleistet wurde, wird nun das kombinatorisch erheblich aufwändiger Problem der  $G^*$ -Fixe unter *allen* Sudokus angegangen und zu ersten Ergebnissen geführt.

Die umfassenden Untersuchungen erfolgen in Kapitel 4.

Sudoku-Anzahlen liegen in der Literatur vor. Besondere Anzahlen, die im Zusammenhang mit Existenzaussagen und strukturellen Konzepten stehen, wurden von *A. Schönhage* und *F. Ostermann* bestimmt. Das gilt insbesondere für das *Parametrisierungsproblem*, das gelöst werden konnte.

#### 3.1 Mischgruppen

Die symmetrische Gruppe  $S_9$  operiert auf natürliche Weise auf dem Sudokuraum  $X$

$$S_9 \times X \longrightarrow X \quad \text{mit} \quad (\alpha, A) \longmapsto \alpha \cdot A,$$

indem ein  $\alpha \in S_9$  jede Ziffer  $z \in \{1, \dots, 9\}$  eines Sudokus  $A$  in die Ziffer  $\alpha z$  überführt.

Die Operation  $\alpha$  führt Sudokus wieder in solche über. Die so bestimmte *Zifferngruppe*  $Z$  lässt die Reihen als Figuren stabil, permuiert die Ziffern in den Reihen. So bleiben auch die Streifenfiguren und Blöcke stabil.  $Z$  ist eine *lokale* Transformationsgruppe des Sudokuraumes  $X$  und wirkt blockweise

$$\alpha \cdot A = (\alpha A_{ij}) \quad \text{für } \alpha \in S_9. \quad (3.1)$$

$Z$  ist offenbar eindeutig bestimmt durch die Einschränkung  $Z_0$  auf einem der 9 Blöcke, etwa auf  $A_{11}$ . Es besteht ein kanonischer Isomorphismus

$$S_9 \longrightarrow Z_0 \longrightarrow Z \quad (3.2)$$

Eine Identifizierung ist nicht angezeigt,  $S_9$  operiert auf Ziffern,  $Z$  auf Sudokus, also auf Zeilen, Spalten. Das gilt auch für die Einschränkung  $Z_0$  von  $Z$ .

Man erkennt sogleich

*Sudokugruppe und Zifferngruppe sind (elementweise) vertauschbar.*

Da  $S_9$  von den 2er-Zyklen erzeugt wird, genügt es, dies für solche zu bestätigen. Ob man zuerst eine der geometrischen Figuren aus Kapitel 1 durch Anwendung eines

Operators aus  $G$  vertauscht und dann 2 Ziffern überall vertauscht, ergibt das Gleiche, wie wenn man die Reihenfolge umkehrt.

Diese Vertauschbarkeit gilt dann auch für die Blockgruppe  $\Gamma$  mit der Einschränkung  $Z_0$  von  $Z$  auf einen Block.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}$$

einen neuen Block

$$\alpha = \alpha \cdot e = \alpha e, \quad (3.3)$$

und jeder Block entsteht auf diese Weise. Die Vertauschbarkeit bedeutet explizit:

$$\alpha w \cdot e = w \alpha \cdot e \quad \text{für } \alpha \in S_9, w \in \Gamma. \quad (3.3')$$

Hier muss man sich ein für allemal folgendes klarmachen:

$S_9$  operiert einerseits – und primär – auf den Ziffern 1, …, 9 eines Blocks. Andererseits wird ein  $\alpha \in S_9$  als ein Blockoperator aufgefasst, der auf Zeilen und Spalten wirkt, also als Operator aus  $Z_0$ . Nur so gilt die Vertauschbarkeit (3.3')!

Das Kompositum von Zifferngruppe und Sudokugruppe ergibt die *totale Mischgruppe* von  $X$

$$G^* = ZG.$$

Von Bedeutung ist ferner die *kleine Mischgruppe* von  $X$ , kurz *Mischgruppe*:

$$M = Z \times T_{23}^* \quad \text{mit} \quad T_{23}^* = T_2^* \times T_3^* \quad \text{und} \quad T_i^* = T_i \times T_i^\circ.$$

Die Wahl ist willkürlich und in den Anwendungen begründet. Gleichwertig sind Mischgruppen der Form  $M_{ij} = Z \times T_{ij}^*$  mit  $i \neq j$ .

**Lemma 3.1.** Es gilt  $Z \cap G = \{1\}$ ,

die totale Mischgruppe ist also direktes Produkt

$$G^* = Z \times G \quad \text{mit Ordnung} \quad 9! \cdot n \quad (3.4)$$

Die kleine Mischgruppe  $M$  ist fixpunktfrei auf  $X$  und hat die Ordnung

$$m = \#M = 9! \cdot 6^4 = 470\,292\,480. \quad (3.4')$$

**Beweis.** Ein Operator  $\kappa \in G \cap Z$  hat gleiche Ziffernwirkung  $\alpha \in Z$  auf allen Sudokus, lässt also alle Blöcke stabil, ist also lokal. Daher gilt  $G \cap Z = T^* \cap Z$ . Ist  $w = \alpha \in T^* \cap Z$ , so lässt  $w \alpha^{-1}$  jedes Sudoku  $A$  fest:  $w \alpha^{-1} A = A$ . Sei  $u \in T_1^*$  ein beliebiger Operator, der auf den 1. beiden Streifen von  $A$  wirkt, vertikal und horizontal. Dann lässt  $w^u \alpha^{-1}$  das Sudoku  $u^{-1} A = A'$  fest:

$$w^u \alpha^{-1} A' = A', \quad \text{aber auch} \quad w \alpha^{-1} A' = A'.$$

Die Wirkung auf den linken oberen Eckblock  $A'_{11}$  ist dann

$$w_{11}^{u_1} \alpha^{-1} A'_{11} = A'_{11} \quad \text{und} \quad w_{11} \alpha^{-1} A'_{11} = A'_{11},$$

wobei  $u_1 \Gamma_0$  durchläuft. Es folgt

$$w_{11}^{u_1} = w_{11} \quad \text{für alle } u_1 \in \Gamma_0$$

und somit  $w_{11} = 1$ , da  $\Gamma_0$  triviales Zentrum  $\{1\}$  hat. Aus  $w_{11} = 1$  folgt  $\alpha = 1$  und damit auch  $w = 1$ .

Zum Nachweis der Fixpunktfreiheit von  $M$  sei für einen Operator  $\varphi = \alpha w \in M$  mit  $\alpha \in Z$  und  $w \in T_{23}^*$  ein Fixpunkt  $A \in X$  angenommen:  $\varphi A = A$ . Dann gilt dies speziell für die Blockdiagonale von  $A$ . Auf  $A_{11}$  wirkt  $w$  trivial, also wird  $A_{11} = \varphi A_{11} = \alpha A_{11}$ , somit  $\alpha = 1$ . Da  $w$  durch die Wirkung auf  $A_{22}, A_{33}$  eindeutig festgelegt ist, folgt aus  $A_{ii} = \alpha w A_{ii} = w A_{ii}$  auch  $w = 1$ .  $\square$

Die totale Mischgruppe  $G^*$  dagegen hat viele Fixpunkte, die nicht von der Sudokugruppe herrühren. Sogar in der Nebenklasse  $tZ$  liegt ein Fixoperator. Um einige Beispiele für Fixgruppen in  $G^* \setminus G$  zu finden, wird der Eckblock  $A_{11} = a$  ohne Einschränkung als Grundmatrix  $e$  angesetzt.  $A$  heißt dann *e-speziall*. Nach (3.2) ist  $\alpha^{-1} A$  von dieser Art.

Jeder Blockoperator  $p \in \Gamma$  kann in der Wirkung auf  $e$  (!) als Ziffernoperator aus  $S_9$  geschrieben werden

$$pe = \pi e \quad \text{mit eindeutigem} \quad \pi \in S_9. \quad (3.5)$$

$p \in \Gamma$  bestimmt verschiedene Sudoku-Operatoren:

- $_i p$  wirkt auf einem  $i$ -ten Streifen, oder auf dem  $i$ -ten Streifenkreuz,
- ${}^* p$  übt auf allen Blöcken die Wirkung  $p$  aus, ist also eine Operatormatrix nach Kapitel 2.

Die entscheidende Idee ist, dass  $\pi$  in (3.5) auch auf dem ganzen Sudoku wirkt.

Wenn nun dazu ein e-spezialles Sudoku  $A$  existiert mit

$${}_i p A = \pi A \quad \text{oder} \quad {}^* p A = \pi A,$$

so liegt auf  $A$  Ziffernwirkung vor und man hat ein Fixesudoku gefunden:  ${}_i p \pi^{-1} A = A$  bzw.  ${}^* p \pi^{-1} A = A$ . Der Fixoperator liegt in  $G^* \setminus G$ :

$$\underline{i p} = {}_i p \pi^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \underline{{}^* p} = {}^* p \pi^{-1}.$$

Diese Operatoren heißen die *Z-Ergänzungen* von  ${}_i p$  bzw.  ${}^* p$ , sie werden durch Unterstrichen notiert. Die Ziffernoperatoren  $\pi$  nennen wir ihre *Ziffernbegleiter*, kurz *Z-Begleiter*. Letztere sind durch die Wirkung auf einem e-Block bestimmt.

*Diese kleine Idee erlaubt es,  $G^*$ -Fixoperatoren von gewöhnlichen Fixesudokus zu finden. Die Z-Ergänzungen lassen den e-Block fest, aber keineswegs andere Blöcke.*

Speziell wird in Zykeldarstellung

$$\begin{aligned}
 se &= \alpha e \quad \text{mit } \alpha = (147)(258)(369) \\
 s'e &= \alpha'e \quad \text{mit } \alpha' = (123)(456)(789) \\
 re &= \gamma e \quad \text{mit } \gamma = (17)(28)(39) \\
 r'e &= \gamma'e \quad \text{mit } \gamma' = (13)(46)(79) \\
 te &= \tau e \quad \text{mit } \tau = (24)(37)(68) \\
 t^\circ e &= \tau^\circ e \quad \text{mit } \tau^\circ = (19)(26)(48).
 \end{aligned} \tag{3.5'}$$

Dabei ist  $t^\circ$  die duale Transposition, also die Spiegelung an den Hauptdiagonalen. Die Bildblöcke sind

$$t \cdot e = \begin{matrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{matrix}, \quad s \cdot e = \begin{matrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{matrix}, \quad s^\circ \cdot e = \begin{matrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 6 \end{matrix}. \tag{3.5''}$$

Hier ist eine *Warnung* angezeigt: Die Blockoperatoren aus  $\Gamma$  sind mit den Ziffernoperatoren aus  $Z_0$  vertauschbar. Dies gilt aber *nicht* allgemein für die Permutationen aus  $S_9$ , denn das Zentrum von  $S_9$  ist trivial = {1}.

Die Wirkung von  $t$ ,  $*s$ ,  $*s^\circ$  durch Ziffernoperatoren aus  $Z$  ist durch (3.5') gegeben.

In diesem Abschnitt soll die Idee von Ziffernwirkung genutzt werden, um Mischfixgruppen von superfixen Sudokus zu finden.

**Lemma 3.2.** *Die beiden (globalen) Transponierten  $t$  und  $t^\circ$  haben Ziffernwirkung auf  $U$ . Also ist*

$$[\underline{t}, \underline{t^\circ}] \quad \text{eine Fixgruppe von } U \text{ mit Ordnung 4.} \tag{3.6}$$

*Beweis.* In

$$U = \begin{matrix} e & ss^{\circ-1}e & s^{-1}s^\circ e \\ s^{-1}s^\circ e & e & ss^{\circ-1}e \\ ss^{\circ-1}e & s^{-1}s^\circ e & e \end{matrix}$$

stehen sich je 3 Blockpaare an den Blockdiagonalen gespiegelt gegenüber, beide Typen

$$\begin{matrix} ss^{\circ-1}e & & s^{-1}s^\circ e \\ s^{-1}s^\circ e & \text{bzw.} & ss^{\circ-1}e \end{matrix}.$$

Anwendung von  $t$  auf  $U$  vertauscht diese Blöcke und transponiert sie. Also entsteht

$$tU: \quad \begin{matrix} ts^{-1}s^\circ e & & tss^{\circ-1}e \\ tss^{\circ-1}e & \text{bzw.} & ts^{-1}s^\circ e \end{matrix} \quad \text{für Prototyp.}$$

Anwendung von  $\tau$  geschieht blockweise und ergibt wegen  $t\tau e = e$

$$t\tau U: \quad \begin{matrix} s^{-1}s^\circ \underline{te} = s^{-1}s^\circ e \\ ss^{\circ-1}\underline{te} = ss^{\circ-1}e \end{matrix}$$

Also ist  $tU = U$ .

Die Aussage für die duale Transponierte  $t^\circ$  zeigen wir numerisch.

$$U \text{ liegt auf dem Blockschema } B_0^* = \begin{matrix} e & b & c \\ c & e & b \\ b & c & e \\ & & c \end{matrix}. \text{ Anwendung von } t^\circ \text{ auf } B_0^* \text{ heißt:}$$

Spiegelung der Blöcke an der Coachse  $e$  und anschließende Spiegelung in den Blöcken an den Codiagonalen, also  $b$

$$t^\circ B_0^* = \begin{matrix} t^\circ e & t^\circ b & t^\circ c \\ t^\circ c & t^\circ e & t^\circ b \\ t^\circ b & t^\circ c & t^\circ e \end{matrix}.$$

Die Blöcke  $b$  und  $c$  sind numerisch

$$b = ss^{\circ -1}e = \begin{matrix} 8 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \end{matrix} \quad \text{und} \quad c = s^{-1}s^\circ e = \begin{matrix} 6 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}.$$

Anwendung der Cotransposition  $t^\circ$  auf die Blöcke ergibt

$$t^\circ b = \begin{matrix} 4 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \\ 5 & 2 & 8 \end{matrix} = \tau^\circ b \quad \text{und} \quad t^\circ c = \begin{matrix} 2 & 8 & 5 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \end{matrix} = \tau^\circ c,$$

und  $t^\circ e = \tau^\circ e$  gilt nach Definition. Also ist  $t^\circ U = \tau^\circ U$ .  $\square$

Die Spiegelungen  $r, r^\circ$  an den Mittellinien im Block haben Zifferndarstellungen nach (3.5'), sie suggerieren weitere Ziffernwirkungen. Mit den üblichen Bezeichnungen

$$\rho' = \rho\rho^\circ, \quad r' = rr^\circ, \quad {}^*r' = {}^*r{}^*r^\circ, \quad \gamma' = \gamma\gamma^\circ \quad (3.7)$$

gilt nach (1.18') auch für die globalen Spiegelungen an den Mittellinien

$$\mu' = \mu\mu^\circ = \rho'{}^*r'.$$

**Lemma 3.3.** *Mit den Z-Ergänzungen  ${}^*\underline{r} = {}^*r\gamma$  und  ${}^*\underline{r}^\circ = {}^*r^\circ\gamma^\circ$  operiert die abelsche Untergruppe*

$$R = [{}^*r\gamma, {}^*r^\circ\gamma^\circ] \quad \text{der Ordnung 4 von } G_0^* \quad (3.8)$$

regulär auf den 4 reduzierten Superfixen

$$\{U, U^\circ, C, C^\circ\} = R \cdot C = R \cdot U. \quad (3.8')$$

*Beweis.* Die 4 Superfixe sind durch ihren Block (1, 2) bestimmt:

$C$  durch  $s'e$ ,  $C^\circ$  durch  $s'^{-1}e$ ,  $U$  durch  $ss^{\circ -1}e$ ,  $U^\circ$  durch  $s^{-1}s^\circ e$ .

Beide Erzeugende von  $R$  wirken auf jedem Block durch  $r\gamma$  bzw.  $r^\circ\gamma^\circ$ , die Wirkung auf die  $(1, 2)$ -Blöcke ist wegen  $r\gamma e = e, r^\circ\gamma^\circ e = e$ :

$$r\gamma s'e = s^{-1}s^\circ e, \quad r\gamma s'^{-1}e = ss^{\circ -1}e; \quad r^\circ\gamma^\circ s'e = ss^{\circ -1}e, \quad r^\circ\gamma^\circ s'^{-1}e = s^{-1}s^\circ e.$$

Also gilt  ${}^*r\gamma C = U^\circ, {}^*r\gamma C^\circ = U; {}^*r^\circ\gamma^\circ C = U, {}^*r^\circ\gamma^\circ C^\circ = U^\circ$ , und folglich für das Produkt  ${}^*r'\gamma' = {}^*r\gamma \cdot {}^*r^\circ\gamma^\circ$

$${}^*r'\gamma'C = C^\circ \quad \text{und} \quad {}^*r'\gamma'U = U^\circ.$$

Man kann auch begrifflich schließen. Nach Satz 2.6 (i), (ii) gibt es genau 4 Superfixe mit Blockdiagonalen  $e/e/e/e$ .  $R$  führt Superfixe wieder in solche über und erhält die Blockdiagonale. Da  $R$  lokal ist, also fixpunktfrei mit Ordnung 4 operiert, ist  $R$  transitiv auf den Superfixen.  $\square$

Da bekanntlich auch gilt

$$\rho'U = U^\circ \quad \text{und} \quad \rho'C = C^\circ,$$

folgt das

**Korollar.**

$$\mu'\gamma' = \rho'{}^*r'\gamma' \text{ lässt } U \text{ und } C \text{ fest.}$$

Für das Superfixe  $U$  haben sich in  $G^*$  3 Fixoperatoren der *Ordnung 2* ergeben, einer  $\mu'\gamma' \in G_0^* \setminus G_0$  und zwei  $t\tau, t^\circ\tau^\circ \in G^* \setminus G_0^*$ . Es gibt aber auch gemischte Fixoperatoren von  $U$  der *Ordnung 3*, die in  $ZT^* \setminus T^*$  liegen. Dazu eine Definition:

Ein Sudoku  $A$  heiße *speziell*, wenn alle Blöcke  $A_{ij}$  von  $A$  aus  $e$  durch Anwendung von Operatoren  $u_{ij} \in [s, s^\circ]$  entstehen:

$$\{A_{ij}\} \subset [s, s^\circ] \cdot e.$$

Die 4 reduzierten Superfixe sind speziell.

**Lemma 3.4.** Seien  $\alpha, \alpha^\circ$  die durch (3.5') zu  $s, s^\circ$  eindeutig bestimmten Ziffernbegleiter, aufgefasst als Operatoren aus  $Z$ . Mit den Operatoren  ${}^*s, {}^*s^\circ$  ist die zu  $[s, s^\circ]$  isomorphe Gruppe

$$\Lambda = [{}^*s\alpha^{-1}, {}^*s^\circ\alpha^{-1}] = [{}^*\underline{s}, {}^*\underline{s^\circ}] \tag{3.9}$$

eine Fixgruppe aller speziellen Sudokus, insbesondere von  $C$  und  $U$ .

$\Lambda$  ist elementar-abelsch vom Typ  $(3, 3)$ .

*Beweis.* Sei  $pq^\circ$  das allgemeine Element von  $[s, s^\circ] = [s] \times [s^\circ]$ , ferner in Analogie von (3.5')

$$pe = \lambda e, \quad q^\circ e = \mu^\circ e \quad \text{mit } \lambda, \mu^\circ \in Z.$$

Das spezielle  $A$  hat die Form

$$A = (u_{ij}e) \quad \text{mit } u_{ij} \in [s, s^\circ].$$

Die Anwendung von  $*p$  bzw.  $*q^\circ$  auf  $A$  geschieht, indem  $p$  bzw.  $q^\circ$  auf jeden Block angewandt wird

$$*pA = (pA_{ij}) \quad \text{und} \quad *q^\circ A = (q^\circ A_{ij}).$$

Mit dem Sudoku

$$A_1 = *p *q^\circ \lambda^{-1} \mu^{\circ -1} A$$

wird

$$A_1 = (pq^\circ \lambda^{-1} \mu^{\circ -1} u_{ij} e) = (pq^\circ u_{ij} \lambda^{-1} \mu^{\circ -1} e).$$

Aber auf  $e$  wirken die  $\lambda^{-1}, \mu^{-1}$  wie  $p^{-1}, q^{\circ -1}$ , und diese sind nach Voraussetzung mit  $u_{ij}$  vertauschbar:

$$A_1 = (pq^\circ u_{ij} p^{-1} q^{\circ -1} e) = A, \quad \text{also ist } A_1 = A.$$

□

Die beiden Sudokus  $C$  und  $U$  sind also auch fix unter gewissen Operatoren aus  $ZT^* \setminus T^*$ . Die Crux beim Beweis ist die Vertauschbarkeit von  $pq^\circ$  mit den  $u_{ij}$ . Der Schluss versagt also im Allgemeinen.

## 3.2 Anzahlen und M-Bahnen

Die Anzahl  $N$  aller 9er-Sudokus ist nach *Felgenhauer–Jarvis* [4] bekannt

$$N = 6\,670\,903\,752\,021\,072\,936\,960, \tag{3.10}$$

eine Größenordnung von  $6\frac{1}{2}$  Trilliarden. Auch die Primzerlegung ist bekannt

$$N = 9! \cdot 2^{13} \cdot 3^4 \cdot p = 9! \cdot 2^9 \cdot 6^4 \cdot p \tag{3.10'}$$

mit einer Primzahl

$$p = 27\,704\,267\,971. \tag{3.11}$$

Unerwartet taucht hier eine Primzahl von der Größenordnung 28 Milliarden auf. Die Faktoren in  $N$  lassen sich strukturell deuten:

$$N = m \cdot 2^9 p, \tag{3.12}$$

wobei  $m = \# M$  die Ordnung der Mischgruppe  $M$  ist.  $2^9 p$  hat auch eine Deutung als Anzahl (Korollar zu Satz 3.1). Das Auftreten der hohen Primzahl ist zufällig,  $2^9 p$  setzt sich additiv zusammen.

Bisher wurden ausschließlich Fixsudokus untersucht, die neutralen – weit in der Überzahl – sind schwer zugänglich. Gewisse numerische Aussagen werden im Zusammenhang mit dem Parametrisierungsproblem in Abschnitt 3.4 mittels Computer gewonnen. Methoden struktureller Art, die alle Sudokus erfassen, werden in Kapitel 4 und in Teil II entwickelt.

Die Mengen der Fixsudokus und der neutralen Sudokus werden mit  $X_f$  bzw.  $X_n$  bezeichnet. So hat man die disjunkte Zerlegung

$$X = X_f \cup X_n .$$

Neutrale Sudokus sind per definitionem solche mit maximaler Bahnlänge

$$\#G_0 \cdot A = \#G_0 = n_0 .$$

Fixsudokus haben  $G_0$ -Bahnlängen  $n_0/3$  oder  $n_0/9$ .

Nach Definition sind  $X_n$  und  $X_f$   $G$ -Mengen. Sie sind aber auch  $M$ -Mengen, da die Zifferngruppe  $Z$  neutrale wieder in neutrale und fixe wieder in fixe überführt. Also stehen zwei Transformationsgruppen für Strukturuntersuchungen zur Verfügung,  $G$  und  $M$ .

Die Wirkung von  $G$  sagt über  $X_n$  zunächst nichts aus. Aber über  $X_f$  konnten in Kapitel 2 weitgehende Strukturaussagen gewonnen werden.

Die Aktion der Mischgruppe  $M$  bringt darüber hinaus weitere Erkenntnisse in theoretischer wie numerischer Hinsicht. Die Vorteile gegenüber der Sudokugruppe liegen in folgenden Eigenschaften:

- $M$  operiert fixpunktfrei
- $M$  hat eine wesentlich größere Ordnung
- $M$  ist eine lokale Gruppe, transformiert insbesondere die Blöcke der Blockdiagonalen in sich.
- Die  $M$ -Bahnen haben ausgezeichnete Vertreter.

Letzterem wird nun nachgegangen.

## Reduktionsverfahren

### 1. Blöcke

Sei  $b = (b_{ij})$  ein Sudoku-Block, also belegt mit allen Ziffern  $1, \dots, 9$ .

Durch höchstens eine Zeilen- und Spaltenvertauschung kann  $b_{11} = 1$  erreicht werden. Die gleiche Methode, angewandt auf die Submatrix  $b_0 = \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ , bewirkt, dass  $b_{22}$  als das Minimum der Ziffern in  $b_0$  erreicht werden kann. Man gelangt zu der Matrix

$$b^\wedge = \begin{array}{ccc} 1 & * & * \\ * & b_{22} & * \\ * & * & * \end{array} \quad \text{mit } b_{22} = \min\{b\},$$

der *Reduktion* von  $b$ .  $b$  heißt *reduziert*, wenn  $b = b^\wedge$  ist.  $b^\wedge$  entsteht aus  $b$  durch Anwendung eines gewissen Operators aus der Blockgruppe  $\Gamma = S_3 \times S_3^\circ$ . Die Mengen aller numerischen bzw. der reduzierten Belegungen eines Blockes werden mit  $B$  bzw. mit  $B^\wedge$  bezeichnet.

Um die reduzierte Form herzustellen sind 2, 1 oder keine Zeilen- und Spaltenvertauschungen erforderlich. Wenn 2 Zeilenvertauschungen nötig sind, liegt zusammen ein 3er-Zykel vor,  $r_i r_j = s^{\pm 1}$  für  $i \neq j$ . Analog im Spaltenfall. So ist die gesamte Blockgruppe  $\Gamma_0 = S_3 \times S_3^\circ$  anzuwenden, um für jeden Block die reduzierte Form herzustellen.

Jede Anwendung eines Operators  $1 \neq u \in \Gamma_0$  auf einen reduzierten Block zerstört die Reduktion.  $\mathbf{B}^\wedge$  stellt daher einen Fundamentalbereich für die Aktion der Blockgruppe  $\Gamma_0$  dar:

$$\mathbf{B} = \Gamma_0 \mathbf{B}^\wedge = \bigcup u \mathbf{B}^\wedge \quad \text{disjunkt mit laufendem } u \in \Gamma_0 .$$

Für die Anzahl gilt daher

$$\#\mathbf{B}^\wedge = 9! \cdot 6^{-2} = 2 \cdot 6^2 \cdot 5 \cdot 7 = 10080 .$$

Man beachte, dass  $t$  auf  $\mathbf{B}^\wedge$  operiert.

## 2. Sudokus

Zur Reduktion von 9er-Sudokus wird ein Sudoku in Hervorhebung der Blockdiagonale notiert:

$$A = \begin{array}{cc} a & * \\ b & . \\ * & c \end{array}$$

Dann gibt es eindeutig ein  $\alpha \in Z$  mit  $a = \alpha \cdot e$ . Anwendung von  $\alpha^{-1}$  auf  $A$  (also auf alle Blöcke) ergibt

$$\alpha^{-1} A = \begin{array}{cc} e & * \\ \alpha^{-1} b & . \\ * & \alpha^{-1} c \end{array}$$

Nach der Blockreduktion gibt es  $w_i \in T_i^*$  derart, dass wird

$$A^\wedge = w_3 w_2 \alpha^{-1} A = \begin{array}{cc} e & * \\ (\alpha^{-1} b)^\wedge & . \\ * & (\alpha^{-1} c)^\wedge \end{array} . \quad (3.13)$$

$A^\wedge$  ist eindeutig durch  $A$  bestimmt, die *Reduktion* von  $A$ . Sie geht aus  $A$  durch Anwendung von  $w_3 w_2 \alpha^{-1} \in M$  hervor.  $A$  ist *reduziert*, wenn  $A = A^\wedge$  ist.

**Satz 3.1.** (a) *Die Sudokumengen  $X$ ,  $X_n$ ,  $X_f$  haben ihre reduzierten Teilmengen als Fundamentalbereiche unter der Operation von  $M$ : Es bestehen die disjunkten Zerlegungen*

$$X = \bigcup \varphi X^\wedge, \quad X_n = \bigcup \varphi X_n^\wedge, \quad X_f = \bigcup \varphi X_f^\wedge \quad (\varphi \text{ läuft in } M) . \quad (3.14)$$

Für die Anzahlen gilt daher mit Mischgruppenordnung  $m$

$$N = m \cdot \#X^\wedge, \#X_n = m \cdot \#X_n^\wedge, \text{ etc.} \quad (3.14')$$

(b) *A. Schönhage*

*Die Anzahl der reduzierten Fixsudokus ist*

$$f^\wedge = 1\,161\,284 = 97 \cdot 73 \cdot 41 \cdot 2^2. \quad (3.15)$$

*Somit ist die Anzahl aller Fixsudokus*

$$f = m f^\wedge = 9! \cdot 6^4 \cdot 97 \cdot 73 \cdot 41 \cdot 2^2 = 546\,143\,132\,344\,320. \quad (3.15')$$

Diese Zahl von der Größenordnung von fast 550 Billionen macht nur einen verschwindend kleinen Anteil 0,000 000 081 an der Anzahl  $N$  aller Sudokus aus.

**Korollar.**

$$2^9 p = \#X_n^\wedge + f^\wedge. \quad (3.15'')$$

$2^9 p$  setzt sich also additiv zusammen, auch die Anzahl der reduzierten neutralen Sudokus ist daher bekannt.

*Beweis von Satz 3.1.*

zu (a)  $X^\wedge$  entstand durch Anwendung von  $M$  auf  $X$ , also ist  $X = M \cdot X^\wedge$ . Andererseits wird die Reduziertheit bei Anwendung eines  $1 \neq \varphi \in M$  auf  $X^\wedge$  zerstört, die  $A^\wedge \in X^\wedge$  sind also inkongruent bzgl.  $M$ .  $X^\wedge$  ist also ein Fundamentalbereich für die Wirkung von  $M$ .

zu (b) Schönhages Resultat wird auf seiner Homepage [17] begründet. □

Wir wollen für den Sachverhalt in (3.14) eine kurze Redeweise verwenden:

*M operiert disjunkt* auf reduzierten Mengen, und diese Redeweise auch in gleich gelagerten Fällen verwenden.

In Kapitel 2 wurden Fixsudokus als Spezialisierungen von Blockschemata erzeugt und durch die Art ihrer Fixoperatoren in 2 Klassen eingeteilt. Die beiden Arten von Fixoperatoren werden durch 2 Typen von Leitoperatoren festgelegt:

$$\text{Typ } \underline{\sigma}: \{\sigma, \sigma^t = \sigma^\circ\} \quad \text{und} \quad \text{Typ } \underline{\sigma'}: \{\sigma', \sigma'^{-1}\sigma^\circ\}. \quad (3.16)$$

Denn in der  $[\rho, \rho^\circ]$ -Konjugationsklasse von  $\sigma'$

$$\sigma'^{[\rho, \rho^\circ]} = \{\sigma', \sigma'^{-1}\sigma^\circ, \sigma\sigma'^{-1}, \sigma'^{-1}\}$$

sind je 2 Operatoren invers, also nur 2 relevant, wie angegeben.

Die Mengen der Fixoperatoren zu den beiden Typen  $\underline{\sigma}$  und  $\underline{\sigma'}$  liegen in den Nebenklassen

$$\sigma T^* \text{ und } \sigma^\circ T^* \quad \text{bzw.} \quad \sigma' T^* \text{ und } \sigma'^{-1}\sigma^\circ T^*.$$

Diese bestimmen die Mengen  $X_{\underline{\sigma}}$  und  $X_{\underline{\sigma'}}$  der zugehörigen Fixsudokus

$$X_{\underline{\sigma}} = X_\sigma \cup X_{\sigma^\circ} \quad \text{und} \quad X_{\underline{\sigma'}} = X_{\sigma'} \cup X_{\sigma'^{-1}\sigma^\circ}.$$

Eine Sonderrolle zum Typ  $\underline{\sigma'}$  spielen die Mengen SF der Superfixe und der Einfachfixe EF $_{\underline{\sigma'}}$ , denn erstere sind bei  $\sigma'$  fix, die anderen bei  $\sigma'$  oder  $\sigma^{-1}\sigma^\circ$ . Die Sudokus vom Typ  $\underline{\sigma'}$  zerfallen also in 2 Teilklassen SF und EF $_{\underline{\sigma'}}$ .

Nun möchte man natürlich wissen, wie sich die Gesamtanzahl der Fixsudokus auf die Typenklassen verteilt.

Schon in Kapitel 2, Satz 2.1 wurde die Anzahl der Sudokus auf dem Blockschema  $B^\wedge$  zu  $\sigma$  auf die Anzahl der Praesudokus auf der Horizontalfigur  $abc$  zurückgeführt. Sie ist seit langem bekannt.

**Lemma 3.5** (Felgenhauer–Jarvis [4]). *Die Anzahl ist*

$$\# \text{Praes}(a b c) = 9! \cdot 56 \cdot 6^6 = 9! \cdot 2612736. \quad (3.17)$$

*Beweis.* Man kann  $a = e$  annehmen.

Der Grundblock  $e$  ist auf alle möglichen Weisen zu einem Praesudoku

$e b c$  zu ergänzen .

Dazu genügt es zunächst, die möglichen Zeilenmengen  $\{b_i\}$  von  $b$  anzugeben, die von  $c$  sind komplementär. Aus gleichem Grund kommt es nur auf die ersten beiden Zeilenmengen von  $b$  an, die dritte ist komplementär.

Mit den Bezeichnungen

$$m_1 = \{1, 2, 3\}, \quad m_2 = \{4, 5, 6\}, \quad m_3 = \{7, 8, 9\}$$

gibt es für  $b_1$  einmal die 2 Möglichkeiten

$$\{b_1\} = m_2 \text{ oder } = m_3.$$

Zwei weitere Alternativen für  $\{b_1\}$  sind

- $\{b_1\}$  enthält 1 Ziffer aus  $m_2$  und 2 Ziffern aus  $m_3$
- $\{b_1\}$  enthält 2 Ziffern aus  $m_2$  und 1 Ziffer aus  $m_3$ .

Das ergibt  $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$  Möglichkeiten.

Für die Belegungen von  $\{b_2\}$  ergeben sich die Alternativen im ersten Fall:

Das Ziffernpaar  $\mu\nu$  aus  $m_3$  in  $\{b_2\}$  wird durch ein Ziffernpaar aus  $m_1$  ersetzt und die  $m_2$ -Ziffer durch die Komplementziffer von  $\mu\nu$  in  $m_3$ . Im zweiten Fall entsteht eine analoge Situation.

Insgesamt ergeben sich für die Mengenbelegungen von  $b$ :  $2 + 3 \cdot 18 = 56$  Möglichkeiten.

Die Anordnungen der 6 Zeilenmengen der Blöcke  $b, c$  ergeben weiter  $6^6$  Möglichkeiten, was die Formel (3.17) beweist.  $\square$

Die allgemeine Aufgabe der Bestimmung der Teilanzahlen wurde von *Fritz Ostermann* [13] gelöst.

**Satz 3.2** (F. Ostermann). Mit der Ordnung  $m = 9! \cdot 6^4$  der Mischgruppe  $M$  geschieht die Aufteilung der Anzahlen von Fixsudokus wie folgt:

Vom Typ  $\underline{\sigma'}$  fallen auf die

$$\begin{array}{ll} \text{Superfixe} & \#SF = m \cdot 4 = 9! \cdot 5184, \\ \text{Einfachfixe} & \#EF_{\underline{\sigma'}} = m \cdot 6^2 \cdot 2 = m \cdot 72 \end{array} \quad (3.18)$$

viele Exemplare.

Folglich ist die Gesamtanzahl der Fixe vom Typ  $\underline{\sigma'}$ :

$$\#X_{\underline{\sigma'}} = m \cdot 76 = 9! \cdot 98496 \quad (3.18')$$

Die Anzahl der Fixsudokus vom Typ  $\underline{\sigma}$  ist

$$\#X_{\underline{\sigma}} = m \cdot 6^4 \cdot 2^7 \cdot 7 = m \cdot 1161216. \quad (3.18'')$$

*Beweis.* Schönhages Lösung des Winkelproblems besteht in der Aussage:

Auf dem Blockschema

$$B_0^* = \begin{matrix} & e & b & c \\ & c & e & b \\ & b & c & e \\ e & & & \end{matrix}$$

mit Blockdiagonalen  $e = \begin{matrix} & e & \\ & & e \end{matrix}$  gibt es genau 40 Fixsudokus, sie sind fix unter  $\sigma'$ .

Darunter sind genau 4 Superfixe und genau 36 Einfachfixe. Wir wollen diese Mengen suggestiv mit  $\{k\}$  abkürzen, mit  $k = 4, 36, 40$ .

Da alle Fixsudokus aus  $\{40\}$  die Blockdiagonale  $e$  haben, sind sie reduziert. Daher operiert  $M$  disjunkt auf  $\{k\}$  für alle  $k$ , mit den Bahnlängen

$$\#M.\{k\} = m \cdot k.$$

Natürlich gilt

$$M.\{40\} = M.\{36\} \cup M.\{4\} \text{ disjunkt.}$$

Auf dem  $\rho$ -konjugierten Blockschema

$$\rho B_0^* = \begin{matrix} & b & c & e \\ & c & e & b \\ & e & b & c \\ e & & & \end{matrix}$$

mit der Coblockdiagonalen  $e' = \begin{matrix} & e & \\ & & e \end{matrix}$  leben natürlich gleich viele Fixsudokus  $\rho \{k\}$ , für die Analoges gilt. Dabei verhalten sich die M-Bahnen unterschiedlich bei  $\{36\}$  und  $\{4\}$ . Beide Fälle müssen daher getrennt behandelt werden.

Für die Superfixe gilt

$$\rho \{4\} \subset M.\{4\}. \quad (3.19)$$

Das liegt nicht ganz auf der Hand. Wir benutzen eine Beziehung (3.20) von Ostermann.

Dazu bestätigt man folgende Übergänge

$$U = \begin{matrix} e & ss^{\circ-1}e & s^{-1}s^{\circ}e \\ s^{-1}s^{\circ}e & e & ss^{\circ-1}e \\ ss^{\circ-1}e & s^{-1}s^{\circ}e & e \end{matrix} \quad \mapsto \quad U_1 = \begin{matrix} e & s'e & s'^{-1}e \\ s'e & s'^{-1}e & e \\ s'^{-1}e & e & s'e \end{matrix} \quad \mapsto C,$$

wobei die Operatoren  ${}_2s'^{-1} {}_3s' \in T_{23}^*$  auf die 2-ten bzw. 3-ten Streifen von  $U$  angewandt werden, horizontal und vertikal, dann in  $U_1$  die beiden unteren Horizontalstreifen vertauscht werden. Es entsteht  $C$ :

$$\rho_1 {}_2s'^{-1} {}_3s' U = C. \quad (3.20)$$

Nach (1.11) (c) gilt

$$sr = r_1, \quad \text{also} \quad r = s^{-1}r_1 \quad (r = r_2),$$

und somit  $\rho = \sigma^{-1}\rho_1$ . Aus (3.20) folgt

$$\rho {}_3s' {}_2s'^{-1} U = \sigma^{-1}C. \quad (3.20')$$

Nach (2.24) ist  $C$  unter  $\sigma * s'$  fix, also

$$\sigma^{-1}C = *s'C.$$

Nach den Zifferndarstellungen von  $s, s^\circ$  auf  $e$  in (3.5') ist mit eindeutigem  $\alpha' = \alpha\alpha^\circ \in Z$

$$s'e = \alpha'e.$$

Dann hat  $*s'$  Ziffernwirkung auf  $C$ , also

$$*s'C = \alpha'C \quad \text{mit } \alpha' \in Z,$$

und somit  $\sigma^{-1}C = \alpha'C$ .

Zusammen mit (3.20') wird

$$\varphi U = \rho C \quad \text{mit explizitem} \quad \varphi = \alpha'^{-1} {}_3s' {}_2s'^{-1} \in M,$$

und daher ist

$$\rho C \in M \cdot U \subset M \cdot \{4\}.$$

Nach Lemma 3.3 operiert die 4er-Gruppe  $R = [*r\gamma, *r^\circ\gamma^\circ]$  auf  $\{4\}$  regulär, also ist  $\{4\} = R.C$ . Da  $*r, *r^\circ$  mit  $\rho$  kommutieren, wird

$$\rho\{4\} = \rho R.C = R\rho.C \subset M \cdot \{4\},$$

also

$$M\rho.\{4\} = M.\{4\}. \quad (3.21)$$

Wegen  $Z \leq M$  ist die Menge SF der Superfixe

$$SF = M.\{U, U^\circ, C, C^\circ\} \text{ mit der Anzahl } m \cdot 4.$$

Die Menge der *Einfachfixe*  $EF_{\underline{\sigma'}}$  vom Typ  $\underline{\sigma'}$  setzen sich aus den M-Bahnen der Sudokus aus {36} und der  $M^\rho$ -Bahnen der  $\rho$ -Konjugierten  $\rho \cdot \{36\}$  zusammen

$$EF_{\underline{\sigma'}} = M.\{36\} \cup M^\rho \rho \{36\}. \quad (3.22)$$

Die Anzahl in beiden Fällen ist  $m \cdot 36$ . Offenbar ist die Vereinigung der Bahnen disjunkt genau dann, wenn

$$\#EF_{\underline{\sigma'}} = m \cdot 72 \text{ ist.}$$

Dies wird durch die Bilanz am Ende bestätigt.

Bei den Fixsudokus vom Typ  $\sigma$  ist die Methode eine andere.

Wir legen das Blockschema  $B^\wedge(\sigma)$  zugrunde aus Satz 2.1, (2.8) zunächst ohne die Zeilenvertauschungen

$$B_0^\wedge(\sigma) = \begin{array}{ccc} a & b & c \\ h_1^\circ a & h_2^\circ b & h_3^\circ c \\ h_1^{\circ-1} a & h_2^{\circ-1} b & h_3^{\circ-1} c \end{array}.$$

Jedes Praesudoku auf  $abc$  bestimmt ein Fixsudoku auf  $B^\wedge(\sigma)$  zu jedem Sondertripel  $\mathbf{h}^\circ$ . Das ergibt  $2^3 \cdot f j$  viele Sudokus mit der Felgenhauerzahl  $f j$ .

Die Anwendung von  $T_{23}$ , also Zeilenvertauschungen in den 2. und 3. Horizontalstreifen, wirkt disjunkt auf die Sudokumenge, da die obige Horizontalfigur nicht tangiert wird. Das ergibt den weiteren Faktor  $6^2$ . Zusammen ist die Anzahl der Menge aller Fixsudokus auf  $B^\wedge(\sigma)$   $f j \cdot 2^3 \cdot 6^2$ .

Ferner ist  $X_\sigma$  eine  $G_0^*$ -Menge, da die Konjugation mit  $G_0^*$  die Nebenklasse  $\sigma T^*$  invariant lässt. Somit gilt für die Anzahl

$$N_\sigma = \#X_\sigma = f j \cdot 6^2 \cdot 2^3 = 9! \cdot 6^8 \cdot 2^6 \cdot 7 = m \cdot 6^4 \cdot 2^6 \cdot 7.$$

Analoges gilt für die Fixmenge  $X_{\sigma^\circ} = tX_\sigma$  mit der gleichen Anzahl  $N_\sigma$ .

Die 4 Superfixe haben Fixoperatoren in  $\sigma T^*$  und  $\sigma^\circ T^*$ . Wegen  $M \leq G_0^*$  gilt für die M-Bahnen also

$$M.\{4\} \subset X_\sigma \quad \text{und} \quad tM.\{4\} \subset X_{\sigma^\circ}.$$

Somit ist die Anzahl  $m \cdot 4$  der Superfixe 2-mal abzuziehen.

Die Bilanz der Teilanzahlen ist also mit  $N_{\sigma'} = \#EF_{\underline{\sigma'}}$

$$\text{Typ } \underline{\sigma'} : N_{\sigma'} + m \cdot 4 = m \cdot 72 + m \cdot 4 = m \cdot 76$$

Typ  $\underline{\sigma}$  ohne Superfixe

$$N_\sigma + N_{\sigma^\circ} - 2m \cdot 4 = m \cdot (6^4 \cdot 2^7 \cdot 7 - 8) = m \cdot 1161208.$$

Die Summe der Teilanzahlen ist also Schönhages Gesamtanzahl

$$f = m \cdot f^\wedge \text{ mit } f^\wedge = 1161284.$$

□

**Korollar.** Die beiden  $M$ - bzw.  $M^\rho$ -Bahnen der Einfachfixe vom Typ  $\underline{\sigma}'$  in (3.22) sind also disjunkt.

### 3.3 Die $G$ -Fixsudokus als $G^*$ -Mengen

Die Analyse der  $G^*$ -Mengen bleibt auf die Fixsudokus beschränkt. Dass eine Strukturbestimmung gelingt, beruht auf folgenden Kenntnissen:

- die Blockstrukturen der Fixe in Kapitel 2,
- der Reduktionsmechanismus aus Abschnitt 2,
- die Anzahlbestimmungen durch Schönhage-Ostermann .

Die Welt der *allgemeinen  $G$ -Mengen* ist vielfältig. Einige Grundbegriffe dazu werden kurz eingeführt.

Eine *endliche  $G$ -Menge*  $X = (G, X)$  besteht aus einer endlichen Gruppe  $G$  der Ordnung  $n$ , einer endlichen Objektmenge  $X$  und einer Aktion von  $G$  auf  $X$

$$G \times X \longrightarrow X \text{ durch } (g, x) \mapsto g \cdot x \in X \text{ für } g \in G, x \in X$$

mit den Bedingungen

$$(g'g) \cdot x = g'(g \cdot x), \quad 1 \cdot x = x.$$

$G$  operiert *treu*, wenn noch gilt

$$g \cdot x = x \text{ für alle } x \Rightarrow g = 1.$$

Wenn die Gruppe festgehalten wird, genügt es, eine  $G$ -Menge durch ihre Objektmenge  $X$  zu notieren. Die üblichen Definitionen für  $G$ -Moduln über einem Ring oder Körper übertragen sich auf  $G$ -Mengen. Sind  $X_1, X_2$  disjunkte  $G$ -Mengen, so ist  $X_1 \cup X_2$  eine  $G$ -Menge, die als (direkte) *Summe*

$$X_1 + X_2$$

notiert wird.

$X$  heißt *reduzibel* oder *zerlegbar*, wenn  $X$  disjunkte Vereinigung von  $G$ -invarianten nichtleeren Teilmengen ist, also Summe von  $G$ -Mengen ist. Eine  $G$ -Menge heißt *irreduzibel* oder *unzerlegbar*, wenn sie nicht zerlegbar ist.  $X$  heißt *einfach*, wenn  $X$  keine

echten  $G$ -invarianten Teilmengen besitzt. Irreduzible  $G$ -Mengen sind nicht immer einfach.

Jede Permutationsgruppe  $G$  bestimmt eine  $G$ -Menge auf einer Ziffernmenge. Umgekehrt führt eine  $G$ -Menge zu einer Permutationsgruppe, indem man die Objektmenge abzählt. Beide Theorien sind isomorph. Dennoch ist oft die Willkür einer Abzählung unangemessen, wenn die Objekte komplizierter sind, wie bei den Sudokus. Die Zykendarstellungen etwa machen dann wenig Sinn. Andere Strukturbetrachtungen sind gefragt. So liegt es nahe, nach strukturbedingten echten Teilmengen  $X_0$  von  $X$  zu fragen, die  $X$  durch  $G$  erzeugen:  $X = G \cdot X_0$ .

Ein solches  $X_0$  wollen wir eine *Leaderbasis* nennen. Jedes Vertretersystem der  $G$ -Bahnen von  $X$  ist natürlich sogar eine *minimale Leaderbasis*. In konkreten Fällen ist eine solche i. A. weder angebbbar noch ausgezeichnet.

Im Sudoku-Setting haben die  $G^*$ -Mengen der Fixsudokus eine spezielle Struktur, die zuerst abstrakt vorgestellt werden soll. Zur Konstruktion eines Prototyps ( $G, X$ ) werden besondere Daten ausgezeichnet, die 2 Axiomen unterworfen sind:

- (1)  $G$  besitzt eine Untergruppe  $G_0$  vom Index 2, die dann Normalteiler ist.  $G$  wird über  $G_0$  von einer Involution  $p$  erzeugt

$$G = [G_0, p] = G_0 \times [p] \text{ mit } p^2 = 1 .$$

- (2) In  $X$  ist eine Leaderbasis  $X_0$  ausgezeichnet, also  $X = G \cdot X_0$ .
- (3) In  $G_0$  ist ferner eine Untergruppe  $M$  der Ordnung  $m \neq 1$  ausgezeichnet mit folgenden *Axiomen*

- (a)  $M$  operiert disjunkt auf  $X_0$

$$M \cdot X_0 = \bigcup_{\mu \in M} \mu \cdot X_0 \text{ disjunkt} .$$

- (b) Es gilt entweder

$$X = M \cdot X_0 = pM \cdot X_0$$

oder  $X$  zerlegt als  $G_0$ -Menge (!) in der Form

$$X = M \cdot X_0 \cup pM \cdot X_0 \text{ disjunkt} .$$

Die beiden Fälle werden als *1-spurig* bzw. *2-spurig* bezeichnet.

Eine solche  $G$ -Menge mit den Daten

$$(X, X_0; G, G_0, p, M)$$

heißt *vom Sudoku-Typ* oder *S-G-Menge*.

Bei diesem Prototyp wird die Objektmenge  $X$  schon durch die Anwendung von  $M$  bzw.  $[M, p]$  auf die Leaderbasis ausgefüllt.  $X$  ist aber auch  $G$ -Menge. Der Stabilisator  $F = ST_G(X_0)$  von  $G$  auf  $X_0$  operiert nicht immer treu auf  $X_0$ , die Aktion kann einen Kern haben.  $F$  bestimmt Bahnen auf  $X_0$ .

**Lemma 3.6.** Die Wirkung von  $F$  auf  $X_0$  kann zu einer Reduktion der Leaderbasis führen, nämlich immer, wenn  $F$  nicht trivial wirkt.

Mit einem Vertretersystem  $V$  der  $F$ -Bahnen wird

$$G \cdot X_0 = MF \cdot V = X \text{ bzw. } X = G \cdot X_0 = [M, p]F \cdot V.$$

Operiert  $F$  l-bahnig auf  $X_0$ , so operiert  $G \leq l$ -bahnig auf  $X_0$ .

Die Wirkung von  $G$  auf  $X_0$  ist durch die von  $M$  bestimmt: Für  $\varphi \in G \setminus F, x_0 \in X_0$  ist

$$\varphi x_0 = \mu x'_0 \quad \text{mit eindeutigen} \quad x'_0 \in X_0, \mu \in M.$$

Wir sagen dann:  $\varphi$  wirkt *verschränkt*,  $\varphi$  gehört also nicht dem Stabilisator an.

*Beweis.* Denn da  $M$  disjunkt auf  $X_0$  operiert, wird der Wert  $\varphi \cdot x_0 \in X$  an einem Aufpunkt  $x_0$  von genau einem Operator  $\mu \in M$  an einer eindeutig bestimmten Stelle  $x'_0$  aus  $X_0$  angenommen.  $\square$

**Bemerkung 3.1.** Die  $S$ - $G$ -Mengen bestehen aus 4 verschiedenen Einzeltypen:

- den 1-bahnigen Typen: 1-spurig oder 2-spurig,
- den mehrbahnhigen Typen: 1-spurig oder 2-spurig.

Es zeigt sich, dass im Sudokufall genau 3 dieser Typen auftreten. Die mehrbahnhigen Typen sind stets 2-spurig.

Liegt der 1-bahnige Fall vor, so bestimmt sich die Ordnung der  $G$ -Fixgruppe eines Punktes  $x_0$  aus  $X_0$  aus der bekannten Formel

$$\#G = \#X \cdot \# \operatorname{Fix}_G(x_0). \quad (3.23)$$

## Der Fall der Fixsudokus

Vorbereitend stellen wir nochmals fest: Nach Kapitel 2 gibt es an e-normierten  $G$ -Fixen genau 4 Superfixe und 60 Einfachfixe. Letztere unterteilen sich in

- 36 Sondersudokus der 1. Art zu den Leitoperatoren  $\sigma'$ ,  $\sigma^{-1}\sigma^\circ$
- 24 Sondersudokus der 2. Art zu den Leitoperatoren  $\sigma$ ,  $\sigma^\circ$

Als Sudokus liegen sie in unterschiedlicher Form vor:

Die Sondersudokus der 1. Art numerisch in Abschnitt 2.6, die Superfixe und die Sondersudokus 2. Art in Blockdarstellung (Satz 2.6 (ii) bzw. Abschnitt 2.9).

Zur Vereinfachung verwenden wir die im vorigen Abschnitt eingeführten Bezeichnungen  $\{k\}$  mit  $k = 4, 36, 24$  für die verschiedenen e-normierten Arten.

Die Fixsudokus bestehen aus 2 großen Klassen von  $G^*$ -Mengen, der Klasse  $X^1 = X_{\underline{\sigma'}}$  vom Typ  $\underline{\sigma'} = (\sigma, \sigma^{-1}\sigma^\circ)$  und der Klasse  $X^2 = X_{\underline{\sigma}}$  vom Typ  $\underline{\sigma} = (\sigma, \sigma^\circ)$ , auch einheitlich mit  $X$  bezeichnet. Die Untergruppe vom Index 2 und die Involution  $p$  werden für beide Typen unterschiedlich gewählt. Wir beginnen mit der

**$G^*$ -Menge  $X^1 = X_{\underline{\sigma'}}$**

Die Daten dieser  $G^*$ -Menge sind

Involution  $p = \rho$

Untergruppe vom Index 2 :  $G_1^* = Z \times G_1$  mit

(†)

$$G_1 = [T^*, [\sigma, \sigma^\circ], \rho' = \rho\rho^\circ, t]$$

$M$  die kleine Mischgruppe  $M = Z \times T_{23}^*$ .

Die Ordnung von  $G_1$  ist  $6^6 \cdot 6^2 = 6^8$ , der Index in  $G$  also 2. Daher ist auch  $G^* = [G_1^*, \rho]$ .

Vorab ist zu klären:  $G^*$  operiert auf  $X^1$ .

Dazu genügt es zu zeigen, dass die beiden Gruppen

$$[\sigma']T^*, [\sigma^{-1}\sigma^\circ]T^*$$

unter Konjugation mit  $G$  in sich übergeführt werden.  $T^*$  ist Normalteiler, erhält also die beiden Testgruppen.  $[\sigma, \sigma^\circ]$  wirkt sogar trivial auf den Leitoperatoren  $\sigma'$  und  $\sigma^{-1}\sigma^\circ$ .

Bleibt zu testen

$$\sigma'^{\rho'} = \sigma'^{-1}, (\sigma^{-1}\sigma^\circ)^{\rho'} = (\sigma^{-1}\sigma^\circ)^{-1} = (\sigma^{-1}\sigma^\circ)^t, \sigma'^t = \sigma' \text{ und } \sigma'^\rho = \sigma^{-1}\sigma^\circ. \quad (3.24)$$

Jede  $G^*$ -Bahn eines Superfixen bzw. Einfachfixen besteht nur aus solchen dieser Art. Ihre Mengen  $SF^1$  bzw.  $EF^1$  sind daher  $G^*$ -Teilmengen von  $X^1$ . Daher zerlegt  $X^1$  als  $G^*$ -Menge

$$X^1 = SF^1 + EF^1 \quad \text{disjunkt}. \quad (3.25)$$

Die 40 e-normierten Sudokus in  $X^1$  spalten auf  $\{40\} = \{4\} \cup \{36\}$  in die Superfixe und Einfachfixe.

Nach Satz 3.2 gilt für die Superfixe

$$SF^1 = M\{4\}.$$

Dahinter steckt die nichtriviale Aussage

$$M\{4\} = \rho M\{4\}$$

aus (3.21). Daher gilt für die  $G^*$ -Menge  $SF^1$

$$SF^1 = G^*\{4\} = M\{4\} \quad \text{mit Leaderbasis } \{4\}.$$

Für die Einfachfixe gilt dagegen nach (3.22) zum Satz 3.2 zunächst

$$EF^1 = M.\{36\} \cup \rho M.\{36\} \quad \text{disjunkt} \quad (3.26)$$

als  $G_1^*$ -Mengen (!). Denn nach (3.24) sind die  $G_1^*$ -Mengen  $G_1^*\{36\}$  und  $\rho G_1^*\{36\}$  fix zum Leitoperator  $\sigma'$  bzw.  $\sigma^{-1}\sigma^\circ$ . Also ist

$$EF^1 = G_1^*\{36\} \cup \rho G_1^*\{36\} \quad \text{disjunkt}. \quad (3.26')$$

Das ergibt

$$EF^1 = G^*\cdot\{36\} \quad \text{mit Leaderbasis }\{36\}. \quad (3.26'')$$

Somit ist

**Lemma 3.7.** Die  $G^*$ -Menge  $X^1$  zum Typ  $\underline{\sigma'}$  zerlegt direkt in Superfixe und Einfachfixe

$$X^1 = SF^1 + EF^1.$$

Beide Summanden sind  $S\text{-}G^*$ -Mengen, die Superfixen 1-spurig, die Einfachfixe 2-spurig. Leaderbasen sind  $\{4\}$  bzw.  $\{36\}$  für die Sondersudokus der 1. Art.

Die Anzahlen sind

$$\#SF^1 = m \cdot 4, \quad \#EF^1 = 2m \cdot 6^2. \quad (3.27)$$

Also ist  $X^1$  eine  $S\text{-}G^*$ -Menge mit der Leaderbasis  $\{40\}$ .

$M$  operiert disjunkt auf  $X_0 = \{40\}$ , da diese 40 Sudokus reduziert sind.

Für eine Reduktion der Leaderbasis ist nach Lemma 3.6 der  $G^*$ -Stabilisator von  $X_0$  zuständig. Wir wollen den  $G^*$ -Stabilisator  $F = St_{G^*}(X_0)$  von  $X_0 = \{40\}$  zu  $X^1$  bestimmen.

In Abschnitt 3.1 wurde eine Methode angegeben, die zu seiner Bestimmung genutzt werden kann. Die Z-Ergänzungen von gewissen lokalen Operatoren aus  $G$  führen auf  $G^*$ -Operatoren, die jeden Grundblock  $e$  in einem Sudoku festlassen. Insbesondere bleibt die Blockdiagonale  $e$  der 40 Fixesudokus erhalten.

Wir betrachten dazu die zur Blockgruppe  $\Gamma_0$  isomorphe Diagonale in der lokalen Gruppe  $T^*$

$$L = [{}^*s, {}^*r] \times [{}^*s^\circ, {}^*r^\circ].$$

Sie wird von  $T^*$ -Operatoren mit konstanter Wirkung auf die Blöcke erzeugt.

Der Übergang zu den Z-Ergänzungen gemäß (3.5')

$${}^*s \mapsto {}^*\underline{s} = {}^*s\alpha^{-1}, \quad {}^*r \mapsto {}^*\underline{r} = {}^*r\gamma \quad \text{etc. für die dualen,}$$

ergibt einen Isomorphismus

$$L \longrightarrow \underline{L} = [{}^*\underline{s}, {}^*\underline{r}] \times [{}^*\underline{s}^\circ, {}^*\underline{r}^\circ] = [{}^*\underline{s}, {}^*\underline{s}^\circ] \rtimes R, \quad (3.28)$$

mit der ergänzten 4er-Gruppe  $R$  aus Abschnitt 3.1.

Denn die Z-Begleiter  $\alpha, \gamma$  etc. verhalten sich homomorph zu den Operatoren  $s, r$  und  ${}^*s, {}^*r$  etc., da sie durch diese eindeutig auf einem e-Block bestimmt sind.

Nach Schönhage liegt ein Sudoku  $A \in X^1$  genau dann in  $\{40\}$ , wenn seine Blockdiagonale gleich  $\mathbf{e} = e/e/e$  ist. Daher gilt für ein  $\varphi \in G^*$

$\varphi \in F \iff \varphi$  lässt die Blockdiagonale  $\mathbf{e}$  fest.

Da  $\rho$  diese Bedingung nicht erfüllt, liegt der Stabilisator  $F$  in  $G_1^*$ .

Das genau leisten die gemischten Operatoren aus  $\underline{L}$ , sie liegen also im Stabilisator  $F$ . Auch die  $Z$ -Ergänzungen  $\underline{t}, \underline{t}^\circ$  der Transponierten liegen in  $F$ . Denn  $t, t^\circ$  transponieren die Diagonalblöcke  $e$ , was durch die  $Z$ -Begleiter  $\tau, \tau^\circ$  wieder rückgängig gemacht wird. Die globalen Operatoren  $\sigma' = \sigma\sigma^\circ$  und  $\rho' = \rho\rho^\circ$  erhalten ebenfalls die Blockdiagonale

$$\begin{array}{ccccccccc} & e & & e & & e & & e & \\ \rho' \mathbf{e} = \rho \rho^\circ & e & = \rho & e & = \mathbf{e} & \sigma' \mathbf{e} = \sigma \sigma^\circ & e & = \sigma & e = \mathbf{e} \\ & e & & e & & e & & e & \end{array}$$

Also gilt

$$F_0 = [\underline{L}, \sigma', \rho', \underline{t}, \underline{t}^\circ] \subset F.$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $F_0 = F$  ist. In  $G_1^*$  liegen nach Definition die Gruppe  $ZT^*$  und die Elemente  $\sigma, \sigma^\circ, \rho'$  und  $t, t^\circ$ , somit auch  $\underline{t}, \underline{t}^\circ$ . Es gilt  $M = ZT_{23}^*$  und  $T^* = T_{23}^*L$ , also  $ZT^* = ML$ , somit auch  $ZT^* = M\underline{L}$ . Und wegen  $[\sigma, \sigma^\circ] = [\sigma, \sigma']$  wird dann

$$G_1^* = M\underline{L} \cup \sigma F_0 = MF_0 \cup \sigma F_0.$$

$M$  operiert disjunkt auf  $X_0$ , hat also mit  $F_0$  den Durchschnitt  $\{1\}$ .  $\sigma$  operiert ver-schränkt auf  $X_0$ , liegt also nicht in  $F$ . Also ist  $F_0 = F$ .

Da  $\sigma'$  die Leaderbasis  $\{40\}$  fixlässt, ist nur deren *reduzierter Stabilisator*

$$F' = [\underline{L}, \rho', \underline{t}, \underline{t}^\circ]$$

von Interesse.

Die Gruppe  $[\rho', \underline{t}, \underline{t}^\circ]$  ist abelsch und lässt  $\underline{L}$  stabil bei Konjugation. Also ist  $F'$  semidirektes Produkt

$$F' = \underline{L} \rtimes [\rho', \underline{t}, \underline{t}^\circ] \tag{3.28'}$$

der Ordnung  $2^3 \cdot 6^2$ .

Denn  $\rho', \underline{t}$  kommutieren und erhalten  $\underline{L}$  bei Konjugation stabil. Mit der Formel

$$tt^\circ = \mu\mu^\circ = \rho\rho^\circ * r^*r^\circ = \rho' * r' \tag{3.29}$$

aus Kapitel 1 erkennt man, dass auch  $\underline{t}^\circ$  mit  $\rho'$  kommutiert und  $\underline{L}$  bei Konjugation erhält.

Es sei bemerkt, dass das Produkt  $T^* = T_{23}^*L$  weder ein direktes noch semidirektes Produkt von  $T^*$  ist. Es bedeutet vielmehr, dass der homogene Raum  $T_{23}^* \setminus T^*$  als Vertretersystem die Gruppe  $L$  besitzt, also disjunkt gilt

$$T^* = \bigcup_{\lambda} T_{23}^* \lambda \quad \text{mit} \quad \lambda \in L.$$

Das direkte Vertretersystem  $T_1^*$  führt durch  $Z$ -Ergänzung nicht zu Operatoren aus  $F$ .  $T_1^*$  verändert den oberen Diagonalblock  $(1, 1)$ , lässt die unteren beiden fest. Die  $Z$ -Ergänzung  $\underline{T}_1^*$  lässt den oberen fest und verändert die unteren beiden.

Der Stabilisator  $F$  von  $\{40\}$  in  $X^1$  lässt auch die Sudokumengen  $\{4\}$  und  $\{36\}$  stabil, ist also auch deren Stabilisator. Denn  $F$ , wie auch  $G^*$ , führt Superfixe und Einfachfixe in solche gleicher Art über.

**Satz 3.3** (Typ  $\underline{\sigma}'$ ). *Für die  $G^*$ -Menge  $X^1$  ist der reduzierte  $G^*$ -Stabilisator der Leaderbasis  $\{40\}$*

$$F' = [\underline{L}, \rho', \underline{t}, \underline{t}^\circ] = \underline{L} \rtimes [\rho', \underline{t}, \underline{t}^\circ] \quad (3.30)$$

mit der  $Z$ -ergänzten Gruppe  $\underline{L} = [{}^*\underline{s}, {}^*\underline{s}^\circ] \rtimes R$  aus (3.28).

Die Ordnung ist  $\#F' = 2^3 \cdot 6^2$ .

$F'$  ist auch der reduzierte Stabilisator von  $\{4\}$  und  $\{36\}$ .

a. *Superfixe  $SF^1$*

Die 4er-Gruppe  $R$  operiert regulär auf der Leaderbasis  $\{4\}$ . Daher ist die  $G^*$ -Menge  $SF^1$  1-bahnig und 1-spurig.

Die  $G^*$ -Fixgruppe von  $U \in \{4\}$  ist semidirektes Produkt

$$G_U^* = G_U \rtimes \Lambda_U \quad (3.31)$$

der  $G$ -Fixgruppe  $G_U$  mit einer gemischten Gruppe  $\Lambda_U \subset F' \subset G^* \setminus G$

$$\Lambda_U = [{}^*\underline{s}, {}^*\underline{s}^\circ] \rtimes [\underline{t}, \underline{t}^\circ, \mu_0]$$

mit einem Operator  $\mu_0 = \rho \rho^\circ * \underline{\gamma}^* \underline{\gamma}^\circ$ .

Die Ordnung ist

$$\#G_U^* = 3 \cdot 6^3 .$$

b. *Einfachfixe  $EF^1$*

Der reduzierte  $G^*$ -Stabilisator der Leaderbasis  $X_0 = \{36\}$  ist die in (3.30) angegebene Gruppe  $F'$ . Diese operiert 2-bahnig auf  $X_0$ . Also:

Die Einfachfixe  $EF^1$  sind als  $G^*$ -Mengen 2-bahnig und 2-spurig.

Beweis. ad a.

Zunächst operiert die Untergruppe  $R$  von  $\underline{L}$  nach Lemma 3.3 regulär auf  $\{4\}$ . Daher ist  $SF^1$  1-bahnig nach Lemma 3.6.

Die  $G$ -Fixgruppe  $G_U$  ist nach Abschnitt 2.5, (2.24)

$$G_U = [\sigma * s * s^{\circ - 1}, \sigma^\circ * s^{-1} * s^\circ],$$

sie enthält  $\sigma'$ . Nach den Lemmata 3.2 und 3.4 liegen  ${}^*\underline{s}, {}^*\underline{s}^\circ, \underline{t}, \underline{t}^\circ$  in der gemischten Fixgruppe  $\Lambda_U$ , sowie nach dem Korollar zum Lemma 3.3 auch der globale Operator

$$\mu_0 = \mu \mu^\circ \underline{\gamma} \gamma^\circ = \rho \rho^\circ * \underline{\gamma}^* \underline{\gamma}^\circ = \rho' * \underline{\gamma}' .$$

$\mu_0$  liegt nicht in  $[\underline{t}, \underline{t}^\circ]$ . Zwar gilt nach Formel (1.18')  $\underline{t}\underline{t}^\circ = \mu\mu^\circ$ , aber

$$\underline{t}\underline{t}^\circ = \mu\mu^\circ\tau\tau^\circ \neq \mu_0 = \mu\mu^\circ\gamma\gamma^\circ \quad \text{wegen } \tau \neq \gamma.$$

Also ist

$$[\underline{t}, \underline{t}^\circ, \mu_0] \text{ eine abelsche Gruppe der Ordnung 8.}$$

Diese lässt die Gruppe  $[*\underline{s}, *\underline{s}^\circ]$  bei Konjugation stabil, somit gilt

$$\Lambda_U = [*\underline{s}, *\underline{s}^\circ] \rtimes [\underline{t}, \underline{t}^\circ, \mu_0].$$

Man zeigt dies für die G-Anteile der Operatoren, dann gilt dies auch für die Z-Ergänzungen. Die einfachen Details werden hier nicht ausgeführt.

Ein einfacher Schluss zeigt, dass die G-Fixgruppe  $G_U$  durch Konjugation mit  $\Lambda_U$  in sich transformiert wird:

$$G_U^z = z^{-1}G_Uz = G_U$$

für alle  $z \in \Lambda_U$ .

Die Ziffernanteile von  $z$  induzieren die Identität auf  $G_U$ , also ist

$$G_U^z \text{ in } G \text{ enthalten für alle } z.$$

Andererseits ist

$$G_U^z \cdot U = z^{-1}G_Uz \cdot U = U,$$

da  $U$  durch die  $z$  fixgelassen wird. Also ist  $G_U^z = G_U$  für alle  $z \in \Lambda_U$ .

Es ergibt sich die Gleichheit

$$G_U^* = G_U \rtimes \Lambda_U,$$

da beide Seiten gleiche Ordnung  $3 \cdot 6^3$  haben.

ad b.

Schönhages Lösung des Winkelproblems bestand in der numerischen Angabe aller Sondersudokus der 1. Art. Diese werden durch Anwendung der Involution  $\rho'$  in 2 Hälften von je 18 Sudokus aufgeteilt. Sondersudokus der 1. Art sind durch Angabe von 2 Blöcken  $b$  und  $c$  festgelegt, in dieser Notierung wurden sie am Ende von Abschnitt 2.6 explizit aufgelistet.

In der Menge  $\{36\}$  können nun gewisse Zonen ausgemacht werden, die überraschenderweise auf den Z-Begleitern der Operatoren aus  $F'$  beruhen. Die Wirkung von  $F'$  wird eindeutig durch die Wirkung auf die Blockpaare bestimmt, also durch den Blockanteil

$$F_0 = [\underline{s}, \underline{s}^\circ, \underline{\tau}, \underline{\tau}^\circ, \underline{t}, \underline{t}^\circ] \tag{3.32}$$

des Stabilisators

$$F' = \underline{L} \rtimes [\rho', \underline{t}, \underline{t}^\circ].$$

Die Blockvertauschung, die durch  $\rho' \in G$  bewirkt wird, soll wieder mit  $\rho'$  bezeichnet werden. Da  $\sigma \in G_1$  nicht in  $F'$  liegt, muss es verschränkt auf  $\{36\}$  wirken.

Wie bereits dargelegt, haben die  $Z$ -Begleiter

$$\alpha, \alpha^\circ, \gamma, \gamma^\circ, \tau, \tau^\circ$$

die folgenden Zyklenerlegungen (Abschnitt 3.1, (3.5'))

$$\begin{aligned} \alpha &= (147)(258)(369), & \alpha^\circ &= (123)(456)(789) \\ \gamma &= (17)(28)(39), & \gamma^\circ &= (13)(46)(79) \\ \tau &= (24)(37)(68), & \tau^\circ &= (19)(26)(48). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Dabei sind  $\alpha, \alpha^\circ$  fixpunktfrei, die übrigen haben je 3 Fixziffern. Es ergeben sich die *Fehlmengen*

$$\gamma: \{4, 5, 6\}, \quad \gamma^\circ: \{2, 5, 8\}, \quad \tau: \{1, 5, 9\}, \quad \tau^\circ: \{3, 5, 7\}.$$

Die Ziffer 5 kommt in jeder dieser Mengen vor.

Die Zonen werden nun mit den  $Z$ -Begleitern von  $\gamma$  bis  $\tau^\circ$  bezeichnet und durch deren Fehlmengen definiert. Dabei wird Schönhages Nummerierung in Abschnitt 2.6 der Blockpaare zugrunde gelegt. Ein Sudoku aus  $\{36\}$  ist de facto bereits durch Angabe seines Blocks  $b$  bestimmt. So steht eine Nummer zugleich für das Sudoku und für den  $b$ -Block, der es definiert.

## Definition der Zonen

Die Zone  $\{\gamma\}$  besteht aus allen Blockpaaren, die die  $\gamma$ -Fehlmenge  $\{4, 5, 6\}$  als Zeilensetzen haben. Die Zone  $\{\gamma^\circ\}$  besteht aus allen Blockpaaren, die die  $\gamma^\circ$ -Fehlmenge  $\{2, 5, 8\}$  als Spaltenmenge haben. Entsprechend haben die Mitglieder in den Zonen  $\{\tau\}$  und  $\{\tau^\circ\}$  die Fehlmengen  $\{1, 5, 9\}$  bzw.  $\{3, 5, 7\}$  als Diagonal- bzw. Codiagonalmengen.

Durch Inspektion erhält man die Zonen

$$\begin{aligned} \{\gamma\} &= \{3, 4, 5, 15, 16, 17\} & \cup & \quad \rho'\{\dots\} \\ b\text{-Anteil} & & & c\text{-Anteil} \\ \{\gamma^\circ\} &= \{6, 8, 9, 12, 13, 14\} & \cup & \quad \rho'\{\dots\} \\ \{\tau\} &= \{1, 2, 7\} & \cup & \quad \rho'\{\dots\} \\ \{\tau^\circ\} &= \{10, 11, 18\} & \cup & \quad \rho'\{\dots\}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Nun ist zu prüfen, wie die  $Z$ -ergänzten Blockoperatoren in  $F_0$  aus (3.34) die Zonen respektieren. Dabei sind bei der Wirkung der  $Z$ -Begleiter deren Zyklenerlegungen aus (3.5') zu benutzen. Im Prinzip ist es möglich, die Wirkung dieser Operatoren auf *jedem* Block per Hand anzugeben. Wir werden dies in einigen Fällen ausführen. Nochmals sei betont, die Nummern bezeichnen stets den Block  $b$  des Sudokus.

### Wirkung auf $\{\gamma\}$

$$\begin{array}{ccccccccc} 5 & 6 & 4 & & 3 & 1 & 2 & & 6 & 4 & 5 \\ \underline{s}3 = \underline{s} & 8 & 9 & 7 & = \alpha & 5 & 6 & 4 & = & 8 & 9 & 7 & = 4, \\ & 3 & 1 & 2 & & 8 & 9 & 7 & & 2 & 3 & 1 \\ & & & & & & & & & & & \\ \underline{s}5 = \rho' 15, & & & & & & & & & & & \underline{s}^2 5 = \rho' 17. \end{array}$$

Also stiftet  $[\underline{s}]$  auf  $\{\gamma\}$  2 3er-Zyklen

$$(3, 4, \rho' 16) \quad \text{und} \quad (5, \rho' 15, \rho' 17).$$

Dann erzeugt  $[\underline{s}, \rho']$  auf  $\{\gamma\}$  2 Bahnen der Länge 6

$$\{3, 4, 16\} \cup \rho' \{\dots\} \quad \text{und} \quad \{5, 15, 17\} \cup \rho' \{\dots\}.$$

Die Wirkung von  $\underline{r}$  ist

$$\begin{array}{ccccccccc} 5 & 6 & 4 & & 3 & 1 & 2 & & 9 & 7 & 8 \\ \underline{r}3 = \underline{r} & 8 & 9 & 7 & = \gamma & 8 & 9 & 7 & = & 2 & 3 & 1 & = \rho' 5, \\ & 3 & 1 & 2 & & 5 & 6 & 4 & & 5 & 6 & 4 \\ & & & & & & & & & & & \\ \underline{r}4 = 16, & & & & & & & & & & & \underline{r}15 = \rho' 17. \end{array}$$

Die erste Wirkung  $3 \rightarrow \rho' 5$  verbindet diese beiden Bahnen. Also

$$[\underline{s}, \underline{r}, \rho'] \text{ operiert 1-bahnig auf der Zone } \{\gamma\}.$$

Dagegen operiert  $[\underline{s}^\circ, \underline{r}^\circ]$  trivial auf  $\{\gamma\}$ .

### Wirkung auf $\{\gamma^\circ\}$

Hier operiert  $[\underline{s}^\circ, \underline{r}^\circ, \rho']$  1-bahnig auf  $\{\gamma^\circ\}$ .

Denn es gilt etwa

$$\begin{aligned} \underline{s}^\circ 6 &= 8, & \underline{s}^{\circ 2} 6 &= 12; & \underline{s}^\circ 9 &= 14, & \underline{s}^{\circ 2} 9 &= 13, \\ \underline{r}^\circ 6 &= \rho' 9, & \underline{r}^\circ 8 &= \rho' 13, & \underline{r}^\circ 12 &= \rho' 14. \end{aligned}$$

Die beiden  $[\underline{s}^\circ]$ -Bahnen werden durch  $\underline{r}^\circ$  verbunden:

$$6 \rightarrow \rho' 9 \quad \text{und} \quad 12 \rightarrow \rho' 14.$$

### Wirkung von $\underline{t}$ auf $\{\gamma^\circ\}$

$$\begin{array}{ccccccccc} 8 & 6 & 4 & & 8 & 2 & 5 & & 6 & 4 & 5 \\ \underline{t}8 = \underline{t} & 2 & 9 & 7 & = \tau & 6 & 9 & 3 & = & 8 & 9 & 7 & = 4, \\ & 5 & 3 & 1 & & 4 & 7 & 1 & & 2 & 3 & 1 \\ & & & & 5 & 9 & 7 & & 5 & 6 & 4 \\ \underline{t}13 = \underline{t} & 8 & 3 & 1 & = \tau & 9 & 3 & 6 & = & 9 & 7 & 8 & = \rho' 16. \\ & 2 & 6 & 4 & & 7 & 1 & 4 & & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

Also verbindet  $\underline{t}$  die beiden Zonen  $\{\gamma\}$  und  $\{\gamma^\circ\}$ . Damit ist gezeigt:  
 $F$  operiert 1-bahnig auf der Doppelzone  $\{\gamma\} \cup \{\gamma^\circ\}$

$$F \cdot 3 = \{\gamma\} \cup \{\gamma^\circ\}. \quad (3.35)$$

Vermutlich gilt sogar  $\{\gamma^\circ\} = \underline{t}\{\gamma\}$ .

Es bleibt, die Wirkung von  $F$  auf der Doppelzone

$$\{\tau\} \cup \{\tau^\circ\} = \{1, 2, 7, 10, 11, 18\} \cup \rho\{\dots\}$$

zu untersuchen. Man stellt zunächst fest:

$\underline{t}$  und  $\underline{t}^\circ$  wirken auf  $\{\tau^\circ\}$  bzw.  $\{\tau\}$  wie  $\rho'$ , auf den zugehörigen Zonen nichttrivial.

### Wirkung von $[\underline{s}, \underline{s}^\circ]$ und $[\underline{r}, \underline{r}^\circ]$

$$\underline{s}1 = 7, \quad \underline{s}2 = \rho' 1, \quad \underline{s}7 = \rho' 2, \quad \underline{s}^\circ 10 = \rho' 11, \text{ etc.}$$

Also operieren  $[\underline{s}, \rho']$  und  $[\underline{s}^\circ, \rho']$  jeweils regulär auf den Teilzonen  $\{\tau\}$  bzw.  $\{\tau^\circ\}$ . Ferner ist

$$\underline{r}1 = \rho' 11, \quad \underline{r}2 = \rho' 18, \quad \underline{r}7 = 10.$$

Somit führt  $[\underline{r}, \rho']$  die Teilzonen ineinander über

$$[\underline{r}, \rho'] : \{\tau\} \longrightarrow \{\tau^\circ\} \text{ bijektiv.}$$

Also operiert die Gruppe  $F_0 = [\underline{s}, \underline{r}, \underline{s}^\circ, \underline{r}^\circ, \rho']$  1-bahnig auf  $\{\tau\} \cup \{\tau^\circ\}$ :

$$F_0 \cdot 1 = \{\tau\} \cup \{\tau^\circ\}. \quad (3.35')$$

$F'$  hat also genau 2 Bahnen auf  $\{36\}$ . □

**Bemerkung 3.2.** Das Ergebnis der 2-Bahnigkeit besagt, dass alle Sondersudokus der 1. Art aus 2 ausgewählten Exemplaren durch Anwendung von Z-ergänzten Operatoren entstehen.

Die beiden Bahnen werden in Kapitel 6 auch strukturell erkennbar sein.

**Bemerkung 3.3.** Eine interessante andersartige Konstruktion der Sondersudokus 1. Art hat *Fritz Ostermann* [13] erstellt, der ein verzweigter Entscheidungsbaum für die Praesudokus auf Winkelfiguren zugrunde liegt.

Wir wenden uns nun der 2-ten Klasse der Fixe zu, der  
 $G^*$ -Menge  $X^2 = X_\sigma$

Die Daten werden wie folgt festgelegt.

- Untergruppe vom Index 2:  $G_0^* = ZG_0$
- Involution ist die Transposition  $t$
- $M$  wieder die kleine Mischgruppe  $M = ZT_{23}^*$ .

$X^2$  ist  $G^*$ -Menge, denn die Gruppen  $[\sigma]T^*$  und  $[\sigma^\circ]T^*$  werden durch  $G$ -Konjugationen erhalten bzw. vertauscht.

Sei  $X_0$  die Menge der *reduzierten* Sudokus von  $X^2$ . Dann gilt

$$X^2 = M.X_0 .$$

In  $X_0$  liegt die Menge  $\{28\} = \{24\} \cup \{4\}$  aller e-normierten Sudokus von  $X^2$ . Also ist

$$X_0 = X'_0 \cup \{24\} \cup \{4\}$$

mit der Menge  $X'_0$  aller nicht e-normierten Sudokus in  $X_0$ .

Folglich ist

$$X^2 = M.X'_0 \cup M.\{24\} \cup M.\{4\} \text{ disjunkt,}$$

weil  $M$  auf Reduzierten disjunkt operiert.

Nach Satz 3.3 ist  $M.\{4\}$  eine  $G^*$ -Menge. Daher ist  $M.\{4\}$  auch als  $G^*$ -Menge in  $X^2$  1-spurig und 1-bahnig.

### Die Sondersudokus {24} der 2. Art

Wir stützen uns auf ihre explizite Darstellung in Satz 2.11

$$A = \nu E,$$

wobei  $\nu$  ein Produkt zweier Operatormatrizen  ${}^\circ\nu_i$  und  $\nu_j^\circ$  ist, die in (2.57) und (2.55') aufgeführt sind. Es entstehen die 12 Sondersudokus zum Leitoperator  $\sigma$ , also die Fixen zu Operatoren aus  $\sigma T^*$ . Es besteht die Aufspaltung

$$\{24\} = \{12\}_\sigma \cup \{12\}_{\sigma^\circ}$$

zu den beiden Leitoperatoren  $\sigma, \sigma^\circ$ .

Wir haben im Fall  $X^1$  gesehen, dass die Gruppe  $L$  die geeignete Ergänzung von  $T_{23}^*$  zu  $T^*$  ist:  $T^* = T_{23}^*L$ . Mit der Z-ergänzten Gruppe  $\underline{L}$  wird  $ZT^* = ZT_{23}^*\underline{L}$ .

$Z$ -ergänzte Operatoren lassen alle Grundblöcke  $e$  fest. Also führen alle Operatoren aus  $\underline{L}$  und die ergänzte Transposition  $\underline{t} = t\tau$  die Sondersudoku {24} in sich über.

Schließlich bleibt die totale Grundmatrix  $E$  fix:

$$\underline{L} \cdot E = E, \quad \underline{t} \cdot E = E \quad (3.36)$$

Die Wirkung wird nun genauer untersucht. Zunächst ist

$$\underline{t}\{12\}_\sigma = \{12\}_{\sigma^\circ},$$

denn  $\sigma w A = A$  mit  $w \in T^*$  impliziert  $\underline{t}A = \underline{t}\sigma w A = \sigma^\circ w' \underline{t}A$ .

Man bestätigt leicht die Wirkung von  $[\sigma']$  auf die 3 vertikalen Operatormatrizen in (2.55')  $v_1^\circ, v_3^\circ, v_5^\circ$ :

$$\sigma' v_3^\circ = v_1^\circ, \quad \sigma' v_1^\circ = v_5^\circ, \quad \sigma' v_5^\circ = v_3^\circ. \quad (3.37)$$

Für den Übergang zu den Zwillingen sind die zugehörigen Blockmatrizen  ${}^\circ v_1 E$  und  $v_j^\circ E$  zu betrachten. Dann gilt mit den Operatoren aus  $R$

$$\begin{aligned} {}^*\underline{r}^\circ \cdot v_1^\circ E &= v_2^\circ E \\ {}^*\underline{r}^\circ \cdot v_1 E &= {}^\circ v_2 E, \quad {}^*\underline{r}^\circ \cdot v_3^\circ E = v_4^\circ E \\ {}^*\underline{r}^\circ \cdot v_5^\circ E &= v_6^\circ E \end{aligned} \quad (3.38)$$

Denn nach (3.36) wird etwa

$${}^*\underline{r}^\circ \cdot v_1^\circ E = {}^*\underline{r}^\circ \cdot v_1^\circ \cdot {}^*\underline{r}^\circ E = v_2^\circ E,$$

weil die Konjugation der Operatormatrizen mit dem konstanten Operator  ${}^*\underline{r}^\circ$  die Konjugation mit  $r^\circ$  in den Blöcken bedeutet, hier also die Einträge  $s^\circ, s^{\circ-1}$  vertauscht.

Also führt  $R = [{}^*\underline{r}, {}^*\underline{r}^\circ]$  alle Repräsentanten in die Zwillinge über.

Ferner bestätigt man die Wirkung von  $\sigma, \sigma^\circ$ :

$$\sigma^\circ v_i = {}^*s^\circ v_i, \quad \sigma^\circ v_j^\circ = {}^*s^{\circ-1} v_j^\circ,$$

und die  ${}^*\underline{s}, {}^*\underline{s}^\circ$  aus  $\underline{L}$  respektieren {24}. Dagegen wirken  $\rho, \rho^\circ$  verschränkt auf {24}.

Es wurde gezeigt:

**Lemma 3.8.** Die Menge  $M \cdot \{24\}$  ist eine  $G^*$ -Menge. Die Gruppe  $R \rtimes [\sigma', \underline{t}]$  ist der Stabilisator der {24} Sondersudoku der 2. Art, sie operiert regulär.

Da  $t G_0^* \{24\} = G_0^{*\underline{t}} t \{24\} = G_0^* \underline{t} \{24\} = G_0^* \{24\}$  gilt, ist  $M \cdot \{24\}$  als  $G^*$ -Menge 1-spurig.

**Die  $G^*$ -Menge  $X' = M.X'_0$**

Alle Sudokumengen  $X^2, M.\{24\}, M.\{4\}$  sind  $G^*$ -Mengen, also auch  $M.X'_0$ .

Die Transponierte  $t$  lässt die Diagonale der reduzierten Sudokus aus  $X'_0$  fest, daher wirkt  $\underline{t}$  als Involution auf  $X'_0$ . Also ist wie eben die  $G^*$ -Menge  $X'$  1-spurig.

Die Anzahl der Leaderbasis  $X_0$  von  $X^2$  bestimmt sich aus der bekannten Anzahl von  $X^2$  aus Satz 3.2 zu

$$\#X_0 = 6^4 \cdot 2^7 \cdot 7.$$

Dadurch ergibt sich die Anzahl der Leaderbasis  $X'_0$  von  $X'$  als Differenz. Damit wurde bewiesen

**Satz 3.4.** *Die  $G^*$ -Menge  $X^2 = X$  ist die direkte Summe von 3  $G^*$ -Mengen*

$$X^2 = X' + M.\{24\} + M.\{4\}. \quad (3.39)$$

*Alle Komponenten sind 1-spurig.*

*Die  $G^*$ -Mengen der Superfixe und der Sondersudokus 2. Art sind 1-bahnig mit an-gebbaren Stabilisatoren.*

*Die  $G^*$ -Menge  $X'$  ist mehrbahnig, eine Leaderbasis aus reduzierten Einfachfixen hat die Anzahl*

$$\#X'_0 = 4 \cdot 7 \cdot (6^4 \cdot 2^5 - 1).$$

Also sind alle  $G^*$ -Mengen von Fixen  $S$ - $G$ -Mengen im abstrakten Sinn.

**Bemerkung 3.4.** Die Aktion von  $\underline{t}$  auf  $X'_0$  als Involution gestattet eine Reduktion der Leaderbasis auf die Hälfte. Weitere Reduktionen sind nicht möglich, weil Operatoren die Reduzierten nicht erkennen können, da diese auf Anordnungen beruhen.

### 3.4 Parametrisierung

Sind die Sudokus parametrisierbar?

Dies ist eine zentrale Frage der Sudokutheorie. Die Möglichkeit einer solchen Parametrisierung springt ins Auge: Die Blockdiagonale bietet sich als Parameterbereich an. Die Praesudokus auf der Blockdiagonalen sind zwischen den 3 Blöcken keinerlei Bindungen unterworfen, erfüllen also die Erfordernisse eines freien Parametersystems, die freie Variierbarkeit der Parameter, hier also der Blockparameter.

Jedem Sudoku ist durch Einschränkung auf die Blockdiagonale ein bestimmter Parameter zugeordnet. Sei

$$Y = \text{Praes } BD$$

die Menge aller Praesudokus auf der Blockdiagonalen BD.

Praesudoku heißt hier nur, dass die Diagonalblöcke den Sudokubedingungen genügen, also alle Ziffern 1, ..., 9 auftreten.

Die Einschränkungsabbildung

$$\Phi: X \longrightarrow Y, \quad \Phi A = \gamma \quad (3.40)$$

von  $X$  auf die BD ordnet jedem Sudoku seinen Parameter  $\gamma \in Y$  zu.

Eine Parametrisierung liegt natürlich nur dann vor, wenn jedem Parameter mindestens ein Sudoku entspricht,  $\Phi$  also surjektiv ist.

Es genügt dazu, den reduzierten Parameterbereich  $Y^\wedge$  zu Sudokus fortzusetzen, also die Surjektivität von

$$\Phi: X^\wedge \longrightarrow Y^\wedge \quad (3.40')$$

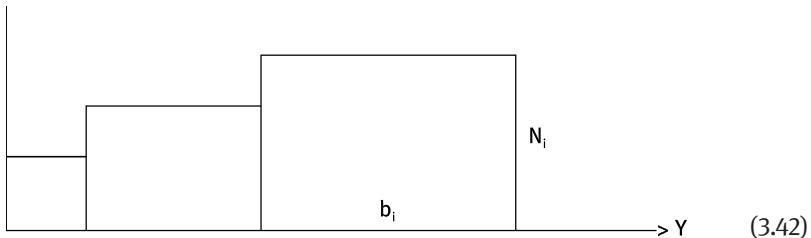
zu beweisen. Die Mischgruppe  $M$  bewirkt dann die Fortsetzung von  $Y$  auf  $X$  (Satz 3.1).

Ein Vergleich der Anzahlen macht deutlich, dass die Reduktion erheblich ist:

$$\begin{aligned} \#Y &= 9!^3 \approx 64 \cdot 10^{15} \\ \#Y^\wedge &= 9!^2 \cdot 6^{-4} = 101\,606\,400, \end{aligned} \quad (3.41)$$

die aber bei weitem nicht ausreicht.

Aber man will mehr als die bloße Fortsetzbarkeit! Ein Vergleich der Anzahlen  $\#Y^\wedge$  und  $\#X^\wedge = 2^9 p$  macht deutlich, dass hohe Fortsetzungsanzahlen der reduzierten Parameter – also für die Faseranzahlen  $N_{y^\wedge} = \#\Phi^{-1}(y^\wedge)$  – zu erwarten sind. Die gewünschten Daten können in folgendem Diagramm dargestellt werden:



Die Zusammenfassung in Tableaus gleicher Faseranzahl wird durch den Datensatz  $(N_i, b_i, s)$  beschrieben, wobei die Höhen  $N_i$  die konstanten Faserlängen und die  $b_i$  die Breite eines Paketes angeben.  $s$  ist die Anzahl der Pakete. Die Bilanz im reduzierten Fall ist dann

$$2^9 p = \#X^\wedge = \sum_i b_i N_i. \quad (3.42')$$

Das *Starke Fortsetzungsproblem* beinhaltet dann die Angabe der Daten  $b_i, N_i, s$ .

Dieses schwierige numerische Fortsetzungsproblem wurde von Arnold Schönhage gelöst.

**Fortsetzungssatz** (A. Schönhage). *Jeder Parameter  $y \in Y$  ist zu einem Sudoku fortsetzbar. Die Faseranzahlen, also die Vielfachheiten der surjektiven Abbildung*

$$\Phi: X \twoheadrightarrow Y$$

wurden bestimmt:

$$\#\Phi^{-1}y \text{ bekannt für alle } y \in Y.$$

Dabei liegt der Lösung des Problems eine computerorientierte Kodierung der Parameter zugrunde.

Die enorme Datenfülle ist auf Schönhages Homepage [17] dokumentiert und kann dort nachgelesen werden.

Nun ist der Parameterraum  $Y$  ein punktierter Raum mit der konstanten Blockdiagonalen  $\mathbf{e} = e/e/e$  als ausgezeichnetem Punkt. In diesem Fall kann für *Fixsudokus* erheblich mehr ausgesagt werden:

**Satz 3.5** (A. Schönhage – F. Ostermann). *Es gibt genau 64 Fixsudokus mit der Blockdiagonalen  $\mathbf{e}$  aus Grundblöcken. Mit der Einschränkung  $\Phi_f$  von  $\Phi$  auf Fixsudokus gilt genauer*

$$\# \Phi_f^{-1} \mathbf{e} = \begin{cases} 40 \text{ für Fixe vom Typ } \underline{\sigma}'(\text{Schönhage}) \\ 24 \text{ für Fixe vom Typ } \underline{\sigma}(\text{Ostermann}) \end{cases}, \quad (3.43)$$

insgesamt also 64  $\mathbf{e}$ -normierte Fixsudokus

**Bemerkung 3.5.** Es wird darauf hingewiesen, dass in den Kapitel 4 und 5 mit der Clantheorie ein Strukturmittel entwickelt wird, das es gestattet, Beiträge – auch neutraler Sudokus – in den Fasern anzugeben und deren Anzahlen zu bestimmen.

### 3.5 Permutationsmerkmale

Zur Beschreibung eines Sudokus bietet sich die *Permutationsmatrix* an. Diese misst die Permutationen, um die die Blöcke von dem Grundblock  $e$  abweichen:

$$A = (\alpha_{ij}) \text{ mit } \alpha_{ij} = \alpha_{ij} \cdot e, \alpha_{ij} \in S_9$$

ergibt die

$$\text{Permutationsmatrix } \text{Per } A = (\alpha_{ij}).$$

Diese bestimmt Merkmale bestehend aus Partitionen der 9, die auf der Zyklenerlegung der  $\alpha_{ij}$  beruhen.

Ein  $\alpha \in S_9$  zerlegt eindeutig (bis auf die Reihenfolge) in elementfremde Zyklen

$$\alpha = \pi_1 \dots \pi_t \text{ mit } \pi_i = (m_{i1} m_{i2} \dots m_{il_i}), l_i \geq 2 \quad (3.44)$$

mit Ziffern  $m_{ij} \in \{1, \dots, 9\}$ . Die Fixpunkte von  $\alpha$  werden als 1er-Zyklen nicht notiert.

Ein Zykel  $(m_1 m_2 \dots m_l)$  wird gelesen:

$$m_1 \text{ geht in } m_2, m_2 \text{ in } m_3, \dots, m_l \text{ in } m_1.$$

$\mu_l$  bezeichne für  $l > 1$  die Anzahl der Zyklen der Länge  $l$ , die in (3.44) auftreten bzw. für  $l = 1$  die Anzahl der Fixpunkte von  $\alpha$ . Der *Typ von  $\alpha$*  ist die Partition von 9

$$\text{typ } \alpha = \sum_l \mu_l \cdot l,$$

wobei der ' an der Summe andeutet, dass nur über die  $l$  mit  $\mu_l > 0$  summiert wird. Umgekehrt bestimmt jede Partition von 9 eindeutig Zyklängen und Vielfachheiten einer Permutation.

Die Ordnung von  $\alpha \in S_9$  ist gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zykluslängen  $l_i$

$$\text{ord } \alpha = [l_1, l_2, \dots, l_s]. \quad (3.45)$$

Die Anzahl  $p(n)$  aller Partitionen einer Zahl  $n$  kann aus Eulers erzeugender Funktion berechnet werden. Für  $n = 9$  ist  $p(9) = 30$ .

Die *Typenmatrix* eines Sudokus  $A$  ist dann

$$\text{typ } A = (\text{typ } \alpha_{ij})$$

und die *Ordnungsmatrix*

$$\text{ord } A = (m_{ij}) \text{ mit } \alpha_{ij}^{m_{ij}} = 1$$

die Matrix der Elementordnungen der  $\alpha_{ij}$ .

Beide Merkmale haben keinerlei Invarianzeigenschaften bei Anwendung von Operatoren aus der Sudokugruppe oder aus  $Z$ . Sie ändern sich in nicht vorhersehbarer Weise. Der Grund liegt in der Multiplikation *nicht* elementfremder Zyklen. Das Beispiel

$$\begin{aligned} (12345) \cdot (123) &= (13245) : \text{ord } 5 \\ " \quad (135) &= (14523) : \text{ord } 5 \\ " \quad (253) &= (12)(45) : \text{ord } 2 \\ " \quad (24) &= (125)(34) : \text{ord } 6 \end{aligned}$$

zeigt, dass Zufall ins Spiel kommt.

In Kapitel 4 wird eine triviale Eigenschaft von symmetrischen Gruppen verwandt:

**Bemerkung 3.6.** Elemente aus  $S_n$  sind konjugiert genau dann, wenn sie gleiche Typen haben.

Dies folgt aus der Konjugation von Zyklen

$$(m_1, m_2, \dots)^\varphi = (\varphi^{-1}m_1, \varphi^{-1}m_2, \dots).$$

Es stellt sich die Frage, ob es Kriterien an Permutationsmatrizen gibt, die Sudokus bestimmen. Die Erfahrung zeigt, dass dies aussichtslos ist. Aber es gibt einen Sonderfall, in dem ein interessantes Sudoku entsteht. Man geht aus von dem 9er-Zyklus

$$\xi = (123456789)$$

und bildet die sukzessiven Potenzen. Beginnend mit  $\xi^0 = \text{id}$  entsteht eine Permutationsmatrix

$$\Pi = \begin{array}{ccccccccc} \xi^0 & \xi^3 & \xi^6 & id & \alpha & \alpha^{-1} \\ \xi & \xi^4 & \xi^7 & \xi & \xi^4 & \xi^{-2} & \text{mit } \alpha = \xi^3 = (147)(258)(369). \end{array} \quad (3.46)$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \xi^2 & \xi^5 & \xi^8 & \xi^2 & \xi^5 & \xi^{-1} \end{array}$$

Anwendung von  $\Pi$  auf die Matrix  $E$  bestehend aus lauter Einträgen  $e$  ergibt das sog. *Verschiebungssudoku*

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \\
 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \hline
 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \\
 V = 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 \hline
 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \\
 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8
 \end{array} \tag{3.46'}$$

Man erkennt, dass hier die Zeilen in bestimmter Weise verschoben werden, so dass ein Sudoku entsteht. Aus (3.46) liest man die Typen- und die Ordnungsmatrix ab:

$$\text{typ } V = \begin{matrix} 9.1 & 3.3 & 3.3 \\ 1.9 & 1.9 & 1.9 \\ 1.9 & 1.9 & 1.9 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \text{ord } V = \begin{matrix} 1 & 3 & 3 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{matrix}.$$

$V$  ist nicht reduziert.

Es ist naheliegend anzunehmen, dass jeder 9er-Zyklus auf diese Weise ein Sudoku bestimmt. Dass dies nicht so ist, zeigt ein einfaches Gegenbeispiel. Die  $S_9$ -Konjugierte  $\kappa = \xi^\varepsilon$  mit dem 2er-Zyklus  $\varepsilon = (12)$  ist

$$\kappa = (213456789) \text{ mit } \kappa^2 = (146823579).$$

Schon der 1. Vertikalstreifen der zugehörigen Ziffernmatrix

$$\begin{array}{ccc|c}
 1 & 2 & 3 \\
 4 & 5 & 6 \\
 7 & 8 & 9 \\
 \hline
 3 & 1 & 4 \\
 5 & 6 & 7 \\
 8 & 9 & 2 \\
 \hline
 4
 \end{array}$$

enthält die 4 doppelt, ist also kein Praesudoku.  $\kappa$  definiert kein Sudoku.

Ist  $V$  Fixesudoku oder neutral? Der expliziten Gestalt (3.46') von  $V$  entnimmt man, dass die Blockdiagonale ein vertikales Praesudoku bestimmt:

$$\mathcal{Y} = \begin{matrix} e \\ \xi^4 e \\ \xi^{-1} e \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} e \\ \xi^4 e \\ \xi^{-1} e \end{matrix} \text{ Praesudoku}$$

Nach (3.5') ist aber  $\xi^3 = (147)(258)(369)$  gerade der Z-Begleiter  $\alpha$  von  $s$  auf  $e$ :  
 $s \cdot e = \alpha \cdot e$ . Aus  $\xi^3 = \alpha$  folgen

$$\begin{aligned}\xi e &= \xi^4 \alpha^{-1} e = \xi^4 s^{-1} e = s^{-1} \xi^4 e, & \xi^{-2} e &= \xi^4 \alpha e = s \xi^4 e \\ \xi^2 e &= \xi^{-1} \alpha e = \xi^{-1} s e = s \xi^{-1} e, & \xi^5 e &= \xi^{-1} \alpha^{-1} e = \xi^{-1} s^{-1} e = s^{-1} \xi^{-1} e.\end{aligned}$$

Das ergibt die Operatordarstellung von  $V$

$$V = \begin{matrix} e & se & s^{-1}e \\ s^{-1} \xi^4 e & \xi^4 e & s \xi^4 e \\ s \xi^{-1} e & s^{-1} \xi^{-1} e & \xi^{-1} e \end{matrix}.$$

Dieses Sudoku ist ein Fixsudoku vom dualen Typ  $\sigma^\circ$  auf dem Blockschema von Satz 2.4 mit trivialem dualem S-Tripel und angebarem Sondertripel. Hier wurde durch eine kleine Rechnung auf Fixsudoku erkannt.

Wir fügen noch 2 weitere Beispiele an. Das Superfixe  $C$  hat die Form

$$C = \begin{matrix} e & s'e & s'^{-1}e \\ s'^{-1}e & e & s'e \\ s'e & s'^{-1}e & e \end{matrix}.$$

Aus  $se = \alpha e$  und  $s^\circ e = \alpha^\circ e$  wird  $s'e = \alpha \alpha^\circ e$ . Nach (3.5') ergibt sich  $\alpha \alpha^\circ = (147)(258)(369)(123)(456)(789) = (159)(267)(348)$ .

Also sind Typen- und Ordnungsmatrizen

$$\text{typ } C = \begin{matrix} 9.1 & 3.3 & 3.3 \\ 3.3 & 9.1 & 3.3 \\ 3.3 & 3.3 & 9.1 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \text{ord } C = \begin{matrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{matrix}.$$

Die Merkmale sind axialsymmetrisch und durch die Primzahl 3 bestimmt.

Wir stellen dem ein zufälliges Sudoku gegenüber:

$$Z = \begin{array}{|ccc|ccc|ccc|} \hline 2 & 8 & 1 & 9 & 6 & 5 & 7 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 9 & 4 & 7 & 3 & 8 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 4 & 2 & 1 & 8 & 6 & 5 & 9 \\ \hline 9 & 2 & 6 & 5 & 8 & 4 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 & 9 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 3 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 \\ \hline 6 & 1 & 2 & 8 & 3 & 9 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 6 & 5 & 2 & 9 & 8 & 1 \\ 8 & 9 & 5 & 7 & 4 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ \hline \end{array}$$

Die per Hand hergestellte Permutationsmatrix wird

$$\text{Per } Z = \begin{matrix} (1283)(4569) & (198)(26357) & (17623485) \\ (1984367) & (15289734) & (27)(59)(68) \\ (1632)(5987) & (1846239) & (1582496)(37) \end{matrix}$$

Es treten Zyklen auf der Länge 2, 3, 4, 5, 7, 8. Es ergibt sich

$$\begin{array}{lllll} & 2.4 & 1.3 + 1.5 & 1.8 & \\ \text{typ } Z = & 1.7 & 1.8 & 3.2 & \text{und } \text{ord } Z = \\ & 2.4 & 1.7 & 1.7 + 1.2 & 4 & 15 & 8 \\ & & & & 7 & 8 & 2 \\ & & & & 4 & 7 & 14 \end{array}$$

Das zufällige Beispiel zeigt ein derart wildes Verhalten der Permutationsmerkmale, dass man auf neutral tippen würde. Und dies ist auch der Fall. Es gibt aber bisher kein Kriterium, aus der Typenmatrix oder schon aus der Ordnungsmatrix auf ein neutrales Sudoku zu schließen.

Nach dem Neutralitätskriterium aus Abschnitt 2.8 kann man die Neutralität aus der numerischen Form leicht erkennen. Die erste Spaltenmenge  $\{2, 5, 7\}$  des ersten Blocks findet sich in keiner Zeilen- oder Spaltenmenge der anderen Blöcke wieder.

### 3.6 Determinanten und Restsysteme mod 9

Im Prinzip macht es Sinn, die Determinanten der Sudokus als weiteres Merkmal einzubringen. Sie sind insofern multilinear Objekte, als ihre Automorphismen, die Operatoren der Sudokugruppe, aus Vertauschungen von Reihen und Streifen bestehen, die Determinanten bei Anwendung höchstens das Vorzeichen ändern. Also alle Sudokus einer  $G$ -Bahn  $G \cdot A$  haben gleichen Determinantenbetrag  $|\det A|$ .

Nun ist die übliche Wahl  $1, \dots, 9$  als Restsystem mod 9 willkürlich. Bei Übergang mit einer ganzen Zahl  $k$

$$1, \dots, 9 \mapsto 1 + k, \dots, 9 + k$$

zu einem anderen Restsystem mod 9 gehen die Determinanten durch eine einfache Formel aus einander hervor.

Sei  $A$  ein übliches Sudoku. Addiert man die 2. bis zur 9. Zeile zur 1. Zeile, so wird die Determinante

$$\det A = 45 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ A_0 \end{pmatrix} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1. \text{ Zeile} \\ A_0 \end{pmatrix}.$$

Dann addiere man das  $k$ -fache der neuen 1. Zeile  $111\dots 1$  zu jeder der Zeilen in  $A_0$ .

Es wird

$$\det A = 45 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ A_0 + kQ_0 \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

wobei  $Q = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$  die  $9 \times 9$ -Matrix aus lauter 1-en ist und  $Q_0$  den Abschnitt unter der 1. Zeile bezeichnet.

Startet man mit dem um  $k$  verschobenen Sudoku von  $A$

$$A_k = A + kQ,$$

so führt der gleiche Prozess zu

$$\det A_k = (45 + 9k) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ A_0 + kQ_0 \end{pmatrix}. \quad (3.47')$$

Für  $k = -5$  wird der Vorfaktor gleich 0.

Man erhält

**Lemma 3.9.** Für  $k \neq -5$  unterscheiden sich die Determinanten der Sudokus in verschiedenen Restsystemen nur um einen festen Faktor

$$\det A_k = (1 + k/5) \cdot \det A. \quad (3.48)$$

Der Parameterwert  $k = -5$  führt auf das absolut kleinste Restsystem

$$-4, -3, \dots, 0, 1, \dots, 4,$$

in diesem Restsystem sind alle Determinanten gleich 0.

Im kleinsten positiven, also dem bisherigen Restsystem  $1, \dots, 9$ , sind alle Determinanten durch  $3^2 \cdot 5$  teilbar. Im Restsystem  $0, 1, \dots, 8$  zu  $k = -1$  ist jede Determinante  $\det A_{-1}$  durch  $6^2$  teilbar.

Man erkennt aus der Formel (3.48), dass der Fall verschwindender Determinante in jedem System für  $k \neq -5$  zugleich stattfindet

$$\det A = 0 \iff \det A_k = 0.$$

Verschwindende Determinanten treten tatsächlich auf.

A. Schönhage hat in einer Studie [17] Determinanten von Fixsudokus untersucht. Er hat in Verschärfung von Lemma 3.9 bewiesen:

**Bemerkung 3.7.** Determinanten von Sudokus sind stets durch  $3^4 \cdot 5$  teilbar. Ferner haben alle 64 e-normierten Fixe verschwindende Determinanten.

Schönhages Liste der Fixe mit nichtverschwindender Determinante zeigt Werte bis zur Größenordnung von 180 Millionen, als betragskleinste wird  $-5 \cdot 3^{10}$  angegeben.

Das eigentlich Interessante ist aber, dass die Primzerlegung der Werte alle von folgender Form sind

$$|\det| = 2^n \cdot 3^m \cdot 5^l \cdot 7^k \cdot q \quad (3.49)$$

mit  $m \geq 4$ ,  $l \geq 1$  und einem Produkt  $q$  von höchstens 2 Primzahlen. Neben den beiden obligatorischen Primzahlen 3 und 5 treten höchstens 4 weitere Primzahlen

auf, und die sind „klein“  $\leq 500$ . Das ist merkwürdig! Es fällt darüber hinaus auf, dass in der Liste der Exponent  $m$  sogar  $\geq 7$  ist, die Determinanten also sogar durch  $3^7 \cdot 5$  teilbar sind.

Natürlich stellt eine jede Liste dieser Art nur einen Ausschnitt dar, und da ist man an der Grenze der Information, die Determinanten bieten können.

Während jeder Operator aus  $G$  den Determinantenbetrag unverändert lässt, ist dies für die Anwendung von Ziffernoperatoren aus  $Z$  wohl nicht der Fall. Es ist schwer vorstellbar, dass in (3.49) der Typ der Primzerlegung der Determinanten bei Anwendung von  $Z$  erhalten bleiben sollte.

## 4 Die allgemeine $G^*$ -Fixgleichung

Neutrale Sudokus haben per definitionem keine Fixpunkte unter der Sudokugruppe  $G$ . Die Existenz von  $G^*$ -Fixpunkten unter den Neutralen kann durch einen indirekten Anzahlschluss erkannt werden. Dieser beruht auf Satz 3.1 und auf der Gesamtanzahl  $N$  der Sudokus und ihrer Primzerlegung in (3.12). Nach (3.14') sind die Anzahlen der Fixe und der Neutralen durch die Anzahlen ihrer Reduzierten bestimmt:

$$\#X_n = m \cdot \#X_n^\wedge \quad \text{und} \quad f = \#X_f = m \cdot \#X_f^\wedge = m \cdot f^\wedge.$$

Nach (3.15'') besteht dann die Bilanz

$$2^9 \cdot p = \#X_n^\wedge + f^\wedge.$$

$f^\wedge$  ist nach Schönhage bekannt in (3.15).

Gäbe es unter den Neutralen keine  $G^*$ -Fixe, müsste  $\#G^* | m \cdot \#X_n^\wedge$  sein, oder gleichbedeutend

$$2 \cdot 6^4 | \#X_n^\wedge. \quad (\dagger)$$

Man zeigt die Kongruenz

$$\#X_n^\wedge = 2^9 p - f^\wedge \equiv 6 \pmod{9},$$

also steht 3 in erster Potenz in  $\#X_n^\wedge$ , im Widerspruch zu ( $\dagger$ ). Daher operiert  $G^*$  nicht fixpunktfrei auf  $X_n$ .

Der Primzerlegung (3.15) von  $f^\wedge$  entnimmt man ferner, dass  $2^2$  der genaue 2-Beitrag zu  $\#X_n^\wedge$  ist. Also ist nur der Anteil  $2^2 \cdot 3$  von  $2 \cdot 6^4$  Teiler von  $\#X_n^\wedge$ .

Folgendes Sudoku  $W$  ist  $G^*$ -fix und neutral:

7	8	6	1	2	3	4	5	9
1	2	9	4	5	6	7	8	3
4	5	3	7	8	9	1	2	6
6	7	8	9	1	2	3	4	5
W =	3	1	2	6	4	5	9	7
9	4	5	3	7	8	6	1	2
8	6	7	2	9	1	5	3	4
2	3	1	5	6	4	8	9	7
5	9	4	8	3	7	2	6	1

Der Fixoperator ist

$$\varphi^\circ = \rho^\circ * r(17)(28)(39),$$

also ein Operator der Ordnung 2.

Man erkennt, dass der  $Z$ -Anteil gerade der  $Z$ -Begleiter von  $r$  ist:  $r \cdot e = (17)(28)(39) \cdot e$ . Also ist  $\varphi = \rho^\circ * \underline{r}$  mit der  $Z$ -Ergänzung  $*\underline{r}$  in der Terminologie der vergangenen Abschnitte.

Der Nachweis, dass  $W$  neutral ist, ergibt sich aus unserem Neutralitätskriterium in Kapitel 2.8. Die obere Zeilenmenge 6 7 8 des linken oberen Blockes  $W_{11}$  kommt nur in den Zeilenmengen der Blöcke  $W_{i1}$  vor, und in keinem weiteren Block als Zeilen- oder Spaltenmenge. Aber die Zeilenmenge 1 2 9 von  $W_{11}$  ist nicht Zeilen- oder Spaltenmenge in den Blöcken  $W_{i1}$  mit  $i = 2, 3$ . Also ist  $W_{11}$  zu keinem anderen Block von  $W$  konjugiert,  $W$  ist neutral.

Das allgemeine Problem,  $G^*$ -Fixsudokus zu finden und nach Möglichkeit zu klassifizieren, ist kombinatorisch äußerst kompliziert. Es enthält die nun bekannte Theorie der  $G$ -Fixen ebenso wie die Aufgabe,  $G^*$ -Fixe von Neutralen zu finden.

Wir gehen das Problem in voller Allgemeinheit an.

Gesucht sind die Lösungen der

*Fixgleichung:*

$$\psi A = A \quad \text{mit } \psi \in G^* \setminus 1 \text{ und } A \in X. \quad (4.1)$$

Im Fall der Lösbarkeit heißt  $\psi$   $G^*$ -Fixoperator.

Die Fixgleichung wird hier in der folgenden (da  $G^* = G \times Z$ ) äquivalenten Form untersucht:

*Homogene Fixgleichung:*

$$\varphi A = \alpha A \quad \text{mit } \varphi \in G \setminus 1, \alpha \in Z \text{ und } A \in X. \quad (4.2)$$

Gesucht sind also Sudokus  $A$  und Semifixoperatoren  $\varphi \in G \setminus 1$ , die auf  $A$  Ziffernwirkung haben.  $A$  heißt  $G^*$ -Fixsudoku oder auch *Semifixsudoku*.

Der Operator  $\varphi$  wird meistens in der Form  $\tau w$  mit dem Leitoperator  $\tau \in [t, H^*]$  und dem lokalen Operator  $w \in T^*$  angesetzt.

In Kapitel 3 wurden bereits einige Lösungen der allgemeinen Fixgleichung (4.1) angegeben, die sich in die homogene Form (4.2) umformen lassen. Das oben genannte  $G^*$ -Fixsudoku  $W$  ist neutral. Die in Satz 3.3 bestimmte  $G^*$ -Fixgruppe lässt das superfixe  $U \in \{4\}$  fest. Zur Erläuterung der Lösungen von (4.2) führen wir die dortigen Operatoren im Einzelnen auf.

### Beispiele.

- (1)  $\varphi = \rho \rho^\circ * r * r^\circ$  mit Leitoperator  $\tau = \rho \rho^\circ = \rho'$  und konstantem lokalem Operator  $*r' = *r * r^\circ \in T^*$ . Dann ist

$$\rho' * r' U = \gamma' U \quad \text{mit } \gamma' = (19)(28)(37)(46).$$

$\gamma'$  ist das Produkt  $\gamma' = \gamma \gamma^\circ$  der  $Z$ -Begleiter zu  $r$  und  $r^\circ$ .

- (2)  $\tau = t$  und  $t^\circ$ , hier ist  $w = 1$ .

Es gilt

$$tU = \tau U,$$

$$\text{mit } \tau = (24)(37)(68),$$

$$t^\circ U = \tau^\circ U$$

$$\tau^\circ = (19)(26)(48).$$

Natürlich gilt auch für  $t' = tt^\circ$

$$t'U = \tau'U \quad \text{mit } \tau' = \tau\tau^\circ = (19)(28)(37)(46) = \gamma'.$$

(3) Der Fall  $\tau = 1$  wird in Abschnitt 4.2 ausgeführt.

Verschiedene Leitoperatoren können also gleiche Sudoku-Lösungen haben.

Im Folgenden werden strukturelle Bedingungen an die Daten  $\tau$ ,  $w$  und  $\alpha$  hergeleitet, die zu Lösungen von (4.2) führen. Nach einigen Vorbereitungen wird das kombinatorisch komplexe Problem allgemein angegangen.

Zunächst wird die Situation betrachtet, dass  $\tau$  (mindestens) einen Block  $b$  von  $A$  in sich überführt. Dann entsteht für diesen Block eine lokale Fixgleichung, die im folgenden Abschnitt untersucht wird.

## 4.1 Die lokale Fixgleichung und Konjugationsklassen

Die Reihen eines Blockes und die Streifen der Sudokus werden nach Kapitel 1 vollständig durch die  $3 \times 3$  Ziffern ihrer Nummerierungen festgelegt, also durch die Produktmenge

$$I^2 = I \times I = \{(i, j)\} \quad \text{mit } I = \{1, 2, 3\}.$$

Die Wirkung der Blockgruppe  $\Gamma$  und der rein globalen Gruppe  $[H^*, t]$  auf Reihen und Streifen wird dann durch die Wirkung der Gruppe

$$\Gamma = (S_3 \times S_3^\circ) \rtimes [t]$$

auf  $I^2$  codiert gemäß

$$\gamma(i, j) = (pi, q^\circ j), \quad t(i, j) = (j, i) \quad \text{für } \gamma = pq^\circ \in S_3 \times S_3^\circ, \quad (4.3)$$

etwa

$$si = i + 1, \quad r^\circ 1 = 3, \quad r^\circ 2 = 2.$$

$\Gamma$  operiert also auf den 9 Objekten  $(i, j) \in I^2$ , kann also als Untergruppe von  $S_9$  aufgefasst werden. Zerlegt man die  $\gamma \in \Gamma$  in ihre Zykeln, so kommt jedem Operator  $\gamma$  sein Permutationstyp zu, der mit  $\langle \gamma \rangle$  bezeichnet und kurz der *Typ* von  $\gamma$  genannt wird. Haben die Zykeln die Längen  $l_1 \geq \dots \geq l_m \geq 2$ , so ist die Notation  $\langle \gamma \rangle = (l_1, \dots, l_m)$ . (Zu den elementaren Begriffen der Permutationsgruppen sei auf Kapitel 3.5 verwiesen. Im Unterschied zu dort werden in der Notation des Permutationstyps hier gleiche Zyklallängen nicht zusammengefasst, sondern separat aufgeführt.)

Nun haben konjugierte Operatoren den gleichen Typ. So ergibt sich die Aufgabe, die Konjugationsklassen von  $\Gamma$  zu bestimmen, hier also für die Klassen

$$C_\gamma = \gamma^\Gamma = \{\gamma^p \mid p \in \Gamma\}.$$

Der Typ eines Elementes ist also eine Invariante der Klasse, die Klassen sind zueinander disjunkt.

**Satz 4.1.** *Die Gruppe  $(S_3 \times S_3^\circ) \rtimes [t]$  hat 9 Konjugationsklassen mit den Ordnungen*

$$1, 2, 3, 4, 6.$$

In der folgenden Tabelle werden alle Konjugationsklassen explizit angegeben mit ihren Permutationstypen.

**Tabelle 4.1:** Konjugationsklassen in  $(S_3 \times S_3^\circ) \rtimes [t]$ .

Vertreter	Konjugationsklasse	Element-Anzahl	Ordnung der Elemente	Permutationstyp
1	1	1	1	1
$r$	$C_r \cup C_r^\circ$	6	2	(2, 2, 2)
$rr^\circ$	$C_r C_r^\circ$	9	2	(2, 2, 2, 2)
$s$	$C_s \cup C_s^\circ$	4	3	(3, 3, 3)
$ss^\circ$	$C_s C_s^\circ$	4	3	(3, 3, 3)
$sr^\circ$	$C_r C_s^\circ \cup C_s C_r^\circ$	12	6	(6, 3)
$t$	$\{tgh^\circ : g, h \in S_3, gh = 1\}$	6	2	(2, 2, 2)
$tr^\circ$	$\{tgh^\circ : g, h \in S_3, gh \in C_r\}$	18	4	(4, 4)
$tss^\circ$	$\{tgh^\circ : g, h \in S_3, gh \in C_s\}$	12	6	(6, 3)

In  $\Gamma_0$  hängt der Permutationstyp von  $gh^\circ$  nur von den Permutationstypen von  $g$  und  $h$  in  $S_3$  ab. Notation:  $\langle gh^\circ \rangle =: \langle g \rangle \times \langle h \rangle$ .

In  $t\Gamma_0$  hängt der Permutationstyp von  $tgh^\circ$  nur vom Permutationstyp von  $g$   $h$  in  $S_3$  ab. Er lässt sich daher mit trivialer vertikaler Komponente darstellen:  $\langle tgh^\circ \rangle = \langle tgh1^\circ \rangle$ .

In der Tabelle werden die von  $\Gamma$  bekannten Bezeichnungen verwendet:  $S_3 = [s, r]$  und entsprechend  $S_3^\circ$ . Weiter bezeichnen  $C_s = \{s, s^{-1}\}$  und analog  $C_s^\circ$  die duale Klasse, und schließlich die Klasse von  $r$ :  $C_r = \{r_1, r_2, r_3\}$ .

*Beweis.* Wir bestimmen die Konjugationsklassen nach steigender Ordnung, ihre Typen ergeben sich dann aus der Anzahl der Fixpunkte. Hat  $y$  die Ordnung  $m$ , so tritt mindestens ein Zykel der Länge  $m$  auf, und weitere Zyklängen sind Teiler von  $m$ .

$$ad \Gamma_0 = S_3 \times S_3^\circ$$

Da  $S_3$  und  $S_3^\circ$  unter  $t$  konjugiert sind, sind  $C_s \cup C_{s^\circ}$  und  $C_r \cup C_{r^\circ}$  verschiedene  $\Gamma$ -Klassen der Ordnung 3 bzw. 2.  $s$  ist fixpunktfrei und  $r$  hat 3 Fixpunkte. Also gibt es 3 3er-Zyklen und 3 2er-Zyklen, die Typen sind also (3, 3, 3) und (2, 2, 2).

Die Ordnungen von  $ss^\circ$  und  $rr^\circ$  sind wieder 3 und 2. Während  $ss^\circ$  fixpunktfrei ist, hat  $rr^\circ$  einen Fixpunkt (2, 2) aus  $I^2$ . Die Typen sind (3, 3, 3) und (2, 2, 2, 2).

Die Ordnung von  $sr^\circ$  ist 6, der Typ also (6) oder (6, 3). Da  $sr^\circ$  fixpunktfrei ist, muss (6, 3) der Typ sein.

$ad t\Gamma_0$

Allgemein ist für  $\gamma = tgh^\circ$

$$\gamma^2 = (hg)(gh)^\circ .$$

Da  $\text{ord}(gh) = \text{ord}(hg)$  ist, gilt  $\text{ord } \gamma = 6, 4, 2$ , je nachdem  $\text{ord}(hg) = 3, 2, 1$  ist.

\* $\text{ord } \gamma = 2$ , also  $h = g^{-1}$ .

Die 2 Kandidaten  $tss^{\circ-1}$  und  $trr^\circ$  sind  $\Gamma$ -konjugiert. Wegen  $t^r = trr^\circ$  wird

$$(tss^{\circ-1})^r = trr^\circ s^{-1} s^{\circ-1} = tr_i r_i^\circ \quad \text{mit } i \neq 2 .$$

Also gibt es nur eine Klasse  $C_{tss^{\circ-1}}$  mit 3 Fixpunkten, also wieder vom Typ (2, 2, 2).

\* $\text{ord } \gamma = 4$

Der Kandidat  $\gamma = tsr^\circ$  hat einen Fixpunkt (1, 3) in  $I^2$ , also liegt der Typ (4, 4) vor.

\* $\text{ord } \gamma = 6$

Man hat zunächst 2 Kandidaten:  $\gamma_1 = tss^\circ$  und  $\gamma_2 = tr_i r_j^\circ$  für  $i \neq j$ , wegen  $r_i r_j = s$  oder  $s^{-1}$ . Nun ist  $\gamma_1$  wieder unter  $r = r_2$  konjugiert zu  $tr_j r_k^\circ$  mit  $j \neq k$ , also auch zu  $\gamma_2$ .  $\gamma_1$  ist fixpunktfrei, der Typ also (6, 3).

Nimmt man die  $C_1$ -Klasse hinzu, so wurden alle Klassen zu den Ordnungen konstruiert.  $\square$

Da  $[H^*, t]$  vom gleichen Permutationstyp ist wie die Blockgruppe  $\Gamma$ , folgt das

**Korollar.** Satz 4.1 gibt auch die Konjugationsklassen der Gruppe  $[H^*, t]$  an.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns dem Studium zu der

*Lokalen Fixgleichung*

$$\gamma b = \alpha b \tag{4.4}$$

Zu festem  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\alpha \in Z$  wird im Folgenden die Lösbarkeit untersucht und die Menge der Lösungsblöcke  $b \in X_0$  konstruktiv vollständig beschrieben.

Die Komponente  $b_{ij}$  von  $b$  wandert durch die  $\gamma$ -Anwendung an die Position  $\gamma(i, j)$ , daher hat der Block  $\gamma b$  an der Position  $\gamma(i, j)$  den Eintrag  $b_{ij}$ . An der Position  $(i, j)$  steht in  $\gamma b$  somit  $b_{\gamma^{-1}(i, j)}$ :

$$\gamma b = b \circ \gamma^{-1} ,$$

wobei  $b \circ \gamma^{-1}$  den Block mit dem  $(i, j)$ -Eintrag  $b_{\gamma^{-1}(i,j)}$  bezeichnet. Somit kann die lokale Fixgleichung auch in folgender Form geschrieben werden:

$$b \circ \gamma^{-1} = \alpha b \quad (4.5)$$

Der folgende Satz gibt ein Lösbarkeitskriterium:

**Satz 4.2.** *Die lokale Fixgleichung (4.4) ist lösbar genau dann, wenn gilt:*

$$\langle \gamma \rangle = \langle \alpha \rangle, \quad (4.6)$$

d. h. wenn  $\gamma$  (als Permutation des lokalen Koordinatenbereichs  $I^2$ ) und  $\alpha$  (als Permutation des Zifferbereichs  $\Omega = \{1, \dots, 9\}$ ) den gleichen Permutationstyp haben.

*Beweis.* Jedem Block  $b \in X_0$  entspricht in natürlicher Weise eine bijektive Abbildung  $\beta : I^2 \rightarrow \Omega$  vermöge  $\beta(i, j) := b_{ij}$  für alle  $(i, j) \in I^2$ . Die lokale Fixgleichung (4.5) hat dann die äquivalente Formulierung

$$\beta \circ \gamma^{-1} = \alpha \circ \beta$$

mit einer Bijektion  $\beta : I^2 \rightarrow \Omega$ .

Mit einer festen Bijektion  $\theta : I^2 \rightarrow \Omega$  ist dies weiter äquivalent zu

$$\theta^{-1} \circ \beta \circ \gamma^{-1} = \theta^{-1} \circ \alpha \circ \beta$$

und mit den Setzungen  $\xi := \theta^{-1} \circ \beta \in \text{Sym}(I^2)$  und  $\alpha' := \theta^{-1} \circ \alpha \circ \theta \in \text{Sym}(I^2)$  zu

$$\xi \circ \gamma^{-1} = \alpha' \circ \xi \quad (4.7)$$

Die Lösbarkeit von (4.7) mit  $\xi \in \text{Sym}(I^2)$  besagt, dass  $\alpha'$  und  $\gamma^{-1}$  als Elemente von  $\text{Sym}(I^2)$  konjugiert sind. Das ist genau dann der Fall, wenn sie den gleichen Permutationstyp besitzen.

Weiter gilt:

- $\gamma^{-1}$  hat denselben Permutationstyp wie  $\gamma$ , da das Inverse eines Zyklus ein Zykel gleicher Länge ist.
- $\alpha'$  hat denselben Permutationstyp wie  $\alpha$ , da die Abbildung  $\text{Sym}(\Omega) \rightarrow \text{Sym}(I^2)$ , die  $\delta$  auf  $\delta' := \theta^{-1} \circ \delta \circ \theta$  abbildet, ein Gruppenisomorphismus ist.

Somit ist die Lösbarkeit der lokalen Fixgleichung genau dann gegeben, wenn der Permutationstyp von  $\alpha$  in  $\text{Sym}(\Omega)$  mit dem Permutationstyp von  $\gamma$  in  $\text{Sym}(I^2)$  übereinstimmt.  $\square$

Die Blockoperatoren aus  $\Gamma$  bilden eine echte Teilmenge von  $\text{Sym}(I^2)$ . Unter ihnen tritt nur eine begrenzte Anzahl von Permutationstypen auf, die im folgenden Lemma beschrieben wird.

**Lemma 4.1.** Die Permutationstypen der Blockoperatoren sind in den folgenden beiden Tabellen für Operatoren  $\gamma$  aus  $S_3 \times S_3^\circ$  bzw.  $t \cdot (S_3 \times S_3^\circ)$  angegeben:

**Tabelle 4.2:** Permutationstyp von  $\gamma = gh^\circ$  für  $g, h \in S_3$ .

$\langle g \rangle$	1	(2)	(3)
$\langle h \rangle$	1	(2, 2, 2)	(3, 3, 3)
1	1	(2, 2, 2)	(3, 3, 3)
(2)	(2, 2, 2)	(2, 2, 2, 2)	(6, 3)
(3)	(3, 3, 3)	(6, 3)	(3, 3, 3)

**Tabelle 4.3:** Permutationstyp von  $\gamma = tgh^\circ$  für  $g, h \in S_3$ .

$\langle gh \rangle$	1	(2)	(3)
$\langle tgh^\circ \rangle$	(2, 2, 2)	(4, 4)	(6, 3)

*Beweis.* Die Tabelleninhalte folgen unmittelbar aus Tabelle 4.1 in Satz 4.1.  $\square$

Mit diesen Resultaten kann bereits der Spezialfall der globalen  $G^*$ -Fixgleichung mit Leitoperator 1 behandelt werden:

$$wA = \alpha A \quad \text{mit } w \in T^*, w \neq 1, \alpha \in Z. \quad (4.8)$$

Fixgleichungen dieser Art sind bereits in Kapitel 3 behandelt worden: Ein lokaler Operator  $w$ , der eine Sudoku-Lösung erzeugt, hat „Ziffernwirkung“. Die  $Z$ -Ergänzungen  $w\alpha^{-1}$  wurden mit Erfolg eingesetzt zur Bestimmung der gemischten Bahnen der Sonderokus und zur Klassifikation der  $G^*$ -Mengen der  $G$ -Fixsukus. In diesem und im folgenden Abschnitt werden weitere Aussagen über  $\alpha$  und  $w$  gewonnen.

**Satz 4.3.** Die  $G^*$ -Fixgleichung (4.8) zum Leitoperator 1 besitzt eine Lösung  $A$  im Bereich der Blockmatrizen genau dann, wenn für die Ziffernwirkung  $\alpha$  und die Komponenten  $g_i, h_j \in S_3$  von  $w$  mit  $w_{ij} = g_i h_j^\circ$  gilt:

- Alle  $\langle g_i \rangle$  sind gleich und alle  $\langle h_j \rangle$  sind gleich und  $\langle \alpha \rangle = \langle g_i \rangle \times \langle h_j \rangle$ , oder
- alle  $\langle g_i \rangle = (3)$ , alle  $\langle h_j \rangle \in \{1, (3)\}$  oder alle  $\langle g_i \rangle \in \{1, (3)\}$ , alle  $\langle h_j \rangle = (3)$ , und  $\langle \alpha \rangle = (3, 3, 3)$ .

*Beweis.* 4.8 besitzt eine Lösung  $A$  im Bereich der Blockmatrizen genau dann, wenn für jedes  $(i, j) \in I^2$  die lokale Fixgleichung

$$w_{ij} A_{ij} = \alpha A_{ij} \quad (4.9)$$

mit einem Block  $A_{ij}$  lösbar ist. Das ist nach Satz 4.2 genau dann der Fall, wenn  $w_{ij}$  den gleichen Permutationstyp wie  $\alpha$  hat. Insbesondere müssen die  $w_{ij}$  untereinander den gleichen Permutationstyp haben.

Der Permutationstyp  $\langle w_{ij} \rangle$  von  $w_{ij} = g_i h_j^\circ$  ergibt sich aus den Permutations-typen  $\langle g_i \rangle$  und  $\langle h_j \rangle$  gemäß Tabelle 4.2 in Lemma 4.1 und wird mit  $\langle g_i \rangle \times \langle h_j \rangle$  bezeichnet. Bezeichnet  $\{g\}$  die Menge aller  $\langle g_i \rangle$  und  $\{h\}$  die Menge aller  $\langle h_j \rangle$ , so muss

in Tabelle 4.2 also an allen Kreuzungspunkten von  $\{g\}$  und  $\{h\}$  der gleiche Eintrag stehen.

Für jeden Tabelleneintrag gibt es eine triviale Möglichkeit mit  $\#\{g\} = \#\{h\} = 1$ , für den Eintrag  $(3, 3, 3)$  zusätzlich die beiden Möglichkeiten  $\{g\} = \{1, (3)\}, \{h\} = \{(3)\}$  und  $\{g\} = \{(3)\}, \{h\} = \{1, (3)\}$ .

Die trivialen Möglichkeiten führen zum ersten Fall der Behauptung, die zusätzlichen Möglichkeiten für den Eintrag  $(3, 3, 3)$  zum zweiten Fall der Behauptung. Die Möglichkeit  $\{g\} = \{h\} = \{(3)\}$  passt in beide Fälle der Behauptung.  $\square$

Die Gesamtheit der Lösungen der lokalen Fixgleichung lässt sich folgendermaßen beschreiben:

**Satz 4.4.** *Ist die lokale Fixgleichung (4.4) lösbar, so lässt sich die Gesamtheit der Lösungen  $b \in X_0$  folgendermaßen beschreiben:*

*Vorbereitend ist in jeder  $\gamma$ -Bahn  $K$  in  $I^2$  eine Position  $(i_K, j_K)$  auszuzeichnen.*

- (i) *Es wird eine bijektive Zuordnung der  $\gamma$ -Bahnen in  $I^2$  auf die  $\alpha$ -Bahnen in  $\Omega$  gewählt, die Bahnen gleicher Länge einander zuordnet.*
- (ii) *Für jede  $\gamma$ -Bahn  $K$  wird ein  $x_K$  in der nach (i) zugeordneten  $\alpha$ -Bahn gewählt.*
- (iii) *Die Elemente  $(i, j)$  jeder  $\gamma$ -Bahn  $K$  lassen sich darstellen in der Form  $(i, j) = \gamma^{-l}(i_K, j_K) = \gamma^{-m}(i_K, j_K)$ , so folgt  $l \equiv m \pmod k$ . Dann ist zu setzen  $b_{ij} = \alpha^l x_K$ .*

*Beweis.* Zunächst wird gezeigt: Eine nach (i)–(iii) definiertes  $b \in M_3(\Omega)$  ist wohldefiniert, ein Block und erfüllt die Fixgleichung.

$b \in M_3(\Omega)$  ist wohldefiniert

Für die Wohldefiniertheit ist zu zeigen, dass verschiedene Wahlen von  $l$  in (iii) zum gleichen  $b_{ij}$  führen. Es bezeichne  $k$  die Länge der  $\gamma$ -Bahn  $K$ . Ist  $(i, j) = \gamma^{-l}(i_K, j_K) = \gamma^{-m}(i_K, j_K)$ , so folgt  $l \equiv m \pmod k$ . Da  $x_K$  in einer  $\alpha$ -Bahn der Länge  $k$  gewählt wurde, folgt  $\alpha^l x_K = \alpha^m x_K$ , was zu zeigen war.

$b$  ist ein Block

Hier ist zu zeigen, dass die  $b_{ij}$  für  $(i, j) \in I^2$  verschieden sind.

Durchläuft  $(i, j)$  eine  $\gamma$ -Bahn, so durchläuft nach (iii)  $b_{ij}$  die zugeordnete  $\alpha$ -Bahn. Da nach (i) beide Bahnen die gleiche Länge haben, müssen die  $b_{ij}$  verschieden sein.

Liegen  $(i, j)$  und  $(i', j')$  in verschiedenen  $\gamma$ -Bahnen, so liegen  $b_{ij}$  und  $b_{i'j'}$  in verschiedenen  $\alpha$ -Bahnen, sind also ebenfalls verschieden.

$b$  erfüllt die Fixgleichung

Hierzu ist für beliebiges  $(i, j) \in I^2$  zu zeigen  $b_{\gamma^{-1}(i,j)} = \alpha b_{ij}$ .

Sei  $K$  die  $\gamma$ -Bahn, in der  $(i, j)$  liegt, und  $l$  nach (iii) gewählt mit

$$(i, j) = \gamma^{-l}(i_K, j_K) \quad \text{und } b_{ij} = \alpha^l x_K .$$

Dann ist  $\gamma^{-1}(i, j) = \gamma^{-(l+1)}(i_K, j_K)$  und nach (iii) also

$$b_{\gamma^{-1}(i,j)} = \alpha^{l+1} x_K = \alpha \alpha^l x_K = \alpha b_{ij}.$$

### Beweis der Umkehrung

Sei nun umgekehrt  $b$  ein Lösungsblock der lokalen Fixgleichung  $b \circ \gamma^{-1} = \alpha b$ . Die Eigenschaften (i)–(iii) sind nachzuweisen.

Für jede  $\gamma$ -Bahn  $K$  wird  $x_K := b_{i_K, j_K}$  gewählt. Dadurch wird  $K$  die  $\alpha$ -Bahn  $L$  zugeordnet, die  $x_K$  enthält. Zu zeigen ist, dass  $L$  die Länge  $k = \#K$  hat, und dass einer anderen  $\gamma$ -Bahn  $K'$  nicht  $L$  zugeordnet wird.

Da die  $\alpha$ - und  $\gamma$ -Operation auf  $b$  kommutieren, folgt durch wiederholte Anwendung der Fixgleichung

$$b \circ \gamma^{-l} = \alpha^l b \quad \text{für alle } l. \quad (4.10)$$

Somit folgt:  $b_{\gamma^{-l}(i_K, j_K)} = \alpha^l b_{i_K, j_K} = \alpha^l x_K$ .

Mit variierendem  $l$  durchläuft  $\gamma^{-l}(i_K, j_K)$   $K$  und  $\alpha^l x_K$   $L$ . Da  $b$  ein Block ist, sind alle  $b_{ij}$  verschieden. Daher folgt, dass  $K$  und  $L$  gleich viele Elemente haben.

Für eine andere  $\gamma$ -Bahn  $K'$  kann  $x_{K'} = b_{i_{K'}, j_{K'}}$  nicht in  $L$  liegen. Denn sonst wäre nach dem bereits Gezeigten  $x_{K'} = \alpha^l x_K = b_{\gamma^{-l}(i_K, j_K)}$  mit geeignetem  $l$ . Da alle Einträge von  $b$  verschieden sind, wäre dann  $(i_{K'}, j_{K'}) = \gamma^{-l}(i_K, j_K)$ . Somit läge  $(i_{K'}, j_{K'})$  in der  $\gamma$ -Bahn von  $(i_K, j_K)$  im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es bleibt die Formel für  $b_{ij}$  aus (iii) zu zeigen. Sei also  $(i, j) \in K$  dargestellt als  $\gamma^{-l}(i_K, j_K)$  mit geeignetem  $l$ . Nach (4.10) folgt  $b_{ij} = b_{\gamma^{-l}(i_K, j_K)} = \alpha^l b_{i_K, j_K} = \alpha^l x_K$ , was zu zeigen war.  $\square$

Nach Satz 4.3 ist der Fall des Permutationstyps  $(3, 3, 3)$  von besonderem Interesse. Hierfür wird die Lösungsmenge im folgenden Lemma konkreter dargestellt:

**Lemma 4.2.** Ist  $\alpha \in Z$  vom Typ  $(3, 3, 3)$ , so ist die lokale Fixgleichung  $\gamma b = \alpha b$  lösbar genau dann, wenn gilt:  $\gamma \in [s, s^\circ]^X := [s, s^\circ] \setminus \{1\}$ .

Ist  $\alpha = (x_1 \ x_2 \ x_3)(y_1 \ y_2 \ y_3)(z_1 \ z_2 \ z_3)$  die Zykelzerlegung von  $\alpha$ , so ist ein Lösungsblock  $b \in X_0$  in Abhängigkeit von  $\gamma$  folgendermaßen gegeben:

$$\begin{array}{llll} \gamma = s^{\pm 1} & \gamma = s^{\circ \pm 1} & \gamma = (ss^\circ)^{\pm 1} & \gamma = (s^{-1}s^\circ)^{\pm 1} \\ \begin{matrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{matrix} & \begin{matrix} x_3 & x_2 & x_1 \\ y_3 & y_2 & y_1 \\ z_3 & z_2 & z_1 \end{matrix} & \begin{matrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ z_2 & x_2 & y_2 \\ y_1 & z_1 & x_1 \end{matrix} & \begin{matrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ y_2 & z_2 & x_2 \\ z_1 & x_1 & y_1 \end{matrix} \end{array}$$

Die Gesamtheit der Lösungen erhält man, indem man unabhängig voneinander die  $x_i$  und/oder die  $y_i$  und/oder die  $z_i$  zyklisch vertauscht, und indem man bei festgehaltenen Indizes die Bezeichnungen  $x, y, z$  beliebig permutiert.

**Beweis.** Nach Satz 4.2 ist die lokale Fixgleichung  $\gamma b = \alpha b$  lösbar genau dann, wenn  $\gamma$  den gleichen Permutationstyp  $(3, 3, 3)$  wie  $\alpha$  hat. Nach Satz 4.1 ist das genau für  $\gamma \in C_s \cup C_s^\circ \cup C_s C_s^\circ$  der Fall. Wegen  $C_s = \{s, s^{-1}\}$  und  $C_s^\circ = \{s^\circ, s^{\circ -1}\}$  ist  $C_s \cup C_s^\circ \cup C_s C_s^\circ = [s, s^\circ]^X$ .

Nach Satz 4.4 darf zunächst eine beliebige Zuordnung der  $\gamma$ -Bahnen zu den  $\alpha$ -Bahnen =  $\alpha$ -Zykelmengen erfolgen. Die  $\gamma$ -Bahnen sind in den 4 angegebenen Fällen offenbar der Reihe nach die Spalten, die Zeilen, die fallenden Diagonalen bzw. die steigenden Diagonalen. Eine Zuordnung zu den  $\alpha$ -Zykelmengen ist in den obigen Diagrammen jeweils getroffen worden. Die Gesamtheit der möglichen Zuordnungen ist dadurch berücksichtigt, dass bei festgehaltenen Indizes die Bezeichnungen  $x, y, z$  beliebig permutiert werden dürfen.

Weiter darf nach Satz 4.4 eine ausgezeichnete Position  $(i, j)$  jeder  $\gamma$ -Bahn  $K$ , etwa jeweils das Element in der unteren Zeile in den Fällen 1, 3 und 4 und jeweils das Element in der rechten Spalte im Fall 2, mit einem beliebigen Element  $x_K$  der zugeordneten  $\alpha$ -Zykelmenge unabhängig voneinander belegt werden. In den obigen Diagrammen ist jeweils die Belegung mit  $x_1, y_1$  bzw.  $z_1$  gewählt worden. Die Gesamtheit der möglichen Belegungen ist dadurch berücksichtigt, dass die  $x_i$ , die  $y_i$  und die  $z_i$  unabhängig voneinander zyklisch vertauscht werden dürfen.

Für die verbleibenden Positionen sind nach Satz 4.4 die Belegungen durch  $b_{\gamma^{-l}(i_K, j_K)} = \alpha^l x_K$  gegeben. D. h.: Schreitet man in der  $\gamma$ -Bahn einen Schritt zurück, so ist in der Belegung das im  $\alpha$ -Zykel folgende Element zu wählen. Diese Vorschrift ist in den Diagrammen offenbar berücksichtigt.  $\square$

Nach Untersuchung der  $G^*$ -Fixgleichung für einen Block werden im nächsten Abschnitt einige Betrachtungen für die  $G^*$ -Fixgleichung über speziellen Blockfiguren, den Streifen, betrachtet.

## 4.2 Die $G^*$ -Fixgleichung für einen Streifen

Der Operator  $\varphi = \tau w$  mit  $\tau \in H^*$  lässt einen Streifen eines Sudokus stabil, wenn die horizontale oder vertikale Komponente von  $\tau$  einen Fixpunkt hat. Es ist naheliegend, vorab die Wirkung auf einen solchen Streifen  $S$  zu untersuchen. Wir gehen also aus von der Fixgleichung für Streifen

$$\varphi S = \alpha S . \quad (4.11)$$

Um neue Notationen zu vermeiden, bezeichnen  $\varphi, \tau, w, \alpha$  hier auch die auf  $S$  induzierten Abbildungen.

Während  $w$  und  $\alpha$  lokal operieren, d. h. alle Blöcke von  $S$  stabilisieren, kann  $\tau$  und damit auch  $\varphi$  die 3 Blöcke von  $S$  auf verschiedene Weise permutieren. Diese Permutation wird in diesem Abschnitt mit  $\varphi'$  bezeichnet.

Der lokale Operator  $w$  enthält eine eindeutige zum Streifen  $S$  gehörende Reihenpermutation  $g$ . Im Falle eines Horizontalstreifens ist  $g$  eine Zeilenpermutation, im Falle eines Vertikalstreifens eine Spaltenpermutation.

Der folgende Satz stellt eine Beziehung zwischen  $\varphi'$  und  $g$  her:

**Satz 4.5.**  $\varphi'$  als Permutation der drei Blöcke von  $S$  und  $g$  als Permutation der drei Reihen von  $S$  haben die gleiche Parität.

Das heißt für die verschiedenen Fälle:

- (i) Stabilisiert  $\varphi$  alle Blöcke von  $S$ , so lässt  $g$  die drei Reihen von  $S$  unverändert oder vertauscht sie zyklisch.
- (ii) Vertauscht  $\varphi$  die drei Blöcke von  $S$  zyklisch, so lässt  $g$  die drei Reihen von  $S$  unverändert oder vertauscht sie zyklisch.
- (iii) Stabilisiert  $\varphi$  einen Block von  $S$  und vertauscht die beiden anderen, so lässt  $g$  eine Reihe von  $S$  unverändert und vertauscht die beiden anderen.

*Beweis.* Die Fixgleichung wird umgeformt zu  $wS = \alpha\tau^{-1}S$  und für beide Seiten nach Lemma 2.5 die Charakteristik bestimmt.

Die zu  $S$  gehörende Zeilen- bzw. Spaltenpermutation von  $w$  ist nach Voraussetzung  $g$ . Für die Charakteristik der linken Seite erhält man  $\chi(wS) = \chi(S)$  bzw.  $= \chi'(S)$ , wenn  $g$  eine gerade bzw. ungerade Permutation ist.

Für die Charakteristik der rechten Seite ergibt sich  $\chi(\alpha\tau^{-1}S) = \chi(\tau^{-1}S) = \chi(\varphi'^{-1}S)$ , und dies ist  $= \chi(S)$  bzw.  $= \chi'(S)$ , wenn  $\varphi'^{-1}$  und damit auch  $\varphi'$  eine gerade bzw. ungerade Permutation ist.

Wegen  $\chi(wS) = \chi(\alpha\tau^{-1}S)$  folgt, dass  $g$  genau dann eine gerade bzw. ungerade Permutation ist, wenn dies für  $\varphi'$  zutrifft.  $g$  und  $\varphi'$  haben also die gleiche Parität.  $\square$

Als unmittelbare Anwendung ergibt sich eine Verschärfung von Satz 4.3 im Fall von Sudoku-Lösungen:

**Korollar** (zu Satz 4.3). Hat in der Situation von Satz 4.3 die  $G^*$ -Fixgleichung  $wA = \alpha A$  zum Leitoperator 1 eine Sudoku-Lösung  $A$ , so liegt der dortige zweite Fall vor:

Es ist  $\langle \alpha \rangle = (3, 3, 3)$ . Entweder sind alle  $\langle g_i \rangle = (3)$ , alle  $\langle h_j \rangle \in \{1, (3)\}$  oder alle  $\langle g_i \rangle \in \{1, (3)\}$ , alle  $\langle h_j \rangle = (3)$ .

*Beweis.* Da der Fixoperator  $\varphi = w$  alle Streifen von  $A$  stabilisiert, ist Satz 4.5(i) hier auf alle Horizontal- und Vertikalstreifen von  $A$  anwendbar. Da  $\varphi = w$  auch alle Blöcke des Streifens stabilisiert, folgt nach Satz 4.5(i), dass alle  $g_i$  und  $h_j$  die Ordnung 1 oder 3 haben, also  $\langle g_i \rangle$  und  $\langle h_j \rangle$  in  $\{1, (3)\}$  liegen.

Somit kommen nach Tabelle 4.2 in Lemma 4.1 für die  $w_{ij} = g_i h_j^\circ$  als gemeinsamer Typ nur 1 und  $(3, 3, 3)$  in Frage. 1 scheidet aus, da dann  $w = 1$  wäre, was ausgeschlossen war. Somit haben die  $w_{ij}$  (und damit auch  $\alpha$ ) den Typ  $(3, 3, 3)$ , woraus wiederum mit Tabelle 4.2 folgt, dass kein  $g_i$  und  $h_j$  gleichzeitig 1 sein kann. Somit müssen entweder alle  $\langle g_i \rangle = (3)$  oder alle  $\langle h_j \rangle = (3)$  sein.  $\square$

Zumindest in den Fällen „alle  $\langle g_i \rangle = (3), \langle h_j \rangle = 1$ “ und „ $\langle g_i \rangle = 1, \text{ alle } \langle h_j \rangle = (3)$ “ ist die Bedingung auch hinreichend für die Existenz einer Sudoku-Lösung zum Leitoperator 1: Dies wurde für die lokalen Operatoren  $w = {}^*s$  und  $w = {}^{*s^\circ}$  in Satz 3.3 nachgewiesen, wo die  $G^*$ -Fixgruppen  $\Lambda$  der 4 Superfixen bestimmt wurden. Das Superfixe  $U$  ist unter der Gruppe  $[{}^*\underline{s}, {}^*\underline{s}^\circ]$  fix, deren Erzeugende die Z-Ergänzten aus

den konstanten Operatoren  $*s$  bzw.  $*s^\circ$  sind. Die 2 Lösungen lauten hier

$$\begin{aligned} *sU &= \alpha U \quad \text{mit } \alpha = (147)(258)(369) \\ *s^\circ U &= \alpha^\circ U \quad \text{mit } \alpha^\circ = (123)(456)(789). \end{aligned}$$

Nach Untersuchung der  $G^*$ -Fixgleichung über einem Block und einem Streifen wird im Folgenden die globale  $G^*$ -Fixgleichung über dem gesamten 9-Block-Bereich betrachtet.

### 4.3 Struktureigenschaften von $G^*$ -Fixsudokus

$G^*$ -Fixsudokus sind Lösungen von  $G^*$ -Fixgleichungen. Deren Lösungsmenge wird in diesem Abschnitt untersucht, zunächst im Bereich der Blockmatrizen. Das ermöglicht, die Fixgleichung in mehrere Fixgleichungen über Blockfiguren zu zerlegen, deren Lösungen konstruiert und zu Gesamtlösungen zusammengesetzt werden können. Abschließend werden notwendige Bedingungen für die Existenz von Sudoku-Lösungen hergeleitet.

Während in Kapitel 2 nur Operatormatrizen aus  $M_3(\Gamma_0)$  betrachtet wurden, wird jetzt auch die lokale Transposition als Eintrag zugelassen, die Menge der Operatormatrizen also auf  $M_3(\Gamma)$  ausgeweitet. Bereits in Kapitel 2 wurde die Wirkung rein-globaler Operatoren  $\tau \in H^*$  auf Blockmatrizen  $A$  und Operatormatrizen  $v$  angegeben ((2.50) bzw. (2.52)), die hier in koordinatenunabhängiger Schreibweise wiedergegeben wird:

$$\tau A = A \circ \tau^{-1} \quad \text{und} \quad v^\tau = v \circ \tau \tag{4.12}$$

$A \circ \tau^{-1}$  bezeichnet die Blockmatrix mit den  $(i, j)$ -Einträgen  $A_{\tau^{-1}(i,j)}$ , entsprechend  $v \circ \tau$  die Operatormatrix mit den  $(i, j)$ -Einträgen  $v_{\tau(i,j)}$ .

Die zweite Formel gilt in gleicher Weise für  $v \in M_3(\Gamma)$ .

Das folgende Lemma verallgemeinert die Formeln für  $\tau \in [H^*, t]$ . Dazu wird folgendes Symbol eingeführt:

$\tau^* \in \Gamma$  bezeichnet für  $\tau \in H^*$  die Block-Identität und für  $\tau \in tH^*$  die Block-Transposition. Gleichzeitig bezeichnet  $\tau^*$  auch den entsprechenden konstanten Operator aus  $M_3(\Gamma)$ . Insbesondere bezeichnet  $t^*$  die Block-Transposition und auch den zugehörigen konstanten Operator. Somit wird in diesem Abschnitt für die lokale Transposition eine von der globalen Transposition  $t$  unterscheidbare Bezeichnung verwendet.

Wie jeder konstante Operator kommutiert  $\tau^*$  mit allen rein-globalen Operatoren, außerdem offenbar mit der globalen Transposition, also mit  $[H^*, t]$ .

**Lemma 4.3.** Für  $A \in M_3(X_0)$ ,  $v \in M_3(\Gamma)$ ,  $\tau \in [H^*, t]$  ist

$$\tau A = \tau^* \cdot A \circ \tau^{-1} \quad \text{und} \quad v^\tau = (v \circ \tau)^{\tau^*} \tag{4.13}$$

(In der linken Formel bezeichnet  $\tau^*$  den lokalen Operator, in der rechten den zugehörigen konstanten Operator.)

*Beweis.* Für  $\tau \in H^*$  ist  $\tau^* = 1$ , die Behauptung folgt aus den aus Kapitel 2 zitierten Aussagen.

Sei jetzt  $\tau = t$ . Der Block von  $tA$  an der Position  $(i, j)$  ist offenbar der transponierte Block von  $A$  an der Position  $(j, i) = t^{-1}(i, j)$ , daher gilt die erste Behauptung für  $\tau = t$ :

$$tA = t^*A \circ t^{-1}$$

$v^{t^{-1}}$  bildet  $tA$  auf  $tvA$  ab. Wegen  $t^{-1} = t$  ist  $v^{t^{-1}} = v^t$ , also:

$$v^t tA = tvA$$

Hier kann die für  $t$  bereits gezeigte Behauptung auf beiden Seiten angewandt werden:

$$v^t t^*A \circ t = t^*(vA) \circ t$$

Die rechte Seite kann gemäß der Wirkung von Operatormatrizen aufgelöst werden:

$$v^t t^*A \circ t = t^*v \circ t \quad A \circ t$$

Da  $A$  beliebig war, folgt

$$v^t t^* = t^*v \circ t$$

oder

$$v^t = (v \circ t)^{t^*}$$

Damit ist auch die zweite Behauptung für  $\tau = t$  gezeigt.

Sei nun  $\tau \in tH^*$ ,  $\tau = t\rho$  mit  $\rho \in H^*$ . Dann ist  $\tau^* = t^*$  und unter Verwendung der für  $\rho \in H^*$  und  $t$  bereits bewiesenen Behauptungen

$$\tau A = t\rho A = t^*(\rho A) \circ t^{-1} = t^*A \circ \rho^{-1} \circ t^{-1} = \tau^*A \circ \tau^{-1}$$

$$v^\tau = v^{t\rho} = v^t \circ \rho = (v \circ t)^{t^*} \circ \rho = (v \circ t \circ \rho)^{t^*} = (v \circ \tau)^{\tau^*}$$

□

$\tau^*$  tritt auch in folgendem Zusammenhang auf:

**Lemma 4.4.**  $\tau \in [H^*, t]$  induziert für jedes  $(i, j) \in I^2$  in natürlicher Weise eine Abbildung  $X_0 \rightarrow X_0$  von den Blöcken an der Position  $(i, j)$  auf die Blöcke an der Position  $\tau(i, j)$ .

Lokal ist diese Abbildung gegeben durch  $\tau^*$ .

*Beweis.*  $\tau \in H^*$  induziert als rein-globaler Operator lokal die Identität. Die globale Transposition wirkt lokal an jeder Position als Transposition, daher induziert  $\tau \in tH^*$  lokal die Transposition. □

Eine Blockmatrix  $B$  aus  $M_3(X_0)$  kann als Abbildung  $I^2 \rightarrow X_0$  betrachtet werden, die jeder Koordinate  $(i, j)$  den Block  $B_{ij}$  zuordnet. Für eine Teilmenge  $K$  von  $I^2$  werden in diesem Sinne Abbildungen  $K \rightarrow X_0$  als (*über K definierte*) *Blockfiguren* angesprochen, was den Blockfiguren aus Kapitel 2.1 entspricht. Einer Blockfigur über  $K$  lassen sich somit Blöcke  $B_{ij}$  genau an den Positionen  $(i, j) \in K$  zuordnen. Eine Blockmatrix  $A$  kann in offensichtlicher Weise zu einer Blockfigur  $A|K$  über  $K$  eingeschränkt werden, ebenso können Blockfiguren über disjunkten Teilmengen von  $I^2$  zu Blockfiguren über der Vereinigungsmenge zusammengesetzt werden.

Analog wie für Blockmatrizen kann auch eine Operatormatrix  $v$  aus  $M_3(\Gamma)$  als Abbildung  $I^2 \rightarrow \Gamma$  betrachtet werden, die jeder Koordinate  $(i, j)$  den Blockoperator  $v_{ij}$  zuordnet. Auch hier können Abbildungen  $K \rightarrow \Gamma$  als (*über K definierten Operator*-matrizen angesprochen werden, deren Gesamtheit mit  $\Gamma^K$  bezeichnet wird. Die *Einschränkung*  $v|K$  von  $v$  auf  $K$  bezeichnet die Einschränkung der  $v$  entsprechenden Abbildung  $I^2 \rightarrow \Gamma$  auf  $K$ .

Gegeben sei nun die *allgemeine  $G^*$ -Fixgleichung*

$$\begin{aligned} \varphi A = \alpha A & \quad \text{mit } \varphi = \tau w \in G^* \setminus \{1\}, \tau \in [H^*, t], \\ w \in T^*, w_{ij} &= g_i h_j^\circ \text{ mit } g_i, h_j \in S_3, \alpha \in Z. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Gesucht sind Blockfiguren  $A$ , die diese Gleichung erfüllen und möglicherweise nur über einem Teilbereich  $K$  von  $I^2$  definiert sind.

$wA$  hat den gleichen Definitionsbereich  $K$  wie  $A$ . Aus (4.13) ist ersichtlich, dass dann  $\tau w A$  über  $\tau K$  definiert ist. Die Betrachtung der Fixgleichung über  $K$  macht also nur Sinn, wenn  $\tau K = K$ , d. h. wenn  $K$  ein  $\tau$ -stabiler Bereich ist. Die kleinstmöglichen Bereiche, über denen die Fixgleichung sinnvoll betrachtet werden kann, sind daher die  $\tau$ -Bahnen in  $I^2$ .

**Satz 4.6.** Sei  $K$  ein  $\tau$ -stabiler Bereich in  $I^2$ .

Die über  $K$  definierte Blockfigur  $A$  löst (4.14) genau dann, wenn für alle in  $K$  enthaltenen  $\tau$ -Bahnen  $L$  die Blockfigur  $A|L$  (4.14) löst.

Ist für jede in  $K$  enthaltene  $\tau$ -Bahn  $L$  eine über  $L$  definierte Blockfigur  $A_L$  gegeben, die (4.14) löst, so setzen sich diese vermöge  $A|L = A_L$  eindeutig zu einer über  $K$  definierten Blockfigur  $A$  zusammen, die (4.14) löst.

*Beweis.* Die Fragen zum Definitionsbereich wurden bereits oben erörtert. Der Rest ist klar.  $\square$

Somit kann für Blockmatrizen die Lösung der  $G^*$ -Fixgleichung über  $I^2$  auf ein System von  $G^*$ -Fixgleichungen über den  $\tau$ -Bahnen zurückgeführt werden.

Für Sudoku-Lösungen ist ein entsprechendes Vorgehen nicht möglich, da in dem Fall Lösungen über Teilbereichen sich nicht automatisch zu Gesamtlösungen zusammensetzen: Die Sudoku-Bedingungen erzeugen Abhängigkeiten auch zwischen verschiedenen  $\tau$ -Bahnen.

Daher wird hier zunächst der allgemeinere Blockmatrizen-Ansatz gewählt. Die weitere Betrachtung beschäftigt sich vorerst mit der  $G^*$ -Fixgleichung für Blockfiguren über einer  $\tau$ -Bahn.

Als Hilfsmittel führen wir eine *Partialnorm*  $N_{\tau,l} : T^* \rightarrow T^*$  für  $\tau \in [H^*, t]$ ,  $l \geq 0$  ein. Für  $w \in T^*$  wird gesetzt

$$N_{\tau,l}(w) := w^{\tau^{l-1}} \cdot w^{\tau^{l-2}} \cdots w^\tau \cdot w .$$

Der Spezialfall  $l = \text{ord } \tau$  war schon in Kapitel 2 aufgetreten.

Offenbar ist

$$\begin{aligned} N_{\tau,0}(w) &= 1, & N_{\tau,1}(w) &= w, \\ N_{\tau,\text{ord } \tau}(w) &= N_\tau(w) \text{ die bereits bekannte } \tau\text{-Norm von } w. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Folgende Eigenschaften der Partialnorm werden benötigt:

**Lemma 4.5.**

- (i)  $N_{\tau,l+1}(w) = w^{\tau^l} N_{\tau,l}(w)$
- (ii)  $(\tau w)^l = \tau^l N_{\tau,l}(w)$

*Beweis.* Zu (i):

$$N_{\tau,l+1}(w) = w^{\tau^l} \cdot w^{\tau^{l-1}} \cdot w^{\tau^{l-2}} \cdots w^\tau \cdot w = w^{\tau^l} \cdot N_{\tau,l}(w) .$$

Zu (ii):

$$\begin{aligned} (\tau w)^l &= \tau w \cdot \tau w \cdots \tau w \\ &= \tau^l (\tau^{l-1})^{-1} w \cdot \tau^{l-1} (\tau^{l-2})^{-1} w \cdots \tau^2 \tau^{-1} w \cdot \tau w \\ &= \tau^l \cdot w^{\tau^{l-1}} \cdot w^{\tau^{l-2}} \cdots w^\tau \cdot w = \tau^l \cdot N_{\tau,l}(w) . \end{aligned} \quad \square$$

Weiter wird für  $\varphi = \tau w \in G$  der  $l$ -te *Evolut* von  $\varphi$  eingeführt als

$$\varphi_l := \tau^{*l} N_{\tau,l}(w) \in M_3(\Gamma) .$$

Offenbar ist

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = \tau^* w, \quad \varphi_{\text{ord } \tau} = N_\tau(w) . \tag{4.16}$$

Weiterhin gelten folgende Eigenschaften:

**Lemma 4.6.** Sei  $(i,j) \in I^2$  beliebig,  $K$  die erzeugte  $\tau$ -Bahn der Länge  $k$ .

- (i) Für jedes  $(i',j') \in K$  ist  $(\varphi_k)_{i',j'}$   $\Gamma$ -konjugiert zu  $(\varphi_k)_{i,j}$ .
- (ii) Für  $l = qk + r$  ist  $(\varphi_l)_{i,j} = (\varphi_r)_{i,j} (\varphi_k)_{i,j}^q$ .

Also gilt: Ist  $(\varphi_k)_{i,j} = 1$ , so ist  $(\varphi_l)_{i,j}$  nur von der Restklasse  $l \bmod k$  abhängig.

*Beweis.* Zu (i):

Es genügt zu zeigen, dass  $(\varphi_k)_{\tau(i,j)}$  konjugiert ist zu  $(\varphi_k)_{i,j}$ .

Es ist

$$\begin{aligned}
 \varphi_k \circ \tau &= (\tau^{*k} \cdot w^{\tau^{k-1}} \cdot w^{\tau^{k-2}} \cdots w^\tau \cdot w) \circ \tau \\
 &= \tau^{*k} \cdot (w^{\tau^{k-1}} \circ \tau) \cdot (w^{\tau^{k-2}} \circ \tau) \cdots (w^\tau \circ \tau) \cdot (w \circ \tau) \\
 &= \tau^{*k} \cdot (w^{\tau^k})^{\tau^*} \cdot (w^{\tau^{k-1}})^{\tau^*} \cdots (w^{\tau^2})^{\tau^*} \cdot (w^\tau)^{\tau^*} \\
 &= (\tau^{*k} \cdot w^{\tau^k} \cdot w^{\tau^{k-1}} \cdots w^{\tau^2} \cdot w^\tau)^{\tau^*} \\
 &= \left( \tau^{*k} \cdot (w \circ \tau^k)^{\tau^{*k}} \cdot w^{\tau^{k-1}} \cdots w^{\tau^2} \cdot w^\tau \right)^{\tau^*} \\
 &= (w \circ \tau^k \cdot \tau^{*k} \cdot w^{\tau^{k-1}} \cdots w^{\tau^2} \cdot w^\tau)^{\tau^*} = (w \circ \tau^k \cdot \varphi_k \cdot w^{-1})^{\tau^{*-1}}.
 \end{aligned}$$

An der Stelle  $(i, j)$  ist  $\tau^k(i, j) = (i, j)$ , also folgt:  $(\varphi_k)_{\tau(i,j)} = ((\varphi_k)_{i,j})^{w_{i,j}^{-1}\tau^*}$ .

Zu (ii):

Es genügt offenbar zu zeigen  $(\varphi_{r+k})_{i,j} = (\varphi_r)_{i,j}(\varphi_k)_{i,j}$  für alle  $r$ . Durch wiederholte Anwendung folgt dann die Behauptung.

Für  $r = 0$  ist  $\varphi_r = 1$  und die Aussage klar.

Gelte die Aussage für  $r$ . Unter Verwendung von Lemma 4.3, Lemma 4.5 und  $\tau^k(i, j) = (i, j)$  folgt

$$\begin{aligned}
 (\varphi_{r+k+1})_{i,j} &= \tau^{*r+k+1} N_{\tau,r+k+1}(w)_{i,j} = \tau^{*r+k+1} w_{i,j}^{\tau^{r+k}} N_{\tau,r+k}(w)_{i,j} \\
 &= \tau^{*r+k+1} (w_{\tau^{r+k}(i,j)})^{\tau^{*r+k}} N_{\tau,r+k}(w)_{i,j} \\
 &= \tau^* w_{\tau^{r+k}(i,j)} \tau^{*r+k} N_{\tau,r+k}(w)_{i,j} \\
 &= \tau^* w_{\tau^r(i,j)} (\varphi_{r+k})_{i,j} = \tau^* w_{\tau^r(i,j)} (\varphi_r)_{i,j} (\varphi_k)_{i,j} \\
 &= \tau^* w_{\tau^r(i,j)} \tau^{*r} N_{\tau,r}(w)_{i,j} (\varphi_k)_{i,j} \\
 &= \tau^* \tau^{*r} (w_{\tau^r(i,j)})^{\tau^{*r}} N_{\tau,r}(w)_{i,j} (\varphi_k)_{i,j} \\
 &= \tau^{*r+1} w_{i,j}^{\tau^r} N_{\tau,r}(w)_{i,j} (\varphi_k)_{i,j} = \tau^{*r+1} N_{\tau,r+1}(w)_{i,j} (\varphi_k)_{i,j} \\
 &= (\varphi_{r+1})_{i,j} (\varphi_k)_{i,j}.
 \end{aligned}$$

Somit gilt die Aussage auch für  $r + 1$  und nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für alle  $r$ .  $\square$

Die Bedeutung der Evolutoren wird aus dem folgenden Satz deutlich:

**Satz 4.7.** Jede Blockfigur  $A$  über einem  $\tau$ -stabilen Bereich  $K$ , die die allgemeine  $G^*$ -Fixgleichung (4.14) löst, löst für jedes  $l \geq 0$  auch die Gleichung

$$\varphi_l A = \alpha^l A \circ \tau^l. \quad (4.17)$$

Ist  $K \subseteq \text{Fix}(\tau^l)$ , vereinfacht sich dies zu

$$\varphi_l A = \alpha^l A. \quad (4.18)$$

*Beweis.* 4.17 wird durch vollständige Induktion über  $l$  gezeigt.

- Für  $l = 0$  ist die Behauptung trivial.
- Gelte die Behauptung für  $l$ . Dann gilt sie auch für  $l + 1$ :

$$\begin{aligned}\varphi_{l+1}A &= \tau^{*l+1}N_{\tau,l+1}(w)A = \tau^{*l+1}w^{\tau^l}N_{\tau,l}(w)A = \tau^{*l+1}w^{\tau^l}\tau^{*-l}\varphi_lA \\ &= \tau^{*l+1}(w \circ \tau^l)^{\tau^{*l}}\tau^{*-l}\varphi_lA = \tau^*(w \circ \tau^l) \cdot \varphi_lA \\ &= \tau^*(w \circ \tau^l) \cdot (\alpha^l A \circ \tau^l) = \alpha^l(\tau^*wA) \circ \tau^l = \alpha^l(\tau wA) \circ \tau \circ \tau^l \\ &= \alpha^l(\alpha A) \circ \tau^{l+1} \\ &= \alpha^{l+1}A \circ \tau^{l+1}\end{aligned}$$

unter Benutzung von (4.13) im drittletzten Schritt.  $\square$

In Koordinaten lautet (4.18)  $(\varphi_l)_{ij}A_{ij} = \alpha^l A_{ij}$  für alle  $(i, j)$  aus der Fixmenge von  $\tau^l$ , man erhält also Bedingungen für diese Blöcke  $A_{ij}$  in Form von lokalen Fixgleichungen. Von besonderem Interesse sind daher Evolutoren zu Werten  $l$ , wo  $\tau^l$  viele Fixpunkte hat. Insbesondere liefert der Evolutor zu  $\text{ord } \tau$  Bedingungen für sämtliche Teilblöcke von  $A$ . Hat  $\tau$  allerdings eine Bahn der Länge  $l < \text{ord } \tau$ , so erhält man für die Blöcke längs dieser Bahn bei Verwendung von  $\varphi_l$  schärfere Bedingungen. Es wird sich zeigen (Lemma 4.7), dass neben  $\varphi_{\text{ord } \tau}$  maximal ein weiterer Evolutor zu berücksichtigen ist.

Der folgende Satz gibt die Lösung der  $G^*$ -Fixgleichung über einer  $\tau$ -Bahn an.

**Satz 4.8.** Ist  $A$  eine Blockfigur über einer  $\tau$ -Bahn  $K$  der Länge  $k$ , die die  $G^*$ -Fixgleichung (4.14) löst, so erfüllt für jedes  $(i, j) \in K$  der Teilblock  $A_{i,j}$  folgende Fixgleichung:

$$(\varphi_k)_{i,j}A_{i,j} = \alpha^k A_{i,j}. \quad (4.19)$$

Ist  $A_{i',j'}$  ein weiterer Teilblock mit  $(i', j') \in K$ , so besteht der Zusammenhang

$$A_{i',j'} = \alpha^{-l}(\varphi_l)_{i,j}A_{i,j} \quad \text{für } (i', j') = \tau^l(i, j). \quad (4.20)$$

Sei für das Folgende  $(i, j) \in K$  fixiert.

Die Gleichung (4.19) ist lösbar genau dann, wenn  $(\varphi_k)_{i,j}$  den gleichen Permutationstyp wie  $\alpha^k$  hat.

In dem Fall erhält man alle Lösungen von (4.14), indem man

- $A_{i,j}$  als Lösung der lokalen Fixgleichung (4.19) bestimmt,
- $A_{i',j'}$  für die übrigen  $(i', j') \in K$  nach (4.20) aus  $A_{i,j}$  berechnet.

*Beweis.* (4.19) und (4.20) folgen aus Satz 4.7. Die Lösbarkeitsbedingung folgt aus Satz 4.2.  $\square$

Die Lösung der Fixgleichung über einer  $\tau$ -Bahn ist also im Wesentlichen auf die lokale Fixgleichung (4.19)  $(\varphi_k)_{i,j}A_{i,j} = \alpha^k A_{i,j}$  zurückgeführt. Für alle  $\tau$ -Bahnen der gleichen Länge  $k$  hat diese die gleiche Gestalt.

Das folgende Lemma fasst die verschiedenen Möglichkeiten der  $\tau$ -Bahnlängen zusammen:

**Lemma 4.7.** *Der Leitoperator  $\tau$  hat in  $I^2$  eine oder zwei verschiedene Bahnlängen. Die größte Bahnlänge ist  $\text{ord } \tau$ . Existiert eine zweite Bahnlänge, so wird diese mit  $\text{sub } \tau$  bezeichnet. Sie ist ein Teiler von  $\text{ord } \tau$ .*

*Die folgende Tabelle gibt die Bahnlängen in Abhängigkeit vom Permutationstyp des Leitoperators an.*

**Tabelle 4.4:** Bahnlängen von Leitoperatoren

$\langle \tau \rangle$	$\text{ord } \tau$	$\text{sub } \tau$
1	1	—
(2, 2, 2)	2	1
(2, 2, 2, 2)	2	1
(3, 3, 3)	3	—
(4, 4)	4	1
(6, 3)	6	3

*Beweis.* Da  $[H^*, t]$  isomorph ist zu  $(S_3 \times S_3^\circ) \rtimes [t]$ , können die möglichen Permutationstypen von  $\tau$  Tabelle 4.1 in Satz 4.1 entnommen werden.

$\text{ord } \tau$  und die Längen der  $\tau$ -Bahnen können am Permutationstyp von  $\tau$  abgelesen werden:

Ist  $\langle \tau \rangle = (l_1, \dots, l_m)$  mit  $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_m \geq 2$ , so ist  $\text{ord } \tau$  das kleinste gemeinsame Vielfache von  $l_1, \dots, l_m$ . Die Zyklallängen  $l_1, \dots, l_m$  sind die  $\tau$ -Bahnlängen, hinzu kommen ggf. noch die Fixpunkte von  $\tau$  als Bahnen der Länge 1.

Auf diese Weise ergeben sich die Tabelleneinträge.

Insbesondere sieht man, dass nur eine oder zwei verschiedene Bahnlängen auftreten, dass die größte Bahnlänge stets  $\text{ord } \tau$  und eine ggf. existierende kleinere Bahnlänge ein echter Teiler von  $\text{ord } \tau$  ist.  $\square$

Leitoperatoren mit nur einer Bahnlänge heißen *homogen*, Leitoperatoren mit zwei verschiedenen Bahnlängen *inhomogen*.

Bezeichne  $\Lambda_k := \bigcup \{\tau\text{-Bahnen } K \text{ in } I^2 : \#K = k\}$ , dann ist  $\Lambda_k \neq \emptyset$  im homogenen Fall nur für  $k = \text{ord } \tau$  und im inhomogenen Fall nur für  $k = \text{ord } \tau$  und  $k = \text{sub } \tau$ . Für die Ermittlung der aus der Fixgleichung entstehenden Bedingungen an die Teilblöcke von  $A$  sind nur die Evolutoren  $\varphi_{\text{ord } \tau}$  und ggf.  $\varphi_{\text{sub } \tau}$  zu berücksichtigen. Die Bedingungen ergeben sich aus:

**Korollar** (zu Satz 4.7). *Löst die Blockmatrix  $A$  die allgemeinen  $G^*$ -Fixgleichung (4.14), so gilt:*

$$\varphi_{\text{ord } \tau} A = \alpha^{\text{ord } \tau} A \quad (4.21)$$

und für inhomogenes  $\tau$ :

$$\varphi_{\text{sub } \tau} A = \alpha^{\text{sub } \tau} A \quad \text{über } \Lambda_{\text{sub } \tau}. \quad (4.22)$$

*Beweis.* (4.21) folgt aus (4.18) mit  $l = \text{ord } \tau$ : Dann kann  $K = \text{Fix}(\tau^{\text{ord } \tau}) = \text{Fix}(1) = I^2$  gewählt werden.

(4.22) folgt aus (4.18) mit  $l = \text{sub } \tau$ : Dann kann  $K = \text{Fix}(\tau^{\text{sub } \tau}) = \Lambda_{\text{sub } \tau}$  gewählt werden.  $\square$

Satz 4.8 führt die Fixgleichung über einer  $\tau$ -Bahn im Wesentlichen auf die lokale Fixgleichung (4.19)  $(\varphi_k)_{i,j} A_{i,j} = \alpha^k A_{i,j}$  zurück. Diese ist nach Satz 4.2 lösbar genau dann, wenn  $\alpha^k$  den gleichen Permutationstyp wie  $(\varphi_k)_{i,j}$  hat. Nach Satz 4.4 können dann die Lösungen konstruiert werden.

Im Fall  $\alpha^{\#K} = 1$  nimmt die lokale Fixgleichung (4.19) eine besonders einfache Gestalt an. Sie ist lösbar genau im Fall  $(\varphi_k)_{i,j} = 1$ , und dann sind alle Blöcke  $A_{i,j}$  Lösungen. Dieser Fall und auch die zugrunde liegende  $\tau$ -Bahn heißen *adäquat* bzgl. der Fixgleichung (4.14).

Lösungen über allen adäquaten  $\tau$ -Bahnen können nach Satz 4.6 zu einer Lösung über ihrer Vereinigungsmenge, dem *adäquaten Bereich*  $\Lambda_{\text{ad}} \subseteq I^2$  zusammengesetzt werden.

Offenbar ist  $\Lambda_{\text{ad}} = \bigcup \{\tau\text{-Bahnen } K \text{ in } I^2 : \alpha^{\#K} = 1\}$  und somit (mit  $k = \#K$ )

$$\Lambda_{\text{ad}} = \bigcup \{\Lambda_k : k \text{ Vielfaches von } \text{ord } \alpha\}. \quad (4.23)$$

**Satz 4.9.** Der adäquate Bereich  $\Lambda_{\text{ad}}$  hat folgende Größe:

*Fall 1: Homogenes  $\tau$*

*Fall 1a:* Ist  $\alpha^{\text{ord } \tau} = 1$ , so ist  $\Lambda_{\text{ad}} = I^2$ .

*Fall 1b:* Ist  $\alpha^{\text{ord } \tau} \neq 1$ , so ist  $\Lambda_{\text{ad}} = \emptyset$ .

*Fall 2: Inhomogenes  $\tau$*

*Fall 2a:* Ist  $\alpha^{\text{sub } \tau} = 1$ , so ist  $\Lambda_{\text{ad}} = I^2$ .

*Fall 2b:* Ist  $\alpha^{\text{sub } \tau} \neq 1$ , so ist  $\Lambda_{\text{ad}} = \emptyset$ .

*Fall 2c:* Ist  $\alpha^{\text{ord } \tau} = 1$ ,  $\alpha^{\text{sub } \tau} \neq 1$ , so ist  $\Lambda_{\text{ad}} = \Lambda_{\text{ord } \tau}$ :

- $\#\Lambda_{\text{ad}} = 6$  für  $\langle \tau \rangle \in \{(2, 2, 2), (6, 3)\}$
- $\#\Lambda_{\text{ad}} = 8$  für  $\langle \tau \rangle \in \{(2, 2, 2, 2), (4, 4)\}$ .

*Beweis.* Für homogenes  $\tau$  ist  $\Lambda_{\text{ord } \tau} = I^2$  das einzige nichtleere  $\Lambda_k$ . In der Darstellung (4.23) von  $\Lambda_{\text{ad}}$  als Vereinigung gewisser  $\Lambda_k$  kommt  $\Lambda_{\text{ord } \tau}$  genau dann vor, wenn  $\text{ord } \alpha \mid \text{ord } \tau$ , d. h. wenn  $\alpha^{\text{ord } \tau} = 1$ . Daraus folgt die Behauptung im ersten Fall.

Für inhomogenes  $\tau$  sind  $\Lambda_{\text{ord } \tau}$  und  $\Lambda_{\text{sub } \tau}$  die einzigen nichtleeren  $\Lambda_k$ . In der Darstellung (4.23) von  $\Lambda_{\text{ad}}$  als Vereinigung gewisser  $\Lambda_k$  kommt

- $\Lambda_{\text{ord } \tau}$  genau dann vor, wenn  $\text{ord } \alpha \mid \text{ord } \tau$ , d. h. wenn  $\alpha^{\text{ord } \tau} = 1$ ;
- $\Lambda_{\text{sub } \tau}$  genau dann vor, wenn  $\text{ord } \alpha \mid \text{sub } \tau$ , d. h. wenn  $\alpha^{\text{sub } \tau} = 1$ .

Nach Lemma 4.7 ist  $\text{sub } \tau$  ein Teiler von  $\text{ord } \tau$ , daher folgt aus  $\alpha^{\text{sub } \tau} = 1$   $\alpha^{\text{ord } \tau} = 1$ .

- Ist  $\alpha^{\text{sub } \tau} = 1$ , so auch  $\alpha^{\text{ord } \tau} = 1$ , also  $\Lambda_{\text{ad}} = \Lambda_{\text{ord } \tau} \cup \Lambda_{\text{sub } \tau} = I^2$ .
- Ist  $\alpha^{\text{ord } \tau} \neq 1$ , so auch  $\alpha^{\text{sub } \tau} \neq 1$ , also  $\Lambda_{\text{ad}} = \emptyset$ .
- Ist  $\alpha^{\text{ord } \tau} = 1$  und  $\alpha^{\text{sub } \tau} \neq 1$ , so ist  $\Lambda_{\text{ad}} = \Lambda_{\text{ord } \tau}$ . Mit Tabelle 4.4 in Lemma 4.7 kann  $\#\Lambda_{\text{ord } \tau}$  bestimmt werden.  $\square$

Der folgende Satz zeigt, dass die  $G^*$ -Fixgleichung über dem adäquaten Bereich auf eine Gleichung der Form

$$\tau \tau^* B = \alpha B \quad \text{mit } \tau \in [H^*, t], \alpha \in Z \quad (4.24)$$

zurückgeführt werden kann.

Für  $\tau \in H^*$  ist  $\tau^* = 1$  und (4.24) eine vereinfachte  $G^*$ -Fixgleichung ohne lokale Komponente.

Im Fall  $\tau \in tH^*$  ist (4.24) keine  $G^*$ -Fixgleichung, da dann  $\tau^* = t^*$  nicht in  $G^*$  liegt. Gleichwohl ist auch dann die Rückführung auf die Form (4.24) sinnvoll. Im Fall  $\tau \in tH^*$  hat  $\tau$  lokale Anteile (nämlich Blocktranspositionen), die durch  $\tau^*$  gerade ausgeglichen werden.  $\tau \tau^*$  verschiebt Blöcke, transponiert sie aber nicht.

Daher macht es Sinn, (4.24) in beiden Fällen als *rein-globale Fixgleichung* zu bezeichnen. Diese ist genau über dem adäquaten Bereich lösbar, die Lösungen werden in Satz 4.11 angegeben.

**Satz 4.10.** *Die allgemeine  $G^*$ -Fixgleichung (4.14) ist über dem adäquaten Bereich  $\Lambda_{\text{ad}}$  lösbar genau dann, wenn für jede adäquate  $\tau$ -Bahn  $K$  mit  $k := \#K$  gilt:  $\varphi_k|K = 1$ .*

In dem Fall existiert eine über  $\Lambda_{\text{ad}}$  definierte  $\Gamma$ -Operatormatrix  $v$  mit

$$v^\top \tau^* v^{-1} = w|\Lambda_{\text{ad}}, \quad (4.25)$$

die an einer Position  $(i, j)$  jeder adäquaten  $\tau$ -Bahn als 1 gewählt werden kann.

Die Beziehung  $A = vB$  stellt eine bijektive Abbildung zwischen den über  $\Lambda_{\text{ad}}$  definierten Blockfiguren  $A$  und  $B$  her, die (4.14) bzw. die rein-globale Fixgleichung (4.24) lösen.

**Bemerkung 4.1.** Für  $\alpha = 1$  ist  $\Lambda_{\text{ad}} = I^2$ . Man erhält dann wieder die Charakterisierung (iii) der  $G$ -Fixen in Satz 2.10 (c).

*Beweis zu Satz 4.10.* Nach Satz 4.6 genügt es, die Behauptung für eine beliebige adäquate  $\tau$ -Bahn  $K$  in  $\Lambda_{\text{ad}}$  nachzuweisen. Sei  $(i, j) \in K$  beliebig gewählt.

Nach Satz 4.8 gilt für eine über  $K$  definierte Lösung  $A$ : Der Teilblock  $A_{i,j}$  erfüllt die lokale Fixgleichung

$$(\varphi_k)_{i,j} A_{i,j} = \alpha^k A_{i,j}.$$

Diese Fixgleichung ist nach Satz 4.2 lösbar genau dann, wenn  $(\varphi_k)_{i,j}$  den gleichen Permutationstyp wie  $\alpha^k$  besitzt. Im adäquaten Fall ist  $\alpha^k = 1$ , daher ist dies äquivalent mit  $(\varphi_k)_{i,j} = 1$ . Da  $(i, j) \in K$  beliebig gewählt war, folgt  $\varphi_k|K = 1$ .

Die Operatormatrix  $v$  über  $K$  mit Einträgen aus  $\Gamma$  wird folgendermaßen gewählt:

$$v_{i',j'} := (\varphi_l)_{i,j} = \tau^{*l} N_{\tau,l}(w)_{i,j} \quad \text{für } (i', j') = \tau^l(i, j) \quad (4.26)$$

Wegen  $\tau^k(i, j) = (i, j)$  und  $(\varphi_k)_{i,j} = 1$  ist nach Lemma 4.6 (ii)  $(\varphi_l)_{i,j}$  nur von der Restklasse von  $l \bmod k$  abhängig,  $v$  durch (4.26) also wohldefiniert. Es ist  $v_{i,j} = 1$ .

Für  $v^\tau$  erhält man unter Verwendung nacheinander von (4.13), (4.26), Lemma 4.5 (i), (4.13) und (4.26):

$$\begin{aligned} (v^\tau)_{i',j'} &= (v_{\tau(i',j')})^{\tau^*} = (v_{\tau^{l+1}(i,j)})^{\tau^*} = (\tau^{*l+1} N_{\tau,l+1}(w)_{i,j})^{\tau^*} \\ &= (\tau^{*l+1} w^{\tau^l}_{i,j} N_{\tau,l}(w)_{i,j})^{\tau^*} = \tau^{*l} (w_{\tau^l(i,j)})^{\tau^{*l}} N_{\tau,l}(w)_{i,j} \tau^* \\ &= w_{\tau^l(i,j)} \tau^{*l} N_{\tau,l}(w)_{i,j} \tau^* = w_{i',j'} v_{i',j'} \tau^* \end{aligned}$$

Es folgt  $v^\tau = w v \tau^*$  und  $w = v^\tau \tau^* v^{-1}$  über  $K$ , also ist (4.14) nachgewiesen.

Sei  $A$  eine Lösung von (4.14) und  $B := v^{-1} A$  eine Blockmatrix über  $\Lambda_{\text{ad}}$ . Dann folgt unter Verwendung der Vertauschbarkeit von  $\alpha$  und  $v$  und von (4.25)

$$\begin{aligned} \alpha B &= \alpha v^{-1} A = v^{-1} \alpha A = v^{-1} \tau w A = v^{-1} \tau v^\tau \tau^* v^{-1} A = v^{-1} v \tau \tau^* v^{-1} A \\ &= \tau \tau^* B, \end{aligned}$$

also erfüllt  $B$  (4.24).

Sei umgekehrt  $B$  eine Lösung von (4.24) und  $A := v B$  eine Blockmatrix über  $\Lambda_{\text{ad}}$ . Es folgt:

$$\tau w A = \tau w v B = \tau v^\tau \tau^* v^{-1} v B = v \tau \tau^* B = v \alpha B = \alpha v B = \alpha A,$$

also erfüllt  $A$  (4.14). □

Der folgende Satz behandelt die Lösbarkeit und Lösungen der rein-globalen Fixgleichung.

**Satz 4.11.** *Die rein-globale Fixgleichung (4.24) ist genau über dem adäquaten Bereich  $\Lambda_{\text{ad}}$  lösbar.*

*Man erhält alle über  $\Lambda_{\text{ad}}$  definierten Blockfiguren  $B$ , die (4.24) lösen, auf folgende Weise:*

- (i) *Für jede  $\tau$ -Bahn  $K$  in  $\Lambda_{\text{ad}}$  wird der Block  $B_{i,j}$  an einer ausgezeichneten Position  $(i, j)$  der Bahn beliebig vorgegeben.*
- (ii) *Ist eine beliebige Position  $(i', j')$  von  $\Lambda_{\text{ad}}$  dargestellt in der Form  $\tau^l(i, j)$  bzgl. der ausgezeichneten Position  $(i, j)$  der zugehörigen  $\tau$ -Bahn, so ist*

$$B_{i',j'} = \alpha^{-l} B_{i,j}. \quad (4.27)$$

*Beweis.* Zunächst wird durch die Definition von  $B$  in der Tat eine Blockfigur über  $\Lambda_{\text{ad}}$  wohldefiniert. Hierzu ist zu zeigen: Ist  $\tau^l(i, j) = \tau^m(i, j)$ , so ist  $\alpha^{-l} B_{i,j} = \alpha^{-m} B_{i,j}$ .

Aus  $\tau^l(i, j) = \tau^m(i, j)$  folgt  $l \equiv m \pmod{\#K}$ , also  $l = m + q\#K$  mit geeignetem  $q$ . Dann ist  $\alpha^l = \alpha^m(\alpha^{\#K})^q$ . Da  $K$  adäquat ist, gilt  $\alpha^{\#K} = 1$ , also folgt  $\alpha^l = \alpha^m$  und die Behauptung.

Um zu zeigen, dass die so definierte Blockfigur  $B$  die Fixgleichung erfüllt, wird die rechte Seite der Fixgleichung an der Position  $(i', j') = \tau^l(i, j)$  ausgewertet:

$$\begin{aligned} (\tau\tau^*B)_{i', j'} &= \tau^*(\tau^*B_{\tau^{-1}(i', j')}) = B_{\tau^{-1}(i', j')} = B_{\tau^{l-1}(i, j)} = \alpha^{-(l-1)}B_{i, j} = \alpha\alpha^{-l}B_{i, j} \\ &= \alpha B_{i', j'} \end{aligned}$$

Somit erfüllt  $B$  die Fixgleichung.

Sei umgekehrt  $B$  eine Blockfigur über einer  $\tau$ -Bahn  $K$ , die die rein-globale Fixgleichung löst, und  $(i, j)$  die ausgezeichnete Position in  $K$ . Zum Nachweis von (4.27) ist zu zeigen

$$B_{\tau^l(i, j)} = \alpha^{-l}B_{i, j} \quad \text{für alle } l. \quad (4.28)$$

Dies geschieht durch vollständige Induktion über  $l$ :

- Für  $l = 0$  ist die Formel trivial.
- Gelte die Formel für  $l$ . Dann ist

$$\begin{aligned} B_{\tau}^{l+1}(i, j) &= B_{\tau(i', j')} = \tau^*\left(\tau^{-1}B\right)_{i', j'} = \tau^*\left(\tau^{-1}\alpha^{-1}\tau\tau^*B\right)_{i', j'} \\ &= \alpha^{-1}B_{i', j'} = \alpha^{-1}\alpha^{-l}B_{i, j} = \alpha^{-(l+1)}B_{i, j}, \end{aligned}$$

also die Formel für  $l + 1$ . Somit ist (4.28) gezeigt.

Setzt man in (4.28)  $l = \#K$ , so erhält man wegen  $\tau^{\#K}(i, j) = (i, j) B_{i, j} = \alpha^{-\#K}B_{i, j}$ . Hieraus folgt  $\alpha^{\#K} = 1$ , die  $\tau$ -Bahn  $K$  liegt also im adäquaten Bereich.  $\square$

Nachdem bis zu dieser Stelle die  $G^*$ -Fixgleichung auf Lösbarkeit und Lösungen in Blockmatrizen untersucht wurde, gibt der folgende Satz notwendige Bedingungen für die Existenz von Sudoku-Lösungen an.

**Satz 4.12.** Besitzt die allgemeine  $G^*$ -Fixgleichung (4.14) eine Sudoku-Lösung  $A$ , so gilt:

- (i) Alle adäquaten  $\tau$ -Bahnen haben die gleiche Länge.  
Bezeichnet  $k$  diese Länge, so ist  $\varphi_k|\Lambda_{ad} = 1$ .
- (ii)  $\alpha^{\text{ord } \tau}$  ist entweder 1 oder vom Typ  $(3, 3, 3)$ .
- (iii) Es ist  $\text{ord } \alpha | 3$   $\text{ord } \tau$  und  $\text{ord } \tau | 3 \text{ ord } \alpha$ .

*Beweis.* Zu (i):

In der Falleinteilung von Satz 4.9 treten  $\tau$ -Bahnen verschiedener Länge überhaupt nur im Fall 2 auf. Im Fall 2b gibt es keine adäquaten  $\tau$ -Bahnen, im Fall 2c haben alle adäquaten  $\tau$ -Bahnen die gleiche Länge  $\text{ord } \tau$ . Adäquate  $\tau$ -Bahnen verschiedener Länge treten also nur im Fall 2a auf, der durch die Bedingung  $\alpha^{\text{sub } \tau} = 1$  charakterisiert ist.

Es ist also zu zeigen, dass bei inhomogenem Leitoperator  $\tau$  und  $\alpha^{\text{sub } \tau} = 1$  keine Sudoku-Lösung existieren kann.

Angenommen, zu inhomogenem Leitoperator  $\tau$  und  $\alpha^{\text{sub } \tau} = 1$  existiere eine Sudoku-Lösung  $A$  von  $\tau w A = \alpha A$ . Dann folgt  $(\tau w)^{\text{sub } \tau} A = \alpha^{\text{sub } \tau} A = A$ , also ist  $(\tau w)^{\text{sub } \tau}$  ein  $G$ -Fixoperator. Sein Leitoperator  $\tau^{\text{sub } \tau}$  liegt nach Satz 2.2 in  $[\sigma, \sigma^\circ]$  und hat folglich Ordnung 1 oder 3. Andererseits ist bei inhomogenem  $\tau$  nach Tabelle 4.4 in Lemma 4.7  $\text{ord}(\tau^{\text{sub } \tau}) = \text{ord } \tau / \text{sub } \tau$  entweder 2 oder 4. Damit ist die Annahme zum Widerspruch geführt und die erste Behauptung von (i) bewiesen.

Nach Satz 4.10 ist für jede adäquate  $\tau$ -Bahn  $K$   $\varphi_k|K = 1$ . Nach Satz 4.6 folgt  $\varphi_k|\Lambda_{\text{ad}} = 1$ .

Zu (ii):

Nach (4.21) gilt:  $\varphi_{\text{ord } \tau} A = \alpha^{\text{ord } \tau} A$ . Es ist  $\varphi_{\text{ord } \tau} = N_\tau(w) \in T^*$ , daher liegt eine Fixgleichung zum Leitoperator 1 vor. Ist  $\alpha^{\text{ord } \tau} \neq 1$ , so muss auch  $\varphi_{\text{ord } \tau} \neq 1$  sein. Dann folgt nach dem Korollar zu Satz 4.3 in Abschnitt 4.2:  $\alpha^{\text{ord } \tau}$  ist vom Typ (3, 3, 3).

Zu (iii):

Aus (ii) folgt  $(\alpha^{\text{ord } \tau})^3 = 1$ , also  $\text{ord } \alpha | 3 \text{ ord } \tau$ .

Aus der Fixgleichung (4.14) folgt durch  $l$ -malige Iteration  $\varphi^l A = \alpha^l A$ . Mit  $l = \text{ord } \alpha$  erhält man  $\varphi^{\text{ord } \alpha} A = A$ . Dies ist eine  $G$ -Fixgleichung, daher folgt nach Satz 2.2: Der Leitoperator dieser Gleichung liegt in  $[\sigma, \sigma^\circ]$ , seine Ordnung teilt 3.

Nach Lemma 4.5 ist  $\varphi^{\text{ord } \alpha} = \tau^{\text{ord } \alpha} N_{\tau, \text{ord } \alpha}(w)$ , wobei  $N_{\tau, \text{ord } \alpha}(w) \in T^*$  ist. Der Leitoperator ist also  $\tau^{\text{ord } \alpha}$ . Somit folgt  $(\tau^{\text{ord } \alpha})^3 = 1$ , also  $\text{ord } \tau | 3 \text{ ord } \alpha$ .  $\square$

## 4.4 Eingrenzung der möglichen $G^*$ -Fixoperatoren

Russell und Jarvis haben mit GAP (Groups, Algorithms, Programming), einem Programmpaket für algorithmische Gruppentheorie, die Konjugationsklassen der Sudoku-Gruppe  $G$  und je einen Vertreter (als Element von  $S_{81}$ ) bestimmt (siehe [14]). Es ergaben sich 275 Klassen.

Für jeden dieser Vertreter hat Russell weiter ermittelt, wieviele Fixsudokus „up to relabelling“, also Semifixsudokus er hat. Das entspricht der Aufgabe, die Mächtigkeit der Fixmengen bei der Operation von  $G$  auf  $Z \setminus X$  zu bestimmen. Ergebnis war, dass nur die 27 in der folgenden Tabelle aufgeführten Klassen eine nicht-leere Fixmenge besitzen.

Die Spalten in der folgenden Tabelle haben die folgende Bedeutung:

- Spalte 1 enthält die hier verwendete laufende Nr.  $m$  der Konjugationsklasse;
- Spalte 2 enthält die Nummer der Konjugationsklasse nach [14];
- Spalte 3 gibt die Mächtigkeit der Konjugationsklasse an;
- Spalte 4 gibt den Permutationstyp des Leitoperators  $\tau$  an;
- Spalten 5 bis 13 geben die Komponenten des Vertreters  $\varphi_m = \tau w$  in der hier verwendeten Notation an (dabei bezeichnen  $t$  die globale Transposition,  $G$  und

- $H$  die Vertauschung der Horizontal- bzw. Vertikalstreifen,  $g_i$  und  $h_i$  die Vertauschungen der Zeilen bzw. Spalten im  $i$ -ten Horizontal- bzw. Vertikalstreifen);
- die letzte Spalte gibt die Mächtigkeit der Fixmenge von  $\varphi_m$  in  $Z \setminus X$  an.

**Tabelle 4.5:** Konjugationsklassen der Sudokugruppe mit Semifixsudokus.

$m$	[14]	$\#C_m$	$\langle \tau \rangle$	$t$	$G$	$H$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$\#(Z \setminus X)_{\varphi_m}$
1	1	1	1	—	1	1	1	1	1	1	1	1	18383222420692992
2	8	16	1	—	1	1	1	1	1	$s$	$s$	$s^{-1}$	107495424
3	7	96	1	—	1	1	1	1	$s^{-1}$	$s$	$s$	$s$	21233664
4	9	192	1	—	1	1	1	$s$	$s^{-1}$	$s$	$s$	$s$	4204224
5	10	64	1	—	1	1	$s$	$s$	$s$	$s$	$s$	$s$	2508084
6	134	972	(2, 2, 2)	—	$\sigma\rho$	1	1	$s^{-1}$	$s$	$sr$	$r$	$rs$	449445888
7	135	3888	(2, 2, 2)	—	$\sigma\rho$	1	$s$	$s$	$s$	$sr$	$r$	$rs$	27648
8	79	2916	(2, 2, 2, 2)	—	$\sigma\rho$	$\rho\sigma$	$sr$	$sr$	$sr$	1	1	$sr$	155492352
9	25	144	(3, 3, 3)	—	$\sigma^{-1}$	1	1	1	1	1	1	1	14837760
10	28	864	(3, 3, 3)	—	$\sigma^{-1}$	1	1	1	1	1	1	$s$	2085120
11	30	1728	(3, 3, 3)	—	$\sigma^{-1}$	1	1	1	1	1	$s$	$s$	294912
12	32	1152	(3, 3, 3)	—	$\sigma^{-1}$	1	1	1	1	$s$	$s$	$s^{-1}$	6342480
13	27	288	(3, 3, 3)	—	$\sigma^{-1}$	1	$s^{-1}$	1	1	1	1	1	5184
14	26	1728	(3, 3, 3)	—	$\sigma^{-1}$	1	$s$	1	1	1	1	$s$	2592
15	29	3456	(3, 3, 3)	—	$\sigma^{-1}$	1	$s$	1	1	1	$s$	$s$	1296
16	31	2304	(3, 3, 3)	—	$\sigma^{-1}$	1	$s^{-1}$	1	1	$s$	$s$	$s$	648
17	22	5184	(3, 3, 3)	—	$\sigma$	$\sigma$	1	1	1	1	1	1	323928
18	24	20736	(3, 3, 3)	—	$\sigma$	$\sigma$	1	$s^{-1}$	1	1	1	1	288
19	23	20736	(3, 3, 3)	—	$\sigma$	$\sigma$	1	$s$	1	1	$s$	1	162
20	145	7776	(6, 3)	—	$\rho\sigma$	$\sigma$	$r$	$r$	1	$sr$	1	1	13824
21	144	15552	(6, 3)	—	$\rho\sigma$	$\sigma$	$r$	$r$	$s$	$sr$	$s$	1	3456
22	143	15552	(6, 3)	—	$\rho\sigma$	$\sigma$	$sr$	$r$	1	$sr$	1	1	1728
23	142	31104	(6, 3)	—	$\rho\sigma$	$\sigma$	$sr$	$r$	$s$	$sr$	$s$	1	6480
24	37	1296	(2, 2, 2)	t	$\sigma^{-1}$	$\sigma$	1	1	1	1	1	1	30258432
25	40	10368	(2, 2, 2)	t	$\sigma^{-1}$	$\sigma$	$s$	1	1	$s$	$s$	1	1854
26	86	69984	(4, 4)	t	$\rho$	$\sigma$	$r$	$r$	$r$	1	1	1	13056
27	43	93312	(6, 3)	t	1	$\sigma^{-1}$	1	1	1	1	1	1	288

Semifixoperatoren sind offenbar genau die  $G$ -Anteile von  $G^*$ -Fixoperatoren. Der  $Z$ -Anteil eines  $G^*$ -Fixoperators heißt eine *zugehörige Ziffernwirkung* des als  $G$ -Anteil enthaltenen Semifixoperators.

Es stellt sich die zusätzliche Frage, die bei der Russellschen Untersuchung nicht berücksichtigt wurde, welche (Typen von) zugehörigen Ziffernwirkungen zu einem vorgegebenen Semifixoperator existieren. Diese Untersuchung erfolgt nur durch algebraische Argumentationen und kommt ohne maschinellen Einsatz aus. Sie liefert auch eine gruppentheoretische Beschreibung der Konjugationsklassen durch die lokalen Komponenten.

Es stellt sich heraus, dass zu den meisten Semifixoperatoren nur ein Typ von Ziffernwirkungen möglich ist. Dann spezialisiert die  $G$ -Konjugationsklasse von Semifixoperatoren zu nur einer  $G^*$ -Konjugationsklasse von  $G^*$ -Fixoperatoren. Aufgrund der Russellschen Ergebnisse ist in diesen Fällen gesichert, dass Semifixsudokus zu Semifixoperatoren aus der  $G$ -Konjugationsklasse mit einer Ziffernwirkung des ermittelten Typs existieren.

In 4 Ausnahmefällen ergibt sich, dass je 4 verschiedene Typen von Ziffernwirkungen möglich sein könnten. Hier folgt aus den Russellschen Ergebnissen nicht, dass zu jedem Typ Semifixsudokus existieren. Der nächste Abschnitt widmet sich der Konstruktion von Semifixsudokus zu jedem Typ.

Das endgültige Ziel dieses Abschnitts ist es, ein Vertretersystem aller 27  $G$ -Konjugationsklassen zu bestimmen, die Ziffernwirkung haben, also die allgemeine Fixgleichung (4.14) lösen.

Aus dem Bestehen der Fixgleichung ergeben sich zunächst nach (4.21) und (4.22) lokale Fixgleichungen für jede Blockposition. Diese liefern nicht nur Bedingungen an die Lösungsblöcke, sondern aus der Lösbarkeit ergeben sich nach Satz 4.2 auch Bedingungen an die „Koeffizienten“  $(\varphi_{\text{ord } \tau})_{ij}$  und  $(\varphi_{\text{sub } \tau})_{ij}$ . Werden diese durch die lokalen Komponenten  $g_i$  und  $h_j$  des Fixoperators  $\varphi$  ausgedrückt, erhält man Bedingungen an den Fixoperator.

Der folgende Satz formuliert die Bedingungen an  $(\varphi_{\text{ord } \tau})_{ij}$  und  $(\varphi_{\text{sub } \tau})_{ij}$  und überführt sie in Bedingungen an die lokalen Komponenten der Semifixoperatoren.

Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts werden einige Aussagen ohne Einschränkung der Allgemeinheit nur für ein Vertretersystem der Leitoperatoren bzgl. Konjugation formuliert. Ein solches Vertretersystem erhält man nach Satz 4.1 mit Korollar als:

$$\Sigma^* := \{1, \rho, \rho\rho^\circ, \sigma, \sigma\sigma^\circ, \sigma\rho^\circ, t, t\rho, t\sigma\sigma^\circ\}.$$

Diese Leitoperatoren werden hier als *Standardleitoperatoren* angesprochen.

**Satz 4.13.** Ist  $\varphi = \tau w$  mit  $\tau \in [H^*, t]$ ,  $w_{ij} = g_i h_j^\circ$  mit  $g_i, h_j \in S_3$ , ein Semifixoperator und  $\alpha$  eine zugehörige Ziffernwirkung, so gilt:

- (i) Für jedes  $(i, j) \in I^2$  hat  $(\varphi_{\text{ord } \tau})_{ij}$  den gleichen Permutationstyp wie  $\alpha^{\text{ord } \tau}$ .  
Es ist  $\varphi_{\text{ord } \tau} = N_\tau(w)$ .
- (ii) Für inhomogenes  $\tau$  hat für jedes  $(i, j) \in \Lambda_{\text{sub } \tau}$   $(\varphi_{\text{sub } \tau})_{ij}$  den gleichen Permutationstyp wie  $\alpha^{\text{sub } \tau}$ . Es ist  $\varphi_{\text{sub } \tau} = \tau^* N_{\tau, \text{sub } \tau}(w)$ .
- (iii) Die Werte der in (i) und (ii) auftretenden Größen sind für die Standardleitoperatoren in Tabelle 4.6 zusammengefasst.

In der Tabelle bezeichnen  $\langle g \rangle \times \langle h \rangle$  den Permutationstyp von  $gh^\circ$  in  $S_9$ ,  $f_i := g_i h_i$  und  $f := g_3 h_2 g_1 h_3 g_2 h_1$ .

**Bemerkung 4.2.** Im Beweis von Satz 4.13 wird nicht verwendet, dass  $\varphi$  ein Semifixsudoku besitzt; es genügt eine semifixe Blockmatrix.

**Tabelle 4.6:** Explizite Darstellung der Evolutor-Komponenten.

$\tau$	$\langle \tau \rangle$	$\langle (\varphi_{\text{ord } \tau})_{ij} \rangle$	$\langle \alpha^{\text{ord } \tau} \rangle$	$\langle (\varphi_{\text{sub } \tau})_{ij} \rangle$	$\langle \alpha^{\text{sub } \tau} \rangle$
1	1	$\langle g_i \rangle \times \langle h_j \rangle$	$\langle \alpha \rangle$	—	—
$\rho$	(2, 2, 2)	$\langle g_{4-i} g_i \rangle \times \langle h_j^2 \rangle$	$\langle \alpha^2 \rangle$	$\langle g_2 \rangle \times \langle h_j \rangle$	$\langle \alpha \rangle$
$\rho\rho^\circ$	(2, 2, 2, 2)	$\langle g_{4-i} g_i \rangle \times \langle h_{4-j} h_j \rangle$	$\langle \alpha^2 \rangle$	$\langle g_2 \rangle \times \langle h_2 \rangle$	$\langle \alpha \rangle$
$\sigma$	(3, 3, 3)	$\langle g_3 g_2 g_1 \rangle \times \langle h_j^3 \rangle$	$\langle \alpha^3 \rangle$	—	—
$\sigma\sigma^\circ$	(3, 3, 3)	$\langle g_3 g_2 g_1 \rangle \times \langle h_3 h_2 h_1 \rangle$	$\langle \alpha^3 \rangle$	—	—
$\sigma\rho^\circ$	(6, 3)	$\langle (g_3 g_2 g_1)^2 \rangle \times \langle (h_3 h_1)^3 \rangle$	$\langle \alpha^6 \rangle$	$\langle g_3 g_2 g_1 \rangle \times \langle h_2^3 \rangle$	$\langle \alpha^3 \rangle$
$t$	(2, 2, 2)	$\langle f_i \rangle \times \langle f_j \rangle$	$\langle \alpha^2 \rangle$	$\langle t f_i 1^\circ \rangle$	$\langle \alpha \rangle$
$t\rho$	(4, 4)	$\langle f_{4-i} f_i \rangle \times \langle f_{4-j} f_j \rangle$	$\langle \alpha^4 \rangle$	$\langle t f_2 1^\circ \rangle$	$\langle \alpha \rangle$
$t\sigma\sigma^\circ$	(6, 3)	$\langle f \rangle \times \langle f \rangle$	$\langle \alpha^6 \rangle$	$\langle t f 1^\circ \rangle$	$\langle \alpha^3 \rangle$

*Beweis von Satz 4.13.* Nach Voraussetzung existiert eine Blockmatrix  $A$  mit  $\varphi A = \alpha A$ .

Zu (i):

Nach (4.21) gilt  $\varphi_{\text{ord } \tau} A = \alpha^{\text{ord } \tau} A$ , also für jede Position  $(i, j) \in I^2$ :

$$(\varphi_{\text{ord } \tau})_{ij} A_{ij} = \alpha^{\text{ord } \tau} A_{ij} .$$

Für diese lokale Fixgleichung folgt nach Satz 4.2:

Für alle  $(i, j) \in I^2$  hat  $(\varphi_{\text{ord } \tau})_{ij}$  den gleichen Permutationstyp wie  $\alpha^{\text{ord } \tau}$ .

Nach (4.16) ist  $\varphi_{\text{ord } \tau} = N_\tau(w)$ .

Zu (ii):

Über  $\Lambda_{\text{sub } \tau}$  gilt nach (4.22)  $\varphi_{\text{sub } \tau} A = \alpha^{\text{sub } \tau} A$ , also für jede Position  $(i, j) \in \Lambda_{\text{sub } \tau}$ :

$$(\varphi_{\text{sub } \tau})_{ij} A_{ij} = \alpha^{\text{sub } \tau} A_{ij} .$$

Für diese lokale Fixgleichung folgt nach Satz 4.2:

Für alle  $(i, j) \in \Lambda_{\text{sub } \tau}$  hat  $(\varphi_{\text{sub } \tau})_{ij}$  den gleichen Permutationstyp wie  $\alpha^{\text{sub } \tau}$ .

Es ist  $\varphi_{\text{sub } \tau} = \tau^{*\text{sub } \tau} \cdot N_{\tau, \text{sub } \tau}(w)$ . Da nach Lemma 4.7  $\text{sub } \tau$  stets ungerade ist, kann  $\tau^{*\text{sub } \tau}$  durch  $\tau^*$  ersetzt werden.

Zu (iii):

Die Permutationstypen der Standardleitoperatoren können Satz 4.1 entnommen werden (vgl. auch dessen Korollar).

$\text{ord } \tau$  und  $\text{sub } \tau$  können Tabelle 4.4 entnommen werden, woraus sich die Angaben in den Spalten  $\langle \alpha^{\text{ord } \tau} \rangle$  und  $\langle \alpha^{\text{sub } \tau} \rangle$  ergeben.

Es bleiben die Angaben in den Spalten  $\langle (\varphi_{\text{ord } \tau})_{ij} \rangle$  und  $\langle (\varphi_{\text{sub } \tau})_{ij} \rangle$  zu ermitteln.

Es ist

$$\begin{aligned} N_{\tau, l}(w)_{ij} &= \left( w^{\tau^l} \cdot w^{\tau^{l-1}} \cdots w^\tau \cdot w \right)_{ij} = w_{\tau^{l-1}(i,j)} \cdot w_{\tau^{l-2}(i,j)} \cdots w_{\tau(i,j)} \cdot w_{ij} \\ &= w_{i_{l-1}, j_{l-1}} \cdot w_{i_{l-2}, j_{l-2}} \cdots w_{i_1, j_1} \cdot w_{i_0, j_0} \end{aligned}$$

mit der Schreibweise  $(i_k, j_k) := \tau^k(i, j)$ .

Setzt man hier  $w_{ij} = g_i \cdot h_j^\circ$  ein, so erhält man

- für  $\tau \in H^*$

$$N_{\tau,l}(w)_{ij} = (g_{i_{l-1}} \cdot g_{i_{l-2}} \cdots g_{i_1} \cdot g_{i_0}) \cdot (h_{j_{l-1}} \cdot h_{j_{l-2}} \cdots h_{j_1} \cdot h_{j_0})^\circ,$$

- für  $\tau \in tH^*$  bei geradem  $l$

$$N_{\tau,l}(w)_{ij} = (h_{j_{l-1}} \cdot g_{i_{l-2}} \cdots h_{j_3} \cdot g_{i_2} \cdot h_{j_1} \cdot g_{i_0}) \cdot (g_{i_{l-1}} \cdot h_{j_{l-2}} \cdots g_{i_3} \cdot h_{j_2} \cdot g_{i_1} \cdot h_{j_0})^\circ,$$

- für  $\tau \in tH^*$  bei ungeradem  $l$

$$N_{\tau,l}(w)_{ij} = (g_{i_{l-1}} \cdot h_{j_{l-2}} \cdots g_{i_2} \cdot h_{j_1} \cdot g_{i_0}) \cdot (h_{j_{l-1}} \cdot g_{i_{l-2}} \cdots h_{j_2} \cdot g_{i_1} \cdot h_{j_0})^\circ,$$

Der weitere Beweis erfolgt beispielhaft für  $\tau = t\sigma\sigma^\circ$ :

Es ist  $\text{ord } \tau = 6$ . Eine Bahn dieser Länge wird von  $(1, 2)$  erzeugt:

$$\begin{aligned} (i_0, j_0) &= (1, 2), (i_1, j_1) = (3, 2), (i_2, j_2) = (3, 1), \\ (i_3, j_3) &= (2, 1), (i_4, j_4) = (2, 3), (i_5, j_5) = (1, 3), (i_6, j_6) = (i_0, j_0). \end{aligned}$$

Man erhält

$$(\varphi_{\text{ord } \tau})_{1,2} = N_\tau(w)_{1,2} = h_3 g_2 h_1 g_3 h_2 g_1 \cdot (g_1 h_3 g_2 h_1 g_3 h_2)^\circ = f \cdot (g_1 f g_1^{-1})^\circ$$

und nach Lemma 4.6 (i) für alle  $(i, j)$  dieser  $\tau$ -Bahn

$$\langle (\varphi_{\text{ord } \tau})_{ij} \rangle = \langle N_\tau(w)_{ij} \rangle = \langle f \rangle \times \langle g_1 f g_1^{-1} \rangle = \langle f \rangle \times \langle f \rangle.$$

Für die andere  $\tau$ -Bahn führt eine ähnliche Rechnung zum Ziel.

Es ist  $\text{sub } \tau = 3$ . Die einzige Bahn dieser Länge wird von  $(1, 1)$  erzeugt:

$$(i_0, j_0) = (1, 1), (i_1, j_1) = (2, 2), (i_2, j_2) = (3, 3), (i_3, j_3) = (i_0, j_0).$$

Hier ist  $\tau^* = t$ , man erhält  $N_{\tau, \text{sub } \tau}(w)_{1,1} = g_3 h_2 g_1 \cdot (h_3 g_2 h_1)^\circ$  und nach Lemma 4.6 (i) für alle  $(i, j)$  dieser  $\tau$ -Bahn

$$\begin{aligned} \langle (\varphi_{\text{sub } \tau})_{ij} \rangle &= \langle \tau^* \cdot N_{\tau, \text{sub } \tau}(w)_{ij} \rangle = \langle t \cdot g_3 h_2 g_1 \cdot (h_3 g_2 h_1)^\circ \rangle \\ &= \langle t \cdot g_3 h_2 g_1 h_3 g_2 h_1 \cdot 1^\circ \rangle \langle t \cdot f \cdot 1^\circ \rangle, \end{aligned}$$

wobei nach Satz 4.1 verwendet wurde  $\langle tgh^\circ \rangle = \langle tgh 1^\circ \rangle$ . □

Der folgende Satz bietet eine erste Abgrenzung der Menge  $\Phi$  der Semifixoperatoren und zugehörigen Ziffernwirkungen.

Für einen Leitoperator  $\tau$  bezeichne  $\Phi_\tau$  die Menge der Semifixoperatoren zu diesem Leitoperator. Offenbar ist  $\Phi_\tau = \Phi \cap \tau T^*$ , und  $\Phi$  ist die Vereinigung der  $\Phi_\tau$ . Für  $\lambda \in [H^*, t]$  ist  $\Phi_{\tau^\lambda} = \Phi_\tau^\lambda$ , daher genügt die Bestimmung der  $\Phi_\tau$  für Standardleitoperatoren  $\tau$ .

Es bezeichne  $W_\tau$  die Menge der lokalen Anteile der Semifixoperatoren in  $\Phi_\tau$ , so dass also gilt  $\Phi_\tau = \tau W_\tau$ . Der folgende Satz bietet eine Abgrenzung der  $W_\tau$  nach oben durch Teilmengen  $W_\tau^*$  von  $T^*$ , die durch Bedingungen an die lokalen Komponenten  $g_i$  und  $h_j$  definiert werden. Später wird sich zeigen, dass bereits gilt  $W_\tau = W_\tau^*$  (Satz 4.15).

**Satz 4.14.** Für jeden Standardleitoperator  $\tau \in \Sigma^*$  wird durch die zugehörigen Zeilen in Tabelle 4.7 eine Teilmenge  $W_\tau^*$  von  $T^*$  definiert als die Menge aller  $w \in T^*$ , deren Komponenten  $w_{i,j} = g_i h_j^\circ$  mit  $g_i, h_j \in S_3$  eines der angegebenen Bedingungssets an  $g_i, h_j$  erfüllen.

Es gilt  $W_\tau \subseteq W_\tau^*$ .

Die letzte Spalte der Tabelle gibt die möglichen Typen der zugehörigen Ziffernwirkungen an.

**Tabelle 4.7:** Bedingungssets für die  $W_\tau^*$  und zugehörige Ziffernwirkungen.

$\tau$	$\langle \tau \rangle$	$W_{\tau^*}$ definierende Bedingungssets		$\langle \alpha \rangle$
<b>1</b>	1	alle $\langle g_i \rangle, \langle h_j \rangle = 1$		1
		alle $\langle g_i \rangle, \langle h_j \rangle \in \{1, (3)\}$ , dabei alle $\langle g_i \rangle = (3)$ oder alle $\langle h_j \rangle = (3)$		(3,3,3)
$\rho$	(2,2,2)	$\langle g_2 \rangle = \langle g_3 g_1 \rangle = 1$ , alle $\langle h_j \rangle = (2)$		(2,2,2)
		$\langle g_2 \rangle = \langle g_3 g_1 \rangle = (3)$ , alle $\langle h_j \rangle = (2)$		(6,3)
$\rho \rho^\circ$	(2,2,2,2)	$\langle g_2 \rangle = \langle h_2 \rangle = (2)$ , $\langle g_3 g_1 \rangle = \langle h_3 h_1 \rangle = 1$		(2,2,2,2)
$\sigma$	(3,3,3)	$\langle g_3 g_2 g_1 \rangle = 1$	alle $\langle h_j \rangle \in \{1, (3)\}$ , nicht alle $= (3)$	(3,3,3)
			alle $\langle h_j \rangle = (3)$	1 (3) (3,3) (3,3,3)
		$\langle g_3 g_2 g_1 \rangle = (3)$	alle $\langle h_j \rangle \in \{1, (3)\}$	(9)
$\sigma \sigma^\circ$	(3,3,3)	$\langle g_3 g_2 g_1 \rangle = \langle h_3 h_2 h_1 \rangle = 1$		1 (3) (3,3) (3,3,3)
		$\langle g_3 g_2 g_1 \rangle, \langle h_3 h_2 h_1 \rangle \in \{1, (3)\}$ , nicht beide $= 1$		(9)
$\sigma \rho^\circ$	(6,3)	$\langle g_3 g_2 g_1 \rangle = (2)$	$\langle h_3 h_1 \rangle, \langle h_2 \rangle \in \{1, (3)\}$ , nicht beide $= (3)$	(6,3)
			$\langle h_3 h_1 \rangle = \langle h_2 \rangle = (3)$	(2,2,2) (3,2,2,2) (6) (6,3)
$t$	(2,2,2)	alle $\langle f_i \rangle = 1$		(2,2,2)
		alle $\langle f_i \rangle = (3)$		(6,3)
$t\rho$	(4,4)	$\langle f_2 \rangle = (2)$ , $\langle f_3, f_1 \rangle = 1$		(4,4)
$t\sigma\sigma^\circ$	(6,3)	$\langle f \rangle = 1$		(2,2,2) (3,2,2,2) (6) (6,3)

*Beweis.* Bei festem Standardleitoperator  $\tau$  werden notwendige Bedingungen für die lokalen Komponenten  $g_i, h_j$  und die zugehörigen Ziffernwirkungen  $\alpha$  von Semifixoperatoren der Form  $\varphi = \tau w$  mit  $w_{ij} = g_i h_j^\circ$  hergeleitet.

Hierzu werden hauptsächlich folgende Methoden verwendet:

- Satz 4.13 liefert für jeden Leitoperator  $\tau$  Bedingungen zwischen  $g_i, h_j$  und  $\alpha$ .
- Hat die horizontale oder die vertikale Komponente von  $\tau \in H^*$  einen Fixpunkt, so stabilisiert  $\varphi$  einen Horizontal- bzw. Vertikalstreifen. Satz 4.5 liefert dann eine Aussage über die zu dem Streifen gehörende lokale Komponente  $g_i$  bzw.  $h_j$ .
- An einigen Stellen ist Satz 4.12 hilfreich.

*Fall  $\tau = 1$*

Satz 4.13 liefert hier für alle  $i, j$

$$\langle g_i \rangle \times \langle h_j \rangle = \langle \alpha \rangle . \quad (\dagger)$$

$\varphi$  stabilisiert jeden Streifen und innerhalb jedes Streifens jeden Block. Nach Satz 4.5(i) folgt: Alle  $\langle g_i \rangle, \langle h_j \rangle$  sind 1 oder (3).

Einsetzung in ( $\dagger$ ) ergibt nach Tabelle 4.2:  $\langle \alpha \rangle$  ist gleich 1 oder (3, 3, 3).

Die beiden Möglichkeiten können nach Tabelle 4.2 analysiert werden:

Ist  $\langle \alpha \rangle = 1$ , so müssen alle  $\langle g_i \rangle, \langle h_j \rangle = 1$  sein.

Ist  $\langle \alpha \rangle = (3, 3, 3)$ , so müssen entweder alle  $\langle g_i \rangle = (3)$  oder alle  $\langle h_j \rangle = (3)$  sein.

Damit sind die in Tabelle 4.7 zu  $\tau = 1$  angegebenen Bedingungen nachgewiesen.

*Fall  $\tau = \rho$*

Satz 4.13 liefert hier für alle  $i, j$

$$\langle g_{4-i} g_i \rangle \times \langle h_j^2 \rangle = \langle \alpha^2 \rangle \quad (\dagger)$$

und

$$\langle g_2 \rangle \times \langle h_j \rangle = \langle \alpha \rangle . \quad (\ddagger)$$

$\varphi$  stabilisiert den mittleren Horizontalstreifen und darin jeden Block. Nach Satz 4.5(i) folgt:  $\langle g_2 \rangle = 1$  oder (3).

$\varphi$  stabilisiert jeden Vertikalstreifen und vertauscht darin die beiden äußeren Blöcke. Nach Satz 4.5(iii) folgt: Alle  $\langle h_j \rangle = (2)$ .

Einsetzung in ( $\ddagger$ ) ergibt nach Tabelle 4.2:  $\langle \alpha \rangle = (2, 2, 2)$  bzw. (6, 3).

Einsetzung in ( $\dagger$ ) ergibt für  $i = 1$ :  $\langle g_3 g_1 \rangle \times 1 = \langle \alpha^2 \rangle = 1$  bzw. (3, 3, 3), also nach Tabelle 4.2  $\langle g_3 g_1 \rangle = 1$  bzw. (3).

Damit sind die in Tabelle 4.7 zu  $\tau = \rho$  angegebenen Bedingungen nachgewiesen.

*Fall  $\tau = \rho \rho^\circ$*

Satz 4.13 liefert hier für alle  $i, j$

$$\langle g_{4-i} g_i \rangle \times \langle h_{4-j} h_j \rangle = \langle \alpha^2 \rangle \quad (\dagger)$$

und

$$\langle g_2 \rangle \times \langle h_2 \rangle = \langle \alpha \rangle . \quad (\ddagger)$$

$\varphi$  stabilisiert den mittleren Horizontal- und Vertikalstreifen und vertauscht darin jeweils die beiden äußeren Blöcke. Nach Satz 4.5(iii) folgt:  $\langle g_2 \rangle = (2)$  und  $\langle h_2 \rangle = (2)$ .

Einsetzung in (‡) ergibt nach Tabelle 4.2:  $\langle \alpha \rangle = (2, 2, 2, 2)$ .

Einsetzung in (†) ergibt für  $i = j = 1$ :  $\langle g_3 g_1 \rangle \times \langle h_3 h_1 \rangle = \langle \alpha^2 \rangle = 1$ , also nach Tabelle 4.2  $\langle g_3 g_1 \rangle = \langle h_3 h_1 \rangle = 1$ .

Damit sind die in Tabelle 4.7 zu  $\tau = \rho \rho^\circ$  angegebenen Bedingungen nachgewiesen.

Fall  $\tau = \sigma$

Satz 4.13 liefert hier für alle  $j$

$$\langle g_3 g_2 g_1 \rangle \times \langle h_j^3 \rangle = \langle \alpha^3 \rangle. \quad (\dagger)$$

$\varphi$  stabilisiert alle Vertikalstreifen und vertauscht darin die Blöcke zyklisch. Nach Satz 4.5(ii) folgt: Alle  $\langle h_j \rangle$  sind 1 oder (3), also  $\langle h_j^3 \rangle = 1$ .

Nach Satz 4.12(ii) ist  $\langle \alpha^3 \rangle = 1$  oder (3, 3, 3).

Einsetzung in (†) ergibt:  $\langle g_3 g_2 g_1 \rangle \times 1 = 1$  oder (3, 3, 3), also nach Tabelle 4.2  $\langle g_3 g_2 g_1 \rangle = 1$  oder (3).

Es bleiben die möglichen zugehörigen Ziffernwirkungen zu bestimmen.

Zu  $\langle g_3 g_2 g_1 \rangle = 1$  gehört  $\langle \alpha^3 \rangle = 1$ , dann muss  $\langle \alpha \rangle = 1, (3), (3, 3)$  oder (3, 3, 3) sein.

- Ist nur ein  $\langle h_j \rangle = 1$ , so bewegt  $\varphi$  die Positionen im  $j$ -ten Vertikalstreifen nur innerhalb der Spalten, und zwar fixpunktfrei. Sei  $z$  eine beliebige Ziffer, an deren Position in der betrachteten Spalte durch  $\varphi$  eine von  $z$  verschiedene Ziffer  $y$  geschoben wird. Aufgrund der Fixgleichung muss gelten  $\alpha z = y$ . Somit hat auch  $\alpha$  keinen Fixpunkt. Dies leistet von den 4 Möglichkeiten für  $\langle \alpha \rangle$  nur  $\langle \alpha \rangle = (3, 3, 3)$ .
- Sind alle  $\langle h_j \rangle = (3)$ , so können die 4 Möglichkeiten für  $\langle \alpha \rangle$  nicht weiter eingeschränkt werden.

Zu  $\langle g_3 g_2 g_1 \rangle = (3)$  gehört  $\langle \alpha^3 \rangle = (3, 3, 3)$ , dann muss  $\langle \alpha \rangle = (9)$  sein.

Damit sind die in Tabelle 4.7 zu  $\tau = \sigma$  angegebenen Bedingungen nachgewiesen.

Fall  $\tau = \sigma \sigma^\circ$

Satz 4.13 liefert hier

$$\langle g_3 g_2 g_1 \rangle \times \langle h_3 h_2 h_1 \rangle = \langle \alpha^3 \rangle. \quad (\dagger)$$

Nach Satz 4.12(ii) ist  $\langle \alpha^3 \rangle = 1$  oder (3, 3, 3).

Einsetzung in (†) ergibt:  $\langle g_3 g_2 g_1 \rangle \times \langle h_3 h_2 h_1 \rangle = 1$  oder (3, 3, 3), also nach Tabelle 4.2  $\langle g_3 g_2 g_1 \rangle = 1$  oder (3) und  $\langle h_3 h_2 h_1 \rangle = 1$  oder (3).

Es bleiben die möglichen zugehörigen Ziffernwirkungen zu bestimmen.

Ist  $\langle g_3 g_2 g_1 \rangle = \langle h_3 h_2 h_1 \rangle = 1$ , so ist  $\langle \alpha^3 \rangle = 1$ , dann muss  $\langle \alpha \rangle = 1, (3), (3, 3)$  oder (3, 3, 3) sein.

Sind von  $\langle g_3 g_2 g_1 \rangle$  und  $\langle h_3 h_2 h_1 \rangle$  eines oder beide = (3), so ist  $\langle \alpha^3 \rangle = (3, 3, 3)$ , dann muss  $\langle \alpha \rangle = (9)$  sein.

Damit sind die in Tabelle 4.7 zu  $\tau = \sigma\sigma^\circ$  angegebenen Bedingungen nachgewiesen.

*Fall  $\tau = \sigma\rho^\circ$*

Satz 4.13 liefert hier

$$\langle(g_3g_2g_1)^2\rangle \times \langle(h_3h_1)^3\rangle = \langle\alpha^6\rangle \quad (\dagger)$$

und

$$\langle g_3g_2g_1 \rangle \times \langle h_2^3 \rangle = \langle\alpha^3\rangle. \quad (\ddagger)$$

$\varphi$  stabilisiert den mittleren Vertikalstreifen und vertauscht darin die Blöcke zyklisch. Nach Satz 4.5 (ii) folgt:  $\langle h_2 \rangle$  ist 1 oder (3), also  $\langle h_2^3 \rangle = 1$ .

Der Leitparameter von  $\varphi^{\circ 3}$  ist  $\tau^{\circ 3} = \rho$ , so dass der bereits bearbeitete Fall des Leitparameters  $\rho$  auf  $\varphi^{\circ 3}$  angewandt werden kann. Die Spaltenvertauschungen von  $\varphi^{\circ 3}$  in den 3 Vertikalstreifen sind  $g_3^{\circ}g_2^{\circ}g_1^{\circ}$ ,  $g_2^{\circ}g_1^{\circ}g_3^{\circ}$  bzw.  $g_1^{\circ}g_3^{\circ}g_2^{\circ}$ . Nach den Ergebnissen zum Leitparameter  $\rho$  folgt:  $\langle g_3^{\circ}g_2^{\circ}g_1^{\circ} \rangle = (2)$ , also auch  $\langle g_3g_2g_1 \rangle = (2)$ .

Einsetzung in ( $\ddagger$ ) ergibt  $\langle\alpha^3\rangle = (2) \times 1 = (2, 2, 2)$  nach Tabelle 4.2, also  $\langle\alpha^6\rangle = 1$ .

Einsetzung in ( $\dagger$ ) ergibt:  $1 \times \langle(h_3h_1)^3\rangle = 1$ , also nach Tabelle 4.2  $\langle(h_3h_1)^3\rangle = 1$  und folglich  $\langle h_3h_1 \rangle = 1$  oder (3).

Man erhält die 4 möglichen Kombinationen  $\langle h_2 \rangle = 1$  oder (3) und  $\langle h_3h_1 \rangle = 1$  oder (3).

Es bleiben die möglichen zugehörigen Ziffernwirkungen zu bestimmen.

Aufgrund von  $\langle\alpha^3\rangle = (2, 2, 2)$  gibt es folgende Möglichkeiten für  $\langle\alpha\rangle$ :  $(2, 2, 2)$ ,  $(3, 2, 2, 2)$ ,  $(6)$  und  $(6, 3)$ .

Der Leitparameter von  $\varphi^2$  ist  $\tau^2 = \sigma^{-1}$ . Da  $\sigma^{-1}$  zu  $\sigma$  konjugiert ist, kann der bereits bearbeitete Fall des Leitparameters  $\sigma$  auf  $\varphi^2$  und Ziffernwirkung  $\alpha^2$  angewandt werden. Die Spaltenvertauschungen von  $\varphi^2$  in den 3 Vertikalstreifen sind  $h_3h_1$ ,  $h_2^2$  bzw.  $h_1h_3$ . Nach den Ergebnissen zum Leitparameter  $\sigma$  folgt (man beachte  $\langle h_3h_1 \rangle = \langle h_1h_3 \rangle$ ):

Ist eine der Größen  $\langle h_3h_1 \rangle$ ,  $\langle h_2^2 \rangle$ ,  $\langle h_1h_3 \rangle$  gleich 1, so ist  $\langle\alpha^2\rangle = (3, 3, 3)$ . Zusammen mit  $\langle\alpha^3\rangle = (2, 2, 2)$  folgt dann  $\langle\alpha\rangle = (6, 3)$ .

Sind alle Größen  $\langle h_3h_1 \rangle$ ,  $\langle h_2^2 \rangle$ ,  $\langle h_1h_3 \rangle$  gleich (3), so ist  $\langle\alpha^2\rangle = 1, (3), (3, 3)$  oder  $(3, 3, 3)$ . Zusammen mit  $\langle\alpha^3\rangle = (2, 2, 2)$  folgt dann  $\langle\alpha\rangle = (2, 2, 2), (3, 2, 2, 2), (6)$  oder  $(6, 3)$ .

Damit sind die in Tabelle 4.7 zu  $\tau = \sigma\rho^\circ$  angegebenen Bedingungen nachgewiesen.

*Fall  $\tau = t$*

Satz 4.13 liefert hier

$$\langle f_i \rangle \times \langle f_i \rangle = \langle\alpha^2\rangle \quad (\dagger)$$

und

$$\langle tf_j 1^\circ \rangle = \langle\alpha\rangle. \quad (\ddagger)$$

Aufgrund von (#) hat  $\langle \alpha \rangle$  einen der in Tabelle 4.3 auftretenden Werte  $(2, 2, 2)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(6, 3)$ . Nach Satz 4.12(iii) gilt  $\text{ord } \alpha | 3 \text{ ord } \tau = 6$ , daher bleiben nur die Möglichkeiten  $(2, 2, 2)$  und  $(6, 3)$  für  $\langle \alpha \rangle$ . Nach (#) und Tabelle 4.3 sind im ersten Fall alle  $\langle f_i \rangle = 1$ , im zweiten Fall alle  $\langle f_i \rangle = (3)$ .

Damit sind die in Tabelle 4.7 zu  $\tau = t$  angegebenen Bedingungen nachgewiesen.

Fall  $\tau = t\rho$

Satz 4.13 liefert hier

$$\langle f_i f_{4-i} \rangle \times \langle f_j f_{4-j} \rangle = \langle \alpha^4 \rangle \quad (\dagger)$$

und

$$\langle t f_2 1^\circ \rangle = \langle \alpha \rangle. \quad (\#)$$

Aufgrund von (#) hat  $\langle \alpha \rangle$  einen der in Tabelle 4.3 auftretenden Werte  $(2, 2, 2)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(6, 3)$ . Nach Satz 4.12(iii) gilt  $4 = \text{ord } \tau | 3 \text{ ord } \alpha$ , daher bleibt nur die Möglichkeit  $(4, 4)$  für  $\langle \alpha \rangle$ . Dann ist  $\langle \alpha^4 \rangle = 1$ .

Nach (\dagger) und Tabelle 4.2 ist dann  $\langle f_3 f_1 \rangle = 1$ , nach (#) und Tabelle 4.3  $\langle f_2 \rangle = (2)$ .

Damit sind die in Tabelle 4.7 zu  $\tau = t\rho$  angegebenen Bedingungen nachgewiesen.

Fall  $\tau = t\sigma\sigma^\circ$

Satz 4.13 liefert hier

$$\langle f \rangle \times \langle f \rangle = \langle \alpha^6 \rangle \quad (\dagger)$$

und

$$\langle t f 1^\circ \rangle = \langle \alpha^3 \rangle. \quad (\#)$$

Aufgrund von (#) hat  $\langle \alpha^3 \rangle$  einen der in Tabelle 4.3 auftretenden Werte  $(2, 2, 2)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(6, 3)$ . Enthielte  $\alpha^3$  einen 6-Zykel, so  $\alpha$  einen 18-Zykel, was nicht möglich ist. Somit verbleiben für  $\langle \alpha^3 \rangle$  nur die Möglichkeiten  $(2, 2, 2)$  und  $(4, 4)$ .

Nach Satz 4.12(iii) gilt  $\text{ord } \alpha | 3 \text{ ord } \tau$ , also  $\text{ord } (\alpha^3) | \text{ord } \tau = 6$ . Somit scheidet  $(4, 4)$  auch aus, es ist  $\langle \alpha^3 \rangle = (2, 2, 2)$ . Dann ist  $\langle \alpha^6 \rangle = 1$  und nach (\dagger) und Tabelle 4.2  $\langle f \rangle = 1$ .

Es bleiben die möglichen zugehörigen Ziffernwirkungen zu bestimmen.

$\langle \alpha^3 \rangle = (2, 2, 2)$  lässt für  $\langle \alpha \rangle$  die Möglichkeiten  $(2, 2, 2)$ ,  $(3, 2, 2, 2)$ ,  $(6)$  oder  $(6, 3)$ .

Damit sind die in Tabelle 4.7 zu  $\tau = t\sigma\sigma^\circ$  angegebenen Bedingungen nachgewiesen.  $\square$

Aus Tabelle 4.7 entnimmt man folgenden Zusammenhang zwischen den Typen des Leitoperators  $\tau$  und der Ziffernwirkung  $\alpha$  eines  $G^*$ -Fixoperators:

**Korollar.** Ist  $\varphi = \tau w$  ein Semifixoperator, so gilt für jede zugehörige Ziffernwirkung  $\alpha$ :

$$\langle \tau^3 \rangle = \langle \alpha^3 \rangle \quad \text{oder} \quad \langle \tau \rangle = \langle \alpha^3 \rangle \quad \text{oder} \quad \langle \tau^3 \rangle = \langle \alpha \rangle.$$

Es existiert sogar eine zugehörige Ziffernwirkung  $\alpha$  mit

$$\langle \tau \rangle = \langle \alpha \rangle \quad \text{oder} \quad \langle \tau \rangle = \langle \alpha^3 \rangle.$$

Diese Aussage ist verwandt zu der Lösbarkeitsbedingung  $\langle y \rangle = \langle \alpha \rangle$  im lokalen Fall (Satz 4.2). Im globalen Fall ist die Bedingung nicht so strikt, da die zusätzliche lokale Komponente mehr Flexibilität der Lösungen ermöglicht.

Es stellt sich das folgende Problem:

Wie verteilen sich die Bedingungen an die lokalen Komponenten  $g_i, h_j$  aus Satz 4.14 auf die 27 Konjugationsklassen von  $G$  nach Tabelle 4.5? Die Lösung dieser Frage ergibt dann die Existenz eines ausgezeichneten Vertretersystems der  $G$ -Konjugationsklassen mit Ziffernwirkung.

Dazu wird eine Verfeinerung des Normbegriffs benötigt.  $T^*$  wird dazu als direktes Produkt von 6 zu  $S_3$  isomorphen Gruppen dargestellt, die mit  $I \dot{\cup} I^\circ$  indiziert sind.  $[H^*, t]$  operiert in natürlicher Weise auf  $I \dot{\cup} I^\circ$ .

Die reduzierte Norm  $N'_\tau : T^* \rightarrow T^*$  wird für  $\tau \in [H^*, t]$  definiert durch

$$N'_\tau(w)_i := w_{\tau^{l-1}(i)} \cdot w_{\tau^{l-2}(i)} \cdots w_{\tau(i)} \cdot w_i, \quad (4.29)$$

wobei  $w \in T^*$ ,  $i \in I \dot{\cup} I^\circ$  sind und  $l > 0$  minimal zu wählen ist mit  $\tau^l(i) = i$ .

**Lemma 4.8.** (i) Für  $w, x \in T^*$  gilt

$$N'_\tau((x^\tau)^{-1}wx) = N'_\tau(w)^x$$

(ii) Sei  $\lambda \in G$  vertauschbar mit  $\tau$ . Dann gilt für alle  $w \in T^*$ :

$$N'_\tau(w^\lambda) = N'_\tau(w)^\lambda$$

(iii) Für die Standardleitoperatoren sind die reduzierten Normen in Tabelle 4.8 angegeben. Elemente von  $T^*$  sind als 6-Tupel dargestellt, zunächst die 3 zu  $I$ , dann die 3 zu  $I^\circ$  gehörenden Komponenten jeweils in aufsteigender Reihenfolge.

*Beweis.* Zu (i):

Sei  $i \in I \dot{\cup} I^\circ$  beliebig und  $l > 0$  minimal mit  $\tau^l(i) = i$ . Dann ist nach (4.29)

$$\begin{aligned} N'_\tau((x^\tau)^{-1}wx)_i &= ((x^\tau)^{-1}wx)_{\tau^{l-1}(i)} \cdot ((x^\tau)^{-1}wx)_{\tau^{l-2}(i)} \cdots \\ &\quad ((x^\tau)^{-1}wx)_{\tau(i)} \cdot ((x^\tau)^{-1}wx)_i \\ &= (x_{\tau^{l-1}(i)}^{-1}w_{\tau^{l-1}(i)}x_{\tau^{l-1}(i)}) \cdot (x_{\tau^{l-1}(i)}^{-1}w_{\tau^{l-2}(i)}x_{\tau^{l-2}(i)}) \cdots \\ &\quad (x_{\tau^2(i)}^{-1}w_{\tau(i)}x_{\tau(i)}) \cdot (x_{\tau(i)}^{-1}w_i x_i) \\ &= x_{\tau^l(i)}^{-1} \cdot w_{\tau^{l-1}(i)} \cdot w_{\tau^{l-2}(i)} \cdots w_{\tau(i)} \cdot w_i \cdot x_i \\ &= x_i^{-1} \cdot N'_\tau(w)_i \cdot x_i, \end{aligned}$$

**Tabelle 4.8:** Reduzierte Normen.

$\tau$	$N'_\tau(g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3)$
1	$(g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3)$
$\rho$	$(g_3g_1, g_2, g_1g_3, h_1, h_2, h_3)$
$\rho\rho^\circ$	$(g_3g_1, g_2, g_1g_3, h_3h_1, h_2, h_1h_3)$
$\sigma$	$(g_3g_2g_1, g_1g_3g_2, g_2g_1g_3, h_1, h_2, h_3)$
$\sigma\sigma^\circ$	$(g_3g_2g_1, g_1g_3g_2, g_2g_1g_3, h_3h_2h_1, h_1h_3h_2, h_2h_1h_3)$
$\sigma\rho^\circ$	$(g_3g_2g_1, g_1g_3g_2, g_2g_1g_3, h_3h_1, h_2, h_1h_3)$
t	$(h_1g_1, h_2g_2, h_3g_3, g_1h_1, g_2h_2, g_3h_3)$
$t\rho$	$(h_1g_3h_3g_1, h_2g_2, h_3g_1h_1g_3, g_3h_3g_1h_1, g_2h_2, g_1h_1g_3h_3)$
$t\sigma\sigma^\circ$	$(h_3g_2h_1g_3h_2g_1, h_1g_3h_2g_1h_3g_2, h_2g_1h_3g_2h_1g_3, g_3h_2g_1h_3g_2h_1,$ $g_1h_3g_2h_1g_3h_2, g_2h_1g_3h_2g_1h_3)$

woraus die Behauptung folgt, da  $i \in I \dot{\cup} I^\circ$  beliebig war.

Zu (ii):

Sei  $\lambda \in G_\tau$  zerlegt als  $\lambda = \mu\nu$  mit  $\mu \in T^*$  und  $\nu \in [H^*, t]$ . Eingesetzt in  $\lambda^\tau = \lambda$  erhält man  $\mu^\tau\nu^\tau = \mu\nu$ . Wegen  $\mu^\tau \in T^*$  und  $\nu^\tau \in [H^*, t]$  folgt  $\mu^\tau = \mu$  und  $\nu^\tau = \nu : \mu$  und  $\nu$  kommutieren beide mit  $\tau$ . Daher kann die  $G^\tau$ -Verträglichkeit von  $N'_\tau$  für  $\lambda \in T_\tau^*$  und für  $\lambda \in [H^*, t]_\tau$  separat nachgewiesen werden.

Sei zunächst  $\lambda \in T_\tau^*$ . Dann ist nach (i)

$$N'_\tau(w)^\lambda = N'_\tau((\lambda^\tau)^{-1}w\lambda) = N'_\tau(\lambda^{-1}w\lambda) = N'_\tau(w^\lambda).$$

Sei jetzt  $\lambda \in [H^*, t]_\tau$ . Dann ist für  $i \in I \dot{\cup} I^\circ$

$$\begin{aligned} N'_\tau(w^\lambda)_i &= (w^\lambda)_{\tau^{l-1}(i)} \cdot (w^\lambda)_{\tau^{l-2}(i)} \cdots (w^\lambda)_{\tau(i)} \cdot (w^\lambda)_i \\ &= (w_{\lambda \circ \tau^{l-1}(i)}) \cdot (w_{\lambda \circ \tau^{l-2}(i)}) \cdots (w_{\lambda \circ \tau(i)}) \cdot (w_{\lambda(i)}) \\ &= (w_{\tau^{l-1} \circ \lambda(i)}) \cdot (w_{\tau^{l-2} \circ \lambda(i)}) \cdots (w_{\tau \circ \lambda(i)}) \cdot (w_{\lambda(i)}) \\ &= N'_\tau(w)_{\lambda(i)} = (N'_\tau(w)^\lambda)_i. \end{aligned}$$

Da  $i \in I \dot{\cup} I^\circ$  beliebig war, folgt  $N'_\tau(w^\lambda) = N'_\tau(w)^\lambda$ , was zu zeigen war.

Zu (iii):

Die Berechnung der reduzierten Normen  $N'_\tau$  verläuft ähnlich wie die Berechnung der Normen  $N_\tau = \varphi_{\text{ord } \tau}$  im Beweis von Satz 4.13(iii). In Komponenten, wo  $\tau$  eine kürzere Bahnlänge als  $\text{ord } \tau$  hat, entfällt bei der reduzierten Norm die Potenz, da der  $\tau$ -Zyklus nur einmal durchlaufen wird. Während etwa

$$\begin{aligned} N_{\sigma\rho^\circ}(g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3) \\ = ((g_3g_2g_1)^2, (g_1g_3g_2)^2, (g_2g_1g_3)^2, (h_3h_1)^3, (h_2)^6, (h_1h_3)^3) \end{aligned}$$

ist, entfallen bei  $N'_{\sigma\rho^\circ}$  die Potenzen in den Komponenten.  $\square$

Für eine Teilmenge  $Y \subseteq G$  heißt

$$\bigcup \{Y \cap C : C \text{ Konjugationsklasse von } G\}$$

die  $G$ -Konjugationszerlegung von  $Y$ . G-Konjugationsklassen  $C$  mit  $Y \cap C \neq \emptyset$  heißen an der Konjugationszerlegung von  $Y$  beteiligt.

Die Konjugationsklassen von  $T^*$  erhält man als direkte Produkte je einer Konjugationsklasse aus jeder zu  $S_3$  isomorphen Komponente. Sie werden in der Form

$$C_{\underline{\nu}} = [\nu_1 \nu_2 \nu_3; \nu_1 \circ \nu_2 \circ \nu_3]$$

notiert. Dabei bedeutet  $\nu_i = 1, 2$  oder  $3$ , dass in der Komponente  $i \in I \dot{\cup} I^\circ$  die Konjugationsklasse  $C_1 = 1$ ,  $C_r = (2)$  bzw.  $C_s = (3)$  von  $S_3$  vorliegt.

Für einen Leitoperator  $\tau \in [H^*, t]$  bezeichne

$$H_\tau := [H^*, t]_\tau$$

die Menge der Leitoperatoren, die mit  $\tau$  kommutieren.  $H_\tau$  operiert auf den Konjugationsklassen  $C_{\underline{\nu}}$  von  $T^*$  in natürlicher Weise.

Weiter bezeichne

$$C_{\underline{\nu}}^{H\tau} := \bigcup_{\lambda \in H_\tau} C_{\underline{\nu}}^\lambda$$

die Vereinigung aller unter  $H_\tau$  Konjugierten von  $C_{\underline{\nu}}$ .

Es ist

$$T^* = \bigcup_{\underline{\nu} \in \{1, 2, 3\}^6} C_{\underline{\nu}} = \bigcup_{\underline{\nu} \in M_{T^*}} C_{\underline{\nu}}^{H\tau}$$

mit einer Teilmenge  $M_{T^*} \subseteq \{1, 2, 3\}^6$ , die aus jeder  $H_\tau$ -Bahn genau ein Element enthält.

Jedes  $C_{\underline{\nu}}^{H\tau}$  ist offenbar  $[T^*, H_\tau]$ -stabil, und jede  $[T^*, H_\tau]$ -stabile Teilmenge  $V$  von  $T^*$  besitzt eine Darstellung

$$V = \bigcup_{\underline{\nu} \in M_V} C_{\underline{\nu}}^{H\tau}$$

mit einem geeigneten  $M_V \subseteq M_{T^*}$ .

**Lemma 4.9.** Es sei  $\tau \in [H^*, t]$  ein fester Leitoperator.

- (i) Für eine Konjugationsklasse  $C$  von  $T^*$  ist  $\tau \cdot N_\tau^{-1} C$  Teil einer Konjugationsklasse von  $G$ .
- (ii) Ist  $D$  eine weitere Konjugationsklasse von  $T^*$ , so liegen  $\tau \cdot N_\tau'^{-1} C$  und  $\tau \cdot N_\tau'^{-1} D$  genau dann in der gleichen Konjugationsklasse von  $G$ , wenn  $\lambda \in H_\tau$  existiert mit  $D = C^\lambda$ :

$$C \sim_{H\tau} D \Leftrightarrow \tau \cdot N_\tau'^{-1} C \sim_G \tau \cdot N_\tau'^{-1} D$$

- (iii) Es sei  $V$  eine  $[T^*, H_\tau]$ -stabile Teilmenge von  $T^*$ ,  $V = \bigcup_{\underline{\nu} \in M_V} C_{\underline{\nu}}^{H\tau}$ .

Dann ist die  $G$ -Konjugationszerlegung von  $\tau \cdot N_\tau'^{-1}V$  gegeben durch:

$$\tau \cdot N_\tau'^{-1}V = \bigcup_{\underline{v} \in M_V} \tau \cdot N_\tau'^{-1}C_{\underline{v}}^{H\tau}$$

Die  $G$ -Konjugationszerlegung von  $\tau \cdot T^*$  ist gegeben durch:

$$\tau \cdot T^* = \bigcup_{\underline{v} \in M_{T^*}} \tau \cdot N_\tau'^{-1}C_{\underline{v}}^{H\tau}.$$

*Beweis.* Zu (i):

Es seien  $v, w \in N_\tau'^{-1}C$ . Zu zeigen ist:  $\tau v$  und  $\tau w$  sind konjugiert in  $G$ .

Hier wird stärker gezeigt:

$$\tau v = (\tau w)^{\tau x^{-1}} \quad \text{mit geeignetem } x \in T^*. \quad (4.30)$$

Die Konstruktion von  $x$  und der Nachweis von (4.30) erfolgen separat für jede  $\tau$ -Bahn in  $I \dot{\cup} I^\circ$ . Sei also  $J$  eine  $\tau$ -Bahn in  $I \dot{\cup} I^\circ$  und  $j \in J$  fest gewählt.

Aus der Voraussetzung  $v, w \in N_\tau'^{-1}C$  folgt  $N_\tau'(v), N_\tau'(w) \in C$ , somit existiert  $y \in T^*$  mit  $N_\tau'(v)^y = N_\tau'(w)$ , insbesondere  $N_\tau'(v)_j^{y,j} = N_\tau'(w)_j$ . Ist  $l > 0$  minimal mit  $\tau^l(j) = j$  (also  $l = \#J$ ), so schreibt sich dies nach (4.29) als

$$(v_{\tau^{l-1}(j)} \cdot v_{\tau^{l-2}(j)} \cdots v_j)^{y,j} = w_{\tau^{l-1}(j)} \cdot w_{\tau^{l-2}(j)} \cdots w_{\tau(j)} \cdot w_j \quad (4.31)$$

$x$  wird nun auf  $J$  rekursiv definiert durch

$$x_j = y_j \cdot w_j^{-1}, \quad x_{\tau^{\mu+1}(j)} = v_{\tau^\mu(j)} \cdot x_{\tau^\mu(j)} \cdot w_{\tau^{\mu+1}(j)}^{-1} \quad \text{für } \mu \geq 0. \quad (4.32)$$

Diese Definition ist konsistent mit der  $l$ -Periodizität von  $\tau^\mu(j)$ , denn für  $\mu = l - 1$  erhält man

$$\begin{aligned} x_{\tau^l(j)} &= v_{\tau^{l-1}(j)} \cdot x_{\tau^{l-1}(j)} \cdot w_{\tau^l(j)}^{-1} \\ &= v_{\tau^{l-1}(j)} \cdot v_{\tau^{l-2}(j)} \cdots v_j \cdot y_j \cdot w_j^{-1} \cdots w_{\tau^{l-1}(j)}^{-1} \cdot w_{\tau^l(j)}^{-1} \\ &= y_j \cdot w_{\tau^{l-1}(j)} \cdot w_{\tau^{l-2}(j)} \cdots w_{\tau(j)} \cdot w_j \cdot w_j^{-1} \cdots w_{\tau^{l-1}(j)}^{-1} \cdot w_{\tau^l(j)}^{-1} \\ &= y_j \cdot w_{\tau^l(j)}^{-1} \\ &= y_j \cdot w_j^{-1} = x_j. \end{aligned}$$

Im dritten Schritt wurde (4.31) angewandt.

Wegen  $(x^\tau)_{\tau^\mu(j)} = x_{\tau^{\mu+1}(j)}$  und  $(w^\tau)_{\tau^\mu(j)} = w_{\tau^{\mu+1}(j)}$  bedeutet (4.32)

$$x^\tau = v \cdot x \cdot (w^\tau)^{-1} \quad (4.33)$$

zunächst auf  $J$ , dann aber, da  $J$  in  $I \dot{\cup} I^\circ$  beliebig gewählt war, allgemein.

Durch Umformung erhält man schrittweise  $(xw)^\tau = vx$ ,  $xw\tau = \tau vx$ ,  $w\tau = x^{-1}\tau vx$ ,  $(\tau w)^\tau = (\tau v)^x$ , woraus (4.30) folgt.

Zu (ii):

Sei zunächst vorausgesetzt, dass  $\tau \cdot N_\tau'^{-1}C$  und  $\tau \cdot N_\tau'^{-1}D$  in der gleichen Konjugationsklasse von  $G$  liegen. Dann existieren  $v \in N_\tau'^{-1}C$  und  $w \in N_\tau'^{-1}D$ , so dass  $\tau v$  und  $\tau w$   $G$ -konjugiert sind, also  $(\tau v)^{\lambda x} = \tau w$  mit geeignetem  $\lambda \in [H^*, t]$  und  $x \in T^*$ . Reduktion modulo dem Normalteiler  $T^*$  ergibt unter Benutzung von  $[H^*, t] \cap T^* = 1$ :  $\tau^\lambda = \tau$ , also  $\lambda \in [H^*, t]_\tau$ .

Außerdem folgt  $w = \tau^{-1}(\tau^\lambda v^\lambda)^x = \tau^{-1}\tau^x v^{\lambda x} = (x^\tau)^{-1}v^{\lambda x}$ . Somit ist nach Lemma 4.8 (i) und (ii)  $N_\tau'(w) = N_\tau'(\tau^\lambda v^\lambda)^x = N_\tau'(\tau v)^{\lambda x} = N_\tau'(v)^{\lambda x}$ .  $N_\tau'(w)$  liegt in  $D$ ,  $N_\tau'(v)$  liegt in  $C$ , daher folgt

$$\begin{aligned} D &= \{N_\tau'(w)^\gamma : \gamma \in T^*\} = \{N_\tau'(\tau v)^{\lambda x y} : \gamma \in T^*\} = \{N_\tau'(\tau v)^{\lambda y} : \gamma \in T^*\} \\ &= \{N_\tau'(\tau v)^{\gamma \lambda} : \gamma \in T^*\} = C^\lambda, \end{aligned}$$

da  $\lambda$  bijektiv auf  $T^*$  operiert.

Sei nun umgekehrt vorausgesetzt  $D = C^\lambda$  mit  $\lambda \in [H^*, t]_\tau$ . Dann ist

$$\tau \cdot N_\tau'^{-1}D = \tau \cdot N_\tau'^{-1}(C^\lambda) = \tau \cdot (N_\tau'^{-1}C)^\lambda = (\tau \cdot N_\tau'^{-1}C)^\lambda,$$

da  $\tau^\lambda = \tau$  und nach Lemma 4.8 (ii)  $N_\tau'$  mit der  $\lambda$ -Konjugation verträglich ist.

Somit sind  $\tau \cdot N_\tau'^{-1}C$  und  $\tau \cdot N_\tau'^{-1}D$   $G$ -konjugiert, liegen also in der gleichen Konjugationsklasse von  $G$ .

Zu (iii):

Dass  $\tau \cdot N_\tau'^{-1}V$  die angegebene Darstellung als Vereinigungsmenge hat, ist offensichtlich. Nach (i) und (ii) haben die Schnittmengen mit den Konjugationsklassen von  $G$  die Form  $\tau \cdot N_\tau'^{-1}C_{\underline{y}}^{H\tau}$ , es handelt sich also um die  $G$ -Konjugationszerlegung.

Für  $V = T^*$  ist offenbar  $N_\tau'^{-1}V = T^*$ .  $\square$

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zur Bestimmung der Menge  $\Phi$  der Semifixoperatoren und der zugehörigen Ziffernwirkungen. Da jedes Konjugierte eines Semifixoperators ebenfalls Semifixoperator ist, ist  $\Phi$   $G$ -stabil und die Konjugationszerlegung von  $\Phi$  besteht aus vollen Konjugationsklassen von  $G$ . Die beteiligten Konjugationsklassen sind im Folgenden zu bestimmen.

Sei  $C$  eine beliebige Konjugationsklasse von  $G$ . Die Leitoperatoren der in  $C$  enthaltenen Sudokuoperatoren durchlaufen eine Konjugationsklasse von  $[H^*, t]$ , treffen also genau einen Standardleitoperator  $\tau$ . Somit gelten für  $\tau$ , aber für keinen anderen Standardleitoperator, die folgenden äquivalenten Aussagen:

- $C$  enthält Sudokuoperatoren zum Leitoperator  $\tau$ .
- $C \cap \tau T^* \neq \emptyset$ .
- $C$  ist an der  $G$ -Konjugationszerlegung von  $\tau T^*$  beteiligt.

Somit genügt es, für jeden Standardleitoperator  $\tau$  zu bestimmen, welche der an der  $G$ -Konjugationszerlegung von  $\tau T^*$  beteiligten Konjugationsklassen zu  $\Phi$  gehören.

Die  $G$ -Konjugationszerlegung von  $\tau T^*$  ist nach dem vorangehenden Lemma gegeben durch

$$\tau T^* = \bigcup_{\underline{v} \in M_{T^*}} \tau W_{\tau, \underline{v}}$$

mit

$$W_{\tau, \underline{v}} := N_\tau'^{-1} C_{\underline{v}}^{H\tau} \subseteq T^*.$$

Zu bestimmen ist, welche  $\tau W_{\tau, \underline{v}}$  in  $\Phi$  liegen, d. h. zur  $G$ -Konjugationszerlegung von  $\Phi_\tau = \tau T^* \cap \Phi$  gehören:

$$\Phi_\tau = \bigcup_{\underline{v} \in M_\tau} \tau W_{\tau, \underline{v}} \quad \text{mit zu bestimmendem } M_\tau \subseteq M_{T^*}. \quad (4.34)$$

Die zu  $\tau W_{\tau, \underline{v}}$  gehörige  $G$ -Konjugationsklasse erhält man als  $\bigcup_{\lambda \in G} (\tau W_{\tau, \underline{v}})^\lambda$ .

Mit (4.34) ist offenbar auch  $W_\tau = \bigcup_{\underline{v} \in M_\tau} W_{\tau, \underline{v}}$ .

Die gesuchten  $W_{\tau, \underline{v}}$  werden im folgenden Satz als Teilmengen von  $T^*$  durch Bedingungen an die  $g_i$  und  $h_j$  beschrieben, wobei eine Darstellung der Elemente  $w$  von  $T^*$  in der Form  $w_{ij} = g_i h_j^\circ$  mit  $g_i, h_j \in S_3$  vorausgesetzt wird.

### Satz 4.15.

- (i) Das in Tabelle 4.9 zu  $\tau, \underline{v}$  angegebene Bedingungsset an  $g_i, h_j$  beschreibt die  $W_{\tau, \underline{v}}$  mit  $\tau W_{\tau, \underline{v}} \subseteq \Phi$  als Teilmengen von  $T^*$ .
- (ii) Die vorletzte Spalte der Tabelle gibt die Nummer  $m$  der zugehörigen Konjugationsklasse aus Tabelle 4.5 an.
- (iii) Die letzte Spalte der Tabelle gibt die möglichen Typen zugehöriger Ziffernwirkungen an.

**Beweisskizze.** Zu (i):

Zu festem Standardleitoperator  $\tau$  liefert Satz 4.14 notwendige Bedingungen an die lokalen Komponenten  $g_i, h_j$  zugehöriger Semifixoperatoren  $\tau w$  mit  $w_{ij} = g_i h_j^\circ$ . Diese Bedingungen definieren Teilmengen  $W_\tau^*$  von  $T^*$ , die offenbar  $W_\tau$  enthalten.

Sämtliche  $W_\tau^*$  definierenden Bedingungen haben die Form: Eine bestimmte Komponente von  $N_\tau'(w)$  muss zu einer bestimmten Konjugationsklasse von  $S_3$  gehören. Man erhält also eine Darstellung  $W_\tau^* = N_\tau'^{-1} V_\tau$  mit einer  $T^*$ -stabilen Teilmenge  $V_\tau$  von  $T^*$ , die sich in allen Fällen auch als  $H_\tau$ -stabil erweist.

Daher kann nach Lemma 4.9 (iii) die  $G$ -Konjugationszerlegung von  $\Phi_\tau^* := \tau W_\tau^*$  angegeben werden, wenn  $V_\tau$  in der Form  $V_\tau = \bigcup_{\underline{v} \in M_{\tau^*}} C_{\underline{v}}^{H\tau}$  mit  $M_\tau^* \subseteq M_{T^*}$  dargestellt ist:

$$\Phi_\tau^* = \bigcup_{\underline{v} \in M_{\tau^*}} \tau W_{\tau, \underline{v}} \quad \text{mit } W_{\tau, \underline{v}} = N_\tau'^{-1} C_{\underline{v}}^{H\tau}.$$

Nach (4.34) ist:

$$\Phi_\tau = \bigcup_{\underline{v} \in M_\tau} \tau W_{\tau, \underline{v}} \quad \text{mit zu bestimmendem } M_\tau \subseteq M_{T^*}.$$

$\#M_\tau$  ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen mit Semifixoperatoren zum Leitoperator  $\tau$ . Diese Anzahl ist nach den Ergebnissen von Jarvis und Russell be-

**Tabelle 4.9:** Bedingungssets für die  $W_{\tau,\underline{v}}$  und zugehörige Ziffernwirkungen.

$\tau$	$\langle \tau \rangle$	$\underline{v}$	$W_{\tau,\underline{v}}$ definierendes Bedingungsset	m	$\langle \alpha \rangle$
1	1	[111; 111]	alle $\langle g_i \rangle, \langle h_j \rangle = 1$	1	1
		[111; 333]	alle $\langle g_i \rangle = 1$ , alle $\langle h_j \rangle = (3)$ oder alle $\langle g_i \rangle = (3)$ , alle $\langle h_j \rangle = 1$	2	(3,3,3)
		[113; 333]	zwei $\langle g_i \rangle = 1$ , ein $\langle g_i \rangle = (3)$ , alle $\langle h_j \rangle = (3)$ oder alle $\langle g_i \rangle = (3)$ , zwei $\langle h_j \rangle = 1$ , ein $\langle h_j \rangle = (3)$	3	(3,3,3)
		[133; 333]	ein $\langle g_i \rangle = 1$ , zwei $\langle g_i \rangle = (3)$ , alle $\langle h_j \rangle = (3)$ oder alle $\langle g_i \rangle = (3)$ , ein $\langle h_j \rangle = 1$ , zwei $\langle h_j \rangle = (3)$	4	(3,3,3)
		[333; 333]	alle $\langle g_i \rangle, \langle h_j \rangle = (3)$	5	(3,3,3)
$\rho$	(2,2,2)	[111; 222]	$\langle g_2 \rangle = \langle g_3 g_1 \rangle = 1$ , alle $\langle h_j \rangle = (2)$	6	(2,2,2)
		[333; 222]	$\langle g_2 \rangle = \langle g_3 g_1 \rangle = (3)$ , alle $\langle h_j \rangle = (2)$	7	(6,3)
$\rho \rho^\circ$	(2,2,2,2)	[121; 121]	$\langle g_2 \rangle = \langle h_2 \rangle = (2)$ , $\langle g_3 g_1 \rangle = \langle h_3 h_1 \rangle = 1$	8	(2,2,2,2)
$\sigma$	(3,3,3)	[111; 111]	$\langle g_3 g_2 g_1 \rangle = 1$	alle $\langle h_j \rangle = 1$	9 (3,3,3)
		[111; 113]		zwei $\langle h_j \rangle = 1$ , ein $\langle h_j \rangle = (3)$	10 (3,3,3)
		[111; 133]		ein $\langle h_j \rangle = 1$ , zwei $\langle h_j \rangle = (3)$	11 (3,3,3)
		[111; 333]		alle $\langle h_j \rangle = (3)$	12 1 (3) (3,3) (3,3,3)
		[333; 111]	$\langle g_3 g_2 g_1 \rangle = (3)$	alle $\langle h_j \rangle = 1$	13 (9)
		[333; 113]		zwei $\langle h_j \rangle = 1$ , ein $\langle h_j \rangle = (3)$	14 (9)
		[333; 133]		ein $\langle h_j \rangle = 1$ , zwei $\langle h_j \rangle = (3)$	15 (9)
		[333; 333]		alle $\langle h_j \rangle = (3)$	16 (9)
$\sigma \sigma^\circ$	(3,3,3)	[111; 111]	$\langle g_3 g_2 g_1 \rangle = 1$ , $\langle h_3 h_2 h_1 \rangle = 1$	17	1 (3) (3,3) (3,3,3)
		[111; 333]	$\langle g_3 g_2 g_1 \rangle = 1$ , $\langle h_3 h_2 h_1 \rangle = (3)$ oder $\langle g_3 g_2 g_1 \rangle = (3)$ , $\langle h_3 h_2 h_1 \rangle = 1$	18	(9)
		[333; 333]	$\langle g_3 g_2 g_1 \rangle = \langle h_3 h_2 h_1 \rangle = (3)$	19	(9)
$\sigma \rho^\circ$	(6,3)	[222; 111]	$\langle g_3 g_2 g_1 \rangle = (2)$	$\langle h_3 h_1 \rangle = \langle h_2 \rangle = 1$	20 (6,3)
		[222; 131]		$\langle h_3 h_1 \rangle = 1$ , $\langle h_2 \rangle = (3)$	21 (6,3)
		[222; 313]		$\langle h_3 h_1 \rangle = (3)$ , $\langle h_2 \rangle = 1$	22 (6,3)
		[222; 333]		$\langle h_3 h_1 \rangle = \langle h_2 \rangle = (3)$	23 (2,2,2) (3,2,2,2) (6) (6,3)
t	(2,2,2)	[111; 111]	alle $\langle f_i \rangle = 1$	24	(2,2,2)
		[333; 333]	alle $\langle f_i \rangle = (3)$	25	(6,3)

**Tabelle 4.9:** (Fortsetzung)

$\tau$	$\langle \tau \rangle$	$v$	$W_{\tau,v}$ definierendes Bedingungsset	m	$\langle \alpha \rangle$
$t\rho$	(4,4)	[121; 121]	$\langle f_2 \rangle = (2), \langle f_3, f_1 \rangle = 1$	26	(4,4)
$t\sigma\sigma^\circ$	(6,3)	[111; 111]	$\langle f \rangle = 1$	27	(2,2,2) (3,2,2,2) (6) (6,3)

kannt. Es ergibt sich nun in allen Fällen, dass auch  $\#M_\tau^*$  mit dieser Anzahl übereinstimmt, daher folgt  $\#M_\tau = \#M_\tau^*$ .

Andererseits folgt aus  $W_\tau \subseteq W_\tau^* \Phi_\tau \subseteq \Phi_\tau^*$  und  $M_\tau \subseteq M_\tau^*$ , also  $M_\tau = M_\tau^*$ . Mit  $M_\tau^*$  ist also  $M_\tau$  und damit  $\Phi_\tau$  bestimmt.

Zu (ii):

Die Nummer  $m$  der zu  $\tau W_{\tau,v}$  gehörigen Konjugationsklasse aus Tabelle 4.5 wird bestätigt, indem gezeigt wird, dass ein Konjugiertes des in Tabelle 4.5 angegebenen Vertreters  $\varphi_m$  in  $\tau W_{\tau,v}$  liegt.

Zu (iii):

Für die Ziffernwirkungen brauchen hier keine neuen Untersuchungen durchgeführt zu werden, da sie Satz 4.14 entnommen werden können. Wo nur ein Typ von Ziffernwirkungen möglich ist, muss dieser offenbar auch auftreten. In 4 Fällen  $(\tau, v)$  ergeben sich je 4 mögliche Ziffernwirkungen. Dass diese tatsächlich auftreten, wird im nächsten Abschnitt durch Beispiele belegt.

Zur Vervollständigung des Beweises bleiben für jedes  $\tau \in \Sigma^*$  folgende Schritte durchzuführen:

- $W_\tau^*$  ist in der Form  $N_\tau'^{-1} V_\tau$  darzustellen mit einer  $[T^*, H_\tau]$ -stabilen Teilmenge  $V_\tau$  von  $T^*$ .
- $V_\tau$  ist in der Form  $\bigcup_{v \in M_{\tau^*}} C_v^{H_\tau}$  darzustellen.
- Es ist zu überprüfen, dass  $\#M_\tau^*$  mit der Anzahl der  $\tau$  zugehörigen Klassen aus Tabelle 4.5 übereinstimmt.
- Für jedes  $v \in M_\tau$  ist zu zeigen, dass ein Konjugiertes des zugeordneten  $\varphi_m$  aus Tabelle 4.5 in  $\tau W_{\tau,v}$  liegt.

Diese Schritte werden im Anhang ausgeführt.

**Bemerkung 4.3.** Zusätzlich zu den Ergebnissen von [14] sind hier zu jeder Konjugationsklasse von Semifixoperatoren eine gruppentheoretische Beschreibung und die möglichen zugehörigen Permutationstypen  $\langle \alpha \rangle$  von Ziffernwirkungen angegeben.

## 4.5 Existenz von Semifixsudokus in Ausnahmefällen

**Satz 4.16.** In Tabelle 4.9 entspricht in den meisten Fällen einer Klasse von Semifixoperatoren genau ein  $\alpha$ -Typ. In 4 Ausnahmefällen gibt es je 4  $\alpha$ -Typen:

Konjugationsklasse 12:

$$\begin{aligned}\langle \tau \rangle &= \langle \sigma \rangle, \quad \langle g_3 g_2 g_1 \rangle = 1, \text{ alle } \langle h_j \rangle = (3) : \\ \langle \alpha \rangle &= 1, (3), (3, 3) \text{ oder } (3, 3, 3)\end{aligned}$$

Konjugationsklasse 17:

$$\begin{aligned}\langle \tau \rangle &= \langle \sigma \sigma^\circ \rangle, \quad \langle g_3 g_2 g_1 \rangle = \langle h_3 h_2 h_1 \rangle = 1 : \\ \langle \alpha \rangle &= 1, (3), (3, 3) \text{ oder } (3, 3, 3)\end{aligned}$$

Konjugationsklasse 23:

$$\begin{aligned}\langle \tau \rangle &= \langle \sigma \rho^\circ \rangle, \quad \langle g_3 g_2 g_1 \rangle = 2, \langle h_3 h_1 \rangle = \langle h_2 \rangle = (3) : \\ \langle \alpha \rangle &= (2, 2, 2), (3, 2, 2, 2), (6) \text{ oder } (6, 3)\end{aligned}$$

Konjugationsklasse 27:

$$\begin{aligned}\langle \tau \rangle &= \langle t \sigma \sigma^\circ \rangle, \quad \langle f \rangle = 1 : \\ \langle \alpha \rangle &= (2, 2, 2), (3, 2, 2, 2), (6) \text{ oder } (6, 3)\end{aligned}$$

In allen diesen Fällen werden für jeden  $\alpha$ -Typ Semifixsudokus konstruiert.

### Konjugationsklasse 12

Für diese Klasse werden wesentlich weitreichendere Aussagen über die Semifixsudokus gewonnen als für die Konstruktion von Beispielen für die 4 Typen von Ziffernwirkungen notwendig ist.

Semifixoperatoren aus Klasse 12 sind nach Satz 4.15 durch folgende Bedingungen gekennzeichnet:

- Der Leitoperator ist  $\sigma$ .
- Die lokalen Zeilenpermutationen  $g_i$  erfüllen  $g_3 g_2 g_1 = 1$ . Es existiert dann ein konjugierter Fixoperator, bei dem alle  $g_i = 1$  sind, was in diesem Abschnitt vorausgesetzt wird.
- Die lokalen Spaltenpermutationen  $h^j$  erfüllen  $\text{ord}(h^j) = 3$ . Es existiert dann ein konjugierter Fixoperator, bei dem alle  $h^j = s^\circ$  sind, was in diesem Abschnitt vorausgesetzt wird.
- Die möglichen  $\alpha$ -Typen sind 1, (3), (3, 3) und (3, 3, 3).

Der Semifixoperator wird hier also als  $\varphi = \sigma * s^\circ$  angesetzt.

Die Bahnen des Leitoperators  $\sigma$  sind die Vertikalstreifen. Daher macht es Sinn, zunächst einen Vertikalstreifen VS zu untersuchen. Die Blöcke seien mit  $a, b, c$  bezeichnet, die Spaltenmengen in den Blocks mit  $a^j, b^j$  und  $c^j$ :

$$\begin{array}{cccc} a & a^1 & a^2 & a^3 \\ VS = b & = b^1 & b^2 & b^3 \\ c & c^1 & c^2 & c^3 \end{array}$$

Anwendung des auf VS eingeschränkten Semifixoperators  $\varphi$  ergibt:

$$\begin{array}{ccc} c^3 & c^1 & c^2 \\ \varphi VS = a^3 & a^1 & a^2 \\ b^3 & b^1 & b^2 \end{array}$$

Aufgrund der Fixgleichung  $\varphi VS = \alpha VS$  folgt für die Spaltenmengen

$$c^{j-1} = \alpha a^j, \quad a^{j-1} = \alpha b^j, \quad b^{j-1} = \alpha c^j \quad \text{für alle } j. \quad (4.35)$$

Da  $\varphi$  die relative Lage der Zeilen in den Horizontalstreifen nicht verändert, folgt für die Zeilenmengen

$$c_i = \alpha a_i, \quad a_i = \alpha b_i, \quad b_i = \alpha c_i \quad \text{für alle } i. \quad (4.36)$$

Die Charakteristik ist  $\chi(VS) = \#(a^1 \cap b^2) = \#(a^1 \cap \alpha^{-1} a^1)$  nach (4.35), also auch

$$\chi(VS) = \#(a^1 \cap \alpha a^1). \quad (4.37)$$

Aufgrund der Sudokubedingung ist  $a^2 \cap b^2 = \emptyset$ ,  $a^3 \cap c^3 = \emptyset$ , nach (4.35) folgt  $a^2 \cap \alpha^{-1} a^1 = \emptyset$ ,  $a^3 \cap \alpha a^1 = \emptyset$  und somit

$$a^2 \subseteq \Omega \setminus (a^1 \cup \alpha^{-1} a^1), \quad a^3 \subseteq \Omega \setminus (a^1 \cup \alpha a^1) \quad (4.38)$$

Ist insbesondere die Charakteristik 0, so sind  $a^1, \alpha a^1$  und  $\alpha^{-1} a^1$  paarweise disjunkt. Dann folgt  $a^2 = \alpha a^1$  und  $a^3 = \alpha^{-1} a^1$ .

Aus (4.37) folgt: Die Charakteristik kann angegeben werden, wenn die Verteilung der Ziffern aus  $a^1$  auf die verschiedenen 3-Zykel und Fixziffern von  $\alpha$  bekannt ist. Dabei ist nicht jede Verteilung möglich:

**Lemma 4.10.** *Kein  $a^j$  enthält genau 2 Ziffern eines 3-Zyklus von  $\alpha$ .*

*Beweis.* Sei o. E.  $j = 1$ . Angenommen,  $a^1$  enthielte genau 2 Ziffern  $x, y$  eines 3-Zyklus  $(xyz)$  von  $\alpha$ . Dann gehören  $y = \alpha x$  und  $z = \alpha y$  zu  $\alpha a^1 = c^3$  und  $z = \alpha^{-1} x$  und  $x = \alpha^{-1} y$  zu  $\alpha^{-1} a^1 = b^2$ . Wo könnte  $z$  im Block  $a$  stehen? Nicht in der ersten Spalte, da  $z$  nicht zu  $a^1$  gehört; nach der Sudoku-Bedingung auch nicht in der zweiten oder dritten Spalte, da  $z$  bereits zu  $b^2$  und  $c^3$  gehört. Damit liegt ein Widerspruch vor.  $\square$

**Satz 4.17.** Für Semifixsudokus zur Konjugationsklasse 12 sind pro Vertikalstreifen VS höchstens die in der folgenden Tabelle angegebenen Kombinationsmöglichkeiten der Streifencharakteristik  $\chi(VS)$  und des  $\alpha$ -Typus möglich:

**Tabelle 4.10:** Kombinationsmöglichkeiten von  $\alpha$ -Typen und Charakteristiken.

$\langle \alpha \rangle$	1	(3)	(3,3)	(3,3,3)
$\chi(VS)$		Der 3-Zyklus besteht aus ...	Beide 3-Zyklen bestehen aus ...	Alle 3-Zyklen bestehen aus ...
0	—	—	—	... je einer Ziffer aus jedem $a^j$ .
1	—	—	... je einer Ziffer aus jedem $a^j$ .	—
2	—	... je einer Ziffer aus jedem $a^j$ .	—	—
3	Alle $a^j$ bestehen aus $\alpha$ -Fixziffern	... allen Ziffern eines $a^j$ .	... allen Ziffern je eines $a^j$ .	... allen Ziffern je eines $a^j$ .

Der Zusammenhang zwischen den Ziffernmengen der Zykel von  $\alpha$  mit den Spaltenmengen von  $a$  ist jeweils wie in der Tabelle angegeben.

*Beweis.* Nach Lemma 4.10 gehören für jede Spalte  $a^j$  ihre 3 Ziffern entweder zum selben 3-Zyklus von  $\alpha$  oder aber sie gehören alle zu verschiedenen 3- oder 1-Zyklen von  $\alpha$ . Für die Charakteristik und die möglichen  $\alpha$ -Typen ergibt sich jeweils:

**Tabelle 4.11:** Mögliche Verteilungen der Ziffern von  $a^j$  auf die 3-Zyklen und Fixziffern von  $\alpha$ .

Fall	$\chi(VS)$	mögliche $\alpha$ -Typen
Alle Ziffern von $a^j$ gehören zum selben 3-Zyklus von $\alpha$ .	3	(3), (3,3), (3,3,3)
Alle Ziffern von $a^j$ sind $\alpha$ -Fixziffern.	3	1, (3), (3,3)
Eine Ziffer von $a^j$ gehört zu einem 3-Zyklus von $\alpha$ , die beiden anderen sind $\alpha$ -Fixziffern.	2	(3), (3,3)
Zwei Ziffern von $a^j$ gehören zu verschiedenen 3-Zyklen von $\alpha$ , die dritte ist $\alpha$ -Fixziffer.	1	(3,3)
Alle Ziffern von $a^j$ gehören zu verschiedenen 3-Zyklen von $\alpha$ .	0	(3,3,3)

Die Fälle von  $\alpha^1$ ,  $\alpha^2$  und  $\alpha^3$  müssen sich so ergänzen, dass die Anzahl der Ziffern, die in  $\alpha$  zu 3-Zyklen gehören bzw. Fixziffern sind, richtig herauskommt.

- Hat  $\alpha$  den Typ 1, so ist nach Tabelle 4.11  $\chi(VS) = 3$ , alle  $a^j$  bestehen aus  $\alpha$ -Fixziffern.
- Hat  $\alpha$  den Typ (3), so ist nach Tabelle 4.11  $\chi(VS) = 2$  oder 3.
  - Im Unterfall  $\chi(VS) = 2$  enthält jedes  $a^j$  genau eine Ziffer des 3-Zyklus von  $\alpha$  und zwei  $\alpha$ -Fixziffern. Umgekehrt besteht der 3-Zyklus von  $\alpha$  also aus genau einer Ziffer jedes  $a^j$ .

- Im Unterfall  $\chi(\text{VS}) = 3$  besteht jedes  $a^j$  entweder nur aus  $\alpha$ -Fixziffern oder nur aus den Ziffern eines 3-Zyklus von  $\alpha$ . Somit muss die Ziffernmenge des 3-Zyklus von  $\alpha$  genau einer Spaltenmenge  $a^j$  entsprechen, die beiden anderen Spalten bestehen nur aus  $\alpha$ -Fixziffern.
- Hat  $\alpha$  den Typ  $(3, 3)$ , so ist nach Tabelle 4.11  $\chi(\text{VS}) = 1, 2$  oder  $3$ .
  - Im Unterfall  $\chi(\text{VS}) = 1$  enthält jedes  $a^j$  genau eine Ziffer jedes 3-Zyklus von  $\alpha$  und eine  $\alpha$ -Fixziffer. Umgekehrt bestehen also beide 3-Zyklen von  $\alpha$  aus genau einer Ziffer jedes  $a^j$ .
  - Im Unterfall  $\chi(\text{VS}) = 2$  enthält jedes  $a^j$  genau eine Ziffer eines 3-Zyklus von  $\alpha$  und zwei  $\alpha$ -Fixziffern. Dann gäbe es also 6  $\alpha$ -Fixziffern, was nicht zutrifft. Dieser Unterfall ist nicht möglich.
  - Im Unterfall  $\chi(\text{VS}) = 3$  besteht jedes  $a^j$  entweder nur aus  $\alpha$ -Fixziffern oder nur aus den Ziffern eines 3-Zyklus von  $\alpha$ . Somit muss die Ziffernmenge jedes 3-Zyklus von  $\alpha$  genau einer Spaltenmenge  $a^j$  entsprechen, die verbleibende Spalte besteht nur aus  $\alpha$ -Fixziffern.
- Hat  $\alpha$  den Typ  $(3, 3, 3)$ , so ist nach Tabelle 4.11  $\chi(\text{VS}) = 0$  oder  $3$ .
  - Im Unterfall  $\chi(\text{VS}) = 0$  enthält jedes  $a^j$  genau eine Ziffer jedes 3-Zyklus von  $\alpha$ . Umgekehrt bestehen also alle 3-Zyklen von  $\alpha$  aus genau einer Ziffer jedes  $a^j$ .
  - Im Unterfall  $\chi(\text{VS}) = 3$  besteht jedes  $a^j$  entweder nur aus  $\alpha$ -Fixziffern oder nur aus den Ziffern eines 3-Zyklus von  $\alpha$ . Somit muss die Ziffernmenge jedes 3-Zyklus von  $\alpha$  genau einer Spaltenmenge  $a^j$  entsprechen.

Somit sind für alle Kombinationsmöglichkeiten des Typs von  $\alpha$  und der Charakteristik  $\chi(\text{VS})$  die Einträge von Tabelle 4.11 bestätigt.  $\square$

Die Ergebnisse der Untersuchung eines Vertikalstreifens sollen nun für ein Komplettsudoku  $A$  zum Semifixoperator  $\varphi = \sigma^* s^\circ$  nutzbar gemacht werden. Dabei ist zu beachten, dass für jeden Vertikalstreifen der gleiche  $\alpha$ -Typus gilt, während für  $\alpha \neq 1$  die Charakteristiken der Vertikalstreifen zwischen den beiden nach Tabelle 4.10 möglichen Werten wechseln können.

Sei  $A$  zunächst nur als Blockmatrix vorausgesetzt:

$$A = \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array}$$

Anwendung des Semifixoperators ergibt:

$$\varphi A = \begin{array}{ccc} s^{\circ}g & s^{\circ}h & s^{\circ}i \\ s^{\circ}a & s^{\circ}b & s^{\circ}c \\ s^{\circ}d & s^{\circ}e & s^{\circ}f \end{array}$$

Die Fixgleichung  $\varphi A = \alpha A$  hat also zur Folge

$$\begin{aligned} d &= \alpha^{-1}s^{\circ}a, & e &= \alpha^{-1}s^{\circ}b, & f &= \alpha^{-1}s^{\circ}c, \\ g &= \alpha s^{\circ-1}a, & h &= \alpha s^{\circ-1}b, & i &= \alpha s^{\circ-1}c. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Der zweite und dritte Horizontalstreifen sind also durch den ersten bereits bestimmt. Auch sieht man, dass es zum Nachweis der Sudokueigenschaft von  $A$  ausreicht, die Praesudoku-Eigenschaft für den ersten Horizontalstreifen zu zeigen.

Nun wird die Existenz von  $\varphi$ -Semifixsudokus zu jedem  $\alpha$ -Typus 1, (3), (3, 3), (3, 3, 3) durch die Angabe des ersten Horizontalstreifens nachgewiesen. Wählt man als Vertreter der  $\alpha$ -Typen  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = (123)$ ,  $\alpha_2 = (123)(456)$  und  $\alpha_3 = (123)(456)(789)$ , so genügt die Angabe nur eines Horizontalstreifens für alle 4  $\alpha$ -Typen:

$$\text{HS} = \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 3 & 6 & 9 & 2 & 5 & 8 \\ 2 & 5 & 8 & 1 & 4 & 7 & 3 & 6 & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 2 & 5 & 8 & 1 & 4 & 7 \end{array}$$

Zunächst erfüllt dieser offenbar die Praesudoku-Eigenschaft. Sodann ist offenbar in jedem Block der Ziffernbestand der  $j$ -ten Spalte gleich dem Ziffernbestand des  $j$ -ten 3-Zyklus von  $\alpha_l$  für  $j \in \{1, \dots, l\}$ . Somit ist die Bedingung aus Tabelle 4.11 für den Fall  $\chi(\text{VS}) = 3$  erfüllt. HS kann vermöge der Gleichungen (4.39) eindeutig zu einem  $\varphi$ -Semifixsudoku bzgl. Ziffernwirkung  $\alpha$  fortgesetzt werden, dessen Vertikalstreifen alle die Charakteristik 3 haben.

Geht man alternativ von dem Horizontalstreifen

$$\text{HS} = \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

aus, so hat offenbar jede Spalte von HS mit jedem 3-Zyklus von  $\alpha_l$  genau eine Ziffer gemein. Somit ist die Bedingung aus Tabelle 4.11 für den Fall  $\chi(\text{VS}) = 3 - l$  erfüllt. HS kann vermöge der Gleichungen (4.39) eindeutig zu einem  $\varphi$ -Semifixsudoku bzgl. Ziffernwirkung  $\alpha$  fortgesetzt werden, dessen Vertikalstreifen alle die Charakteristik  $3 - l$  haben.

**Bemerkung 4.4.** Für die 4  $\alpha$ -Typen entstehen in der Tat jeweils verschiedene Semifixsudokus, da  $\alpha$  in die Gleichungen (4.39) eingeht.

### Konjugationsklasse 23

Semifixoperatoren aus Klasse 23 sind nach Satz 4.15 durch folgende Bedingungen gekennzeichnet:

- Der Leitoperator ist  $\sigma\rho^\circ$ .
- Die lokalen Zeilenpermutationen  $g_i$  erfüllen  $\text{ord}(g_3g_2g_1) = 2$ . Es existiert dann ein konjugierter Semifixoperator, bei dem alle  $g_i = r$  sind, was in diesem Abschnitt vorausgesetzt wird.
- Die lokalen Spaltenpermutationen  $h^j$  erfüllen  $\text{ord}(h^3h^1) = 3$  und  $\text{ord}(h^2) = 3$ . Es existiert dann ein konjugierter Semifixoperator, bei dem alle  $h^j = s^\circ$  sind, was in diesem Abschnitt vorausgesetzt wird.
- Die möglichen  $\alpha$ -Typen sind  $(2, 2, 2)$ ,  $(3, 2, 2, 2)$ ,  $(6)$ , und  $(6, 3)$ .

Der Semifixoperator wird hier also als  $\varphi = \sigma\rho^\circ *r *s^\circ$  angesetzt.

Es ist  $\varphi^{-2} = \sigma*s^\circ$ , daher sind Semifixsudoku zu  $\varphi$  (bzgl. Ziffernwirkung  $\alpha$ ) auch Semifixsudoku zu  $\sigma*s^\circ$  (bzgl. Ziffernwirkung  $\alpha^{-2}$ ). Letztere wurden oben untersucht.

Wie können unter den Semifixsudoku zu  $\sigma*s^\circ$  die zu  $\varphi$  erkannt werden? Hierzu ist die Beziehung  $\varphi^3 = \rho^\circ *r$  hilfreich, die pro Horizontalstreifen ausgewertet werden kann.

Es ist also ein Praesudoku-Horizontalstreifen zu finden, der

- die Bedingung aus Tabelle 4.11 bzgl. Ziffernwirkung  $\alpha^{-2}$  erfüllt und
- $\rho^\circ r$  als Semifixoperator bzgl. Ziffernwirkung  $\alpha^3$  hat.

Die Fortsetzung des Streifens zu einem Sudoku  $A$  gemäß der Gleichungen (4.39) mit Ziffernwirkung  $\alpha^{-2}$  ist dann ein Semifixsudoku zu  $\varphi^{-2} = \sigma*s^\circ$  bzgl. Ziffernwirkung  $\alpha^{-2}$ .

Gleichzeitig setzt sich die Fixgleichung des Horizontalstreifens offenbar auf das komplette Sudoku fort. Somit ist  $A$  auch Semifixsudoku zu  $\varphi^3 = \rho^\circ *r$  bzgl. Ziffernwirkung  $\alpha^3$ .

Zusammen folgt:  $\varphi A = \varphi^3 \varphi^{-2} A = \varphi^3 \alpha^{-2} A = \alpha^{-2} \varphi^3 A = \alpha^{-2} \alpha^3 A = \alpha A$ .  $A$  ist also Semifixsudoku zu  $\varphi$  bzgl. Ziffernwirkung  $\alpha$ .

Es seien nun folgende Vertreter  $\alpha_l$  der  $\alpha$ -Typen  $(2, 2, 2)$ ,  $(3, 2, 2, 2)$ ,  $(6)$  und  $(6, 3)$  ausgewählt:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= (47)(58)(69), & \alpha_1 &= (123)(47)(58)(69), \\ \alpha_2 &= (486759), & \alpha_3 &= (123)(486759).\end{aligned}$$

Es ist dann

$$\alpha_0^{-2} = 1, \quad \alpha_1^{-2} = (123), \quad \alpha_2^{-2} = (456)(789), \quad \alpha_3^{-2} = (123)(456)(789)$$

und

$$\alpha_0^3 = \alpha_1^3 = \alpha_2^3 = \alpha_3^3 = (47)(58)(69).$$

Der Horizontalstreifen

$$\text{HS} = \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

erfüllt die Fixgleichung  $\rho^\circ r \text{HS} = \alpha_l^3 \text{HS}$ , also obige Bedingung (ii) für alle  $l$ .

Für  $\alpha_l^{-2}$  treten genau die Typen 1, (3), (3, 3), (3, 3, 3) der oben untersuchten  $\sigma^*s^\circ$ -Semifixsudokus auf. Der Ziffernbestand jedes 3-Zykels von  $\alpha_l^{-2}$  findet sich als Spaltenmenge in jedem Block von HS wieder. Somit erfüllt HS die obige Bedingung (i) bzgl.  $\alpha_l^{-2}$ , d. h. HS kann vermöge der Gleichungen (4.39) zu einem Semifixsudoku  $A$  zu  $\varphi^{-2} = \sigma^*s^\circ$  bzgl. Ziffernwirkung  $\alpha_l^{-2}$  fortgesetzt werden.  $A$  ist dann auch Semifixsudoku zu  $\varphi^3 = \rho^\circ *r$  bzgl. Ziffernwirkung  $\alpha_l^3$ , nach obiger Überlegung also Semifixsudoku zu  $\varphi$  bzgl. Ziffernwirkung  $\alpha_l$ .

## Konjugationsklasse 27

Semifixoperatoren aus Klasse 27 sind nach Satz 4.15 durch folgende Bedingungen gekennzeichnet:

- Der Leitoperator ist  $t\sigma\sigma^\circ$ .
- Die lokalen Reihenpermutationen  $g_i$  und  $h^j$  erfüllen  $g_3h^2g_1h^3g_2h^1 = 1$ . Es existiert dann ein konjugierter Fixoperator, bei dem alle  $g_i$  und  $h^j = 1$  sind, was in diesem Abschnitt vorausgesetzt wird.
- Die möglichen  $\alpha$ -Typen sind (2, 2, 2), (3, 2, 2, 2), (6) und (6, 3).

Der Semifixoperator wird hier also als  $\varphi = t\sigma\sigma^\circ$  angesetzt.

Zu jedem  $\alpha$ -Typus wird nun ein  $\varphi$ -Semifixsudoku konstruiert.

Gegeben seien die folgenden Praesudokus:

$$\begin{array}{c|cc|cc}
 1 & 9 & 5 & 9 & \\
 \hline
 5 & & 1 & 9 & \\
 9 & & & 5 & 1 \\
 \hline
 A = 9 & 1 & & 9 & 5 \\
 & 5 & & & 1 \\
 5 & 1 & & 9 & \\
 \hline
 9 & 5 & & 1 & \\
 1 & 9 & & 5 & \\
 5 & 1 & & 9 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c|cc|cc}
 1 & 5 & & 5 & 9 \\
 \hline
 & 9 & & 1 & 9 \\
 & & 9 & 1 & \\
 \hline
 A' = 5 & & & 5 & \\
 & 9 & 1 & & 9 \\
 & & & 5 & \\
 \hline
 9 & 1 & & 5 & \\
 5 & 1 & & 9 & \\
 5 & 9 & & & 1 \\
 \hline
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{c|cc|cc}
 2 & 3 & 8 & 6 & 4 & 7 \\
 \hline
 4 & 6 & 2 & 7 & 3 & 8 \\
 7 & 8 & 3 & 6 & 4 & 2 \\
 \hline
 6 & 4 & 7 & 2 & 3 & 8 \\
 B = 3 & 8 & 4 & 6 & 2 & 7 \\
 & 2 & 7 & 8 & 3 & 6 & 4 \\
 \hline
 8 & 6 & 4 & 7 & 2 & 3 \\
 2 & 7 & & 3 & 8 & 4 & 6 \\
 3 & 6 & 4 & & 2 & 7 & 8 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c|cc|cc}
 2 & 3 & 6 & 4 & 8 \\
 \hline
 4 & 6 & 7 & 8 & 2 \\
 7 & 8 & 4 & 2 & 3 \\
 \hline
 8 & 3 & 2 & 6 & 4 \\
 B' = 6 & 4 & 8 & 7 & 2 \\
 & 7 & 2 & 3 & 8 & 6 & 4 \\
 \hline
 2 & & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 \\
 6 & 4 & & 7 & 8 & 3 & 2 \\
 3 & 7 & 8 & & 2 & 6 & 4 \\
 \hline
 \end{array}$$

$A$  und  $A'$  enthalten nur die Ziffern 1, 5, 9,  $B$  und  $B'$  nur die übrigen Ziffern. In  $A$  und  $A'$  sind die gleichen Positionen besetzt, und diese sind genau komplementär zu den besetzten Positionen in  $B$  und  $B'$ . Somit sind  $A \cup B$ ,  $A' \cup B$ ,  $A \cup B'$  und  $A' \cup B'$  Sudokus (wobei  $A \cup B$  die Blockmatrix bezeichnet, deren Eintrag an der Stelle  $(i, j)$   $A_{ij}$  bzw.  $B_{ij}$  ist je nachdem, welche der beiden Positionen besetzt ist).

Unter Wirkung von  $t\sigma\sigma^\circ$  verhalten sie sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 t\sigma\sigma^\circ A &= A, & t\sigma\sigma^\circ A' &= (159)A', \\
 t\sigma\sigma^\circ B &= (24)(37)(68)B, & t\sigma\sigma^\circ B' &= (236478)B'.
 \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
 t\sigma\sigma^\circ(A \cup B) &= \alpha(A \cup B) \quad \text{mit } \alpha = (24)(37)(68) \text{ vom Typ } (2, 2, 2); \\
 t\sigma\sigma^\circ(A' \cup B) &= \alpha(A' \cup B) \quad \text{mit } \alpha = (159)(24)(37)(68) \text{ vom Typ } (3, 2, 2, 2); \\
 t\sigma\sigma^\circ(A \cup B') &= \alpha(A \cup B') \quad \text{mit } \alpha = (236478) \text{ vom Typ } (6); \\
 t\sigma\sigma^\circ(A' \cup B') &= \alpha(A' \cup B') \quad \text{mit } \alpha = (236478)(159) \text{ vom Typ } (6, 3).
 \end{aligned}$$

Somit ist zu jedem Typ ein Beispiel eines Semifixsudokus konstruiert.

## Konjugationsklasse 17

Semifixoperatoren der Klasse 17 sind nach Satz 4.15 durch folgende Bedingungen gekennzeichnet:

- Der Leitoperator ist  $\sigma\sigma^\circ$ .
- Die lokalen Reihenpermutationen  $g_i$  und  $h^j$  erfüllen  $g_3g_2g_1 = 1$  und  $h^3h^2h^1 = 1$ . Es existiert dann ein konjugierter Fixoperator, bei dem alle  $g_i$  und  $h^j = 1$  sind, was in diesem Abschnitt vorausgesetzt wird.
- Die möglichen  $\alpha$ -Typen sind 1, (3), (3, 3) und (3, 3, 3).

Der Semifixoperator wird hier also als  $\varphi = \sigma\sigma^\circ$  angesetzt.

Wegen  $(t\sigma\sigma^\circ)^{-2} = \sigma\sigma^\circ$  sind die zu  $t\sigma\sigma^\circ$  oben angegebenen Semifixsudoku auch Beispiele für  $\sigma\sigma^\circ$ -Semifixsudokus. Die Ziffernwirkung muss dann ebenfalls mit  $-2$  potenziert werden. Es ist

- $((24)(37)(68))^{-2} = 1$  vom Typ 1,
- $((159)(24)(37)(68))^{-2} = (159)$  vom Typ (3),
- $(236478)^{-2} = (762)(843)$  vom Typ (3, 3) und
- $((236478)(159))^{-2} = (762)(843)(159)$  vom Typ (3, 3, 3),

so dass jeder in Frage kommende Typ von Ziffernwirkungen durch ein Beispiel eines Semifixsudokus abgedeckt ist.

Damit ist für jeden in Satz 4.16 aufgeführten Ausnahmefall ein Semifixsudoku konstruiert.  $\square$



---

## **Teil II: Dominographen und Sudoku-Clans**



## 5 Dominographen und Sudokus

In diesem Paragraphen wird ein Begriff eingeführt, der weitere Erkenntnisse über Sudokus ermöglicht: der *Dominograph*. Dieser Graphtypus ist mit einem weiteren Merkmal versehen, der Singularität. Es entsteht eine Art „metrischer Graph“, was naturgemäß auch den Isomorphiebegriff einschränkt.

Es zeigt sich, dass einem Sudoku ein Paket von 18 Dominographen, der Stamm, zugeordnet werden kann, das gewissermaßen seine innere Struktur widerspiegelt. Diese Art Graphen bestimmen auch die Singularitäten eines Sudokus, deren Lage und Anzahl, und damit seinen Kompliziertheitsgrad.

Durch einen simultanen Schaltprozess kommt es zur Clanbildung von Sudokus. Dieser Prozess ist eine gänzlich neue Methode, aus gegebenen Sudokus neue, gewissermaßen benachbarte Sudokus herzustellen. Sie ist disjunkt zur Methode der Konjugation durch Anwendung von  $G$ -Operatoren oder  $G^*$ -Operatoren.

Die Theorie ist konstruktiv, so gibt es eine universelle Formel, die die Anzahl der Sudokus eines beliebigen Sudokuclans zu bestimmen gestattet. Dies erfordert eine genauere Kenntnis der Dominographen, die einem Sudoku zugeordnet sind. Das Rüstzeug dazu wird in Kapitel 6 bereitgestellt.

Die Clans haben auch gewisse numerische Auswirkungen auf das Problem der Parametrisierung.

### 5.1 Dominographen und Singularitäten

#### Kurze Vorbereitungen über Graphen-Notationen

Ein endlicher *Graph*  $G = (E, K)$  besteht aus einer endlichen Eckenmenge  $E$  und einer Kantenmenge  $K$  (= binäre Relation auf  $E$ ). Eine Kante verbindet 2 Ecken  $v$  und  $u$ , Notation  $uv = vu$  für die Kante;  $u$  und  $v$  heißen dann *benachbart*. Die *Ordnung* von  $G$  ist die Anzahl von  $E$ . Der *Grad*  $d(u)$  einer Ecke  $u$  ist die Anzahl der Kanten, die von ihr ausgehen. Es besteht die Bilanz

$$\sum_u d(u) = 2\#K, \quad u \text{ durchläuft } E. \quad (5.1)$$

Zwei Ecken  $u$  und  $v$  heißen *verbindbar*, wenn es einen Weg = Kantenzug gibt mit  $u, v$  als Enden. (Jede Ecke ist mit sich selbst verbindbar.) Diese binäre Relation ist eine Äquivalenzrelation auf der Eckenmenge, die daher in disjunkte Äquivalenzklassen zerlegt:

$$E = E_1 \cup \dots \cup E_r;$$

auch die Kantenmenge zerlegt sich in gleicher Weise

$$K = K_1 \cup \dots \cup K_r.$$

Daher schreibt man den Graphen auch als orthogonale Summe

$$G = G_1 \perp \dots \perp G_r.$$

Jedes der  $G_i$  ist *maximal zusammenhängend*, d. h. alle Ecken aus  $E_i$  sind miteinander verbindbar und  $E_i$  enthält alle Ecken aus  $E$ , die mit  $E_i$  verbindbar sind.

Die  $G_i$  sind die *Zusammenhangskomponenten*, kurz *Komponenten* von  $G$ . Eine Ecke  $u$  heißt *isoliert*, wenn  $d(u) = 0$  ist. Isolierte Ecken sind die trivialen Komponenten. Soweit die allgemeinen Begriffe.

Ein Dominograph entsteht aus den Daten eines Sudokus. Um Redundanzen zu vermeiden, wird ein axiomatischer Begriff eines *Dominographen – D-Graphen* – vorgestellt. Dessen Axiome sind von konkreten Graphen inspiriert, die durch sog. Dominebelegungen bestimmt sind.

### Definition eines *D-Graphen D*

Die Eckenmenge  $E$  zerlegt sich in zwei 9er-Teilmengen  $E_0$  und  $E_1$ , die auf einem  $3 \times 6$ -Gitter angeordnet sind:

$$\begin{array}{c} E_0 \\ \hline E_1 \end{array} = E_0 \cup E_1 \quad (5.2)$$

Die Kanten verlaufen nur horizontal und vertikal gemäß der folgenden *Axiome*.

(a) Horizontale Kanten verlaufen nur in 2 Arten:



In (α) sind jeweils 2 Ecken verbunden, die 3-te als ausgefülltes Quadrat dargestellte Ecke heiße *singulär*.

In (β) sind alle 3 Ecken durch Kanten verbunden. Alle Ecken, die Kanten haben, sind *regulär*. Zeilen vom Typ (α) heißen *singulär*, Zeilen vom Typ (β) *regulär*.

(b) Vertikale Kanten verlaufen nur zwischen  $E_0$  und  $E_1$  mit folgenden *Bedingungen*

- Eine singuläre Ecke hat höchstens eine vertikale Kante.
- Eine reguläre Ecke hat 1 oder 2 vertikale Kanten.
- 2 singuläre Ecken in einer Teilmenge  $E_i$  stehen in verschiedenen Vertikalen (Spalten).
- 2 singuläre Ecken aus verschiedenen Eckenmengen  $E_0, E_1$  sind nicht benachbart.
- Isolierte Ecken (vom Grad 0) treten paarweise auf und liegen in verschiedenen Eckenmengen  $E_0$  und  $E_1$ .

### Folgerung

- Singuläre Ecken haben Grad 0 oder 1,
- reguläre Ecken haben Grad 3 oder 4.

Die Definition eines abstrakten Dominographen ist zunächst nicht durchschau-  
bar, selbst der Name bleibt unmotiviert. Zudem fällt auf, dass ein zusätzliches Merk-  
mal auftritt, die Begriffe singulär – regulär, die es sonst bei Graphen nicht gibt.

Es stellt sich also die Aufgabe, den Begriff des Dominographen zu motivieren.  
Das geschieht in einem Prozess, bei dem ein Sudoku mit Dominos „belegt“ wird.

Ein *Domino* ist ein Paar  $rt = tr$  von Ziffern aus  $\{1, \dots, 9\}$ , das konstante Domino  
 $rr$  wird auch als  $r$  geschrieben. Bekanntlich kann man 2 Dominos „anlegen“, wenn  
sie eine Ziffer gemein haben. Hier ahnt man den Zusammenhang: Sind 2 Dominos  
verträglich, entsteht eine Kante.

### Dominobelegungen

Ein Sudoku  $A$  wird eingeschränkt auf das Mittelblockkreuz

$$\text{MK}(c) = \begin{array}{ccccc} & & A_{12} & & \\ A_{21} & c & A_{23} & & \text{mit dem Mittelblock } c = A_{22} . \\ & A_{32} & & & \end{array}$$

Dabei interessieren auf dem 2-ten Vertikalstreifen nur jeweils die 6 Zeilenmengen von  
 $A_{12}$  und  $A_{32}$ , und auf dem 2-ten Horizontalstreifen nur die 6 Spaltenmengen von  $A_{21}$   
und  $A_{23}$ , wie in (5.3) angedeutet.

Schematisch

$$\begin{array}{c} \equiv \\ ||| \quad c \quad ||| \\ \equiv \end{array} \tag{5.3}$$

Ziel ist nun, die Figur  $\text{MK}(c)$ , genauer deren Eckenmengen

$$V = \begin{array}{c} E_0 \\ E_1 \end{array} \quad \text{und} \quad H = \begin{array}{c} E_0 \quad E_1 \end{array}$$

bei festem  $c$  in geeigneter Weise mit Dominos zu belegen. Und zwar wird der Mittel-  
block  $c$  als *Regulativ* für die Zeilen bzw. Spalten von  $\text{MK}(c)$  benutzt derart, dass die  
Zeilenmengen von  $A^2 = \begin{array}{c} A_{12} \\ A_{32} \end{array}$  mit den Spaltenmengen von  $c$  bzw. die Spaltenmengen  
von  $A_2 = A_{21}A_{23}$  mit den Zeilenmengen von  $c$  verglichen werden.

Es wird also die Information durch die Sudokubelegung von  $\text{MK}(c)$  erheblich ver-  
gröbert, indem statt der Reihen nur die Reihenmengen in Betracht gezogen werden.

Der Prozess läuft wie folgt ab:

**Domino-Prozess**

Seien

$$\begin{aligned} a_i, b_i &\text{ die } i\text{-ten Zeilenmengen von } A^2 \\ d^j, g^j &\text{ die } j\text{-ten Spaltenmengen von } A_2. \end{aligned}$$

Die 3er-Mengen werden notiert

für  $A^2$ :

$$\begin{array}{ccc} a_1 & & b_1 \\ a = a_2 & \text{oben,} & b = b_2 \text{ unten,} \\ a_3 & & b_3 \end{array}$$

für  $A_2$ :

$$d = d^1 d^2 d^3 \text{ links, } g = g^1 g^2 g^3 \text{ rechts.}$$

Es entsteht das Mengensystem auf der Figur des Mittelblocks (5.3)

$$\begin{array}{ccccc} & & a & & \\ d & c & g & \text{mit Regulativ } c. \\ & & b & & \end{array}$$

Ferner bezeichnet  $c_i$  die  $i$ -te Zeilenmenge und  $c^j$  die  $j$ -te Spaltenmenge von  $c$ .

Da von einem Sudoku  $A$  ausgegangen wurde, bestehen folgende beiden Eigenschaften

- Keine Zeilenmenge  $a_i$  oder  $b_i$  ist gleich einer Spaltenmenge  $c^j$  von  $c$ . (†)
- Keine Spaltenmenge  $d^j$  oder  $g^j$  ist gleich einer Zeilenmenge  $c_i$  von  $c$ . (†)

Denn wäre dies der Fall, etwa  $a_i = c^j$ , so stünde in  $A$   $a_{ij}$  über  $c^j$ , was der Sudokueigenschaft widerspricht.

Bei einer Situation der folgenden Art

$$\#(a_i \cap c^j) = 2 \quad \text{und} \quad \#(b_k \cap c^j) = 2 \quad \text{mit gleichem } j \quad (\dagger\dagger)$$

also

$$a_i = \{s, a_i \cap c^j\} \quad \text{und} \quad b_k = \{s', b_k \cap c^j\} \quad (5.4)$$

ist  $s \neq s'$ .

Denn  $s$  und  $s'$  müssen beide in der Spalte  $j$  stehen, können also nicht gleich sein.

Für eine Zeilenmenge  $a_i$  bzw.  $b_i$  besteht die folgende Alternative:

*Singulärer Fall*

Es existiert ein (dann eindeutiger) Index  $j$  mit

$$\#(a_i \cap c^j) = 2 \quad \text{bzw.} \quad \#(b_i \cap c^j) = 2, \quad (S)$$

oder

### Regulärer Fall

Für alle  $j$  ist

$$\#(a_i \cap c^j) = 1 \quad \text{bzw.} \quad \#(b_i \cap c^j) = 1. \quad (\text{R})$$

$a_i$  heißt *singuläre* Zeile im Fall (S), sonst *reguläre* Zeile; analog für  $b_i$ .

Im Fall (S) hat  $a_i$  die Form

$$a_i = \{s, t, t'\} \quad \text{mit } t, t' \in c^j, s \text{ nicht aus } c^j.$$

Somit steht  $s$  in der  $j$ -ten Spalte über  $c^j$ , während  $t, t'$  in keiner der beiden anderen Spalten von  $c$  liegen, also über diesen beiden stehen können. Das führt zur Dominobelegung der singulären Zeilen  $a_i$  (und  $b_i$ ), etwa für  $j = 2$ :

$$\frac{tt'}{c^1} \quad \frac{s}{c^2} \quad \frac{tt'}{c^3} \quad (\text{S1})$$

Entsprechendes gilt für eine singuläre Zeile  $b_i$  zum  $c$ -Index  $j'$ , was mit

$$b_i = \{s', q, q'\} \quad \text{mit } q, q' \in c^{j'}, s' \text{ nicht aus } c^{j'}$$

zur Dominobelegung führt, etwa für  $j' = 1$ :

$$\frac{c^1}{s'} \quad \frac{c^2}{qq'} \quad \frac{c^3}{qq'} \quad (\text{S2})$$

Die Ziffern  $s, s'$  heißen *singulär*, sie bezeichnen die Stellen wo die Singularität „passt“.

Im Fall (R) regulärer Zeilen

$$a_i = \{r, t, t'\} \quad \text{bzw.} \quad b_k = \{p, q, q'\}$$

liegt jede der Ziffern in genau einer Spaltenmenge von  $c$ , kann also über jeder der anderen beiden Spalten stehen. Die eindeutige Dominobelegung dieser Zeilen ist daher vom Typ

$$\frac{rt}{c^1} \quad \frac{rt'}{c^2} \quad \frac{tt'}{c^3} \quad \frac{}{pq} \quad \frac{}{pq'} \quad \frac{}{qq'} \quad (\text{R})$$

Dieser Anordnung kann man entnehmen, in welcher  $c$ -Spalte eine der Ziffern liegt, etwa

$$r \in c^3, \quad q' \in c^1, \quad q \in c^2 \quad \text{etc.}$$

Dieser Prozess führt zu einer Dominobelegung gemäß (S1), (S2), (R) auf dem Rasterschema

$$V = \begin{array}{|c|} \hline E_0 \\ \hline E_1 \\ \hline \end{array}$$

Es entstehen die *Dominobegleiter*  $VA$  bzw.  $V^\circ A$  von  $A$ , je nach dem der vertikale oder der horizontale Fall vorliegt. Diese definieren Graphen  $DA$  bzw.  $D^\circ A$  nach folgenden *Vorschriften*:

Die Eckenmenge  $E$  besteht aus den Kästchen der beiden  $3 \times 3$ -Blöcke  $E_i$  mit  $E = E_0 \cup E_1$ .

Die Kanten werden definiert nach der Regel:

Zwei Ecken sind durch eine *Kante verbunden*, wenn ihre Dominos „passen“, also eine Ziffer gemeinsam haben.

Man erkennt sofort das folgende

**Lemma 5.1.** *Die horizontalen Kanten in  $DA$  verlaufen genau in der nach der Definition des Dominographen festgelegten Art. Vertikale Kanten gibt es nur zwischen Ecken aus  $E_0$  und  $E_1$ . Ferner bestimmen singuläre Ziffern, als konstante Dominos, die singulären Ecken im Sinn der Dominographen, sie belegen diese Ecken.*

Die Merkmale *singulär* – *regulär* für Ecken und Zeilen sind in beiden Fällen, für die konkreten Graphen  $DA$  und die Dominographen die gleichen. Es bleibt zu zeigen, dass  $DA$  alle Eigenschaften eines Dominographen erfüllt. Dazu ist es zweckmäßig, die Zeilen mit ihren Ecken durch den Typ ihrer Dominobelegungen zu notieren, die Dominos bestimmen die Position in jeder Zeile, also

$$\begin{array}{lll} \text{singulär: } & s & tt' \quad tt', \quad tt' & s & tt', \quad tt' & tt' & s, \\ \text{regulär: } & rt & rt' \quad tt'. \end{array}$$

**Satz 5.1.** *DA hat folgende Eigenschaften*

- (1) *Die singulären Ecken sind die vom Grad 0 oder 1. 2 singuläre Ecken in einer der Teilmengen  $E_i$  stehen in verschiedenen Vertikalen.*
- (2) *Die isolierten Ecken treten paarweise auf. Es sind dies genau die singulären Ecken, die gleiche Ziffern tragen. Sie liegen also in verschiedenen Eckenmengen  $E_i$ .*
- (3) *Eine reguläre Ecke hat 1 oder 2 vertikale Kanten.*

*DA ist also ein Dominograph.*

*Beweis. ad (1):*

Wenn eine singuläre Ecke  $s$ , etwa in  $E_0$ , nicht isoliert ist, hat sie eine Kante nach  $E_1$ , denn horizontal gehen von  $s$  keine Kanten aus. Die benachbarte Ecke muss regulär sein von der Form  $sp$ , denn nach der Bedingung  $(\dagger\dagger)$  ist ausgeschlossen, dass  $s$  über  $s$  stehen kann. Nun ist die Ziffer  $s$  in  $E_1$  nur in einer Zeile enthalten, wegen der Zeilendifjunktivität in  $E_1$ . Also hat die Ausgangscke  $s$  in  $E_0$  keine weiteren Kanten nach  $E_1$ . Damit sind singuläre nicht isolierte Ecken durch Grad 1 charakterisiert.

Zur 2. Behauptung in (1) wird das Gegenteil angenommen mit einer Konstellation in  $E_0$  von 2 Zeilen

$$\begin{array}{ccc} rt & s & rt \\ pq & s' & pq \end{array}$$

mit 2 singulären Ecken  $s, s'$ .

Das hat nach Definition der Dominobelegung zur Folge

$$\{r, t, p, q\} \subset c^2$$

ein Widerspruch wegen  $\#c^2 = 3$ .

*ad (2):*

- 2 singuläre Ecken mit gleichen Ziffern sind isoliert.

Denn: Sie liegen notwendig in 2 Hälften und stehen nach (††) nicht übereinander.

Angenommen, die untere Ecke  $s$  hätte eine Kante nach  $E_0$ . Die Endcke  $st$  in  $E_0$  ist dann regulär:

$$\begin{array}{c} s \\ st \\ \hline | \\ s \end{array}$$

Aber  $st$  kann weder in der Zeile von  $s$  stehen – nach Struktur singulärer Zeilen – noch in einer anderen Zeile – wegen Disjunktheit der Zeilen in  $E_0$ .

Also sind beide Ecken isoliert.

- Jede isolierte Ecke mit Ziffer  $s$ , etwa in  $E_0$ , hat ein eindeutiges singuläres Pendant mit Ziffer  $s$  in  $E_1$ , welches ebenfalls isoliert ist.

Die singuläre Zeile in  $E_0$  sei etwa  $rt \ s \ rt$ , dann liegt  $s$  nicht in  $c^2$ . Sei etwa  $s \in c^1$ .

Die Ziffer  $s$  kommt in einem Domino in  $E_1$  vor. Ein solches Domino kann dann nicht in der 1. Spalte stehen. Es ergeben sich so 3 mögliche Konstellationen:

$$\begin{array}{ccccccc} E_0 & rt & s & rt \\ & pq & sp & sq & & & \text{regulär} \\ E_1 & q & sp & sp & & & \text{singulär} \\ & pq & pq & s & & & \text{singulär} \end{array}$$

wobei die  $r, t$  unter den  $p, q$  vorkommen können.

In den ersten beiden Fällen hätte  $s$  eine vertikale Kante. Also liegt die 3. Alternative vor,  $E_1$  hat eine singuläre Ecke  $s$ . Diese ist isoliert, da in  $E_0$  keine weitere Zeile mit einem Domino vom Typ  $sp'$  auftreten kann.

*ad (3):*

Zum Nachweis dieser Aussage zeigen wir zunächst:

- Die 2 regulären Ecken in einer singulären Zeile haben stets eine vertikale Kante. Sei die Situation etwa in  $E_0$  von folgender Art

$$E_0 \quad s \quad rt \quad rt$$

Dann liegt  $\{r, t\}$  in  $c^1$ .  $r$  und  $t$  kommen in Dominos der Zeilen von  $E_1$  vor. Diese können nicht unter  $c^1$  stehen, weil sonst  $r$  oder  $t$  nicht in  $c^1$  liegen. Es bestehen

folgende möglichen Konstellationen in  $E_1$  (die 1. Ecke wird nicht notiert):

$$\begin{array}{c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 \begin{array}{c} E_0 \\ E_1 \end{array} & \frac{rt \quad rt}{rt \quad rt} & \frac{rt \quad rt}{rp} & \frac{rt \quad rt}{r} & \frac{rt \quad rt}{r} \\
 & & qt & qt & t
 \end{array}$$

wobei in  $E_1$   $r$  und  $t$  noch vertauscht auftreten können. Man erkennt, dass beide regulären  $E_0$ -Ecken Kanten nach  $E_1$  haben.

- Sei also eine reguläre Zeile zugrunde gelegt  $tt' \ rt \ rt'$ .

Nach Definition der Dominobedeckung ist dann  $r \in c^1$  und  $t \in c^3$ .

### Fallunterscheidung A

- [1] Die Zeile  $z$  von  $r$  in  $E_1$  oder die Zeile  $z'$  von  $t$  in  $E_1$  ist regulär.
- [2] Beide Zeilen von  $r, t$  in  $E_1$  sind singulär.

Zu [1]: Sei  $z$  regulär in  $E_1$ . Dann steht  $r$  in  $z$  in der 2. und 3. Spalte, also entsteht ein regulärer Kreis

$$\begin{array}{c}
 rt \quad rt' \\
 \hline
 rp \quad rq
 \end{array}$$

$rt$  hat eine vertikale Kante.

Zu [2]:

### Fallunterscheidung B

- [ $\alpha$ ] eine der beiden Ziffern  $r, t$  ist in  $E_1$  regulär.
- [ $\beta$ ] beide Ziffern  $r$  und  $t$  sind in  $E_1$  singulär.

Zu Fall [ $\alpha$ ]: Man hat die Situation

$$\begin{array}{ccc}
 tt' & rt & rt' \\
 z : & \hline
 s & rp & rq & \text{falls } r \text{ regulär in } E_1 \\
 z' : & tp' & tq' & s' & \text{falls } t \text{ regulär in } E_1
 \end{array}$$

Denn in singulären Zeilen sind die beiden regulären Ecken gleich beziffert. Wegen  $r \in c^1$  und  $t \in c^3$  stehen die singulären Ziffern  $s, s'$  links bzw. rechts. Die gegebene  $E_0$ -Ecke  $rt$  hat in beiden Fällen eine Kante nach  $E_1$ .

Zu Fall  $[\beta]$ :

Wenn beide Ziffern  $r, t$  singulär sind in  $E_1$ , gibt es 3 mögliche Konstellationen für  $r, t$  wegen  $r \in c^1, t \in c^3$ :

	1			2			3				
$E_0$	$tt'$	$rt$	$rt'$	$t$	$tt'$	$rt$	$rt'$	$t$	$tt'$	$rt$	$rt'$
$E_1$	$t$	$r$		$t$	$r$		$t$		$t$	$r$	

Man erkennt: In den ersten beiden Fällen ist die gegebene Ecke  $rt$  aus  $E_0$  benachbart zu  $E_1$ . Der dritte Fall kann nicht eintreten aus folgendem Grund:

Angenommen, die Situation liege vor. Dann bezeichne in  $E_1$   $b_1$  die Zeile von  $t$ ,  $b_2$  die Zeile von  $r$  und  $b_3$  die dritte Zeile. Da  $t$  in  $E_1$  singulär ist und in der ersten Spalte steht, folgt  $\#(b_1 \cap c^1) = 2$ . Das dritte Element jeweils in  $b_1$  und  $c^1$  ist bekannt, so dass folgt

$$b_1 = \{b_1 \cap c^1, t\} \quad \text{und} \quad c^1 = \{b_1 \cap c^1, r\}$$

Da  $r$  in  $E_1$  singulär ist, folgt analog  $\#(b_2 \cap c^3) = 2$  und daher

$$b_2 = \{b_2 \cap c^3, r\} \quad \text{und} \quad c^3 = \{b_2 \cap c^3, t\}.$$

Zusammen folgt

$$b_1 \cup b_2 = c^1 \cup c^3$$

und durch Übergang zur Komplementärmenge in  $\{1, \dots, 9\}$  daher  $b_3 = c^2$ . Dies steht im Widerspruch zu ( $\dagger$ ), wonach keine Zeilenmenge  $b_i$  gleich einer Spaltenmenge  $c^j$  sein kann.

Es verbleibt die letzte Aussage:

- Reguläre Ecken haben höchstens 2 vertikale Kanten.

Dominos wurden konstruiert aus den Ziffern von 3 disjunkten Zeilensätzen. Daher können die Ziffern  $r, t$  in Dominos in  $E_0$  wie in  $E_1$  in höchstens 2 Zeilensätzen auftreten, und damit etwa in  $E_1$  unter einer Ecke  $rt$  aus  $E_0$  stehen.

Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

Mit Satz 5.1 sind die Axiome des *abstrakten D-Graphen* motiviert. Ein *D-Graph DA*, der aus einer Dominobelegung vom Typ VA entsteht, trägt weit mehr Information als abstrakte *D-Graphen*. Man wird dann von einem *konkreten D-Graphen* sprechen.

### Uneigentliche D-Graphen

Aus der Konstruktion von *D-Graphen* aus Praesudokus mittels Dominobelegungen wurde deutlich, dass ein Praesudoku nicht wirklich benötigt wird, sondern für den

Domino-Prozess die Vorgabe von Zeilen- bzw. Spaltenmengen der beteiligten Blöcke ausreicht.

Im vertikalen Fall etwa genügt es, statt des Praesudokus

$$\begin{array}{c} a \\ c \quad \text{mit Regulativ } c \\ b \end{array}$$

die Zeilenmengen von  $a$  und  $b$  und die Spaltenmengen von  $c$  so vorzugeben, dass die Bedingungen ( $\dagger$ ) und ( $\ddagger$ ) erfüllt sind. Dann läuft der Domino-Prozess in gleicher Weise durch und man erhält eine Dominobelegung auf  $V = \frac{E_0}{E_1}$ . Auch die Begriffe singuläre und reguläre Zeile können mit (S) und (R) eingeführt werden, es gelten Lemma 5.1 und Satz 5.1.

Dies führt tatsächlich zu einem allgemeineren Begriff von  $D$ -Graphen, wie das folgende Beispiel zeigt. Bei Vorgabe der Zeilenmengen von  $a$  und  $b$  und der Spaltenmengen von  $c$  durch

$$\begin{array}{lcl} a_1 = \{1, 2, 3\} & b_1 = \{1, 4, 7\} & c^1 = \{1, 2, 4\} \\ a_2 = \{4, 5, 6\} & b_2 = \{2, 5, 8\} & c^2 = \{3, 7, 9\} \\ a_3 = \{7, 8, 9\} & b_3 = \{3, 6, 9\} & c^3 = \{5, 6, 8\} \end{array}$$

sind ( $\dagger$ ) und ( $\ddagger$ ) erfüllt. Man erhält folgende Dominobelegung auf  $V = \frac{E_0}{E_1}$  (zur besseren Übersicht ist das Regulativ mit abgebildet):

	3	12	12
$E_0$	56	56	4
	79	8	79
	<hr/>		
	1	3	5
Regulativ	2	7	6
	4	9	8
	<hr/>		
	7	14	14
$E_1$	58	58	2
	39	6	39

Könnte diese Dominobelegung durch ein vertikales Praesudoku realisiert werden, so folgte:

Da 4 in  $E_0$  in der 3. Spalte steht, muss 4 in  $E_1$  in der 2. Spalte stehen. Daher muss 1 in  $E_1$  in der 3. Spalte stehen.

Da 2 in  $E_1$  in der 3. Spalte steht, muss 2 in  $E_0$  in der 2. Spalte stehen. Daher muss 1 in  $E_0$  in der 3. Spalte stehen.

Die Ziffer 1 muss also in beiden Eckenhälften in der 3. Spalte stehen im Widerspruch zur Praesudoku-eigenschaft.

Man erhält also zusätzliche  $D$ -Graphen, die ebenfalls als konkret, aber zur Unterscheidung von aus Praesudoku entstehenden *eigentlichen*  $D$ -Graphen als *uneigentlich* bezeichnet werden.

Es bleibt die Aufgabe, die  $D$ -Graphen zu klassifizieren. Im nächsten Abschnitt wird dargelegt, was darunter zu verstehen ist.

Das ursprüngliche Ziel war, mit Hilfe des Domino-Prozesses das Mittelkreuz  $MK(c)$  eines Sudokus  $A$  mit Dominos zu belegen, derart, dass vertikal und horizontal konkrete  $D$ -Graphen  $DA$  und  $D^\circ A$  entstehen, und dies mit festem  $c = A_{22}$  als Regulativ. Für den 2. Horizontalstreifen  $A_{21}cA_{23}$  sind dabei die Spaltenmengen von  $A_{21}$  und  $A_{23}$  mit den Zeilenmengen von  $c$  zu vergleichen. Die Transposition, Spiegelung an der Hauptdiagonalen, führt den horizontalen auf den vertikalen Fall zurück.

**Bemerkung 5.1.** Es gibt eine eindeutige Belegung des Mittelkreuzes  $MK(c)$  von  $A$  mit Dominos, so dass konkrete  $D$ -Graphen  $DA$  und  $D^\circ A$  entstehen. Dabei sind die  $DA$  und  $D^\circ A$  Prototypen von konkreten  $D$ -Graphen. Im Folgenden entstehen weitere  $D$ -Graphen dieser Art.

## 5.2 Isometrien von Dominographen

Die Ecken eines  $D$ -Graphen sind in einem rechteckigen  $3 \times 6$ -Raster angeordnet und die Kanten verlaufen orthogonal, horizontal – vertikal. Zudem ist die 2-Teilung der Eckenmengen ein charakteristisches Merkmal, das  $D$ -Graphen gegenüber topologischen Graphen einschränkt. Diese besondere Situation erfordert es, auch den Isomorphiebegriff für  $D$ -Graphen durch eine Zusatzbedingung gegenüber dem topologischen Fall einzuschränken. Da sich der Eindruck des „Metrischen“ aufdrängt, sprechen wir von „Isometrien“ anstelle von Isomorphismen.

Weiterhin stellt sich als sinnvoll heraus, das Eckenraster für Dominographen, wie in Abschnitt 5.1, (5.2) dargestellt, ein für allemal festzuhalten, d. h.  $D$ -Graphen als Kanten-Strukturen auf  $E$  zu verstehen. Der Vorteil dieser Auffassung ist erheblich, wie sich herausstellen wird.

### [a] Isometrien

Seien  $D$  und  $D'$  zwei  $D$ -Graphen

$$D = (E, K), \quad D' = (E, K') .$$

Eine Isometrie  $\theta : D \longrightarrow D'$  ist eine Bijektion

$$\theta : E \longrightarrow E \quad \text{der Eckenmenge } E \text{ derart,}$$

dass gilt

- (a)  $\theta E_i = E_i$  oder  $\theta E_i = E_{i+1}$  für  $i \bmod 2$
- (b)  $\theta u \theta v \in K' \iff uv \in K$  für alle Eckenpaare  $u, v \in E$ . (5.5)
- (c) Liegen  $u, v \in E$  in derselben Zeile, so auch  $\theta u, \theta v$ .
- (d) Liegen  $u, v \in E$  in derselben Vertikalen, so auch  $\theta u, \theta v$  .

Es gibt also 2 verschiedene Arten von Isometrien, die *geraden*, wenn  $\theta E_i = E_i$ , und die *ungeraden*, wenn  $\theta E_i = E_{i+1}$ , also  $\theta E_0 = E_1, \theta E_1 = E_0$  gilt.

Die *D*-Graphen in horizontaler Lage gehen durch eine Drehung um  $90^\circ$  in die vertikale Lage über, man kann sich also auf die letzteren beschränken.

### [b] Die Isometriegruppe

Bezeichne  $I(D)$  zunächst die Menge aller Isometrien bzw.  $I_0(D)$  die Menge aller geraden Isometrien, die von einem *D*-Graphen  $D$  ausgehen. Diese Mengen lassen sich bestimmen.

$I_0(D)$  besteht aus *zulässigen* Transformationen von  $E$ , die  $E_0$  und  $E_1$  erhalten, und die Spaltenmengen in Spaltenmengen und Zeilenmengen in Zeilenmengen überführen.

Jede solche Transformation ist eindeutiges Produkt einer Spaltenpermutation mit einer zulässigen Zeilenpermutation. Die Gruppe  $\Omega_0$  dieser Transformationen, die von allen zulässigen geraden Zeilen- und allen Spaltenpermutationen der Eckenmenge  $E$  erzeugt wird, ist offenbar isomorph zu  $S_3^3 = S_3 \times S_3 \times S_3$ . In der Anordnung (5.2) von  $E$  machen die Spaltenpermutationen  $S_3$  aus, während  $S_3 \times S_3$  für die Zeilenpermutationen von  $E_0$  und  $E_1$  steht. Die Spiegelung  $\eta$  an der Trennlinie erhält ebenfalls Zeilen- und Spaltenmengen, es gilt natürlich  $\eta^2 = 1$ .

Das Erzeugnis  $\Omega = [\Omega_0, \eta]$  ist wieder semidirektes Produkt

$$\Omega = \Omega_0 \rtimes [\eta]. \quad (5.6)$$

Die Operationen aus  $\Omega_0$  bestimmen Isometrien für jeden *D*-Graphen  $D$  auf folgende Weise: Jede Spaltenpermutation  $\theta$  induziert eine Isometrie. Sind in einer Spalte 2 Ecken in  $D$  benachbart, so werden die beiden Bildecken ebenfalls mit einer Kante versehen, die Kante wird „mitgenommen“. So wird die Bildeckenmenge von  $\theta$  mit vertikalen Kanten versehen. In analoger Weise werden auch die horizontalen Kanten „mitgenommen“.

Jedes  $\theta \in \Omega$  bestimmt also eine Isometrie von  $D$  auf einen anderen *D*-Graphen  $D'$ .

Die Gruppe  $\Omega$  heißt die *Universelle Isometriegruppe*, kurz *Isometriegruppe* der *D*-Graphen. Es wird sich herausstellen, dass die geraden Isometrien aus  $\Omega_0$  als die *lokalen* anzusehen sind, die in der Nebenklasse  $\Omega_0 \eta$  dagegen als die *globalen*.

Zusammenfassend wurde gezeigt:

**Satz 5.2.** *Die Isometriegruppe ist unabhängig von der Wahl des definierenden *D*-Graphen.*

Genauer:

$\Omega$  operiert fixpunktfrei auf dem Raum  $\Delta^*$  aller Dominographen, indem ein  $\theta \in \Omega$  bei Anwendung auf die Eckenmenge  $E$  nach dem angegebenen Verfahren die Kanten des *D*-Graphen „mitnimmt“.

Die Bahnen sind genau die Isometrieklassen  $\text{Iso}(D) = \Omega \cdot D$  der  $D$ -Graphen, die konstante Länge haben

$$\#\text{Iso}(D) = 2 \cdot 6^3. \quad (5.7)$$

Die Analyse in Abschnitt 5.1 hat gezeigt, dass man 2 Arten von  $D$ -Graphen unterscheiden muss, abstrakte und konkrete. Deren Mengen werden mit  $\Delta^*$  bzw  $\Delta$  bezeichnet, ihre Mengen der Isometrieklassen mit  $\underline{\Delta}^*$  bzw.  $\underline{\Delta}$ .

Zwei  $D$ -Graphen  $D, D'$  heißen *isometrisch*, i. Z.  $D \simeq D'$ , wenn ein  $\theta \in \Omega$  existiert mit  $\theta D = D'$ . Einen  $D$ -Graphen  $D$  wird man *symmetrisch* nennen, wenn  $\eta D = D$  ist.

Das *strikte Klassifikationsproblem* lautet: Charakterisiere die Isometrieklassen von  $D$ -Graphen durch Merkmale. Bestimme  $\#\underline{\Delta}^*$  bzw.  $\#\underline{\Delta}$ .

### Komponentenzerlegung eines $D$ -Graphen

Eine solche ist die orthogonale Summe

$$D = K_1 \perp K_2 \dots \perp K_r = \perp_i K_i. \quad (5.8)$$

mit den Komponenten

$$K = (E(K), K(K)) = (E_i, K_i) \quad (5.8')$$

und den Eckenmengen  $E_i$  zu den Komponenten  $K_i$ . Diese sind in (5.8) paarweise fremd, es bestehen disjunkte Zerlegungen

$$E = \bigcup_i E(K_i) \quad \text{und} \quad K = \bigcup_i K(K_i). \quad (5.8'')$$

Dass die Disjunkttheit auch für die Kantenmengen gilt, liegt am maximalen Zusammenhang: 2 Ecken aus  $E(K)$ , die benachbart in  $D$  sind, sind es auch in  $K$ .

Jede Isometrie  $\theta \in \Omega$  führt die Komponentenzerlegung von  $D$  in die von  $\theta D$  über:

$$\theta D = \perp_i \theta K_i. \quad (5.9)$$

Dabei verändert die Isometrie  $\theta$  Lage und Gestalt, also die *Art*, des Bildes  $\theta K_i$  einer Komponente. Beispiele in Kapitel 6 werden dies veranschaulichen.

Weil also die Eckenmengen von Komponenten in der Regel verschieden sind, muss präzisiert werden, wann 2 Komponenten, auch von verschiedenen oder nicht isometrischen  $D$ -Graphen, *isometrisch* sind:  $K \simeq K'$ . Dies ist genau dann der Fall, wenn eine Isometrie  $\theta \in \Omega$  existiert, die die beiden Komponenten ineinander überführt:  $\theta K = K'$ .

Von Bedeutung für die numerische Praxis wie auch für das Klassifikationsproblem ist das *Isometrie-Problem*.

Wann sind 2  $D$ -Graphen isometrisch? Wann sind sie es nicht?

Die gleiche Frage stellt sich natürlich für 2 Komponenten gleicher oder verschiedener  $D$ -Graphen.

Notwendig für die Isometrie von  $D$ -Graphen ist natürlich, dass alle Komponenten beider Graphen isometrisch sind.

Nun gibt es eine Reihe von Merkmalen, die es gestatten, die Isometrie oder Nicht-isometrie zu testen.

Ein spezifisches Merkmal sind die Singularitäten. Der *Singuläre Ort* von  $D$  ist die Menge  $SO(D)$  aller singulären Ecken, analog  $SO(K)$  für die Komponenten  $K$  von  $D$ .

Offenbar ist

$$SO(D) = \bigcup_i SO(K_i) \text{ disjunkt}, \quad (5.10)$$

sowie

$$\theta SO(D) = SO(\theta D) \quad \text{für } \theta \in \Omega. \quad (5.10')$$

Wieder verändert auch  $SO$  seine Art, Lage und Gestalt, bei Anwendung von Isometrien.

Es bietet sich hier noch eine *feinere* Unterscheidung an. Die isolierten Singularitäten sind *doppelt singulär*, sie haben weder eine horizontale noch eine vertikale Kante. Die singulären nichtisolierten Ecken haben eine vertikale Kante. Die erstenen sind von *2-ter Ordnung*, die letzteren von *1-ter Ordnung*. Also zerlegt sich  $SO$  in der Form

$$SO(D) = SO_1(D) \cup SO_2(D), \quad (5.11)$$

analog für die Komponenten.

Das zweite Merkmal für  $D$ -Graphen  $D$  und Komponenten  $K$  ist die *Eckengradtafel*, kurz auch die *Eckentafel*,  $d(D)$  bzw.  $d(K)$ . Man erhält sie, indem man an den Ecken  $u$  ihre Eckengrade  $d(u)$  einträgt. Es entsteht eine Tafel bestehend aus Ziffern  $0, \dots, 4$  auf den Ecken. Isometrien  $\theta$  erhalten zwar die Eckengrade,  $d(\theta u) = d(u)$ , aber wieder wird die Art der Tafel verändert

$$\theta d(D) = d(\theta D) \quad \text{bzw.} \quad \theta d(K) = d(\theta K).$$

### Frage

Wieweit bestimmen  $SO$  und die Eckentafel den  $D$ -Graphen bzw. die Komponente, also deren Kanten?

Nach den Axiomen für  $D$ -Graphen bestimmt  $SO$  vollständig alle horizontalen Kanten.

Denn hat eine Zeile keine singulären Ecken, sind alle 3 Ecken benachbart. Existiert eine singuläre Ecke, so sind die beiden anderen benachbart.

Bestimmt die Eckentafel die vertikalen Kanten? Eine Ecke  $u$  bestimmt die Anzahl der vertikalen Kanten, die von  $u$  ausgehen. Denn ist  $u$  regulär, gehen  $d(u) - 2$  vertikale Kanten von  $u$  aus. Ist  $u$  singulär, so gehen von  $u$  – je nach Singularitätsordnung 1 oder 2 – genau 1 oder 0 vertikale Kanten aus. Aber:

Es gibt keine Information darüber, wo diese Kanten enden! Damit ist festzustellen:

**Bemerkung 5.2.** Singulärer Ort und Eckentafel legen einen D-Graphen oder eine Komponente (als zusammenhängenden Teilgraph) nicht notwendig eindeutig fest. Somit reichen i. A. die genannten Merkmale nicht aus, um die Isometrie von D-Graphen bzw. Komponenten festzustellen. Aber  $SO$  und Eckentafel können als Indikatoren für die Nichtisometrie verwendet werden.

Dazu werden beide Probanden einem *Testverfahren* unterzogen.

Für D-Graphen wird Nichtisometrie oft schon erkennbar, wenn die Komponentensets nicht isometrisch sind.

Daher interessieren primär Teste für zusammenhängende Teilgraphen, also Komponenten. Seien  $K, K'$  zwei Komponenten.

#### Test (a)

Haben beide Komponenten gleiche

- Ordnungen = Anzahl der Ecken
- Kantenanzahlen =  $\frac{1}{2}\sum_u d(u)$
- Singularitätsgrade  $\#SO$ ?

#### Test (b)

Kann man ein Produkt  $\theta \in \Omega_0$  aus zulässigen Zeilen- und Spaltenpermutationen der Ecken finden derart, dass

$$\theta SO(K) = SO(K') \quad \text{und} \quad \theta d(K) = d(K')$$

wird?

Obwohl der Singularitätsgrad  $\#SO$  höchstens 6 ist, bestimmt der singuläre Ort alle horizontalen Kanten. Passiert das Paar alle Tests, kann man nichts weiter aussagen. Wird ein Test nicht bestanden, sind beide nicht isometrisch.

Es sei bemerkt, dass die Indikatoren des Tests auch zu einer Reduktion des Klassifikationsproblems führen. Diese *Indikatorensysteme* bestimmen eine Äquivalenzrelation auf dem Raum  $\Delta$  aller D-Graphen:

Zwei D-Graphen  $D, D'$  sind *ähnlich*, i. Z.  $D \sim D'$ , wenn ihre Indikatorensysteme Ind gleich bzw. isometrisch sind:

$$D \sim D' \iff \text{Ind } D \simeq \text{Ind } D'. \quad (5.12)$$

Hierbei bedeutet das Zeichen  $\simeq$ , dass die numerischen (a)-Daten gleich und die (a)-Daten  $SO$  und Eckentafel isometrisch sind, also

$$\theta SO(D) = SO(D') \quad \text{bzw.} \quad \theta d(D) = d(D') \quad \text{für geeignetes } \theta \in \Omega \text{ gilt.}$$

Somit genügt es, die Isometrieklassen  $[D]$  in einer Ähnlichkeitsklasse zu klassifizieren.

Das ist eine interessante Aufgabe, die in Kapitel 6 an Beispielen untersucht wird.

Das Isometrieproblem wird in Kapitel 6 ausführlich behandelt und auch der Frage nach der Diskrepanz zwischen konkreten und abstrakten  $D$ -Graphen nachgegangen. So will man wissen, wie groß die Differenzmenge  $\underline{\Delta}^* \setminus \underline{\Delta}$  der Isometrieklassen ist.

### 5.3 Schaltprozess und Clanbildung

Das Hauptziel dieses Paragraphen ist die Bildung von Clans im Sudokuraum  $X$ .

Ausgelöst wird die Clanbildung durch einen Schaltprozess, bei dem die Domino-Belegung die entscheidende Rolle spielt. Letztendlich geht daher das Phänomen der Clanbildung auf die konkreten Dominographen zurück. Um einen ersten Eindruck zu geben, werden 2 Beispiele vorangestellt.

Auf der Suche nach neutralen Sudokus mit verschwindender Determinante ist A. Schönhage mit Hilfe seines Determinanten-Computer-Programms auf folgendes Sudoku gestoßen:

$$J = \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 & 9 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 8 & 9 & 7 & 3 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 \\ \hline 9 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 8 & 9 & 7 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 8 & 6 & 4 & 9 & 7 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 7 & 3 & 1 & 8 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

Dieses Sudoku ist besonders interessant. Zunächst erkennt man direkt, dass  $\det J = 0$  ist.

Denn nach Zeilensubtraktion entstehen 2 gleiche Zeilen

$$[3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 - 6 \ - 6 \ - 6] = \text{Zeile } 6 - \text{Zeile } 5 = \text{Zeile } 7 - \text{Zeile } 9.$$

Dass  $J$  neutral ist, entnimmt man dem *Neutralitätskriterium* aus Abschnitt 2.8.

Denn die Blockzeilenmenge  $\{8, 6, 4\}$  unten links tritt in keinem anderen Block als Reihenmenge auf.

Man erkennt nun, dass  $J$  aus dem bekannten Fixsudoku  $C^\circ$  durch eine kleine „Störung“ entsteht:

$$C^\circ = \begin{array}{ccc|ccc|ccc} e & s'^{-1}e & s'e & 9 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ s'e & e & s'^{-1}e & 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 8 & 9 & 7 \\ s'^{-1}e & s'e & e & 6 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 2 & 3 & 1 \\ \hline & & & 5 & 6 & 4 & 9 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \\ & & & 8 & 9 & 7 & 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ & & & 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

In  $C^\circ$  werden die markierten Blockspalten vertauscht und  $C^\circ$  geht in  $J$  über. Hier geht also ein Fixsudoku durch eine kleine Störung in die andere Klasse der neutralen Sudokus über.

Ein anderes Störungsphänomen ist der in der Literatur bekannte *Rechteckeefekt* [1].

Dieser tritt in folgender Situation auf: In einem Sudoku sind die Ecken eines „grenzübergreifenden“ Rechtecks (horizontal oder vertikal) mit 2 Ziffern, etwa 1, 2, wie folgt besetzt:

$$\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline | & | \\ 2 & 1 \end{array}$$

Vertauschung der beiden Ziffern ergibt offenbar ein neues Sudoku.

Beide Phänomene sind von gleicher Art. Nun muss keine besondere Störungstheorie entworfen werden. Es zeigt sich nämlich, dass beide Phänomene der allgemeinen Theorie der Clanbildung subsumiert werden können. Um es vorweg zu nehmen:  $J$  gehört dem Clan von  $C^\circ$  an. Entscheidend ist, dass beide Phänomene nicht durch Operatoren der Transformationsgruppe  $G^*$  bewirkt werden können, es handelt sich um ein neues Phänomen.

## Der elementare Schaltprozess

Sei  $A$  ein Sudoku. Wir gehen aus von dem vertikalen konkreten  $D$ -Graphen  $D = DA$  zu  $A$  mit Regulativ  $c$  und der

$$\text{Eckenmenge } E = \boxed{\begin{array}{c} E_0 \\ \hline E_1 \end{array}},$$

wie in Abschnitt 5.1 eingeführt.

Sei  $K$  eine nichtriviale Komponente von  $D$ , also verschieden von isolierten Ecken.

Sie trägt natürlich die durch  $VA$  bestimmte Dominobelegung auf ihrer Eckenmenge  $E(K)$ .

$K$  heißt *singulär*, wenn sie eine singuläre Ecke enthält, sonst *regulär*.

Mit  $A_0$  wird die Einschränkung (der Ziffernbelegung) von  $A$  auf die Eckenmenge  $E(K)$  bezeichnet.  $A_0$  ist ein Praesudoku, denn es entsteht ja aus einem Sudoku.

Hat eine Ecke  $u \in E(K)$  die Dominobelegung  $kl$  – Schreibweise  $u|kl$  –, so gibt es genau 2 bzw. 1 Spezialisierung zu einer Ziffernbelegung von  $u$ , je nachdem ob die Ecke regulär oder singulär ist in  $K$ :

$$\begin{array}{ccc} u|kl & & u|kk \\ \swarrow & & \downarrow \\ u|k & & u|l \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ccc} u|kk & & u|k \\ & & \downarrow \\ & & u|k \end{array} \quad (5.13)$$

Davon gehört genau eine Belegung, etwa  $u|k$ , der „alten“ Eckenmenge  $A_0$  an. Die Zuordnung

$$u|k \mapsto u|l$$

der alten auf die komplementäre „neue“ Eckenbelegung  $u|l$  ergibt eine Injektion

$$\kappa: A_0 \longrightarrow A_1$$

auf eine neue Eckenbelegung  $A_1$ . Da nach Definition alle Dominos auf  $E(K)$  aus Ziffern von  $A_0$  bestehen, ist  $\kappa$  eine Bijektion. Die Ziffernmengen von  $A_0$  und  $A_1$  sind gleich:  $\{A_0\} = \{A_1\}$ . Daher ist  $\kappa$  eine Permutation, sie ist fixpunktfrei genau dann, wenn die Komponente regulär ist.

**Satz 5.3.** Seien  $A, V, K, A_0, A_1, \kappa$  wie angegeben.

- Ist  $K$  regulär, so ist die komplementäre Belegung  $A_1 = \kappa A_0$  ein Praesudoku.
- Ist  $K$  singulär, so ist  $A_1$  kein Praesudoku.

Es gibt daher im letzteren Fall nur eine Praesudoku-Spezialisierung auf  $E(K)$ , nämlich  $A_0$ .

Kurz wird von  $A_0$  als dem *alten* und von  $A_1$  als dem *neuen* Praesudoku gesprochen.

Die Entscheidung *alt – neu* ist der *elementare Schaltprozess*.

*Beweis.* Die Eckenmenge  $E(K)$  einer nichtrivialen Komponente zerlegt wie die von  $VA$  in 2 Teilmengen

$$E(K) = \boxed{\begin{array}{c} E_0(K) \\ E_1(K) \end{array}} :$$

Sie hat in jeder der Eckenmengen  $E_0, E_1$  mindestens eine horizontale Zeile aus 3 oder 2 regulären Ecken.

Sei  $K$  regulär. Es ist zu zeigen, dass  $A_1$  ein Praesudoku ist.

Eine horizontale Dominozeile  $z$  mit den Ecken  $u_1, u_2, u_3$  hat eine Dominobelegung der Art  $kl\ km\ lm$  mit verschiedenen  $k, l, m$ , da kein Domino konstant ist. Die eindeutige  $A_0$ -Belegung von  $z$  sei etwa

$$u_1|k \quad u_2|m \quad u_3|l.$$

Nach Definition von  $A_1$  ist dann die  $A_1$ -Belegung von  $z$

$$u_1|l \quad u_2|k \quad u_3|m.$$

Dies ist eine Permutation der  $A_0$ -Belegung, und damit erfüllt  $A_1$  die horizontalen Praesudoku-Bedingungen.

Angenommen,  $A_1$  erfüllte *nicht* die vertikalen Praesudoku-Bedingungen. Dann treten in einer Spalte von  $A_1$ , etwa in der 1. Spalte, 2 gleiche Ziffern  $l$  auf, also 2 verschiedene Ecken  $v_i|l$  ( $i = 0, 1$ ). Diese können nicht beide in einer der beiden Eckenmengen  $E_i(K)$  liegen, da dort, wie oben gezeigt, die Zeilenmengen von  $A_1$  als Permutationen der von  $A_0$  mengendisjunkt sind. Also stehen die Ecken  $v_i|l$  in verschiedenen Hälften

$$v_i|l \in E_i(K), \quad i = 0, 1.$$

Die Dominobelegungen sind daher  $v_i|k_i l$ , beide Ecken sind also benachbart. Also sind ihre  $A_0$ -Belegungen  $v_i|k_i$ . Es ist  $k_0 \neq k_1$ , da  $A_0$  Praesudoku ist. Alle Zeilen sind regulär, die Dominoverteilung der Zeilen der  $v_i$  ist daher

$$k_i l\ k_i m_i\ l m_i \quad \text{oder} \quad k_i l\ l m_i\ k_i m_i \quad (i = 0, 1).$$

Nach Definition der Dominospezialisierung ist die  $A_0$ -Spezialisierung dieser Zeilen dann

$$k_i\ m_i\ l \quad \text{oder} \quad k_i\ l\ m_i.$$

Die Ziffer  $l$  steht in  $A_0$  also in der 3. bzw. 2. Spalte der Zeilen zu  $v_0$  und  $v_1$ .

Da beide Ecken  $v_i$  in der 1. Spalte die Dominos  $k_i l$  tragen, liegt  $l$  nicht in der 1. Spalte des Regulativs  $c$ , nach Definition der Dominos. Aber  $l$  steht in  $A$  auch nicht in den Eckenmengen  $E_i \setminus E_i(K)$ , da  $l$  in beiden  $E_i(K)$  vorkommt. Also steht  $l$  nicht in der 1. Spalte von  $E$ , was der Sudokueigenschaft von  $A$  widerspricht.  $A_1$  ist also ein Praesudoku.

Sei nun  $K$  singulär.

Da  $K$  nichttrivial ist, hat jede singuläre Ecke  $u|s$ , etwa in  $E_0(K)$  gelegen, eine vertikale Kante zu einer regulären Ecke  $v|sk$  in  $E_1(K)$  mit einem Domino der Form  $sk$ .

Da  $A_0$  ein Praesudoku ist, kann  $v|s$  nicht unter  $u|s$  stehen. Also ist die Entscheidung für den Schaltprozess  $\kappa(v|sk) = v|s \in A_1$ . Also steht  $v|s$  in  $A_1$  unter  $u|s$ ,  $A_1$  kann also kein Praesudoku sein.  $\square$

**Korollar.** Sei  $D$  der vertikale konkrete D-Graph des Dominobegleiters  $VA$  von  $A$ .

Ferner sei  $K$  eine reguläre Komponente von  $D$ .

Der Schaltprozess zu  $K$  entsteht, indem auf  $E(K)$  die alte Belegung  $A_0$  durch die neue  $A_1$  ersetzt wird. Es wird ein neues Sudoku  $A^* \neq A$  erzeugt, der zugehörige Dominograph ändert sich nicht:

$$DA^* = DA . \quad (5.14)$$

Natürlich erhält man im horizontalen Fall das gleiche Ergebnis: Es entsteht ein neues Sudoku  $A^\circ$ , und der zugehörige horizontale  $D$ -Graph bleibt erhalten

$$D^\circ A^\circ = D^\circ A . \quad (5.14')$$

*Beweis.* Stellvertretend wird wieder der mittlere konkrete  $D$ -Graph  $VA$  zum Regulativ  $c$  zugrunde gelegt.

$A \setminus A_1$  ist natürlich ein Praesudoku. Da  $A_1$  eine Zifferspezialisierung der Dominobelegung von  $K$  ist, sind die Spalten von  $A_1$  auch zu den Spalten von  $c$  disjunkt. Bleibt zu prüfen, ob 2 gleichbezifferte Ecken  $v|k \in E(K)$  und  $u|k \in E' = E \setminus E(K)$  in einer gemeinsamen  $E$ -Spalte stehen können. Beide Ecken müssen in verschiedenen Hälften  $E_0, E_1$  stehen. Deren Dominobelegungen innerhalb  $V$  sind dann von der Art

$$\begin{array}{lll} u|kl & \text{oder} & u|k, \quad \text{falls } u \text{ singulär in } V. \\ v|km & & v|km . \end{array}$$

In jedem dieser Fälle sind beide Ecken benachbart. Das kann aber nicht sein, weil  $K$  als Komponente von  $D$  maximal-zusammenhängend ist.  $A^*$  erfüllt also vertikal die Sudokubedingungen. Horizontal werden beim Übergang  $A_0 \rightarrow A_1$  nur Zeilen in sich permuiert. Also sind auch die horizontalen Sudokubedingungen erfüllt, weil die Zeilen von  $A_1$  zu den entsprechenden Zeilen der anderen beiden Vertikalstreifen disjunkt sind.

Beide Sudokus  $A$  und  $A^*$  haben gleiche Dominobelegungen, also sind ihre vertikalen  $D$ -Graphen gleich.  $\square$

### Weitere konkrete $D$ -Graphen

Zunächst werden die in Abschnitt 1 konstruierten  $D$ -Graphen  $DA$  und  $D^\circ A$  eines Sudokus  $A$  in naheliegender Weise verallgemeinert. Wir lassen jetzt die ganze Blockdiagonale  $y = \begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}$  als Regulative zu (der Bezeichnungswechsel  $b = A_{22}$  ist unerheblich). Dabei übt jedes der 3 Regulative seine Wirkung aus, vertikal wie horizontal.

Damit wird der Prozess auf alle 6 Streifen von  $A$  ausgedehnt.

### Die Anordnung

$$\begin{array}{ccccc}
 a & A_{12} & A_{13} & & A_{13} \\
 A_{21} & & A_{21} & b & A_{23} \\
 A_{22} & & & A_{32} & A_{31} \quad A_{32} \quad c
 \end{array} \tag{5.15}$$

deutet darauf hin, auf welche Streifen beim Dominoprozess die 3 Regulativen  $a, b, c$  wirken. Dieser Prozess verläuft völlig analog zu dem der beiden *Prototypen* aus Abschnitt 5.1 ab, die nun mit  $D_b A$  und  $D_b^\circ A$  bezeichnet werden. In den 4 neuen Fällen werden wieder die *Zeilenmengen* der beiden *Vertikalstreifen* mit den *Spaltenmengen* von  $a$  bzw.  $c$  verglichen, und die *Spaltenmengen* der beiden *Horizontalstreifen* mit den *Zeilenmengen* von  $a$  bzw.  $c$ . Schematisch

$$\begin{array}{ccc}
 a \parallel\!||\!\parallel & \equiv & \equiv \\
 \equiv & \parallel\!||\!\parallel b \parallel\!|| & \equiv \\
 \equiv & \equiv & \parallel\!||\!\parallel c
 \end{array} \tag{5.15'}$$

### Gestalten

Ziel ist es, über simultane Schaltungen neue Sudokus zu  $A$  zu erzeugen. Dazu ist es opportun, die 6 neuen konkreten  $D$ -Graphen

$$D_a, \dots, D_c \text{ bzw. } D_a^\circ, \dots, D_c^\circ$$

zu Paketen zusammenzufügen, den sog. *Gestalten*. Diese sind Hilfskonstrukte, die keine eigenständige Bedeutung haben.

In paralleler Anordnung entstehen die beiden Gestalten

$$\begin{aligned}
 G_y A &= D_a D_b D_c && \text{vertikal} \\
 G_y^\circ A &= D_a^\circ && \text{horizontal} \\
 &= D_b^\circ && \\
 &= D_c^\circ
 \end{aligned} \tag{5.16'}$$

Diese sind Graphentripel, auch *Vertikal-* bzw. *Horizontalgestalten* genannt.

Der Parameter  $y$  wird als Regulativ in der Notation hervorgehoben, obwohl er durch  $A$  bestimmt ist. Die Referenz zu  $A$  ist verzichtbar bei festem  $A$ .

In einer weiteren Anordnung entstehen die *Winkelgestalten*, indem man die beiden  $D$ -Graphen zum gleichen Regulativ zusammenfasst:

$$W_a A = D_a D_a^\circ, \quad W_b A = D_b D_b^\circ, \quad W_c A = D_c D_c^\circ \tag{5.16''}$$

Anschaulich sieht das dann so aus:

$$\mathbf{G}_y: \begin{array}{c|c|c} a & | & | \\ \hline | & b & | \\ | & | & c \end{array} \quad \mathbf{G}_y^\circ: \begin{array}{c|c|c} a & -- & -- \\ \hline -- & b & -- \\ -- & -- & c \end{array} \quad (5.17)$$

$$\mathbf{W}_a: \begin{array}{c|c|c} a & -- & | \\ \hline | & & | \\ | & & | \end{array} \quad \mathbf{W}_b: \begin{array}{c|c|c} & b & | \\ \hline -- & -- & | \\ | & | & | \end{array} \quad \mathbf{W}_c: \begin{array}{c|c|c} & & | \\ \hline & & | \\ & & -- -- c \end{array} \quad (5.17')$$

Man hat also 5 verschiedene Gestalten, die einem Sudoku  $A$  zugeordnet sind:

$$\mathbf{G}_y A, \quad \mathbf{G}_y^\circ A, \quad \mathbf{W}_a A, \quad \mathbf{W}_b A, \quad \mathbf{W}_c A. \quad (5.17'')$$

Die Eckenmengen der  $D$ -Graphen sind durch Strecken  $-$ ,  $--$  angedeutet, entsprechend in der Vertikalen.

### Clanbildung

Seien  $y = \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$  der Parameter des Sudokus  $A$  im Sinn von Abschnitt 3.6 sowie  $\mathbf{G}_y A$  und  $\mathbf{G}_y^\circ A$  die durch ihn bestimmten Gestalten, gemäß (5.17), (5.17').

Die vertikale Gestalt  $\mathbf{G}_y A$  besteht aus 3 vertikalen  $D$ -Graphen  $D_a, D_b, D_c$  zu den Regulativen  $a, b, c$ . Diese  $D$ -Graphen bestimmen die jeweiligen Mengen

$$\Sigma_a, \quad \Sigma_b, \quad \Sigma_c$$

ihrer *regulären* Komponenten.

Die Clans entstehen durch *simultane* Schaltprozesse auf den Gestalten, die auf den elementaren Schaltprozessen beruhen. Diese Prozesse werden in 2 Schritten durchgeführt.

Jede Teilmenge  $\Theta$  der Menge  $\Sigma$  der regulären Komponenten eines  $D$ -Graphen  $D$  löst einen simultanen Schaltprozess  $N_\Theta$  aus, indem in allen Komponenten in  $\Theta$  der elementare Prozess durchgeführt wird. Es entsteht ein neues Sudoku  $A_\Theta = N_\Theta A$ , sofern  $\Theta$  nicht leer ist. Denn die elementaren Schaltprozesse in  $D$  sind *unabhängig*, da die entsprechenden Eckenmengen nach Lage und Belegungen disjunkt sind.

Im 2. Schritt werden die Prozesse auf die Gestalt

$$\mathbf{G}_y A = D_a D_b D_c$$

ausgedehnt. Zu jedem System  $\Theta_y = (\Theta_a, \Theta_b, \Theta_c)$  von Teilmengen  $\Theta_a \subset \Sigma_a, \dots$  – wir notieren  $\Theta_y \subset \Sigma_y = (\Sigma_a, \Sigma_b, \Sigma_c)$  für die komponentenweise Inklusion – werden streifenübergreifend simultane Schaltprozesse  $N_{\Theta_y}$  durchgeführt, indem in jedem der  $D$ -Graphen die Prozesse zu den Mengen  $\Theta_a, \dots$  geschaltet werden. Es entsteht

ein neues Sudoku  $A_{\Theta_y} = N_{\Theta_y}A$ , sofern  $\Theta_y \neq (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$  ist. Denn die Schaltprozesse in den 3 D-Graphen sind *unabhängig*, da sie sich nur in den jeweiligen 3er-Zeilen abspielen, was die Sudokueigenschaften vertikal wie horizontal nicht beeinträchtigt.

Mit dem Regularsystem  $\Sigma_y$  zu  $G_y$  wird der *Clan zur Vertikalgestalt*  $G_y$  definiert als die Sudokumenge

$$Cl_y A = \{A_\Theta : \Theta \subset \Sigma_y A\},$$

auch kurz der *Vertikalclan* genannt.

Es gelten folgende *Eigenschaften*:

- (a)  $A_{\Theta_1} = A_{\Theta_2} \iff \Theta_1 = \Theta_2$ ; speziell  $A_\Theta \neq A$  für  $\Theta \neq \emptyset$ .
- (b) Alle Clanmitglieder haben gleichen Parameter  $y$ .
- (c) Alle Clanmitglieder haben die gleiche Vertikalgestalt

$$G_y A_\Theta = G_y A \text{ für alle } \Theta \subset \Sigma_y.$$

Denn auf dem Parameter  $y$  liegen die Regulativen  $a, \dots$ , die konstant bleiben.

Völlig analog gelangt man zum Horizontalclan. Die Horizontalgestalt

$$G_y^\circ A = \begin{matrix} D_a^\circ \\ D_b^\circ \\ D_c^\circ \end{matrix} \text{ besteht aus den dualen } D\text{-Graphen } D_a^\circ, \dots$$

Diese bestimmen deren Mengen  $\Sigma_a^\circ, \dots$  von *regulären* Komponenten, und damit das *duale* Regularsystem  $\Sigma_y^\circ = (\Sigma_a^\circ, \Sigma_b^\circ, \Sigma_c^\circ)$ .

Mit den Schaltungen  $N_\Theta^\circ$  zu  $\Theta \subset \Sigma_y^\circ$  entsteht der *Clan zur Gestalt*  $G_y^\circ$

$$Cl_y^\circ A = \{A_\Theta = N_\Theta^\circ : \Theta\}.$$

Es gelten die analogen Eigenschaften zu (5.18).

Wir sagen, dass ein Paar  $D, D^\circ$  aus einem vertikalen und einem horizontalen  $D$ -Graphen zu  $A$  sei in *disjunkter Lage*, wenn sie keine Ecken gemein haben.

Für den alternativen Fall gilt

**Lemma 5.2.** *Sei das Paar  $D, D^\circ$  nicht in disjunkter Lage, etwa in folgender Situation:*

$$D_a : \begin{matrix} a \\ E_0 & b & E_1^\circ \\ E_1 \end{matrix} : D_b^\circ \quad \text{mit gleichen Eckenmengen } E_0 = E_1^\circ.$$

*Dann sind vertikale und horizontale Schaltprozesse nicht mehr unabhängig.*

*Die beiden Clans haben nur den Clangründer  $A$  gemeinsam*

$$Cl_y A \cap Cl_y^\circ A = \{A\}. \tag{5.19}$$

*Beweis.* Ein durch einen elementaren Schaltprozess auf  $D_a$  entstandenes Präsudoku verändert immer die Belegung auf der gemeinsamen Eckenblockmenge  $E_0 = E_1^\circ$ , verändert also auch die „alte“ Belegung von  $D_b^\circ$  durch  $A$ . Ein zu  $A$  gehöriger Schaltprozess auf  $D_b^\circ$  ist somit nicht möglich.  $\square$

Eine weitere Clanbildung zu  $A$  gründet sich auf die Winkelgestalten

$$W_a A = D_a D_a^\circ, \quad W_b A = D_b D_b^\circ, \quad W_c A = D_c D_c^\circ.$$

Sie sind in disjunkter Lage: Ihre  $D$ -Graphen haben keine Ecken gemein.

Mit den Mengen  $\Sigma_a, \Sigma_a^\circ \dots$  der regulären Komponenten der  $D_a, D_a^\circ$  werden wieder Teilmengensysteme

$$\Theta_a = (\Theta_a, \Theta_a^\circ) \subset \Sigma^a = (\Sigma_a, \Sigma_a^\circ)$$

gebildet.

Diese geben zu simultanen Schaltprozessen  $N'_{\Theta_a}$  Anlass, und damit zu neuen Sudokus

$$A_{\Theta_a} = N'_{\Theta_a} A \text{ etc.}$$

Hier muss jedoch vermieden werden, dass Sudokus auftreten, die schon in den beiden Clans  $Cl_y A, Cl_y^\circ A$  vorkamen. Paare der Form

$$(\Theta_a, \emptyset) \quad \text{und} \quad (\emptyset, \Theta_a^\circ) \tag{\dagger}$$

dürfen daher nicht zugelassen werden, um Schaltprozesse auf einem einzigen Streifen auszuschließen. Es werden zur Schaltung nur Paare  $\Theta' = (\Theta'_a, \Theta'_a^\circ)$  von nichtleeren Mengen verwendet. Es entstehen mit

$$CIW_a A = \{A_{\Theta'} : \Theta'\} \text{ etc.}$$

die zu den 3 Winkelgestalten gehörigen Teilclans von  $A$ :

$$CIW_a A, \quad CIW_b A, \quad CIW_c A,$$

die sich disjunkt zum *diagonalen Winkelclan*  $CIW_y A$  von  $A$  zusammensetzen.

Keines von ihnen enthält  $A$  und sie sind paarweise disjunkt, und sie sind disjunkt zu den anderen beiden Clans. Die Vereinigung aller Teilclans ist dann der *Diagonal-clan*  $Clan_d A$  von  $A$ .

Damit wurde bewiesen der

**Satz 5.4.** Sei  $A$  ein Sudoku mit Parameter  $y = \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$ , der als Regulativ fungiert.

(a) *Clanzerlegung*

Die 5 Teilclans von  $A$  sind Sudokumengen mit folgenden Eigenschaften:

Die Clans  $Cl_y A$  und  $Cl_y^\circ A$  enthalten  $A$ ,  $A$  liegt nicht in den Winkelclans.

Jedes Clanmitglied  $A^*$  hat Parameter  $y$ .

In den Teilclans bleiben die zugehörigen Gestalten erhalten

$$\begin{aligned} G_y A^* &= G_y A && \text{für } A^* \text{ aus } Cl_y A \\ G_y^\circ A^* &= G_y^\circ A && \text{für } A^* \text{ aus } Cl_y^\circ A \\ W_a A^* &= W_a A && \text{für } A^* \text{ aus } CIW_a A \text{ etc.} \end{aligned} \tag{5.20}$$

Der Winkelclan zu  $\gamma$  zerlegt disjunkt in seine Teilclans

$$CIW_{\gamma}A = CIW_a A \cup CIW_b A \cup CIW_c A, \quad (5.21)$$

er enthält nicht  $A$ .

Der Diagonalclan von  $A$  ist, bis auf  $A$  disjunkte, Vereinigung der Teilclans

$$Clan_d A = Cl_{\gamma} A \cup Cl^{\circ}_{\gamma} A \cup CIW_{\gamma} A. \quad (5.21')$$

(b) Anzahlen

Seien  $m_a, m_b, m_c$  die Anzahlen der regulären Komponenten von  $D_a, D_b, D_c$ , und  $m_a^{\circ}, m_b^{\circ}, m_c^{\circ}$  die Anzahlen der regulären Komponenten von  $D_a^{\circ}, D_b^{\circ}, D_c^{\circ}$ .

Dann ist die Anzahl des Winkelclans

$$\#CIW_{\gamma} A = (2^{m_a} - 1)(2^{m_a^{\circ}} - 1) + (2^{m_b} - 1)(2^{m_b^{\circ}} - 1) + (2^{m_c} - 1)(2^{m_c^{\circ}} - 1). \quad (5.22)$$

$m_a = 0$  oder  $m_a^{\circ} = 0$  bedeutet natürlich, dass  $D_a$  oder  $D_b$  keine reguläre Komponente hat, der Winkelclan  $CIW_a A$  ist dann leer. Die Anzahl des Diagonalclans ist

$$\#Clan_d A = 2^{m_a+m_b+m_c} + 2^{m_a^{\circ}+m_b^{\circ}+m_c^{\circ}} + \#CIW_{\gamma} A - 1 \quad (5.22')$$

( $A$  wurde doppelt gezählt!).

Der Beweis wurde bereits in einzelnen Schritten durchgeführt. Die Faktoren vom Typ  $2^m - 1$  zeigen an, dass die leere Menge in den Komponentenmengen der  $(\Sigma_a, \Sigma_b)$  weggelassen wird.

Das Maximum für die  $m_a, m_a^{\circ} \dots$  liegt noch nicht vor. Aber es gibt Sudokus  $A$ , für die die  $m_a, m_a^{\circ} \dots$  sämtlich gleich 3 sind.

**Bemerkung 5.3.** In Grenzfällen der Exponenten sind die Clananzahlen:

- alle  $m = m^{\circ} = 0$ : Dann ist  $\#Clan_d A = 1$ , also  $Clan_d A = \{A\}$ .
- alle  $m = m^{\circ} = 3$ : Die Clangröße ist  $\#Clan_d A = 1170$ .

Sollen sämtliche Clanmitglieder explizit bestimmt werden, ist folgendes Vorgehen hilfreich. Wir beschränken uns auf den Teilclan  $Cl_{\gamma} A$  zur Gestalt  $G_{\gamma} A$ .

Das Auftreten der leeren Menge in einer der Komponenten von  $\Sigma_{\gamma}$  bedeutet doch, dass in dem zugehörigen Vertikalstreifen „nichts passiert“, also keine Schaltung stattfindet.

Für  $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$  erhält man also  $A$ . Tritt  $\emptyset$  an genau 2 Stellen auf, erhält man die Clans zu den einzelnen  $D$ -Graphen  $D_a, D_b, D_c$ , also  $Cl'_a, Cl'_b, Cl'_c$ . Taucht  $\emptyset$  nur einmal auf, erhält man die Clans

$$Cl'_{ab}, \quad Cl'_{ac}, \quad Cl'_{bc}$$

zu den 2-gliedrigen Gestalten  $G_{ab} = D_a D_b, G_{ac} = D_a D_c, G_{bc} = D_b D_c$ .

Kommt  $\emptyset$  in den Schaltungen nicht vor, entsteht der Teilclan  $Cl'_{\gamma}$  zu  $G_{\gamma}$ . Der ' bedeutet, dass in jedem zugehörigen Vertikalstreifen Schaltungen auftreten. Wenn

also in einem der  $D$ -Graphen  $D_a, \dots$  keine regulären Komponenten vorliegen, ist  $\text{Cl}'_{\gamma}$  leer.

Alle diese Teilclans sind disjunkt und enthalten  $A$  nicht.

**Bemerkung 5.4.** Der Clan  $\text{Clan}_{\gamma}$  zur 3-gliedrigen Gestalt  $\mathbf{G}_{\gamma}$  zerlegt sich disjunkt in Teilclans

$$\text{Cl}_{\gamma}A = \text{Cl}'_{\gamma}A \cup \text{Cl}'_{ab} \cup \text{Cl}'_{ac} \cup \text{Cl}'_{bc} \cup \text{Cl}'_a \cup \text{Cl}'_b \cup \text{Cl}'_c \cup \{A\}. \quad (5.23)$$

Eine analoge Zerlegung besteht für den dualen Clan  $\text{Cl}^{\circ}_{\gamma}A$ .

### Der Schaltgraph

Die Schaltprozesse in einem Sudokuclan gestatten eine graphentheoretische Deutung.

Als ein universelles Modell bietet sich folgender Graph an, den man als *generischen Schaltgraph* bezeichnen kann.

Die Eckenmenge  $E$  setzt sich aus 5 disjunkten nichtleeren Mengen  $E_i$  und einer ausgezeichneten Ecke  $z$ , dem *Erzeuger*, zusammen:

$$E = \bigcup_i E_i \cup \{z\}, \quad i = 1, \dots, 5,$$

mit folgenden Eigenschaften

- (a)  $z$  ist mit jeder Ecke aus  $E^0 = \bigcup_i E_i$  benachbart.
  - (b) Jedes  $E_i$  enthält eine *Endecke*  $z_i^*$ , die mit allen Ecken aus  $E_i \cup \{z\}$  benachbart ist.
  - (c) In jedem  $E_i$  sind 2 Ecken  $x, y$  entweder benachbart oder durch einen 2er-Weg verbindbar.
  - (d) Je 2 Ecken in verschiedenen Eckenmengen  $E_i \neq E_j$  sind durch einen 2er-Weg verbindbar.
- (5.24)

Sei nun  $A$  ein Sudoku zum Parameter  $\gamma$ . Wir gehen hypothetisch davon aus, dass in jedem der 5 Teilclans  $\text{Cl} A$  Schaltungen möglich sind, das Regularsystem  $\Sigma$  also nicht leer ist. Für jedes Teilsystem  $\Theta \subset \Sigma$  ergibt die Schaltung  $N_{\Theta}$ , angewandt auf den Clangründer/Erzeuger  $A$  ein Sudoku  $A_{\Theta}$  im Teilclan, mit einem Endsudoku  $A^* = A_{\Sigma}$ . Die Zuordnung  $A \rightarrow A_{\Theta}$  stiftet eine Kante, die ungerichtet ist, da der Operator  $N_{\Theta}$  eine Involution ist:  $N_{\Theta}^2 = \text{id}$ .  $A$  ist also zu allen Sudokus im Clan benachbart.

In jedem Teilclan  $\text{Cl}$  finden weitere Schaltungen statt, indem Operatoren  $N_{\Theta'}$  auf Sudokus  $A_{\Theta}$  angewandt werden. Diese sind vertauschbar und genügen der Iteration

$$N_{\Theta'} = N_{\Theta' \setminus \Theta} \circ N_{\Theta} \quad \text{für } \Theta \subset \Theta'.$$

Allgemein wird dann

$$N_{\Theta'} A_{\Theta} = A_{\Theta' \vee \Theta} = N_{\Theta} A_{\Theta'} \quad \text{für } \Theta, \Theta' \subset \Sigma,$$

wobei

$$\Theta' \vee \Theta = (\Theta' \setminus \Theta) \cup (\Theta \setminus \Theta')$$

die disjunkte Vereinigung ist.

Hierbei werden alle mengentheoretischen Operationen bei den Systemen in  $\Sigma$  komponentenweise verstanden. Die totale Schaltung bewirkt

$$N_{\Sigma} A_{\Theta} = A_{\Theta^{\wedge}} \quad \text{mit dem Komplement } \Theta^{\wedge} \text{ in } \Sigma.$$

Alle Schaltungen stellen ungerichtete Kanten her, danach sind die Sudokus  $A_{\Theta'}$  und  $A_{\Theta}$  zu  $A_{\Theta' \vee \Theta}$  benachbart, sie selbst sind durch einen 2er-Weg verbunden

$$A_{\Theta} \xrightarrow{} A_{\Theta' \vee \Theta} \xrightarrow{} A_{\Theta'}.$$

Aber die „komplementären Sudokus“  $A_{\Theta}$ ,  $A_{\Theta^{\wedge}}$  in einem Teilclan sind stets benachbart.

Wir haben festgestellt

**Bemerkung 5.5.** Werden die Anzahlen  $\#E_i$  groß genug angesetzt, kann jeder Clan eines Sudokus als Teilgraph des generischen Schaltgraphen angesehen werden mit den natürlichen Nachbarschaftsrelationen.

Die Regularsysteme der Sudokus sind überwiegend klein, der Clan besteht oft nur aus dem Gründer. Der Aspekt von Schaltgraphen führt wohl eher für Fixsudokus zu einer konkreten Aussage.

## Zur Parametrisierung

Satz 5.4 hat Folgen für das Starke Fortsetzungsproblem, das in Abschnitt 3.4 ange- sprochen und von Schönhage numerisch gelöst wurde. Denn mit jedem Sudoku  $A$  zum Parameter  $y$  hat auch sein Clan den Parameter  $y$ . Es gilt das

**Korollar.** Für jedes Sudoku  $A$  zum Parameter  $y$  liegt sein Diagonalclan in der  $y$ -Faser

$$Clan_d A \subset \Phi^{-1} y. \quad (5.25)$$

Die Überdeckung der Faser  $\Phi^{-1} y$  durch Diagonalclans zum Parameter  $y$  kann durch eine Regularitätsverteilung der Faser aufgefasst werden.

Die Anzahlbestimmung von  $\#\Phi^{-1} y$  für alle  $y \in Y$  ist und bleibt ein rein numerisches Problem.

## 5.4 Der Stamm eines Sudokus und der Großclan

Bisher stand bei der Clanbildung der Gesichtspunkt der Parametrisierung von Sudoku im Vordergrund. Die drei Regulativen eines Sudokus waren in der Blockdiagonalen angeordnet und stellten den Parameter des zugehörigen Clans dar. Es gibt drei Gründe, von dieser Beschränkung abzuweichen: der Rechteckeckeffekt, der Symmetriegesichtspunkt und der fundamentale Strukturbegriff des Stammes.

Der Rechteckeckeffekt, im vergangenen Abschnitt angesprochen, ist ein bestimmter Schaltprozess, der aus einem Sudoku ein neues erzeugt. Eine gute Clantheorie sollte alle diese Effekte subsumieren. Nun stößt man bei zufälliger Auswahl eines Sudokus häufig auf einen Rechteckeckeffekt, meist liegen sogar gleich mehrere vor. In folgendem Beispiel liegen gleich 4 Ziffernpaare, die solche Effekte auslösen, auf dem 1. und 2. Diagonal-Block. Die Ziffernpaare sind (95) im 1. Block und (87), (91), (23) im 2. Block.

Das Paar (23) erzeugt ein vertikales Rechteck, die anderen horizontale Rechteckeckeffekte.

$$Y = \begin{array}{|ccc|ccc|ccc|} \hline & 9 & 4 & 1 & 7 & 6 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ & 8 & 3 & 6 & 1 & 9 & 5 & 2 & 7 & 4 \\ & 5 & 2 & 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 9 & 1 \\ \hline & 3 & 7 & 5 & 6 & 8 & 9 & 1 & 4 & 2 \\ & 4 & 8 & 2 & 5 & 7 & 1 & 9 & 3 & 6 \\ & 6 & 1 & 9 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 7 \\ \hline & 7 & 6 & 3 & 9 & 1 & 8 & 4 & 2 & 5 \\ & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 6 & 9 \\ & 2 & 9 & 8 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \quad (5.26)$$

Die Blöcke der Blockdiagonalen sind aber bisher Regulativen, gehören somit keiner Eckenmenge eines bisherigen  $D$ -Graphen an. Die durch obige Rechteckeckeffekte entstehenden Sudokupaae gehörten dann keinem der bisherigen Clans an.

Die Forderung einer guten Clantheorie lautet also: Bei gegebenem Sudoku sollte jeder der 9 Blöcke als Regulativ auftreten. Der Gesichtspunkt der Symmetrie legt dies ohnehin nahe.

Wir schreiben die Blockfigur eines Sudokus  $A$  in der Form

$$[A] = (a^{ij}) \quad \text{mit } i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (5.27)$$

und fassen sie als *Regulativmatrix* auf. Jedes Regulativ  $a^{ij}$  bestimmt nach Abschnitt 5.1 und 5.3 zwei  $D$ -Graphen, und zwar definieren die Zeilenmengen bzw. Spaltenmengen von  $a^{ij}$  einen vertikalen bzw. horizontalen  $D$ -Graphen

$$D_{ij}A \quad \text{bzw.} \quad D_{ij}^\circ A.$$

Wie in Abschnitt 5.3 ausgeführt, beruhen simultane Schaltungen und damit Clanbildung auf der Zusammenfügung von  $D$ -Graphen von  $A$  zu geeigneten Figuren, den Gestalten.

Im Folgenden werden nun alle möglichen Gestalten der  $D_{ij}$ ,  $D_{ij}^\circ$  gebildet, die „disjunkte Schaltungen“ erlauben.

## Winkelgraphen

Jedes Regulativ definiert die  $(i, j)$ -te *Winkelgestalt*

$$W_{ij}A = \begin{matrix} a^{ij} & D_{ij}^\circ A \\ D_{ij}A & \end{matrix}.$$

Die Lage der Eckenmengen der  $D_{ij}$ ,  $D_{ij}^\circ$  – hier durch Strecken angedeutet – hängt von der Position der Regulative ab:

$$\begin{array}{c|c|c} | & | & - - a^{13} \\ a^{21} - - , & - a^{22} - , & | . \\ | & | & | \end{array} \quad (5.27')$$

Die Regulativmatrix von  $A$  produziert also 18  $D$ -Graphen bzw. 9 Winkelgestalten.

Die Figur aller Winkelgestalten von  $A$  heißt der *Stamm von A*

$$\mathbf{ST}(A) = (W_{ij}A).$$

Sinnigerweise heißen die  $D$ -Graphen  $D_{ij}$  und  $D_{ij}^\circ$  die *Zweige des Stammes* bzw. von  $W_{ij}$ .

**Bemerkung 5.6.** Der Stamm eines Sudokus  $A$  ist ein wichtiges strukturelles Konzept der Sudokutheorie. Er spiegelt die inneren Eigenschaften eines Sudokus wider und lässt den Kompliziertheitsgrad durch die Singularitäten seiner  $D$ -Graphen erkennen. Hinter den 18 Zweigen des Stammes stecken natürlich deren Komponentenzerlegungen als abstrakte  $D$ -Graphen. Aber um diese Zerlegung bei gegebenem  $A$  konkret herzustellen, braucht man die Zweige in ihrer konkreten Fassung mit der durch  $A$  bestimmten Dominobelegung. Wir wollen auch den Stamm *konkret* nennen, wenn eine solche Dominobelegung seiner Zweige vorliegt, diese also konkrete  $D$ -Graphen sind.

Aber als „Winkelfigur“ erfüllt der Stamm eines Sudokus über seine strukturelle Bedeutung hinaus eine weitere Funktion, er erzeugt Winkelclans.

Seien  $m_{ij}$ ,  $m_{ij}^\circ$  die Exponenten zur Winkelgestalt  $W_{ij}A$  mit Regulativ  $a^{ij}$ , also jeweils die Anzahl der regulären Komponenten der  $D$ -Graphen  $D_{ij}$  und  $D_{ij}^\circ$ .

Zur Definition des Clans zu  $W_{ij}$  wird, wie schon in Abschnitt 5.3 für die Winkelfigur  $W_a$ , in *jedem* der beiden dualen Zweigen eine Schaltung vorgenommen, sonst ist der Clan leer. Das hat zur Folge, dass die Anzahl des Clans die folgende ist:

$$\#\text{Cl } W_{ij} = (2^{m_{ij}} - 1)(2^{m_{ij}^\circ} - 1).$$

Dann ist der *Clan des Stammes STA* definiert als

$$\text{ClanSTA} = \bigcup_{i,j} \text{Cl} W_{ij} A$$

**Lemma 5.3.** Die 9 Winkelclans von  $A$  sind paarweise disjunkt, sie enthalten  $A$  nicht.

Die Anzahl ist

$$\#\text{ClanSTA} = \sum_{i,j} (2^{m_{ij}} - 1)(2^{m_{ij}^\circ} - 1). \quad (5.28)$$

*Beweis.* Zunächst: In jedem  $W$ -Clan  $W_{ij}$  wird in jedem der beiden dualen Zweige  $D_{ij}, D_{ij}^\circ$  eine Schaltung vorgenommen, sonst ist der Clan leer.

In jedem Paar von verschiedenen  $W$ -Graphen, in denen die Regulative *nicht* in einem Streifen liegen, existiert ein Block, der Eckenmenge des einen, aber nicht des anderen ist. Dann wird auf einem geschaltet, auf dem anderen nicht.

Liegen beide Regulative auf einem Streifen, so bleibt eines der Regulative bei seinen Schaltungen fest, wird aber als Eckenmenge des anderen  $W$ -Graphen geschaltet. Die geschalteten Sudokus in beiden zugehörigen Clans unterscheiden sich stets mindestens auf einer Eckenmenge.  $\square$

### Streifen-Gestalten

Mit dem Stamm eines Sudokus werden nun 6 Gestalten eingeführt, die den Streifen der Regulativmatrix  $[A]$  zugeordnet sind. Den 3 von 1–3 durchnummerierten Horizontalstreifen werden Gestalten  $G_i$  zugeordnet, deren vertikale  $D$ -Graphen den  $i$ -ten horizontalen Streifen als Regulative besitzen, also

$$G_i = D_{a^{i1}} D_{a^{i2}} D_{a^{i3}}.$$

Dabei ist es sinnvoll, die  $D$ -Graphen *inklusive* ihrer Regulative  $a^{ij}$  aufzufassen.

Analog hat man die dualen Gestalten  $G_i^\circ$ , deren horizontale  $D$ -Graphen den  $i$ -ten Vertikalstreifen von  $[A]$  als Regulativ haben, also

$$G_i^\circ = \begin{matrix} D_{a^{1i}}^\circ \\ D_{a^{2i}}^\circ \\ D_{a^{3i}}^\circ \end{matrix}.$$

Für den simultanen Schaltprozess auf den  $G_i$  und  $G_i^\circ$  können die Prototypen  $G_y, G_y^\circ$  aus Abschnitt 5.3 als Muster dienen. Denn für die Entstehung der  $D$ -Graphen  $D_a, \dots$  von  $G_y$  ist es irrelevant, ob die Regulative  $a^\wedge, \dots$  oben, in der Mitte oder unten stehen: Es wird immer der gleiche  $D$ -Graph entstehen. Daher laufen für die neuen Gestalten  $G_i, G_i^\circ$  die analogen simultanen Schaltprozesse ab wie für die Prototypen. Diese produzieren Clans

$$\text{Cl}_i A \quad \text{und} \quad \text{Cl}_i^\circ A$$

mit analogen *Eigenschaften*

- (a) Jeder Clan  $\text{Cl}_i A$  enthält den Gründer  $A$ , auch im dualen Fall.
- (b) Die Schaltprozesse in den  $D$ -Graphen  $D_{ij}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) sind unabhängig, die Clanzahl ist daher

$$\#\text{Cl}_i A = 2^{k_i} \quad \text{mit } k_i = \sum_j m_{ij} .$$

- (c) Die Clans  $\text{Cl}_i A$  sind – bis auf  $A$  – disjunkt.
- (d)  $\text{Cl}_i$  und  $\text{Cl}_j^\circ$  sind disjunkt

Analoges gilt auch im dualen Fall.

Denn: Wenn man nirgends schaltet, entsteht  $A$ . Daher gilt (a).

Da die 3 Eckenmengen der  $G_i$  disjunkt sind, sind die Schaltungen unabhängig.

Die Dominobelegungen der 3  $D$ -Graphen von  $G_i$  bestehen horizontal aus 3 disjunkten Mengen. Eine Schaltung erhält also die Sudokubedingung in den Zeilen. Also gilt (b).

Da für verschiedene Streifenindizes  $i \neq i'$  der Regularstreifen des einen auf dem Streifen von Eckenhälfte des anderen liegt, wird auf letzterem geschaltet, auf ersterem aber nicht. Aber geschaltet wird immer auf beiden Hälften der Eckenmengen. Also gilt (c).

Zu (d): Wo auch immer für 2 duale  $D$ -Graphen  $D_i, D_j^\circ$  zu  $i, j$  ihre Regulativen liegen, es gibt immer 2 disjunkte Eckenhälfte von beiden.

Wir können also feststellen:

**Bemerkung 5.7.** Die Streifenclans, vertikal und dual, sind sämtlich bis auf den Gründer  $A$  disjunkt. Sie ergeben den gesamten *Streifen-Clan von A*

$$\text{Cl}_{str} A = \bigcup_i \text{Cl}_i A \cup \bigcup_j \text{Cl}_j^\circ A . \quad (5.29)$$

## Die axialen Clans

Dazu gehören die diagonalen Teilclans  $\text{Clan}_\gamma A$  und  $\text{Clan}_\gamma^\circ A$  aus Abschnitt 5.3. Sie gehören zu den Gestalten  $G_\gamma$  und  $G_\gamma^\circ$  mit der Blockdiagonale  $\gamma = a/b/c$  als Regulativ.

Aus Symmetriegründen gesellen sich die Gestalten und Clans zur *Codiagonale* hinzu:

$$z = \begin{array}{ccc} & a^{13} & \\ & a^{22} & \end{array} \quad \text{statt} \quad \gamma = \begin{array}{ccc} & a^{11} & \\ & a^{22} & \\ & a^{33} & \end{array} .$$

Es entstehen Gestalten  $G_z$  mit zugehörigen Clans  $\text{Cl}_z A$  und  $\text{Cl}_z^\circ A$  als gleichberechtigte Bildungen. Es liegt der *axiale Fall* vor.

Diese Clans sind aber alles andere als disjunkt zueinander und zu den Streifenclans.

Um dies zu erzwingen, muss man bei den simultanen Schaltprozessen eine *Reduktion* vornehmen:

Es muss stets mindestens in 2 verschiedenen  $D$ -Graphen der Gestalten geschaltet werden. Es entsteht ein *reduzierter Clan*, der mit  $\text{Cl}'$  bezeichnet wird. Ist eine Doppelschaltung mangels regulärer Komponenten nicht möglich, so ist  $\text{Cl}'$  leer.

Eine solche Reduktion wurde bereits bei den Winkelgestalten in Abschnitt 5.3 vorgenommen.

Wir beschränken uns bei den verschiedenen axialen Clans auf die *reduzierten* Teilclans und bilden mit deren Vereinigung

$$\text{Cl}'_{ax}A = \text{Cl}'_y \cup \text{Cl}'^{\circ}_y A \cup \text{Cl}'_z A \cup \text{Cl}'^{\circ}_z A, \quad (5.30)$$

den *reduzierten axialen Clan* von  $A$ .

Zusammen mit dem – nicht reduzierten – Streifenclan und dem reduzierten Winkelclan entsteht der *Großclan von  $A$* :

$$\text{CLAN } A = \text{Cl}_{str}A \cup \text{Cl}'_{ax}A \cup \text{ClanSTA}. \quad (5.31)$$

**Satz 5.5.** Sei  $A$  ein Sudoku mit den Exponenten  $m_{ij}$  und  $m_{ij}^{\circ}$  seines Stammes. Ferner werde

$$k_i = \sum_j m_{ij} \quad \text{und} \quad k_j^{\circ} = \sum_i m_{ij}^{\circ}$$

gesetzt.

Der Großclan  $\text{CLAN } A$  setzt sich disjunkt – bis auf den Gründer – aus seinen Teilclans zusammen. Seine Anzahl ist daher die Summe aller Teilanzahlen

$$\#\text{Cl}_{str}A = \sum_i (2^{k_i} - 1) + \sum_j (2^{k_j^{\circ}} - 1) + 1 \quad (5.32)$$

$$\#\text{ClanSTA} = \sum_{ij} (2^{m_{ij}} - 1)(2^{m_{ij}^{\circ}} - 1) \quad (5.32')$$

und den Anzahlen zu den axialen Gestalten

$$\#\text{Cl}'_{ax}A.$$

Bei den reduzierten axialen Clans sind die Anzahlen komplizierter

$$\#\text{Cl}'_yA = (2^{m_a} - 1)(2^{m_b} - 1)(2^{m_c} - 1) + (2^{m_a} - 1)(2^{m_b} - 1) + \dots + (2^{m_a} - 1)(2^{m_c} - 1). \quad (5.32'')$$

Die letzte 1 in (5.32) zählt den Gründer.

*Beweis.* Zu (5.32) wurde die Disjunktheit der Teilclans bewiesen. Die Anzahlformel besteht nach der analogen Formel für die Diagonalclans in Satz 5.4. (5.32') gilt nach Lemma 5.3.

Bleibt zu zeigen, dass die axialen reduzierten Clans zueinander und zu den anderen disjunkt sind, und für den Prototyp  $\text{Cl}'_y$  die Anzahlformel (5.32'') besteht.

Zunächst enthält ein reduzierter Clan nicht den Gründer, da ja stets geschaltet wird oder der Clan leer ist.

Die beiden dualen Diagonalclans enthalten nur  $A$ , die reduzierten sind also disjunkt. Ferner sind die beiden reduzierten axialen Clans disjunkt:

$$\text{Cl}'_y \cap \text{Cl}'_z = \emptyset.$$

Denn durch die Doppelschaltung wird in dem Regulativkreuz

$$\begin{array}{ccc} a^{11} & & a^{13} \\ & a^{22} & \\ a^{31} & & a^{33} \end{array}$$

die gemeinsame Einzelschaltung zum Regulativ  $a^{22}$  ausgeschlossen.

Dass der reduzierte Diagonalclan  $\text{Cl}'_y$  zur vertikalen Gestalt  $G_y$  disjunkt ist zu den vertikalen Streifenclans, geht wieder aus der Lage der Regulative hervor:

$$\begin{array}{ccccccccc} G_y & & G_1 & & G_2 & & G_3 \\ * & & * & * & * & & \\ & * & & & * & * & * \\ & & * & & & & \\ & & & & & * & * & * \end{array}$$

Zu jeder Schaltung in einem der  $G_i$  und jeder Doppelschaltung in  $G_y$  geschieht eine Schaltung in einer Eckenhälfte von  $G_y$ , auf der in  $G_i$  ein Regulativ steht.

Der Anzahlformel (5.32'') liegt die disjunkte Zerlegung von  $\text{Cl}'_y$  in ihre Teilclans zugrunde

$$\text{Cl}'_y = \text{Cl}_{abc} \cup \text{Cl}_{ab} \cup \text{Cl}_{ac} \cup \text{Cl}_{bc},$$

in denen die 3- und 2-fach Schaltungen durch die Regulative erkennbar sind.

Der Stammclan ist zu allen anderen Clans disjunkt, weil ihm vertikale und horizontale Schaltungen zugleich zugrunde liegen.  $\square$

Mit Satz 5.5 ist eine Symmetrisierung des Clanbegriffs erreicht. Den Großclan als Sudokumenge bestimmen zu wollen, ist kaum sinnvoll, möglich ist es in jedem Fall. Aber die Anzahl kann in Einzelfällen durchaus interessieren. Schließlich liegt der Charme der Anzahlformeln darin, dass sie für alle Sudokus gelten. Im Prinzip sind die Anzahlen der Großclans also bekannt. Sie sind in konkreten Fällen bestimmbar, wenn man die Exponenten des Stammes kennt. Dies erfordert aber die Komponentenzerlegung aller Zweige, ein nicht nur per Hand aufwändiges Unterfangen.

Welche Werte können die Exponenten haben? In Kapitel 6 wird sich herausstellen:

**Bemerkung 5.8.** Wenn alle Exponenten eines Sudokus verschwinden, wird man es *total-singulär* nennen. Dann besteht der Großclan nur aus dem Gründer. Die Frage ist: Gibt es solche Sudokus? Dagegen gibt es Sudokus, für die alle Komponenten regulär sind, also *total-reguläre* Sudokus. Eine obere Schranke für die Exponenten ist 4.

Denn ein  $D$ -Graph hat 18 Ecken und die kleinste reguläre Komponente ist ein Rechteck, davon kann es also höchstens 4 geben. In einigen Fällen sind alle Exponenten gleich 3.

Wenn viele Exponenten 0 sind, sind viele Teilclans leer. Große Großclans dürften nicht sehr häufig auftreten.

Es sei bemerkt, dass der Diagonalclan aus Abschnitt 5.3 nicht notwendig im Großclan enthalten ist. Er wurde ja reduziert, um die Disjunktheit weiterer Clans zu gewährleisten.

### Das Beispiel $Y$

Wir wollen die Anzahlformeln an diesem Beispiel erläutern.

Jeder Rechteckeffekt beruht auf einem regulären Rechteck als Komponente eines Zweiges. Es steuert also eine 1 zur Anzahl des Großclans bei. Die zugehörigen Regulativen und damit die Lage der Zweige kann man leicht erkennen:

$$D_{12}^\circ: \begin{array}{c|cc} 9 & 5 \\ \hline 5 & 9 \end{array} \quad D_{21}^\circ: \begin{array}{c|cc} 9 & 1 \\ \hline 1 & 9 \end{array} \quad D_{23}^\circ: \begin{array}{c|cc} 7 & 8 \\ \hline 8 & 7 \end{array} \quad D_{12}: \frac{2}{3} \quad \frac{3}{2}$$

Der 1-gliedrige Beitrag zur Anzahl ist 4. Aber der Winkelclan zu  $W_{12} = D_{12}D_{12}^\circ$  ist nichttrivial, er steuert einen 2-gliedrigen Beitrag bei:

$$(2^1 - 1)(2^1 - 1) = 1.$$

Zusammen mit  $Y$  ergibt sich die Abschätzung

$$\#\text{CLAN}(Y) \geq 6.$$

Die maximale Schaltung zu den 4 Zweigen führt auf folgendes Clanmitglied

$Y^\wedge = 4$	$\begin{array}{ccc ccc ccc} 5 & 4 & 1 & 7 & 6 & 2 & 3 & 9 & 8 \\ 8 & 3 & 6 & 1 & 9 & 5 & 2 & 7 & 4 \\ 9 & 2 & 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 \\ \hline 3 & 8 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 9 & 5 & 8 & 9 & 1 & 3 & 6 \\ 7 & 6 & 3 & 3 & 2 & 4 & 5 & 8 & 7 \\ \hline 1 & 5 & 4 & 9 & 1 & 8 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 9 & 8 & 2 & 3 & 7 & 8 & 6 & 9 \\ \hline & & & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 3 \end{array}$
----------------	---

Bei genauerem Hinsehen entdeckt man weit mehr als nur 5 Rechtecke effekte.

## 5.5 Globale Isometrien

Wir wenden uns der Frage zu, ob die totale Sudokugruppe  $G^* = Z \times G$  auf den Zweigen eines Sudokus  $A$  Isometrien induziert. Genauer stellt sich die Frage, ob ein  $\varphi \in G^*$  einen Operator bestimmt, der jedem Zweig von  $A$  einen *isometrischen* Zweig von  $\varphi A$  zuordnet derart, dass zwischen den beiden Sudokus  $A$  und  $\varphi A$  eine Bijektion ihrer Zweige entsteht.

Sei  $A = (a_{ij})$  ein Sudoku mit Blöcken  $a_{ij}$ . Die Wirkung von  $G^*$  teilt sich auf nach den Bestandteilen

$$T^*, \quad Z \quad \text{und} \quad [H^*, t] : \quad (5.33)$$

Jedes  $\varphi \in G^*$  führt Streifen von  $A$  wieder in Streifen über, entweder gleichartige untereinander, oder horizontale in vertikale und umgekehrt. Wir nennen die der ersten Sorte *parallele* Operatoren, die der zweiten Art *orthogonal*.

Ein  $\varphi$  führt Blöcke in Blöcke über und permutiert sie durch Streifenpermutationen. Diese können wiederum beschrieben werden durch die Reihenpermutationen der Positionsmatrix

$$I^2 = ((ij)) \quad \text{mit } i, j \in I := \{1, 2, 3\} .$$

Die Wirkung von  $G^*$  auf die Sudokus ist eine Art von „monomialer Darstellung“, sie stellt sich folgendermaßen dar.

Das Bild  $A^\wedge = (a_{ij}^\wedge)$  von  $A$  unter  $\varphi \in G^*$  entsteht aus  $A$ , indem erst die Blöcke  $a_{\varphi^{-1}(ij)}$  in die Position  $(ij)$  verschoben werden und dann durch  $\varphi$  bestimmte lokale Operationen auf den Block(-Inhalt) angewandt werden. Wir notieren dies so:

$$\varphi A = (\varphi a_{\varphi^{-1}(ij)}) = A^\wedge . \quad (5.34)$$

Hier bedeutet  $\varphi a$  die Anwendung der  $\varphi$  assoziierten lokalen Operation auf den Block. Wir sprechen von der assoziierten Operation als der *begleitenden lokalen Wirkung*.

Ziel ist es nun, den Ansatz (5.34) auf die Sudokuzweige anzuwenden, mit Angabe ihrer Positionsverschiebungen, der globalen Wirkung, und den Isometrien, die durch die begleitenden lokalen Operationen induziert werden. Damit werden *globale Isometrien* definiert und hergestellt.

Die Zweige  $D_{ij}, D_{ij}^\circ$  werden durch ihre Regulativen  $a^{ij}$  und deren Doppelwirkung definiert und durch deren Position in ihrer Lage bestimmt.  $G^*$  permutiert diese Positionen, was den globalen Anteil der Isometrien ausmacht.

Die Operatoren aus  $G^*$  führen in  $I^2$  Reihen in Reihen über, also in der Sudokusituation Streifen in Streifen. Man erkennt sogleich:

$H^*$  führt Streifen wieder in parallele über,  $tH^*$  in orthogonale, die lokalen Gruppen lassen die Blöcke stabil.

**Satz 5.6.** *Sei  $A$  ein Sudoku. Die Operatoren  $\varphi \in G^*$  induzieren globale Isometrien auf den 18 D-Graphen von  $A$ . Gemäß der Wirkung (5.34) von  $G^*$  auf  $A$  ist die Wirkung von*

$\varphi \in G^*$  auf die Zweige

$$\varphi D_{\varphi^{-1}(ij)} A = D_{ij} \varphi A \quad \text{bzw.} \quad \varphi D_{\varphi^{-1}(ij)} A = D_{ij}^\circ \varphi A, \quad (5.35)$$

je nachdem  $\varphi \in T^* H^*$  oder  $\varphi \in T^* H^* t$  ist. Die Schreibweise  $\varphi D$  bedeutet die Anwendung einer begleitenden Isometrie, die zu bestimmen ist.

Dabei wird der globale Anteil durch die Permutationsdarstellung von  $[H^*, t]$  auf der Positionsmatrix bewirkt.

Die lokalen Operatoren aus  $T^*$  induzieren auf einem Zweig alle geraden Isometrien aus  $\Omega_0$ .  $Z$  lässt die Zweige fix.

Da  $H^*$  auch die begleitende ungerade Isometrie  $\eta_0$ , die Vertauschung der Eckenhälften, bewirkt, wird durch Anwendung von  $G^*$  die volle Isometriegruppe auf den Zweigen von  $A$  induziert.

*Beweis.* Die Regulativen  $a^{ij}$  werden durch die Permutationsdarstellung

$$[H^*, t] \longrightarrow \text{Sym}(I^2)$$

auf den Positionen vertauscht, wie schon in Kapitel 4 ausgeführt. Sie bestimmen also die Positionen ihrer Zweige. Da die  $a_{ij}$  ihre Doppelwirkung nicht verlieren, werden letztlich Winkelgraphen  $W_{ij}A$  von  $A$  permutiert. Die induzierten „lokalen“ Isometrien auf den  $D$ -Graphen sind die folgenden:

ad  $T^*$ :

Da  $T^*$  die Blöcke stabil lässt, genügt es, die Wirkung auf irgendeinem Zweig zu testen, etwa auf dem  $D$ -Graphen  $D_{11} = D_a$  mit Regulativ  $a$ . Die Situation ist die folgende:

		$T_1^\circ$
	$a$	
$T_2$	$E_0$	
$T_3$	$E_1$	

mit der Eckenmenge  $E = \begin{smallmatrix} E_0 \\ E_1 \end{smallmatrix}$  von  $D_a$  und der Einschränkung  $A_0$  von  $A$  auf  $E$ .

Man erkennt, dass  $T^*$  durch die Faktorgruppe  $T' = T_2 \times T_3 \times T_1^\circ$  auf  $\begin{smallmatrix} a \\ A_0 \end{smallmatrix}$  wirkt und somit auch auf  $E$ . Sei  $\varphi = g_2 g_3 h^\circ$  das allgemeine Element aus  $T'$ ,  $h^\circ$  aus  $T_1^\circ$ .

$h^\circ$  ist eine Spaltenvertauschung von  $\begin{smallmatrix} a \\ A_0 \end{smallmatrix}$ , es gilt daher für jede Zeilenmenge  $z$  von  $A$  die Anzahlbeziehung

$$\#(a^j \cap z) = \#(h^\circ a^j \cap h^\circ z).$$

Also ergibt sich eine Spaltenpermutation der Dominobelegungen, d. h. eine Isometrie

$$h^\circ : D_a A \simeq D_{h^\circ a} h^\circ A.$$

Die  $g_2, g_3$  lassen das Regulativ  $a$  fest und bewirken Zeilenpermutationen in  $E_0$  und  $E_1$ , also gerade Isometrien.  $T'$  bewirkt also Isometrien von  $D_{11}A$  auf  $D_{11}T'A$ . Daher allgemein:

$T^*$  induziert alle geraden Isometrien auf den Stämmen:

$$\varphi: D_{ij}A \simeq D_{ij}\varphi A \quad \text{für alle } \varphi \in T^*. \quad (5.36)$$

ad Z:

Die Zifferngruppe lässt den Stamm fest, denn

2 benachbarte Ecken eines  $D$ -Graphen bleiben benachbart

$$rt \longrightarrow tp \iff \alpha r \alpha t \longrightarrow \alpha t \alpha p.$$

ad  $H^*$ :

Wieder genügt es, die Wirkung von  $\sigma, \rho$  bzw.  $\sigma^\circ, \rho^\circ$  auf einem vertikalen  $D$ -Graphen zu testen. Es gibt 3 mögliche Lagen von Regulativ und Eckenmengen, mit  $x$  bzw. 0, 1 bezeichnet:

$x$	0	0
0	$x$	1
1	1	$x$

Man erkennt, dass die Anwendung von  $\sigma, \rho$  genau in einem Fall die Lage der Eckenhälften erhält, in allen anderen Fällen vertauscht. Die Isometrien sind 1 bzw.  $\eta_0$ .

$H^\circ$  verschiebt die  $D$ -Graphen nach rechts, lässt also die Eckenmengen fix.

ad  $H^* t$ :

Es genügt,  $t$  zu testen. Wir gehen aus von einem Horizontalstreifen von  $A$ , der durch  $t$  in einen vertikalen übergeht:

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} = a & b & c \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} ta \\ tb \\ tc \end{array}$$

Legt man  $a$  fest als Regulativ zu  $D_{11}^\circ = D_a^\circ$  von  $A$ , wird  $ta$  Regulativ zu  $D_{11}$  von  $tA$ .

Die Spaltenmengen  $b^j, c^j$  im Vergleich zu den Zeilenmengen von  $a_i$  sind verantwortlich für die Dominobelegung von  $D^\circ a$ . Zeilen und Spalten werden durch  $t$  vertauscht, also gilt

$$b^j = (tb)_j, \quad c^j = (tc)_j \quad \text{und} \quad a_i = (ta)^i.$$

Also wird

$$a_i \cap b^j = (ta)^i \cap (tb)_j \quad \text{und} \quad a_i \cap c^j = (ta)^i \cap (tc)_j.$$

Also sind die Dominobelegungen gespiegelt, die Dominographen

$$D_{11}^\circ A = D_a^\circ A \quad \text{und} \quad D_{11} t A = D_{ta} t A$$

gehen ineinander über.

Die Isometrie auf den Eckenmengen ist die Identität. Allgemein besteht eine rein-globale Isometrie der Zweige

$$D_{ij}^\circ A \simeq D_{ji} t A$$

□

**Korollar.** Die Operatoren  $\varphi \in G^*$  bestimmen Isometrien der Winkelgraphen

$$W_{\varphi^{-1}(ij)}A \simeq W_{ij}\varphi A,$$

also Isometrien der Stämme

$$STA \simeq STA.$$

**Bemerkung 5.9.** Primär interessiert die Aussage:

$G^*$ -konjugierte Sudokus haben isometrische Zweige. So kann in Kapitel 6 zur Bestimmung der einzelnen Zweige ein Exemplar aus einer Bahn ausgewählt werden.

Für ein  $\varphi \in G$  können in jedem Einzelfall die globalen Anteile der Wirkung auf die Zweige angegeben werden, indem man  $\varphi$  aus den Anteilen in (5.33) zusammensetzt.

In einem besonderen Fall soll das genaue Verhalten ohne Beweis angegeben werden. In Kapitel 1 wurde die globale Diedergruppe eingeführt

$$D = [d, t] = \{1, d, d^2, d^{-1}, \mu, \mu^\circ, t, t^\circ\},$$

bestehend aus der  $90^\circ$ -Drehung  $d$ , den dualen Spiegelungen  $t, t^\circ$  an den Hauptdiagonalen und den Spiegelungen  $\mu, \mu^\circ$  an den Mittellinien. Die Besonderheit ist, dass  $D$  nicht in  $[H^*, t]$  enthalten ist.

In Satz 5.6 hing die Wirkung auf die Zweige, parallel – orthogonal, davon ab, ob  $\varphi$  in  $T^*H^*$  oder in  $T^*H^*t$  liegt.

Das Dach  $^\wedge$  über den Ziffern bedeutet die Spiegelung in der Zahlenfolge 1 2 3, also

$$1^\wedge = 3, \quad 2^\wedge = 2, \quad 3^\wedge = 1.$$

Für die Positionswirkung

$$\varphi: (ij) \longmapsto (ij)'$$

eines  $\varphi \in D$  hat man folgende Zielwerte  $(i, j)'$

**Lemma 5.4.**

$$\begin{aligned} d &: (j^\wedge, i), \quad d^2 : (i^\wedge, j^\wedge) \\ t &: (j, i), \quad t^\circ : (j^\wedge, i^\wedge) \\ \mu &: (i^\wedge, j), \quad \mu^\circ : (i, j^\wedge) \end{aligned} \tag{5.37}$$

Aus der Stellung von  $i, j$  liest man ab

$$\begin{aligned} d^2, \mu, \mu^\circ &\text{ sind parallele Operatoren} \\ d, t, t^\circ &\text{ sind orthogonal.} \end{aligned}$$

Da die Zweige  $G^*$ -konjugierter Sudokus isometrisch sind, stimmen die regulären Komponenten zu fester Position überein, und damit auch deren Exponenten. Also gilt

**Korollar.** Alle Sudokus einer Bahn  $G^* \cdot A$  haben gleiche Großclan-Anzahlen.

Algebraisch gesehen ist die Permutationsdarstellung von einfacher Art:

**Bemerkung 5.10.** Die Darstellung von

$$[H^*, t] \simeq (S_3 \times S_3^\circ) \times [t]$$

als Permutationsgruppe der Reihen von  $I^2$  ist die sog. reguläre Darstellung.

Die 9 irreduziblen Charaktere lassen sich leicht bestimmen, haben aber weiter keine besondere Bedeutung.

# 6 Klassifikation der konkreten $D$ -Graphen und Beispiele

Herbert Wingen hat die konkreten  $D$ -Graphen vollständig klassifiziert. Sein Hauptergebnis ist zusammenfassend:

Es gibt genau 39 Isometrieklassen von konkreten  $D$ -Graphen.

Das ist eine überraschende Erkenntnis. Sein Ergebnis ist insofern erschöpfend, als die möglichen Komponentenzerlegungen der  $D$ -Graphen explizit angegeben werden. Damit sind auch die möglichen Komponenten klassifiziert. In diesem Paragraphen werden Wingens Ergebnisse vorgestellt und deren Folgen diskutiert.

Der Beweis für die Klassifikation wird durch rein kombinatorische Schlussweisen in Kapitel 7 geführt.

Die möglichen Isometrietypen der Zweige liegen somit fest, es gibt nur 39 mögliche Typen. Aber welche Kombinationen bei den Sudokus auftreten, ist ein anderes, ein globales Problem. Hierzu können Beispiele eine gewisse Einsicht vermitteln. An Beispielen werden vorwiegend solche Sudokus vorgestellt, die im bisherigen Text eine Rolle gespielt haben.

## 6.1 Zerlegung von Dominographen

Jeder *abstrakte*  $D$ -Graph hat eine eindeutige Zerlegung

$$D = K_1 \perp \dots \perp K_r = \perp_i K_i$$

in seine Zusammenhangskomponenten  $K_i$ . Eine Komponente kann singuläre Ecken enthalten oder singularitätenfrei, also regulär sein. Die entsprechenden numerischen Daten für eine Komponente  $K$  werden notiert

$$K = K_\mu^\nu = K_\mu^\nu(\kappa) \quad (\mu \leq 18, \nu \leq 6, \kappa \leq 36),$$

wobei  $\mu$  die Ordnung,  $\nu$  die Anzahl der singulären Ecken und  $\kappa$  die Kantenzahl ist.

Das Tripel  $(\mu, \nu, \kappa)$  sind die *Kennziffern* des  $D$ -Graphen oder einer Komponente.

Für reguläre Komponenten  $K$  wird auch  $R$  geschrieben, also  $R_\mu(\kappa)$  mit Ecken und Kantenzahlen. Tritt eine Komponente  $K$  – bis auf Isometrie –  $m$ -fach auf, wird

$$K \perp \dots \perp K = m.K \quad \text{notiert.}$$

Ein  $D$ -Graph ist *regulär*, wenn alle Komponenten regulär sind, sonst *singulär*.

Nun interessieren für die Sudokutheorie vorwiegend *konkrete*  $D$ -Graphen, die den Sudokus zugeordnet sind. Deren Dominobegleitungen ermöglichen erst die Herstellung der Komponentenzerlegung. Die *isolierten* Ecken treten paarweise auf, er-

kennbar an gleicher Ziffernbelegung  $s$ , sie sind die *trivialen Komponenten* und werden mit  $I$  bezeichnet. Ein Sudoku heißt *total-regulär* bzw. *total-singulär*, wenn alle seine Zweige regulär bzw. singulär sind.

Die Ausführungen in Abschnitt 5.1 legen ein systematisches Verfahren nahe zur Herstellung der

### Komponentenzerlegung

Sei  $A$  ein Sudoku. Als Modellfall genügt es, den vertikalen  $D$ -Graphen  $D = D_{11}$  zu behandeln mit dem Regulativ  $c = a^{11}$ . Von der Einschränkung von  $A$  auf die Blöcke  $(2, 1), (3, 1)$  werden deren Zeilenmengen  $a_i = \{a_{ij} : j\}, b_i = \{b_{ij} : j\}$  gebildet.

$$a_1 \qquad \qquad b_1 \qquad \qquad \underline{c}$$

Mit den Mengensystemen  $a = a_2$  und  $b = b_2$  entsteht die Figur  $a$ .

$$a_3 \qquad \qquad b_3 \qquad \qquad b$$

Auf dieser beruht das gesuchte

### Verfahren

#### 1. Dominobelegung

Diese erfolgt auf den Ecken der Eckenmengen  $E_0, E_1$  in der Anordnung  $\begin{matrix} & & \underline{c} \\ E_0 & & E_1 \end{matrix}$ , indem die Zeilenmengen  $a_i, b_i$  mit den Spaltenmengen  $c^j$  von  $c$  verglichen werden.

##### a. Erkennung der singulären Ecken

Man prüfe für alle  $i, j$ , ob der Fall

$$\#(a_i \cap c^j) = 2$$

vorliegt. Ist dies der Fall, so ist

$$a_i = \{s, t, t'\} \quad \text{mit} \quad s = a_{ij}, \quad t, t' \in c^j.$$

Dann steht  $s$  in der  $i$ -ten Zeile unterhalb  $c^j$  und bezeichnet eine singuläre Ecke.  $t$  und  $t'$  können dann beide auf den anderen beiden Ecken in der  $i$ -ten  $a$ -Zeile stehen, sie werden als Domino  $tt'$  auf diesen eingetragen. Es entsteht die Belegung der  $i$ -ten Zeile von  $E_0$ :

$$s tt' tt', \quad tt' s tt', \quad tt' tt' s,$$

je nachdem  $j = 1, 2$  oder  $3$  ist.

Die gleiche Prozedur wende man auf die Zeilensetze von  $b_i$  an. Damit ist die Dominobelegung der *singulären* Zeilen von  $E_0$  und  $E_1$  geleistet. Jede singuläre Zeile enthält eine singuläre und 2 reguläre Ecken.

### **b. Belegung der regulären Zeilen**

In einer regulären Zeilensetze  $a_i = \{r, t, t'\}$  liegt jede Ziffer in genau einer  $c$ -Spalte, kann also unter den beiden anderen stehen. Man hat also für die  $i$ -te Zeile von  $E_0$  die Dominobelegung

$$rt \quad rt' \quad tt' \quad \text{mit den Bedingungen} \quad r \in c^3, \quad t \in c^2, \quad t' \in c^1.$$

Alle Ecken sind regulär. Analoges führt man für  $E_1$  durch. Die Dominobelegung ist erreicht, der  $D$ -Graph damit definiert.

### **2. Komponentenzerlegung**

Die horizontale Nachbarschaft im  $D$ -Graphen ist geklärt: In jeder singulären Zeile sind die beiden regulären Ecken benachbart, in jeder regulären Zeile sind alle Ecken benachbart.

Was die vertikalen Nachbarschaften angeht, so erkennt man in jedem Einzelfall eine Fülle benachbarter Ecken. Zuerst sortiert man die isolierten Eckenpaare aus, sie haben keine vertikalen Kanten. Sie sind die *trivialen Komponenten*.

Zur Auffindung einer nichttrivialen Komponente beginne man mit einer beliebigen Ecke in  $E_0$ , etwa mit einer singulären, so vorhanden. Man markiere die Nachbarn in  $E_1$  und zugleich deren horizontale Nachbarn. Dann gehe man von den markierten Zeilen in  $E_1$  aus und markiere alle deren Nachbarn in  $E_0$ . Kommt die Iteration dieses Prozesses zu einem Ende, so hat man mit den so markierten Ecken eine Komponente gefunden. Die weitere Iteration führt auf die Komponentenzerlegung.

### **3. Vertikale Kanten**

Sie sind im Prinzip durch die Markierungen der Nachbarsuche bekannt. Sie in den 18-eckigen Graphen einzutragen ist oft unübersichtlich und daher nicht immer sinnvoll. Dagegen erkennt man oft den Kantenverlauf in den einzelnen Komponenten und kann diesen dann darin einzeichnen. Ist der  $D$ -Graph zusammenhängend und will man Isometrie oder Nichtisometrie testen, bleibt oft keine Alternative als die Kanten zu ziehen.

### **4. Der duale Fall**

verläuft analog. Etwa für den  $D$ -Graphen  $D_{11}^\circ$  ist die Einschränkung von  $A$  auf den 1-ten Horizontalstreifen zugrunde zu legen, wieder mit dem Regulator  $c = a^{11}$ . Nur

dass in diesem Fall die *Spaltenmengen* der  $A$ -Belegungen der Blöcke (1, 2), (1, 3) mit den *Zeilenmengen* von  $c$  zu vergleichen sind.

Dieses Verfahren ist geeignet, die Zerlegung per Hand durchzuführen.

## 6.2 Die Klassifikation

Schon zu Anfang von Kapitel 5 wurde zwischen konkreten und abstrakten  $D$ -Graphen unterschieden. Die *konkreten D*-Graphen sind solche, die aus einer Dominobelegung durch den “Anlegeprozess” entstehen. Die *abstrakten D*-Graphen gründen sich allein auf ihre Axiome. Es zeigte sich, dass bei konkreten  $D$ -Graphen feiner Unterschiede werden konnte zwischen *eigentlich konkreten* (wo die Dominobelegung aus einem Praesudoku entsteht) und *uneigentlich konkreten* (andernfalls). Vorerst – und in der Hauptsache – haben wir es mit den *eigentlichen* zu tun.

Wir beginnen mit dem Hauptresultat in seiner originären Form als Liste.

### Klassifikationssatz

#### Liste I

**Tabelle 6.1:** Isometrieklassen von  $D$ -Graphen

Komponentenzerlegung	Anzahl der Isometrieklassen	
	eigentliche	uneigentliche
0 Singularitäten		
$R_{18}(36)$	1	–
$R_{18}(34)$	1	–
$R_{18}(33)$	1	–
$R_{12}(22) \perp R_6(9)$	1	–
$3.R_6(9)$	1	–
2 Singularitäten		
$K_{18}^2(30)$	–	2
$K_{18}^2(29)$	3	–
$K_{12}^2(18) \perp R_6(9)$	1	–
3 Singularitäten		
$K_{18}^3(27)$	1	1
$R_{12}(21) \perp K_6^3(6)$	1	–

**Tabelle 6.1:** (Fortsetzung)

Komponentenzerlegung	Anzahl der Isometrieklassen	
	eigentliche	uneigentliche
4 Singularitäten		
$K_{18}^4(24)$	2	1
$K_{14}^4(18) \perp C_4$	2	1
$K_{16}^2(24) \perp 2.I$	1	—
$K_{12}^2(18) \perp C_4 \perp 2.I$	1	—
$K_8^2(11) \perp 2.C_4 \perp 2.I$	1	—
$K_{14}^2(21) \perp K_4^2(3)$	2	—
$K_{10}^2(14) \perp C_4 \perp K_4^2(3)$	2	—
$R_{14}(24) \perp 4.I$	1	—
$R_{10}(17) \perp C_4 \perp 4.I$	1	—
$R_{10}(17) \perp 2.K_4^2(3)$	1	—
$R_6(9) \perp C_4 \perp 2.K_4^2(3)$	1	—
$R_6(9) \perp 2.C_4 \perp 4.I$	1	—
5 Singularitäten		
$K_{16}^3(21) \perp 2.I$	1	—
$K_{12}^3(15) \perp C_4 \perp 2.I$	2	—
$K_8^3(9) \perp 2.C_4 \perp 2.I$	1	—
$K_{14}^3(18) \perp K_4^2(3)$	1	—
$K_{10}^3(12) \perp C_4 \perp K_4^2(3)$	2	—
$K_6^3(6) \perp 2.C_4 \perp K_4^2(3)$	1	—
6 Singularitäten		
$3.K_6^2(6)$	1	1
$2.K_6^2(6) \perp C_4 \perp 2.I$	1	—
$K_6^2(6) \perp 2.C_4 \perp 4.I$	1	—
$3.C_4 \perp 6.I$	1	—
Gesamtanzahl	39	6

**Liste II****Tabelle 6.2:** Isometrieklassen von Komponenten von  $D$ -Graphen

Komponente	Anzahl der Isometrieklassen	
	eigentliche	uneigentliche
0 Singularitäten		
$R_4(4) = C_4$	1	—
$R_6(9)$	1	—
$R_{10}(17)$	1	—
$R_{12}(21)$	1	—
$R_{12}(22)$	1	—
$R_{14}(24)$	1	—
$R_{18}(33)$	1	—
$R_{18}(34)$	1	—
$R_{18}(36)$	1	—
1 Singularität		
$K_1^1(0) = I$	1	—
2 Singularitäten		
$K_4^2(3)$	1	—
$K_6^2(6)$	1	1
$K_8^2(11)$	1	—
$K_{10}^2(14)$	1	—
$K_{12}^2(18)$	2	—
$K_{14}^2(21)$	2	—
$K_{16}^2(24)$	1	—
$K_{18}^2(29)$	3	—
$K_{18}^2(30)$	—	2
3 Singularitäten		
$K_6^3(6)$	1	—
$K_8^3(9)$	1	—
$K_{10}^3(12)$	1	—
$K_{12}^3(15)$	2	—
$K_{14}^3(18)$	1	—
$K_{16}^3(21)$	1	—
$K_{18}^3(27)$	1	1
4 Singularitäten		
$K_{14}^4(18)$	2	1
$K_{18}^4(24)$	2	1
Gesamtanzahl	34	6

Es ergeben sich folgende

### **Einzelaussagen**

**Satz 6.1.** Es gibt genau 9 zusammenhängende Isometrietypen von konkreten D-Graphen, darunter 3 reguläre Typen

$R_{18}$  mit Kantenzahlen 33, 34, 36,

und 6 singuläre Typen

$K_{18}^2(29)$  (3-mal),  $K_{18}^3(27)$  und  $K_{18}^4(24)$  (2-mal).

Im regulären Fall werden die Typen durch die Kantenzahlen getrennt. Im singulären Fall existieren zum 1-ten und 3-ten Graphen 3 bzw. 2 nichtisometrische Typen. Hier kann nicht durch die Kennziffern unterschieden werden, wir sprechen von *Istopen*.

**Satz 6.2.** Es gibt genau 9 Typen regulärer Komponenten. Außer dem regulären Rechteck  $C_4$  sind es die Typen

$R_{18}(33)$ ,  $R_{18}(34)$ ,  $R_{18}(36)$ ,  $R_6(9)$ ,  
 $R_{12}(22)$ ,  $R_{12}(21)$ ,  $R_{14}(24)$  und  $R_{10}(17)$ .

Die beiden  $R_{12}$  werden hier wieder durch die Kantenzahlen unterschieden.

Ein Resultat von globalem Charakter ist

**Satz 6.3.** Das Auftreten eines Rechteckeffektes in einem Sudoku, also von einem regulären Rechteck  $C_4$  in einem der D-Graphen, hat sofort hohe Singularität zur Folge, es können 4-6 Singularitäten auftreten.

Die einzigen 1-fach singulären Komponenten sind die isolierten Ecken.

Reguläre Sudokus haben also keine Rechtecke effekte.

Das ist ein überraschendes globales Resultat. Denn bei zufälliger Auswahl eines Sudokus findet man zumeist einen Rechtecke effekt, oft gleich mehrere. Wenn man bedenkt, dass ein Sudoku 18 Zweige hat, entsteht der Eindruck:

Das Gros der Sudokus ist hochgradig singulär.

Die beiden D-Graphen der Liste 3. $R_6(9)$  und 3. $K_6^2(6)$  sind im Folgenden von besonderer Bedeutung, sie tauchen bei den Fixsudokus auf. Wegen des graphischen Aussehens bezeichnen wir  $R_6(9)$  als *reguläre 6er-Tonne*.

## Drei Arten von *D*-Graphen – der Isometriebegriff

Es hat sich gezeigt, dass es einen Typ von *D*-Graphen gibt, den man nicht erwartet hat.

Während die *eigentlichen* konkreten *D*-Graphen auf Dominobelegungen beruhen, die aus einem Praesudoku entstehen, existieren *uneigentliche* konkrete *D*-Graphen, für die das nicht der Fall ist. Sie entstehen aus Dominobelegungen, die nicht mehr aus einem Praesudoku stammen, also nicht zu einem Sudoku gehören.

Es gibt eine weitere unerwartete Differenzierung des Isometriebegriffs. Im Abschnitt 5.2 wurde der Isometriebegriff auch für Komponenten eingeführt. Nun kann für 2 eigentlich konkrete *D*-Graphen folgendes Phänomen eintreten:

*Sämtliche Komponenten sind isometrisch, die *D*-Graphen aber nicht.*

Dies betrifft folgende 2 Typen:

$$K_{10}^2(14) \perp C_4 \perp K_4^2(3) \quad \text{und} \quad K_{10}^3(12) \perp C_4 \perp K_4^2(3).$$

Jeder der beiden gehört zu 2 nichtisometrischen *D*-Graphen. Der Grund ist, dass sich die Isometrien der Komponenten nicht zu einer Isometrie des *D*-Graphen fortsetzen lassen. Ein solches Phänomen tritt in der allgemeinen Graphentheorie nicht auf, da der Isomorphiebegriff dort weiter gefasst ist.

*Wir sprechen im Folgenden von Isometrien bzw. komponentenweisen Isometrien.*

**Satz 6.4.** *Es gibt 39 Isometrietypen von eigentlich konkreten *D*-Graphen und 6 Isometrietypen von uneigentlich konkreten *D*-Graphen.*

*Es gibt 34 Isometrietypen von eigentlich konkreten Komponenten und wieder 6 Typen von uneigentlichen Komponenten.*

*Die 2 uneigentlichen Typen  $K_{18}^2(30)$  haben keine Entsprechung der Kennziffern bei den eigentlich.*

## Abstrakte *D*-Graphen

Die uneigentlichen konkreten *D*-Graphen sind gering an der Zahl, ganz im Gegensatz zu den *abstrakten* *D*-Graphen. Hier geht es um die Diskrepanz zwischen den abstrakten und konkreten *D*-Graphen, also um die Differenz-Anzahl  $\#\Delta^* \setminus \Delta$  ihrer Isometrieklassen.

**Satz 6.5.** *Es gibt genau 158 954 112 viele abstrakte *D*-Graphen.*

*Die Anzahl der Isometrie-Typen abstrakter *D*-Graphen ist daher mindesten 367 950.*

Die Dokumentation findet sich im Anhang. Dieses Ergebnis rundet die Kenntnis über *D*-Graphen ab, hat aber für die Sudokutheorie keine Folgen.

### 6.2.1 Isometrietests – Ähnlichkeit

Isometrie ist nicht immer leicht zu entscheiden, wenn die Kennziffern ( $\mu, \nu, \kappa$ ) nicht ausreichen. Daher wurde in Abschnitt 5.2 die *Eckentafel* als feinerer Isometrietest eingeführt: Sind die Eckentafeln isometrisch, liegen *ähnliche*  $D$ -Graphen bzw. Komponenten vor. Auch hier tritt jede logische Möglichkeit auch auf.

**Bemerkung 6.1.** Es gibt  $D$ -Graphen, die ähnlich aber nicht isometrisch sind.

Der Test ist also nicht immer erfolgreich. Das kann man erfahren an den nichtisometrischen  $D$ -Graphen und Komponenten gleicher Kennziffern, die in den Listen mit Vielfachheiten versehen sind.

Wir geben 2 *Beispiele* aus Liste II.

### $K_{14}^4(18)$

Hier gibt es 3 Typen mit folgenden Eckentafeln:

$a$	$b$	$c$
1   0   0	1   0   0	1   0   0
4   4   3	3   4   4	4   4   3
2   1   3	3   1   2	2   1   3
1   0   0	1   0   0	1   0   0
4   3   4	3   2   1	3   2   1
2   3   1	3   4   4	3   4   4

$a$  enthält in jeder Eckenmenge eine Spalte (0, 3, 3),  $b$  in keiner,  $c$  nur in der oberen. Also sind  $a, b, c$  paarweise unähnlich, also nicht isometrisch.

### $K_{18}^2(29)$

Hier sind die Eckentafeln

$a$	$b$	$c$
1   3   3	1   3   3	1   3   3
3   3   1	3   3   1	3   3   1
4   4   3	4   4   3	4   3   4
4   4   3	4   4   3	4   4   3
3   4   4	3   4   4	4   4   4
4   4   3	4   4   3	3   3   4

Die Tafeln von  $a$  und  $b$  sind identisch, also sind  $a$  und  $b$  ähnlich.  $a$  und  $b$  enthalten eine Spalte (4, 4, 4),  $c$  nicht. Daher ist  $c$  zu  $a, b$  unähnlich, also nichtisometrisch.

Die Nichtisometrie von  $a$  und  $b$  muss hier durch Herstellung des vollen Kantenverlaufs entschieden werden.

## Graphiken

Die Graphiken von allen  $D$ -Graphen und Komponenten können hergestellt werden, aus denen Isometrie wie Nichtisometrie optisch stets erkennbar ist.

Die  $D$ -Graphen, deren „lange“ Kanten, die die Trennlinie überschreiten, ja in einer geraden Linie liegen, werden in der Darstellung perspektivisch verschoben. Dadurch wird der „lange“ Kantenverlauf sichtbar gemacht. Bei den „kurzen“ Kanten im regulären Fall werden alle 3 Ecken durch Kanten verbunden, es entsteht graphentheoretisch ein Kreis. In den Graphiken ist dieser Kreis durch 2 enge Parallelens erkennbar.

Die regulären und singulären Ecken werden durch die Zeichen  $\square$  und  $\blacksquare$  kenntlich gemacht. Einige Graphen werden im Text, weitere im Anhang aufgeführt.

## Symmetrische $D$ -Graphen

Den Graphiken im Anhang kann entnommen werden, welche  $D$ -Graphen-Typen als symmetrische  $D$ -Graphen im Sinn von Abschnitt 5.2 dargestellt werden können. Es sind dies alle 5 regulären Typen, ferner  $R_{14}(24) \perp 4.I$ ,  $R_{10}(17) \perp C_4 \perp 4.I$ ,  $R_6(9) \perp 2.C_4 \perp 4.I$ ,  $3.C_4 \perp 6.I$  und der uneigentliche  $D$ -Graph  $3.K_6^2(6)b$ .

## Indizes von Sudokus

Um ein numerisches Maß für den regulären und singulären Charakter eines Sudokus  $A$  anzugeben, gehen wir folgendermaßen vor. Jeder Zweig  $D_{ij}A$  oder  $D_{ij}^\circ A$  hat Exponenten  $m_{ij}$ ,  $m_{ij}^\circ$ , die die Regularität der  $D$ -Graphen messen. Die Summen

$$mA = m = \sum m_{ij} \quad \text{und} \quad m^\circ A = m^\circ = \sum m_{ij}^\circ$$

messen den Grad der Regularität von  $A$ . Mit den Anzahlen  $s_{ij}$ ,  $s_{ij}^\circ$  der Singularitäten der  $D_{ij}$  und  $D_{ij}^\circ$  messen die Summen

$$sA = s = \sum s_{ij} \quad \text{und} \quad s^\circ A = s^\circ = \sum s_{ij}^\circ$$

den Grad der Singularität von  $A$ .

Beschränkt man sich auf den Diagonalfall, so entstehen die Diagonalinvarianten

$$m_d A = \sum m_{ii} \quad \text{und} \quad s_d A = \sum s_{ii}$$

und ihre Dualen. Die Paare

$$\text{ind}A = (mA, sA) \quad \text{und} \quad \text{ind}^\circ A = (m^\circ A, s^\circ A)$$

heißen die *Indizes von  $A$* , analog für den Diagonalfall mit den Indizes  $\text{ind}_d A$  und  $\text{ind}_{d^\circ} A$ .

Im Folgenden wird nun an einigen Beispielen der Schritt zum Globalen vollzogen, also die Komponentenzerlegung der Zweige hergestellt. Hierbei sind bei Bestimmung per Hand Grenzen des Aufwandes gesetzt. Daher werden wir uns häufig beschränken auf die  $D$ -Graphen mit Regulativen auf der Blockdiagonalen, also auf die  $D$ -Graphen

$$D_{ii} \quad \text{und} \quad D_{ii}^\circ \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3.$$

*Von nun an wird nur von eigentlichen konkreten  $D$ -Graphen die Rede sein, daher wird das Attribut weggelassen und nur von  $D$ -Graphen gesprochen.*

### 6.3 Zweige der $G$ -Fixsudokus

Wir beschränken uns auf  $e$ -normierte Fixe, also auf solche mit der Blockdiagonalen  $e = e/e/e$ . Nach Satz 3.5 gibt es 64 von solchen Fixsudokus, die sich nach den Kapitel 2 und 3 auf verschiedene Typen verteilen

4 Superfixe, 36 Sondersudokus der 1. Art und 24 der 2. Art

Die ersten beiden Sorten sind numerisch bekannt und wurden in Kapitel 2, 5 und 7 aufgelistet. Letztere wurden in Abschnitt 2.9 konstruiert und in Kapitel 3 in ihrem Bahnverhalten abschließend behandelt. Die 64 Sudokus sind explizit bekannt. Es zeigt sich, dass der Aufwand für die einzelnen Typen recht unterschiedlich ist.

#### a. Die Superfixe

Da die Gruppe  $R$  aus Lemma 3.3 regulär auf den 4 Superfixen operiert und nach Satz 5.6 auf den Zweigen lokale Isometrien induziert, genügt es, nur eines der Superfixe zu untersuchen, etwa

$$C = \begin{array}{|ccc|ccc|ccc|} \hline & 1 & 2 & 3 & 9 & 7 & 8 & 5 & 6 & 4 \\ & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 & 2 & 8 & 9 & 7 \\ & 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ \hline & 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 & 9 & 7 & 8 \\ & 8 & 9 & 7 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ & 2 & 3 & 1 & 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 \\ \hline & 9 & 7 & 8 & 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ & 3 & 1 & 2 & 8 & 9 & 7 & 4 & 5 & 6 \\ & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \tag{6.1}$$

Folgende einfache Beobachtung setzt die  $D$ -Graphenstruktur in Evidenz:

In jeder Streifenfigur, horizontal oder vertikal, haben die  
3 Blöcke gleiche Zeilenmengen und gleiche Spaltenmengen. (6.2)

Daher ist der Durchschnitt jeder Zeilenmenge mit jeder Spaltenmenge der Blöcke 1-elementig. Also treten keine Singularitäten auf, alle 18 Zweige sind also regulär. Das Sudoku  $C$  ist total-regulär.

Legt man nun in einer Streifenfigur, etwa in einer horizontalen, einen Block  $c$  als Regulativ fest, so haben die beiden anderen Blöcke  $a$  und  $b$  gleiche Spaltenmengen, möglicherweise nicht in der gleichen Reihenfolge von links nach rechts. 2 gleiche Spaltenmengen in  $a, b$  verglichen mit einer *festen Regulativzeilenmenge* von  $c$ , bestimmen gleiche Dominos, die eine Kante in  $E_0|E_1$  festlegen. Variiert man dann die Spaltenmengen in  $a$  und  $b$ , so entstehen 2 weitere ziffernfremde Dominos in jedem der  $E_i$ , die wiederum je eine Kante definieren. Variiert man nun die Zeilenmengen des Regulativs  $c$ , so definieren die jeweils gleichen Dominopaare in  $E_0|E_1$  eine Komponente, und zwar nach (6.2) in allen Lagen die gleiche.

Um die Art der Komponente festzustellen, müssen wir in *einer* Lage die Domino-belegung herstellen. Dazu wählen wir den  $D$ -Graphen

$$D_{11}^\circ C \quad \text{zum 1. Horizontalstreifen mit Regulativ } a^{11} = e.$$

Die Dominobelegung ist

69	47	58	58	69	47
39	17	28	28	39	17
36	14	25	25	36	14

Man erkennt, dass in den beiden Eckenmengen  $E_0 E_1$  je eine Spalte durch je 3 horizontale Kanten benachbart sind. Die Spalten sind regulär, haben also 3 vertikale Kanten. Die 3 Komponenten haben das Aussehen einer liegenden Tonne, der sog. *regulären 6er-Tonne*  $T_6 = R_6(9)$ . Geht man von einem vertikalen Zweig aus, entsteht eine reguläre 6er-Tonne in stehender Lage. Beide Lagen sind durch Drehung isometrisch. Nach dem Gesagten gilt dies dann für alle Zweige.

Wir fassen zusammen

*Alle 4 Superfixe sind total-regulär, alle Zweige zerlegen in 3 6er-Tonnen:*

$$D_{ij} \simeq D_{ij}^\circ \simeq 3.T_6. \quad (6.3)$$

Die Exponenten sind demnach sämtlich gleich 3, die Indizes somit

$$\text{ind}C = (27, 0) = \text{ind}^\circ C.$$

Die Anzahl des Diagonal-Clans ist

$$\#\text{Clan}_d C = 1170,$$

wie in Bemerkung 5.3 bereits festgestellt.

### b. Das Verschiebungssudoku

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	1	2	3
	7	8	9	1	2	3	4	5	6
	2	3	4	5	6	7	8	9	1
$V =$	5	6	7	8	9	1	2	3	4
	8	9	1	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8	9	1	2
	6	7	8	9	1	2	3	4	5
	9	1	2	3	4	5	6	7	8

wurde in Abschnitt 3.5 über einen 9er-Permutationszyklus definiert. Es ist ein Fixsudoku vom Typ  $\sigma^\circ$  ohne Diagonalblocknormierung, es gehört also nicht den 24 Sondersudokus der 2. Art an.

Zu den Horizontalstreifen macht man die gleiche Beobachtung wie zu C:

Die 3 Blöcke haben die gleichen Zeilen- und Spaltenmengen.

Es wiederholen sich sogar die Zeilen selbst.

Bei den Vertikalstreifen gilt dagegen nur:

(6.2')

Die 3 Blöcke haben gleiche Spaltenmengen, die Zeilenmengen werden "um 1 verschoben".

Also zerfallen die horizontalen Zweige  $D_{ij}^\circ$  wieder sämtlich in 3 reguläre 6er-Tonnen  $T_6$ . Bei den Vertikalstreifen sind die Zeilenmengen maßgeblich. Hierzu müssen die Dominobelegungen von 3 vertikalen  $D$ -Graphen hergestellt werden, etwa

$D_{21}$			$D_{22}$			$D_{23}$		
13	12	23	46	45	56	79	78	89
46	45	56	79	78	89	13	12	23
79	78	89	13	12	23	46	45	56
34	45	35	67	78	68	19	12	29
67	78	68	19	12	29	34	45	35
19	12	29	34	45	35	67	78	68

Man erkennt mit dem Markierungsprozess aus Abschnitt 6.1, dass in allen Fällen der gleiche  $D$ -Graph vorliegt. Dieser ist zusammenhängend, die Kantenzahl ist 33. Diese liest man aus den vertikalen Kanten ab, oder aus der halben Eckentafel

$$\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & \text{also } \kappa = 24 + 9 = 33. \\ 4 & 3 & 4 \end{array}$$

Zusammenfassend ergibt sich

*Alle Zweige sind regulär, das Verschiebungssudoku also total-regulär.*

*Alle horizontalen Zweige zerlegen in gleicher Weise*

$$D_{ij}^\circ = 3 \cdot T_6 \quad (6.4)$$

*in 3 reguläre 6er-Tonnen.*

*Die parallelen vertikalen Zweige  $D_{2j}$  sind sämtlich zusammenhängend mit Kantenzahl 33, also zueinander isometrisch nach Satz 6.1:*

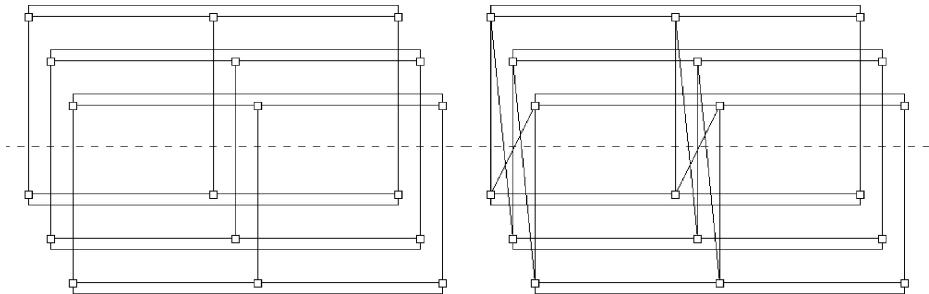
$$D_{2j} = R_{18}(33) \quad (j = 1, 2, 3). \quad (6.4')$$

*Die Exponenten sind jeweils 3 bzw. 1. Damit gilt für den horizontalen Index wieder*

$$\text{ind}^\circ V = (27, 0)$$

Die Graphiken der beiden Komponenten haben die Form

$$3 \cdot T_6 \quad \text{und} \quad R_{18}(33)$$



Die  $3 \times 3$ -Eckenmengen sind geschert dargestellt, um die vertikalen Kanten einer Spalte optisch zu trennen.

### c. Die Sondersudokus

Ausführlich behandeln wir nur solche der 1. Art, es sind dies die 36 Einfachfixe der Form

$$S = \begin{matrix} e & b & c \\ c & e & b \\ b & c & e \end{matrix} \quad (6.5)$$

Außer dem Grundblock  $e$  gibt es nur 2 weitere Blöcke  $b$  und  $c$ , die im Rösselsprung angeordnet sind. Sie sind schon durch einen Block, etwa  $b$ , eindeutig bestimmt. In

Abschnitt 2.6 sind 18 von ihnen in einer Nummerierung aufgelistet, die anderen gehen durch  $\rho'$  aus diesen hervor.

Die entscheidende Strukturaussage gelang mit Satz 3.3 und Bemerkung 3.2: Der Stabilisator  $F$  der Menge  $\{36\}$  der Sondersudokus operiert 2-bahnig. Die beiden Bahnen sind

$$F.S_2 \quad \text{und} \quad F.S_9$$

in Schönhages Nummerierung der  $S_i$ .

Nach Satz 5.6 bedeutet dies, dass die Stämme der Sondersudokus entweder zu dem von  $S_2$  oder zu dem von  $S_9$  isometrisch sind. Wir haben also nur die beiden Sudokus zu untersuchen, und kennen dann alle Stämme. Überraschenderweise verhalten sich die beiden Sudokus extrem unterschiedlich.

Eine weitere Beobachtung reduziert erneut den Aufwand zur Bestimmung der Zweige. In (6.5) gibt es 3 mögliche Regulative,  $e$ ,  $b$  und  $c$ . Wählt man eines aus, sind die anderen beiden Blöcke – genauer ihre Zeilen- oder Spaltenmengen – für die Bildung der  $D$ -Graphen zuständig. Aber die Situation in den 3 parallelen Streifen ist völlig gleichwertig: Nur die Positionen des Regulativs – hier irrelevant für den Dominoprozess – und die der Eckenmengen  $E_0$   $E_1$  zu  $b$ ,  $c$  sind vertauscht, was auf eine Isometrie in den Zweigen hinausläuft. Die 3 vertikalen Zweige zu jedem der Regulativblöcke  $e$ ,  $b$ ,  $c$  sind also isometrisch:

$$\begin{aligned} D_{11} &\simeq D_{22} \simeq D_{33} \\ D_{31} &\simeq D_{23} \simeq D_{12} \quad \text{und analog im dualen Fall.} \\ D_{13} &\simeq D_{21} \simeq D_{32} \end{aligned} \tag{6.6}$$

Die Isometrien sind waagerecht zu lesen. Daher genügt es, die Fälle  $D_{i1}$  und Duale zu prüfen und dazu die Dominobelegung herzustellen.

### Das Sondersudoku $S_9$

Es genügt hierzu die Kenntnis des 1-ten Vertikalstreifens von  $S_9$  mit den 3 Regulativblöcken:

$S_9$			$D_{11}$			$D_{21}$			$D_{31}$		
1	2	3				12	23	13	13	12	23
4	5	6				45	56	46	46	45	56
7	8	9				78	89	79	79	78	89
9	4	5	59	49	45				49	45	59
3	7	8	38	37	78				37	78	38
6	1	2	26	16	12				16	12	26
8	6	7	68	67	78	78	68	67			
2	9	1	29	19	12	12	29	19			
5	3	4	35	34	45	45	35	34			

Führt man die Markierung aus dem Verfahren in Abschnitt 6.1 durch, so entsteht in allen 3 Fällen ein zusammenhängender regulärer  $D$ -Graph der Kantenzahl 33. Nach Satz 6.1 sind alle zusammenhängenden regulären  $D$ -Graphen mit gleicher Kantenzahl isometrisch.

Im 1-ten Horizontalstreifen von  $S_9$

1	2	3	8	6	7	9	4	5
4	5	6	2	9	1	3	7	8
7	8	9	5	3	4	6	1	2

bemerkt man:

In den 3 Blöcken stimmen jeweils die Spaltenmengen überein.

Dann gilt das auch für alle 3 Horizontalstreifen.

Nach dem gleichen Schluss wie für die Superfixe ergibt sich:

(6.7)

Alle horizontalen Zweige zerlegen in 3 reguläre 6er-Tonnen.

### Das Sondersudoku $S_2$

Die benötigte Information liegt in der Winkelfigur von  $S_2$

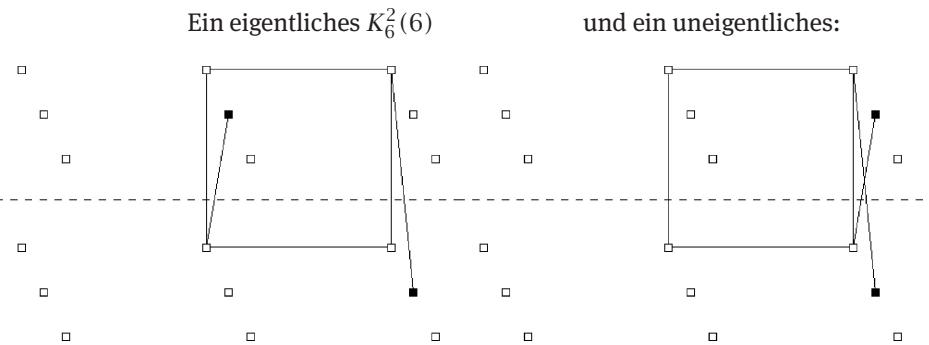
1	2	3	5	7	8	9	6	4
4	5	6	3	9	2	8	1	7
7	8	9	6	4	1	2	3	5
9	6	4						
8	1	7						
2	3	5						
5	7	8						
3	9	2						
6	4	1						

Es genügt ja nach (6.6), die 6 Zweige auf den beiden ersten Vertikal- und Horizontalstreifen zu bestimmen. Die vertikalen Dominobelegungen zu den Regulativen  $e\ c\ b$  sind

$D_{11}$			$D_{21}$			$D_{31}$		
69	69	4	13	2	13	12	12	3
8	17	17	45	45	6	4	56	56
25	3	25	7	89	89	79	8	79
58	7	58	57	57	8	49	6	49
39	39	2	3	29	29	18	18	7
6	14	14	16	4	16	2	35	35

Hier liegt in jedem vertikalen Zweig die Maximalzahl 6 von singulären Ecken vor.

Genauer erkennt man, dass jeder Zweig in 3 2-fach singuläre eigentliche 6er-Komponenten  $K_6^2$  zerfällt. Ein uneigentliches weicht geringfügig ab.



Die eigentlichens  $K_6^2(6)$  entstehen aus regulären Rechtecken, die an 2 *diametralen* Ecken zu singulären Ecken haben. Diese Kanten werden bei Isometrien wie Tentakeln mal nach innen und mal nach außen “geworfen”. Man erkennt, dass sie alle isometrisch sind. Dies folgt auch wieder aus Liste I. Die “Tentakeln” im uneigentlichen Fall setzen in benachbarten Ecken an.

Eine Prüfung der Dominobelegungen im horizontalen Fall führt zum gleichen Ergebnis für die dualen Zweige. Wir fassen zusammen:

**Satz 6.6.**  $S_9$  ist total-regulär. Die horizontalen Zweige zerfallen in 3 reguläre 6er-Tonnen, die vertikalen sind zusammenhängend regulär mit Kantenzahl 33

$$D_{ij}S_9 = R_{18}(33), \quad D_{ij}^\circ S_9 = 3.T_6. \quad (6.8)$$

Die Indizes sind

$$\text{ind}S_9 = (9, 0), \quad \text{ind}^\circ S_9 = (27, 0).$$

$S_2$  ist total singulär. Die Zweige zerlegen alle in 3 2-fach singuläre  $D$ -Graphen der Ordnung 6

$$D_{ij}S_2 \simeq D_{ij}^\circ S_2 = 3.K_6^2(6). \quad (6.8')$$

Die Indizes sind

$$\text{ind}S_2 = \text{ind}^\circ S_2 = (0, 54).$$

Alle Stämme der Sondersudokus 1. Art sind entweder zu denen von  $S_9$  oder von  $S_2$  isometrisch (nach Satz 5.6).

Die Zweige der Sondersudokus 2. Art bestehen alle aus 3 regulären 6er-Tonnen  $T_6$ , diese Sudokus sind also sämtlich total-regulär.

#### d. Konstruktion von Fixsudokus aus Praesudokus

Die Konstruktionsmethode von Sudokus nach Satz 2.1 führt nach Kapitel 2 stets auf Fixsudokus von struktureller Einfachheit. Sogar der volle Stamm ist leicht herstellbar. Maßgeblich für den Prozess in seiner einfachsten Form ist folgende Beobachtung

an einem Sudokublock  $a$  (Lemma 2.2). Man nimmt 2-mal gegenläufige Spaltenverschiebungen vor  $a$ ,  $s^\circ a$ ,  $s^{\circ -1} a$ , und stellt die Blöcke untereinander. Es entsteht ein Praesudoku

$$V = \begin{matrix} a \\ s^\circ a \\ s^{\circ -1} a \end{matrix} \quad (6.9)$$

Bestimmt man einen der Blöcke als Regulativ, etwa  $a$ , so entsteht ein  $D$ -Graph, indem man die Dominobelegungen der Zeilen von  $s^\circ a$ ,  $s^{\circ -1} a$  herstellt. Das Dominopaar  $pq$  von  $s^\circ a$  zur  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte ist definitionsgemäß das Ziffernpaar in  $(s^\circ a)_i$ , das nicht in  $a^j$  liegt. Nun sind die Zeilenmengen der  $s^\circ a$ ,  $s^{\circ -1} a$  identisch mit denen von  $a$ . Also ist  $pq$  das Komplementpaar der Ziffer in der  $j$ -ten Spalte und  $i$ -ten Zeile von  $a$ . Das gilt natürlich auch für den Block  $s^{\circ -1} a$ . Damit ist die Dominobelegung bestimmt und man erhält

**Bemerkung 6.2.** Der  $D$ -Graph zu  $V$  mit Regulativ  $a$  zerlegt in 3 reguläre 6er-Tonnen

$$D = 3.T_6.$$

Das Gleiche gilt für jede Wahl des Regulativs.

**Beispiel.**

$$\begin{matrix} 4 & 6 & 9 \\ a = 2 & 1 & 8 \\ 7 & 3 & 5 \end{matrix} \quad \text{Regulativ}$$

$$\begin{matrix} & & & \text{Dominobelegung} \\ & 9 & 4 & 6 & 69 & 49 & 46 \\ s^\circ a = 8 & 2 & 1 & 18 & 28 & 12 & E_0 \\ & 5 & 7 & 3 & 35 & 57 & 37 \\ & 6 & 9 & 4 & 69 & 49 & 46 \\ s^{\circ -1} a = 1 & 8 & 2 & 18 & 28 & 12 & E_1 \\ & 3 & 5 & 7 & 35 & 57 & 37 \end{matrix}$$

Je eine Zeile von  $E_0$  ist mit je einer Zeile von  $E_1$  benachbart. Es entstehen 6er-Tonnen  $T_6$  als Komponenten.

Ausgehend von einem Praesudoku

$$H = abc$$

auf einer horizontalen Streifenfigur werden durch beliebige Zeilenumtauschungen 2 weitere Streifen  $H'$  und  $H''$  hergestellt und untereinander angeordnet

$$\begin{matrix} H \\ H' \longrightarrow S \\ H'' \end{matrix} \quad (6.10)$$

Dann werden auf die Vertikalstreifen der  $H'$ ,  $H''$  gegenläufige Spaltenvertauschungen  $s^\circ$ ,  $s^{\circ -1}$  nach dem Muster von (6.9) angewandt. Es entsteht ein neues Sudoku  $S$  nach Satz 2.1.

Zur Bestimmung der horizontalen Zweige von  $S$  können die Spaltenvertauschungen  $s^\circ$ ,  $s^{\circ -1}$  weggelassen werden, denn die Zeilen- und Spaltenmengen in den Blöcken von  $H$  bleiben erhalten. Welchen Block von  $H$  man als Regulativ auch auszeichnet, der darunterliegende Regulativblock in  $H'$  und  $H''$  erzeugt isometrische Zweige.

Zur Bestimmung der vertikalen Zweige von  $S$  können die Zeilenvertauschungen von  $H$ , die zu  $H'$  und  $H''$  führen, weggelassen werden. Denn sie erhalten wieder die Zeilen- und Spaltenmengen in den Vertikalstreifen. Und welche der Blöcke in diesen man auch als Regulativ auszeichnet, es ergeben sich isometrische Zweige.

**Satz 6.7.** Sei  $H = a b c$  ein horizontales Praesudoku und  $S$  ein nach dem Verfahren von Satz 2.1 aus  $H$  konstruiertes Sudoku.

Dann sind alle horizontalen Zweige von  $S$  zu den 3 Zweigen von  $H$  isometrisch

$$D_{ij}^\circ S \simeq D_{ij}^\circ H \quad \text{für alle } i, j. \quad (6.11)$$

Dagegen zerlegen alle vertikalen Zweige von  $S$  in 3 reguläre 6er-Tonnen

$$D_{ij}S = 3 \cdot T_6. \quad (6.11')$$

$S$  erbt alle Singularitäten von  $H$ . Das Ergebnis ist unabhängig von den Manipulationen an  $H$ .

Das Analoge gilt, wenn man von einem vertikalen Praesudoku ausgeht.

**Beispiel.** Chirurgie ist ein Spezialfall. In Abschnitt 2.2 wurde Chirurgie am Sudoku  $LT$  ausgeführt.

Dessen 1. Horizontalstreifen ist

$$H = \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 4 & 6 & 9 & 5 & 1 & 2 & 7 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 8 & 9 & 7 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 3 & 5 & 6 & 8 & 4 & 1 & 2 & 9 \end{array}$$

Die 3 horizontalen Zweige von  $H$  sind

$$D_{11}^\circ H = 2 \cdot B_4^2 \perp R_{10}, \quad D_{12}^\circ H = K_{18}^2, \quad D_{13}^\circ H = K_{18}^2. \quad (6.12)$$

Sie sind es dann auch für die Horizontalzweige des Chirurgieprodukts  $S$ .

Nach Liste II ist die Kantenzahl der beiden  $K_{18}^2$  gleich 29, aber es gibt 3 Isotope. Es bleibt offen, ob die beiden  $K_{18}^2$  in (6.12) isometrisch sind.

Wir geben noch den Diagonalstamm von  $LT$  an:

$$\begin{aligned} D_{11} &= K_{18}^2, & D_{11}^\circ &= 2 \cdot B_4^2 \perp R_{10} \\ D_{22} &= 2 \cdot C_4 \perp 2I \perp K_8^3, & D_{22}^\circ &= K_{18}^2 \\ D_{33} &= C_4 \perp K_{14}^4, & D_{33}^\circ &= 2I \perp K_{16}^3. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Die Listen I und II zeigen, dass nur  $D_{11}^\circ$  und  $D_{33}^\circ$  von  $LT$  durch Ordnung und Singularitätszahl festgelegt sind. Die Isometrieklasse der übrigen bleibt offen.

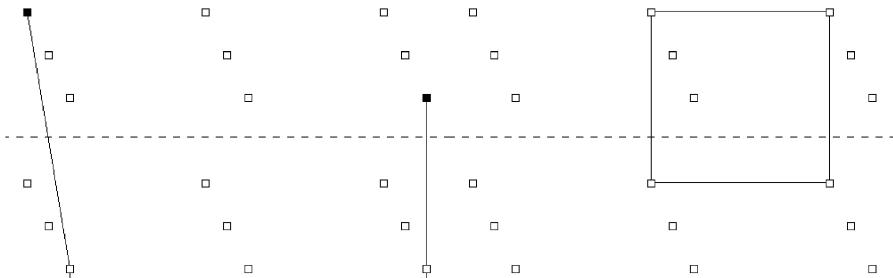
Hier taucht zum ersten Mal der 2-fach singuläre 4er-Baum  $K_4^2(3)$  mit Kantenzahl 3 auf. Er ist die einzige Baumkomponente von  $D$ -Graphen, und wird daher mit der Bezeichnung  $B_4^2$  hervorgehoben.

Wir geben die Graphiken von 2 Paaren von Komponenten an:

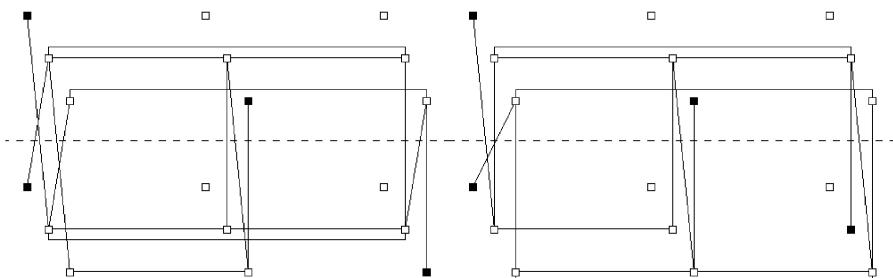
$B_4^2$

und

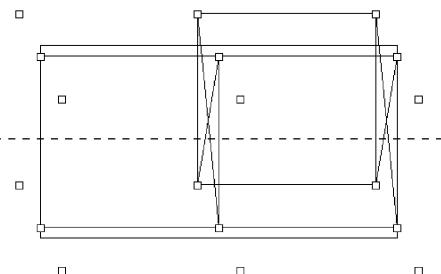
$C_4$ ,



$K_{14}^4$  (zwei Isotope)



und  $R_{10}$



### Einige Anzahlen von Großclans

Mit den universellen Anzahlformeln von Satz 5.5 können die Anzahlen im Prinzip für jedes Sudoku angegeben werden, man hat nur die Exponenten zu bestimmen. Dies ist i. A. aufwändig, insbesondere für stark singuläre Sudokus wie in den Abschnitten 6.4 und 6.5. Nun ist das Interesse an solchen Anzahlen eher marginal. Was man wissen will, sind Maximum und Minimum. So beschränken wir uns auf einige Fälle aus diesem Abschnitt 6.3.

Hierzu ist es zweckmäßig, den Großclan aus (5.31) etwas anders aufzuteilen

$$\text{CLANA} = \text{CL}^v A \cup \text{CL}^h A \cup \text{CL}^w A \quad (6.14)$$

in den vertikalen, horizontalen und den gemischten Winkelanteil  $\text{CL}^w A = \text{Clan STA}$ .

Es entstehen die Einzelanzahlen

$$\#\text{CL}^v A = \#\text{Cl}_{\text{str}}^v A + \#\text{Cl}'_y A + \#\text{Cl}'_z A \quad (6.15)$$

analog im horizontalen Fall. Sind  $m_{ij}$  und  $m_{ij}^\circ$  die Exponenten von  $A$ , so wird mit  $k_i = \sum_j m_{ij}$  und  $k_j^\circ = \sum_i m_{ij}^\circ$

$$\#\text{Cl}_{\text{str}}^v A = \sum_i (2^{k_i} - 1), \quad \#\text{Cl}_{\text{str}}^h A = \sum_j (2^{k_j^\circ} - 1), \quad (6.15')$$

ohne Zählung von  $A$ . Die axialen Anzahlen sind nach (5.32") zu bestimmen.

**Beispiel 6.1** (Das Superfixe C). Hier sind alle Exponenten  $m_{ij} = m_{ij}^\circ = 3$ , also  $k_i = k_j^\circ = 9$ . Also sind die  $v$ - und  $h$ -Anteile des Streifenclans je 1533, ohne  $A$ -Zählung. Der axiale Anteil ist das Doppelte von

$$\#\text{Cl}'_y C = 7^3 + 3 \cdot 7^2 = 490, \quad \text{also} \quad 980.$$

Der Winkelbeitrag ist

$$\sum_{ij} (2^3 - 1)(2^3 - 1) = 441.$$

Die vertikalen und die horizontalen Beiträge ergeben jeweils  $1533 + 980 = 2513$ . Aus  $2 \cdot 2513 + 441 + 1$  ergibt sich inclusive der Zählung von  $C$  die Anzahl des Großclans

$$\#\text{CLAN } C = 5468.$$

**Beispiel 6.2** (Sondersudokus 1. Art (in Schönhages Zählung)). Das Sondersudoku  $S_2$  ist total-singulär, der Großclan besteht nur aus dem Gründer  $S_2$ .

### Das Sudoku $S_9$

Hier sind die horizontalen Exponenten  $m_{ij}^\circ = 3$  und die vertikalen  $m_{ij} = 1$ , also  $k_i = 3$  und  $k_j^\circ = 9$ . Für den horizontalen Anteil gilt wieder

$$\#\text{CL}^h S_9 = 2513 \quad (\text{ohne } S_9).$$

Für den vertikalen Anteil ist der Streifenbeitrag  $\sum_i (2^3 - 1) = 21$  und der axiale Beitrag  $2(1 + 3 \cdot 1) = 8$ , insgesamt also  $\#\text{CL}^v S_9 = 29$  (ohne  $S_9$ ).

Der Winkelanteil ist  $\#\text{CL}^w S_9 = \sum_{ij} (2^1 - 1)(2^3 - 1) = 63$ . Also ist

$$\#\text{CLANS}_9 = 2605 + 1 = 2606.$$

**Bemerkung 6.3.** Das Maximum 5468 der Großclan-Anzahlen wird von allen Superfixen und allen Sondersudokus der 2-ten Art angenommen, das Minimum (bisher) nur vom Sondersudoku 1. Art  $S_2$  und dessen  $G^*$ -Bahn. Das total-reguläre  $S_9$  1. Art und dessen  $G^*$ -Bahn kommen auf 2606 Mitglieder.

## 6.4 Individuelle Sudokus

also solche, die im bisherigen Text vorkamen.

### a. Das Clansudoku $J$ zu $C^\circ$

Es wurde in Abschnitt 5.3 angegeben als das erste Beispiel für verschwindende Determinante.  $J$  entsteht aus dem Fixsudoku  $C^\circ$  durch Vertauschung der Spalten

$$\begin{array}{cc} 5 & 8 \\ 8 & \text{und} & 2 \\ 2 & & 5 \end{array} \quad \text{im letzten Horizontalstreifen,}$$

also durch einen Schaltprozess in einer regulären 6er-Tonne des zugehörigen  $D$ -Graphen  $D_{33}^\circ C^\circ$ .  $J$  liegt also in dem Teilclan  $\text{Cl}_e^\circ C^\circ$ . Haben beide Sudokus den gleichen Stamm, oder ändern sich die Zweige?

Zunächst wird im Zweig  $D_{33}^\circ$  von  $C^\circ$  nur eine Schaltung in einer 6er-Tonne vorgenommen, der Zweig ändert sich nicht.

Da von den Horizontalstreifen nur der letzte betroffen ist, zerlegen die ersten beiden Zweige  $D_{11}^\circ$  und  $D_{22}^\circ$  wie auch der 3. vertikale Zweig  $D_{33}^\circ$  von  $J$  wieder in 3 reguläre 6er-Tonnen, wie zu  $C^\circ$ .

Die beiden vertikalen Zweige  $D_{11}$  und  $D_{22}$  dagegen ändern sich. Dazu muss die neue Dominobelegung von  $J$  hergestellt werden. Auch die alte Belegung von  $D_{33}$  wird nochmals aufgeführt.

$D_{11}J$			$D_{22}J$			$D_{33}J$			
89	79	78	56	46	45	89	79	78	
23	13	12	89	79	78	23	13	12	
56	46	45	23	13	12	56	46	45	(†)
68	46	48	59	79	57	56	46	45	
29	79	27	38	13	18	89	79	78	
35	13	15	26	46	24	23	13	12	

Man erkennt, dass die ersten beiden  $D$ -Graphen regulär und zusammenhängend vom Typ  $R_{18}(33)$  sind. Sie sind nach Liste I isometrisch. Das Gesamtbild der 6  $D$ -Graphen  $D_{ii}, D_{ii}^\circ$  zu  $J$  ist unsymmetrisch.

Aus den Beispielen wurde klar, dass Elementarschaltungen in 6er-Tonnen stets auf Vertauschungen von 3er-Zeilen bzw. Spalten hinauslaufen. In jedem Fall liest man die neuen Sudokus zu beliebigen simultanen Schaltvorgängen direkt aus den Dominebelegungen ab.

Wir erläutern dies an der vollständigen Schaltung zur Gestalt  $G_e J$ , indem wir die Belegungen in ( $\dagger$ ) der vertikalen Zweige nutzen.

1	2	3	5	6	4	9	7	8		e	6	4	5	8	9	7
4	5	6	8	9	7	3	1	2			9	7	8	2	3	1
7	8	9	2	3	1	6	4	5			3	1	2	5	6	4
9	7	8	1	2	3	5	6	4	8	9	7			6	4	5
$J = 3$	1	2	4	5	6	8	9	7	$\mapsto J^* = 2$	3	1		e	9	7	8
6	4	5	7	8	9	2	3	1		5	6	4		3	1	2
8	6	4	9	7	5	1	2	3	6	4	8	5	9	7		
2	9	7	3	1	8	4	5	6	9	7	2	8	3	1		e
5	3	1	6	4	2	7	8	9	3	1	5	2	6	4		

$J^*$  ist das Endsudoku im Clan  $Cl_e J$  zur vertikalen Gestalt  $G_e J$ . Aber  $J^*$  liegt nicht im Clan  $Cl_e C^\circ$ , da die Stämme nicht isometrisch sind.

**Bemerkung 6.4.** Es wurde gezeigt

$$J \in Cl_e^\circ C^\circ, \quad J^* \in Cl_e J, \quad \text{also} \quad J \in Cl_e J^*.$$

Somit ist

$$J \in Cl_e C^\circ \cap Cl_e J^*,$$

der Durchschnitt beider Clans, nicht leer. Aber beide Clans sind verschieden

$$Cl_e C^\circ \neq Cl_e J^*,$$

hängen aber durch das Sudoku  $J$  zusammen.

In Abschnitt 5.3 wurde ein theoretischer Beitrag zum Parametrisierungsproblem geleistet. Nach dem Korollar zu Satz 5.4 ist der Diagonalclan  $Cl_y A$  eines Sudokus  $A$  zu gegebenem Parameter  $y = a/b/c$  enthalten in der Faser  $\Phi^{-1}y$  der Parametrisierungsabbildung  $\Phi : X \rightarrow Y$ .

## b. Das wilde Sudoku Z

fiel in Abschnitt 3.5 durch extreme Permutationsmerkmale auf:

2	8	1	9	6	5	7	3	4
5	6	9	4	7	3	8	1	2
7	3	4	2	1	8	6	5	9
9	2	6	5	8	4	1	7	3
Z = 3	5	7	1	2	6	4	9	8
1	4	8	3	9	7	2	6	5
6	1	2	8	3	9	5	4	7
4	7	3	6	5	2	9	8	1
8	9	5	7	4	1	3	2	6

Drückt sich dies auch in den Zweigen aus? Hierzu ist die Kenntnis des vollständigen Stammes erforderlich.

Die vertikalen Zweige  $D_{ij}$

$$\begin{array}{lll} K_{18}^2 & 2I \perp K_{16}^2(24) & K_{18}^2(29) \\ T_6 \perp T_{12} & 4I \perp C_4 \perp R_{10} & K_{18}^2(29) \\ K_{18}^2 & 2I \perp C_4 \perp K_{12}^2(18) & K_{18}^4(24) \end{array}$$

Die horizontalen Zweige  $D_{ij}^\circ$

$$\begin{array}{lll} T_6 \perp T_{12} & R_{18}(34) & R_{18}(34) \\ 2I \perp C_4 \perp K_{12}^3 & B_4^2 \perp K_{14}^3 & C_4 \perp B_4^2 \perp K_{10}^2 \\ B_4^2 \perp K_{14}^2 & C_4 \perp B_4^2 \perp K_{10}^2 & C_4 \perp B_4^2 \perp K_{10}^2 \end{array}$$

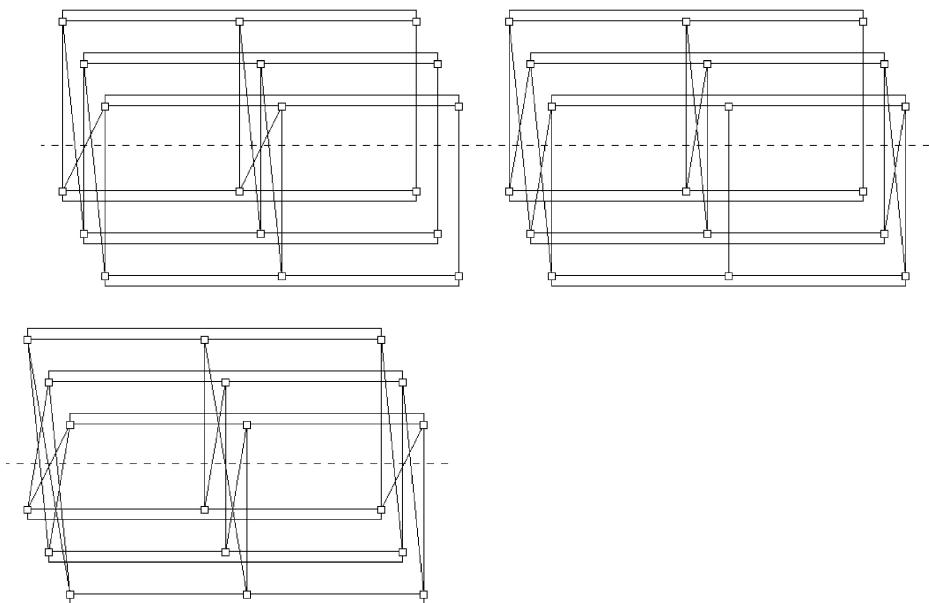
Zwar überwiegen die singulären Anteile, aber sie sind recht regelmäßig verteilt. Dabei gibt es sogar 4 reguläre Zweige mit solchen regulären Komponenten, die bisher nicht aufgetreten sind. Darunter der zusammenhängende  $D$ -Graph  $R_{18}(34)$  mit Kantenzahl 34, bisher war es 33. Das 3-te mit maximaler Kantenzahl 36 wurde noch nicht realisiert.

Schließlich zeigt sich die *reguläre 12er-Tonne*  $T_{12}(22)$ , die aus 2 regulären 6er-Tonnen durch Verschränkung mit 4 Kanten entsteht. Auch hier gibt es ein weiteres  $R_{12}(21)$ , das noch nicht auftrat.

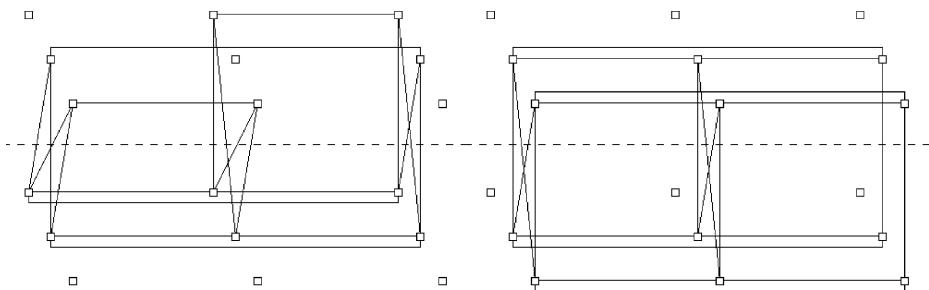
Das Sudoku Z ist also nicht so wild, wie vermutet.

An Graphiken werden hier die 3 regulären zusammenhängenden Komponenten und die beiden  $T_{12} = R_{12}(21)$  und  $R_{12}(22)$  vorgestellt:

Die drei Typen  $R(n)$  für  $n = 33, 34, 36$



und die zwei Typen von  $T_{12}$



## 6.5 Viele Rechteckeffekte

Die beiden Beispiele erläutern Satz 6.3.

### a. Das Sudoku Y

wurde in Abschnitt 5.4 eingeführt, um die Notwendigkeit zu begründen, die Regulativen an allen Stellen  $(i, j)$  anzusetzen, also den Stamm einzuführen.

5 Rechtecke effekte sind in  $Y$  markiert, aber bei genauerem Hinsehen erkennt man weitere (34) und (36). Durch explizite Herstellung des Stammes treten auch die letzten in Form regulärer  $C_4$  zutage.

Die Dominobelegungen zu allen 18 Regulativen ergeben den Stamm von  $Y$ .

*Die vertikalen Zweige  $D_{ij}$*

$$\begin{array}{lll} B_4^2 \perp K_{14}^2(21) & C_4 \perp 2.I \perp 2.K_6^2(6) & K_{18}^3(27) \\ C_4 \perp 4.I \perp R_{10} & C_4 \perp 2.I \perp 2.K_6^2(6) & K_{18}^3(27) \\ K_{18}^4(24) & 2.C_4 \perp 4.I \perp K_6^2(6) & 3.K_6^2(6) \end{array} \quad (6.16)$$

Wingens Liste zeigt, dass bis auf die Fälle  $D_{11}$  und  $D_{13}$  die Isometrietypen festliegen.

*Die horizontalen Zweige  $D_{ij}^\circ$*

$$\begin{array}{lll} D_{i1}^\circ \\ B_4^2 \perp K_{14}^3 \\ C_4 \perp B_4^2 \perp K_{10}^2 \\ K_{18}^2 \end{array} \quad \begin{array}{lll} D_{i2}^\circ \\ C_4 \perp 2.I \perp 2.K_6^2 \\ C_4 \perp 2.I \perp K_{12}^2 \\ K_{18}^2 \end{array} \quad \begin{array}{lll} D_{i3}^\circ \\ B_4^2 \perp K_{14}^3 \\ C_4 \perp B_4^2 \perp K_{10}^2 \\ 2.B_4^2 \perp R_{10} \end{array} \quad (6.16^\circ)$$

Hier liegen nur in 3 Fällen die Isometrietypen der Zweige fest.

Es treten 9 reguläre Rechtecke  $C_4$  auf, also 3 mehr als im numerischen Sudoku  $Y$  zunächst erkannt. Außer 2 weiteren regulären Komponenten  $R_{10}$  sind alle Komponenten singulär.

Die Indextafeln sind

vertikal			horizontal		
(0, 4)	(1, 6)	(0, 3)	(0, 4)	(1, 6)	(0, 4)
(2, 4)	(1, 6)	(0, 3)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)
(0, 4)	(2, 6)	(0, 6)	(0, 2)	(0, 2)	(1, 4)

Die Gesamtindizes sind demnach

$$\text{ind } Y = (6, 42) \text{ im vertikalen,} \quad \text{ind}^\circ Y = (5, 34) \text{ im horizontalen Fall.}$$

Damit wird an einem zufälligen Sudoku bestätigt, dass das Auftreten der regulären  $C_4$  starke Singularitäten nach sich zieht.

**b. Ein weiteres zufälliges Sudoku**

weist bereits nach Inspektion 12 Rechteckeffekte auf:

6	7	5	2	8	4	9	3	1
4	8	9	6	1	3	2	5	7
2	3	1	7	5	9	6	8	4
5	6	7	8	2	1	3	4	9
$Y'$ = 8	4	2	9	3	6	1	7	5
9	1	3	5	4	7	8	6	2
7	5	8	1	6	2	4	9	3
1	9	4	3	7	8	5	2	6
3	2	6	4	9	5	7	1	8

Die Dominobelegungen zu allen Regulativen ergeben die Komponentenzerlegungen der Zweige des Stammes:

Die vertikalen Zweige  $D_{ij}$

$$\begin{array}{lll} 2.I \perp C_4 \perp K_{12}^3 & B_4^2 \perp K_{14}^2 & 4.I \perp 2.C_4 \perp T_6 \\ C_4 \perp B_4^2 \perp K_{10}^3 & 2.C_4 \perp B_4^2 \perp K_6^3 & 2.I \perp C_4 \perp K_{12}^3 \\ 4.I \perp 2.C_4 \perp T_6 & C_4 \perp B_4^2 \perp K_{10}^3 & 2.I \perp 2.C_4 \perp K_8^3 \end{array}$$

Die horizontalen Zweige  $D_{ij}^\circ$

$$\begin{array}{lll} K_{18}^2 & K_{18}^2 & B_4^2 \perp K_{14}^2 \\ C_4 \perp B_4^2 \perp K_{10}^2 & K_{18}^2 & T_6 \perp K_{12}^2 \\ 2.I \perp K_{16}^3 & B_4^2 \perp K_3^3 & C_4 \perp K_{14}^4 \end{array}$$

Das Sudoku  $Y'$  hat also 14 Rechteckeffekte, entsprechend zahlreich sind die singulären Komponenten.  $Y'$  hat keine regulären Zweige. Außer  $C_4$  und der regulären 6er-Tonne  $T_6$  gibt es keine regulären Komponenten.

Die Indextafeln sind

vertikal			horizontal		
(1, 6)	(0, 4)	(3, 4)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 4)
(1, 5)	(2, 5)	(1, 5)	(1, 4)	(0, 2)	(1, 2)
(3, 4)	(1, 4)	(2, 5)	(0, 5)	(0, 4)	(1, 4)

Die Gesamtindizes sind daher

$$\text{ind } Y' = (13, 42) \quad \text{ind}^\circ Y' = (3, 29).$$

Es zeigt sich, dass die Indizes kein ausreichendes Maß für die Komplexität eines Sudokus sind. Das total-singuläre Sondersudoku  $S_2$  erreicht das Maximum von je 54, insgesamt also 108 singulären Komponenten. Demgegenüber sind die Werte 42, 29 von  $Y'$  vergleichsweise gering.

Die Vielfalt der Komponenten und ihre Verteilung auf die Zweige ergibt dagegen ein anderes Bild. Das Sondersudoku  $S_2$  hat nur eine einzige kleine Komponente  $K_6^2(6)$ , die *regelmäßig* auf die Zweige verteilt ist: je 3 Exemplare auf einem Zweig.

Demgegenüber hat  $Y'$  13 singuläre Komponenten

$$K_{18}^4, \quad K_{18}^2, \quad K_{16}^3, \quad K_{14}^4, \quad K_{14}^3, \quad K_{14}^2, \\ K_{12}^3, \quad K_{12}^2, \quad K_{10}^3, \quad K_8^3, \quad K_6^2(6), \quad B_4^2$$

und eine isolierte Ecke. Und diese Komponenten sind *unregelmäßig* auf die Zweige verteilt.

Die Komplexität, also der Grad der “Wildheit” eines Sudokus wird zugleich *qualitativ* und *quantitativ* zu messen sein, durch Anzahl und Art der Verteilung der singulären Komponenten auf die Zweige.

## 6.6 Intersektionsmatrizen und Singularitäten-Verteilungen

In Kapitel 5 wurde erkannt, dass für einen Sudoku-Vertikalstreifen mit Regulativ  $b$

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$$

die Anzahlen der Durchschnitte

$$a_i \cap b^j \quad \text{und} \quad c_i \cap b^j$$

der Zeilenmengen  $a_i, c_i$  von  $a, c$  mit den Spaltenmengen  $b^j$  des Regulativs für Anzahl und Lage der Singularitäten des  $D$ -Graphen  $D_b$  verantwortlich sind. Es zeigt sich nun, dass auch die Durchschnitte der Zeilen- und Spaltenmengen der 3 Blöcke von Bedeutung sind, wie auch von Schönhage in [18] erkannt. Damit ergeben sich dann weitreichende Aussagen über das singuläre Verhalten aller 3  $D$ -Graphen  $D_a, D_b, D_c$  und ihrer Zusammenhänge.

Es werden allgemein Partitionen der Ziffernmenge  $\Omega = \{1, \dots, 9\}$  in jeweils 3 3-elementige Teilmengen betrachtet. Für zwei solche Partitionen  $p = (p_1, p_2, p_3)$  und  $q = (q_1, q_2, q_3)$  wird die *Intersektionsmatrix*  $I(p, q)$  definiert durch

$$I(p, q)_{i,j} = \#(p_i \cap q_j) \quad \text{für alle } i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (6.17)$$

Diese Matrix hat offenbar Einträge 0, 1, 2 oder 3, alle Zeilen- und Spaltensummen sind 3.

Zwei Partitionen  $p, q$  heißen *äquivalent*, wenn die  $p_i$  bis auf die Reihenfolge mit den  $q_j$  übereinstimmen. Die Äquivalenzklasse von  $p$  wird mit  $\{p\}$  bezeichnet.

Zwei Intersektionsmatrizen heißen *äquivalent*, wenn sie zu paarweise äquivalenten Partitionen gehören. Offenbar entstehen äquivalente Intersektionsmatrizen durch Zeilen- und Spaltenpermutationen auseinander.

**Lemma 6.1.** Die Äquivalenzklassen von Intersektionsmatrizen werden durch die folgenden 5 Standard-Vertreter repräsentiert:

Typ 1	Typ 2	Typ 3	Typ 4	Typ 5	(6.18)
3   0   0	3   0   0	2   0   1	2   0   1	1   1   1	
0   3   0	0   2   1	1   2   0	0   2   1	1   1   1	
0   0   3	0   1   2	0   1   2	1   1   1	1   1   1	

Diese 5 Intersektionstypen werden durch die Matrix-Spuren ihrer Standard-Vertreter charakterisiert und nach abnehmenden Spurwerten angeordnet:

$$9, \quad 7, \quad 6, \quad 5, \quad 3.$$

*Beweis.* Die Summe der drei größten Einträge ist eine Invariante bei Zeilen- und Spaltenpermutationen. Sie ist bei den angegebenen Typen jeweils durch die Spur gegeben. Da die Spurwerte alle verschieden sind, sind die 5 Typen alle inäquivalent.

Da die Zeilen- und Spaltensummen der Intersektionsmatrix 3 sind, müssen Einträge  $\geq 2$  in verschiedenen Zeilen und in verschiedenen Spalten liegen. Sie können also durch Zeilen- und Spaltenpermutationen alle auf die Hauptdiagonale gebracht werden, dort in absteigender Reihenfolge links oben beginnend. Die restlichen Einträge der Hauptdiagonale müssen 1-en sein, da bei einer 0 die Zeilen- und Spaltensumme 3 nicht mehr erreicht werden könnte.

Ein Eintrag 3 in der Hauptdiagonalen erfordert, dass alle übrigen Einträge der zugehörigen Zeile und Spalte 0 sind. Ein Eintrag 1 in der Hauptdiagonalen erfordert, dass alle übrigen Einträge der zugehörigen Zeile und Spalte 1 sind. Die beiden Fälle können also nicht gleichzeitig eintreten.

Eine Fallunterscheidung über die verbleibenden Möglichkeiten der Einträge 3, 2, 1 in der Hauptdiagonalen führt zu folgendem Ergebnis:

**Tabelle 6.3:** Klassifikation von Intersektionsmatrizen

Einträge in der Hauptdiagonalen	Resultat
3, 3, 3	Typ 1
3, 3, 2	Unmöglich, da der Eintrag 2 die Zeilensumme $2 + 0 + 0 = 2$ hätte.
3, 2, 2	Typ 2
2, 2, 2	Hier enthält jede Zeile und Spalte neben dem Eintrag 2 genau einen Eintrag 1. Die Einträge 1 liegen also in einer der beiden Nebendiagonalen. Der eine Fall entspricht bereits Typ 3, der andere Fall wird durch Vertauschung der 1. und 3. Zeile und Vertauschung der 1. und 3. Spalte, d.h. durch Spiegelung am Mittelpunkt, in Typ 3 überführt.
2, 2, 1	Typ 4
2, 1, 1	Unmöglich, da der Eintrag 2 die Zeilensumme $2 + 1 + 1 = 4$ hätte.
1, 1, 1	Typ 5

Jeder Fall, der sich nicht als unmöglich herausstellt, führt somit zu einem der angegebenen 5 Typen.  $\square$

Es erhebt sich die Frage, wie sich für die 5 Intersektionstypen die beiden beteiligten Partitionen  $p$  und  $q$  jeweils voneinander unterscheiden, wie weit sie voneinander entfernt sind. Ein Konzept, die Entfernung zu messen, ist das Folgende:

Die  $p_i, q_j$  werden durch äquivalente Vertauschungen in eine solche Reihenfolge gebracht, dass die Summe

$$\#(p_1 \setminus q_1) + \#(p_2 \setminus q_2) + \#(p_3 \setminus q_3) \quad (6.19)$$

minimal wird. Dieser minimale Wert heißt die *Distanz*  $\delta(p, q)$  von  $p$  und  $q$ .

**Lemma 6.2.** *Die Distanz ist eine Funktion der Äquivalenzklassen  $\{p\}$  und  $\{q\}$  und genügt den Bedingungen einer Distanzfunktion.*

Für die 5 Intersektionstypen ist die Distanz gegeben durch

$$9 \text{ abzüglich der Spur des Standardvertreters,} \quad (6.20)$$

also 0, 2, 3, 4, 6.

*Beweis.*  $\delta$  ist eine Distanzfunktion:

Zur Definitheit: Wegen  $\#p_i = \#q_j (= 3)$  ist  $\#(p_i \setminus q_j) = 0$  nur für  $p_i = q_j$ .

Zur Symmetrie: Wegen  $\#p_i = \#q_j$  ist  $\#(p_i \setminus q_j) = \#(q_j \setminus p_i)$ .

Zur Dreiecksungleichung: Seien  $p, q, r$  drei Partitionen.

Durch Umsortierung der  $p_i$  wird erreicht  $\delta(p, q) = \sum_i \#(p_i \setminus q_i)$ .

Durch Umsortierung der  $r_i$  wird erreicht  $\delta(q, r) = \sum_i \#(q_i \setminus r_i)$ .

Offenbar gilt stets

$$\#(p_i \setminus r_i) \leq \#(p_i \setminus q_i) + \#(q_i \setminus r_i)$$

Summation über alle  $i$ :

$$\sum_i \#(p_i \setminus r_i) \leq \delta(p, q) + \delta(q, r)$$

$\delta(p, r)$  ist als ein Minimum über Ausdrücke definiert, unter denen der Ausdruck auf der linken Seite der Ungleichung vorkommt, daher folgt

$$\delta(p, r) \leq \delta(p, q) + \delta(q, r).$$

Zu (6.20):

Wegen  $\#p_i = 3$  ist  $\#(p_i \setminus q_j) = 3 - \#(p_i \cap q_j) = 3 - I(p, q)_{i,j}$ . Dies in (6.19) eingesetzt ergibt: Die Distanz ist der Minimalwert bzgl. Umsortierungen der  $p_i, q_j$  von

$$(3 - I(p, q)_{1,1}) + (3 - I(p, q)_{2,2}) + (3 - I(p, q)_{3,3}) = 9 - \text{sp } I(p, q),$$

worin sp die Matrixspur bezeichnet. Umsortierungen der  $p_i, q_j$  entsprechen Zeilen- und Spaltenvertauschungen in  $I(p, q)$ . Die in (6.18) angegebenen Standardvertreter

der Intersektionstypen haben hinsichtlich Zeilen- und Spaltenvertauschungen offenbar maximale Spur, daher gilt für sie  $\delta(p, q) = 9 - \text{sp } I(p, q)$ .

Die Werte für die einzelnen Intersektionstypen können an den Standard-Vertretern abgelesen werden.  $\square$

Ein Block  $a \in X_0$  definiert auf zwei natürliche Weisen Partitionen der obigen Art: Die Zerlegung von  $\Omega$  einerseits in die 3 Zeilenmengen und andererseits in die 3 Spaltenmengen von  $a$ , die mit  ${}^\circ a$  bzw.  $a^\circ$  bezeichnet werden.

**Lemma 6.3.** Der Übergang zu unter  $\Gamma_0$  konjugierten Sudoku-Blöcken ändert die Distanz nicht:

Für  $c \simeq a$  und  $d \simeq b$  ist  $\delta(c^\circ, d^\circ) = \delta(a^\circ, b^\circ)$  und  $\delta({}^\circ c, {}^\circ d) = \delta({}^\circ a, {}^\circ b)$ .

Es ist  $\delta({}^\circ a, a^\circ) = 6$ .

*Beweis.* O. E. wird  $\delta(c^\circ, d^\circ) = \delta(a^\circ, b^\circ)$  gezeigt. Ist  $c \simeq a$ , so kann  $c$  aus  $a$  durch Zeilen- und Spaltenpermutationen erzeugt werden. Zeilenpermutationen verändern  $a^\circ$  nicht, Spaltenpermutationen überführen  $a^\circ$  in eine äquivalente Partition. Somit folgt  $\{c^\circ\} = \{a^\circ\}$ . Analog folgt aus  $d \simeq b$   $\{d^\circ\} = \{b^\circ\}$ . Da die Distanz nur von der Äquivalenzklasse der Partition abhängt, folgt die Behauptung.

In  $I({}^\circ a, a^\circ)$  sind alle Einträge  $\#(a_i \cap a^j) = 1$ , daher folgt  $\delta({}^\circ a, a^\circ) = 6$ .  $\square$

Wir betrachten nun den  $D$ -Graphen auf dem Sudoku-Vertikalstreifen

$$\begin{array}{c} a \\ VS = b \\ c \end{array}$$

mit Eckenmengen  $a$  und  $c$  und Regulativ  $b$ .

Für Sudoku-Horizontalstreifen gelten die folgenden Aussagen analog.

**Lemma 6.4.** (i) Es gelten die Matrizengleichungen

$$I(a^\circ, b^\circ) + I(a^\circ, c^\circ) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 0 & 3 \\ \hline 3 & 3 & 0 \\ \hline \end{array} \quad I({}^\circ a, b^\circ) + I({}^\circ a, c^\circ) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

(ii) Es ist

$$I(a^\circ, b^\circ) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & \chi & 3 - \chi \\ \hline 3 - \chi & 0 & \chi \\ \hline \chi & 3 - \chi & 0 \\ \hline \end{array} =: I_\chi \quad \text{mit } \chi \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$\chi$  ist die Charakteristik von  $VS$ . Der Zusammenhang mit der Distanz ist gegeben durch

$$\delta(a^\circ, b^\circ) = 3 \cdot \min(\chi, 3 - \chi). \quad (6.21)$$

- (iii)  $I(^{\circ}a, b^{\circ})$  und  $I(^{\circ}a, c^{\circ})$  haben den gleichen Intersektionstyp 3, 4 oder 5.
- (iv)  $I(^{\circ}a, b^{\circ})$  hat gleichviele 2- und 0-Einträge. Diese Anzahl ist 3 beim Typ 3, 2 beim Typ 4 und 0 beim Typ 5. Entsprechendes gilt für  $I(^{\circ}a, c^{\circ})$ .

*Beweis.* Zu (i): Für alle  $j$  gilt:

$$a^j \dot{\cup} b^j \dot{\cup} c^j = \Omega,$$

also für jeden Block  $x$  und für jede Zeile  $x_i$  dieses Blocks

$$(x_i \cap a^j) \dot{\cup} (x_i \cap b^j) \dot{\cup} (x_i \cap c^j) = x_i,$$

$$\#(x_i \cap a^j) + \#(x_i \cap b^j) + \#(x_i \cap c^j) = \#x_i = 3.$$

Somit gilt für jede Partition  $p$

$$I(p, a^{\circ}) + I(p, b^{\circ}) + I(p, c^{\circ}) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Setzt man  $p = a^{\circ}$  bzw.  $p = {}^{\circ}a$ , so folgt mit

$$I(a^{\circ}, a^{\circ}) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \\ \hline \end{array} \quad I({}^{\circ}a, a^{\circ}) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

die Behauptung.

Zu (ii): Nach (i) besteht die Hauptdiagonale von  $I(a^{\circ}, b^{\circ})$  aus 0-Einträgen. Jede äquivalente Intersektionsmatrix hat eine (steigende oder fallende) Diagonale aus 0-Einträgen. Dies ist nach (6.18) nur bei den Intersektionstypen 1 und 3 der Fall. Transformiert man die Standard-Vertreter so, dass die 0-Einträge auf der Hauptdiagonalen liegen, so erhält man beim Typ 1  $I_{\chi}$  mit  $\chi \in \{0, 3\}$  und beim Typ 3  $I_{\chi}$  mit  $\chi \in \{1, 2\}$ .

$I(a^{\circ}, b^{\circ})_{j,j+1}$  ist somit einerseits  $= (I_{\chi})_{j,j+1} = \chi$  und andererseits gleich  $\#(a^j \cap b^{j+1})$ , was gerade die Charakteristik des Vertikalstreifens ist.

Die drei größten Einträge von  $I_{\chi}$  sind alle gleich  $\max(\chi, 3 - \chi)$ . Die Distanz ist nach (6.20) daher  $\delta(a^{\circ}, b^{\circ}) = 9 - 3 \cdot \max(\chi, 3 - \chi) = 3 \cdot \min(\chi, 3 - \chi)$ .

Zu (iii) und (iv): Nach (i) haben  $I(^{\circ}a, b^{\circ})$  und  $I(^{\circ}a, c^{\circ})$  keine 3-Einträge, es kommen also nur die Intersektionstypen 3, 4 und 5 in Frage. Die zugehörigen Standard-Vertreter haben nach (6.18) jeweils gleichviele 2- wie 0-Einträge (nämlich 3 beim Typ 3, 2 beim Typ 4 und 0 beim Typ 5), und diese Eigenschaft überträgt sich offenbar auf alle Vertreter dieser Typen. Somit charakterisiert die Anzahl der 2- bzw. 0-Einträge den Intersektionstyp unter 3, 4, 5.

Aufgrund von (i) ist die Anzahl der 2-Einträge von  $I(^{\circ}a, b^{\circ})$  gleich der Anzahl der 0-Einträge von  $I(^{\circ}a, c^{\circ})$  und somit auch gleich der Anzahl der 2-Einträge von  $I(^{\circ}a, c^{\circ})$ . Somit sind die Typen von  $I(^{\circ}a, b^{\circ})$  und  $I(^{\circ}a, c^{\circ})$  gleich.  $\square$

Der folgende Satz zeigt, dass Anzahl und Lage der Singularitäten Distanzen und Intersektionsmatrizen entnommen werden können:

- Satz 6.8.** (i) Die Anzahl der Singularitäten in  $a$  bzw.  $c$  ist gleich  $6 - \delta(\circ a, b^\circ)$  bzw.  $6 - \delta(\circ c, b^\circ)$ .  
(ii) Die Position der Singularitäten in  $a$  bzw.  $c$  ist identisch mit der Position der 2-Einträge in  $I(\circ a, b^\circ)$  bzw.  $I(\circ c, b^\circ)$ .

*Beweis.* Die beiden Aussagen werden in umgekehrter Reihenfolge gezeigt und o. E. nur für die Eckenmenge  $a$ .

Zu (ii):

$I(\circ a, b^\circ)$  hat an der Position  $(i, j)$  einen 2-Eintrag bedeutet:  $\#(a_i \cap b^j) = 2$ . Dies entspricht genau der Definition einer Singularität an der Position  $(i, j)$ .

Zu (i):

Nach (ii) ist die Anzahl der Singularitäten in  $a$  gleich der Anzahl der 2-Einträge in  $I(\circ a, b^\circ)$ . Nach Lemma 6.4 (iv) ist diese Anzahl 3, 2, 0 für den Intersektionstyp 3, 4 oder 5, und andere Intersektionstypen kommen nicht in Frage. Nach Lemma 6.2 gehört zum Intersektionstyp 3, 4 bzw. 5 die Distanz  $\delta(\circ a, b^\circ) = 3, 4$  bzw. 6. Daher ist  $6 - \delta(\circ a, b^\circ)$  in jedem Fall gleich der Anzahl der Singularitäten in  $a$ .  $\square$

Der folgende Satz stellt Beziehungen zwischen den drei auf dem Sudoku-Vertikalstreifen VS mit den Blöcken  $a, b, c$  liegenden Zweigen  $D_a, D_b, D_c$  fest ( $D_x$  bezeichnet jeweils den Zweig mit Regulativ  $x$ ). Der Satz ist für den Block  $a$  formuliert und gilt analog für die Blöcke  $b$  und  $c$ .

- Satz 6.9.** (i) Die Anzahl der Singularitäten von  $a$  in  $D_b$  und  $D_c$  ist gleich.  
(ii) Ist die Anzahl der Singularitäten von  $a$  in  $D_b$  und  $D_c$  jeweils 2 und sind die Positionen in  $D_b$   $(i_1, j_1)$  und  $(i_2, j_2)$ , so sind die Positionen in  $D_c$   $(i_1, j_2)$  und  $(i_2, j_1)$ .  
(iii) Ist die Anzahl der Singularitäten von  $a$  in  $D_b$  und  $D_c$  jeweils 3 und sind die Positionen in  $D_b$   $(1, j_1), (2, j_2), (3, j_3)$ , so sind die Positionen in  $D_c$   $(1, j_1 + \varepsilon), (2, j_2 + \varepsilon), (3, j_3 + \varepsilon)$  mit  $\varepsilon = 1$  oder  $\varepsilon = -1$ .

*Beweis.* Nach Satz 6.8 (ii) entspricht jede Singularität von  $a$  in  $D_b$  positionsmäßig einem 2-Eintrag von  $I(\circ a, b^\circ)$  und jede Singularität von  $a$  in  $D_c$  einem 2-Eintrag von  $I(\circ a, c^\circ)$ . Ein 2-Eintrag von  $I(\circ a, c^\circ)$  entspricht nach Lemma 6.4 (i) weiter einem 0-Eintrag von  $I(\circ a, b^\circ)$ .

Die Positionen der Singularitäten von  $a$  in  $D_b$  und  $D_c$  spiegeln sich also beide positionsmäßig in  $I(\circ a, b^\circ)$  wider: Erstere als 2-Einträge, letztere als 0-Einträge.

Ist  $I(\circ a, b^\circ)$  vom Intersektionstyp 5, so gibt es nach (6.18) weder 2- noch 0-Einträge, also hat  $a$  weder in  $D_b$  noch in  $D_c$  eine Singularität.

Ist  $I(\circ a, b^\circ)$  vom Intersektionstyp 4, so gibt es nach (6.18) zwei 2- und zwei 0-Einträge, also hat  $a$  sowohl in  $D_b$  als auch in  $D_c$  genau zwei Singularitäten. Der Standard-Vertreter des Typs 4 hat die 2-Einträge an den Positionen  $(1, 1)$  und  $(2, 2)$ ,

die 0-Einträge an den Positionen  $(1, 2)$  und  $(2, 1)$ , er erfüllt also die in (ii) behauptete Positionseigenschaft. Da diese invariant gegenüber Zeilen- und Spaltenpermutationen von  $I(^a, ^b)$  formuliert ist, folgt (ii).

Ist  $I(^a, ^b)$  vom Intersektionstyp 3, so gibt es nach (6.18) drei 2- und drei 0-Einträge, also hat  $a$  sowohl in  $D_b$  als auch in  $D_c$  genau drei Singularitäten. Da die 2- und 0-Einträge an verschiedenen Positionen stehen, fällt keine Singularität von  $a$  in  $D_b$  mit einer Singularität von  $a$  in  $D_c$  zusammen.

Seien die Positionen der drei Singularitäten von  $a$  in  $D_c(1, k_1), (2, k_2)$  und  $(3, k_3)$ . Dann ist also einerseits  $k_1 \neq j_1, k_2 \neq j_2, k_3 \neq j_3$ . Andererseits ist natürlich  $\{j_1, j_2, j_3\} = \{k_1, k_2, k_3\} = \{1, 2, 3\}$ .  $k_1, k_2, k_3$  stellen also eine fixpunktfreie Permutation von  $j_1, j_2, j_3$  dar. Nun gibt es nur zwei fixpunktfreie Permutationen von  $j_1, j_2, j_3$ , die in der Form  $j_1 + \varepsilon, j_2 + \varepsilon, j_3 + \varepsilon$  mit  $\varepsilon = 1$  bzw.  $\varepsilon = -1$  dargestellt werden können. Somit gilt (iii).

In allen Fällen stellte sich heraus, dass  $a$  in  $D_b$  und  $D_c$  gleichviele Singularitäten hat, also gilt (i).  $\square$

**Korollar.** *Die Kombination von drei Zweigen mit  $i, j$  und  $k$  Singularitäten in einem Sudoku-Streifen ist nur möglich, wenn*

- $s := (i + j + k)/2$  ganzzahlig ist und
- $s - i, s - j, s - k$  alle in  $\{0, 2, 3\}$  liegen.

*Beweis.* Nach Satz 6.9 (i) hat jeder der Blöcke  $a, b, c$  in den beiden Zweigen, in denen er als Eckenmenge auftritt, gleich viele Singularitäten. Sei  $s_a, s_b, s_c$  jeweils diese Anzahl. Bezeichnen o. E.  $i, j, k$  die Singularitätenanzahl von  $D_a, D_b$  bzw.  $D_c$ , so ist also  $i = s_b + s_c, j = s_a + s_c, k = s_a + s_b$ . Es folgt:  $s = (i + j + k)/2 = s_a + s_b + s_c$  ist ganzzahlig,  $s - i = s_a, s - j = s_b$  und  $s - k = s_c$  liegen als Singularitätenanzahlen von Eckenmengen in  $\{0, 2, 3\}$ .  $\square$

Zwischen drei regulären Zweigen auf einem Sudoku-Streifen erhält man eine weitere Beziehung mit Hilfe der Distanzfunktion. Nach Lemma 6.2 hängt die Distanz zweier Partitionen nur von deren Intersektionstyp  $m$  ab und kann daher mit  $\delta_m$  bezeichnet werden. Es ist  $\delta_1 = 0, \delta_2 = 2, \delta_3 = 3, \delta_4 = 4, \delta_5 = 6$ .

**Lemma 6.5.** *Die Kombination von drei regulären Zweigen der Intersektionstypen  $l \leq m \leq n$  in einem Sudoku-Streifen ist nur möglich, wenn für die zugehörigen Distanzen gilt*

$$\delta_n \leq \delta_l + \delta_m.$$

Ist also  $l = 0$ , so ist  $m = n$ .

Ist  $n = 5$ , so ist  $l + m \geq 6$ .

*Beweis.* Sei o. E.  $l$  der Typ von  $D_a$ ,  $m$  der Typ von  $D_b$  und  $n$  der Typ von  $D_c$ . Dann ist  $\delta(^b, ^c) = \delta_l, \delta(^a, ^c) = \delta_m, \delta(^a, ^b) = \delta_n$ . Aufgrund der Dreiecksungleichung folgt  $\delta_n \leq \delta_l + \delta_m$ .

Ist  $l = 0$ , so folgt  $\delta_n \leq \delta_m$ . Aufgrund der Monotonie von  $k \mapsto \delta_k$  ist  $\delta_m \leq \delta_n$ . Zusammen folgt  $\delta_m = \delta_n$  und dann auch  $m = n$ .

Ist  $n = 5$ , so ist  $\delta_n = 6 \leq \delta_l + \delta_m$ . Man prüft:  $\delta_l + \delta_m = 6$  gilt genau für  $l + m = 6$ . Wegen der Monotonie von  $\delta$  ist daher  $\delta_l + \delta_m \geq 6$  gleichwertig mit  $l + m \geq 6$ .  $\square$

In den vorherigen Abschnitten wurden die Zweige der Sondersudoku 2. Art nicht bestimmt. Dies kann nun mit Hilfe der Distanzfunktion erreicht werden:

**Satz 6.10.** *Die Sondersudoku 2. Art haben nur Zweige vom Typ  $3 \cdot T_6$ .*

*Beweis.* Nach Satz 2.11 sind alle Blöcke des Fixsudoku konjugiert zu  $e$ . Somit ist nach Lemma 6.3 für alle Blöcke  $a, b$  des Sudokus

- $\delta(^{\circ}a, b^{\circ}) = \delta(^{\circ}e, e^{\circ}) = 6$  und  $\delta(a^{\circ}, ^{\circ}b) = \delta(e^{\circ}, ^{\circ}e) = 6$ , d. h. nach Satz 6.8 (i): alle Zweige sind regulär;
- $\delta(^{\circ}a, ^{\circ}b) = \delta(^{\circ}e, ^{\circ}e) = 0$  und  $\delta(a^{\circ}, b^{\circ}) = \delta(e^{\circ}, e^{\circ}) = 0$ , d. h. nach Satz 7.8: alle Zweige sind vom Typ  $3 \cdot T_6$ .

$\square$

**Bemerkung 6.5.** Im Beweis von Satz 6.10 wurde auf Kapitel 7 vorgegriffen. Das deutet schon an, dass die Distanz dort eine weitere Anwendung bei der Klassifikation regulärer  $D$ -Graphen findet. Es stellt sich heraus, dass die 5 Isometrietypen regulärer  $D$ -Graphen durch 5 verschiedene Distanzen ihrer Eckenmengen charakterisiert sind. Daher kann Lemma 6.5 als eine Aussage über die möglichen Kombinationen (bis auf Isometrie) von 3 regulären Zweigen auf einem Sudokustreifen interpretiert werden.

## 6.7 Abgrenzung der Zweige von $G^*$ -fixen Sudokus zum Leitoperator $\sigma$

Bisher wurden nur vereinzelt Zweige von Sudokus per Hand berechnet. Nun sollen die Methoden von Kapitel 4 genutzt werden, um abgrenzend die möglichen Zweige einer Klasse von  $G^*$ -Fixen zu bestimmen, die zum Leitoperator  $\sigma$  gehören.

In Kapitel 3 wurden die  $G^*$ -Mengen der  $G$ -Fixen vom Typ  $\sigma$  bestimmt. Die dabei auftretende Leaderbasis aus reduzierten Sudokus – ohne die Sondersudoku 2. Art – bleibt numerisch wie strukturell völlig im Dunkeln. Hier helfen die Methoden von Kapitel 4, um weitere Erkenntnisse zu gewinnen, und letztlich die vertikalen Zweige zu bestimmen.

### Zweige der $G^*$ -Fixsudoku zum Leitoperator $\sigma$

In Satz 4.17 wurden die möglichen Vertikalstreifen eines  $G^*$ -Fixsudoku zum Leitoperator  $\sigma$  im adäquaten Fall ermittelt. Als mögliche  $\alpha$ -Typen stellten sich  $1, (3), (3, 3)$

und  $(3, 3, 3)$  heraus. Für die nicht-trivialen Typen treten zwei verschiedene Arten von Operation auf dem Vertikalstreifen auf: Die Ziffernmengen jedes 3-Zyklus von  $\alpha$  treten entweder in jedem Block als Spaltenmenge auf (*vertikaler Operationstyp*) oder schneiden jede Spaltenmenge jedes Blocks in genau einem Element (*horizontaler Operationstyp*). Die Streifencharakteristik ist beim vertikalen Operationstyp 3, beim horizontalen Operationstyp 3 minus die Anzahl der 3-Zyklen. Für  $\alpha = 1$  fallen beide Fälle zusammen.

Jedem 3-Zyklus von  $\alpha$  kann in dieser Situation eine *Bewegungsrichtung* zugeordnet werden:

- beim vertikalen Operationstyp nach unten bzw. nach oben, wenn die Ziffern des Zyklus durch die  $\alpha$ -Operation im Sudokustreifen entweder alle in die Zeile mit der nächsthöheren Nummer oder alle in die Zeile mit der nächstniedrigen Nummer verschoben werden (zyklische Randbedingungen, d. h. 1 ist die nächsthöhere Nummer zu 3);
- beim horizontalen Operationstyp nach rechts bzw. nach links, wenn die Ziffern des Zyklus durch die  $\alpha$ -Operation im Sudokustreifen entweder alle in die Spalte mit der nächsthöheren Nummer oder alle in die Spalte mit der nächstniedrigen Nummer verschoben werden.

Haben alle  $\alpha$ -Zyklen die gleiche Bewegungsrichtung, so heißt die  $\alpha$ -Operation *gleichläufig*, andernfalls *gegenläufig*. Diese Begriffe sind nur interessant, wenn  $\alpha$  mehr als einen 3-Zyklus besitzt, also vom Typ  $(3, 3)$  oder  $(3, 3, 3)$  ist.

Hat der Operationstyp sowohl die horizontale als auch die vertikale Eigenschaft (wenn die Träger der  $\alpha$ -Zyklen parallel verlaufende Blockdiagonalen sind), so erhält man aus beiden Sichtweisen offenbar den gleichen Begriff von gleich- und gegenläufiger Operation.

Wir untersuchen im Folgenden die auf dem gegebenen Vertikalstreifen liegenden 3 Zweige, zunächst für den vertikalen und anschließend für den horizontalen Operationstyp.

**Bemerkung 6.6.** Aufgrund der durch die Fixeigenschaft bedingten engen Verzahnung der 3 Blöcke haben die 3 Zweige den gleichen Isometriertyp.

### Vertikaler Operationstyp

**Satz 6.11.** Gegeben sei ein Vertikalstreifen mit Charakteristik 3 eines  $G^*$ -Fixsudokus zum Leitoperator  $\sigma$  im adäquaten Fall. Der Operationstyp von  $\alpha$  sei vertikal.

Dann sind alle 3 auf dem Vertikalstreifen liegenden Zweige regulär. Der Isometriertyp hängt in folgender Weise von der  $\alpha$ -Operation ab:

Typ der vertikalen $\alpha$ -Operation		Isometriertyp der $D$ -Graphen
1	–	$3.T_6$
(3)	–	$R_{18}(33)$
(3, 3)	gleichläufig	$R_{18}(33)$
(3, 3)	gegenläufig	$R_{18}(36)$
(3, 3, 3)	gleichläufig	$3.T_6$
(3, 3, 3)	gegenläufig	$R_{18}(33)$

*Beweis.* Nach (4.35) ist  $c^{j-1} = \alpha a^j$ ,  $a^{j-1} = \alpha b^j$ ,  $b^{j-1} = \alpha c^j$  für alle  $j$ . Da die Ziffernmengen aller  $\alpha$ -Zyklen nur als Spaltenmengen auftreten, ist  $\alpha a^j = a^j$ ,  $\alpha b^j = b^j$ ,  $\alpha c^j = c^j$ , es folgt  $\{a^1, a^2, a^3\} = \{b^1, b^2, b^3\} = \{c^1, c^2, c^3\}$ , d.h.  $\{a^\circ\} = \{b^\circ\} = \{c^\circ\}$ .

Somit ist (unter Verwendung von Lemma 6.3)  $\delta(^{\circ}a, b^\circ) = \delta(^{\circ}a, a^\circ) = 6$  und  $\delta(^{\circ}c, b^\circ) = \delta(^{\circ}c, c^\circ) = 6$ , also sind nach Satz 6.8(i) die Eckenmengen  $a$  und  $c$  regulär bzgl. Regulativ  $b$  (entsprechend für die anderen Zweige).

Zur Bestimmung des Isometriertyps wird auf ein Ergebnis aus Kapitel 7 vorgegriffen:

Für reguläre  $D$ -Graphen ist der Isometriertyp durch die Distanz  $\delta(^{\circ}a, ^{\circ}c) = \delta(^{\circ}c, ^{\circ}a)$  bestimmt. Satz 7.8 gibt an, welcher Isometriertyp zu jedem Intersektionstyp gehört.

Nach (4.36) sind die Zeilenmengen  $c_i = \alpha a_i$  für alle  $i$ . Da die Distanz  $\delta(^{\circ}c, ^{\circ}a)$  nur von den Zeilenmengen abhängt, ist also  $\delta(^{\circ}c, ^{\circ}a) = \delta(^{\circ}\alpha a, ^{\circ}a)$ . Im Folgenden wird jeweils dargestellt, wie sich die Zeilen von  $a$  im Block  $\alpha a$  verteilen. Daran kann die Distanz  $\delta(^{\circ}\alpha a, ^{\circ}a)$  als 9 abzüglich der Summe der drei größten Werte der Intersektionsmatrix  $I(\alpha a, a)_{ij} = \#(\alpha a_i \cap a_j)$  abgelesen werden.

Fall  $\alpha = 1$ :

$$\alpha a = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_1 & a_1 & a_1 \\ \hline a_2 & a_2 & a_2 \\ \hline a_3 & a_3 & a_3 \\ \hline \end{array} \quad I(\alpha a, a) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Es ist  $\delta(^{\circ}\alpha a, ^{\circ}a) = 0$ . Somit liegt nach Satz 7.8 der Isometriertyp  $3.T_6$  vor.

Fall  $\alpha = (3)$  (der 3-Zyklus wirke o. E. in der letzten Spalte):

$$\alpha a = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_1 & a_1 & a_2 \\ \hline a_2 & a_2 & a_3 \\ \hline a_3 & a_3 & a_1 \\ \hline \end{array} \quad I(\alpha a, a) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Es ist  $\delta(^{\circ}\alpha a, ^{\circ}a) = 3$ . Somit liegt nach Satz 7.8 der Isometriertyp  $R_{18}(33)$  vor.

Fall  $\alpha = (3, 3)$  mit gleichgerichteter Operation (die 3-Zyklen wirken o. E. in den beiden letzten Spalten):

$$\alpha a = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_1 & a_2 & a_2 \\ \hline a_2 & a_3 & a_3 \\ \hline a_3 & a_1 & a_1 \\ \hline \end{array} \quad I(\alpha a, a) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Es ist  $\delta(^{\circ} \alpha a, ^{\circ} a) = 3$ . Somit liegt nach Satz 7.8 der Isometriertyp  $R_{18}(33)$  vor.

Fall  $\alpha = (3, 3)$  mit nicht gleichgerichteter Operation (die 3-Zyklen von  $\alpha$  wirken o. E. in den beiden letzten Spalten entgegengesetzt):

$$\alpha a = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_2 & a_3 & a_1 \\ \hline a_3 & a_1 & a_2 \\ \hline \end{array} \quad I(\alpha a, a) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Es ist  $\delta(^{\circ} \alpha a, ^{\circ} a) = 6$ . Somit liegt nach Satz 7.8 der Isometriertyp  $R_{18}(36)$  vor.

Fall  $\alpha = (3, 3, 3)$  mit gleichgerichteter Operation:

$$\alpha a = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_2 & a_2 & a_2 \\ \hline a_3 & a_3 & a_3 \\ \hline a_1 & a_1 & a_1 \\ \hline \end{array} \quad I(\alpha a, a) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \\ \hline 3 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Es ist  $\delta(^{\circ} \alpha a, ^{\circ} a) = 0$ . Somit liegt nach Satz 7.8 der Isometriertyp  $3.T_6$  vor.

Fall  $\alpha = (3, 3, 3)$  mit nicht gleichgerichteter Operation (die 3-Zyklen von  $\alpha$  wirken o. E. in der ersten Spalte entgegengesetzt wie in den beiden letzten Spalten):

$$\alpha a = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_3 & a_2 & a_2 \\ \hline a_1 & a_3 & a_3 \\ \hline a_2 & a_1 & a_1 \\ \hline \end{array} \quad I(\alpha a, a) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Es ist  $\delta(^{\circ} \alpha a, ^{\circ} a) = 3$ . Somit liegt nach Satz 7.8 der Isometriertyp  $R_{18}(33)$  vor.  $\square$

## Horizontaler Operationstyp

Die Vereinigung der  $\alpha$ -Zyklenmengen mit Bewegungsrichtung nach rechts bzw. links werde hier als der *rechts- bzw. linkslaufende Träger von  $\alpha$*  bezeichnet.

**Satz 6.12.** Gegeben sei ein Vertikalstreifen mit Charakteristik  $< 3$  eines  $G^*$ -Fixsudokus zum Leitoperator  $\sigma$  im adäquaten Fall. Der Operationstyp von  $\alpha$  sei horizontal.

Folgende allgemeine Aussagen können getroffen werden:

- Beide Eckenmengen haben die gleiche Anzahl von Singularitäten, die Gesamtzahl der Singularitäten ist also 0, 4 oder 6.
- Die auf dem Vertikalstreifen liegenden Zweige sind regulär genau dann, wenn sowohl der rechts- als auch der linkslaufende Träger von  $\alpha$  eine Vereinigung von Zeilenmengen ist.

- Tritt insbesondere jeder  $\alpha$ -Zyklus als Zeilenmenge auf, so sind wie im Fall  $\alpha = 1$  alle Zweige vom Isometriertyp  $3.T_6$ .

Die Einzelfallaussagen sind in Tabelle 6.4 dargestellt. Für alle möglichen  $\alpha$ -Typen und die wesentlich verschiedenen Lagen der Träger der  $\alpha$ -Zyklen im Regulativ-Block  $b$  sind die resultierenden Isometriertypen, ggf. unterschieden nach gleich- und gegenläufiger  $\alpha$ -Operation, aufgelistet:

**Tabelle 6.4:** Isometriertyp der Zweige in Abhängigkeit von der horizontalen  $\alpha$ -Operation

$\alpha$ -Typ	Anordnung der Zykeln	gleichläufige Operation	$\alpha$ -	gegenläufige $\alpha$ -Operation
(3)		$3.T_6$	—	—
(3)		$T_6 \perp C_4 \perp 2.B_4^2$	—	—
(3)		$3.K_6^2(6)$ (Variante a)	—	—
(3,3)		$3.T_6$	$3.T_6$	—
(3,3)		$R_{12}(22) \perp T_6$	$T_6 \perp 2.C_4 \perp 4.I$	—
(3,3)		$T_6 \perp C_4 \perp 2.B_4^2$	$T_6 \perp C_4 \perp 2.B_4^2$	—
(3,3)		$K_{14}^4(18) \perp C_4$ (Variante a)	$2.K_6^2(6) \perp C_4 \perp 2.I$	—
(3,3)		$K_6^2(6) \perp 2.C_4 \perp 4.I$	(dieser Fall tritt nicht auf)	—
(3,3)		$K_{14}^2(21) \perp B_4^2$ (Variante a)	(dieser Fall tritt nicht auf)	—
(3,3)		$3.K_6^2(6)$ (Variante a)	(dieser Fall tritt nicht auf)	—

**Tabelle 6.4:** (Fortsetzung)

$\alpha$ -Typ	Anordnung der Zykel	gleichläufige Operation	$\alpha$ - gegenläufige $\alpha$ -Operation
(3, 3, 3)		$3.T_6$	$3.T_6$
(3, 3, 3)		$R_{12}(22) \perp T_6$	gegenläufiger unterer Streifen: $R_{12}(22) \perp T_6$ sonst: $T_6 \perp 2.C_4 \perp 4.I$
(3, 3, 3)		$R_{18}(36)$	$R_{14}(24) \perp 4.I$
(3, 3, 3)		$R_{18}(34)$	gegenläufige Co-Diagonale: $K_6^2(6) \perp 2.C_4 \perp 4.I$ sonst: $K_{12}^2(18) \perp C_4 \perp 2.I$
(3, 3, 3)		$3.T_6$	$3.K_6^2(6)$ (Variante a)

Für den Beweis wird auf den Anhang verwiesen.

## Fazit

Obwohl die drei Blöcke des Vertikalstreifens durch die Fixeigenschaft eng verzahnt sind, insbesondere die drei auf dem Streifen liegenden Zweige isometrisch sind, tritt eine Vielzahl von  $D$ -Graphen-Typen auf. Geringste Änderungen der  $\alpha$ -Operation spiegeln sich häufig in stark veränderten  $D$ -Graphen wider. Somit kann einerseits die Bestimmung von  $D$ -Graphen für Klassen von Sudokus unübersichtlich sein. Andererseits tragen die  $D$ -Graphen offenbar einen hohen Informationsgehalt.

## 6.8 Algebraische und transzendenten Sudokus

Es liegt nahe, die Fixsudokus der Mischgruppe  $G^*$  als die *algebraischen* Sudokus aufzufassen, da sie Lösungen der allgemeinen Fixgleichung (4.2) sind. Die Sudokus, die keiner dieser Fixgleichungen genügen, sind dann die *transzentenden* Sudokus. Die Ergebnisse in Kapitel 4 geben einen tiefen Einblick in Struktur und Anzahlen der alge-

braischen Sudokus, die dort als Semifixsudokus bezeichnet werden (Sätze 4.15, 4.16). Wie im Anhang ausgeführt wird, kann eine obere Abschätzung der Menge  $X_{\text{alg}}$  der algebraischen Sudokus angegeben werden:

$$\#X_{\text{alg}} \leq 9! \cdot 949\,129\,933\,824.$$

Es zeigt sich so, dass der Anteil der algebraischen Sudokus maximal 0,052 Promille, der der transzendenten also minimal 999,948 Promille aller Sudokus ausmacht.

Nachdem bekannt ist, dass die weit überwiegende Zahl der Sudokus transzendent ist, stellt sich die Frage, wie die Transzendenz eines konkreten Sudokus festgestellt werden kann. Hierzu wird man primär notwendige Kriterien für algebraische Sudokus aufstellen, aus denen sich dann hinreichende Kriterien für Transzidente ergeben.

Die notwendigen Kriterien werden als Tests pro Leitoperator entwickelt. In vielen Fällen sind Tests durch die Betrachtung von Blockdistanzen innerhalb des Sudokus möglich. Der Leitoperator 1 erfordert eine andere Methode.

### Transzendenzkriterien

#### a. Tests für Leitoperatoren $\neq 1$

In Abschnitt 6.6 wurde für  $(3, 3, 3)$ -Partitionen der Ziffernmenge  $\Omega$  eine Distanzfunktion  $\delta$  eingeführt. Diese kann auf Blöcke übertragen werden, da jeder Block über seine Zeilen- und Spaltenmengen zwei  $(3, 3, 3)$ -Partitionen von  $\Omega$  definiert. In diesem Abschnitt ist stets die durch die Zeilenmengen induzierte Distanz zu verstehen.

Mittels Blockdistanzen kann zwei Sudokus  $A, B$  in natürlicher Weise eine  $3 \times 3$ -Distanzmatrix  $\delta(A, B)$  zugeordnet werden:

$$\delta(A, B)_{ij} = \delta(A_{ij}, B_{ij}).$$

Weiter kann einem Sudoku  $A$  für je zwei Operatoren  $\lambda, \mu \in [H^*, t, t^*]$  eine *innere Distanzmatrix*

$$\delta_{\lambda, \mu}(A) := \delta(\lambda A, \mu A)$$

zugeordnet werden. Für  $\lambda, \mu$  wird neben den globalen Operatoren aus  $[H^*, t]$  auch der Operator  $t^*$  zugelassen, dessen Wirkung darin besteht, jeden Teilblock zu transponieren.

Das folgende Lemma listet grundsätzliche Eigenschaften innerer Distanzmatrizen auf:

**Lemma 6.6.** Für  $A \in X$ ,  $\lambda, \mu \in [H^*, t, t^*]$ ,  $\tau \in [H^*, t]$ ,  $\alpha \in Z$ ,  $w \in T^*$  gilt:

- (i)  $\delta_{\mu, \lambda}(A) = \delta_{\lambda, \mu}(A)$ .
- (ii)  $\delta_{\lambda, \mu}(\alpha A) = \delta_{\lambda, \mu}(A)$ .
- (iii)  $\delta_{\lambda, \mu}(w A) = \delta_{\lambda, \mu}(A)$ .
- (iv)  $\delta_{\lambda, \mu}(\tau A) = \delta_{\lambda^\tau, \mu^\tau}(\tau^* A) \circ \tau^{-1}$ .

Es sei an die Definition von  $\tau^*$  aus Abschnitt 4.3 erinnert: Für  $\tau \in H^*$  ist  $\tau^*$  die Identität, für  $\tau \in tH^*$  wirkt  $\tau^*$  in allen 9 Blöcken als Transposition.

*Beweis.* Zu (i):

$$\delta_{\mu, \lambda}(A) = \delta(\mu A, \lambda A) = \delta(\lambda A, \mu A) = \delta_{\lambda, \mu}(A).$$

Zu (ii):

Für Blöcke  $a, b$  gilt  $\#(\alpha a_i \cap \alpha b_j) = \#(\alpha(a_i \cap b_j)) = \#(a_i \cap b_j)$ , also  $I(\alpha a, \alpha b) = I(a, b)$  und  $\delta(\alpha a, \alpha b) = \delta(a, b)$ .

Für Sudokus  $A, B$  folgt  $\delta(\alpha A, \alpha B) = \delta(A, B)$ . Daher ist

$$\delta_{\lambda, \mu}(\alpha A) = \delta(\lambda \alpha A, \mu \alpha A) = \delta(\alpha \lambda A, \alpha \mu A) = \delta(\lambda A, \mu A) = \delta_{\lambda, \mu}(A).$$

Zu (iii):

Nach Lemma 6.3 gilt für Blöcke  $a, b$  und  $y, y' \in \Gamma_0$   $\delta(ya, y'b) = \delta(a, b)$ .

Für Sudokus  $A, B$  und  $v, v' \in M_3(\Gamma_0)$  folgt (†)  $\delta(vA, v'B) = \delta(A, B)$ . Daher ist

$$\delta_{\lambda, \mu}(w A) = \delta(\lambda w A, \mu w A) = \delta(w^{\lambda-1} \lambda A, w^{\mu-1} \mu A) \stackrel{(\dagger)}{=} \delta(\lambda A, \mu A) = \delta_{\lambda, \mu}(A).$$

Zu (iv):

$$\begin{aligned} \delta_{\lambda, \mu}(\tau A) &= \delta(\lambda \tau A, \mu \tau A) = \delta(\tau \lambda^\tau A, \tau \mu^\tau A) \\ &\stackrel{(4.13)}{=} \delta((\tau^* \lambda^\tau A) \circ \tau^{-1}, (\tau^* \mu^\tau A) \circ \tau^{-1}) \\ &= \delta(\lambda^\tau \tau^* A, \mu^\tau \tau^* A) \circ \tau^{-1} = \delta_{\lambda^\tau, \mu^\tau}(\tau^* A) \circ \tau^{-1}. \end{aligned}$$

□

Für  $\tau \in [H^*, t]$  heißt ein Sudoku  $A$   $\tau$ -semifix, wenn eine Semifixgleichung  $\tau w A = \alpha A$  mit  $w \in T^*$ ,  $\alpha \in Z$ ,  $\tau w \neq 1$  besteht.  $A$  ist transzendent genau dann, wenn  $A$  für kein  $\tau \in [H^*, t]$   $\tau$ -semifix ist.

Die  $\tau$ -Semifixheit hat Zusammenhänge zwischen inneren Distanzmatrizen zur Folge:

**Satz 6.13.** Ist das Sudoku  $A$   $\tau$ -semifix, so gilt für alle  $\lambda, \mu \in [H^*, t, t^*]$

$$\delta_{\lambda^\tau, \mu^\tau}(\tau^* A) = \delta_{\lambda, \mu}(A) \circ \tau. \quad (6.22)$$

*Beweis.* Ist  $A$   $\tau$ -semifix, so ist  $\tau w A = \alpha A$  mit  $w \in T^*$ ,  $\alpha \in Z$  und folglich

$$\delta_{\lambda, \mu}(\tau w A) = \delta_{\lambda, \mu}(\alpha A).$$

Nach Lemma 6.6 ist  $\delta_{\lambda,\mu}(\alpha A) = \delta_{\lambda,\mu}(A)$  und

$$\delta_{\lambda,\mu}(\tau w A) = \delta_{\lambda,\mu}(w^{\tau^{-1}} \tau A) = \delta_{\lambda,\mu}(\tau A) = \delta_{\lambda^\tau, \mu^\tau}(\tau^* A) \circ \tau^{-1}.$$

Zusammen folgt die Behauptung.  $\square$

Die Bedingung (6.22) aus Satz 6.13 kann als Test für  $\tau$ -Semifixheit verwendet werden. Schlägt der Test für eine Wahl von  $\lambda, \mu \in [H^*, t, t^*]$  fehl, ist  $A$  nicht  $\tau$ -semifix.

Mit den beiden inneren Distanzmatrizen

$$\delta_A := \delta_{\sigma, \sigma^{-1}}(A) \quad \text{und} \quad \delta_A^\circ := \delta_{\sigma^\circ, \sigma^{\circ-1}}(t^* A).$$

erhält man bereits 2 Tests für jeden nichttrivialen Leitoperator, wie das folgende Korollar zeigt.

Die Komponenten von  $\delta_A$  und  $\delta_A^\circ$  sind

$$(\delta_A)_{ij} = \delta(A_{i-1,j}, A_{i+1,j}), \quad (\delta_A^\circ)_{ij} = \delta(tA_{i,j-1}, tA_{i,j+1}). \quad (6.23)$$

**Korollar.** Ist das Sudoku  $A$   $\tau$ -semifix, so gilt:

- (i)  $\delta_A = \delta_A \circ \tau$  und  $\delta_A^\circ = \delta_A^\circ \circ \tau$  für  $\tau \in H^*$
- (ii)  $\delta_A^\circ = \delta_A \circ \tau$  und  $\delta_{t^* A} = \delta_{t^* A}^\circ \circ \tau$  für  $\tau \in tH^*$

**Bemerkung 6.7.** Die zweite Gleichung in Teil (ii) des Korollars hat deutlich weniger Trennschärfe als die übrigen Gleichungen, da nach Lemma 6.4 (ii) alle Zeilen von  $\delta_{t^* A}$  und alle Spalten von  $\delta_{t^* A}^\circ$  nur konstant 0 oder konstant 3 sein können.

*Beweis des Korollars:* Zu (i):

Für  $\tau \in H^*$  ist  $\tau^* = 1$  und

$$\{\sigma^\tau, (\sigma^{-1})^\tau\} = \{\sigma, \sigma^{-1}\} \quad \text{sowie} \quad \{\sigma^{\circ\tau}, (\sigma^{\circ-1})^\tau\} = \{\sigma^\circ, \sigma^{\circ-1}\},$$

folglich nach Satz 6.13

$$\delta_{\sigma, \sigma^{-1}}(A) = \delta_{\sigma, \sigma^{-1}}(A) \circ \tau \quad \text{und} \quad \delta_{\sigma^\circ, \sigma^{\circ-1}}(A) = \delta_{\sigma^\circ, \sigma^{\circ-1}}(A) \circ \tau.$$

Zu (ii):

Für  $\tau \in tH^*$  ist  $\tau^* = t^*$  und

$$\{\sigma^\tau, (\sigma^{-1})^\tau\} = \{\sigma^\circ, \sigma^{\circ-1}\} \quad \text{sowie} \quad \{\sigma^{\circ\tau}, (\sigma^{\circ-1})^\tau\} = \{\sigma, \sigma^{-1}\},$$

folglich nach Satz 6.13

$$\delta_{\sigma^\circ, \sigma^{\circ-1}}(t^* A) = \delta_{\sigma, \sigma^{-1}}(A) \circ \tau \quad \text{und} \quad \delta_{\sigma, \sigma^{-1}}(t^* A) = \delta_{\sigma^\circ, \sigma^{\circ-1}}(A) \circ \tau.$$

$\square$

Lässt der Test mit  $\delta_A$  und  $\delta_A^\circ$  die  $\tau$ -Semifixheit für einige  $\tau$  offen, so können andere Wahlen von  $\lambda$  und  $\mu$  dies weiter einschränken. Offen ist, ob die Tests scharf sind, d. h. ob es Sudokus gibt, die für ein  $\tau \in [H^*, t] \setminus \{1\}$  nicht  $\tau$ -semifix sind und doch den Test (6.22) für alle  $\lambda, \mu \in [H^*, t, t^*]$  erfüllen. Für  $\tau = 1$  ist der Test trivial erfüllt, zur Untersuchung der 1-Semifixheit sind andere Methoden erforderlich.

Die Methoden sollen nun auf das aus Abschnitt 3.5 bekannte “wilde Sudoku”

2	8	1	9	6	5	7	3	4
5	6	9	4	7	3	8	1	2
7	3	4	2	1	8	6	5	9
9	2	6	5	8	4	1	7	3
Z = 3	5	7	1	2	6	4	9	8
1	4	8	3	9	7	2	6	5
6	1	2	8	3	9	5	4	7
4	7	3	6	5	2	9	8	1
8	9	5	7	4	1	3	2	6

angewandt werden.

Die inneren Distanzmatrizen ergeben sich nach (6.23) zu:

$$\delta_Z = \begin{matrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{matrix} \quad \delta_Z^\circ = \begin{matrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \end{matrix}$$

Erfüllt  $\tau \in H^*$  den Test  $\delta_Z = \delta_Z \circ \tau$ , so muss  $\tau$  die Zeilen von  $\delta_Z$  stabilisieren, da eine Zeile eine 2, eine Zeile eine 3 und die dritte Zeile weder eine 2 noch eine 3 enthält. Ferner muss  $\tau$  die erste Spalte stabilisieren, da nur diese von 4 verschiedene Ziffern enthält. Somit ist entweder  $\tau = 1$  oder  $\tau = (\sigma\rho)^\circ$ . Auswertung von  $\delta_Z^\circ = \delta_Z^\circ \circ \tau$  führt zum gleichen Ergebnis.

Kein  $\tau \in tH^*$  kann den Test  $\delta_Z^\circ = \delta_Z \circ \tau$  erfüllen, da  $\delta_Z^\circ$  und  $\delta_Z$  unterschiedlich viele 3-Einträge haben.

Somit lässt der Test neben dem trivialen Leitoperator nur  $\tau = (\sigma\rho)^\circ$  als Kandidaten für  $\tau$ -Semifixheit zu. Um diesen weiter zu testen, kann z. B.  $\lambda = \sigma\rho$ ,  $\mu = (\sigma\rho)^\circ$  gewählt werden, dann ist  $\lambda^\tau = \lambda$  und  $\mu^\tau = \mu$ , daher braucht nur die innere Distanzmatrix  $\delta_{\sigma\rho, (\sigma\rho)^\circ}(Z)$  bestimmt zu werden. Diese ist:

$$\delta_{\sigma\rho, (\sigma\rho)^\circ}(Z) = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{matrix}$$

Der Test  $\delta_{\sigma\rho, (\sigma\rho)^\circ}(Z) = \delta_{\sigma\rho, (\sigma\rho)^\circ}(Z) \circ \tau$  ist nicht erfüllt, da die zweite und dritte Spalte von  $\delta_{\sigma\rho, (\sigma\rho)^\circ}(Z)$  nicht übereinstimmen. Somit scheidet  $\tau = (\sigma\rho)^\circ$  als Kandidat ebenfalls aus, übrig bleibt nur  $\tau = 1$ .

Das folgende Lemma zeigt, dass die hier behandelten Tests auf  $\tau$ -Semifixheit mittels Blockdistanzen als Spezialfälle Tests mittels Singularitätenanzahlen von  $D$ -Graphen und Tests auf Basis der Charakteristik umfassen.

**Lemma 6.7.** Für  $A \in X$ ,  $\lambda, \mu \in [H^*, t, t^*]$ ,  $\tau \in [H^*, t]$ ,  $\alpha \in Z$ ,  $w \in T^*$  gilt:

(i) Es gilt

$$\delta_{1,\sigma t^*}(A) = \delta_{1,\sigma^{-1}t^*}(A).$$

Der Eintrag an der Stelle  $(i, j)$  ist gleich 6 minus der Anzahl der Singularitäten in der Eckenmenge  $A_{ij}$  eines der beiden  $D$ -Graphen mit Regulativ  $A_{i\pm 1,j}$  im  $j$ -ten Vertikalstreifen. Insbesondere sind alle Einträge 3, 4 oder 6.

(ii)

$$\delta_{1,\sigma^{\circ\pm 1}}(A) = 3 \cdot \begin{matrix} x_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 & \text{mit } x_i = \min \{\chi_i(A), 3 - \chi_i(A)\} \in \{0, 1\} \\ x_3 & x_3 & x_3 \end{matrix}$$

*Beweis.* Zu (i):

Es ist  $\delta_{1,\sigma t^*}(A)_{ij} = \delta(A_{ij}, t^* A_{i-1,j})$ . Wir betrachten den  $D$ -Graphen auf dem  $j$ -ten Vertikalstreifen mit Eckenmengen  $A_{ij}$  und  $A_{i+1,j}$  und Regulativ  $t^* A_{i-1,j}$ . Nach Satz 6.8 (i) ist  $\delta(A_{ij}, t^* A_{i-1,j})$  gleich 6 minus der Anzahl der Singularitäten des  $D$ -Graphen in  $A_{ij}$ . Nach Satz 6.9 (i) hat  $\delta_{1,\sigma^{-1}t^*}(A)_{ij} = \delta(A_{ij}, t^* A_{i+1,j})$  den gleichen Wert.

Da die Singularitätenanzahl nur 0, 2 oder 3 sein kann, sind die möglichen Einträge der Distanzmatrix 3, 4 und 6.

Zu (ii):

$\delta_{1,\sigma^{\circ\pm 1}}(A)_{ij} = \delta(A_{i,j-1}, A_{i,j+1})$ .  $A_{i,j-1}$  und  $A_{i,j+1}$  sind zwei Blöcke eines Sudoku-Horizontalstreifens. Nach Lemma 6.4 (ii) folgt

$$\delta(A_{i,j-1}, A_{i,j+1}) = \min\{\chi_i(A), 3 - \chi_i(A)\}$$

(dort wurde die entsprechende Aussage für einen Vertikalstreifen bewiesen).  $\square$

### b. Tests für den Leitoperator 1

Ein Block  $a$  induziert für jedes  $(k, l) \in J := \{-1, 0, 1\}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  eine Ziffernwirkung  $\alpha = \alpha_{a,k,l}$  durch die Vorschrift

$$\alpha a = s^k s^{\circ l} a. \quad (6.24)$$

Offenbar haben alle Bahnen die Länge 3, daher hat  $\alpha$  den Permutationstyp  $(3, 3, 3)$ . Die Träger der Zyklen von  $\alpha$  bilden eine  $(3, 3, 3)$ -Partition  $p = p_{a,k,l}$  der Ziffernmenge  $\Omega$ .  $(k, l)$  und  $-(k, l)$  führen offenbar zur gleichen Partition. Man erhält 4 verschiedene Partitionen, die durch die Zeilen-, Spalten-, fallenden und steigenden Diagonalmengen von  $a$  gegeben sind.

**Satz 6.14.** A sei ein 1-semifixes Sudoku. Dann gilt:

- (i) Es existiert eine  $(3, 3, 3)$ -Partition p von  $\Omega$ , so dass zu jedem Teilblock  $A_{ij}$  von A  $(k, l) \in J$  existieren mit  $p_{A_{ij}, k, l} = p$ , wobei  $k = k_i$  nur von i und  $l = l_j$  nur von j abhängt.
- (ii) Es existiert ein  $(3, 3, 3)$ -Zykel  $\alpha$  von Z, so dass zu jedem Teilblock  $A_{ij}$  von A  $(k, l) \in J$  existieren mit  $\alpha_{A_{ij}, k, l} = \alpha$ , wobei  $k = k_i$  nur von i und  $l = l_j$  nur von j abhängt.
- (iii) Gilt (ii) für ein beliebiges Sudoku A, so ist dieses 1-semifix zum lokalen Operator w mit  $w_{ij} = s^{k_i} s^{\circ l_j}$  und zur Ziffernwirkung  $\alpha$ :  $wA = \alpha A$ .

*Beweis.* Da (i) aus (ii) folgt, genügt es, (ii) und (iii) zu zeigen.

Zu (ii):

Ist A 1-semifix, so existiert nach Korollar zu Satz 4.3 eine Ziffernwirkung  $\alpha$  vom Typ  $(3, 3, 3)$  und ein lokaler Operator w der Form  $w_{ij} = g_i h_j^\circ$  mit  $g_i, h_j \in \{1\} \cup (3)$ , entweder alle  $g_i \in (3)$  oder alle  $h_j \in (3)$ , mit  $wA = \alpha A$ .

Dann ist für jedes  $i$   $g_i = s^{k_i}$  mit  $k_i \in \{-1, 0, 1\}$  und für jedes  $j$   $h_j = s^{l_j}$  mit  $l_j \in \{-1, 0, 1\}$ , und es ist für alle  $(i, j)$   $w_{ij} = s^{k_i} s^{\circ l_j}$  mit  $(k_i, l_j) \in J$ .

Aus  $wA = \alpha A$  folgt für alle  $(i, j)$   $\alpha_{A_{ij}} = w_{ij} A_{ij} = s^{k_i} s^{\circ l_j} A_{ij}$ . Das bedeutet nach (6.24) gerade  $\alpha = \alpha_{A_{ij}, k_i, l_j}$ , was zu zeigen war.

Zu (iii):

Gegeben seien ein  $(3, 3, 3)$ -Zykel  $\alpha$  von Z und  $k_i, l_j \in \{-1, 0, 1\}$ , so dass für alle  $(i, j)$  gilt:  $(k_i, l_j) \in J$  und  $\alpha_{A_{ij}, k_i, l_j} = \alpha$ . Letzteres heißt nach (6.24)  $\alpha_{A_{ij}} = s^{k_i} s^{\circ l_j} A_{ij}$ . Daraus folgt  $wA = \alpha A$  mit  $w_{ij} := s^{k_i} s^{\circ l_j}$ . Wegen  $(k_i, l_j) \in J$  ist  $w \neq 1$ , also A 1-semifix. □

Die Aussagen (i) und (ii) von Satz 6.14 können als Tests zunehmender Schärfe für die 1-Semifixheit eines Sudokus verwendet werden. Wird (ii) bestanden, so ist das Sudoku nach (iii) in der Tat 1-semifix.

Für das oben betrachtete Sudoku Z führt bereits Test (i) schnell zum Ziel, es genügt die Betrachtung der jeweils ersten Blöcke der ersten und zweiten Zeile:

$$\begin{array}{ccc} 2 & 8 & 1 \\ Z_{11} = 5 & 6 & 9 \\ & 7 & 3 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 9 & 2 & 6 \\ Z_{21} = 3 & 5 & 7 \\ & 1 & 4 & 8 \end{array}$$

Je eine der 4 von  $Z_{11}$  induzierten Partitionen enthält die erste Zeilenmenge, die erste Spaltenmenge, die Hauptdiagonalenmenge bzw. die Co-Hauptdiagonalenmenge von  $Z_{11}$ , also  $\{2, 8, 1\}$ ,  $\{2, 5, 7\}$ ,  $\{2, 6, 4\}$  bzw.  $\{1, 6, 7\}$ . Keine dieser Ziffernmengen ist in  $Z_{21}$  so positioniert, dass sie eine Zeile, Spalte, fallende oder steigende Diagonale bildete. Somit ist Z nicht 1-semifix.

# 7 Beweis des Klassifikationssatzes für konkrete D-Graphen

Ursprünglich wurde der Beweis mit Computer-Unterstützung geführt. Der hier dargestellte Beweis kommt ohne Computer aus. Methodisch werden als klassifizierende Objekte gewisse Paare von  $3 \times 3$ -Graphen eingeführt, die sog. *Diagramme*. Ergänzend spielen noch 2 *adjungierte Graphen* eine Rolle, die für den Zusammenhang der *D-Graphen* zuständig sind. Dabei findet auch die Diskrepanz zwischen der Isometrie der vollen *D-Graphen* und der komponentenweisen Isometrie eine Lösung: Es gibt nur 2 Ausnahmen, die angegeben werden können.

## 7.1 Diagramme

Für die Klassifikation konkreter *D-Graphen* erweist sich eine modifizierte Darstellung der Eckenmengen und ihr Vergleich als hilfreich.

Zunächst wird ein vertikales Praesudoku

$$\begin{array}{c} a \\ VS = b \\ c \end{array} \quad \text{mit Regulativ } b \quad (7.1)$$

betrachtet.

Die *Diagramme*  $\partial a$  und  $\partial c$  zu  $a$  und  $c$  sind  $3 \times 3$ -Matrizen mit Einträgen aus  $\{1, 2, 3\}$ . Sie entstehen durch folgendes Verfahren: In je einem Exemplar des Regulativen  $b$  wird jede Ziffer  $b_{ij}$  durch die Zeilennummer  $i'$  ersetzt, in der sie in  $a$  bzw.  $c$  steht.

Wir geben ein Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} & \begin{matrix} 1 & 2 & 6 \\ 8 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 9 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{matrix} \\ VS = & \begin{matrix} 3 & 9 & 1 \\ 4 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \end{matrix} & \end{array} \quad \begin{matrix} \partial a = \\ \partial c = \end{matrix}$$

Für spätere Verwendung sind die Singularitäten und die zugehörigen Belegungen in den Diagrammen fett dargestellt. Die Belegungen befinden sich nach Definition jeweils an den Positionen, an denen sich die singulären Ziffern im *Regulativ* befinden.

Nach den grundlegenden Eigenschaften von *D-Graphen* gilt für jede Ziffer  $z$  in  $\partial a$  (und analog in  $\partial c$ ):

- Repräsentiert  $z$  eine reguläre Zeile von  $a$ , so tritt  $z$  in jeder Spalte von  $\partial a$  genau einmal auf.
- Repräsentiert  $z$  eine singuläre Zeile von  $a$ , so tritt  $z$  in einer Spalte von  $\partial a$  zweimal auf – ein sogenanntes (*reguläres*) *Paar* – und ein weiteres Mal in einer anderen Spalte von  $\partial a$  – die *zugehörige Singularität*.
- Keine Spalte von  $\partial a$  besteht aus drei gleichen Ziffern.

Denn repräsentiert  $z$  eine reguläre Zeile von  $a$ , so stehen die drei enthaltenen Ziffern im Regulativ in verschiedenen Spalten. Dies sind die Positionen, an denen  $z$  in  $\partial a$  auftritt.

Repräsentiert  $z$  eine singuläre Zeile von  $a$ , die Spaltennummer der Singularität wird mit  $j$  bezeichnet, so befindet sich das reguläre Paar von  $z$  im Regulativ in Spalte  $j$ , während die singuläre Ziffer von  $z$  dort in einer anderen Spalte steht. Somit tritt  $z$  in  $\partial a$  zweimal in Spalte  $j$  und einmal in einer anderen Spalte auf.

In keinem Fall tritt  $z$  in einer Spalte von  $\partial a$  dreimal auf.

Eine Singularität von  $a$  heißt *rechts-* bzw. *linksorientiert*, wenn in  $\partial a$  das zugehörige reguläre Paar eine (modulo 3) um 1 größere bzw. kleinere Spaltennummer als die Singularität hat. Die Orientierung einer Singularität von  $c$  wird analog definiert. Zwei Singularitäten einer Eckenmenge heißen *gleich orientiert*, wenn ihre Orientierung gleich ist, andernfalls *gegensätzlich orientiert*.

Im obigen Beispiel hat  $a$  bzw.  $\partial a$  3 reguläre Paare und 3 rechts-orientierte Singularitäten.  $c$  bzw.  $\partial c$  hat eine reguläre Zeile, 2 reguläre Paare und 2 gegensätzlich orientierte Singularitäten.

Die Anzahl der in einer Eckenmenge enthaltenen Singularitäten und die Anzahl der regulären Zeilen summieren sich zu 3. Diese Anzahlen bestimmen weitgehend die Struktur des Diagramms der Eckenmenge:

**Satz 7.1.** *In Abhängigkeit von der Anzahl der regulären Zeilen und Singularitäten in einer Eckenmenge gibt es drei Typen von Diagrammen:*

*Typ I: Keine Singularität, 3 reguläre Zeilen*

*Jede Spalte des Diagramms enthält die Ziffern 1, 2, 3.*

*Typ II: 2 Singularitäten, eine reguläre Zeile*

*Jede Spalte des Diagramms enthält genau ein Element der regulären Zeile.  
Die beiden regulären Paare stehen in verschiedenen Spalten, die verbleibende Spalte enthält die beiden gegensätzlich orientierten Singularitäten.*

*Typ III: 3 Singularitäten, keine reguläre Zeile*

*Jede Spalte des Diagramms enthält ein reguläres Paar und eine Singularität.  
Die Singularitäten sind gleich orientiert.*

*Der Fall einer Singularität und zweier regulärer Zeilen tritt in D-Graphen nicht auf.*

*Beweis.* 1. Fall: Keine Singularität, 3 reguläre Zeilen, also Typ I

Im Diagramm belegt jede reguläre Zeile in jeder Spalte genau eine Position. Jede Spalte enthält also die Ziffern 1, 2, 3.

2. Fall: Eine Singularität, 2 reguläre Zeilen

Sind 2 Zeilen regulär, so belegt im Diagramm jede in jeder Spalte genau eine Position. Es verbleibt in jeder Spalte genau eine Position für die dritte Zeile, die demnach auch regulär ist, Widerspruch. Dieser Fall kann also nicht eintreten.

3. Fall: 2 Singularitäten, eine reguläre Zeile, also Typ II

Die reguläre Zeile belegt im Diagramm in jeder Spalte genau eine Position. Die beiden regulären Paare füllen jeweils eine Spalte auf. Die beiden Singularitäten müssen daher notwendig beide in der verbleibenden Spalte stehen. Sie sind dann offenbar gegensätzlich orientiert.

4. Fall: 3 Singularitäten, keine reguläre Zeile, also Typ III

In jeder Spalte kann nur ein reguläres Paar stehen, daher müssen die 3 regulären Paare je eines in jeder Spalte stehen. Dann müssen die 3 Singularitäten ebenfalls je eine in jeder Spalte stehen. Da ein reguläres Paar nicht in der gleichen Spalte wie die zugehörige Singularität stehen kann, müssen sie entweder alle eine Spaltennummer höher oder alle eine Spaltennummer niedriger als die zugehörige Singularität stehen. Die Singularitäten sind somit gleich orientiert.  $\square$

Eine Spalte, die aus einem regulären Paar und einer Singularität besteht, heißt *Sonderspalte*. Bei 3 Singularitäten sind also alle Spalten Sonderspalten, bei 0 und 2 Singularitäten keine.

Die Orientierungsmatrizen  $OM(a)$ ,  $OM(c)$  zum vertikalen Praesudoku (7.1) sind  $3 \times 3$ -Matrizen mit Einträgen 1 und  $-1$ , die wie folgt erzeugt werden (am Beispiel von  $OM(a)$ ):

In einem Exemplar des Regulativs  $b$  wird zu jeder Ziffer  $b_{ij}$  zunächst die Spalte  $j'$  ermittelt, in der sie in  $a$  steht. Je nachdem der Übergang von  $j$  zu  $j'$  durch  $s$  oder  $s^{-1}$  bewirkt wird, wird die Ziffer durch 1 oder  $-1$  ersetzt. Also

$$j' = \begin{cases} sj \\ s^{-1}j \end{cases} \Rightarrow OM(a)_{ij} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \quad (7.2)$$

Anders ausgedrückt:

$$OM(a)_{ij} \text{ ist der Dreierrest von } j' - j \text{ im Restsystem } \{-1, 0, 1\}. \quad (7.2')$$

Da jede Ziffer in  $a$  und  $b$  in verschiedenen Spalten steht, kann  $j'$  nicht gleich  $j$  sein, d. h. der Rest 0 kann nicht auftreten.

Analog für  $OM(c)$ .

Da jede Ziffer in  $a$  und  $c$  in verschiedenen Spalten steht, hat sie in  $OM(a)$  und  $OM(c)$  entgegengesetzte Einträge, d. h. es gilt

$$OM(c) = -OM(a). \quad (7.3)$$

Daher genügt es, die Betrachtung auf eine der beiden Orientierungsmatrizen einzuschränken, im Folgenden auf  $OM(a)$ .

Aus den Diagrammen, der Orientierungsmatrix und dem Regulativ-Block erhält man den Vertikalstreifen zurück:

$$\alpha_{i'j'} = b_{ij} \text{ mit } i' = \partial a_{ij} \text{ und } j' \text{ gemäß (7.2) oder (7.2').} \quad (7.4)$$

Analog für  $c$ , wobei (7.3) anzuwenden ist.

Das obige Beispiel wird um die Orientierungsmatrizen erweitert:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc}
 1 & 2 & \mathbf{6} \\
 8 & 7 & 3 \\
 \hline
 5 & \mathbf{4} & 9 \\
 \hline
 7 & 6 & 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 2 & \mathbf{1} & 1 \\
 \partial a = 2 & 3 & 1 \\
 \hline
 3 & 3 & 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 1 & \mathbf{1} & -1 \\
 OM(a) = -1 & 1 & 1 \\
 \hline
 \mathbf{1} & -1 & 1
 \end{array}
 \\[10pt]
 \text{VS} = \begin{array}{ccc}
 3 & 9 & 1 \\
 4 & 5 & 8 \\
 \hline
 2 & 1 & \mathbf{5} \\
 9 & 8 & 7 \\
 \hline
 \mathbf{6} & 3 & 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 2 & 3 & 1 \\
 \partial c = 3 & 2 & 1 \\
 \hline
 3 & \mathbf{1} & 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 -1 & -1 & 1 \\
 OM(c) = 1 & -1 & -1 \\
 \hline
 -1 & 1 & -1
 \end{array}
 \end{array}$$

Wir fassen nun die Orientierungsmatrizen als Belegungen der Diagramme auf:

**Satz 7.2.** Seien  $A = \partial a, C = \partial c$  die Diagramme eines vertikalen Praesudokus.

Dann gilt für die Belegung der entsprechenden Positionen in  $B = OM(a)$ :

- (i) Rechtsorientierte Singularitäten von  $A$  und  $C$  sind in  $B$  mit  $+1$ , linksorientierte mit  $-1$  belegt.
- (ii) Jede reguläre Zeile von  $A$  oder  $C$  ist in  $B$  konstant belegt.
- (iii) Jedes reguläre Paar von  $A$  oder  $C$  ist in  $B$  mit einer  $-1$  und einer  $+1$  belegt.

*Beweis.* Der Beweis wird o. E. für  $A = \partial a$  geführt. Über die Beziehung (7.3) folgen daraus die Aussagen für  $C = \partial c$ .

Zu Eigenschaft (i): Steht eine singuläre Ziffer von  $a$  im Regulativ in Spalte  $j$ , in  $a$  in Spalte  $j'$ , so steht das zugehörige reguläre Paar im Regulativ in Spalte  $j'$ . Rechtsorientierung bedeutet, dass im Regulativ das reguläre Paar eine (modulo 3) um 1 höhere Spaltennummer als die singuläre Ziffer hat, d. h.  $j' = j + 1 \bmod 3$ . Nach (7.2') ist dies gleichbedeutend damit, dass die Singularität in der Orientierungsmatrix den Eintrag  $+1$  hat. Der Beweis für die Aussage zur Linksorientierung verläuft analog.

Eigenschaft (ii) spiegelt folgenden Sachverhalt wider: Ist  $z$  eine reguläre Zeile in  $a$ , so liegt in jeder Spalte des Regulativen  $b$  genau eine Ziffer dieser Zeile, und zwar stets in einer anderen Spalte als in  $a$ . Somit bilden die Spaltennummern der Ziffern in  $a$  eine fixpunktfreie Permutation der Spaltennummern in  $b$ , was nur die beiden Permutationen  $(1\ 2\ 3)$  und  $(3\ 2\ 1)$  erfüllen. Der Fall  $(1\ 2\ 3)$  entspricht der konstanten Belegung 1, der Fall  $(3\ 2\ 1)$  der konstanten Belegung  $-1$ .

Eigenschaft (iii) spiegelt folgenden Sachverhalt wider: Ist  $z$  eine singuläre Zeile in  $a$ , von der zwei Ziffern in derselben Spalte  $k$  des Regulativs  $b$  liegen, so steht die singuläre Ziffer in Spalte  $k$  von  $a$  und die beiden übrigen Ziffern je eine in den Spalten  $s^{-1}k$  und  $s k$  von  $a$ , sind also mit  $-1$  bzw.  $1$  belegt.  $\square$

**Korollar.** Die Singularitäten einer Eckenmenge mit 2 Singularitäten sind entgegengesetzt belegt, die Singularitäten einer Eckenmenge mit 3 Singularitäten sind gleich belegt.

Diagramme können offenbar auch für uneigentliche  $D$ -Graphen definiert werden, da zu jeder Regulativziffer nur die Zeilenummern der Ziffer in den beiden Eckenhälften bekannt sein müssen. Um Eindeutigkeit zu erhalten, müssen allerdings die Positionen der Ziffern im Regulativ fixiert werden.

Die Definition der Orientierungsmatrizen kann nicht auf uneigentliche  $D$ -Graphen übertragen werden, da den regulären Ziffern in den Eckenmengen keine eindeutigen Spaltennummern zugeordnet sind. Wohl kann die Definition der Orientierung von Singularitäten übertragen werden, da die Spaltennummern von singulärer Ziffer und zugehörigem regulären Paar im Regulativ eindeutig sind. Die Gültigkeit von Satz 7.1 überträgt sich auf uneigentliche  $D$ -Graphen.

Dem (eigentlichen oder uneigentlichen)  $D$ -Graphen  $D$  wird nun das *Diagramm*

$$\partial D = \begin{pmatrix} \partial a \\ \partial c \end{pmatrix}$$

bestehend aus den Diagrammen  $\partial a$  und  $\partial c$  der Eckenmengen zugeordnet.

Das Diagramm kodiert die wesentlichen Objekte des  $D$ -Graphen:

- Lage der regulären und singulären Zeilen,
- Anzahl und Lage der Singularitäten,
- ihre Orientierungen.

Unter einem (abstrakten) *Diagramm* wird ein Set  $W = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$  aus zwei  $3 \times 3$ -Matrizen  $A$  und  $C$  verstanden, die beide die Ziffern 1, 2 und 3 je 3-mal enthalten.

Wird ein Regulativ  $b$  vorgegeben, so werden mittels  $W$  in folgender Weise Zeilensymmetrien  $a_i$  und  $c_i$  definiert: Jede Ziffer  $i \in \{1, 2, 3\}$  steht in  $A$  an 3 Positionen. Die an diesen 3 Positionen in  $b$  stehenden Ziffern werden zur Zeilensymmetrie  $a_i$  zusammengefasst. Entsprechend wird  $c_i$  über  $C$  definiert. Gehören die so definierten  $\{a_i\}, \{c_i\}$  zusammen mit dem Regulativ  $b$  zu einem (eigentlichen oder uneigentlichen)  $D$ -Graphen  $D$ , so ist  $W$  offenbar das Diagramm dieses  $D$ -Graphen:  $W = \partial D$ . Das Eintreten dieses Falls untersucht das folgende Lemma.

**Lemma 7.1.** Die durch das Diagramm  $W = \begin{array}{c} A \\ C \end{array}$  definierten Sets von Zeilenmengen  $\{a_i\}$ ,  $\{c_i\}$  zum Regulativ  $b$  gehören genau dann zu einem (eigentlichen oder uneigentlichen)  $D$ -Graphen, wenn gilt:

- (i) Keine Spalte von  $A$  und keine Spalte von  $C$  besteht aus 3 gleichen Ziffern.
- (ii) Enthält für ein  $j$  die  $j$ -te Spalte von  $A$  2 gleiche Ziffern  $i$  und die  $j$ -te Spalte von  $C$  2 gleiche Ziffern  $k$  ( $i = k$  oder  $i \neq k$ ), so stehen der dritte  $i$ -Eintrag von  $A$  und der dritte  $k$ -Eintrag von  $C$  stets an verschiedenen Positionen.

*Beweis.*  $\{a_i\}$ ,  $\{c_i\}$  gehören zusammen mit  $b$  zu einem (eigentlichen oder uneigentlichen)  $D$ -Graphen, wenn die Bedingungen (†) und (††) aus Abschnitt 5.1 erfüllt sind. (†) und (††) sind nun durch Bedingungen an  $A$  und  $C$  auszudrücken. Dabei ist zu berücksichtigen, dass in Abschnitt 5.1 das Regulativ mit  $c$  und hier mit  $b$  bezeichnet ist.

(†) ist erfüllt genau dann, wenn keine Zeilenmenge  $a_i$  oder  $c_i$  gleich einer Spaltenmenge  $b^j$  ist.  $a_i = b^j$  bedeutet nach Definition von  $a_i$ , dass die  $j$ -te Spalte von  $A$  aus 3 Einträgen  $i$  besteht. Analog bedeutet  $c_k = b^j$ , dass die  $j$ -te Spalte von  $C$  aus 3 Einträgen  $k$  besteht. Somit ist (†) äquivalent zu Aussage (i) des Lemmas.

(††) ist erfüllt genau dann, wenn in jeder Situation der Art  $\#(a_i \cap b^j) = 2$  und  $\#(c_k \cap b^j) = 2$  mit gleichem  $j$  für das nicht in  $b^j$  enthaltene Element  $s$  von  $a_i$  und das nicht in  $b^j$  enthaltene Element  $s'$  von  $c_k$  gilt:  $s \neq s'$ .

$\#(a_i \cap b^j) = 2$  und  $\#(c_k \cap b^j) = 2$  ist gleichbedeutend damit, dass die  $j$ -te Spalte von  $A$  genau 2 Einträge  $i$  und die  $j$ -te Spalte von  $C$  genau 2 Einträge  $k$  enthält.  $s$  ist dann dasjenige Element von  $b$ , das an der Position des dritten  $i$ -Eintrags von  $A$  steht.  $s'$  ist dasjenige Element von  $b$ , das an der Position des dritten  $k$ -Eintrags von  $C$  steht.

$s \neq s'$  gilt also genau dann, wenn der dritte  $i$ -Eintrag von  $A$  und der dritte  $k$ -Eintrag von  $C$  an verschiedenen Positionen stehen. Somit ist (††) äquivalent zu Aussage (ii) des Lemmas.  $\square$

Sei im Folgenden  $W$  das Diagramm eines (eigentlichen oder uneigentlichen)  $D$ -Graphen. Dann sind also die Begriffe reguläre Zeile, Singularität, reguläres Paar, Orientierung von Singularitäten in  $W$  anwendbar und Satz 7.1 gilt für  $W$ .

Die folgenden beiden Sätze behandeln die Frage, wann  $W$  das Diagramm eines *eigentlichen*  $D$ -Graphen ist, also  $W = \partial D = \partial VS$  ist mit einem  $D$ -Graphen  $D$  auf einem Vertikalstreifen  $VS$ . In dem Fall heißt auch das Diagramm  $W$  *eigentlich*, andernfalls *uneigentlich*.

Als Hilfsmittel wird der oben bereits für Praesudokus auf Vertikalstreifen eingeführte Begriff der Orientierungsmatrix auf Diagramme übertragen: Eine  $3 \times 3$ -Matrix  $B$  mit Einträgen aus  $\{-1, 1\}$  heißt eine *Orientierungsmatrix zum Diagramm  $W = \begin{array}{c} A \\ C \end{array}$* , wenn sie die Eigenschaften (i)–(iii) aus Satz 7.2 erfüllt.

**Satz 7.3.** Das Diagramm  $W = \begin{matrix} A \\ C \end{matrix}$  ist genau dann eigentlich, wenn eine zugehörige Orientierungsmatrix  $B$  existiert.

In dem Fall existiert zu jeder Vorgabe eines Regulativ-Blocks  $b$  ein vertikales Praesudoku (7.1) mit  $\partial a = A, \partial c = C, OM(a) = B, OM(c) = -B$ .

*Beweis.* Es genügt zu zeigen: Sind  $A, C, B$   $3 \times 3$ -Matrizen, die die Eigenschaften von Satz 7.2 erfüllen, und ist  $b$  ein beliebiger Block, so existiert ein vertikales Praesudoku VS mit dem Regulativblock  $b$  und den Diagrammen  $\partial a = A, \partial c = C, OM(a) = B, OM(c) = -B$ .

Der Block  $a$  wird nach (7.4) und (7.3) gebildet, indem man für jedes  $(i, j)$  die Regulativ-Ziffer  $b_{ij}$  in der Zeile  $A_{ij}$  und der Spalte  $(j + B_{ij}) \bmod 3$  einträgt, wobei der Deierrest im Restsystem  $\{1, 2, 3\}$  zu nehmen ist. Entsprechend der Block  $c$ , indem man für jedes  $(i, j)$  die Regulativ-Ziffer  $b_{ij}$  in der Zeile  $C_{ij}$  und der Spalte  $(j - B_{ij}) \bmod 3$  einträgt. Dann steht die Ziffer  $b_{ij}$  in  $a, b, c$  in den verschiedenen Spalten  $(j + B_{ij}) \bmod 3, j, (j - B_{ij}) \bmod 3$ .

Für eine reguläre Zeile in  $A$  bzw.  $C$  bewirkt Eigenschaft (ii) von Satz 7.2, dass ihren 3 Ziffern in  $a$  bzw.  $c$  verschiedene Spalten zugewiesen werden.

Für eine singuläre Zeile in  $A$  bzw.  $C$  bewirken Eigenschaft (i) und (iii) von Satz 7.2, dass ihren 3 Ziffern in  $a$  bzw.  $c$  verschiedene Spalten zugewiesen werden. Denn nach Eigenschaft (i) wird der Singularität in  $a$  bzw.  $c$  die Spalte zugewiesen, in der das reguläre Paar in  $A$  bzw.  $C$  steht, nach Eigenschaft (iii) den beiden Ziffern des regulären Paars die beiden übrigen Spalten von  $a$  bzw.  $c$ .

Somit werden durch die Zuweisung Blöcke  $a$  und  $c$  wohldefiniert. Offenbar gilt dann  $\partial VS = \begin{matrix} A \\ C \end{matrix}$ . □

Somit kann nach folgendem Verfahren zu  $W = \begin{matrix} A \\ C \end{matrix}$  ein erzeugender Vertikalstreifen VS konstruiert bzw. dessen Nicht-Existenz nachgewiesen werden:

Es werden unter Einhaltung der in Satz 7.2 aufgeführten Eigenschaften eine  $3 \times 3$ -Matrix  $B$  mit 1 und  $-1$  belegt, bis sie entweder ganz gefüllt ist oder bei allen Wahlmöglichkeiten ein Widerspruch auftritt.

**Schritt 1:** Für jede Singularität von  $A$  und  $C$  wird die Position in  $B$  gemäß Eigenschaft (i) belegt.

**Schritt 2:** Folgende Aktionen werden so lange durchgeführt, bis auf diese Weise keine zusätzlichen Belegungen in  $B$  mehr vorgenommen werden können:

- Für jede reguläre Zeile von  $A$  oder  $C$ , für die mindestens eine Position in  $B$  belegt ist, werden alle zugehörigen Positionen in  $B$  mit dem gleichen Wert belegt.

- Für jedes reguläre Paar von  $A$  oder  $C$ , für das eine Position in  $B$  belegt ist, wird die andere zugehörige Position in  $B$  mit dem entgegengesetzten Wert belegt.

**Schritt 3:** Ist  $B$  noch nicht vollständig belegt, so wird eine reguläre Zeile oder ein reguläres Paar in  $A$  oder  $C$  ausgewählt, zu dem in  $B$  noch keine Belegung existiert. Im Fall einer regulären Zeile werden die Positionen mit 3 gleichen Werten, im Fall eines regulären Paares mit einer 1 und einer  $-1$  belegt. Dann wird wieder Schritt 2 ausgeführt.

In Schritt 3 ist bei der Belegung einer regulären Zeile oder eines regulären Paares jeweils auch die entgegengesetzte Belegungsmöglichkeit zu berücksichtigen, es tritt jeweils eine Verzweigung des Belegungsprozesses auf.

Dieses Verfahren führt nach einer endlichen Anzahl von Schritten entweder zu einer kompletten Belegung von  $B$ , die konsistent ist mit den Eigenschaften aus Satz 7.2, oder in allen Verzweigungen zu einem Widerspruch in Schritt 2. Im ersten Fall kann nach Satz 7.3 ein erzeugender Vertikalstreifen konstruiert werden.

Der folgende Satz konkretisiert das Kriterium für eigentliche Diagramme. Dabei spielt die relative Lage von regulären Zeilen und Singularitäten in  $A$  zu solchen in  $C$  eine Rolle. Um dies kompakter formulieren zu können, werden entsprechende Positionen von  $A$  und  $C$  miteinander identifiziert, so dass von Zusammenfallen, Disjunktheit, Enthaltensein zwischen Teilmengen von  $A$  und  $C$  gesprochen werden kann.

**Satz 7.4.** In Abhängigkeit von den Singularitätenanzahlen  $s_A$  in  $A$  und  $s_C$  in  $C$  gelten folgende Charakterisierungen dafür, dass das Diagramm  $W = \begin{smallmatrix} A \\ C \end{smallmatrix}$  eigentlich ist:

- (i)  $s_A = 0, s_C = 0$ :  $W$  ist stets eigentlich.
- (ii)  $s_A = 0, s_C = 2$ :  $W$  ist eigentlich genau dann, wenn mindestens eine reguläre Zeile von  $A$  disjunkt zu der regulären Zeile von  $C$  ist.
- (iii)  $s_A = 0, s_C = 3$ :  $W$  ist eigentlich genau dann, wenn mindestens eine reguläre Zeile von  $A$  keine Singularität von  $C$  enthält.
- (iv)  $s_A = 2, s_C = 2$ :  $W$  ist eigentlich genau dann, wenn für beide Paare gleich orientierter Singularitäten von  $A$  und  $C$  gilt: Die beiden Singularitäten fallen weder zusammen noch liegen sie gleichzeitig in der regulären Zeile von  $C$  bzw.  $A$ .
- (v)  $s_A = 2, s_C = 3$ :  $W$  ist eigentlich genau dann, wenn diejenige Singularität von  $A$ , die gleich orientiert ist wie die Singularitäten von  $C$ , mit keiner von ihnen zusammenfällt.
- (vi)  $s_A = 3, s_C = 3$ :  $W$  ist eigentlich genau dann, wenn die Singularitäten von  $A$  zu den Singularitäten von  $C$  gegensätzlich orientiert sind.

*Beweis.* Nach Satz 7.1 sind  $s_A, s_C \in \{0, 2, 3\}$ , die Fallunterscheidung ist also vollständig, wenn o. E.  $s_A \leq s_C$  vorausgesetzt wird.

Für jeden Fall (i)–(vi) ist nachzuweisen, dass  $W$  genau dann eigentlich ist, wenn die angegebene Bedingung erfüllt ist. Nach Satz 7.3 genügt zu zeigen, dass bei Erfüllt-

sein der angegebenen Bedingung eine Matrix  $B$  konstruiert werden kann, die gemäß den in Satz 7.2 angegebenen Eigenschaften konsistent belegt ist, während bei Nichterfülltsein der Versuch,  $B$  zu konstruieren, stets zu einem Widerspruch führt.

Zu (i):

Sind  $A$  und  $C$  regulär, so erfüllt die  $3 \times 3$ -Matrix  $B$ , die nur mit 1 belegt ist, die Bedingungen von Satz 7.2. Nach Satz 7.3 ist  $W$  eigentlich.

Zu (ii):

Die reguläre Zeile von  $C$  ist konstant zu belegen mit  $x \in \{-1, 1\}$ .

Schneidet jede reguläre Zeile von  $A$  die reguläre Zeile von  $C$ , so müssen alle regulären Zeilen von  $A$  mit  $x$  belegt sein. Dann ist  $B$  komplett mit  $x$  belegt. Dies ist ein Widerspruch, da  $C$  reguläre Paare enthält, die sowohl mit 1 als auch mit  $-1$  belegt sein müssen. Nach Satz 7.3 ist  $W$  uneigentlich.

Schneidet umgekehrt eine reguläre Zeile von  $A$  die reguläre Zeile von  $C$  nicht, so wird diese mit  $-x$  belegt, die beiden anderen regulären Zeilen von  $A$  mit  $x$ .

Jedes reguläre Paar in  $C$  schneidet die mit  $-x$  belegte und eine der beiden mit  $x$  belegten regulären Zeilen von  $A$ . Es ist also konsistent mit 1 und  $-1$  belegt.

Die beiden Singularitäten von  $C$  sind nach Korollar zu Satz 7.2 entgegengesetzt zu belegen. Eine Singularität liegt in der mit  $-x$  belegten, die andere in einer mit  $x$  belegten regulären Zeile von  $A$ . Durch geeignete Wahl von  $x$  kann somit eine konsistente Belegung hergestellt werden. Nach Satz 7.3 ist  $W$  eigentlich.

Zu (iii):

Nach Satz 7.1 sind die Singularitäten von  $C$  gleich orientiert, also gleich zu belegen mit  $x \in \{-1, 1\}$ .

Enthält jede reguläre Zeile von  $A$  eine Singularität von  $C$ , so ist die Belegung  $x$  der Singularität also auf die ganze reguläre Zeile auszudehnen. Dann ist also  $B$  komplett mit  $x$  belegt. Dies ist ein Widerspruch, da  $C$  reguläre Paare enthält, die sowohl mit 1 als auch mit  $-1$  belegt sein müssen. Nach Satz 7.3 ist  $W$  uneigentlich.

Existiert umgekehrt eine reguläre Zeile von  $A$ , die keine Singularität von  $C$  enthält, so wird diese mit  $-x$  belegt, die beiden anderen regulären Zeilen von  $A$  mit  $x$ .

Jedes reguläre Paar in  $C$  schneidet die mit  $-x$  belegte und eine der beiden mit  $x$  belegten regulären Zeilen von  $A$ . Es kann also konsistent mit 1 und  $-1$  belegt werden.

Somit ist eine konsistente Belegung hergestellt. Nach Satz 7.3 ist  $W$  eigentlich.

Zu (iv):

Vorüberlegung: Die reguläre Zeile von  $A$  ist gleich zu belegen wie die reguläre Zeile von  $C$ . Denn angenommen, sie wären entgegengesetzt belegt, die reguläre Zeile von  $A$  mit  $x$  und die von  $C$  mit  $-x$ . Außerdem sind in  $A$  und  $C$  zwei reguläre Paare mit 1 und  $-1$  zu belegen, so dass zusammen mindestens 5 Positionen von  $A$  mit  $x$  und 5 Positionen von  $C$  mit  $-x$  belegt sind, was nicht möglich ist.

Seien also die regulären Zeilen von  $A$  und  $C$  mit  $x$  belegt.

Zwei gleich orientierte Singularitäten von  $A$  und  $C$  sind nach Satz 7.2 entgegengesetzt zu belegen. Fallen sie zusammen, so liegt sofort ein Widerspruch vor. Liegen sie gleichzeitig in der regulären Zeile von  $C$  bzw.  $A$ , so liegt ebenfalls ein Widerspruch

vor, da nach Vorüberlegung beide mit  $x$  belegt sind. Somit folgt in diesen Fällen nach Satz 7.3, dass  $W$  uneigentlich ist.

Sei nun vorausgesetzt, dass für beide Paare gleich orientierter Singularitäten von  $A$  und  $C$  gilt: Die beiden Singularitäten fallen weder zusammen noch liegen sie gleichzeitig in der regulären Zeile von  $C$  bzw.  $A$ .

Es werde eine beliebige Spalte betrachtet. Sowohl in  $A$  als auch in  $C$  besteht diese nach Satz 7.1 aus einem Element einer regulären Zeile und entweder einem regulären Paar oder 2 Singularitäten. Die beiden Elemente der regulären Zeilen sind nach Vorüberlegung mit  $x$  belegt.

Fallen die beiden Elemente der regulären Zeilen zusammen, so ist die Belegung an dieser Position konsistent. An den beiden übrigen Positionen fallen entweder zwei reguläre Paare, ein reguläres Paar und ein Singularitätenpaar oder zwei Singularitätenpaare zusammen. Ist ein reguläres Paar beteiligt, so kann über dessen Belegung eine konsistente Belegung erreicht werden, da das Singularitätenpaar nach Korollar zu Satz 7.2 entgegengesetzt zu belegen ist. Fallen zwei Singularitätenpaare zusammen, so fallen nach Voraussetzung jeweils verschiedene orientierte Singularitäten zusammen, so dass auch hier eine konsistente Belegung möglich ist.

Liegen die beiden mit  $x$  belegten Elemente der regulären Zeilen von  $A$  bzw.  $C$  an verschiedenen Positionen, so fallen sie jeweils mit einem Element eines regulären Paares oder mit einer Singularität zusammen.

- (a) Fallen beide mit einem Element eines regulären Paares zusammen, so ist dieses jeweils mit  $x$  zu belegen, die beiden anderen Elemente der regulären Paare, die ihrerseits zusammenfallen, mit  $-x$ . Eine konsistente Belegung der Spalte ist erreicht.
- (b) Fällt das Element der regulären Zeile von  $A$  mit einem Element eines regulären Paares zusammen, das Element der regulären Zeile von  $C$  mit einer mit  $y$  belegten Singularität, so ist das noch nicht spezifizierte  $x$  jetzt als  $y$  festzulegen, um Konsistenz aufrecht zu erhalten, und das Element des regulären Paares ist ebenfalls mit  $y$  zu belegen. Das andere Element des regulären Paares ist mit  $-y$  zu belegen und fällt mit der anderen Singularität zusammen, die ebenfalls mit  $-y$  belegt ist. Eine konsistente Belegung der Spalte ist erreicht.
- (c) Fällt das Element der regulären Zeile von  $C$  mit einem Element eines regulären Paares zusammen, das Element der regulären Zeile von  $A$  mit einer Singularität, so wird analog wie im vorigen Fall eine konsistente Belegung der Spalte erreicht.
- (d) Fallen beide Elemente der regulären Zeilen mit einer Singularität zusammen, so sind diese nach Voraussetzung gegensätzlich orientiert und somit nach Satz 7.2 gleich zu belegen. Sei  $y$  deren Belegung. Somit ist das noch nicht spezifizierte  $x$  jetzt als  $y$  festzulegen, um Konsistenz aufrecht zu erhalten. Die beiden übrigen Singularitäten fallen zusammen und sind mit  $-y$  zu belegen. Eine konsistente Belegung der Spalte ist erreicht.

Somit kann für jede Spalte eine konsistente Belegung erreicht werden, wobei die Fälle (b)–(d) eine Bedingung an  $x$  stellen. Es ist sicherzustellen, dass diese Bedingungen für verschiedene Spalten gleichzeitig erfüllbar sind.

Tritt für eine Spalte Fall (d) ein, so liegen sämtliche Singularitäten in dieser Spalte, für alle anderen Spalten liegt Fall (a) vor, der keine Bedingung an  $x$  stellt.

Da alle Singularitäten von  $A$  in einer Spalte liegen, kann Fall (c) nur einmal eintreten. Da alle Singularitäten von  $C$  in einer Spalte liegen, kann Fall (b) nur einmal eintreten. Treten sowohl Fall (b) als auch Fall (c) für eine Spalte ein, so liegt sowohl eine Singularität von  $A$  in der regulären Zeile von  $C$  als umgekehrt. Nach Voraussetzung sind diese beiden Singularitäten gegensätzlich orientiert, also nach Satz 7.2 gleich zu belegen. Sei  $y$  deren Belegung, so ist in beiden Fällen  $x$  als  $y$  festzulegen, um Konsistenz zu erreichen. Die Bedingungen sind also gleichzeitig erfüllbar.

Zu (v):

Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar. Im Folgenden ist vorausgesetzt, dass die Bedingung erfüllt ist. Die reguläre Zeile von  $A$  werde mit  $x \in \{-1, 1\}$  belegt.

Vorüberlegung: Die Singularitäten von  $C$  sind ebenfalls mit  $x$  zu belegen. Denn zunächst sind die Singularitäten von  $C$  untereinander gleich zu belegen, da sie nach Satz 7.1 gleich orientiert sind. Angenommen, die Singularitäten von  $C$  wären mit  $-x$  belegt. Außerdem sind in  $A$  zwei und in  $C$  drei reguläre Paare mit 1 und  $-1$  zu belegen, so dass zusammen mindestens 5 Positionen von  $A$  mit  $x$  und 6 Positionen von  $C$  mit  $-x$  belegt wären, was nicht möglich ist.

Es werde eine beliebige Spalte betrachtet. Nach Satz 7.1 besteht diese in  $C$  aus einer Singularität und einem regulären Paar, in  $A$  aus einem Element einer regulären Zeile und entweder einem regulären Paar oder 2 Singularitäten. Nach Vorüberlegung sind das Element der regulären Zeile von  $A$  und die Singularität von  $C$  mit  $x$  belegt.

Fällt das Element der regulären Zeile von  $A$  mit der Singularität von  $C$  zusammen, so ist die Belegung an dieser Position konsistent. An den beiden übrigen Positionen steht ein reguläres Paar von  $C$  einem regulären Paar oder einem Singularitätenpaar von  $A$  gegenüber. Das Singularitätenpaar von  $A$  ist nach Satz 7.1 und Satz 7.2 entgegengesetzt zu belegen. Somit ist hier stets eine konsistente Belegung der Spalte möglich.

Fällt das Element der regulären Zeile von  $A$  mit einem Element eines regulären Paars von  $C$  zusammen, so ist dieses Element des regulären Paars mit  $x$  zu belegen, das andere Element des regulären Paars mit  $-x$ . Die beiden übrigen Elemente der Spalte von  $A$  fallen also in  $C$  mit Elementen zusammen, die mit  $x$  und  $-x$  belegt sind. Steht in  $A$  dort ein reguläres Paar, so kann es offenbar konsistent belegt werden. Steht dort ein Singularitätenpaar, das nach Korollar zu Satz 7.2 entgegengesetzt zu belegen ist, so kann durch geeignete Spezifizierung von  $x$  die Konsistenz hergestellt werden. Da  $A$  nur in einer Spalte ein Singularitätenpaar hat, können keine widersprüchlichen Bedingungen an  $x$  entstehen.

Zu (vi):

Nach Korollar zu Satz 7.2 sind die Singularitäten von  $A$  gleich zu belegen mit  $x \in \{-1, 1\}$ . Seien entsprechend die Singularitäten von  $C$  belegt mit  $y \in \{-1, 1\}$ . Da sowohl  $A$  als auch  $C$  drei reguläre Paare enthalten, die jeweils mit 1 und  $-1$  zu belegen sind, sind also in  $A$  6 Positionen mit  $x$  und in  $C$  6 Positionen mit  $y$  zu belegen.

Dies ist im Fall  $x \neq y$  unmöglich, somit Satz 7.3  $W$  uneigentlich.

Sei nun  $x = y$ .

Es werde eine beliebige Spalte betrachtet. Sowohl in  $A$  als auch in  $C$  besteht diese aus einem regulären Paar und einer Singularität. Die beiden Singularitäten sind mit  $x$  belegt.

Fallen die beiden Singularitäten zusammen, so ist die Belegung an dieser Stelle konsistent. Die zusammenfallenden regulären Paare können ebenfalls konsistent belegt werden, womit eine konsistente Belegung der Spalte erreicht ist.

Fallen die beiden Singularitäten nicht zusammen, so fällt jede mit einem Element eines regulären Paares zusammen, das also mit  $x$  belegt ist. Die verbleibenden beiden Elemente der regulären Paare, die zusammenfallen, sind mit  $-x$  zu belegen, was konsistent ist. Eine konsistente Belegung dieser Spalte ist hergestellt.

Da also alle Spalten unabhängig davon, ob die Singularitäten darin zusammenfallen oder nicht, eine konsistente Belegung erlauben, ist in diesem Fall nach Satz 7.3  $W$  eigentlich.  $\square$

**Lemma 7.2.** *Der D-Graph  $D_b$  auf dem vertikalen Praesudoku (7.4) ist durch das Diagramm  $\partial D_b$  eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Gegeben sei das Diagramm  $\partial D_b$ . Der Regulativblock  $b$  werde in beliebiger Reihenfolge mit den Ziffern  $1, \dots, 9$  belegt. Die Diagramme  $\partial a$  und  $\partial c$  legen dann den Ziffernbestand jeder Zeilenmenge  $a_i$  und  $c_j$  fest. Nach Konstruktion sind D-Graphen durch die Spaltenmengen des Regulativs und die Zeilenmengen beider Eckenmengen bis auf Isometrie eindeutig bestimmt.

Eine andere Anfangsbelegung des Regulativblocks mit den Ziffern  $1, \dots, 9$  führt offenbar zum gleichen D-Graphen.  $\square$

Nicht ausgesagt wird durch den Satz, dass jedes Diagramm tatsächlich zu einem D-Graphen führt. Fällt eine Zeilenmenge mit einer Regulativspalte zusammen, so ist dies offenbar nicht der Fall.

Das folgende Lemma beantwortet die Frage, wann zwei Diagramme denselben Isometrietyp von D-Graphen definieren:

**Lemma 7.3.** *Zwei Diagramme bestimmen denselben D-Graphen (bzw. sind beide uneigentlich), wenn sie durch eine Folge von Transformationen folgender Art auseinander hervorgehen:*

*Simultane entsprechende Vertauschungen von Elementen innerhalb einer Spalte von  $\partial a$  und der entsprechenden Spalte von  $\partial c$*  (7.5)

*Simultane entsprechende Zeilenvertauschungen in  $\partial a$  und  $\partial c$*  (7.6)

Zwei Diagramme bestimmen isometrische  $D$ -Graphen, wenn sie durch eine Folge von Transformationen der Art (7.5) und (7.6) und folgender Art auseinander hervorgehen:

*Ummumberierung der Einträge in  $\partial a$*  (7.7)

*Ummumberierung der Einträge in  $\partial c$*  (7.8)

*Simultane entsprechende Spaltenvertauschungen in  $\partial a$  und  $\partial c$*  (7.9)

*Vertauschung von  $\partial a$  und  $\partial c$*  (7.10)

*Beweis.* Zwei  $D$ -Graphen stimmen genau dann überein, wenn nach geeigneter simultaner Permutation der Ziffern in  $a$ ,  $b$  und  $c$  die Zeilenmengen  $a_i$ , die Zeilenmengen  $c_j$  und die Regulativspaltenmengen  $b^k$  übereinstimmen.

Eine simultane Permutation der Ziffern in  $a$ ,  $b$  und  $c$  verändert die Diagramme nicht, ebenso nicht eine Permutation der Ziffern innerhalb einer Zeilenmenge  $a_i$  oder  $c_j$ . Somit verbleiben nur Permutationen von Elementen innerhalb von Regulativspalten als Transformationen, die den  $D$ -Graphen nicht verändern, wohl aber die Diagramme. Diese bewirken in  $\partial a$  und  $\partial c$  simultane entsprechende Vertauschungen von Elementen innerhalb entsprechender Spalten, also Transformationen der Art (7.5). (7.6) ist offenbar eine Spezialisierung von (7.5) auf jede Spalte.

Um festzustellen, wann zwei Diagramme isometrische  $D$ -Graphen bestimmen, ist zu klären, wie sich die zulässigen Isometrietransformationen von  $D$ -Graphen in den Diagrammen widerspiegeln.

- Zeilenpermutationen in einer Eckenmenge des  $D$ -Graphen entsprechen in den Diagrammen einer Ummumberierung der Einträge von  $\partial a$  bzw.  $\partial c$ , was (7.7) und (7.8) entspricht.
- Spaltenpermutationen im  $D$ -Graphen entsprechen simultanen gleichen Spaltenpermutationen in  $\partial a$  und  $\partial c$ , was (7.9) entspricht.
- Eine Vertauschung der Eckenmengen eines  $D$ -Graphen entspricht einer Vertauschung von  $\partial a$  und  $\partial c$ , was (7.10) entspricht.  $\square$

Die Diagramme erlauben in übersichtlicher Weise, kleine Komponenten von  $D$ -Graphen zu identifizieren und den Zusammenhang des verbleibenden Graphen festzustellen.

## 7.2 Adjungierte Graphen und Zusammenhangskomponenten

Die Definition des  $D$ -Graphen  $D = D_b$  zu einem Vertikalstreifen VS und einige benötigte graphentheoretische Begriffe aus Abschnitt 5.1 werden angepasst für die hier vorliegende Situation kurz rekapituliert.

Für zwei Ecken  $u, v$  eines Graphen  $\Gamma$  werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$u$  und  $v$  heißen *benachbart*, i. Z.  $u \sim_{\Gamma} v$ , wenn in  $\Gamma$  eine Verbindungskante von  $u$  und  $v$  vorhanden ist.

$u$  und  $v$  heißen *verbindbar*, i. Z.  $u \sim\sim_{\Gamma} v$ , wenn in  $\Gamma$  eine Eckenfolge  $u = u_0, u_1, \dots, u_l = v$  existiert mit  $u_{\mu-1} \sim_{\Gamma} u_{\mu}$  für alle  $\mu$ .

Die Verbindbarkeit ist eine Äquivalenzrelation auf den Ecken von  $\Gamma$ . Die Äquivalenzklassen heißen *Zusammenhangskomponenten*, kurz *Komponenten* von  $\Gamma$ .

Die *Ordnung* von  $\Gamma$  ist die Anzahl der Ecken von  $\Gamma$ .

Der  $D$ -Graph hat die Eckenmenge  $E = E_0 \dot{\cup} E_1$  mit quadratischen Schemata  $E_0, E_1$  aus je  $3 \times 3$  Ecken.

Jeder Ecke  $u \in E$  ist ein *Domino* aus ein oder zwei Ziffern aus  $\Omega = \{1, 2, \dots, 9\}$  zugeordnet, welches hier mit  $\Delta(u)$  bezeichnet wird. Für  $u \in E_0$  ist das zugehörige Domino wie folgt definiert:

Sei  $i$  eine Zeile von  $E_0$  mit den Ecken  $u_1, u_2$  und  $u_3$ , dabei  $u_j$  die Ecke an der Position  $(i, j)$ .

- Ist die Zeile regulär, d. h. ist  $\#(\alpha_i \cap b^j) = 1$  für alle  $j$ , so ist mit  $\alpha_i \cap b^j = \{r_j\}$

$$\Delta(u_1) := \{r_2, r_3\}, \quad \Delta(u_2) := \{r_1, r_3\}, \quad \Delta(u_3) := \{r_1, r_2\}.$$

Die drei Ecken  $u_j$  und die drei Ziffern  $r_j$  heißen regulär in  $E_0$ .

- Ist die Zeile singulär, d. h. ist  $\#(\alpha_i \cap b^j) = 2$  für ein  $j$ , so ist mit  $\alpha_i \cap b^j = \{r_1, r_2\}$  und  $\alpha_i \setminus b^j = \{s\}$

$$\Delta(u_j) := \{s\}, \quad \Delta(u_k) := \{r_1, r_2\} \text{ für } k \neq j.$$

Die Ecke  $u_j$  und die Ziffer  $s$  heißen singulär in  $E_0$ . Die beiden Ecken  $u_k$  mit  $k \neq j$  und die beiden Ziffern  $r_1, r_2$  heißen reguläres Paar in  $E_0$ .

Stets ist

$$\Delta(u_j) \subset \alpha_i \quad \text{und} \quad \Delta(u_j) \cap b^j = \emptyset. \quad (7.11)$$

Die Dominos zu Ecken  $u \in E_1$  werden analog mit  $c_i$  an Stelle von  $\alpha_i$  definiert.

Aus der Dominobelegung wird die Kantenmenge von  $D$  gewonnen:

Zwei Ecken  $u, v$  derselben Zeile oder Spalte von  $E$  werden durch eine Kante verbunden, wenn ihr Domino eine gemeinsame Ziffer enthält:

$$u \sim_D v : \Leftrightarrow u, v \text{ liegen in derselben Zeile/Spalte von } E \text{ und } \Delta(u) \cap \Delta(v) \neq \emptyset. \quad (7.12)$$

Damit ist der  $D$ -Graph  $D = D_b$  zum vertikalen Praesudoku VS definiert.

Zum  $D$ -Graphen wird der einfachere  $\Omega$ -Graph  $\Omega = \Omega(D)$  auf der Eckenmenge  $\Omega = \{1, 2, \dots, 9\}$  definiert durch

$$y \sim_{\Omega} z : \Leftrightarrow \{y, z\} = \Delta(u) \text{ mit einer geeigneten Ecke } u \text{ von } D \quad (7.13)$$

für  $y \neq z \in \Omega$ . Gleichbedeutend ist:  $y, z$  gehören in einer Eckenmenge von  $D$  zu einer regulären Zeile oder bilden in einer Eckenmenge von  $D$  ein reguläres Paar.

Ziel dieses Abschnitts ist es, aus Eigenschaften des  $\Omega$ -Graphen auf Eigenschaften des  $D$ -Graphen zurückzuschließen.

**Lemma 7.4.** Ist  $\Delta(u) \cap \Delta(v) \neq \emptyset$ , so ist entweder  $u \sim_{\sim_D} v$ , oder  $u$  und  $v$  sind isolierte Singularitäten.

*Beweis.* Sei  $z \in \Delta(u) \cap \Delta(v)$ . Liegen  $u$  und  $v$  in derselben Eckenmenge von  $D$ , so müssen sie in derselben Zeile liegen, da Dominos verschiedener Zeilen disjunkt sind. Dann folgt aus (7.12) sogar  $u \sim_D v$ . Liegen  $u$  und  $v$  in derselben Spalte von  $D$ , so folgt aus (7.12) ebenfalls  $u \sim_D v$ .

Es werde also der verbleibende Fall betrachtet, dass  $u$  und  $v$  in verschiedenen Eckenmengen, o. E.  $u$  in  $E_0$  und  $v$  in  $E_1$ , und in verschiedenen Spalten liegen. Bezeichne  $u'$  die Ecke, die in der Zeile von  $u$  und der Spalte von  $v$  liegt, ebenso  $v'$  die Ecke, die in der Zeile von  $v$  und der Spalte von  $u$  liegt. Ist  $z$  in  $E_0$  regulär, so ist  $z \in \Delta(u')$ . Nach (7.12) folgt  $u \sim_D u' \sim_D v$ , also  $u \sim_{\sim_D} v$ . Ist  $z$  in  $E_1$  regulär, so ist  $z \in \Delta(v')$ . Nach (7.12) folgt  $u \sim_D v' \sim_D v$ , also  $u \sim_{\sim_D} v$ . Ist  $z$  in  $E_0$  und  $E_1$  singulär, so sind  $u$  und  $v$  isolierte Singularitäten.  $\square$

Dieses Lemma gibt Anlass zur Definition des folgenden Graphen:

Der  $E$ -Graph  $E = E(D)$  hat dieselbe Eckenmenge  $E$  wie der  $D$ -Graph und auch alle seine horizontalen und vertikalen Kanten. Zusätzlich sind im  $E$ -Graphen zusammengehörende (d. h. mit der gleichen Ziffer belegte) isolierte Ecken mit einer Verbindungs kante versehen:

$$u \sim_E v : \Leftrightarrow u \sim_D v \text{ oder } u, v \text{ sind isolierte Singularitäten von } D \text{ zur selben Ziffer} \quad (7.14)$$

Also gilt nach (7.12):

$$u \sim_E v \Rightarrow \Delta(u) \cap \Delta(v) \neq \emptyset \quad (7.15)$$

Umgekehrt folgt nach Lemma 7.4 die Verbindbarkeit:

$$\Delta(u) \cap \Delta(v) \neq \emptyset \Rightarrow u \sim_{\sim_E} v \quad (7.16)$$

**Lemma 7.5.** Die Komponenten des  $D$ - und  $E$ -Graphen sind identisch mit folgender Ausnahme:

Jedes Paar zusammengehörender isolierter Ecken bildet zwei Komponenten im  $D$ -Graphen und eine Komponente im  $E$ -Graphen.

*Beweis.* Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Definition des  $E$ -Graphen.  $\square$

Um die Beziehung des  $E$ - zum  $\Omega$ -Graphen herzustellen, wird folgender Hilfsgraph eingeführt:

Der  $E\Omega$ -Graph  $E\Omega = E\Omega(D)$  hat die Eckenmenge  $E \cup \Omega$  und Kanten ausschließlich zwischen  $E$  und  $\Omega$ .  $u \in E$  und  $z \in \Omega$  sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die Ziffer  $z$  in der Belegung von  $u$  vorkommt:

$$u \sim_{E\Omega} z : \Leftrightarrow z \in \Delta(u). \quad (7.17)$$

Die beiden folgenden Lemmata und der folgende Satz stellen über den  $E\Omega$ -Graphen eine Beziehung zwischen dem  $E$ - und dem  $\Omega$ -Graphen her:

**Lemma 7.6.** *Zwei Ecken  $u, v \in E$  sind im  $E$ -Graphen verbindbar genau dann, wenn sie im  $E\Omega$ -Graphen verbindbar sind:*

$$u \sim \sim_E v \Leftrightarrow u \sim \sim_{E\Omega} v \quad (7.18)$$

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Es genügt, für alle  $u, v \in E$  zu zeigen:

$$u \sim_E v \Rightarrow u \sim \sim_{E\Omega} v \quad (7.19)$$

Denn aus  $u \sim \sim_E v$  folgt die Existenz einer Eckenfolge  $u = u_0, u_1, \dots, u_l = v$ , so dass  $u_{\mu-1} \sim_E u_\mu$  für alle  $\mu$ . Dann ist nach (7.19)  $u_{\mu-1} \sim \sim_{E\Omega} u_\mu$  für alle  $\mu$ , und wegen der Transitivität von „ $\sim \sim_{E\Omega}$ “ folgt  $u \sim \sim_{E\Omega} v$ .

Sei also  $u \sim_E v$ . Nach (7.15) ist dann  $\Delta(u) \cap \Delta(v)$  nicht leer, sei  $z \in \Delta(u) \cap \Delta(v)$ . Nach (7.17) folgt  $u \sim_{E\Omega} z$  und  $v \sim_{E\Omega} z$ , also  $u \sim \sim_{E\Omega} v$ .

„ $\Leftarrow$ “: Aus  $u \sim \sim_{E\Omega} v$  folgt die Existenz einer Eckenfolge  $u = u_0, z_1, u_1, \dots, z_l, u_l = v$  in  $E\Omega$ , so dass  $u_{\mu-1} \sim_{E\Omega} z_\mu \sim_{E\Omega} u_\mu$  für alle  $\mu$ . Da jede Kante eine Ecke aus  $E$  und eine aus  $\Omega$  hat, sind die  $u_\mu \in E$  und die  $z_\mu \in \Omega$ .

Nach (7.17) folgt

$$z_\mu \in \Delta(u_{\mu-1}) \text{ und } z_\mu \in \Delta(u_\mu).$$

Somit ist  $\Delta(u_{\mu-1}) \cap \Delta(u_\mu)$  nicht leer, nach 7.16 also  $u_{\mu-1} \sim \sim_E u_\mu$  für alle  $\mu$ . Aufgrund der Transitivität von „ $\sim \sim_E$ “ folgt  $u \sim \sim_E v$ .  $\square$

**Lemma 7.7.** *Zwei Ziffern sind im  $\Omega$ -Graphen verbindbar genau dann, wenn sie im  $E\Omega$ -Graphen verbindbar sind:*

$$y \sim \sim_\Omega z \Leftrightarrow y \sim \sim_{E\Omega} z \text{ für } y, z \in \Omega. \quad (7.20)$$

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “:

Hier genügt zu zeigen:

$$y \sim_\Omega z \Rightarrow y \sim \sim_{E\Omega} z \text{ für } y, z \in \Omega.$$

Aus  $y \sim_\Omega z$  folgt nach (7.13), dass  $u \in E$  existiert mit  $\Delta(u) = \{y, z\}$ . Nach (7.17) ist dann  $u \sim_{E\Omega} y$  und  $u \sim_{E\Omega} z$ , also  $y \sim \sim_{E\Omega} z$ .

„ $\Leftarrow$ “:

Aus  $y \sim \sim_{E\Omega} z$  folgt die Existenz einer Eckenfolge  $y = y_0, u_1, y_1, \dots, u_l, y_l = z$  in  $E\Omega$ , so dass  $y_{\mu-1} \sim_{E\Omega} u_\mu \sim_{E\Omega} y_\mu$  für alle  $\mu$ . Da jede Kante eine Ecke aus  $E$  und eine aus  $\Omega$  hat, sind die  $y_\mu \in \Omega$  und die  $u_\mu \in E$ . O. E. ist  $y_{\mu-1} \neq y_\mu$ , sonst könnte der Kantenzug verkürzt werden.

Nach (7.17) folgt  $y_{\mu-1}, y_\mu \in \Delta(u_\mu)$ . Wegen  $y_{\mu-1} \neq y_\mu$  folgt  $\Delta(u_\mu) = \{y_{\mu-1}, y_\mu\}$ . Nach (7.13) folgt:  $y_{\mu-1} \sim_\Omega y_\mu$  für alle  $\mu$ . Aufgrund der Transitivität von „ $\sim_\Omega$ “ folgt  $y \sim \sim_\Omega z$ .  $\square$

Komponenten  $V$  von  $E$  und  $W$  von  $\Omega$  heißen *benachbart*, i. Z.  $V \sim_{E\Omega} W$ , wenn  $u \in V$  und  $z \in W$  existieren mit  $u \sim_{E\Omega} z$ .

**Lemma 7.8.** Existieren  $u \in V$  und  $z \in W$  mit  $u \sim_{E\Omega} z$ , so sind  $V$  und  $W$  benachbart.

*Beweis.* Ist  $u \sim_{E\Omega} z$ , so existiert eine Eckenfolge  $u = u_0, u_1, \dots, u_l = z$  in  $E\Omega$  mit  $u_{\mu-1} \sim_{E\Omega} u_\mu$  für alle  $\mu$ . Für ein geeignetes  $\mu$  ist dann  $u_{\mu-1} \in E$  und  $u_\mu \in \Omega$ . Wegen  $u_{\mu-1} \sim_{E\Omega} u$  ist nach Lemma 7.6  $u_{\mu-1} \sim_E u$ ,  $u_{\mu-1} \in V$ , ebenso wegen  $u_\mu \sim_{E\Omega} z$  nach Lemma 7.7  $u_\mu \sim_\Omega z$ ,  $u_\mu \in W$ . Somit stellen  $u_{\mu-1}$  und  $u_\mu$  die direkte Verbindung von  $V$  und  $W$  her.  $\square$

**Satz 7.5.** (i) Zu jeder Komponente von  $E$  existiert genau eine benachbarte Komponente von  $\Omega$  und umgekehrt.

(ii) Sind die Komponenten  $V$  von  $E$  und  $W$  von  $\Omega$  benachbart, so gilt für ihre Ordnungen

$$\#V = 2 \cdot \#W \quad (7.21)$$

*Beweis.* Zu (i):

Sei  $V$  eine Komponente von  $E$  und  $u \in V$  beliebig. Sei  $z \in \Delta(u)$ , dann ist nach (7.17)  $u \sim_{E\Omega} z$ . Die Komponente  $W$  von  $z$  in  $\Omega$  ist also zu  $V$  benachbart. Gäbe es eine zweite zu  $V$  benachbarte Komponente  $W'$  von  $\Omega$ , so gäbe es  $u' \in V$  und  $z' \in W'$  mit  $u' \sim_{E\Omega} z'$ . Dann wäre  $z \sim_{E\Omega} u \sim \sim_E u' \sim_{E\Omega} z'$ , also  $z \sim_{E\Omega} z'$ . Nach Lemma 7.7 folgte  $z \sim_\Omega z'$ , also  $W = W'$ .

Sei umgekehrt  $W$  eine Komponente von  $\Omega$  und  $z \in W$  beliebig. Dann existiert  $u \in E$  mit  $\Delta(u) \ni z$ . Nach (7.17) ist  $z \sim_{E\Omega} u$ . Die Komponente  $V$  von  $u$  in  $E$  ist also zu  $W$  benachbart. Gäbe es eine zweite zu  $W$  benachbarte Komponente  $V'$  von  $E$ , so gäbe es  $u' \in V'$  und  $z' \in W$  mit  $u' \sim_{E\Omega} z'$ . Dann wäre  $u \sim_{E\Omega} z \sim \sim_\Omega z' \sim_{E\Omega} u'$ , also  $u \sim_{E\Omega} u'$ . Nach Lemma 7.6 folgte  $u \sim \sim_E u'$ , also  $V = V'$ .

Zu (ii):

Es bezeichne  $\Phi$  die folgende Funktion auf  $E \times \Omega$  mit Werten in  $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ :

Für  $u \in E$  und  $z \in \Omega$  sei

- $\Phi(u, z) = 1 / \#\Delta(u)$  für  $z \in \Delta(u)$ ,
- $\Phi(u, z) = 0$  für  $z \notin \Delta(u)$ .

Ist  $\Phi(u, z) \neq 0$ , so sind die Komponenten von  $u$  in  $E$  und von  $z$  in  $\Omega$  benachbart. (7.22)

Denn  $\Phi(u, z) \neq 0$  bedeutet  $z \in \Delta(u), z \sim_{E\Omega} u$ . Daher folgt (7.22) nach Lemma 7.8.

Wir betrachten für  $u \in V$  die Summe  $\sum_{z \in \Omega} \Phi(u, z)$ .

Nur die  $z \in \Delta(u)$  tragen je  $1/\#\Delta(u)$  zur Summe bei. Somit ist

$$\sum_{z \in \Omega} \Phi(u, z) = \#\Delta(u) \cdot (1/\#\Delta(u)) = 1.$$

Nach (7.22) tragen nur  $z \in W$  zur Summe bei. Somit ist

$$\sum_{z \in \Omega} \Phi(u, z) = \sum_{z \in W} \Phi(u, z) = 1 \text{ und } \sum_{u \in V} \sum_{z \in W} \Phi(u, z) = \#V. \quad (7.23)$$

Wir betrachten für  $z \in W$  die Summe  $\sum_{u \in E} \Phi(u, z)$ .

Nur die  $u$  mit  $\Delta(u) \ni z$  tragen zur Summe bei.

- Ist  $z$  in  $E_0$  regulär, so gibt es zwei  $u \in E_0$  mit  $\Delta(u) \ni z$ , für die gilt  $\#\Delta(u) = 2$ . Der Beitrag dieser  $u$  zur Summe ist also  $2 \cdot (1/\#\Delta(u)) = 1$ .
- Ist  $z$  in  $E_0$  singulär, so gibt es nur ein  $u \in E_0$  mit  $\Delta(u) \ni z$ , für das gilt  $\#\Delta(u) = 1$ . Der Beitrag dieses  $u$  zur Summe ist also  $1/\#\Delta(u) = 1$ .

Der Gesamtbeitrag aller  $u \in E_0$  zur Summe ist also in beiden Fällen 1.

Gleiches gilt für  $E_1$ , daher folgt:

$$\sum_{u \in E} \Phi(u, z) = \sum_{u \in V} \Phi(u, z) = 2 \text{ und } \sum_{z \in W} \sum_{u \in V} \Phi(u, z) = 2 \cdot \#W. \quad (7.24)$$

Vergleich von (7.23) und (7.24) liefert  $\#V = 2 \cdot \#W$  und somit die Behauptung.  $\square$

Man erhält folgende Beziehung zwischen den Komponenten des  $D$ -Graphen und des zugehörigen  $\Omega$ -Graphen:

### Satz 7.6.

- (i) Jede 1-elementige Komponente von  $\Omega$  ist benachbart zu zwei zusammengehörenden isolierten Ecken und zu keiner weiteren Komponente des  $D$ -Graphen.
- (ii) Jede mindestens 2-elementige Komponente von  $\Omega$  ist zu genau einer Komponente des  $D$ -Graphen benachbart.

Werden die Komponenten mit  $W$  bzw.  $V$  bezeichnet, so gilt für die Ordnungen:

$$\#V = 2 \cdot \#W$$

- (iii) In (i) und (ii) kommt jede Komponente des  $D$ -Graphen genau einmal vor.

*Beweis.* Nach Satz 7.5 ist eine 1-elementige Komponente  $\{z\}$  von  $\Omega$  benachbart zu genau einer Komponente von  $E$ , und diese enthält 2 Ecken. Bezeichnen  $u, v$  diese Ecken. Da jedes Element von  $\Delta(u)$  zu  $u$  und jedes Element von  $\Delta(v)$  zu  $v$  benachbart ist, folgt  $\Delta(u) = \Delta(v) = \{z\}$ . Das heißt gerade, dass  $u, v$  ein zusammengehörendes Paar singulärer Ecken ist.

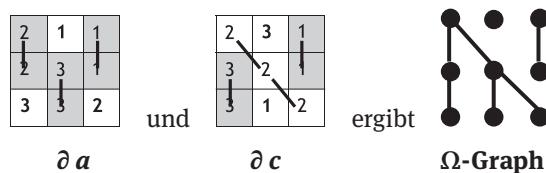
Die übrigen Aussagen ergeben sich unmittelbar aus Lemma 7.5 und Satz 7.5.  $\square$

Somit kann aus der Zerlegung des  $\Omega$ -Graphen geschlossen werden, in wieviele Komponenten welcher Größe der  $D$ -Graph zerfällt.

Nach (7.13) kann der  $\Omega$ -Graph gebildet werden, indem in der Eckenmenge  $\Omega = \{1, 2, \dots, 9\}$  für jede reguläre Zeile und jedes reguläre Paar in einer der Eckenmengen  $E_0$  und  $E_1$  die enthaltenen Ziffern verbunden werden.

Ordnet man die Ziffern so an, wie sie im Regulativ stehen, kann der  $\Omega$ -Graph leicht aus den Diagrammen gebildet werden, da diese auf der gleichen Ziffernanordnung beruhen.

In jedem Diagramm bilden zwei gleiche Ziffern in einer Spalte ein reguläres Paar, drei gleiche Ziffern in verschiedenen Spalten eine reguläre Zeile. Diese werden durch Kanten verbunden. Anschließend werden die Diagramme aufeinander geschoben, so dass entsprechende Zellen zusammenfallen und die Kanten aus beiden Darstellungen vereinigt werden. Dies ergibt eine Darstellung des  $\Omega$ -Graphen, wie im folgenden Beispiel dargestellt:



Dieser  $\Omega$ -Graph hat offenbar 3 Komponenten mit 1, 2 und 6 Ecken. Nach Satz 7.6 hat der  $D$ -Graph 4 Komponenten: ein Paar isolierter Ecken und je eine Komponente mit 4 und 12 Ecken.

### 7.3 Identifikation kleiner Komponenten von $D$ -Graphen

Eine Komponente des  $\Omega$ - bzw. des  $D$ -Graphen heißt *klein*, wenn sie maximal 3 bzw. 6 Ecken hat, andernfalls *groß*.

Ein *Matching* von je einer Teilmenge der Diagramme der beiden Eckenmengen liegt vor, wenn die beiden Teilmengen die entsprechenden Positionen im jeweiligen Diagramm abdecken.

Im eingangs gegebenen Beispiel gibt es ein Matching von Singularitäten ( $a_1$  und  $c_3$ ) sowie ein Matching von regulären Paaren ( $a_1$  und  $c_1$ ). Matchings von regulären Zeilen oder Sonderspalten liegen nicht vor, ebenso keine gemischten Matchings eines regulären Paars mit 2 Singularitäten oder einer regulären Zeile mit 3 Singularitäten.

Das folgende Lemma stellt eine Beziehung zwischen Matchings und den kleinen Komponenten von  $\Omega$ - und  $D$ -Graphen her:

**Lemma 7.9.** Alle kleinen Komponenten  $V$  eines  $D$ -Graphen und  $W$  des zugehörigen  $\Omega$ -Graphen entsprechen Matchings zwischen den Diagrammen der beiden Eckenmengen folgender Art:

**Tabelle 7.1:** Identifizierung kleiner Komponenten anhand von Matchings

Art des Matchings	#W	Typ von V
Singularität : Singularität	1	Paar isolierter Ecken
reguläres Paar : reguläres Paar	2	Rechteckkomponente $C_4$
reguläres Paar : zwei Singularitäten	2	Baumkomponente $B_4^2$
reguläre Zeile : reguläre Zeile	3	Tonnenkomponente $T_6$
reguläre Zeile : drei Singularitäten	3	Baumkomponente $B_6^3$
Sonderspalte : Sonderspalte, wobei ihre regulären Paare und Singularitäten einzeln nicht matchen	3	Komponente $K_6^2(6)$

*Beweis.* Kleine Komponenten  $W$  des  $\Omega$ -Graphen haben entweder 1, 2 oder 3 Elemente.

- Ist  $\#W = 1$ , so muss  $W$  in jedem Diagramm aus einer Singularität bestehen, da Zellen aus regulären Paaren oder Zeilen eine Verbindung zu anderen Zellen hätten. Somit entspricht  $W$  einem Matching Singularität : Singularität wie in der Tabelle für  $\#W = 1$  angegeben.
- Ist  $\#W = 2$ , so muss  $W$  in jedem Diagramm entweder (a) aus einem regulären Paar oder (b) aus zwei Singularitäten bestehen.  
(b) : (b) scheidet aus, da  $W$  dann nicht zusammenhängend wäre.  
Somit entspricht  $W$  entweder einem Matching (a) : (a) oder (a) : (b), was den beiden in der Tabelle angegebenen Möglichkeiten für  $\#W = 2$  entspricht.
- Ist  $\#W = 3$ , so muss  $W$  in jedem Diagramm entweder (a) aus einer regulären Zeile, (b) einem regulären Paar und einer Singularität oder (c) aus drei Singularitäten bestehen.  
(a) : (b) scheidet aus, da eine reguläre Zeile in jeder Spalte genau ein Element hat, während ein reguläres Paar in einer Spalte zwei Elemente hat.  
(b) : (c) und (c) : (c) scheiden aus, da  $W$  dann nicht zusammenhängend wäre, ebenso (b) : (b), wenn die regulären Paare und die Singularitäten zusammenfallen.  
Somit entspricht  $W$  entweder einem Matching (a) : (a) oder (a) : (c) oder (b) : (b) mit nicht zusammenfallenden regulären Paaren und Singularitäten, was den drei in der Tabelle angegebenen Möglichkeiten für  $\#W = 3$  entspricht.

Jetzt ist noch die Beziehung der Matchings zu den Komponenten des  $D$ -Graphen herzustellen. Aufgrund der Konstruktion der Diagramme bedeutet ein Matching, dass die beiden matchenden Teilmengen in ihren Eckenmengen die gleichen Ziffern belegen.

- Ein Matching zweier Singularitäten steht also für je eine Singularität in jeder Eckenmenge, die die gleiche Ziffer tragen. Das ist genau ein Paar isolierter Singularitäten.

- Ein Matching regulärer Paare steht für je ein reguläres Paar in jeder Eckenmenge, die aus den gleichen Ziffern bestehen. Zwei solche Paare haben je eine horizontale Verbindung, miteinander zwei vertikale Verbindungen und keine weiteren horizontalen oder vertikalen Verbindungen. Sie bilden offenbar ein Rechteck  $C_4$ .
- Ein Matching eines regulären Paares mit zwei Singularitäten steht für ein reguläres Paar, dessen Ziffern in der anderen Eckenmenge Singularitäten sind. Das reguläre Paar hat eine horizontale Verbindung und zu jeder Singularität eine vertikale Verbindung. Weitere horizontale oder vertikale Verbindungen können nicht existieren. Es handelt sich um einen 4er-Baum  $B_4^2$ .
- Ein Matching regulärer Zeilen steht für je eine reguläre Zeile in jeder Eckenmenge, die aus den gleichen Ziffern bestehen. Zwei solche Zeilen haben je drei horizontale Verbindungen, drei vertikale Verbindungen miteinander und keine weiteren vertikalen Verbindungen. Sie bilden offenbar eine 6er-Tonne  $T_6$ .
- Ein Matching einer regulären Zeile mit drei Singularitäten steht für eine reguläre Zeile, deren Ziffern in der anderen Eckenmenge Singularitäten sind. Die reguläre Zeile hat drei horizontale Verbindungen und zu jeder Singularität eine vertikale Verbindung. Weitere horizontale oder vertikale Verbindungen können nicht existieren. Es handelt sich um einen 6er-Baum  $B_6^3$ .
- Ein Matching von zwei Sonderspalten, deren Komponenten einzeln nicht passen, bedeutet folgende Konstellation:

In einer Eckenmenge bilden  $x, y$  ein reguläres Paar und  $z$  eine Singularität, in der anderen Eckenmenge bilden  $y, z$  ein reguläres Paar und  $x$  eine Singularität. Die Ziffern  $x, y, z$  stehen im Regulativ in derselben Spalte, die in der folgenden Darstellung ausgeblendet ist. Man erhält folgende beide wesentlich verschiedene Möglichkeiten:

$$\begin{array}{c} E_0 \quad \begin{array}{cc} xy & xy \\ z & \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{cc} xy & xy \\ z & \end{array} \\ \hline E_1 \quad \begin{array}{cc} yz & yz \\ x & \end{array} \quad \begin{array}{cc} yz & yz \\ x & \end{array} \end{array}$$

In beiden Fällen liegt ein Rechteck mit zwei verbundenen Singularitäten vor, die entweder an Ecken der gleichen oder an Ecken verschiedener Spalten angehängt sind. Dies sind die zwei Isometrie-Typen von  $K_2^6(6)$ .

Umgekehrt sieht man in allen Fällen entsprechend, dass die kleinen Komponenten des  $D$ -Graphen sich in den Diagrammen notwendig in der angegebenen Form widerspiegeln.  $\square$

**Lemma 7.10.**  $\Omega$ - und  $D$ -Graphen enthalten maximal eine große Komponente.

*Beweis.* Wegen Satz 7.6 genügt es, die Behauptung für den  $\Omega$ -Graphen zu zeigen.

Vorüberlegung: Jede große Komponente des  $\Omega$ -Graphen muss notwendig in mindestens einem Diagramm eine reguläre Zeile enthalten.

Denn bestünde sie in beiden Diagrammen nur aus regulären Paaren und Singularitäten, so gäbe es keine Verbindungen zwischen verschiedenen Spalten. Die Komponente müsste also Teilmenge einer Spalte, somit klein sein.

Angenommen nun, ein  $\Omega$ -Graph enthielte zwei große Komponenten. Da insgesamt 9 Ecken vorhanden sind, müssten die beiden großen Komponenten entweder 4 und 5 oder beide 4 Ecken enthalten.

Zunächst wird der Fall je einer Komponente mit 4 und 5 Ecken untersucht.

Nach der Vorüberlegung enthält die Komponente mit 5 Ecken in einem Diagramm eine reguläre Zeile. Ihre beiden übrigen Ecken sind dort entweder ein reguläres Paar oder 2 Singularitäten.

- Im Fall eines regulären Paares belegt dieses die 2 freien Plätze einer Spalte.
- Im Fall von 2 Singularitäten belegen deren 2 zugehörige reguläre Paare je die 2 noch freien Plätze einer Spalte. Die 2 Singularitäten müssen also beide in der verbleibenden Spalte stehen.

In beiden Fällen belegt die Komponente eine komplette Spalte.

Die Komponente mit 4 Ecken enthält nach Vorüberlegung ebenfalls in einem Diagramm eine reguläre Zeile. Diese enthält aus jeder Spalte ein Element, muss also die von der 5-Ecken-Komponente belegte Spalte schneiden. Verschiedene Komponenten können sich nicht schneiden, dieser Fall ist also unmöglich.

Somit bleibt nur der Fall von zwei Komponenten mit je 4 Ecken auszuschließen.

Eine Komponente mit 4 Elementen besteht in jedem Diagramm entweder (a) aus einer regulären Zeile und einer Singularität oder (b) aus einem regulären Paar und 2 Singularitäten.

In beiden Fällen ist ein reguläres Paar weniger als Singularitäten vorhanden. Bei jeder Kombination der beiden Typen in einer Eckenmenge sind also zwei reguläre Paare weniger als Singularitäten vorhanden, die nicht in der verbleibenden freien Zelle untergebracht werden können. Somit ist auch der Fall von zwei Komponenten mit je 4 Elementen nicht möglich.  $\square$

**Satz 7.7.** *Nach Entfernung aller kleinen Komponenten eines  $\Omega$ - oder  $D$ -Graphen ist der Restgraph zusammenhängend.*

*Beweis.* Nach Abspaltung aller kleinen Komponenten bleibt die Vereinigung aller großen Komponenten übrig. Diese ist nach Lemma 7.10 entweder leer oder besteht nur aus einer großen Komponente, ist in beiden Fällen zusammenhängend.  $\square$

Nun folgt die konkrete Klassifikation der Isometrietypen von (eigentlichen oder uneigentlichen)  $D$ -Graphen. Die  $D$ -Graphen werden abschnittsweise nach der Anzahl der enthaltenen Singularitäten behandelt.

## 7.4 Klassifikation der $D$ -Graphen mit mindestens einer regulären Eckenmenge

Ist eine Eckenmenge des  $D$ -Graphen regulär (also bei insgesamt 0, 2 oder 3 Singularitäten), so soll o. E.  $c$  immer regulär sein (bei 0 Singularitäten ist  $a$  ebenfalls regulär).

### Normierung von $\partial c$

$\partial c$  ist vom Typ I, enthält also in jeder Spalte je einen Eintrag 1, 2, 3. Da nach (7.5) die Ziffern jeder Spalte von  $\partial c$  und  $\partial a$  ohne Änderung des resultierenden  $D$ -Graphen gemeinsam permutiert werden können, kann in jeder Spalte erreicht werden, dass der Eintrag 1 oben steht, der Eintrag 2 in der Mitte und der Eintrag 3 unten. Dann hat also das zu  $c$  gehörige Schema folgendes Aussehen:

$$\partial c = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} \quad (7.25)$$

Dies soll in den folgenden Untersuchungen der Fälle 0, 2 und 3 Singularitäten stets vorausgesetzt werden.

### Vorüberlegungen zur Normierung von $\partial a$

$\partial c$  ist offenbar invariant gegenüber

- Spaltenvertauschungen
- Zeilenvertauschungen in Kombination mit entsprechender Umnummerierung der Einträge

Daher führen nach Lemma 7.3 folgende Transformationen von  $\partial a$  zu isometrischen  $D$ -Graphen:

- Zeilenvertauschungen (nach (7.6))
- Spaltenvertauschungen (nach (7.9))
- Umnummerierungen der Einträge (nach (7.7))

Diese Eigenschaften werden in den folgenden Untersuchungen der Fälle 0, 2 und 3 Singularitäten verwendet, um die möglichen  $\partial a$  auf Grundformen zurückzuführen, so dass jedem Isometrie-Typ von  $D$ -Graphen genau eine Grundform entspricht.

### 7.4.1 $D$ -Graphen mit 0 Singularitäten (regulärer Fall)

$\partial c$  liege in der Form (7.25) vor.

Hier ist  $\partial a$  ebenfalls vom Typ I, d. h.: Jede Spalte enthält eine 1, eine 2 und eine 3.

Als geeignetes Unterscheidungsmerkmal der Isometriertypen stellen sich hier die in Abschnitt 6.6 eingeführten Intersektionsmatrizen  $I(a, c)$  und Distanzen  $\delta(a, c)$  heraus. Der  $(i, j)$ -Eintrag der Intersektionsmatrix ist gegeben durch  $\#(a_i \cap c_j)$ . Umnummerierungen der Zeilen von  $a$  und  $c$  führen in der Intersektionsmatrix offenbar zu Zeilen- bzw. Spaltenpermutationen. Durch derartige Transformationen, die nach (7.7) und (7.8) den Isometriertyp des  $D$ -Graphen erhalten, werde die Intersektionsmatrix nach Lemma 6.1 in eine der dort angegebenen 5 Grundtypen überführt. Für jeden Typ ergeben sich eine oder mehrere Möglichkeiten für  $\partial a$ . Diese sollen bei jetzt festgehaltener Nummerierung der Zeilen von  $a$  und  $c$  weiter normiert werden. Als einzige Transformationsmöglichkeit verbleiben dann noch Spaltenpermutationen in  $\partial a$  (und gleichzeitig in  $\partial c$ , wo sie keine Auswirkung haben).

### Normierung von $\partial a$

Für den ersten Typ zur Distanz  $\delta(a, c) = 0$  und Intersektionsmatrix

$$\begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}$$

ist offenbar von vorneherein nur das folgende  $\partial a$  möglich (in diesem Unterabschnitt werden die regulären Zeilen durch verschiedene Schattierungen unterschieden):

1	1	1
2	2	2
3	3	3

Für den zweiten Typ zur Distanz  $\delta(a, c) = 2$  und Intersektionsmatrix o. E.

$$\begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}$$

gibt es folgende Möglichkeiten:

1	1	1
2	2	3
3	3	2

1	1	1
2	3	2
3	2	3

1	1	1
3	2	2
2	3	3

Diese können offenbar durch Spaltenpermutationen alle auf die erste angegebene Form zurückgeführt werden.

Für den dritten Typ zur Distanz  $\delta(a, c) = 3$  und Intersektionsmatrix o. E.

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}$$

gibt es folgende Möglichkeiten:

1	1	2
2	2	3
3	3	1

1	2	1
2	3	2
3	1	3

2	1	1
3	2	2
1	3	3

Diese können ebenfalls durch Spaltenpermutationen alle auf die erste angegebene Form zurückgeführt werden.

Für den vierten Typ zur Distanz  $\delta(a, c) = 4$  und Intersektionsmatrix o. E.

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

gibt es folgende Möglichkeiten:

1	1	3
2	3	2
3	2	1

1	1	3
3	2	2
2	3	1

1	3	1
3	2	2
2	1	3

3	1	1
2	2	3
1	3	2

3	1	1
2	3	2
1	2	3

Diese können ebenfalls durch Spaltenpermutationen alle auf die erste angegebene Form zurückgeführt werden.

Für den fünften Typ zur Distanz  $\delta(a, c) = 6$  und Intersektionsmatrix

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

bilden die 3 regulären Zeilen von  $a$  in  $\partial a$  entweder 3 fallende Diagonalen oder drei steigende Diagonale (insgesamt 12 Fälle).

Da hier alle Einträge der Intersektionsmatrix gleich sind, kann nochmals eine Umnummerierung der Einträge von  $\partial c$  vorgenommen werden, ohne die Intersektionsmatrix zu verändern. Der Fall der steigenden Diagonalen wird durch eine Vertauschung der zweiten und dritten Zeile in  $\partial a$  und  $\partial c$ , die in  $\partial c$  durch eine Vertauschung der Bezeichnungen 2 und 3 ausgeglichen wird, auf den Fall der fallenden Diagonalen zurückgeführt.

Die verbleibenden 6 Fälle mit fallenden Diagonalen können durch Spaltenvertauschungen alle auf den folgenden zurückgeführt werden:

1	2	3
3	1	2
2	3	1

### Zuordnung zu Isometriertypen

Somit sind alle möglichen Diagramme von  $a$  durch Transformationen, die den Isometriertyp des  $D$ -Graphen erhalten, auf eines von 5 Diagrammen zurückgeführt worden.

Somit gibt es maximal 5 Isometriertypen von regulären  $D$ -Graphen. Die 5 Fälle durchlaufen die 5 möglichen Distanzen.

Die im Anhang befindliche Auflistung enthält 5 reguläre  $D$ -Graphen. Man stellt fest, dass diese zu den 5 verschiedenen Distanzen gehören. Somit realisiert jeder Vertreter einen der gefundenen 5 Fälle. Nach Satz 7.4 sind diese sämtlich eigentlich. Der folgende Satz stellt die Zuordnung her.

**Satz 7.8.** *Es gibt 5 Isometriertypen konkreter regulärer  $D$ -Graphen. Sie sind durch die Distanz von  $a$  und  $c$  eindeutig identifiziert gemäß folgender Tabelle:*

<b>Typ Nr.</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<i>Distanz</i>	0	2	3	4	6
<i>Isometriertyp</i>	$3 \cdot T_6$	$R_{12}(22) \perp T_6$	$R_{18}(33)$	$R_{18}(34)$	$R_{18}(36)$

Alle Typen sind eigentlich.

#### 7.4.2 $D$ -Graphen mit 2 Singularitäten

$\partial c$  liege in der Form (7.25) vor.

Hier ist das zu  $a$  gehörige Diagramm vom Typ II, d. h.: Jede Spalte enthält genau einen Eintrag der regulären Zeile. Die beiden anderen Einträge der Spalten sind wie folgt: Zwei Spalten enthalten ein reguläres Paar, die dritte Spalte enthält die beiden Singularitäten.

##### Normierung von $\partial a$

Nach den Vorüberlegungen kann  $\partial a$  durch Umnummerierung der Einträge sowie durch Spalten- und Zeilenpermutationen normiert werden.

Durch Umnummerierung der Einträge von  $\partial a$  wird erreicht, dass

- 1 und 2 die singulären Zeilen sind und 3 die reguläre Zeile ist;
- falls die beiden Singularitäten in den gleichen Zeilen wie eines der regulären Paare stehen, dieses bzw. ein solches Paar zu 1 gehört;
- falls die beiden regulären Paare die gleichen Zeilen belegen und eine Singularität die verbleibende Zeile belegt, diese Singularität zu 1 gehört.

Sodann können durch Spaltenpermutationen die Spalten, die die regulären Paare 1 und 2 enthalten, an die Positionen 1 und 2 gebracht werden, die Spalte mit den beiden Singularitäten steht dann an Position 3.

Schließlich kann durch Zeilenpermutationen offenbar das reguläre Paar 1 in die 2. und 3. Zeile und das reguläre Paar 2 entweder in die 2. und 3. oder in die 1. und 2. Zeile gebracht werden.

Belegen nun beide Paare und beide Singularitäten die 2. und 3. Zeile, so kann ggf. durch Vertauschung der 2. und 3. Zeile erreicht werden, dass die Singularität 1 in der zweiten und 2 in der dritten Zeile steht.

Somit kann  $\partial a$  auf eine der folgenden Formen gebracht werden (in den folgenden Diagrammen werden die Singularitäten durch Fettdruck und die regulären Paare durch Schattierung hervorgehoben):

<table border="1"><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td><b>1</b></td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	3	3	3	1	2	<b>1</b>	1	2	2	<table border="1"><tr><td>3</td><td>3</td><td><b>1</b></td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	3	3	<b>1</b>	1	2	3	1	2	2	<table border="1"><tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td><b>1</b></td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr></table>	3	2	3	1	2	<b>1</b>	1	3	2	<table border="1"><tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td><b>2</b></td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td><b>1</b></td></tr></table>	3	2	3	1	2	<b>2</b>	1	3	<b>1</b>	<table border="1"><tr><td>3</td><td>2</td><td><b>1</b></td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr></table>	3	2	<b>1</b>	1	2	3	1	3	2	<table border="1"><tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td><b>1</b></td></tr></table>	3	2	2	1	2	3	1	3	<b>1</b>
3	3	3																																																									
1	2	<b>1</b>																																																									
1	2	2																																																									
3	3	<b>1</b>																																																									
1	2	3																																																									
1	2	2																																																									
3	2	3																																																									
1	2	<b>1</b>																																																									
1	3	2																																																									
3	2	3																																																									
1	2	<b>2</b>																																																									
1	3	<b>1</b>																																																									
3	2	<b>1</b>																																																									
1	2	3																																																									
1	3	2																																																									
3	2	2																																																									
1	2	3																																																									
1	3	<b>1</b>																																																									

Mit Satz 7.4 können die eigentlichen Typen identifiziert werden: In  $\partial c$  fallen nach (7.25) die regulären Zeilen mit den Matrixzeilen zusammen, daher schneidet nur in den beiden letzten Fällen die reguläre Zeile 3 von  $\partial a$  alle regulären Zeilen von  $\partial c$ , die ersten vier Fälle sind also die eigentlichen Typen.

### Bestimmung der kleinen Komponenten

- Im ersten Diagramm gibt es nur ein Matching von regulären Zeilen. Die einzige kleine Komponente ist ein  $T_6$ .
- In den übrigen 5 Diagrammen gibt es keine Matchings. Der  $D$ -Graph enthält keine kleine Komponente.

Nach Satz 7.7 ist jeweils der nach Abspaltung der kleinen Komponenten verbleibende Teil des  $D$ -Graphen zusammenhängend.

### Zuordnung zu Isometriertypen

Somit sind alle möglichen  $\partial a$  durch Transformationen, die den Isometriertyp des  $D$ -Graphen erhalten, auf einen von 6 Fällen zurückgeführt. Somit gibt es hier maximal 6 Isometriertypen von  $D$ -Graphen.

Die im Anhang befindliche Auflistung enthält 6  $D$ -Graphen mit genau 2 Singularitäten.

Um die Zuordnung zu den Isometriertypen übersichtlicher zu gestalten, werden zwei Teilmengen von  $a$  über  $c$  benachbart genannt, wenn es in  $c$  eine reguläre Zeile oder ein reguläres Paar gibt, mit der beide Teilmengen von  $a$  durch eine vertikale Kante verbunden sind.

Durch Untersuchung

- einerseits der Anzahl  $k$  der Singularitäten, die mit ihrem zugehörigen regulären Paar über  $c$  benachbart sind,
- andererseits der Anzahl  $l$  der Singularitäten, die mit dem anderen regulären Paar über  $c$  benachbart sind,

ergibt sich, dass für jeden Vertreter nur ein Fall in Frage kommt. Der folgende Satz stellt die Zuordnung her.

**Satz 7.9.** *Es gibt 6 Isometrietypen konkreter D-Graphen mit 2 Singularitäten. Sie sind durch die oben eingeführten Anzahlen  $k$  und  $l$  eindeutig identifiziert gemäß folgender Tabelle:*

Diagramm Nr.	1	2	3	4	5	6
$k$	2	1	1	2	0	2
$l$	2	1	2	1	2	0
Isometriotyp	$K_{12}^2(18)a \perp T_6$	$K_{18}^2(29)c$	$K_{18}^2(29)b$	$K_{18}^2(29)a$	$K_{18}^2(30)b$	$K_{18}^2(30)a$

Die ersten vier Fälle sind eigentlich, die beiden letzten uneigentlich.

### 7.4.3 D-Graphen mit 3 Singularitäten

$\partial c$  liege in der Form (7.25) vor.

Hier ist das zu  $a$  gehörige Diagramm vom Typ III, d. h.: Jede Spalte enthält ein reguläres Paar und eine Singularität einer anderen Zeile.

#### Normierung von $\partial a$

Nach den Vorüberlegungen kann das Diagramm von  $a$  durch Umnummerierung der Einträge sowie durch Spalten- und Zeilenpermutationen normiert werden.

Falls es 3 reguläre Paare gibt, die gleiche Zeilen belegen, wird durch Zeilenvertauschungen erreicht, dass sie die 2. und 3. Zeile belegen. Durch Spaltenvertauschung wird erreicht, dass die Singularität zum regulären Paar der 1. Spalte in der 2. Spalte steht.

Falls es 2 reguläre Paare gibt, die gleiche Zeilen belegen, wird durch Zeilenvertauschungen erreicht, dass sie die 2. und 3. Zeile belegen und das dritte reguläre Paar die 1. und 2. Zeile belegt. Durch Spaltenvertauschungen wird zunächst erreicht, dass das dritte reguläre Paar in der dritten Spalte steht, und anschließend, dass die Singularität zum regulären Paar der 1. Spalte in der 2. Spalte steht, indem ggf. die 1. und 2. Spalte vertauscht werden.

Falls alle 3 regulären Paare verschiedene Zeilenkombinationen belegen, wird zunächst durch eine Spaltenvertauschung das die 1. und 3. Zeile belegende Paar in die 2. Spalte gebracht. Sodann wird das Paar, das zur in der 2. Spalte stehenden Singularität gehört, in die 1. Spalte gebracht, indem ggf. die 1. und 3. Spalte vertauscht werden. Schließlich wird erreicht, dass das Paar in der 1. Spalte die 2. und 3. Zeile belegt, indem ggf. die 1. und 3. Zeile vertauscht werden.

Durch Umnummerierung der Einträge von  $\partial a$  wird schließlich erreicht, dass für alle  $i$  das reguläre Paar  $i$  in der  $i$ -ten Spalte steht.

Somit kann das Diagramm von  $a$  auf eine der folgenden Formen gebracht werden:

$\begin{array}{ c c c } \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 3 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 3 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$
---	---	---

Mit Satz 7.4 können die eigentlichen Typen identifiziert werden: In  $\partial c$  fallen nach (7.25) die regulären Zeilen mit den Matrixzeilen zusammen, daher fällt nur im letzten Fall in jede reguläre Zeile eine Singularität, die ersten beiden Fälle sind also die eigentlichen Typen.

### Bestimmung der kleinen Komponenten

- Im ersten Diagramm gibt es nur ein Matching einer regulären Zeile mit 3 Singularitäten, die einzige kleine Komponente ist eine Baumkomponenten  $B_6^3$ .
- Im zweiten und dritten Diagramm gibt es keine Matchings. Der  $D$ -Graph enthält keine kleine Komponente.

Nach Satz 7.7 ist jeweils der nach Abspaltung der kleinen Komponenten verbleibende Teil des  $D$ -Graphen zusammenhängend.

### Zuordnung zu Isometriertypen

Somit sind alle möglichen Diagramme von  $a$  durch Transformationen, die den Isometriertyp des  $D$ -Graphen erhalten, auf einen von 3 Fällen zurückgeführt. Somit gibt es hier maximal 3 Isometriertypen von  $D$ -Graphen.

Die im Anhang befindliche Auflistung enthält 3  $D$ -Graphen mit 3 Singularitäten. Durch Untersuchung der Anzahl  $k$  der Singularitäten, die über  $c$  mit ihrem zugehörigen regulären Paar benachbart sind, ergibt sich, dass für jeden Vertreter nur ein Fall in Frage kommt. Der folgende Satz stellt die Zuordnung her.

**Satz 7.10.** *Es gibt 3 Isometriertypen konkreter  $D$ -Graphen mit 3 Singularitäten. Sie sind durch die oben eingeführte Anzahl  $k$  eindeutig identifiziert gemäß folgender Tabelle:*

Diagramm Nr.	1	2	3
$k$	0	2	3
Isometriertyp	$R_{12}(21) \perp K_6^3(6)$	$K_{18}^3(27)a$	$K_{18}^3(27)b$

Die ersten beiden Fälle sind eigentlich, der letzte ist uneigentlich.

## 7.5 Klassifikation der $D$ -Graphen mit zwei singulären Eckenmengen

Im Folgenden sei o. E. stets  $c$  die Eckenmenge mit der höheren Singularitätenzahl.

### 7.5.1 $D$ -Graphen mit 4 Singularitäten

Hier enthalten  $a$  und  $c$  je 2 Singularitäten, die zugehörigen Diagramme sind vom Typ II, enthalten also in zwei Spalten ein reguläres Paar und in der dritten Spalte die 2 Singularitäten. Die verbleibenden Einträge bilden eine reguläre Zeile.

#### Normierung von $\partial c$

$\partial c$  kann nach (7.9) durch gemeinsame Spaltenpermutationen, nach (7.5) durch gemeinsame Permutationen der Ziffern innerhalb der Spalten von  $\partial c$  und  $\partial a$ , sowie nach (7.8) durch Umnummerierung der Einträge von  $\partial c$  auf folgende Form gebracht werden, die im Folgenden vorausgesetzt werden soll:

$$\partial c = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} \quad (7.26)$$

#### Normierung von $\partial a$

$\partial c$  ist offenbar invariant gegenüber

- Vertauschung der beiden oberen Einträge in einer der ersten beiden Spalten
- gleichzeitige Vertauschung der ersten beiden Spalten, der beiden oberen Einträge der letzten Spalte und der Bezeichnungen 1 und 2.

Daher führen nach Lemma 7.3 folgende Transformationen von  $\partial a$  zu isometrischen  $D$ -Graphen:

- Vertauschung der oberen beiden Elemente in einer der ersten beiden Spalten (nach (7.5))
- gleichzeitige Vertauschung der ersten beiden Spalten und der beiden oberen Einträge der letzten Spalte (nach (7.9), (7.5) und (7.8))
- Umnummerierungen der Einträge von  $\partial a$  (nach (7.7))

Daher kann o. E. angenommen werden, dass eines der beiden regulären Paare in der 1. Spalte steht. Denn stünden sie in der 2. und 3. Spalte, so könnte durch Vertauschung der ersten beiden Zeilen und ersten beiden Spalten das Paar aus der 2. in die 1. Spalte überführt werden.

Weiter kann o. E. angenommen werden, dass das in der 1. und 2. Spalte stehende reguläre oder Singularitäten-Paar von  $a$  jeweils entweder in der 1. und 2. oder in der 2. und 3. Zeile steht. Dies kann auch für die 3. Spalte o. E. angenommen werden, falls dort das Singularitäten-Paar steht. Denn stünde es in der 1. und 3. Zeile, so könnte es durch die Vertauschung der ersten beiden Zeilen und ersten beiden Spalten in die Positionierung in der 2. und 3. Zeile der 3. Spalte überführt werden, ohne dass die regulären Paare wieder in die 1. und 3. Spalte überführt würden.

Somit gibt es die im Folgenden aufgeführten Möglichkeiten für  $\partial a$ .

Zunächst werden die Fälle behandelt, wo die beiden regulären Paare in der 1. und 2. Spalte stehen (dann stehen alle 4 Singularitäten in 2 Spalten des  $D$ -Graphen), dann die Fälle, wo sie in der 1. und 3. Spalte stehen (dann verteilen sich die 4 Singularitäten über alle 3 Spalten des  $D$ -Graphen).

### Die beiden regulären Paare stehen in der 1. und 2. Spalte

Durch Umnummerierung der Einträge von  $a$  wird erreicht, dass das reguläre Paar 1 in der 1. und 2. in der 2. Spalte steht. Die Singularitäten 1 und 2 stehen in  $\partial a$  – wie in  $\partial c$  – in der 3. Spalte.

Die erste Spalte enthält in  $\partial a$  wie in  $\partial c$  2-mal die Ziffer 1. Nach Lemma 7.1 (ii) steht die dritte Ziffer 1, also die Singularität 1, in  $\partial a$  und  $\partial c$  an verschiedenen Positionen. Die zweite Spalte enthält in  $\partial a$  wie in  $\partial c$  2-mal die Ziffer 2. Wieder nach Lemma 7.1 (ii) folgt, dass die Singularität 2 in  $\partial a$  und  $\partial c$  an verschiedenen Positionen steht. D. h. hier: 1 kann in  $\partial a$  nicht rechts oben stehen, 2 nicht rechts in der Mitte.

Somit verbleiben die folgenden Möglichkeiten:

<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td><b>1</b></td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	1	2	2	1	2	<b>1</b>	3	3	3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td><b>1</b></td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	1	3	2	1	2	<b>1</b>	3	2	3	<table border="1"><tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td><b>1</b></td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	3	2	2	1	2	<b>1</b>	1	3	3	<table border="1"><tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td><b>1</b></td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	3	3	2	1	2	<b>1</b>	1	2	3
1	2	2																																					
1	2	<b>1</b>																																					
3	3	3																																					
1	3	2																																					
1	2	<b>1</b>																																					
3	2	3																																					
3	2	2																																					
1	2	<b>1</b>																																					
1	3	3																																					
3	3	2																																					
1	2	<b>1</b>																																					
1	2	3																																					
<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td><b>1</b></td></tr></table>	1	2	2	1	2	3	3	3	<b>1</b>	<table border="1"><tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td><b>1</b></td></tr></table>	1	3	2	1	2	3	3	2	<b>1</b>	<table border="1"><tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td><b>1</b></td></tr></table>	3	2	2	1	2	3	1	3	<b>1</b>	<table border="1"><tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td><b>1</b></td></tr></table>	3	3	2	1	2	3	1	2	<b>1</b>
1	2	2																																					
1	2	3																																					
3	3	<b>1</b>																																					
1	3	2																																					
1	2	3																																					
3	2	<b>1</b>																																					
3	2	2																																					
1	2	3																																					
1	3	<b>1</b>																																					
3	3	2																																					
1	2	3																																					
1	2	<b>1</b>																																					

### Bestimmung der kleinen Komponenten

- Im 1. Diagramm gibt es ein Matching von regulären Zeilen, 2 Matchings von regulären Paaren und 2 Matchings von Singularitäten. Der  $D$ -Graph zerfällt vollständig in kleine Komponenten:  $T_6 \perp 2.C_4 \perp 4.I$ .
- Im 2. Diagramm gibt es ein Matching von regulären Paaren und 2 Matchings von Singularitäten. Die kleinen Komponenten sind  $C_4$  und  $4.I$ .
- Für das 3. Diagramm erweist sich durch gleichzeitige Vertauschung der ersten beiden Spalten, der beiden oberen Einträge der letzten Spalte und der Bezeich-

nungen 1 und 2, dass ein isometrischer  $D$ -Graph wie vom 2. Diagramm erzeugt wird.

- Im 4. Diagramm gibt es nur 2 Matchings von Singularitäten. Die einzigen kleinen Komponenten sind 4.I.
- Im 5. Diagramm gibt es 2 Matchings von regulären Paaren und ein Matching von Singularitäten. Die kleinen Komponenten sind 2.C<sub>4</sub> und 2.I.
- Im 6. Diagramm gibt es ein Matching von regulären Paaren und ein Matching von Singularitäten. Die kleinen Komponenten sind C<sub>4</sub> und 2.I.
- Für das 7. Diagramm erweist sich durch gleichzeitige Vertauschung der ersten beiden Spalten, der beiden oberen Einträge der letzten Spalte und der Bezeichnungen 1 und 2, dass ein isometrischer  $D$ -Graph wie vom 6. Diagramm erzeugt wird.
- Im 8. Diagramm gibt es nur ein Matching von Singularitäten. Die einzigen kleinen Komponenten sind 2.I.

### Die beiden regulären Paare stehen in der 1. und 3. Spalte

In diesem Fall stehen die Singularitäten 1 und 2 in der mittleren Spalte von  $\partial a$  und können daher nicht mit den Singularitäten 1 und 2 von  $\partial c$  zusammenfallen.

Der Fall, dass 2 auf der obersten und 1 auf der mittleren Position von  $\partial a$  steht, braucht nicht betrachtet zu werden, da die Vertauschung dieser beiden Positionen  $\partial c$  invariant lässt (dort steht das reguläre Paar 2) und somit nach Transformationseigenschaft (7.5) aus Lemma 7.3 ein isometrischer  $D$ -Graph erzeugt wird.

Daher verbleiben die folgenden Möglichkeiten für  $\partial a$ :

<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	1	1	2	1	2	2	3	3	3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr></table>	1	1	2	1	2	3	3	3	2	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr></table>	1	1	3	1	2	2	3	3	2	<table border="1"><tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	3	1	2	1	2	2	1	3	3	<table border="1"><tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr></table>	3	1	2	1	2	3	1	3	2	<table border="1"><tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr></table>	3	1	3	1	2	2	1	3	2
1	1	2																																																									
1	2	2																																																									
3	3	3																																																									
1	1	2																																																									
1	2	3																																																									
3	3	2																																																									
1	1	3																																																									
1	2	2																																																									
3	3	2																																																									
3	1	2																																																									
1	2	2																																																									
1	3	3																																																									
3	1	2																																																									
1	2	3																																																									
1	3	2																																																									
3	1	3																																																									
1	2	2																																																									
1	3	2																																																									
<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	1	1	2	1	3	2	3	2	3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	1	1	2	1	3	3	3	2	2	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	1	1	3	1	3	2	3	2	2	<table border="1"><tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	3	1	2	1	3	2	1	2	3	<table border="1"><tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	3	1	2	1	3	3	1	2	2	<table border="1"><tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	3	1	3	1	3	2	1	2	2
1	1	2																																																									
1	3	2																																																									
3	2	3																																																									
1	1	2																																																									
1	3	3																																																									
3	2	2																																																									
1	1	3																																																									
1	3	2																																																									
3	2	2																																																									
3	1	2																																																									
1	3	2																																																									
1	2	3																																																									
3	1	2																																																									
1	3	3																																																									
1	2	2																																																									
3	1	3																																																									
1	3	2																																																									
1	2	2																																																									
<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td></tr></table>	1	2	2	1	3	2	3	1	3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	1	2	2	1	3	3	3	1	2	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	1	2	3	1	3	2	3	1	2	<table border="1"><tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr></table>	3	2	2	1	3	2	1	1	3	<table border="1"><tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	3	2	2	1	3	3	1	1	2	<table border="1"><tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	3	2	3	1	3	2	1	1	2
1	2	2																																																									
1	3	2																																																									
3	1	3																																																									
1	2	2																																																									
1	3	3																																																									
3	1	2																																																									
1	2	3																																																									
1	3	2																																																									
3	1	2																																																									
3	2	2																																																									
1	3	2																																																									
1	1	3																																																									
3	2	2																																																									
1	3	3																																																									
1	1	2																																																									
3	2	3																																																									
1	3	2																																																									
1	1	2																																																									

Die Möglichkeiten gliedern sich in zwei  $3 \times 3$ -Tableaus von Diagrammen. Das reguläre Paar 1 steht im linken Tableau stets in den beiden oberen, im rechten Tableau in den beiden unteren Positionen der ersten Spalte.

In den Zeilen jedes Tableaus wandert das reguläre Paar 2 durch die drei möglichen Positionen in der dritten Spalte. In den Spalten jedes Tableaus wandern die beiden Singularitäten durch die drei möglichen Positionen in der zweiten Spalte.

Nach (7.10) in Lemma 7.3 ist die komplette Vertauschung von  $\partial\alpha$  und  $\partial c$  eine Transformation, die den Isometriertyp des erzeugten  $D$ -Graphen nicht ändert. Das betrifft in beiden Tableaus die symmetrisch zur Hauptdiagonalen gelegenen Fälle, wie im Folgenden für ein Beispiel ausgeführt wird.

Ausgangspunkt sind das  $\partial c$  in normierter Form und das  $\partial\alpha$  gemäß dem 7. Diagramm des rechten Tableaus:

1	2	1
1	2	2
3	3	3

3	2	2
1	3	2
1	1	3

Vertauschung der beiden Eckenmengen gemäß (7.10) ergibt:

3	2	2
1	3	2
1	1	3

1	2	1
1	2	2
3	3	3

Die neue Darstellung von  $\partial c$  soll nun wieder in die normierte Form gebracht werden. Zunächst werden nach (7.9) (in beiden Darstellungen) die zweite und dritte Spalte vertauscht:

3	2	2
1	2	3
1	3	1

1	1	2
1	2	2
3	3	3

Nun werden nach (7.5) in der ersten Spalte das obere und untere Element vertauscht, in der dritten Spalte alle Elemente zyklisch um eine Position abwärts geschoben:

1	2	3
1	2	1
3	3	2

3	1	3
1	2	2
1	3	2

Damit ist die Darstellung von  $\partial c$  in die normierte Form überführt, die Darstellung von  $\partial\alpha$  in das 3. Diagramm des rechten Tableaus, das in der Tat spiegelbildlich zum 7. Diagramm angeordnet ist.

Somit brauchen in jedem Tableau nur die oberhalb und auf der Hauptdiagonale gelegenen Diagramme Nr. 1, 2, 3, 5, 6 und 9 betrachtet zu werden, die im linken Tableau mit L1, L2, ... und im rechten mit R1, R2, ... bezeichnet werden.

### Bestimmung der kleinen Komponenten im linken Tableau

- In L1 gibt es ein Matching von regulären Zeilen, ein Matching von regulären Paaren und 2 Matchings von regulären Paaren mit je 2 Singularitäten. Der  $D$ -Graph zerfällt vollständig in kleine Komponenten:  $T_6 \perp C_4 \perp 2.B_4^2$ .
- In L2 und L3 gibt es nur ein Matching von regulären Paaren und ein Matching eines regulären Paars mit 2 Singularitäten. Die kleinen Komponenten sind  $C_4$  und  $B_4^2$ .

- In L5, L6 und L9 gibt es nur ein Matching von regulären Paaren. Die einzige kleine Komponente ist  $C_4$ .

### Bestimmung der kleinen Komponenten im rechten Tableau

- In R1 gibt es nur 2 Matchings von regulären Paaren mit je 2 Singularitäten. Die kleinen Komponenten sind  $2.B_4^2$ .
- In R2 und R3 gibt es nur ein Matching von regulären Paaren. Die einzige kleine Komponente ist  $B_4^2$ .
- In R5, R6 und R9 gibt es kein Matching. Der  $D$ -Graph enthält keine kleine Komponente.

Nach Satz 7.7 ist der verbleibende Teil des  $D$ -Graphen bzw. der komplette  $D$ -Graph jeweils zusammenhängend.

### Unterscheidungskriterien für die Fälle mit gleichen kleinen Komponenten

$Z$  steht jeweils für eine große Komponente des  $D$ -Graphen.

L2 und L3 führen zu  $D$ -Graphen des Zerlegungstyps  $Z \perp C_4 \perp B_4^2$ .

In beiden Fällen gehören die beiden Singularitäten 1 und 2 von  $\partial a$  zu der Baumkomponente  $B_4^2$ ; die Singularität 2 von  $\partial c$  bildet mit dem regulären Paar 2 des Baums eine Zeile, 1 steht in einer anderen Zeile. Eine der Singularitäten 1 und 2 von  $\partial c$  ist mit einer regulären Zeile, die andere mit einem regulären Paar verbunden. Diese Zuordnung unterscheidet die beiden Graphen:

Die Singularität, die mit dem regulären Paar des Baums in einer Zeile steht, ist verbunden mit ...	Isometriotyp gemäß Liste I in Abschnitt 6.2
L2    ... einer regulären Zeile	$K_{10}^2(14) \perp C_4 \perp B_4^2 b$
L3    ... einem regulären Paar	$K_{10}^2(14) \perp C_4 \perp B_4^2 a$

L5, L6 und L9 führen zu  $D$ -Graphen des Zerlegungstyps  $Z \perp C_4$ .

2 Singularitäten sind jeweils mit regulären Zeilen verbunden, die beiden anderen mit regulären Paaren. Ihre Verteilung auf gleiche oder verschiedene Spalten im  $D$ -Graphen unterscheidet die 3 Graphen:

Zwei mit regulären Zeilen verbundene Singularitäten stehen im $D$ -Graphen ...	Zwei mit regulären Paaren verbundene Singularitäten stehen im $D$ -Graphen ...	Isometriotyp gemäß Liste I in Abschnitt 6.2
L5    in verschiedenen Spalten	in gleichen Spalten	$K_{14}^4(18) b \perp C_4$
L6    in verschiedenen Spalten	in verschiedenen Spalten	$K_{14}^4(18) c \perp C_4$
L9    in gleichen Spalten	in verschiedenen Spalten	$K_{14}^4(18) a \perp C_4$

R2 und R3 führen zu  $D$ -Graphen des Zerlegungstyps  $Z \perp B_4^2$ .

In beiden Fällen gehören die beiden Singularitäten 1 und 2 von  $\partial a$  zu der Baumkomponente  $B_4^2$ ; die Singularität 2 von  $\partial c$  bildet mit dem regulären Paar 2 des Baums eine Zeile, 1 steht in einer anderen Zeile. Eine der Singularitäten 1 und 2 von  $\partial c$  ist mit einer regulären Zeile, die andere mit einem regulären Paar verbunden. Diese Zuordnung unterscheidet die beiden Graphen:

<b>Die Singularität, die mit dem regulären Paar des Baums in einer Zeile steht, ist verbunden mit ...</b>		<b>Isometriertyp gemäß Liste I in Abschnitt 6.2</b>
R2	... einer regulären Zeile	$K_{14}^2(21) b \perp B_4^2$
R3	... einem regulären Paar	$K_{14}^2(21) a \perp B_4^2$

R5, R6 und R9 führen zu zusammenhängenden  $D$ -Graphen.

2 Singularitäten sind jeweils mit regulären Zeilen verbunden, die beiden anderen mit regulären Paaren. Ihre Verteilung auf gleiche oder verschiedene Spalten im  $D$ -Graphen unterscheidet die 3 Graphen:

<b>Zwei mit regulären Zeilen verbundene Singularitäten stehen im <math>D</math>-Graphen ...</b>	<b>Zwei mit regulären Paaren verbundene Singularitäten stehen im <math>D</math>-Graphen ...</b>	<b>Isometriertyp gemäß Liste I in Abschnitt 6.2</b>
R5 in verschiedenen Spalten	in gleichen Spalten	$K_{18}^4(24) b$
R6 in verschiedenen Spalten	in verschiedenen Spalten	$K_{18}^4(24) c$
R9 in gleichen Spalten	in verschiedenen Spalten	$K_{18}^4(24) a$

### Zuordnung zu Isometriertypen

Somit sind alle möglichen Diagramme von  $a$  durch Transformationen, die den Isometriertyp des  $D$ -Graphen erhalten, auf einen von 18 Fällen zurückgeführt. Somit gibt es hier maximal 18 Isometriertypen von  $D$ -Graphen.

Die im Anhang befindliche Auflistung enthält 18  $D$ -Graphen mit 4 Singularitäten. Durch Überprüfung der oben angegebenen Charakterisierungen stellt sich heraus, dass für jeden Vertreter nur ein Fall in Frage kommt. Der folgende Satz stellt die Zuordnung her. Die Unterscheidung der eigentlichen und uneigentlichen Typen folgt nach Satz 7.4.

**Satz 7.11.** *Es gibt 18 Isometriertypen konkreter  $D$ -Graphen mit 4 Singularitäten. Die folgende Tabelle fasst die Komponentenzerlegungen zusammen:*

*$D$ -Graphen, deren 4 Singularitäten in 2 Spalten stehen:*

Diagramm Nr.	1	2	4	5	6	8
Zerlegung	$T_6 \perp 2.C_4 \perp 4.I$	$R_{10}(17) \perp C_4 \perp 4.I$	$R_{14}(24) \perp 4.I$	$K_8^2(11) \perp 2.C_4 \perp 2.I$	$K_{12}^2(18) \perp C_4 \perp 2.I$	$K_{16}^2(24) \perp 2.I$

$D$ -Graphen, deren 4 Singularitäten sich über alle 3 Spalten verteilen:

Diagramm Nr.	L1	L2, L3	L5, L6, L9	R1	R2, R3	R5, R6, R9
Zerlegung	$T_6 \perp C_4 \perp 2.B_4^2$	$K_{10}^2(14) \perp C_4 \perp B_4^2$	$K_{14}^4(18) \perp C_4$	$R_{10}(17) \perp 2.B_4^2$	$K_{14}^2(21) \perp B_4^2$	$K_{18}^4(24)$

Unterscheidungen für die Fälle, wo mehrere Diagramme zu gleichartigen Zerlegungen führen, aber verschiedene Isometrietypen repräsentieren, wurden oben hergeleitet. Dort sind auch die Bezeichnungen der Isometrietypen aus Liste I in Abschnitt 6.2 zugeordnet.

$L6$  und  $R6$  sind uneigentlich, die übrigen 16 Typen sind eigentlich.

**Korollar.** Die durch Diagramm  $L2$  und  $L3$  bestimmten  $D$ -Graphen mit isometrischen Komponenten  $K_{10}^2(14) \perp C_4 \perp B_4^2$  sind nicht isometrisch.

**Beweis.** Die Nicht-Isometrie der beiden  $D$ -Graphen folgt aus Satz 7.11. Die Isometrie der Komponenten folgt aus Liste II des Klassifikationssatzes in Abschnitt 6.2, da die vorkommenden Komponententypen je nur eine Isometrieklasse haben.  $\square$

### 7.5.2 $D$ -Graphen mit 5 Singularitäten

$\partial c$  liege in der Form (7.26) vor.

Hier enthalten  $a$  und  $c$  2 bzw. 3 Singularitäten, die zugehörigen Diagramme sind vom Typ II und III. O. E. sei  $c$  die Eckenmenge mit 3 Singularitäten.

#### Normierung von $\partial c$

$\partial c$  kann nach (7.9) durch gemeinsame Spaltenpermutationen, nach (7.5) durch gemeinsame Permutationen der Ziffern innerhalb der Spalten von  $\partial c$  und  $\partial a$ , sowie nach (7.8) durch Umnummerierung der Einträge von  $c$  auf folgende Form gebracht werden, die im Folgenden vorausgesetzt werden soll:

$$\partial c = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

### Normierung von $\partial\alpha$

$\partial c$  ist offenbar invariant gegenüber

- Vertauschung der beiden unteren Einträge irgend einer Spalte
- zyklischer Vertauschung der Spalten mit anschließender entsprechender Umnummerierung der Einträge

Daher führen nach Lemma 7.3 folgende Transformationen von  $\partial\alpha$  zu isometrischen  $D$ -Graphen:

- Vertauschung der unteren beiden Elemente von Spalten (nach (7.5))
- zyklische Vertauschung von Spalten (nach (7.9))
- Umnummerierungen der Einträge von  $\partial\alpha$  (nach (7.7))

Daher kann o. E. angenommen werden, dass 1 und 2 die singulären Zeilen von  $\partial\alpha$  sind und 3 die reguläre Zeile ist, dass sich das reguläre Paar 1 in der ersten Spalte, das reguläre Paar 2 in der zweiten Spalte und die beiden Singularitäten 1 und 2 in der letzten Spalte befinden, dass weiterhin jedes reguläre Paar und die beiden Singularitäten entweder in der 1. und 2. Zeile oder in der 2. und 3. Zeile positioniert sind.

Stehen die beiden Singularitäten in der 2. und 3. Zeile, so braucht nur eine der beiden Möglichkeiten in Betracht gezogen zu werden.

Für die Positionierung der Singularitäten in der 1. und 2. Zeile der dritten Spalte braucht aus folgendem Grund ebenfalls nur eine der beiden Möglichkeiten in Betracht gezogen zu werden:

Die zweite Spalte enthält in  $\partial\alpha$  wie in  $\partial c$  2-mal die Ziffer 2. Nach Lemma 7.1 (ii) steht die dritte Ziffer 2, also die Singularität 2, in  $\partial\alpha$  und  $\partial c$  an verschiedenen Positionen. D. h. hier: 2 kann nicht in der rechten oberen Ecke von  $\partial\alpha$  stehen.

Somit gibt es folgende Möglichkeiten für  $\partial\alpha$ :

<table border="1"><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	3	3	3	1	2	1	1	2	2	<table border="1"><tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr></table>	3	2	3	1	2	1	1	3	2	<table border="1"><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	1	3	3	1	2	1	3	2	2	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr></table>	1	2	3	1	2	1	3	3	2
3	3	3																																					
1	2	1																																					
1	2	2																																					
3	2	3																																					
1	2	1																																					
1	3	2																																					
1	3	3																																					
1	2	1																																					
3	2	2																																					
1	2	3																																					
1	2	1																																					
3	3	2																																					
<table border="1"><tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	3	3	1	1	2	2	1	2	3	<table border="1"><tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	3	2	1	1	2	2	1	3	3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	1	3	1	1	2	2	3	2	3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	1	2	1	1	2	2	3	3	3
3	3	1																																					
1	2	2																																					
1	2	3																																					
3	2	1																																					
1	2	2																																					
1	3	3																																					
1	3	1																																					
1	2	2																																					
3	2	3																																					
1	2	1																																					
1	2	2																																					
3	3	3																																					

### Bestimmung der kleinen Komponenten

- Im 1. Diagramm gibt es 2 Matchings von regulären Paaren, ein Matching eines regulären Paars mit 2 Singularitäten und ein Matching einer regulären Zeile mit 3 Singularitäten. Der  $D$ -Graph zerfällt vollständig in kleine Komponenten:  $K_6^3(6)$   $\perp 2.C_4 \perp B_4^2$ .

- Im 2. und 3. Diagramm gibt es nur ein Matching von regulären Paaren und ein Matching eines regulären Paars mit 2 Singularitäten. Die kleinen Komponenten sind  $C_4$  und  $B_4^2$ .
- Im 4. Diagramm gibt es nur ein Matching eines regulären Paars mit 2 Singularitäten. Die einzige kleine Komponente ist  $B_4^2$ .
- Im 5. Diagramm gibt es nur 2 Matchings von regulären Paaren und ein Matching von Singularitäten. Die kleinen Komponenten sind  $2.C_4$  und  $2.I$ .
- Im 6. und 7. Diagramm gibt es nur ein Matching von regulären Paaren und ein Matching von Singularitäten. Die kleinen Komponenten sind  $C_4$  und  $2.I$ .
- Im 8. Diagramm gibt es nur ein Matching von Singularitäten. Die einzige kleine Komponente ist  $2.I$ .

Nach Satz 7.7 ist der verbleibende Teil des  $D$ -Graphen bzw. der komplette  $D$ -Graph jeweils zusammenhängend.

### Unterscheidungskriterien für die Fälle mit gleichen kleinen Komponenten

$Z$  steht jeweils für eine große Komponente des  $D$ -Graphen.

Das 2. und 3. Diagramm führen zu  $D$ -Graphen des Zerlegungstyps  $Z \perp C_4 \perp B_4^2$ .

Zur Unterscheidung der beiden Typen betrachte man die zum regulären Paar des Rechtecks  $C_4$  in  $c$  gehörende Singularität ( $c$  ist die Eckenmenge mit 3 Singularitäten):

- Im 2. Diagramm besteht das Rechteck aus den regulären Paaren 1 von  $\partial a$  und 1 von  $\partial c$ . Die Singularität 1 von  $\partial c$  ist mit dem regulären Paar 2 von  $\partial a$  verbunden.
- Im 3. Diagramm besteht das Rechteck aus den regulären Paaren 2 von  $\partial a$  und 2 von  $\partial c$ . Die Singularität 2 von  $\partial c$  ist in  $\partial a$  mit der regulären Zeile 3 verbunden.

Die zum regulären Paar des Rechtecks $C_4$ in $\partial c$ gehörende Singularität ist verbunden mit ...	Isometriotyp gemäß Liste I in Abschnitt 6.2
2. Diagramm    ... einem regulären Paar	$K_{10}^3(12) \perp C_4 \perp B_4^2 b$
3. Diagramm    ... einer regulären Zeile	$K_{10}^3(12) \perp C_4 \perp B_4^2 a$

Das 6. und 7. Diagramm führen zu  $D$ -Graphen des Zerlegungstyps  $Z \perp C_4 \perp 2.I$ .

Zur Unterscheidung der beiden Typen betrachte man wieder die zum regulären Paar des Rechtecks  $C_4$  in  $\partial c$  gehörende Singularität ( $c$  ist die Eckenmenge mit 3 Singularitäten):

- Im 6. Diagramm besteht das Rechteck aus den regulären Paaren 1 von  $\partial a$  und 1 von  $\partial c$ . Die Singularität 1 von  $\partial c$  ist in mit dem regulären Paar 2 von  $\partial a$  verbunden.
- Im 7. Diagramm besteht das Rechteck aus den regulären Paaren 2 von  $\partial a$  und 2 von  $\partial c$ . Der Singularität 2 von  $\partial c$  ist isoliert.

Die zum regulären Paar des Rechtecks $C_4$ in $\partial c$ gehörende Singularität ist ...		Isometriertyp gemäß Liste I in Abschnitt 6.2
6. Diagramm	... verbunden mit einem regulären Paar	$K_{12}^3(15) b \perp C_4 \perp 2.I$
7. Diagramm	... isoliert	$K_{12}^3(15) a \perp C_4 \perp 2.I$

### Zuordnung zu Isometriertypen

Somit sind alle möglichen  $\partial a$  durch Transformationen, die den Isometriertyp des  $D$ -Graphen erhalten, auf einen von 8 Fällen zurückgeführt. Somit gibt es hier maximal 8 Isometriertypen von  $D$ -Graphen.

Die im Anhang befindliche Auflistung enthält 8  $D$ -Graphen mit 5 Singularitäten. Durch Überprüfung der oben angegebenen Charakterisierungen stellt sich heraus, dass für jeden Vertreter nur ein Fall in Frage kommt. Der folgende Satz stellt die Zuordnung her. Die Unterscheidung der eigentlichen und uneigentlichen Typen folgt nach Satz 7.4.

**Satz 7.12.** Es gibt 8 Isometriertypen konkreter  $D$ -Graphen mit 5 Singularitäten. Abgesehen von den Typ-Paaren {2, 3} und {6, 7} sind sie durch die abgespaltenen kleinen Komponenten eindeutig identifiziert gemäß folgender Tabelle:

Diagramm Nr.	1	2	3	4
Isometriertyp	$K_6^3(6)$ $\perp 2.C_4 \perp B_4^2$	$K_{10}^3(12)$ $\perp C_4 \perp B_4^2 b$	$K_{10}^3(12)$ $\perp C_4 \perp B_4^2 a$	$K_{14}^3(18) \perp B_4^2$

Diagramm Nr.	5	6	7	8
Isometriertyp	$K_8^3(9)$ $\perp 2.C_4 \perp 2.I$	$K_{12}^3(15)b$ $\perp C_4 \perp 2.I$	$K_{12}^3(15)a$ $\perp C_4 \perp 2.I$	$K_{16}^3(21) \perp 2.I$

Zur Unterscheidung der Typ-Paare {2, 3} und {6, 7} betrachte man in der Eckenmenge mit 3 Singularitäten diejenige Singularität, die mit der Rechteckkante in einer Zeile liegt. In den Fällen 2 und 6 ist sie mit einem regulären Paar verbunden, im Fall 3 mit einer regulären Zeile und im Fall 7 ist sie isoliert.

Sämtliche Typen sind eigentlich.

**Korollar.** Die durch Diagramm 2 und 3 bestimmten  $D$ -Graphen mit isometrischen Komponenten  $K_{10}^3(12) \perp C_4 \perp B_4^2$  sind nicht isometrisch.

*Beweis.* Die Nicht-Isometrie der beiden  $D$ -Graphen folgt aus Satz 7.12. Die Isometrie der Komponenten folgt aus Liste II des Klassifikationssatzes in Abschnitt 6.2, da die vorkommenden Komponententypen je nur eine Isometrieklasse haben.  $\square$

### 7.5.3 $D$ -Graphen mit 6 Singularitäten

Hier enthalten  $a$  und  $c$  je 3 Singularitäten, die zugehörigen Diagramme sind vom Typ III, enthalten also in jeder Spalte ein reguläres Paar und eine Singularität.

#### Normierung von $\partial c$

Wie im vorigen Abschnitt kann das zu  $c$  gehörende Diagramm durch isometrieerhaltende Transformationen auf folgende Form gebracht werden:

$$\partial c = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad (7.27)$$

#### Normierung von $\partial a$

Das Diagramm von  $c$  hat die gleichen Invarianzen wie im vorigen Abschnitt, daher führen auch hier Diagramme von  $a$ , die durch Vertauschung der unteren beiden Elemente von Spalten und durch zyklische Vertauschung von Spalten auseinander hervorgehen, zu isometrischen  $D$ -Graphen, außerdem natürlich Umnummerierungen der Zeilen von  $a$ .

Daher kann o. E. angenommen werden, dass jedes reguläre Paar entweder in der 1. und 2. Zeile oder in der 2. und 3. Zeile einer Spalte positioniert sind, und dass zunächst (in den niedrigen Spaltennummern) die in der 2. und 3. Zeile, danach erst die in der 1. und 2. Zeile positionierten auftreten.

Durch Umnummerierung der Zeilen von  $a$  wird erreicht, dass das reguläre Paar  $i$  in der  $i$ -ten Spalte von  $\partial a$  steht.

Für die Positionierung der Singularitäten ergibt sich folgende Einschränkung:

Die dritte Spalte enthält in  $\partial a$  wie in  $\partial c$  2-mal die Ziffer 3. Nach Lemma 7.1(ii) steht die dritte Ziffer 3, also die Singularität 3, in  $\partial a$  und  $\partial c$  an verschiedenen Positionen. D. h. hier: Die Singularität 3 kann in  $\partial a$  nicht links oben stehen. Steht dort eine Singularität, so muss es 2 sein.

Somit gibt es folgende Möglichkeiten für  $\partial a$ :

$\begin{array}{ c c c } \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 2 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & \textbf{1} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 2 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & \textbf{1} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & \textbf{1} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$
---	--	--	--	---

#### Bestimmung der kleinen Komponenten

- Im 1. Diagramm gibt es 3 Matchings von regulären Paaren und 3 Matchings von Singularitäten. Der  $D$ -Graph zerfällt vollständig in kleine Komponenten:  $3.C_4 \perp 6.I.$

- Im 2. Diagramm gibt es 2 Matchings von regulären Paaren, 2 Matchings von Singularitäten und ein Matching von Sonderspalten. Der  $D$ -Graph zerfällt vollständig in kleine Komponenten:  $K_6^2(6) \perp 2.C_4 \perp 4.I$ .
- Im 3. Diagramm gibt es ein Matching von regulären Paaren, ein Matching von Singularitäten und 2 Matchings von Sonderspalten. Der  $D$ -Graph zerfällt vollständig in kleine Komponenten:  $2.K_6^2(6) \perp C_4 \perp 2.I$ .
- Im 4. und 5. Diagramm gibt es 3 Matchings von Sonderspalten, die nach Lemma 7.9 jeweils eine Komponente des Typs  $K_6^2(6)$  repräsentieren. Der  $D$ -Graph zerfällt vollständig in kleine Komponenten:  $3.K_6^2(6)$ .

Zur Unterscheidung hilft die Feststellung, dass die Singularität  $i$  von  $\partial a$  und  $i$  von  $\partial c$  jeweils in derselben Spalte des  $D$ -Graphen liegen müssen, da die regulären Paare  $i$  von  $\partial a$  und  $i$  von  $\partial c$  in der gleichen Spalte des Regulativs stehen. Somit liegen die zwei Singularitäten jeder Komponente im 4. Diagramm in verschiedenen Spalten, im 5. Diagramm in gleichen Spalten des  $D$ -Graphen.

### Zuordnung zu Isometriertypen

Somit sind alle möglichen Diagramme von  $a$  durch Transformationen, die den Isometriertyp des  $D$ -Graphen erhalten, auf einen von 5 Fällen zurückgeführt. Somit gibt es hier maximal 5 Isometriertypen von  $D$ -Graphen.

Die im Anhang befindliche Auflistung enthält 5  $D$ -Graphen mit 6 Singularitäten. Durch Überprüfung der oben angegebenen Charakterisierungen stellt sich heraus, dass für jeden Vertreter nur ein Fall in Frage kommt. Der folgende Satz stellt die Zuordnung her. Die Unterscheidung der eigentlichen und uneigentlichen Typen folgt nach Satz 7.4.

**Satz 7.13.** *Es gibt 5 Isometriertypen konkreter  $D$ -Graphen mit 6 Singularitäten. Abgesehen von dem Typ-Paar {4, 5} sind sie durch die Komponentenzerlegung eindeutig identifiziert gemäß folgender Tabelle:*

Diagramm Nr.	1	2	3	4	5
Isometriertyp	$3.C_4 \perp 6.I$	$K_6^2(6)$ $\perp 2.C_4 \perp 4.I$	$2.K_6^2(6)$ $\perp C_4 \perp 2.I$	$3.K_6^2(6) a$	$3.K_6^2(6) b$

Das Typ-Paar {4, 5} unterscheidet sich durch die Lage der Singularitäten jeder Komponente  $K_6^2(6)$ : Im 4. Fall liegen diese stets in verschiedenen, im 5. Fall stets in gleichen Spalten des  $D$ -Graphen.

Die ersten 4 Fälle sind eigentlich, der letzte ist uneigentlich.

## 7.6 Charakteristik und Schaltprozesse

Mit den Methoden dieses Kapitels können die Auswirkungen der in Abschnitt 5.3 eingeführten Schaltprozesse auf die Charakteristik geklärt werden.

Im Setting von Abschnitt 7.1 sei  $K$  eine reguläre Komponente des  $D$ -Graphen mit Eckenmengen  $a, c$  und Regulativ  $b$  auf dem Vertikalstreifen  $V = (a \ b \ c)$  (hier horizontal notiert).  $V' = (a' \ b \ c')$  bezeichne den durch Schaltung in der Komponente  $K$  resultierenden Vertikalstreifen und  $\chi_K := |\chi(V') - \chi(V)|$  die Änderung der Charakteristik.

In den folgenden Ausführungen bis Lemma 7.13 wird beispielhaft der Block  $a$  betrachtet. Sie gelten analog für den Block  $c$ .

Die in Abschnitt 7.1 eingeführte Orientierungsmatrix  $OM(a)$  hat den  $(i, j)$ -Eintrag  $+1$  oder  $-1$ , wenn die Regulativziffer  $b_{ij}$  in der Spalte  $a^{j+1}$  bzw.  $a^{j-1}$  enthalten ist. Bezeichne  $\varepsilon_j(a)$  die Anzahl der  $-1$ -Einträge in der  $j$ -ten Spalte von  $OM(a)$ , also die Anzahl der  $b_{ij}, i \in I$ , die in  $a^{j-1}$  liegen.

**Lemma 7.11.**  $\chi(V) = \varepsilon_j(a)$  für beliebiges  $j \in I$ .

*Beweis.* Nach Abschnitt 2.6 ist  $\chi(V) = \#(a^{j-1} \cap b^j)$  für beliebiges  $j$ . Das ist genau die Anzahl der  $b_{ij}, i \in I$ , die in  $a^{j-1}$  liegen, also gleich  $\varepsilon_j(a)$ .  $\square$

**Lemma 7.12.** Ist  $a'$  der aus  $a$  bei Schaltung in  $K$  entstehende Block, so hat  $OM(a')$  an den zu  $K$  gehörigen Positionen den entgegengesetzten, an den übrigen Positionen den gleichen Eintrag wie  $OM(a)$ .

*Beweis.* Die Schaltung in  $K$  kann folgendermaßen beschrieben werden: Jede zu  $K$  gehörige Ziffer in  $a$  wandert innerhalb ihrer Zeile auf die andere unter Ausschluss ihrer Regulativspalte mögliche Position. Gehört etwa die Regulativziffer  $b_{ij}$  zu  $K$ , so wandert sie von  $a^{j-1}$  nach  $a^{j+1}$  bzw. umgekehrt. Der Eintrag in  $OM(a)$  wechselt in  $OM(a')$  also von  $-1$  nach  $+1$  bzw. umgekehrt. Die nicht zu  $K$  gehörigen Ziffern bleiben an ihren Positionen stehen, der  $OM(a')$ -Eintrag ist gleich dem  $OM(a)$ -Eintrag.  $\square$

$K$  setzt sich zusammen aus regulären Zeilen und regulären Paaren. Nach den Überlegungen in Abschnitt 7.1, insbesondere nach Satz 7.2 gilt:

- (†) 2 Ziffern, die in  $a$  ein reguläres Paar bilden, stehen in  $\partial a$  in derselben Spalte und sind in  $OM(a)$  mit einer  $-1$  und einer  $+1$  belegt.
- (‡) 3 Ziffern, die in  $a$  eine reguläre Zeile bilden, verteilen sich in  $\partial a$  auf alle 3 Spalten und sind in  $OM(a)$  gleich belegt: alle mit  $-1$  oder alle mit  $+1$ .

**Lemma 7.13.** Besteht  $K$  in  $\partial a$  aus  $l$  regulären Paaren sowie  $m$  mit  $-1$  und  $n$  mit  $+1$  belegten regulären Zeilen, so ist  $\chi_K = |n - m|$ .

*Beweis.* Nach Lemma 7.11 ist  $\chi_K = |\chi(V') - \chi(V)| = |\varepsilon_j(a') - \varepsilon_j(a)|$  für beliebiges  $j$ . Die Spalte  $j$  von  $\partial a$  enthält möglicherweise ein reguläres Paar von  $K$  und schneidet jede der regulären Zeilen von  $K$  in genau einer Position. Bei der Schaltung in  $K$  kehren sich nach Lemma 7.12 die Belegungen dieser Positionen um. D. h. möglicherweise tauschen nach ( $\dagger$ ) 2 Positionen ihre Belegungen  $-1$  und  $+1$  aus, ferner wechseln  $m$  Positionen von  $-1$  nach  $+1$  und  $n$  Positionen von  $+1$  nach  $-1$ . Somit ist  $\varepsilon_j(a') - \varepsilon_j(a) = n - m$ , woraus die Behauptung folgt.  $\square$

**Lemma 7.14.** *Besteht  $K$  in  $\partial a$  und in  $\partial c$  jeweils aus  $m$  regulären Zeilen und keinen regulären Paaren, so ist  $\chi_K = m$ .*

*Beweis.* Seien  $z_1$  und  $z_2$  2 reguläre Zeilen von  $K$  in  $\partial a$ . Da sie zur selben Komponente gehören, aber in  $\partial a$  nicht verbunden sind, müssen sie in  $\partial c$  verbunden sein, etwa durch die reguläre Zeile  $z$ . Dann existiert also eine Position  $k \in z_1 \cap z$  und eine Position  $l \in z_2 \cap z$ . Nach Satz 7.2(ii) ist  $z$  in  $OM(c)$  konstant belegt, insbesondere sind  $k$  und  $l$  gleich belegt. Nach (7.3) sind  $k$  und  $l$  auch in  $OM(a)$  gleich belegt, damit auch  $z_1$  und  $z_2$ .

Insgesamt folgt, dass alle  $m$  regulären Zeilen von  $K$  in  $\partial a$  gleich belegt sind. Nach Lemma 7.13 ist daher  $\chi_K = |m - 0| = m$ .  $\square$

**Satz 7.14.** *Mit den Anzahlen  $m_a$  und  $m_c$  der von  $K$  in  $\partial a$  bzw. in  $\partial c$  enthaltenen regulären Zeilen gilt:*

$$\chi_K = \min\{m_a, m_c\}.$$

*Beweis.* Ist  $m_a = 0$ , so besteht  $K$  in  $\partial a$  nur aus regulären Paaren. Nach Lemma 7.13 ist dann  $\chi_K = 0$ .  $\chi_K = \min\{m_a, m_c\}$  ist erfüllt. Analog folgt dies für  $m_c = 0$ .

Ist  $m_a = 1$ , so besteht  $K$  in  $\partial a$  aus einer regulären Zeile und evtl. regulären Paaren. Nach Lemma 7.13 ist dann  $\chi_K = 1$ . Nach dem bereits Gezeigten folgt  $m_c \neq 0$ .  $\chi_K = \min\{m_a, m_c\}$  ist erfüllt.

Ist  $m_a = 2$ , so besteht  $K$  in  $\partial a$  aus 2 regulären Zeilen. Die dritte Zeile von  $\partial a$  ist dann auch regulär,  $\partial a$  enthält keine regulären Paare. Somit belegt  $K$  6 Positionen, die sich in  $\partial c$  entweder aus 3 regulären Paaren oder aus 2 regulären Zeilen zusammensetzen müssen. Im ersten Fall ist  $m_c = 0$  und nach Lemma 7.13  $\chi_K = 0$ . Im zweiten Fall ist  $m_c = 2$  und nach Lemma 7.14  $\chi_K = 2$ . In beiden Fällen ist  $\chi_K = \min\{m_a, m_c\}$  erfüllt.

Ist  $m_a = 3$ , so besteht  $K$  in  $\partial a$  aus 3 regulären Zeilen, belegt  $\partial a$  also komplett. Dann muss  $K$  auch  $\partial c$  komplett belegen, auch  $\partial c$  besteht aus 3 regulären Zeilen. Demnach ist  $m_c = 3$  und nach Lemma 7.14  $\chi_K = 3$ .  $\chi_K = \min\{m_a, m_c\}$  ist erfüllt.  $\square$

**Korollar 1.** Für die möglichen regulären Komponententypen hat  $\chi_K$  folgende Werte:

**Tabelle 7.2:** Charakteristikänderung bei Schaltung

Typ von K	$\chi_K$
$R_4(4) = C_4$	0
$R_6(9) = T_6$	1
$R_{10}(17)$	1
$R_{12}(21)$	0
$R_{12}(22)$	2
$R_{14}(24)$	1
$R_{18}(33)$	3
$R_{18}(34)$	3
$R_{18}(36)$	3

*Beweis.*  $\chi_K$  wird nach Satz 7.14 bestimmt, wobei  $m_a$  und  $m_c$  den Graphiken der D-Graph-Typen im Anhang entnommen werden.  $\square$

**Korollar 2.**

- (i) Ist ein regulärer D-Graph zusammenhängend, so bewirkt die Schaltung einen Wechsel der Charakteristik zwischen 0 und 3.
- (ii) Ist ein regulärer D-Graph nicht zusammenhängend, so kann durch Schaltungen jede Charakteristik 0, 1, 2, 3 erreicht werden.
- (iii) Singuläre D-Graphen gibt es nur bei Charakteristik 1 oder 2. Sie enthalten also keine reguläre Komponente K mit  $\chi_K \geq 2$  und maximal eine reguläre Komponente K mit  $\chi_K = 1$ , die, wenn vorhanden, eine Schaltung zwischen Charakteristik 1 und 2 bewirkt.

*Beweis.* Zu (i): Zusammenhängende reguläre D-Graph-Typen sind nach Korollar 1 nur  $R_{18}(33)$ ,  $R_{18}(34)$ ,  $R_{18}(36)$ , in denen die Schaltung nach Satz 7.14 eine Charakteristikänderung um 3, also von 0 nach 3 oder von 3 nach 0 bewirkt.

Zu (ii): Nicht zusammenhängende reguläre D-Graph-Typen sind nur  $R_{12}(22) \perp R_6(9)$  und  $3.R_6(9)$ . Die nach Korollar 1 durch Schaltung bewirkbaren Charakteristikänderungen von 2, 1 bzw. 1, 1, 1 ermöglichen bei geeigneter Kombination, jede Charakteristik 0, 1, 2, 3 zu erreichen.

Zu (iii): Angenommen, ein singulärer D-Graph läge auf einem Streifen der Charakteristik 0 oder 3. Eine Singularität etwa in  $a$  hätte zur Folge  $\#(a_i \cap b^j) = 2$  für geeignete  $i, j$ . Charakteristik 0 oder 3 hieße, dass  $b^j$  mit einem  $a^k$  zusammenfiele. Es ist aber  $\#(a_i \cap a^k) = 1$  im Widerspruch zu  $\#(a_i \cap b^j) = 2$ .  $\square$

# 8 Nachbetrachtungen

## 8.1 Algebraische Interpretationen

### Generische Erzeugung

Viele bisherige Begriffe und Ergebnisse weisen eine formale Ähnlichkeit mit algebraischen Bildungen auf und legen eine algebraische Deutung nahe.

Das Konzept von generischen Objekten mit ihren Spezialisierungen zum Beispiel hat algebraisch-geometrische Analoga. Unübersehbar in Substanz und Terminologie ist die formale Verwandtschaft mit der klassischen Algebraischen Geometrie aus der Zeit, als man noch generische Punkte spezialisierte. Für Sudokus sind die generischen Blockschemata mit ihren Spezialisierungen der analoge und richtige Begriff: Sie erzeugen Scharen von Fixesudokus, und sogar *alle* solche, wie sich herausgestellt hat. Die Verwendung der Bezeichnung „Schema“ dagegen erfolgte eher zufällig.

Es bestehen weitere Gründe, die Ausführungen der Kapitel 2–4 aus *geometrischer Sicht* zu betrachten. Mit der Entdeckung der generischen Blockschemata wird einer ganzen Schar von Sudokus ein gewisses „Koordinatensystem“ aufgetragen, das in der Festlegung der Initialblöcke  $a, b, c$  besteht. Übergang zu anderen Initialblöcken, also initiale Äquivalenz, ist eine Art „Koordinatenwechsel“, der die mathematischen Objekte, die Sudokus, nicht beeinträchtigt. Mit einem solchen Initialwechsel werden die „Koordinaten“ umgerechnet.

Der *Rangbegriff* ist eine Art von Dimension, der den Blockschemata wie den Sudokus zukommt. Alle Fixesudokus haben  $\text{Rang} \leq 3$ , somit war diese Beschränkung auch für die erzeugenden Blockschemata von Beginn an sinnvoll. Diese fungieren als einbettende Räume der von ihnen erzeugten Sudokumengen.

Zur Lösung des *Parametrisierungsproblems* spielt die Blockdiagonale die entscheidende Rolle: Die Praesudokus auf dieser machen den Parameterraum  $Y$  von  $X$  aus.  $Y$  ist ein punktierter Raum mit der speziellen Blockdiagonalen  $e = e/e/e$  mit lauter Grundblöcken  $e$  als ausgezeichnetem Punkt. Es stellte sich heraus, dass auf diesem „Punkt“ die interessantesten individuellen  $G$ -Fixsudokus sitzen, 64 an der Zahl, darunter die 4 Superfixe. Zu den vielen bisher bekannten Eigenschaften dieser Individuen treten weitere, mehr struktureller Art hinzu, die in den Kapiteln 3–6 entwickelt wurden.

### Kombinatorische Kurven

Praesudokus auf 3-rangigen Streifenfiguren zeigen eine formale Verwandtschaft mit den Kurven der Algebra.

Eine *projektive algebraische Kurve* wird beschrieben durch eine homogene polynomische Gleichung in 3 komplexen Variablen (hier in spezieller Form)

$$ax^m + by^m + cz^m = 0 \quad \text{mit } m \in N, a, b, c \in C. \quad (8.1)$$

Mit  $(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$  ist auch  $(kx_0, ky_0, kz_0)$  mit Skalaren  $k \neq 0$  aus  $C$  eine Lösung von (7.1). Nichttriviale Lösungen definieren den gleichen komplexen *projektiven Kurvenpunkt*, wenn sie proportional sind mit einem Skalar  $0 \neq k$  aus  $C$ . Die Multiplikationsgruppe  $C^\times$  operiert also als Skalare auf der Lösungsmenge.

Das kombinatorische Pendant ist eine Horizontal- oder Vertikalfigur vom Rang 3

$$H : \lambda a \quad \mu b \quad \nu c \quad \text{mit } \lambda, \mu, \nu \in \Gamma_0. \quad (8.2)$$

Dem Prädikat „Lösung der Gleichung“ entspricht hier das Prädikat „Praesudoku auf  $H$ “. Das Analogon zu den Skalaren sind die Operatoren aus  $Z : Z$  operiert auf der Lösungsmenge Praes  $H$ .

Praes  $H$  wird zu einer *K-projektiven K-Kurve* durch die analoge Definition: Praesudokus definieren den gleichen *projektiven K-Kurvenpunkt*, wenn sie unter  $Z$  konjugiert sind.  $K$  steht hier für „kombinatorisch“.

Die Anzahl # Praes  $H$  ist bekannt nach Lemma 3.5, sie ist für alle 3-rangigen Horizontal- und Vertikalstreifen die gleiche. Zur Anzahl der projektiven Punkte ist durch  $9!$  zu dividieren.

Setzt man in (8.1)  $z = 1$ , so erhält man eine inhomogene Gleichung, und so eine *affine Kurve*. Setzt man in (8.2)  $\lambda a$  gleich dem Grundblock  $e$ , so erhält man eine *affine K-Kurve*.

Der Sudokuraum  $X$  ist selbst ein *K-projektiver Raum* mit  $Z$  als Skalaren: Sudokus bestimmen den gleichen *projektiven Punkt*, wenn sie durch Anwendung von Ziffernoperatoren auseinander hervorgehen. Dies steht in Analogie zum n-dimensionalen projektiven Raum  $P^n$ : 2 Vektoren aus  $C^{n+1} \setminus \{0\}$  definieren den gleichen projektiven Punkt in  $P^n$ , wenn sie unter  $C^\times$  proportional sind.

In Kapitel 2 wurden die Fixsudokus vom Typ  $\underline{\sigma} = \{\sigma, \sigma^\circ\}$  als Objekte erkannt, die von Praesudokus auf gewissen Horizontal- und Vertikalfiguren abhängen. Die Fixe vom Typ  $\underline{\sigma}' = \{\sigma', \sigma^{-1}\sigma^\circ\}$  werden durch Praesudokus auf gewissen Winkelfiguren geprägt. Die zugehörigen Sudokus sind dann „isolierte Punkte“ auf dem Sudokuraum, die Superfixe und die Sondersudokus 1. Art gehören dazu.

## Cohomologie

Aus algebraischer Sicht überraschend taucht als Bedingung für Fixoperatoren eine nichtkommutative Norm-1-Relation auf und in Folge eine  $(-1)$ -dimensionale Cohomologiemenge, wie man sie aus der Algebraischen Zahlentheorie kennt.

Diese Relation hat die Form

$$N_\sigma g = g^{\sigma^2} g^\sigma g = 1,$$

wobei  $g$  ein Element der lokalen Sudokugruppe  $T = T_1 \times T_2 \times T_3$  mit horizontaler Wirkung ist. Analoges gilt im dualen Fall  $T^\circ$  mit  $\sigma^\circ$ . Die Norm-1-Menge

$$T_\sigma = \{g \in T : N_\sigma g = 1\}$$

ist die Menge der Cozyklen.

Die Gruppe  $T$  operiert auf der Menge  $T_\sigma$  wie folgt: Jedes  $w \in T$  bewirkt auf  $g \in T_\sigma$  durch

$$w^{-\sigma} gw$$

eine Bijektion auf  $T_\sigma$ . Da eine Gruppenoperation vorliegt, ist die Relation

$$g \sim g' \iff g' = w^{-\sigma} gw \quad \text{mit geeignetem } w \in T \quad (8.3)$$

eine Äquivalenzrelation:  $g$  ist cohomolog zu  $g'$ . Die Äquivalenzklassen bilden die  $(-1)$ -dimensionale Cohomologiemenge zu  $\sigma$ :

$$H^{-1}([\sigma]|T) = T_\sigma / \sim .$$

Es gilt der

**Satz 8.1.**

$$H^{-1}([\sigma]|T) = 1$$

Alle Cozyklen  $g \in T_\sigma$  zerfallen:  $g = \delta w = w^{-\sigma} w$  für geeignetes  $w$  mit dem Corand-operator  $\delta$ .

Dem allgemeinen Element  $g \in T$  entspricht ein Tripel  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$  aus  $V$  von Elementen  $g_i \in S_3$ . Der Normbedingung entspricht die Beziehung

$$g_3 g_2 g_1 = 1.$$

Also entsprechen den Cozyklen aus  $T_\sigma$  die  $S$ -Tripel aus  $V$ . Der Äquivalenz (8.3) entspricht die Äquivalenz auf  $V$

$$\mathbf{g} \sim \mathbf{g}' \iff g'_j = w_{j+1}^{-1} g_j w_j \quad \text{für alle } j. \quad (8.3')$$

Die beiden Cohomologiemengen sind isomorph, der Corandoperator ist

$$\delta w = (w_{j+1}^{-1} w_j | j \bmod 3).$$

Der Zerfall läuft in beiden Settings auf dasselbe hinaus.

Es zeigt sich, dass es 14 wesentlich verschiedene  $S$ -Tripel gibt, die aber sämtlich zerfallen. In dieser Form wird der Satz bewiesen.

Da die  $S$ -Tripel für die Fixsudokus keine wesentliche Rolle spielen, vor allem bei der Anzahlbestimmung, begnügen wir uns mit der Erwähnung des Sachverhalts als kleines Kuriosum.

Im Hinblick auf die algebraische Auffassung der  $Z$ -Operatoren als Skalare ist die Allgemeine Fixgleichung

$$\tau w A = \alpha A \quad \text{mit } \alpha \in Z \quad (8.4)$$

nichts anderes als ein

### Kombinatorisches Eigenwertproblem

Dabei ist  $\alpha \in Z$  für eine Sudokulösung  $A$  der *Eigenwert* zum Operator  $\tau w$ , der als Element in  $S_9$  aufgefasst wird. Der *Eigenraum* besteht dann aus allen Fixsudokus von  $\tau w$  zum Eigenwert  $\alpha$ , in Analogie zum linearen Fall.

Die Sudokulösungen zum Eigenwert 1 sind gerade die *G-Fixe*, die klassifiziert wurden und deren Anzahl bekannt ist. Die zugehörigen Leitoperatoren haben sämtlich die Ordnung 3. Die Eigenräume zum Leitoperator  $\tau = 1$  sind ebenfalls übersehbar.

Die Phänomene, die im Sudokufall auftreten, sind vollständig durch die Sätze 4.15 und 4.16 gelöst und können an den Tabellen 4.9–4.11 abgelesen werden. Man stellt zunächst fest, dass unter den  $G^*$ -Fixoperatoren  $\varphi$  alle 9 Repräsentanten der Konjugationsklassen von  $[H^*, t]$  als Leitoperatoren auftreten. Es ist zudem offenkundig, dass wegen der enormen Vielfalt der Fixsituationen es keinen Sinn macht, das Problem numerisch behandeln zu wollen. Das angemessene Merkmal ist der Permutationstyp der Operatoren des Tripels  $(\tau, w, \alpha)$ . Dabei spielen die Komponenten  $g, h^\circ$  der Operatormatrix  $w = (g_i, h_j^\circ)$  eine besondere Rolle: Die  $G^*$ -Fixoperatoren  $\tau gh^\circ$  zu Leitoperatoren  $\tau$  werden durch Bedingungen an den Typ der lokalen Begleiter  $g, h^\circ$  und die möglichen Typen der Eigenwerte  $\alpha$  beschrieben.

Zusammenfassend lernt man aus Tabelle 4.9:

In den meisten Fällen haben die  $G^*$ -Fixoperatoren genau einen Typ von Eigenwert  $\alpha$ , wobei mehrere Fixoperatoren den gleichen Eigenwert-Typ haben können. In 4 Fällen jedoch treten zu festem Fixoperator je 4 Eigenwert-Typen auf, und zwar je 2-mal das gleiche Set:

$$\begin{array}{ll} 1 & (2, 2, 2) \\ (3) & \text{und} \\ (3, 3) & (3, 2, 2, 2) \\ (3, 3, 3) & (6) \\ & (6, 3) \end{array}$$

Für jeden Typ von  $G^*$ -Fixoperatoren wurden die Längen der Fixmengen durch *Russel-Jarvis* bestimmt. Erst durch die Erkenntnis, dass in allen Fällen bis auf die 4 Ausnahmen nur *ein* Eigenwert-Typ auftritt, kann man von Eigenräumen sprechen.

In den 4 Ausnahmefällen wurden in Abschnitt 4.5 zugehörige Fixsudokus konstruiert.

### Transzendenz

Zur Aufteilung der Sudokus in *algebraische* und *transzendente* in Abschnitt 6.8 wird man an die Theorie der komplexen Zahlen erinnert. Da unterscheidet man algebraische und transzendenten Zahlen, deren Theorie in Struktur und Methode nicht unterschiedlicher sein können. Schon in der Anzahl zeigt sich die Diskrepanz: die einen sind abzählbar, die anderen nicht.

Die Theorie der transzendenten Zahlen hat eine jahrhundertelange Geschichte. Der Begriff wurde schon zu Anfang des 18. Jahrhunderts von Leibnitz genannt, aber die Existenz solcher Zahlen wurde erst Mitte des 19. Jahrhunderts durch Liouville bewiesen.

Jahrzehnte später konnte die Transzendenz der beiden Grundkonstanten der Analysis, die Euler-Zahl  $e$  und die Kreiszahl  $\pi$ , durch Hermite und Lindemann nachgewiesen werden. Die Erkenntnis, dass sich algebraische Zahlen schlechter durch rationale Zahlen approximieren lassen als transzendenten, führte zu konstruktiven Kriterien, die beiden Klassen zu unterscheiden. Aber die Euler-Mascheroni-Konstante, die die Abweichung der harmonischen Reihe vom Logarithmus misst, wurde bisher nicht einmal als irrational, geschweige denn als transzendent erkannt. Theorie und Historie der transzendenten Zahlen kann in dem schönen Buch von *P. Bundschuh* [2] nachgelesen werden.

Die Analogie zu den Sudokus ist frappant, wenngleich an Substanz und Tiefe nicht vergleichbar. Über die  $G^*$ -Fixe, also die algebraischen Sudokus weiß man nach Kapitel 4 recht gut Bescheid, über die transzendenten nur eher wenig. Man kennt ein hinreichendes Kriterium, um Sudokus als transzendent zu erkennen. Einige Individuen sind als transzendent erkannt, z. B.  $Z$ ,  $Y$ ,  $Y'$  (Abschnitt 6.8). Auch hier liegen die Anzahlen um Größenordnungen auseinander. Ein Anzahlvergleich der beiden Sudokuarten wird durch folgende Abschätzungen deutlich:

$$\#X_{\text{alg}} < 9! \cdot 950 \cdot 10^9$$

und

$$\#X_{\text{tra}} > 9! \cdot 18\,382 \cdot 10^{12} > 9! \cdot 18 \cdot 10^{15}.$$

Der Anteil der algebraischen Sudokus beträgt also maximal 0,052 Promille.

Die Abschätzungen werden im Anhang in verschärfter Form ausgeführt. Die Anzahl  $\# X_{\text{tra}}$  ist durch  $n^* = \#G^*$  teilbar, da  $G^*$  fixpunktfrei operiert.

## 8.2 Nachbetrachtungen und offene Probleme

In der bisher vorliegenden Literatur ist ein Konzept besonders hervorzuheben, der *Sudoku-Graph*. Dieser hat im  $9 \times 9$ -Fall 81 Ecken, deren Nachbarschaften unmittelbar auf den Sudokueigenschaften beruhen. Dieser Graph, der nichts mit unserem Dominographen zutun hat, wird als Cayley-Graph erkannt mit dem schönen Ergebnis ganzzahliger Eigenwerte (im linearen Sinn). Siehe dazu etwa [9].

Das Konzept dieses Sudokugraphen hat – nach bisheriger Kenntnis – keinerlei Auswirkungen auf Sichtweise und Ergebnisse dieses Buches.

Es gibt 2 weitere nennenswerte Beiträge zur Sudokutheorie, die die Thematik dieses Buches unmittelbar betreffen und auch angewendet wurden. *Felgenhauer – Jarvis* [4] haben die Anzahl aller  $9 \times 9$ -Sudokus bestimmt, und *Russel – Jarvis* [14] haben

die Anzahl aller „essentially different“ Sudokus berechnet, also die Anzahl aller  $G^*$ -Bahnen in unserer Terminologie. Dabei wird die Sudokugruppe  $G_0$  als Produkt von 2 Kranzprodukten der  $S_3$  aufgefasst und die großen Computerpakete der Gruppentheorie wie GAP angewandt. Dieses Resultat fließt in die Ergebnisse von Kapitel 4 ein.

Der vorliegende Ansatz ist elementar, aber die Zielsetzung ist erweitert. Anzahlen spielen zwar auch im Text eine wichtige Rolle, aber ebenso wurde versucht, die Sudokus strukturell zu erfassen. Die Entdeckung der Fixsudokus ließ dann teilweise individuelle Züge erkennen und führte auf eine Beschreibung durch Blockoperatoren anstelle der rein numerischen Darstellung der Sudokus. Zu weiterer struktureller Einsicht gelangt man mit dem Konzept der  $D$ -Graphen. Ihre Theorie ist mit der Klassifikation im Wesentlichen abgeschlossen, soweit es die konkreten  $D$ -Graphen betrifft. Das merkwürdige Phänomen, die Diskrepanz zwischen Isometrie und komponentenweiser Isometrie, findet in Kapitel 7 im Beweis des Hauptsatzes seine Aufklärung. Es gibt genau 2 Ausnahmefälle, die in Kapitel 6 und 7 explizit genannt werden.

Und die Entstehung von Clans führt zur Gründung eines Verbundes, in denen sich hinreichend reguläre Sudokus einer Gefolgschaft von Gleichartigen erfreuen können.

Im Verlauf der Untersuchungen boten sich eine Reihe von Merkmalen an, die einem Sudoku zukommen oder nicht. Dabei drängt sich der Eindruck auf, dass die durch Merkmale bestimmten Eigenschaften kaum kommensurabel sind. So sind die Superfixe total-regulär, aber die Umkehrung gilt nicht: Etwa das total-reguläre Verschiebungssudoku ist nur einfach-fix. Die Neutralen sind nicht alle singulär, und die singulären nicht alle neutral; denn das Clansudoku  $J$  zu  $C^\circ$  ist neutral und total-regulär. Ein Rechteckeffekt impliziert nach Satz 6.3 hohe Singularität, aber das Sondersudoku  $S_2$  ist total-singulär, hat aber keine Rechteckeffekte.

Schon am Anfang der Beschäftigung mit Sudokus stellte sich der Eindruck ein, dass die  $G$ -Fixsudokus sich von den anderen durch ein „mildes“, regelmäßiges Verhalten auszeichnen, was selbst dann der Fall ist, wenn sie total-singulär werden. Dies wird auch durch die Stammanalyse bestätigt. Was die große Mehrheit der Sudokus betrifft, zeigt sich ein anderes, „wirres“ Bild. In den Tabellen 6.1 und 6.2 werden die Dominographen nach steigender Anzahl von 0 bis 6 ihrer Singularitäten klassifiziert. Für ein „wildes“ Verhalten der Sudokus sind die Rechteckeffekte maßgeblich, was sich in der Kompliziertheit ihrer Stämme widerspiegelt. Die Indizes als Zahlinvarianten messen die Anteile von regulären und singulären Bestandteilen. Eine wie auch immer geartete strukturelle Hierarchie der Sudokus ist nicht erkennbar.

Im Beweis des Klassifikationssatzes in Kapitel 7 gelingt eine „fast klassische“ Beschreibung der Typen von Zweigen der Sudokus durch gewisse Graphenpaare, die *Diagramme*. Keine Computer-Methoden sind erforderlich.

## Offene Probleme

- (1) *Lokal-Global-Problem*
  - (a) Gibt es bestimmte Bindungen zwischen den Zweigen eines Sudokus? Sind also gewisse Kombinationen der 18  $D$ -Graphen prinzipiell ausgeschlossen?  
Ein Indiz dafür ist der Zusammenhang der 3 Zweige auf einem Sudoku-Streifen (siehe Kapitel 6).
  - (b) Schaltungen können orthogonale Wirkungen haben. Das Clansudoku  $J$  entsteht aus dem Superfixen  $C^\circ$  durch eine Einfachschaltung im unteren Horizontalstreifen. Diese bewirkt in einem vertikalen Zweig einen Übergang von  $3 \cdot T_6$  zu einem zusammenhängenden Zweig  $R_{18}$ . Können Schaltungen neue Singularitäten schaffen?
  - (c) Alle Zweige der Superfixe haben nur reguläre 6er-Tonnen  $T_6$  als Komponenten, und alle Zweige des Sondersudokus 1. Art  $S_2$  haben nur singuläre Komponenten der Art  $K_6^2(6)$ . Gibt es weitere Fälle homogenen Verhaltens in allen Zweigen?
- (2) *Der Rang*  
Die  $G$ -fixen Sudokus haben Rang 3 oder 1. Gibt es Sudokus vom Rang 2 oder von höherem Rang  $> 3$ ?
- (3) *Transzendentenz*  
In Abschnitt 6.8 wird ein hinreichendes Kriterium für Transzendentenz angegeben. Gibt es auch ein notwendiges?  
Die transzententen Sudokus machen den überwältigenden Anteil aller Sudokus aus, über 999 Promille. Kann man auf eine strukturelle Erfassung dieser Sudokuart hoffen, oder muss man sich mit der Erkennung einzelner Exemplare begnügen?
- (4) *Konjugiertheit*  
Kann man 2 numerischen Sudokus ansehen, ob sie  $G$ -konjugiert sind?
- (5) *Diagonale*  
Es ist bekannt, dass es Sudokus gibt, die auch in beiden Diagonalen die Sudokubedingungen erfüllen. Unter den Sondersudokus kommen solche Exemplare jedenfalls nicht vor. Wie passen sie ins bisherige Bild? Kann man sie irgendwie klassifizieren, in welcher Größenordnung liegt ihre Häufigkeit? Zeigen ihre Zweige globale Bindungen?
- (6) *Verallgemeinerung auf höhere Reihenzahlen*  
Der vorliegenden Theorie liegt die symmetrische Gruppe  $S_3$  zugrunde. Im 16er-Fall ist die  $S_4$  jedenfalls noch auflösbar. Aber im 25er-Fall kommt bereits die „einfache“ Ikosaeder-Gruppe ins Spiel. Man darf gespannt sein, inwieweit hier noch Aussagen von der Art dieses Buches möglich sind.

(7) *Abstrakte D-Graphen*

Die genaue Anzahl wurde in Satz 6.5 angegeben. Die Anzahl der Isometrieklassen wurde mit 367 950 nach unten abgeschätzt. Kann man sie genau klassifizieren?

(8) *Höhenlinien und Umlaufzahlen*

Gibt es einen Zusammenhang mit bisherigen begrifflichen Merkmalen?

(9) *Clans versus Parametrisierung*

Wie hängt die Regularitätsverteilung durch Diagonalclans vom Parameter  $\gamma$  ab?

Gibt es einen strukturellen Einfluss der Blockdiagonalen  $\gamma$ ? Wie verteilen sich die Clananteile aus algebraischen und transzendenten Sudokus auf die Clans?

### 8.3 Sudokus als Kunstwerk

Mit Hilfe eines Sudokus kann man sich ein Kunstwerk schaffen! Das ist nicht neu, sondern gängige Praxis zum ästhetischen Vergnügen vieler Sudokufreunde.

Man braucht nur wenig dazu: Ein Sudoku als Muster, ein Blatt Papier beliebiger Größe mit einem Raster von 81 Ecken und 9 Blöcken, schließlich 9 verschiedene Farben. Die Farben werden von 1 bis 9 nummeriert. Dann trägt man die Farbe  $i$  in allen Kästchen ein, wo  $i$  im Sudoku vorkommt. Es entsteht ein farbiges Kunstwerk.

Mathematisch wird das Kunstwerk durch eine kleine Idee näher beschrieben: Der Mittelblock wird zum Berggipfel, dessen Höhenlinien durch die verschiedenen Farben bzw. ihre Ziffern festgelegt werden. Es findet ein Umlauf der 9 Kästchen gleicher Farbe durch die 8 angrenzenden Blöcke statt, beginnend mit dem Farbkästchen  $i$  im oberen linken Eckblock. Dieses wandert vertikal – horizontal zur  $i$ -ten Farbe im angrenzenden Block. Dieser Prozess wird iteriert, bis man am Ausgangskästchen der Farbe  $i$  angelangt ist. Es sind also nur vertikale und horizontale Wege erlaubt. Man zählt die einzelnen Schritte von Kästchen zu Kästchen, die Summe ist die *Umlaufszahl* der Höhenlinie der Farbe  $i$ . Man erhält so 9 Umlaufzahlen, die durchaus für die einzelnen Farben unterschiedlich ausfallen können.

Die Zählung kann verfeinert werden, wenn man auch die „Haken“ der Wege berücksichtigen will. Führt die Farbe  $i$  zwischen benachbarten Blöcken über  $r$  vertikale und  $s$  horizontale Kästchenschritte, so wird das Wegstück mit der pythagoreischen Länge  $r^2 + s^2$  belegt. Der Gesamtweg führt dann auf die *pythagoreische Umlaufszahl*, ein wesentlich feineres Längenmaß für die Höhenlinie der Farbe.

Man erkennt sofort, dass beide Arten von Umlaufzahlen unabhängig sind von der alternativen Wahl des Wegstücks von Block zu Block: erst vertikal dann horizontal, oder umgekehrt.



# Anhang

## 1 Ausführung der Fälle im Beweis von Satz 4.15 in Abschnitt 4.4

### Fall $\tau = 1$

Aus Satz 4.14 entnimmt man die Darstellung:

$$W_1^* = \{w \in T^* : \langle g_i \rangle, \langle h_j \rangle = 1\} \cup \{w \in T^* : \text{alle } \langle g_i \rangle \in \{1, (3)\}, \text{alle } \langle h_j \rangle = (3)\} \\ \cup \{w \in T^* : \text{alle } \langle g_i \rangle = (3), \text{alle } \langle h_j \rangle \in \{1, (3)\}\}$$

Es ist  $H_1 = [H^*, t]$ .  $H$  operiert auf  $I$  wie  $S_3$ , auf  $I^\circ$  trivial.  $H^\circ$  operiert auf  $I^\circ$  wie  $S_3$ , auf  $I$  trivial.  $t$  vertauscht jeweils die Komponenten  $i$  und  $i^\circ$ .

$W_1^*$  ist offenbar  $H_1$ -stabil.

Nach Lemma 4.8 (iii) ist  $N'_1 = \text{id}$ .

Somit erhält man eine Darstellung  $W_1^* = {N'_1}^{-1} V_1$  mit

$$V_1 = [111; 111] \cup [111; 333] \cup [113; 333] \cup [131; 333] \cup [133; 333] \cup [311; 333] \\ \cup [313; 333] \cup [331; 333] \cup [333; 111] \cup [333; 113] \cup [333; 131] \\ \cup [333; 133] \cup [333; 311] \cup [333; 313] \cup [333; 331] \cup [333; 333]$$

Die auftretenden  $C_v$  sind gemäß der  $H_1$ -Operation zu  $C_v^{H_1}$  zusammenzufassen:

$$V_{1,[111;111]} = [111; 111],$$

$$V_{1,[111;333]} = [111; 333] \cup [333; 111],$$

$$V_{1,[113;333]} = [113; 333] \cup [131; 333] \cup [311; 333] \cup [333; 113] \cup [333; 131] \cup [333; 311],$$

$$V_{1,[133;333]} = [133; 333] \cup [313; 333] \cup [331; 333] \cup [333; 133] \cup [333; 313] \cup [333; 331],$$

$$V_{1,[333;333]} = [333; 333].$$

Die  $W_{1,v}^* = {N'_1}^{-1} V_{1,v} = V_{1,v}$  entsprechen offenbar genau den zu  $(1, v)$  in Tabelle 4.9 angegebenen Bedingungssets.

Die Anzahl der  $W_{1,v}^*$  entspricht der Anzahl der in Tabelle 4.5 zu  $\tau = 1$  angegebenen Klassen, sie treten also alle als  $W_{1,v}$  auf.

Die  $\varphi_m$  sind in den nach Tabelle 4.9 zugeordneten  $\Phi_{1,v}^* = W_{1,v}^*$  enthalten:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 && \in [111; 111] \subseteq \Phi_{1,[111;111]}^*, \\ \varphi_2 &= {}_1 s^\circ {}_2 s^\circ {}_3 s^{\circ -1} && \in [111; 333] \subseteq \Phi_{1,[111;333]}^*, \\ \varphi_3 &= {}_3 s^{-1} {}_1 s^\circ {}_2 s^\circ {}_3 s^\circ && \in [113; 333] \subseteq \Phi_{1,[113;333]}^*, \\ \varphi_4 &= {}_2 s {}_3 s^{-1} {}_1 s^\circ {}_2 s^\circ {}_3 s^\circ && \in [133; 333] \subseteq \Phi_{1,[133;333]}^*, \\ \varphi_5 &= {}_1 s {}_2 s {}_3 s {}_1 s^\circ {}_2 s^\circ {}_3 s^\circ && \in [333; 333] \subseteq \Phi_{1,[333;333]}^*. \end{aligned}$$

**Fall  $\tau = \rho$**

Aus Satz 4.14 entnimmt man die Darstellung:

$$W_\rho^* = \{w \in T^* : \langle g_2 \rangle = \langle g_3 g_1 \rangle \in \{1, (3)\}, \text{ alle } \langle h_j \rangle = (2)\}$$

Es ist  $H_\rho = [\rho] \times H^\circ$ .  $\rho$  vertauscht die Komponenten 1 und 3, lässt die übrigen fest.  $H^\circ$  operiert auf  $I^\circ$  wie  $S_3$ , auf  $I$  trivial.

$W_\rho^*$  ist offenbar  $H_\rho$ -stabil.

Nach Lemma 4.8 (iii) ist

$$N'_\rho(g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3) = (g_3 g_1, g_2, g_1 g_3, h_1, h_2, h_3).$$

Unter Beachtung von  $\langle g_3 g_1 \rangle = \langle g_1 g_3 \rangle$  erhält man eine Darstellung  $W_\rho^* = N'^{-1} V_\rho$  mit

$$V_\rho = [111; 222] \cup [333; 222].$$

Die auftretenden  $C_v$  sind gemäß der  $H_\rho$ -Operation zu  $C_v^{H_\rho}$  zusammenzufassen:

$$V_{\rho, [111; 222]} = [111; 222],$$

$$V_{\rho, [333; 222]} = [333; 222].$$

Die  $W_{\rho, v}^* = N'^{-1} V_{\rho, v}$  entsprechen offenbar genau den zu  $(\rho, v)$  in Tabelle 4.9 angegebenen Bedingungssets.

Die Anzahl der  $W_{\rho, v}^*$  entspricht der Anzahl der in Tabelle 4.5 zu  $\tau = \rho$  angegebenen Klassen, sie treten also alle als  $W_{\rho, v}$  auf.

Die  $\varphi_m$  sind bis auf Konjugation in den nach Tabelle 4.9 zugeordneten  $\Phi_{\rho, v}^* = \rho W_{\rho, v}^*$  enthalten:

$$\varphi_6 = \sigma \rho \, {}_2 s^{-1} \, {}_3 s \, {}_1(s r)^\circ \, {}_2 r^\circ \, {}_3(r s)^\circ,$$

$${}^\sigma \varphi_6 = \rho \, {}_1 s \, {}_3 s^{-1} \, {}_1(s r)^\circ \, {}_2 r^\circ \, {}_3(r s)^\circ \in \rho N'^{-1} [111; 222] = \Phi_{\rho, [111; 222]}^*,$$

$$\varphi_7 = \sigma \rho \, {}_1 s \, {}_2 s \, {}_3 s \, {}_1(s r)^\circ \, {}_2 r^\circ \, {}_3(r s)^\circ,$$

$${}^\sigma \varphi_7 = \rho \, {}_1 s \, {}_2 s \, {}_3 s \, {}_1(s r)^\circ \, {}_2 r^\circ \, {}_3(r s)^\circ \in \rho N'^{-1} [333; 222] = \Phi_{\rho, [333; 222]}^*.$$

**Fall  $\tau = \rho \rho^\circ$**

Aus Satz 4.14 entnimmt man die Darstellung:

$$W_{\rho \rho^\circ}^* = \{w \in T^* : \langle g_2 \rangle = (2), \langle g_3 g_1 \rangle = 1, \langle h_2 \rangle = (2), \langle h_3 h_1 \rangle = 1\}$$

Es ist  $H_{\rho \rho^\circ} = [\rho, \rho^\circ, t]$ .  $\rho$  bzw.  $\rho^\circ$  vertauschen die Komponenten 1 und 3 bzw.  $1^\circ$  und  $3^\circ$ , lassen die übrigen fest.  $t$  vertauscht jeweils die Komponenten  $i$  und  $i^\circ$ .

$W_{\rho \rho^\circ}^*$  ist offenbar  $H_{\rho \rho^\circ}$ -stabil.

Nach Lemma 4.8 (iii) ist

$$N'_{\rho\rho^\circ}(g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3) = (g_3 g_1, g_2, g_1 g_3, h_3 h_1, h_2, h_1 h_3).$$

Unter Beachtung von  $\langle g_3 g_1 \rangle = \langle g_1 g_3 \rangle$  und  $\langle h_3 h_1 \rangle = \langle h_1 h_3 \rangle$  erhält man eine Darstellung  $W_{\rho\rho^\circ}^* = N'_{\rho\rho^\circ}{}^{-1} V_{\rho\rho^\circ}$  mit

$$V_{\rho\rho^\circ} = [121; 121].$$

Das auftretenden  $C_v$  ist gemäß der  $H_{\rho\rho^\circ}$ -Operation bereits ein  $C_v^{H_{\rho\rho^\circ}}$ :

$$V_{\rho\rho^\circ, [121; 121]} = [121; 121].$$

$W_{\rho\rho^\circ, [121; 121]}^* = N'_{\rho\rho^\circ}{}^{-1} V_{\rho\rho^\circ, [121; 121]}$  entspricht offenbar genau dem zu  $(\rho\rho^\circ, [121; 121])$  in Tabelle 4.9 angegebenen Bedingungsset.

In Tabelle 4.5 ist zu  $\tau = \rho\rho^\circ$  genau eine Klasse angegeben. Somit ist  $W_{\rho\rho^\circ, [121; 121]}^* = W_{\rho\rho^\circ, [121; 121]}$ .

$\varphi_8$  ist bis auf Konjugation in dem nach Tabelle 4.9 zugeordneten  $\Phi_{\rho\rho^\circ, [121; 121]}^* = \rho\rho^\circ W_{\rho\rho^\circ, [121; 121]}^*$  enthalten:

$$\begin{aligned} \varphi_8 &= \sigma\rho(\rho\sigma)^\circ 1(sr) 2(sr) 3(sr) 3(sr)^\circ, \\ \sigma\sigma^\circ{}^{-1} \varphi_8 &= \rho\rho^\circ 1(sr) 2(sr) 3(sr) 2(sr)^\circ \in \rho\rho^\circ N'_{\rho\rho^\circ}{}^{-1} [121; 121] = \Phi_{\rho\rho^\circ, [121; 121]}^*. \end{aligned}$$

### Fall $\tau = \sigma$

Aus Satz 4.14 entnimmt man die Darstellung:

$$W_\sigma^* = \{w \in T^* : \langle g_3 g_2 g_1 \rangle \in \{1, (3)\}, \text{ alle } \langle h_j \rangle \in \{1, (3)\}\}$$

Es ist  $H_\sigma = [\sigma] \times H^\circ$ .  $\sigma$  vertauscht die Komponenten von  $I$  zyklisch, lässt  $I^\circ$  fest.  $H^\circ$  operiert auf  $I^\circ$  wie  $S_3$ , auf  $I$  trivial.

$W_\sigma^*$  ist offenbar  $H_\sigma$ -stabil.

Nach Lemma 4.8 (iii) ist

$$N'_\sigma(g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3) = (g_3 g_2 g_1, g_1 g_3 g_2, g_2 g_1 g_3, h_1, h_2, h_3).$$

Unter Beachtung von  $\langle g_3 g_2 g_1 \rangle = \langle g_1 g_3 g_2 \rangle = \langle g_2 g_1 g_3 \rangle$  erhält man eine Darstellung  $W_\sigma^* = N'_\sigma{}^{-1} V_\sigma$  mit

$$\begin{aligned} V_\sigma &= [111; 111] \cup [111; 113] \cup [111; 131] \cup [111; 133] \\ &\quad \cup [111; 311] \cup [111; 313] \cup [111; 331] \cup [111; 333] \\ &\quad \cup [333; 111] \cup [333; 113] \cup [333; 131] \cup [333; 133] \\ &\quad \cup [333; 311] \cup [333; 313] \cup [333; 331] \cup [333; 333]. \end{aligned}$$

Die auftretenden  $C_v$  sind gemäß der  $H_\sigma$ -Operation zu  $C_v^{H_\sigma}$  zusammenzufassen:

$$\begin{aligned} V_{\sigma,[111;111]} &= [111;111], \\ V_{\sigma,[111;113]} &= [111;113] \cup [111;131] \cup [111;311], \\ V_{\sigma,[111;133]} &= [111;133] \cup [111;313] \cup [111;331], \\ V_{\sigma,[111;333]} &= [111;333], \\ V_{\sigma,[333;111]} &= [333;111], \\ V_{\sigma,[333;113]} &= [333;113] \cup [333;131] \cup [333;311], \\ V_{\sigma,[333;133]} &= [333;133] \cup [333;313] \cup [333;331], \\ V_{\sigma,[333;333]} &= [333;333]. \end{aligned}$$

Die  $W_{\sigma,v}^* = N'_\sigma{}^{-1}V_{\sigma,v}$  entsprechen offenbar genau den zu  $(\sigma, v)$  in Tabelle 4.9 angegebenen Bedingungssets.

Die Anzahl der  $W_{\sigma,v}^*$  entspricht der Anzahl der in Tabelle 4.5 zu  $\tau = \sigma$  angegebenen Klassen, sie treten also alle als  $W_{\sigma,v}$  auf.

Die  $\varphi_m$  sind bis auf Konjugation in den nach Tabelle 4.9 zugeordneten  $\Phi_{\sigma,v}^* = \sigma W_{\sigma,v}^*$  enthalten:

$$\begin{aligned} \varphi_9 &= \sigma^{-1}, \varphi_9^\rho = \sigma \in \sigma N'_\sigma{}^{-1}[111;111] = \Phi_{\sigma,[111;111]}^*, \\ \varphi_{10} &= \sigma^{-1} 3s^\circ, \varphi_{10}^\rho = \sigma 3s^\circ \in \sigma N'_\sigma{}^{-1}[111;113] \subseteq \Phi_{\sigma,[111;113]}^*, \\ \varphi_{11} &= \sigma^{-1} 2s^\circ 3s^\circ, \varphi_{11}^\rho = \sigma 2s^\circ 3s^\circ \in \sigma N'_\sigma{}^{-1}[111;133] \subseteq \Phi_{\sigma,[111;133]}^*, \\ \varphi_{12} &= \sigma^{-1} 1s^\circ 2s^\circ 3s^\circ{}^{-1}, \varphi_{12}^\rho = \sigma 1s^\circ 2s^\circ 3s^\circ{}^{-1} \in \sigma N'_\sigma{}^{-1}[111;333] = \Phi_{\sigma,[111;333]}^*, \\ \varphi_{13} &= \sigma^{-1} 1s^{-1}, \varphi_{13}^\rho = \sigma 3s^{-1} \in \sigma N'_\sigma{}^{-1}[333;111] = \Phi_{\sigma,[333;111]}^*, \\ \varphi_{14} &= \sigma^{-1} 1s 3s^\circ, \varphi_{14}^\rho = \sigma 3s 3s^\circ \in \sigma N'_\sigma{}^{-1}[333;113] \subseteq \Phi_{\sigma,[333;113]}^*, \\ \varphi_{15} &= \sigma^{-1} 1s 2s^\circ 3s^\circ, \varphi_{15}^\rho = \sigma 3s 2s^\circ 3s^\circ \in \sigma N'_\sigma{}^{-1}[333;133] \subseteq \Phi_{\sigma,[333;133]}^*, \\ \varphi_{16} &= \sigma^{-1} 1s^{-1} 1s^\circ 2s^\circ 3s^\circ, \varphi_{16}^\rho = \sigma 3s^{-1} 1s^\circ 2s^\circ 3s^\circ \in \sigma N'_\sigma{}^{-1}[333;333] = \Phi_{\sigma,[333;333]}^*. \end{aligned}$$

### Fall $\tau = \sigma\sigma^\circ$

Aus Satz 4.14 entnimmt man die Darstellung:

$W_{\sigma\sigma^\circ}^* = \{w \in T^* : \langle g_3 g_2 g_1 \rangle, \langle h_3 h_2 h_1 \rangle \in \{1, (3)\}\}$  Es ist  $H_{\sigma\sigma^\circ} = [\sigma, \sigma^\circ, t]$ .  $\sigma$  bzw.  $\sigma^\circ$  vertauschen die Komponenten von  $I$  bzw.  $I^\circ$  zyklisch, lassen die übrigen fest.  $t$  vertauscht jeweils die Komponenten  $i$  und  $i^\circ$ .

$W_{\sigma\sigma^\circ}^*$  ist offenbar  $H_{\sigma\sigma^\circ}$ -stabil.

Nach Lemma 4.8 (iii) ist

$$\begin{aligned} N'_{\sigma\sigma^\circ}(g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3) \\ = (g_3 g_2 g_1, g_1 g_3 g_2, g_2 g_1 g_3, h_3 h_2 h_1, h_1 h_3 h_2, h_2 h_1 h_3). \end{aligned}$$

Unter Beachtung von  $\langle g_3 g_2 g_1 \rangle = \langle g_1 g_3 g_2 \rangle = \langle g_2 g_1 g_3 \rangle$  und  $\langle h_3 h_2 h_1 \rangle = \langle h_1 h_3 h_2 \rangle = \langle h_2 h_1 h_3 \rangle$  erhält man eine Darstellung  $W_{\sigma\sigma^\circ}^* = N'_{\sigma\sigma^\circ}^{-1} V_{\sigma\sigma^\circ}$  mit

$$V_{\sigma\sigma^\circ} = [111; 111] \cup [111; 333] \cup [333; 111] \cup [333; 333].$$

Die auftretenden  $C_v$  sind gemäß der  $H_{\sigma\sigma^\circ}$ -Operation zu  $C_v^{H_{\sigma\sigma^\circ}}$  zusammenzufassen:

$$\begin{aligned} V_{\sigma\sigma^\circ, [111; 111]} &= [111; 111], \\ V_{\sigma\sigma^\circ, [111; 333]} &= [111; 333] \cup [333; 111], \\ V_{\sigma\sigma^\circ, [333; 333]} &= [333; 333]. \end{aligned}$$

Die  $W_{\sigma\sigma^\circ, v}^* = N'_{\sigma\sigma^\circ}^{-1} V_{\sigma\sigma^\circ, v}$  entsprechen offenbar genau den zu  $(\sigma\sigma^\circ, v)$  in Tabelle 4.9 angegebenen Bedingungssets.

Die Anzahl der  $W_{\sigma\sigma^\circ, v}^*$  entspricht der Anzahl der in Tabelle 4.5 zu  $\tau = \sigma\sigma^\circ$  angegebenen Klassen, sie treten also alle als  $W_{\sigma\sigma^\circ, v}$  auf.

Die  $\varphi_m$  sind in den nach Tabelle 4.9 zugeordneten  $\Phi_{\sigma\sigma^\circ, v}^* = \sigma\sigma^\circ W_{\sigma\sigma^\circ, v}^*$  enthalten:

$$\begin{aligned} \varphi_{17} &= \sigma\sigma^\circ \in \sigma\sigma^\circ N'_{\sigma\sigma^\circ}^{-1} [111; 111] = \Phi_{\sigma\sigma^\circ, [111; 111]}^*, \\ \varphi_{18} &= \sigma\sigma^\circ 2s^{-1} \in \sigma\sigma^\circ N'_{\sigma\sigma^\circ}^{-1} [333; 111] \subseteq \Phi_{\sigma\sigma^\circ, [111; 333]}^*, \\ \varphi_{19} &= \sigma\sigma^\circ 2s 2s^\circ \in \sigma\sigma^\circ N'_{\sigma\sigma^\circ}^{-1} [333; 333] = \Phi_{\sigma\sigma^\circ, [333; 333]}^*. \end{aligned}$$

### Fall $\tau = \sigma\rho^\circ$

Aus Satz 4.14 entnimmt man die Darstellung:

$$W_{\sigma\rho^\circ}^* = \{w \in T^*: \langle g_3 g_2 g_1 \rangle = (2), \langle h_2 \rangle \in \{1, (3)\}, \langle h_3 h_1 \rangle \in \{1, (3)\}\}$$

Es ist  $H_{\sigma\rho^\circ} = [\sigma, \rho^\circ]$ .  $\sigma$  vertauscht die Komponenten von  $I$  zyklisch, lässt die übrigen fest.  $\rho^\circ$  vertauscht die Komponenten  $1^\circ$  und  $3^\circ$ , lässt die übrigen fest.  $t$  vertauscht jeweils die Komponenten  $i$  und  $i^\circ$ .

$W_{\sigma\rho^\circ}^*$  ist offenbar  $H_{\sigma\rho^\circ}$ -stabil.

Nach Lemma 4.8 (iii) ist

$$N'_{\sigma\rho^\circ}(g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3) = (g_3 g_2 g_1, g_1 g_3 g_2, g_2 g_1 g_3, h_3 h_1, h_2, h_1 h_3).$$

Unter Beachtung von  $\langle g_3 g_2 g_1 \rangle = \langle g_1 g_3 g_2 \rangle = \langle g_2 g_1 g_3 \rangle$  und  $\langle h_3 h_1 \rangle = \langle h_1 h_3 \rangle$  erhält man eine Darstellung  $W_{\sigma\rho^\circ}^* = N'_{\sigma\rho^\circ}^{-1} V_{\sigma\rho^\circ}$  mit

$$V_{\sigma\rho^\circ} = [222; 111] \cup [222; 131] \cup [222; 313] \cup [222; 333].$$

Die auftretenden  $C_v$  sind gemäß der  $H_{\sigma\rho^\circ}$ -Operation zu  $C_v^{H_{\sigma\rho^\circ}}$  zusammenzufassen:

$$V_{\sigma\rho^\circ,[222;111]} = [222;111],$$

$$V_{\sigma\rho^\circ,[222;131]} = [222;131],$$

$$V_{\sigma\rho^\circ,[222;313]} = [222;313],$$

$$V_{\sigma\rho^\circ,[222;333]} = [222;333].$$

Die  $W_{\sigma\rho^\circ,v}^* = N'_{\sigma\rho^\circ}{}^{-1} V_{\sigma\rho^\circ,v}$  entsprechen offenbar genau den zu  $(\sigma\rho^\circ, v)$  in Tabelle 4.9 angegebenen Bedingungssets.

Die Anzahl der  $W_{\sigma\rho^\circ,v}^*$  entspricht der Anzahl der in Tabelle 4.5 zu  $\tau = \sigma\rho^\circ$  angegebenen Klassen, sie treten also alle als  $W_{\sigma\rho^\circ,v}$  auf.

Die  $\varphi_m$  sind bis auf Konjugation in den nach Tabelle 4.9 zugeordneten  $\Phi_{\sigma\rho^\circ,v}^* = \sigma\rho^\circ W_{\sigma\rho^\circ,v}^*$  enthalten:

$$\varphi_{20} = \rho\sigma\sigma^\circ 1r_2 r_1(sr)^\circ,$$

$$\varphi_{20}^{\sigma t} = \rho\sigma^\circ 1(sr) 1r^\circ 3r^\circ \in \sigma\rho^\circ N'_{\sigma\rho^\circ}{}^{-1}[222;111] = \Phi_{\sigma\rho^\circ,[222;111]}^*,$$

$$\varphi_{21} = \rho\sigma\sigma^\circ 1r_2 r_3 s_1(sr)^\circ 2s^\circ,$$

$$\varphi_{21}^{\sigma t} = \rho\sigma^\circ 1(sr) 2s_1 r^\circ 2s^\circ 3r^\circ \in \sigma\rho^\circ N'_{\sigma\rho^\circ}{}^{-1}[222;131] = \Phi_{\sigma\rho^\circ,[222;131]}^*,$$

$$\varphi_{22} = \rho\sigma\sigma^\circ 1(sr) 2r_1(sr)^\circ,$$

$$\varphi_{22}^{\sigma t} = \rho\sigma^\circ 1(sr) 1r^\circ 3(sr)^\circ \in \sigma\rho^\circ N'_{\sigma\rho^\circ}{}^{-1}[222;313] = \Phi_{\sigma\rho^\circ,[222;313]}^*,$$

$$\varphi_{23} = \rho\sigma\sigma^\circ 1(sr) 2r_3 s_1(sr)^\circ 2s^\circ,$$

$$\varphi_{23}^{\sigma t} = \rho\sigma^\circ 1(sr) 2s_1 r^\circ 2s^\circ 3(sr)^\circ \in \sigma\rho^\circ N'_{\sigma\rho^\circ}{}^{-1}[222;333] = \Phi_{\sigma\rho^\circ,[222;333]}^*.$$

### Fall $\tau = t$

Aus Satz 4.14 entnimmt man die Darstellung:

$$W_t^* = \{w \in T^*: \text{alle } \langle g_1 h_1 \rangle = \langle g_2 h_2 \rangle = \langle g_3 h_3 \rangle \in \{1, (3)\}\}$$

Es ist  $H_t = [\rho\rho^\circ, \sigma\sigma^\circ, t]$ .  $\rho\rho^\circ$  vertauscht die Komponenten 1 und 3 sowie  $1^\circ$  und  $3^\circ$ , lässt die übrigen fest.  $\sigma\sigma^\circ$  vertauscht die Komponenten von  $I$  und  $I^\circ$  zyklisch.  $t$  vertauscht jeweils die Komponenten  $i$  und  $i^\circ$ .

$W_t^*$  ist offenbar  $H_t$ -stabil.

Nach Lemma 4.8 (iii) ist

$$N'_t(g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3) = (h_1 g_1, h_2 g_2, h_3 g_3, g_1 h_1, g_2 h_2, g_3 h_3).$$

Unter Beachtung von  $\langle h_i g_i \rangle = \langle g_i h_i \rangle$  erhält man eine Darstellung  $W_t^* = N_t'^{-1} V_t$  mit

$$V_t = [111;111] \cup [333;333].$$

Die auftretenden  $C_v$  sind gemäß der  $H_t$ -Operation zu  $C_v^{H_t}$  zusammenzufassen:

$$\begin{aligned} V_{t,[111;111]} &= [111;111], \\ V_{t,[333;333]} &= [333;333]. \end{aligned}$$

Die  $W_{t,v}^* = N_t'^{-1}V_{t,v}$  entsprechen offenbar genau den zu  $(t, v)$  in Tabelle 4.9 angegebenen Bedingungssets.

Die Anzahl der  $W_{t,v}^*$  entspricht der Anzahl der in Tabelle 4.5 zu  $\tau = t$  angegebenen Klassen, sie treten also alle als  $W_{t,v}$  auf.

Die  $\varphi_m$  sind bis auf Konjugation in den nach Tabelle 4.9 zugeordneten  $\Phi_{t,v}^* = t$   $W_{t,v}^*$  enthalten:

$$\begin{aligned} \varphi_{24} &= t\sigma^{-1}\sigma^\circ, & \varphi_{24}^\sigma &= t & \in tN_t'^{-1}[111;111] &= \Phi_{t,[111;111]}^*, \\ \varphi_{25} &= t\sigma^{-1}\sigma^\circ 1s\ 1s^\circ 2s^\circ, & \varphi_{25}^\sigma &= t\ 3s\ 1s^\circ 2s^\circ \in tN_t'^{-1}[333;333] &= \Phi_{t,[333;333]}^*. \end{aligned}$$

### Fall $\tau = t\rho$

Aus Satz 4.14 entnimmt man die Darstellung:

$$W_{t\rho}^* = \{w \in T^* : \langle g_3 h_3 g_1 h_1 \rangle = 1, \langle g_2 h_2 \rangle = (2)\}$$

Es ist  $H_{t\rho} = [\rho]$ .  $t\rho$  vertauscht die Komponenten 2 und  $2^\circ$  sowie die Komponenten 1,  $3^\circ$ ,  $3$ ,  $1^\circ$  zyklisch.

$W_{t\rho}^*$  ist offenbar  $H_{t\rho}$ -stabil.

Nach Lemma 4.8 (iii) ist

$$\begin{aligned} N'_{t\rho}(g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3) \\ = (h_1 g_3 h_3 g_1, h_2 g_2, h_3 g_1 h_1 g_3, g_3 h_3 g_1 h_1, g_2 h_2, g_1 h_1 g_3 h_3). \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von

$$\langle h_1 g_3 h_3 g_1 \rangle = \langle h_3 g_1 h_1 g_3 \rangle = \langle g_3 h_3 g_1 h_1 \rangle = \langle g_1 h_1 g_3 h_3 \rangle$$

und  $\langle h_2 g_2 \rangle = \langle g_2 h_2 \rangle$  erhält man eine Darstellung  $W_{t\rho}^* = N'_{t\rho}^{-1}V_{t\rho}$  mit

$$V_{t\rho} = [121;121].$$

Das auftretende  $C_v$  ist gemäß der  $H_{t\rho}$ -Operation bereits ein  $C_v^{H_{t\rho}}$ :

$$V_{t\rho,[121;121]} = [121;121].$$

$W_{t\rho,[121;121]}^* = N'_{t\rho}^{-1}V_{t\rho,[121;121]}$  entspricht offenbar genau dem zu  $(t\rho, [121;121])$  in Tabelle 4.9 angegebenen Bedingungsset.

In Tabelle 4.5 ist zu  $\tau = t\rho$  genau eine Klasse angegeben. Somit ist  $W_{t\rho,[121;121]}^* = W_{t\rho,[121;121]}$ .

$\varphi_{26}$  ist bis auf Konjugation in dem nach Tabelle 4.9 zugeordneten  $\Phi_{t\rho,[121;121]}^* = t\rho W_{t\rho,[121;121]}^*$  enthalten:

$$\varphi_{26} = t\rho\sigma^\circ \_1r \_2r \_3r, {}^{\sigma\sigma^\circ -1}\varphi_{26} = t\rho \_1r \_2r \_3r \in t\rho N'_{t\rho}^{-1}[121;121] = \Phi_{t\rho,[121;121]}^*.$$

### Fall $\tau = t\sigma\sigma^\circ$

Aus Satz 4.14 entnimmt man die Darstellung:

$$W_{t\sigma\sigma^\circ}^* = \{w \in T^* : \langle g_3 h_2 g_1 h_3 g_2 h_1 \rangle = 1\}$$

Es ist  $H_{t\sigma\sigma^\circ} = [\sigma\sigma^\circ]$ .  $t\sigma\sigma^\circ$  vertauscht die Komponenten  $1, 2^\circ, 3, 1^\circ, 2, 3^\circ$  zyklisch.

$W_{t\sigma\sigma^\circ}^*$  ist offenbar  $H_{t\sigma\sigma^\circ}$ -stabil.

Nach Lemma 4.8 (iii) ist

$$\begin{aligned} N'_{t\sigma\sigma^\circ}(g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3) &= (h_3 g_2 h_1 g_3 h_2 g_1, h_1 g_3 h_2 g_1 h_3 g_2, \\ &\quad h_2 g_1 h_3 g_2 h_1 g_3, g_3 h_2 g_1 h_3 g_2 h_1, g_1 h_3 g_2 h_1 g_3 h_2, g_2 h_1 g_3 h_2 g_1 h_3). \end{aligned}$$

Unter Beachtung von

$$\begin{aligned} \langle h_3 g_2 h_1 g_3 h_2 g_1 \rangle &= \langle h_1 g_3 h_2 g_1 h_3 g_2 \rangle = \langle h_2 g_1 h_3 g_2 h_1 g_3 \rangle \\ &= \langle g_3 h_2 g_1 h_3 g_2 h_1 \rangle = \langle g_1 h_3 g_2 h_1 g_3 h_2 \rangle = \langle g_2 h_1 g_3 h_2 g_1 h_3 \rangle \end{aligned}$$

erhält man eine Darstellung  $W_{t\sigma\sigma^\circ}^* = N'_{t\sigma\sigma^\circ}^{-1} V_{t\sigma\sigma^\circ}$  mit

$$V_{t\sigma\sigma^\circ} = [111;111].$$

Das auftretende  $C_v$  ist gemäß der  $H_{t\sigma\sigma^\circ}$ -Operation bereits ein  $C_v^{H_{t\sigma\sigma^\circ}}$ :

$$V_{t\sigma\sigma^\circ,[111;111]} = [111;111].$$

$W_{t\sigma\sigma^\circ,[111;111]}^* = N'_{t\sigma\sigma^\circ}^{-1} V_{t\sigma\sigma^\circ,[111;111]}$  entspricht offenbar genau dem zu  $(t\sigma\sigma^\circ, [111; 111])$  in Tabelle 4.9 angegebenen Bedingungsset.

In Tabelle 4.5 ist zu  $\tau = t\sigma\sigma^\circ$  genau eine Klasse angegeben.

Somit ist  $W_{t\sigma\sigma^\circ,[111;111]}^* = W_{t\sigma\sigma^\circ,[111;111]}$ .

$\varphi_{27}$  ist bis auf Konjugation in dem nach Tabelle 4.9 zugeordneten  $\Phi_{t\sigma\sigma^\circ,[111;111]}^* = t\sigma\sigma^\circ W_{t\sigma\sigma^\circ,[111;111]}^*$  enthalten:

$$\varphi_{27} = t\sigma^{-1}, \varphi_{27}^\sigma = t\sigma\sigma^\circ \in t\sigma\sigma^\circ N'_{t\sigma\sigma^\circ}^{-1}[111;111] = \Phi_{t\sigma\sigma^\circ,[111;111]}. \quad \square$$

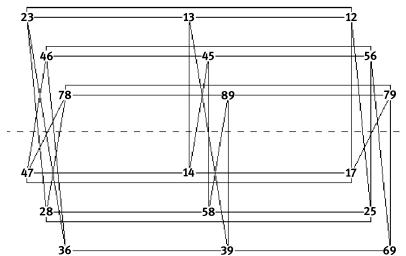
## 2 Auflistung der Graphiken zu allen $D$ -Graphen

Im Folgenden wird zu jeder in Liste I von Kapitel 6 aufgeführten Isometrieklasse von  $D$ -Graphen ein Vertreter angegeben. Während in Kapitel 6 die Ecken von  $D$ -Graphen als kleine Quadrate graphisch dargestellt wurden, ist hier eine beispielhafte Domino-Belegung der Ecken angegeben. Ecken mit zwei Ziffern sind regulär, Ecken mit einer Ziffer singulär. Isolierte Ecken sind durch Umrahmung der entsprechenden Ziffer hervorgehoben.

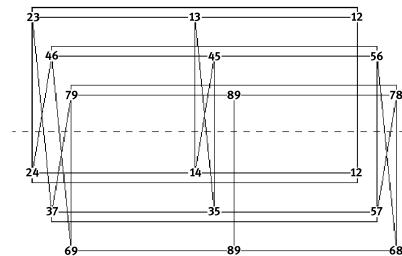
Durch die Angabe der Domino-Belegung der Ecken können die Zeilenmengen der Eckenmengen und die Spaltenmengen des Regulativs abgelesen werden. Somit wird durch die Graphik der Nachweis erbracht, dass der  $D$ -Graph zumindest als uneigentlicher  $D$ -Graph im Sinne von Abschnitt 5.1 existiert. Die Bedingungen (†) und (††) aus Abschnitt 5.1 sind in allen Fällen erfüllt.

### 0 Singularitäten

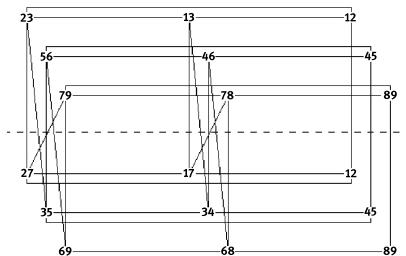
$R_{18}(36)$



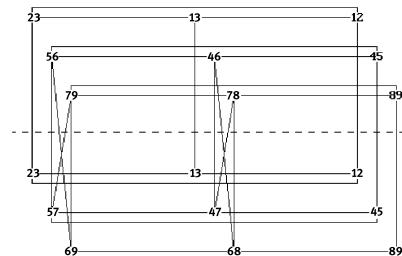
$R_{18}(34)$



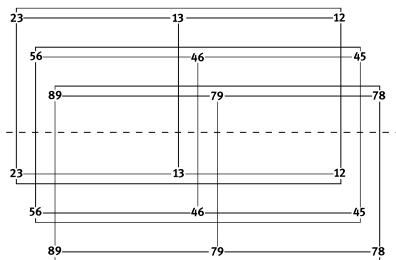
$R_{18}(33)$



$R_{12}(22) \perp R_6(9)$

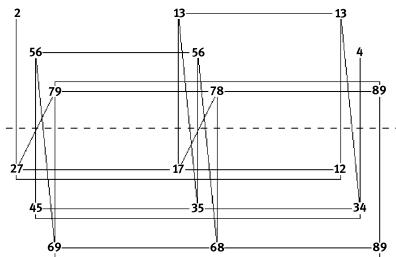


3.R<sub>6</sub>(9)

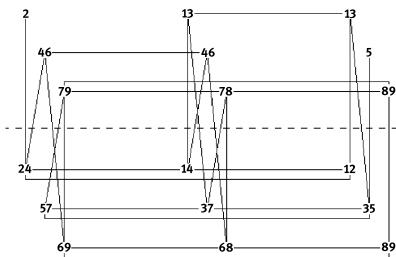


## 2 Singularitäten

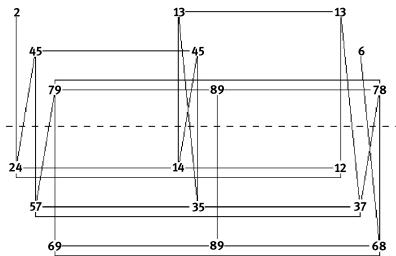
$K_{18}^2(29)$ a



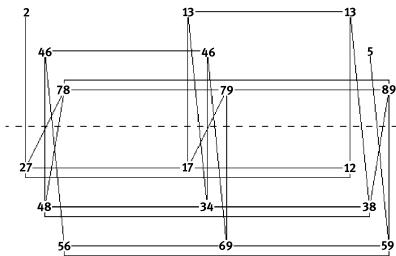
$K_{18}^2(29)$ b



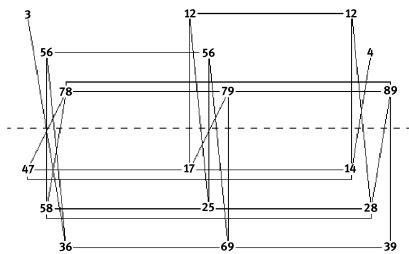
$K_{18}^2(29)$ c



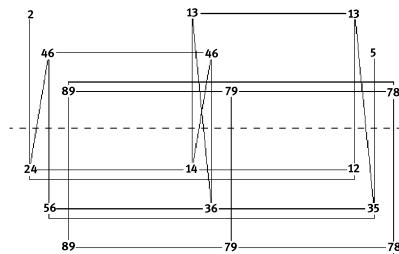
$K_{18}^2(30)$ a (uneigentlich)



## $K_{18}^2(30)$ b (uneigentlich)

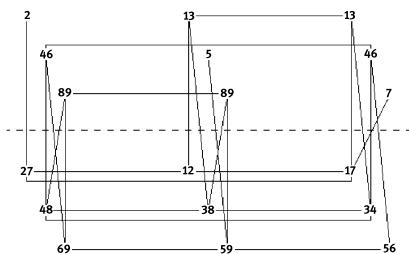


$$K_{12}^2(18)\mathbf{a} \perp R_6(9)$$

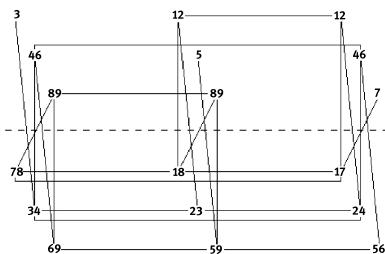


## 3 Singularitäten

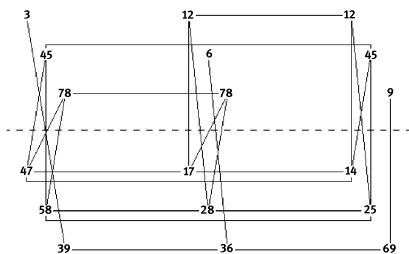
K<sub>18</sub><sup>3</sup>(27)a



### $K_{18}^3(27)$ b (uneigentlich)

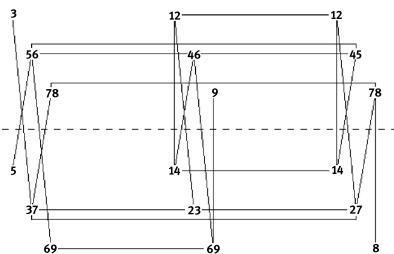


$$R_{12}(21) \perp K_6^3(6)$$

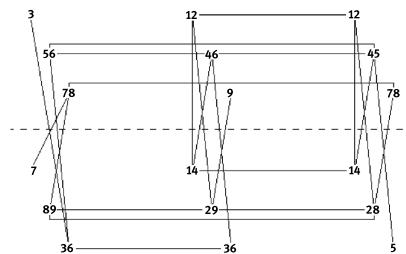


#### 4 Singularitäten

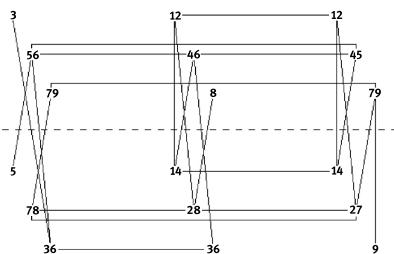
$K_{18}^4(24)a$



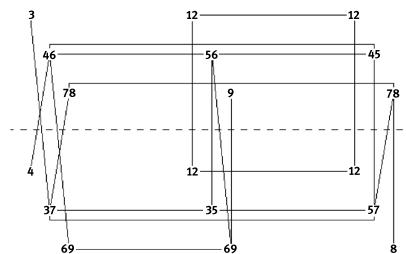
$K_{18}^4(24)b$



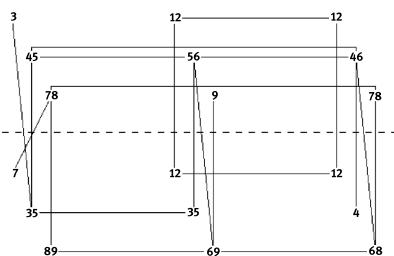
$K_{18}^4(24)c$  (uneigentlich)



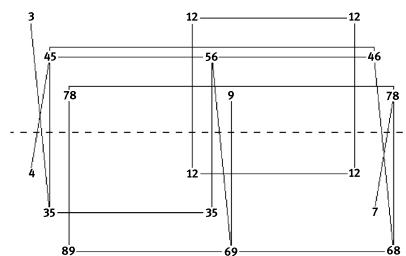
$K_{14}^4(18)a \perp C_4$



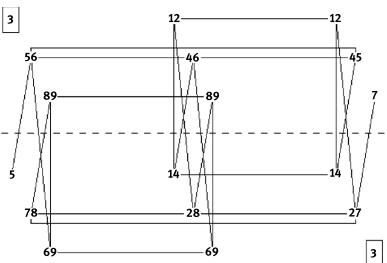
$K_{14}^4(18)b \perp C_4$



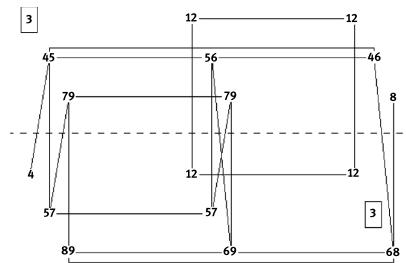
$K_{14}^4(18)c \perp C_4$  (uneigentlich)



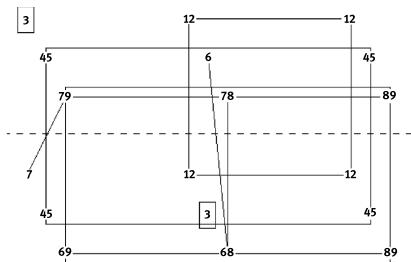
$K_{16}^2(24) \perp 2.I$



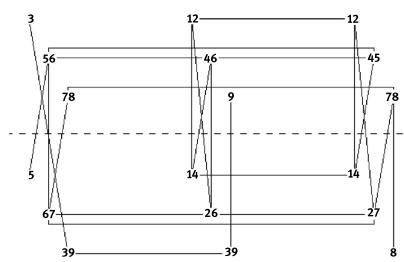
$K_{12}^2(18)b \perp C_4 \perp 2.I$



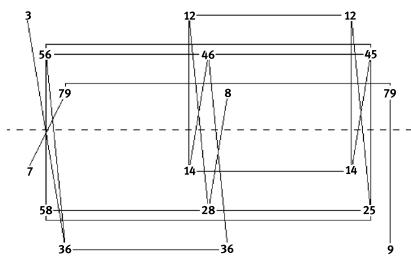
$K_8^2(11) \perp 2.C_4 \perp 2.I$



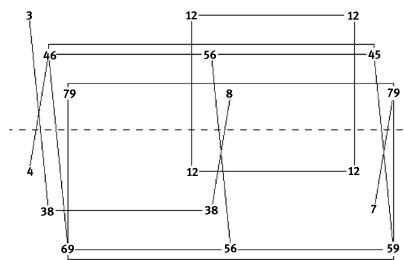
$K_{14}^2(21)a \perp K_4^2(3)$



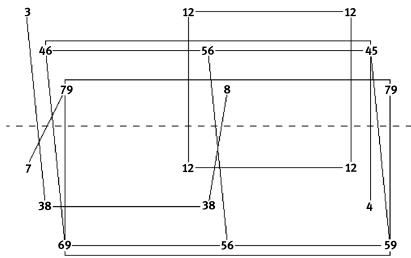
$K_{14}^2(21)b \perp K_4^2(3)$



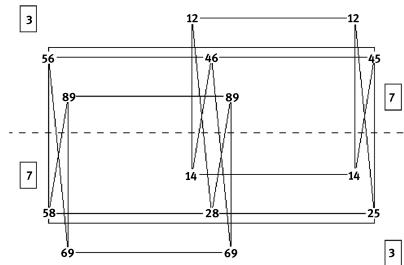
$K_{10}^2(14) \perp C_4 \perp K_4^2(3)a$



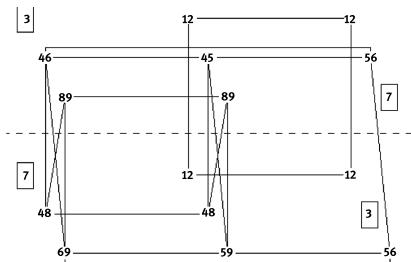
$K_{10}^2(14) \perp C_4 \perp K_4^2(3)b$



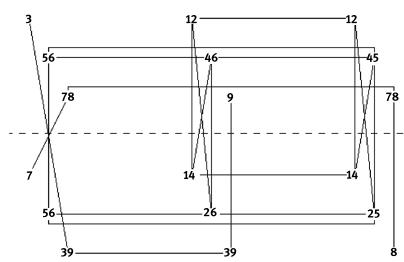
$R_{14}(24) \perp 4.I$



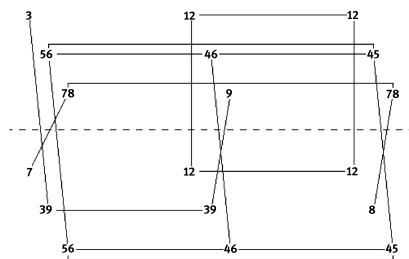
$R_{10}(17) \perp C_4 \perp 4.I$



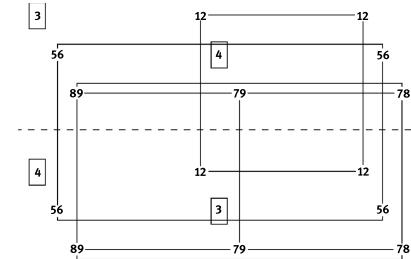
$R_{10}(17) \perp 2.K_4^2(3)$



$$R_6(9) \perp C_4 \perp 2.K_4^2(3)$$

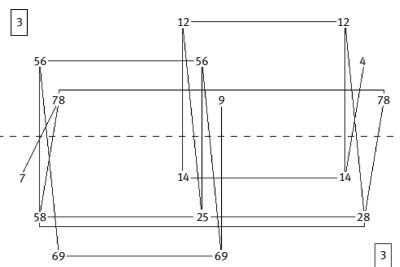


$$R_6(9) \perp 2.C_4 \perp 4.I$$

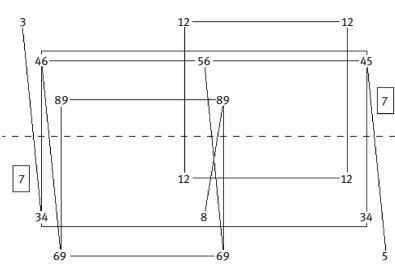


## 5 Singularitäten

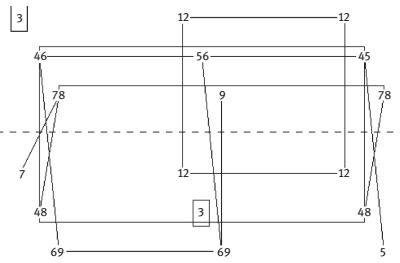
$$K_{16}^3(21) \perp 2.I$$



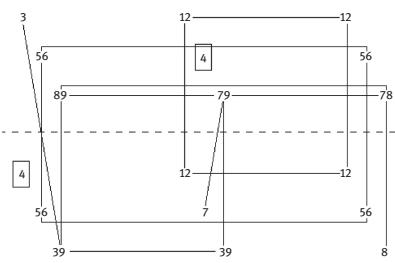
$$K_{12}^3(15)a \perp C_4 \perp 2.I$$

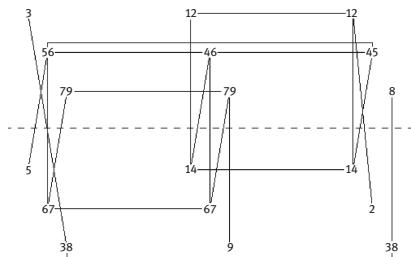
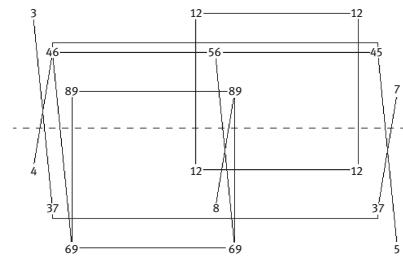
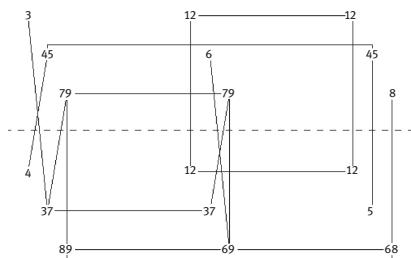
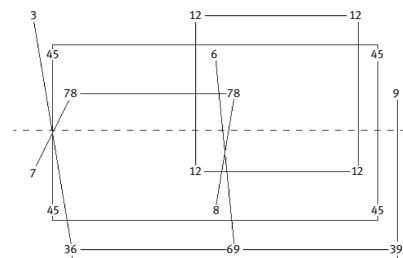


$$K_{12}^3(15)b \perp C_4 \perp 2.I$$

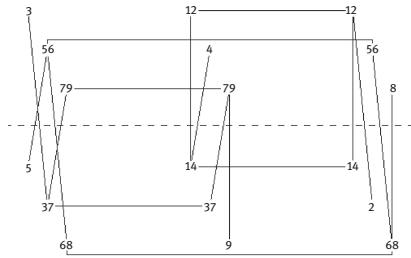
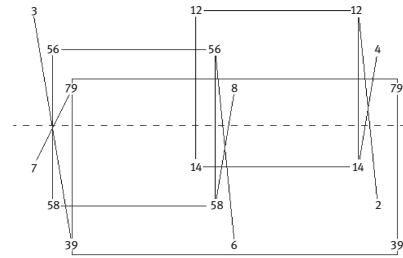


$$K_8^3(9) \perp 2.C_4 \perp 2.I$$

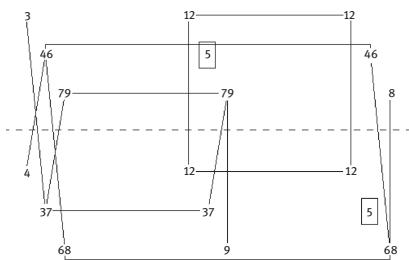


$K_{14}^3(18) \perp K_4^2(3)$  $K_{10}^3(12) \perp C_4 \perp K_4^2(3)a$  $K_{10}^3(12) \perp C_4 \perp K_4^2(3)b$  $K_6^3(6) \perp 2.C_4 \perp K_4^2(3)$ 

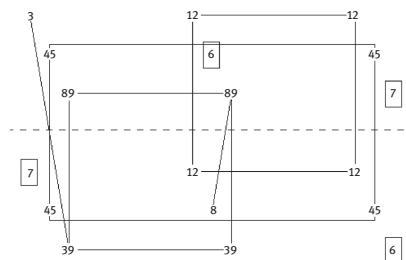
## 6 Singularitäten

 $3.K_6^2(6)a$  $3.K_6^2(6)b$  (uneigentlich)

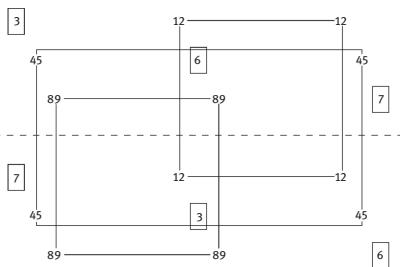
$$2.K_6^2(6) \perp C_4 \perp 2.I$$



$$K_6^2(6) \perp 2.C_4 \perp 4.I$$



$$3.C_4 \perp 6.I$$



### 3 Bestimmung der Anzahl der abstrakten $D$ -Graphen und Beweis von Satz 6.5

Abstrakte  $D$ -Graphen wurden in Abschnitt 5.1 eingeführt, ihre Isometrieklassen in Abschnitt 5.2. Die Anzahlen waren zunächst offen geblieben. In diesem Abschnitt wird die Anzahl der abstrakten  $D$ -Graphen bestimmt und die in Satz 6.5 gegebene Abschätzung für die Zahl der Isometrieklassen bewiesen.

Während in Kapitel 5  $D$ -Graphen in vertikaler Gestalt betrachtet wurden, wird hier aus Darstellungsgründen die horizontale Gestalt vorgezogen. Die Axiome für die vertikalen und horizontalen Kanten lauten dann wie folgt ( $E_0$  und  $E_1$  bezeichnen die  $3 \times 3$ -Eckenmengen):

#### Vertikale Kanten

Jede Spalte enthält entweder die maximale Anzahl von 3 vertikalen Kanten (regulärer Fall) oder genau eine vertikale Kante (singulärer Fall). Im regulären Fall heißen alle 3 Ecken der Spalte regulär, im singulären Fall heißen die beiden durch eine Kante verbundenen Ecken regulär, die dritte Ecke heißt singulär.

### Horizontale Kanten

verlaufen nur zwischen  $E_0$  und  $E_1$  mit folgenden Bedingungen:

- (i) Eine singuläre Ecke hat höchstens eine horizontale Kante.
- (ii) Eine reguläre Ecke hat 1 oder 2 horizontale Kanten.
- (iii) 2 singuläre Ecken in einer Teilmenge  $E_i$  stehen in verschiedenen Horizontalen (Zeilen).
- (iv) 2 singuläre Ecken aus verschiedenen Eckenmengen  $E_0, E_1$  sind nicht benachbart.
- (v) Isolierte Ecken (vom Grad 0) treten paarweise auf und liegen in verschiedenen Eckenmengen  $E_0$  und  $E_1$ .

Die Anzahlbestimmung der abstrakten  $D$ -Graphen ist gleichbedeutend mit der Frage, auf wie viele Weisen das Schema aus  $E_0$  und  $E_1$  zulässig (d. h. obigen Axiomen entsprechend) mit vertikalen und horizontalen Kanten belegt werden kann. Es erweist sich als zweckmäßig, die Anzahlen zunächst bei vorgegebenen Singularitätstypen (regulär/isoliert singulär/nicht-isoliert singulär) aller Ecken durchzuführen, dann zu summieren. Denn bei vorgegebenen Eckentypen liegen die vertikalen Kanten fest, die Anzahl der horizontalen Kantenbelegungen kann als das Produkt der Anzahlen pro Zeile erhalten werden. Diese Anzahlen pro Zeile werden zunächst untersucht.

### Anzahl möglicher Kantenbelegungen pro Zeile

Bei vorgegebenen Singularitätstypen der Ecken in einer Zeile soll die Anzahl möglicher Kantenbelegungen bestimmt werden. Die Vorgabe der Eckentypen wird symbolisch in der Form  $UVW|XYZ$  dargestellt, wobei  $U, V, W, X, Y, Z$  für die Eckentypen  $R = \text{regulär}$ ,  $S_0 = \text{isoliert singulär}$  und  $S_1 = \text{nicht-isoliert singulär}$  stehen.  $U, V, W$  bezeichnen die Eckentypen in  $E_0$ ,  $X, Y, Z$  in  $E_1$ . Vertauschungen von  $U, V, W$  bzw. von  $X, Y, Z$  verändern die Anzahl möglicher Kantenbelegungen offenbar nicht, daher reduziert sich die Anzahl der Fälle.

$RRR|RRR$ : Wegen Bedingung (ii) können pro Zeile 3–6 horizontale Kanten auftreten.

- Bei 3 Kanten geht von jeder Ecke genau eine Kante aus. Es bestehen  $3! = 6$  Möglichkeiten der Kantenverteilung.
- Bei 4 Kanten gehen in jeder Eckenmenge von zwei Ecken je eine Kante und von einer Ecke (im Folgenden „Sonderecke“) zwei Kanten aus. Es gibt  $3 \cdot 3 = 9$  Möglichkeiten zur Auswahl der beiden Sonderecken.

Sind die Sonderecken nicht durch eine Kante verbunden, so sind die 4 Kanten bereits eindeutig bestimmt, nämlich von jeder Sonderecke je eine Kante zu den beiden übrigen Ecken.

Sind die Sonderecken durch eine Kante verbunden, so geht von jeder Sonderecke eine Kante zu einer der übrigen Ecken (4 Möglichkeiten). Die vierte Kante ver-

bindet dann die beiden Ecken, die bisher ohne horizontale Kante sind, ist also eindeutig bestimmt.

Insgesamt gibt es in diesem Unterfall  $9 \cdot (1 + 4) = 45$  mögliche Kantenverteilungen.

- Die Situation bei 5 bzw. 6 Kanten ist dual zu der bei 4 bzw. 3 Kanten, indem je zwei unverbundene Ecken durch eine Kante verbunden und die Kanten, die vorher vorhanden gewesen waren, entfernt werden. Somit gibt es bei 5 Kanten 45 und bei 6 Kanten 6 mögliche Verteilungen der Kanten.

Insgesamt gibt es in diesem Fall 102 mögliche Kantenbelegungen für die Zeile.

$RRR|RRS_1$ : Diese Situation entspricht dem vorigen Fall  $RRR|RRR$ , nur für die  $S_1$ -Ecke besteht nur die Möglichkeit der Belegung mit einer Kante (und nicht mit zweien). Die Anzahl der Möglichkeiten halbiert sich daher.

Insgesamt gibt es in diesem Fall 51 mögliche Kantenbelegungen für die Zeile.

$RRR|RRS_0$ : Insgesamt können 3–4 horizontale Kanten auftreten.

- Bei 3 Kanten geht von jeder regulären Ecke aus  $RRR$  eine Kante zu einer der beiden gegenüberliegenden regulären Ecken aus, nicht alle dürfen bei der gleichen regulären Ecke enden: Es gibt  $2^3 - 2 = 6$  mögliche Verteilungen.
- Bei 4 Kanten müssen von jeder regulären Ecke aus  $RRS_0$  zwei Kanten zu zwei der drei regulären Ecken der anderen Eckenmenge ausgehen, wobei alle drei regulären Ecken erreicht werden müssen: Es gibt  $3^2 - 3 = 6$  mögliche Verteilungen.

Insgesamt gibt es in diesem Fall 12 mögliche Kantenbelegungen für die Zeile.

$RRS_1|RRS_1$ : Insgesamt können 3–5 horizontale Kanten auftreten. Die beiden  $S_1$  sind nicht durch eine Kante verbunden.

- Bei 3 Kanten gibt es  $3! - 2 = 4$  mögliche Verteilungen.
- Bei 4 Kanten gibt es in jeder Eckenmenge eine reguläre Ecke (im Folgenden „Sonderecke“), von der zwei Kanten ausgehen. Es gibt  $2 \cdot 2 = 4$  Möglichkeiten zur Auswahl der beiden Sonderecken.

Sind die Sonderecken nicht durch eine Kante verbunden, so sind die 4 Kanten bereits eindeutig bestimmt.

Sind die Sonderecken durch eine Kante verbunden, so geht von jeder Sonderecke eine Kante zu einer der übrigen Ecken, mindestens eine zu einer  $S_1$ -Ecke (3 Möglichkeiten). Die vierte Kante verbindet dann die beiden Ecken, die bisher ohne horizontale Kante sind, ist also eindeutig bestimmt.

Insgesamt gibt es in diesem Unterfall  $4 \cdot (1 + 3) = 16$  mögliche Verteilungen.

- Bei 5 Kanten müssen von jeder regulären Ecke zwei Kanten, von jeder  $S_1$ -Ecke eine Kante ausgehen. Die regulären Ecken, in denen die von den singulären Ecken ausgehenden Kanten enden, können auf  $2 \cdot 2 = 4$  Weisen ausgewählt werden.

Die anderen regulären Ecken müssen jeweils mit beiden regulären Ecken der anderen Eckenmenge verbunden sein, sind also eindeutig bestimmt. Damit sind alle Kanten verteilt. Somit gibt es in diesem Unterfall 4 mögliche Verteilungen.

Insgesamt gibt es in diesem Fall 24 mögliche Kantenbelegungen für die Zeile.

$RRS_1 | RRS_0$ : Insgesamt können 3-4 horizontale Kanten auftreten.

- Bei 3 Kanten geht von jeder Ecke aus  $RRS_1$  eine Kante zu einer der beiden regulären Ecken aus  $RRS_0$  aus, nicht alle dürfen bei der gleichen regulären Ecke enden: Es gibt  $2^3 - 2 = 6$  Möglichkeiten.
- Bei 4 Kanten gehen von jeder regulären Ecke aus  $RRS_0$  zwei Kanten zu zwei der drei Ecken aus  $RRS_1$  aus. Alle Ecken müssen erreicht werden, bei  $S_1$  darf nur eine Kante enden: Es gibt  $\frac{2}{3} \cdot (3^2 - 3) = 4$  mögliche Verteilungen.

Insgesamt gibt es in diesem Fall 10 mögliche Kantenbelegungen für die Zeile.

$RRS_0 | RRS_0$ : Insgesamt können 2-4 horizontale Kanten auftreten.

- Bei 2 Kanten ist jede reguläre Ecke der einen Eckenmenge mit genau einer regulären Ecke der anderen Eckenmenge verbunden und umgekehrt. Hierfür gibt es offenbar 2 Möglichkeiten.
- Bei 3 Kanten gibt es in jedem  $RRS_0$  eine reguläre Ecke, in der zwei Kanten enden (im Folgenden „Sonderecke“). Es gibt  $2 \cdot 2 = 4$  Möglichkeiten zur Auswahl der Sonderecken. Jede Sonderecke muss mit beiden regulären Ecken der anderen Kantenmenge verbunden sein. Damit sind alle Kanten verteilt. Hier gibt es 4 mögliche Kantenverteilungen.
- Bei 4 Kanten müssen beide reguläre Ecken der einen Eckenmenge mit beiden regulären Ecken der anderen Eckenmenge verbunden sein. Damit sind alle Kanten verteilt. Hier gibt es nur eine mögliche Verteilung.

Insgesamt gibt es in diesem Fall 7 mögliche Kantenbelegungen für die Zeile.

### Anzahl abstrakter $D$ -Graphen und untere Abschätzung für die Anzahl der Isometrieklassen

Aus der im vorigen Abschnitt bestimmten Anzahl der Kantenbelegungen pro Zeile wird nun die Anzahl abstrakter  $D$ -Graphen bestimmt und die Anzahl ihrer Isometrieklassen nach unten abgeschätzt.

Zur Anzahlbestimmung der Kantenbelegungen von  $D$ -Graphen ist es zweckmäßig, diese nach den Singularitätentypen der Eckenmengen aufzuteilen. Der Singularitätentyp einer Eckenmenge mit  $x_0$  isolierten und  $x_1$  nicht-isolierten Singularitäten wird als  $x_1 S_1 + x_0 S_0$  notiert. Der reguläre Typ wird mit 0 bezeichnet. Der Singularitä-

tentyp des  $D$ -Graphen setzt sich aus den Singularitätentypen der beiden Eckenmengen zusammen und wird in der Form  $x_1S_1 + x_0S_0 : y_1S_1 + y_0S_0$  notiert.

Wegen Bedingung (iii) ist  $x_1 + x_0 \leq 3$ ,  $y_1 + y_0 \leq 3$  und wegen Bedingung (v) ist  $x_0 = y_0$ .

In vielen Fällen bestimmen die Singularitätentypen der beiden Eckenmengen bereits die mögliche Anzahl der Kantenbelegungen. In einigen Fällen hängt sie aber auch von der relativen Lage der Singularitäten in den beiden Eckenmengen zueinander ab.

Für jeden Singularitätentyp von  $D$ -Graphen (Spalte 1 der folgenden Tabelle) wird zunächst die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten der Singularitäten ermittelt (Spalte 2). Asymmetrische Typen werden mit dem durch Vertauschung der Eckenmengen entstehenden Typ zusammengefasst, so dass die Anzahl sich verdoppelt. Die folgenden Spalten 3–5 geben die Anzahlen der möglichen Kantenbelegungen pro Zeile gemäß den Ergebnissen des vorigen Abschnitts an. Durch Multiplikation der 4 Zahlenwerte erhält man pro Zeile die Anzahl abstrakter  $D$ -Graphen zu diesem Singularitätentyp (Spalte 6).

Singularitätentyp des $D$ -Graphen	Anordnungsmög-lichkeiten der Singularitäten	Kanten-belegungen pro Zeile			$D$ -Graphen
$0 : 0$	1	102	102	102	1061208
$0 : S_1$	18	102	102	51	9550872
$0 : 2S_1$	36	102	51	51	9550872
$0 : 3S_1$	12	51	51	51	1591812
$S_1 : S_1$ (in einer Zeile)	27	102	102	24	6741792
$S_1 : S_1$ (in zwei Zeilen)	54	102	51	51	14326308
$S_1 : 2S_1$ (in zwei Zeilen)	216	102	51	24	26967168
$S_1 : 2S_1$ (in drei Zeilen)	108	51	51	51	14326308
$S_1 : 3S_1$	108	51	51	24	6741792
$2S_1 : 2S_1$ (in zwei Zeilen)	108	102	24	24	6345216
$2S_1 : 2S_1$ (in drei Zeilen)	216	51	51	24	13483584
$2S_1 : 3S_1$	216	51	24	24	6345216
$3S_1 : 3S_1$	36	24	24	24	497664
$S_0:S_0$ (in einer Zeile)	27	102	102	7	1966356
$S_0:S_0$ (in zwei Zeilen)	54	102	12	12	793152
$S_1 + S_0:S_0$ ( $S_1 - S_0$ in einer Zeile)	216	102	12	10	2643840
$S_1 + S_0:S_0$ ( $S_0 - S_0$ in einer Zeile)	216	102	51	7	7865424
$S_1 + S_0:S_0$ (in drei Zeilen)	216	51	12	12	1586304

Singularitätentyp des $D$ -Graphen	Anordnungsmöglichkeiten der Singularitäten	Kantenbelegungen pro Zeile			$D$ -Graphen
		51	12	10	
$2S_1 + S_0:S_0$ ( $S_1 - S_0$ in einer Zeile)	216	51	12	10	1321920
$2S_1 + S_0:S_0$ ( $S_0 - S_0$ in einer Zeile)	108	51	51	7	1966356
$S_1 + S_0:S_1 + S_0$ ( $S_1 - S_1$ und $S_0 - S_0$ in einer Zeile)	216	102	24	7	3701376
$S_1 + S_0:S_1 + S_0$ ( $S_1 - S_0$ und $S_0 - S_1$ in einer Zeile)	216	102	10	10	2203200
$S_1 + S_0:S_1 + S_0$ (nur $S_1 - S_1$ in einer Zeile)	216	24	12	12	746496
$S_1 + S_0:S_1 + S_0$ (nur $S_0 - S_0$ in einer Zeile)	216	51	51	7	3932712
$S_1 + S_0:S_1 + S_0$ (nur $S_0 - S_1$ in einer Zeile)	432	51	12	10	2643840
$2S_1 + S_0:S_1 + S_0$ ( $S_1 - S_1$ und $S_0 - S_0$ in einer Zeile)	432	51	24	7	3701376
$2S_1 + S_0:S_1 + S_0$ ( $S_1 - S_1$ und $S_1 - S_0$ in einer Zeile)	432	24	12	10	1244160
$2S_1 + S_0:S_1 + S_0$ ( $S_1 - S_0$ und $S_0 - S_1$ in einer Zeile)	432	51	10	10	2203200
$2S_1 + S_0:2S_1 + S_0$ ( $S_0 - S_0$ in einer Zeile)	108	24	24	7	435456
$2S_1 + S_0:2S_1 + S_0$ ( $S_0 - S_0$ nicht in einer Zeile)	216	24	10	10	518400
$2S_0:2S_0$ (in zwei Zeilen)	108	102	7	7	539784
$2S_0:2S_0$ (in drei Zeilen)	216	12	12	7	217728
$S_1+2S_0:2S_0$ ( $S_1 - S_0$ in einer Zeile)	432	12	10	7	362880
$S_1+2S_0:2S_0$ ( $S_1 - S_0$ nicht in einer Zeile)	216	51	7	7	539784
$S_1+2S_0:S_1+2S_0$ ( $S_1 - S_1$ in einer Zeile)	108	24	7	7	127008
$S_1+2S_0:S_1+2S_0$ ( $S_1 - S_1$ nicht in einer Zeile)	216	10	10	7	151200
$3S_0:3S_0$	36	7	7	7	12348
<b>Summe</b>					<b>158954112</b>

Somit gibt es 158 954 112 abstrakte  $D$ -Graphen.

Da die Anzahl der Isometrien von  $D$ -Graphen  $\#\Omega = 2 \cdot 6^3 = 432$  beträgt, enthält jede Isometrieklasse maximal 432  $D$ -Graphen. Somit ist die Anzahl der Isometrieklassen mindestens  $158\,954\,112 / 432$ , also mindestens 367 950. Damit ist Satz 6.5 bewiesen.

## 4 Beweis von Satz 6.12 in Abschnitt 6.7

Die allgemeinen Aussagen des Satzes ergeben sich aus der Einzelfalluntersuchung.

Für die Bestimmung der Isometrietypen kommen die Methoden aus Kapitel 7 zur Anwendung. Dazu sind die (Zeilen-)Diagramme  $\partial a$  und  $\partial c$  von  $a$  und  $c$  herzustellen.  $\partial a$  entsteht aus dem Regulativ-Block  $b$ , indem jede Ziffer durch ihre Zeilenummer in  $a$  ersetzt wird.  $\partial c$  entsteht aus dem Regulativ-Block  $b$ , indem jede Ziffer durch ihre Zeilenummer in  $c$  ersetzt wird.

Aufgrund der Fixsudoku-eigenschaft können die Zeilen von  $a$  und  $c$  aus den Zeilen von  $b$  durch die Formeln  $a_i = \alpha b_i$  und  $c_i = \alpha^{-1} b_i$  gewonnen werden. Daher erhält man die Diagramme leicht aus den angegebenen Anordnungen. Es ist dabei unerheblich, in welche Richtung  $\alpha$  die Bereiche verschiebt, eine Umkehrung führt nur zur Vertauschung der beiden Diagramme, was für die Auswertung keine Rolle spielt. Nur muss die Verschiebung eines Bereichs in den beiden Diagrammen in entgegengesetzten Richtungen erfolgen. Bei gleichläufig operierendem  $\alpha$  wurde in der Tabelle in  $\partial a$  jeweils nach rechts und in  $\partial c$  nach links verschoben.

Die Diagramme werden nach dem Vorgehen in Kapitel 7 ausgewertet: Über Matchings wird nach Lemma 7.9 und Satz 7.7 der Zusammenhangstyp des  $D$ -Graphen ermittelt, der in vielen Fällen schon den Isometriotyp bestimmt, wie den Sätzen 7.8–7.13 entnommen werden kann. In einigen Fällen sind noch Varianten möglich. Sofern dies der Fall ist, werden im Anschluss an die Tabelle die Zusatzkriterien zur Bestimmung der Variante ausgewertet. Im regulären Fall wird der Isometriotyp nach Satz 7.8 durch die Distanz der Eckenmengen bestimmt.

Lfd. Nr.	$\alpha$ -Ope- ration	Anordnung der Zykel	Diagramme $\partial a$ und $\partial c$ gemäß Abschnitt 7.1	Matchings, Isometriotyp																		
1	(3)		<table border="1"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table>	1	1	1	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3 Matchings regulärer Zeilen: $3.T_6$
1	1	1																				
2	2	2																				
3	3	3																				
1	1	1																				
2	2	2																				
3	3	3																				
2	(3)		<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table>	2	1	1	2	2	1	3	3	3	1	2	1	2	2	1	3	3	3	1 Matching regulärer Zeilen, 1 Matching regulärer Paare, 2 Matchings eines reg. Paars mit 2 Sing.: $T_6 \perp C_4 \perp 2.B_4^2$
2	1	1																				
2	2	1																				
3	3	3																				
1	2	1																				
2	2	1																				
3	3	3																				
3	(3)		<table border="1"> <tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr> </table>	3	1	1	2	1	2	3	3	2	2	1	1	2	3	2	3	3	1	3 Matchings von Sonderspalten: $3.K_6^2(6)$ (Variante a)
3	1	1																				
2	1	2																				
3	3	2																				
2	1	1																				
2	3	2																				
3	3	1																				
4	(3,3)		<table border="1"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table>	1	1	1	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3 Matchings regulärer Zeilen: $3.T_6$
1	1	1																				
2	2	2																				
3	3	3																				
1	1	1																				
2	2	2																				
3	3	3																				

Lfd. Nr.	$\alpha$ -Ope- ration	Anordnung der Zykel	Diagramme $\partial\alpha$ und $\partial c$ gemäß Abschnitt 7.1	Matchings, Isometriotyp																		
5	(3,3) gleich- läufig		<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table>	2	1	2	1	2	1	3	3	3	1	2	2	2	1	1	3	3	3	Regulär, Distanz 2: $R_{12}(22) \perp T_6$
2	1	2																				
1	2	1																				
3	3	3																				
1	2	2																				
2	1	1																				
3	3	3																				
6	(3,3) gegen- läufig		<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table>	2	1	2	2	1	1	3	3	3	1	2	2	1	2	1	3	3	3	1 Matching regulärer Zeilen, 2 Matchings regulärer Paare, 2 Matchings von Singularitäten: $T_6 \perp 2.C_4 \perp 4.I$
2	1	2																				
2	1	1																				
3	3	3																				
1	2	2																				
1	2	1																				
3	3	3																				
7	(3,3)		<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table>	2	1	1	2	2	1	3	3	3	1	2	1	2	2	1	3	3	3	1 Matching regulärer Zeilen, 1 Matching regulärer Paare, 2 Matchings eines reg. Paars mit 2 Sing.: $T_6 \perp C_4 \perp 2.B_4^2$
2	1	1																				
2	2	1																				
3	3	3																				
1	2	1																				
2	2	1																				
3	3	3																				
8	(3,3) gleich- läufig		<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table>	2	1	1	3	2	1	3	3	2	1	2	1	2	3	1	3	3	2	1 Matching regulärer Paare: $K_{14}^4(18) \perp C_4$ (Variante a)
2	1	1																				
3	2	1																				
3	3	2																				
1	2	1																				
2	3	1																				
3	3	2																				
9	(3,3) gegen- läufig		<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table>	2	1	1	2	3	1	3	3	2	1	2	1	3	2	1	3	3	2	1 Matching regulärer Paare, 2 Matchings von Sonderspalten: $2.K_6^2(6) \perp C_4 \perp 2.I$
2	1	1																				
2	3	1																				
3	3	2																				
1	2	1																				
3	2	1																				
3	3	2																				
10	(3,3) gleich- läufig		<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table>	2	1	1	3	2	1	3	2	3	1	2	1	3	2	1	3	3	2	1 Matching von Sonderspalten, 2 Matchings regulärer Paare, 2 Matchings von Singularitäten: $K_6^2(6) \perp 2.C_4 \perp 4.I$
2	1	1																				
3	2	1																				
3	2	3																				
1	2	1																				
3	2	1																				
3	3	2																				
11	(3,3) gegen- läufig		<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr> </table>	2	1	1	3	2	1	3	3	2	1	2	1	3	2	1	3	2	3	Die 2-en in $\partial c$ sind als Menge identisch mit einer Regulativspalte: Die Situation ist nicht als D-Graph realisierbar.
2	1	1																				
3	2	1																				
3	3	2																				
1	2	1																				
3	2	1																				
3	2	3																				
12	(3,3) gleich- läufig		<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table>	2	1	2	2	3	1	1	3	3	1	2	3	2	1	1	2	3	3	1 Matching eines regulären Paars mit 2 Singularitäten: $K_{14}^2(21) \perp B_4^2$ (Variante a)
2	1	2																				
2	3	1																				
1	3	3																				
1	2	3																				
2	1	1																				
2	3	3																				
13	(3,3) gegen- läufig		<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table>	2	1	3	2	1	1	2	3	3	1	2	2	2	3	1	1	3	3	Die 2-en in $\partial\alpha$ sind als Menge identisch mit einer Regulativspalte: Die Situation ist nicht als D-Graph realisierbar.
2	1	3																				
2	1	1																				
2	3	3																				
1	2	2																				
2	3	1																				
1	3	3																				

Lfd. Nr.	$\alpha$ -Ope- ration	Anordnung der Zykel	Diagramme $\partial\alpha$ und $\partial c$ gemäß Abschnitt 7.1	Matchings, Isometriotyp																		
14	(3, 3) gleich- läufig		<table border="1"> <tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td></tr> </table>	3	3	1	2	1	1	2	3	2	2	2	1	2	3	3	1	3	1	3 Matchings von Sonderspalten: $3.K_6^2(6)$ (Variante a)
3	3	1																				
2	1	1																				
2	3	2																				
2	2	1																				
2	3	3																				
1	3	1																				
15	(3, 3) gegen- läufig		<table border="1"> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> </table>	3	2	1	2	1	3	1	3	2	2	3	1	2	3	1	2	3	1	Alle $c_i$ sind als Menge identisch mit einer Regulativspalte: Die Situation ist nicht als $D$ -Graph realisierbar.
3	2	1																				
2	1	3																				
1	3	2																				
2	3	1																				
2	3	1																				
2	3	1																				
16	(3, 3, 3)		<table border="1"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table>	1	1	1	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3 Matchings regulärer Zeilen: $3.T_6$
1	1	1																				
2	2	2																				
3	3	3																				
1	1	1																				
2	2	2																				
3	3	3																				
17	(3, 3, 3) 1.+2. Zeile gleich- läufig		<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table>	2	1	2	1	2	1	3	3	3	1	2	2	2	1	1	3	3	3	Regulär, Distanz 2: $R_{12}(22) \perp T_6$
2	1	2																				
1	2	1																				
3	3	3																				
1	2	2																				
2	1	1																				
3	3	3																				
18	(3, 3, 3) 1.+2. Zeile gegen- läufig		<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table>	2	1	2	2	1	1	3	3	3	1	2	2	1	2	1	3	3	3	1 Matching regulärer Zeilen, 2 Matchings regulärer Paare, 2 Matchings von Singularitäten: $T_6 \perp 2.C_4 \perp 4.I$
2	1	2																				
2	1	1																				
3	3	3																				
1	2	2																				
1	2	1																				
3	3	3																				
19	(3, 3, 3) gleich- läufig		<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>	2	1	3	3	2	1	1	3	2	1	2	3	2	3	1	3	1	2	Regulär, Distanz 6: $R_{18}(36)$
2	1	3																				
3	2	1																				
1	3	2																				
1	2	3																				
2	3	1																				
3	1	2																				
20	(3, 3, 3) gegen- läufig		<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table>	2	1	3	3	2	1	3	1	2	1	2	3	2	3	1	1	3	2	2 Matchings von Singularitäten: $R_{14}(24) \perp 4.I$
2	1	3																				
3	2	1																				
3	1	2																				
1	2	3																				
2	3	1																				
1	3	2																				
21	(3, 3, 3) gleich- läufig		<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table>	2	1	2	3	3	1	1	2	3	1	2	3	3	1	1	2	3	2	Regulär, Distanz 4: $R_{18}(34)$
2	1	2																				
3	3	1																				
1	2	3																				
1	2	3																				
3	1	1																				
2	3	2																				
22	(3, 3, 3) Co- Diag. gegen- läufig		<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table>	2	1	3	3	1	1	2	2	3	1	2	2	3	3	1	1	3	2	1 Matching von Sonderspalten, 2 Matchings regulärer Paare, 2 Matchings von Singularitäten: $K_6^2(6) \perp 2.C_4 \perp 4.I$
2	1	3																				
3	1	1																				
2	2	3																				
1	2	2																				
3	3	1																				
1	3	2																				
23	(3, 3, 3) sonstig gegen- läufig		<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr> </table>	2	1	2	3	3	1	1	3	2	1	2	3	3	1	1	2	2	3	1 Matching regulärer Paare, 1 Matching von Singularitäten: $K_{12}^2(18) \perp C_4 \perp 2.I$
2	1	2																				
3	3	1																				
1	3	2																				
1	2	3																				
3	1	1																				
2	2	3																				

Lfd. Nr.	$\alpha$ -Ope- ration	Anordnung der Zykel	Diagramme $\partial\alpha$ und $\partial c$ gemäß Abschnitt 7.1	Matchings, Isometriotyp																		
24	(3, 3, 3) gleich- läufig		<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	3	3	3	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1	Regulär, Distanz 0: $3.T_6$
3	3	3																				
1	1	1																				
2	2	2																				
2	2	2																				
3	3	3																				
1	1	1																				
25	(3, 3, 3) gegen- läufig		<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>3</td><td><b>3</b></td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td><b>1</b></td></tr> <tr><td><b>2</b></td><td>1</td><td>2</td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td><b>2</b></td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td><b>3</b></td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td><b>1</b></td></tr> </table>	3	<b>3</b>	2	3	1	<b>1</b>	<b>2</b>	1	2	<b>2</b>	2	3	1	<b>3</b>	3	1	2	<b>1</b>	3 Matchings von Sonderspalten: $3.K_6^2(6)$ (Variante a)
3	<b>3</b>	2																				
3	1	<b>1</b>																				
<b>2</b>	1	2																				
<b>2</b>	2	3																				
1	<b>3</b>	3																				
1	2	<b>1</b>																				

### Herleitung der Varianten

#### Lfd. Nr. 3

Das von der ersten Regulativ-Spalte definierte  $K_6^2(6)$  enthält die Singularitäten **2** in  $\partial\alpha$  und **3** in  $\partial c$ . Die zugehörigen regulären Paare liegen in verschiedenen Spalten des Regulativs, also liegen die beiden Singularitäten in verschiedenen Spalten des  $D$ -Graphen. Nach Satz 7.13 liegt Variante a von  $3.K_6^2(6)$  vor.

#### Lfd. Nr. 8

Ein Matching regulärer Paare als einziges Matching, d. h. ein  $C_4$  als einzige kleine Komponente, kommt in Satz 7.11 nur bei den Typen L5, L6 und L9 vor. Zu ihrer Unterscheidung werden die beiden Singularitäten, die mit regulären Zeilen verbunden sind (hier **1** in  $\partial\alpha$  und **1** in  $\partial c$ ) und die beiden Singularitäten, die mit regulären Paaren verbunden sind (hier **3** in  $\partial\alpha$  und **3** in  $\partial c$ ), daraufhin verglichen, ob sie im  $D$ -Graphen in gleichen oder verschiedenen Spalten stehen, d. h. ob die zugehörigen regulären Paare in  $\partial\alpha$  und  $\partial c$  in gleichen oder verschiedenen Spalten stehen.

Die regulären Paare 1 in  $\partial\alpha$  und 1 in  $\partial c$  stehen in der gleichen Spalte, die regulären Paare 3 in  $\partial\alpha$  und 3 in  $\partial c$  in verschiedenen Spalten. Nach den Untersuchungen im Vorfeld von Satz 7.11 liegt Variante a von  $K_{14}^4(18) \perp C_4$  vor.

#### Lfd. Nr. 12

Ein Matching eines regulären Paars mit 2 Singularitäten als einziges Matching, d. h. ein  $B_4^2$  als einzige kleine Komponente, kommt in Satz 7.11 nur bei den Typen R2 und R3 vor. Zu ihrer Unterscheidung wird die Singularität, die zum regulären Paar des Baums gehört (hier **3** in  $\partial c$ ), daraufhin untersucht, ob sie mit einem regulären Paar oder mit einer regulären Zeile verbunden ist. Hier ist sie mit dem regulären Paar 3 in  $\partial\alpha$  verbunden. Nach den Untersuchungen im Vorfeld von Satz 7.11 liegt Variante a von  $K_{14}^2(21) \perp B_4^2$  vor.

**Lfd. Nr. 14**

Das von der ersten Regulativ-Spalte definierte  $K_6^2(6)$  enthält die Singularitäten **3** in  $\partial a$  und **1** in  $\partial c$ . Die zugehörigen regulären Paare liegen in verschiedenen Spalten des Regulativs, also liegen die Singularitäten in verschiedenen Spalten des  $D$ -Graphen. Nach Satz 7.13 liegt Variante  $a$  von  $3.K_6^2(6)$  vor.

**Lfd. Nr. 25**

Das von der ersten Regulativ-Spalte definierte  $K_6^2(6)$  enthält die Singularitäten **2** in  $\partial a$  und **2** in  $\partial c$ . Die zugehörigen regulären Paare liegen in verschiedenen Spalten des Regulativs, also liegen die Singularitäten in verschiedenen Spalten des  $D$ -Graphen. Nach Satz 7.13 liegt Variante  $a$  von  $3.K_6^2(6)$  vor.  $\square$

## 5 Abschätzung der Anzahl der algebraischen Sudokus

Es bezeichne  $\Xi$  die Menge

$$\Xi := \{(\varphi, A) \in G \times X : \varphi A \in Z A\}$$

Offenbar ist einerseits

$$\#\Xi = \sum_{A \in X} \#G_A$$

mit den Semifixgruppen  $G_A := \{\varphi \in G : \varphi A \in Z A\}$  der Sudokus  $A \in X$  und andererseits

$$\#\Xi = \sum_{\varphi \in G} \#X_\varphi$$

mit den Semifixmengen  $X_\varphi := \{A \in X : \varphi A \in Z A\}$  der Operatoren  $\varphi \in G$ .

Somit folgt für die Anzahl  $N_{\text{alg}}$  der algebraischen Sudokus

$$\begin{aligned} N_{\text{alg}} &= \#\{A \in X : G_A \setminus 1 \neq \emptyset\} \\ &\leq \sum_{A \in X} \#(G_A \setminus 1) = \sum_{A \in X} \#G_A - \#X \\ &= \#\Xi - \#X = \sum_{\varphi \in G} \#X_\varphi - \#X, \end{aligned}$$

also

$$N_{\text{alg}} \leq \sum_{\varphi \in G \setminus 1} \#X_\varphi.$$

Wegen  $\#X_\varphi = \#X_\psi$  für  $\varphi \sim \psi$  folgt mit einem Vertretersystem  $V$  der Konjugiertenklassen von  $G$

$$\sum_{\varphi \in G \setminus 1} \#X_\varphi = \sum_{\varphi \in V \setminus 1} \#\langle \varphi \rangle \cdot \#X_\varphi$$

Die Anzahlen  $\#\langle\varphi\rangle$  und  $\#X_\varphi / 9!$  können den Spalten  $\#C_m$  und  $\#(Z \setminus X)_{\varphi_m}$  von Tabelle 4.5 entnommen werden. Die  $\varphi_m$  durchlaufen dort ein Vertretersystem der Konjugationsklassen von  $G$ , wobei  $\varphi_1$  der Konjugationsklasse 1 entspricht. Man erhält:

$$N_{\text{alg}} \leq \sum_{\varphi \in V \setminus 1} \#\langle\varphi\rangle \cdot \#X_\varphi = 949\,129\,933\,824 \cdot 9!$$

Der Zeile  $m = 1$  der Tabelle entnimmt man die Gesamtzahl der Sudokus:

$$N := \#X = 18\,383\,222\,420\,692\,992 \cdot 9!.$$

Für den Anteil der algebraischen Sudokus folgt

$$N_{\text{alg}}/N \leq 0,000\,052.$$

Zum Vergleich: Der im Anschluss an (3.15') zu 0,000 000 081 bestimmte Anteil der Fixsudokus ist wesentlich kleiner.



# Literatur

- [1] Blum, W., Neun Ziffern gegen Einen. Populäre Darstellung in SZ Wissen 12/2006.
- [2] Bundschuh, P., Einführung in die Zahlentheorie, Springer-Verlag 1998–2007.
- [3] Elsholz, C. – Mütze, A., Sudoku im Mathematikunterricht. Math. Sem. Ber. 39, 69–93 (2007).
- [4] Felgenhauer, B. – Jarvis, F., Mathematics of Sudoku I, Math. Spektrum 39, 15–22 (2006).
- [5] Herzberg, A. M. – Murty, M. R., Sudoku squares and chromatic polynomials. Notices AMS 6, 708–717 (2007).
- [6] Jussien, N., A–Z of Sudoku, ISTE London 2009. Transl. from the 2006-French Original.
- [7] Jones, S. K. – Perkins, S. – Roach, P. A., Properties, isomorphisms and enumeration of 2-quasi-magic Sudoku grids, Discrete Math. 311, 1098–1110 (2011).
- [8] Jehne, W., Mathematische Theorie der  $4 \times 4$ -Sudoku, MS 2006.
- [9] Klotz, W. – Sander, T., Wie kommt Sudoku zu ganzzahligen Eigenwerten?, Math. Sem. Ber. 57, 169–183 (2010).
- [10] Lorch, J., Mutually orthogonal families of linear Sudoku solutions, J. Aust. Math. Soc. 87, 409–420 (2009).
- [11] Morrison, R., The world beater, The Times June 30, 2006.
- [12] Neunhöffer, M., Sudokus und Symmetrie, 2011,  
<http://neunhoefer.host.cs.st-andrews.ac.uk/Publications/pdf/sudoku.pdf>
- [13] Ostermann, F., Die Fixsudokus der Sudokugruppe, 2010,  
homepage: <http://www.f-ostermann.de>
- [14] Russel, E. – Jarvis, F., There are 5 472 730 538 essentially different Sudoku grids and the Sudoku symmetric group,  
<http://www.afjarvis.staff.sef.ac.uk/sudoku/sudokugroup.html.2005>
- [15] Russel, E. – Jarvis, F., Mathematics of Sudoku II, Math. Spectrum 39, 54–58 (2006).
- [16] Schönhage, A., Notizen zum 4er-Fall und zur Struktur der Anzahlformel, MS 2006
- [17] Schönhage, A., Einige Sudoku-Studien 2010,  
homepage <http://www.iai.uni-bonn.de/~schoe/sudoku/sudoc.html>
- [18] Schönhage, A., Ein Algorithmus zum Erkennen von Fixsudokus, 2008.



# Stichwortverzeichnis

## A

Adjungierte Graphen

- $\Omega$ - und  $E$ -Graph 248
- $E\Omega$ -Graph 249

## B

Bahnlängen 114

Bereich

- adäquater 115

Block

- Blockfigur 21

- Blockgruppe  $\Gamma_0$  12

- volle  $\Gamma$  14

- Blockschema 20

- Blockbasis 20

- generisches 21

- Rang 20

## C

Charakteristik 41, 275

- komplementäre 41

Clanbildung 170

- Clans zu den Gestalten 171

- Diagonalclans 172, 173

- Großclans 180

- Winkelclans 172

## D

Diagramme 234

- abstrakte 238

- Diagramm eines  $D$ -Graphen 238

- eigentliche, uneigentliche 239

- Matching 252

- Orientierung von Singularitäten 235

- Orientierungsmatrix 236, 239

- reguläres Paar 235

- zugehörige Singularität 235

- Sonderspalten 236

Distanz 217

- -matrix 228

- innere 228

Dominographen 149

- abstrakte 157

- ähnliche 163, 196

- Domino 151, 247

- Dominobegleiter 154

- Domino-Prozess 152

- Eckentafel 162, 196

- eigentliche, uneigentliche 158, 191

- Komponentenzerlegung 161

- konkrete 157

- Rechteckeffekte 165, 194

- reguläre Ecken, Zeilen 150

- reguläre, singuläre 188

- Regulativ 151

- singuläre Ecken, Zeilen 150

- singulärer Ort 162

- Typenauflistung 191

## F

Figuren

- Blockfiguren 21

- Winkelfiguren 37

- Winkelproblem 46

Fixgleichung 98

- allgemeine 110

- homogene 98

- lokale 101

- rein-globale 116

## G

Gestalten

- vertikale, horizontale 169

- Winkelgestalt 169

G-Mengen

- abstrakt 75

- Leaderbasis 76

- vom Sudoku-Typ 76

Gruppen

- Blockgruppe  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma$  12, 14

- duale 13

- Mischgruppe:kleine  $M$  62

- Mischgruppe:totale  $G^*$  62

- Sudokugruppe  $G$  12

- Zifferngruppe  $Z$  61

## I

Intersektionsmatrizen 215

- Äquivalenz 215

- Standard-Vertreter 216

Isometrien 159

- gerade, ungerade 160

- Isometriegruppe 160
  - Isometrieklassen 161
  - isometrisch 161
  - komponentenweise 195
  - lokale, globale 160
- K**
- Komponenten 161
    - Baumkomponente  $B_4^2 = K_4^2(3)$  207
    - isotope 194
    - kleine, große 252
    - reguläre 6er-Tonne  $T_6 = R_6(9)$  194, 199
    - reguläres Rechteck  $C_4 = R_4(4)$  182, 194
    - singuläre  $K_6^2(6)$  203
    - triviale I 189
    - Typenaufstellung 193
  - Komponenten: reguläre, singuläre 166
- M**
- Matrizen
    - ähnliche 54
    - Blockmatrizen 53
    - fixe 55
    - Intersektionsmatrizen 215
    - Operatormatrizen 53, 110
    - Ordnungsmatrizen 91
    - Permutationsmatrizen 90
    - quasifixe 55
    - Typenmatrizen 91
- N**
- Normen
    - auf  $T^*$  31
    - Evolutor 111
    - Partialnorm 111
    - reduzierte 129
- O**
- Operationstyp
    - Bewegungsrichtung 223
    - rechts- und linkslaufender Träger von  $\alpha$  225
    - vertikaler, horizontaler 223
  - Operatoren 11
    - disjunkte 70
    - duale 35
    - Fixoperator 19
    - induzierte 18
    - konstante 16
    - Leitoperatoren 30, 98
    - Leitoperatoren:Standard- 121
    - lokale 12, 98
- parallele, orthogonale 183
  - parallele, orthogonale: - bzgl. Streifen 43
  - rein-globale 13, 55
  - semifixe 98
  - semifixe:zugehörige Ziffernwirkung 120
  - verschränkte 77
- P**
- Partitionen vom Typ (3,3,3)
  - Äquivalenz 215
  - Distanz 217
- S**
- Schalt-
    - graph 174
    - prozess:elementarer 166, 275
    - prozess:simultaner 170
  - Stamm eines Sudokus, Zweige 177
  - Sudoku Gruppe  $G$ 
    - lokale 12
    - rein-globale  $H^*$  13
  - Sudokus 11
    - algebraische 227
    - Clans von Sudokus 164
    - einfache 81
    - e-spezialle 63
    - fixe 19
    - Index 197
    - neutrale 19
    - Praesudoku 21
    - reduzierte 69
    - semifixe 98, 119
    - $\tau$ -semifixe 229
    - Sondersudoku 1. Art 46, 85
    - Sondersudoku 2. Art 57, 59, 86
    - spezielle 66
    - Sudokubedingung 21
    - Sudoku-Tripel 32
    - Superfixe 38
    - total-reguläre 181, 189
    - total-singuläre 181, 189
    - transzendente 227
    - Verschiebungssudoku 92, 200
- Z**
- Ziffern
    - Ergänzungen 63
    - Ziffernbegleiter 63
    - Ziffernwirkung 63, 123, 133
  - Zonen 83