



Mémoire de Master 2

Utilisation du Machine Learning dans l'élaboration d'un pricer de Reverse Convertible

Réalisé par :

Ruben Obadia

Encadré par :

Pr Yannick Malevergne

Résumé

This thesis aims to design and compare pricing methods for a barrier structured product known as the Reverse Convertible. We develop an interactive pricer based on three models : the Black-Scholes model, the Heston model with classical calibration, and the Heston model calibrated via Machine Learning. The Machine Learning approach significantly accelerates the calibration process of the Heston model without compromising pricing accuracy. A user-friendly graphical interface allows the selection of product parameters and visualization of pricing results. Our findings show that while the Black-Scholes model is faster, it tends to overestimate certain prices. Conversely, the Heston model calibrated through neural networks offers an excellent trade-off between precision and computational efficiency, making it a viable solution in banking applications. This work demonstrates the promising potential of Machine Learning in the field of quantitative finance, particularly for the fast calibration of complex models.

Remerciements

Je souhaite tout d'abord exprimer ma profonde gratitude à ma famille pour son soutien inconditionnel, ses encouragements constants et sa patience tout au long de mes études. Leur présence a été essentielle dans l'aboutissement de ce travail.

Je remercie également l'Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne pour la qualité des enseignements dispensés dans le cadre du Master 2 Finance de Marché et Gestion des Risques. Les cours approfondis, les échanges avec les enseignants ainsi que les ressources mises à disposition ont largement contribué à mon développement académique et professionnel.

Je tiens à adresser mes remerciements les plus sincères à Monsieur Kettani pour sa disponibilité et sa précieuse aide tout au long de mes recherches. Il a su répondre à chacune de mes questions avec enthousiasme et clarté, même sur les sujets les plus techniques.

Je remercie également Monsieur Malevergne pour l'encadrement de ce mémoire, ses conseils avisés, ainsi que sa disponibilité à chaque étape de ce travail. Sa rigueur scientifique et sa bienveillance ont été d'un grand soutien.

Enfin, je remercie chaleureusement les équipes de la Société Générale, et en particulier les structuriers avec lesquels j'ai eu l'opportunité d'échanger. Leur expertise et leur aide concrète, notamment sur les aspects techniques de certains modèles, m'ont permis de surmonter plusieurs blocages et d'enrichir considérablement ce mémoire.

À tous, merci.

Table des matières

Remerciements	2
Liste des figures	5
Liste des tableaux	5
Introduction	6
Revue de littérature	8
1 Introduction aux produits structurés	10
1.1 Historique et émergence des Produits Structurés en Finance	10
1.2 Composition, Caractéristiques et Classification des Produits Structurés	11
1.3 Les options barrières comme outils indispensables aux produits structurés	14
1.4 Définitions, mécanismes fondamentaux et construction de la Reverse Convertible	19
2 Présentations des modèles d'évaluation des options	22
2.1 Modèle de Black & Scholes	22
2.1.1 Hypothèses et résultats du modèles de Black & Scholes	22
2.1.2 Valorisation d'un Put Down & In européen	25
2.1.3 Détermination du delta d'un PDI sous le modèle de Black & Scholes	26
2.1.4 Limite du modèle de Black & Scholes	28
2.2 Modèle à volatilité stochastique : Heston	29
2.2.1 Hypothèses et résultats du modèle d'Heston	29
2.2.2 Valorisation d'un Put Down & In européen sous Heston	33
2.2.3 Détermination du delta d'un PDI sous le modèle d'Heston	36
2.2.4 Limite du modèle de Heston	38
2.3 Calibration des modèles	39
2.3.1 Objectifs de la calibration	39
2.3.2 Calibration du modèle de Black & Scholes	39
2.3.3 Calibration du modèle d'Heston	41
3 Valorisation de la Reverse Convertible	46
3.1 Utilisation du machine learning pour la calibration du modèle d'Heston	47
3.2 Pricing du Put Down & In	50
3.3 Un premier pas vers la couverture delta neutre	52
3.4 Construction du pricer	52
3.4.1 Calcul des coupons	53
3.4.2 Présentation du pricer	53
3.4.3 Résultats finaux et comparaison	54

Conclusion	56
A Annexe 1 - Apperçu du pricer	57
B Annexe B - Résultats de calcul stochastique	58
C Annexe C - Code Python	59
Bibliographie	60

Liste des figures

1	Profil segmenté d'évolution d'un produit structuré	13
2	Test de Breusch-Pagan sur les résidus de la régression linéaire multiple	13
3	Profils de rendement des options barrières	15
4	Extrait n°1 d'une factsheet de Reverse Convertible	19
5	Extrait n°2 d'une factsheet de Reverse Convertible	20
6	Payoff de la Reverse Convertible donnée en exemple	21
7	Surface de volatilité implicite - Black & Scholes	40
8	Surface de volatilité implicite - Heston	43
9	Comparaison du skew produit par BS & Heston sur le sous-jacent Amazon	44
10	Comparaison du skew produit par BS & Heston sur le sous-jacent Amazon	49
11	Pricer de BRC	57

Liste des tableaux

1	Formules des Grecques pour les modèles Heston et Black-Scholes-Merton	33
2	Volatilité implicite calibrée sous Black-Scholes comparée à la volatilité Yahoo pour la maturité de 5 jours.	40
3	Paramètres du modèle de Heston : valeurs initiales et calibrées	42
4	Extrait des prix du marché vs. prix issus du modèle de Heston	42
5	Temps d'exécution selon le nombre de surfaces simulées	48
6	Prix du Put Down & In sur Amazon sous Black-Scholes et Heston	51
7	Durées d'exécution totales pour chaque pricing.	55
8	Comparatif des prix PDI et coupons entre les modèles Heston et Black- Scholes.	55

Introduction

Comment gérer efficacement le risque d'un produit structuré ? Comment mesurer l'exposition d'un produit complexe à une variation du marché ? Si les acteurs des marchés financiers se sont longtemps appuyés sur les options vanilles pour se couvrir, le développement de structures plus sophistiquées a rendu la gestion du risque à la fois plus fine... et plus difficile.

Parmi ces instruments, les produits structurés occupent aujourd'hui une place centrale dans les portefeuilles. Conçus sur mesure, ils combinent une partie obligataire et une composante optionnelle afin de répondre à des objectifs précis : générer du rendement, offrir une protection partielle ou totale du capital, ou encore bénéficier de scénarios de marché définis. Mais cette richesse structurelle entraîne mécaniquement une complexité croissante en matière de valorisation et surtout de gestion des sensibilités, ces métriques qui mesurent comment le prix du produit réagit aux fluctuations du marché. Ainsi, nous nous intéresserons non seulement à ces métriques d'un point de vu mathématique, en justifiant leur utilité et leur expression mais également d'un point de vu pratique en implémentant ces mesures afin d'extraire une méthode fiable et rapide de les calculer.

Parmi les sensibilités les plus couramment utilisées figurent le Delta, qui mesure la variation du prix du produit par rapport au prix du sous-jacent. Ces indicateurs, appelés Greeks, jouent un rôle fondamental dans la gestion dynamique des risques : ils permettent aux desks de structuration et de trading d'ajuster leur couverture en fonction des mouvements de marché. Dans le cadre des options vanilles, ces sensibilités sont bien documentées, relativement stables et souvent accessibles via des formules fermées ou des dérivées analytiques. Cependant, cette simplicité disparaît dès lors qu'on s'intéresse à des produits plus complexes, comme les produits structurés, et en particulier à la Barrier Reverse Convertible (BRC). La BRC est un produit structuré combinant un coupon fixe, une exposition conditionnelle à la performance d'un sous-jacent, et un mécanisme de barrière qui active ou désactive la protection du capital. Sa valorisation implique donc des composants non linéaires, notamment issus d'options digitales ou barrières. Cette non-linéarité accentuée a pour conséquence directe de rendre les sensibilités instables dans certaines régions du domaine en particulier à l'approche de la barrière, où des sauts ou discontinuités peuvent apparaître dans le profil de payoff. De plus, les sensibilités n'étant plus continues ni monotones, cela complique leur interprétation économique et leur utilisation dans des stratégies de couverture. Le Delta peut changer brutalement de signe à proximité de la barrière. La situation est d'autant plus critique que le calcul de sensibilité repose souvent sur des approches numériques coûteuses, comme la simulation de Monte Carlo ou la différentiation finie, qui doivent être recalculées à chaque variation des conditions de marché. En pratique, cela signifie que l'obtention de sensibilités fiables pour une BRC peut représenter une charge computationnelle importante, tout en introduisant un risque d'erreur significatif si le modèle est mal calibré ou si les paramètres sont proches de zones instables.

Jusqu'à présent, ces sensibilités sont calculées à l'aide de modèles de valorisation classiques comme Black & Scholes, Heston, Dupire et associés à des méthodes numériques variées comme la finite difference¹ ou encore des méthodes basées sur les simulations de Monte Carlo. Mais ces approches présentent plusieurs limites : temps de calcul élevé, bruit numérique, recalibration fréquente, et difficulté à réagir rapidement en situation de stress ou pour des portefeuilles très larges.

C'est dans ce contexte que l'intelligence artificielle, et en particulier le machine learning supervisé, offre une nouvelle piste : celle d'approximer les sensibilités d'un produit structuré de manière directe, rapide, et stable, à partir des paramètres du produit et des conditions de marché. Bien que les banques utilisent encore des modèles de simulations de Monte Carlo ou des formules fermées, les calibrations lors des runs² de Barrier Reverse Convertible peuvent prendre plusieurs dizaines de minutes et demande l'utilisation d'une grande partie de la mémoire d'un ordinateur. En revanche, avec la mise en lumière de nombreux modèles utilisant le machine learning, les banques commencent depuis quelques années à s'intéresser aux alternatives moins coûteuses et qui s'adaptent mieux aux situations variées dont on peut faire face sur les marchés financiers.

Dans ce mémoire, nous proposons donc d'explorer une approche hybride entre modélisation classique et machine learning. Il sera ainsi question dans ce travail d'exposer d'une part les avantages et inconvénients liés à l'utilisation des simulations classiques que l'on retrouve actuellement en banque pour ensuite découvrir les alternatives que le machine learning peut proposer, par exemple, aux structurer dans leur pricing de BRC. Après avoir présenté les principes de construction des produits structurés et les mécanismes propres à la Barrier Reverse Convertible, nous étudierons la théorie du pricing et des sensibilités, leur importance en gestion du risque. Puis nous développerons un modèle d'apprentissage supervisé capable d'estimer instantanément le prix et le delta à partir d'un ensemble de caractéristiques structurelles permettant ainsi un hedging dynamique du produit. Enfin, nous comparerons les performances de ce modèle aux approches traditionnelles, tant en précision qu'en rapidité, et discuterons des cas d'usage opérationnels de cette méthode en salle de marché.

1. La méthode par différence finie permet la résolution numérique d'équations différentielles partielles complexes comme celles régies par le prix des options exotiques

2. En banque, un Run de BRC signifie le pricing d'un grand nombre de reverse convertibles en utilisant des caractéristiques différentes comme la maturité, le niveau de barrière, le sous-jacent observé ect...

Revue de littérature

Dans cette section de notre mémoire, nous allons citer, commenter et confronter différents travaux académiques portant sur les modèles d'évaluation des options, avec un accent particulier sur le modèle de Heston et les techniques modernes de calibration, notamment celles reposant sur le Machine Learning.

Ce mémoire a pour objectif d'évaluer des produits structurés de type Reverse Convertible en s'appuyant sur des modèles théoriques issus de la littérature financière. L'objectif de cette revue est de faire un état des lieux des contributions académiques pertinentes autour du pricing des produits structurés, des modèles stochastiques de volatilité, et des méthodes de calibration avancées.

Les produits structurés sont généralement construits à partir de deux composantes principales : une partie obligataire (typiquement une obligation zéro coupon) et une partie optionnelle reposant sur des stratégies d'options. Cette structuration permet de répondre à des objectifs variés tels que la protection du capital, la recherche de rendement ou encore l'effet de levier. Dans la littérature, ces produits sont classés en quatre grandes catégories : protection, optimisation, participation et levier, comme présenté dans plusieurs mémoires professionnels dont celui de Michael Tiedemann.

L'évaluation des options est une composante centrale dans le pricing de ces produits. Le modèle de Black-Scholes-Merton (1973), fondé sur l'hypothèse d'une volatilité constante et d'un mouvement brownien géométrique, est historiquement le plus utilisé dans les salles de marché et l'enseignement supérieur. Toutefois, ce modèle présente des limites, notamment son incapacité à reproduire des phénomènes de marché comme les sourires de volatilité observés sur les options vanilles.

Pour pallier ces limites, le modèle de Heston (1993) introduit une dynamique stochastique de la volatilité. Dans son article fondateur "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options", Steven L. Heston propose un modèle où la variance suit un processus de Cox-Ingersoll-Ross (CIR), permettant ainsi de capturer des effets comme la corrélation entre le sous-jacent et sa volatilité. Ce modèle est reconnu pour sa capacité à mieux ajuster les surfaces de volatilité implicite que le modèle de Black-Scholes.

La calibration du modèle de Heston constitue un enjeu majeur. En effet, les paramètres du modèle doivent être ajustés aux données de marché afin de reproduire les prix observés des options. La méthode traditionnelle repose sur la minimisation d'un critère d'erreur entre les prix de marché et les prix modèles à l'aide d'algorithmes d'optimisation non linéaire. Cependant, cette méthode est coûteuse en temps de calcul et sensible aux conditions initiales.

Face à ces limitations, des approches basées sur le Machine Learning ont récemment émergé. Plusieurs travaux, comme ceux de Horvath, Muguruza et Tomas (2021) dans leur article "Deep Learning Volatility : A Deep Neural Network Perspective on Heston Model Calibration", montrent que l'entraînement d'un réseau de neurones sur des surfaces de volatilité simulées permet une prédiction rapide et précise des paramètres du modèle de Heston. Cette méthode permet de contourner les lenteurs de la calibration classique et de réduire fortement le temps de calcul tout en maintenant une bonne précision.

Cette voie est renforcée par d'autres études telles que celle de Ruf et Wang (2020), "Neural Networks for Option Pricing and Hedging : A Literature Review", qui soulignent le potentiel des réseaux neuronaux pour apprendre la cartographie implicite entre la surface de volatilité et les paramètres d'un modèle stochastique. Ces approches, dites "data-driven", permettent une calibration quasi instantanée une fois le modèle entraîné.

Dans notre mémoire, nous exploitons cette avancée méthodologique en proposant une calibration du modèle de Heston via un réseau de neurones entièrement connecté, entraîné sur une base de données simulée. Cette approche permet de comparer de manière rigoureuse les performances des méthodes classiques et des méthodes par apprentissage, tant en précision qu'en rapidité.

Enfin, bien que le modèle de Black-Scholes demeure nettement plus rapide, nos résultats empiriques montrent que les différences de prix générées par ce modèle peuvent être significatives. Cela suggère une possible surévaluation des produits structurés par Black-Scholes, hypothèse que nous chercherons à vérifier en comparant nos résultats aux prix obtenus par utilisation d'un pricer professionnel.

1 Introduction aux produits structurés

Dans cette première partie, nous proposons au lecteur une introduction claire et structurée à la notion de produit structuré. Bien que ce terme soit largement répandu dans les salles de marché, les produits structurés restent encore souvent mal compris, y compris par des acteurs familiers des instruments financiers classiques. Leur complexité, leur grande diversité et leur construction sur mesure contribuent à cette méconnaissance.

L'objectif de cette section est donc de poser les fondations nécessaires à la compréhension du reste du mémoire. Nous expliquerons ce qu'est un produit structuré, quelles sont ses finalités économiques, de quoi il se compose, et comment il s'adapte au profil de risque de l'investisseur. Nous proposerons également une typologie des produits structurés, afin de mieux cerner les grandes familles existantes et de situer plus précisément la Barrier Reverse Convertible dans cet univers.

1.1 Historique et émergence des Produits Structurés en Finance

Les produits structurés sont nés du besoin fondamental qu'ont les traders, les entreprises ou tout investisseur qui souhaitent émettre des emprunts à moindre coût et recevoir des bénéfices périodiques, ou non, plus ou moins élevés, tout cela en minimisant leur risque. Historiquement, nous avons les emprunts obligataires qui pouvaient remplir ces besoins, soit par une obligation délivrant des coupons périodiques, soit avec une obligation de type zéro coupon. Les options, produits dérivés que nous avons longuement étudié dans la partie précédente, remplissent également une partie de ces besoins, à savoir la réduction des risques et la récupération d'un bénéfice à maturité. Ainsi, les investisseurs pouvaient autrefois échanger sur les marchés organisés des produits de couverture et de profit.

Toutefois, l'évolution des techniques financières et bancaires a permis d'ajouter à ces produits de couverture, sans risques pour certains, des fonctionnalités propres afin d'augmenter les rendements tout en minimisant les risques. C'est alors que les produits structurés sont apparus.

Échangés sur les marchés OTC et basés sur des stratégies d'options et autres produits dérivés, le caractère « sur mesure » des produits structurés les rend encore plus attractifs pour les investisseurs souhaitant contrôler le plus de risques possibles à la fois. Nous pourrions croire que ces produits, d'apparence exceptionnelle par leur grande flexibilité, sont rapidement devenus populaires et massivement échangés sur les marchés financiers, mais ce n'est pas le cas. En effet, aussi étonnant que cela puisse paraître, l'inverse s'est produit. Pour cause, la méfiance des investisseurs mêlée à la complexité de ces produits. Une étude du SIX Swiss Exchange sur l'évolution de la popularité des produits structurés en finance montre qu'avant 2006, moins de 6000 produits structurés étaient

échangés chaque année contre plus de 100 000 aujourd'hui en Suisse.

Il faudra attendre la crise économique de 2008, les « subprimes », pour voir une réelle percée des produits structurés sur les marchés. En utilisant des crédits immobiliers dans leur composition, les produits structurés ont été impactés par cette crise, les défauts de remboursements des crédits ont provoqué une dégradation de la notation des émetteurs et augmenté la méfiance des investisseurs. Toutefois, certains ont vu une opportunité d'investir dans des produits moins chers et à fort rendement.

En fait, les produits structurés s'adaptent aux situations et contextes économiques grâce à leur maniabilité. Ainsi, même durant les « subprimes », les émetteurs ont construit des produits intéressants. Dans un contexte économique sensible comme en 2008, la proposition de produits à capital garanti délivrant des coupons périodiques plus élevés que des obligations classiques a attiré de nombreux investisseurs.

Enfin, à la suite de cette crise, l'évolution des produits structurés a permis l'apparition de nouveaux mécanismes, plus intuitifs et faciles d'accès pour les investisseurs néophytes. En effet, nous retrouvons aujourd'hui toutes sortes de mécanismes, pouvant reposer uniquement sur une stratégie de deux options, comme l'achat d'un call et la vente d'un call de strike différent³, ou encore des stratégies sur des options exotiques.

1.2 Composition, Caractéristiques et Classification des Produits Structurés

D'un point de vue général, la composition des produits structurés n'a rien de compliqué. En effet, un produit structuré est créé en combinant des placements sur le marché monétaire, comme des Notes monétaires, ou obligataires, des obligations zéro coupon, avec des produits dérivés, généralement issus des stratégies d'options. Le résultat obtenu par l'assemblage de ces deux parties offrira à l'investisseur un profil de risque/rendement adapté et flexible, garantissant des coupons périodiques, une partie du capital investi ou bien même la totalité du capital investi, en fonction des caractéristiques fixées en amont de l'achat du produit.

Selon l'AMF, les produits structurés sont des « Placements (fonds d'investissement, obligations, etc.) dont la valeur dépend de l'évolution d'un actif financier (une action, un indice boursier, etc.) selon une formule de calcul connue lors de la souscription. »

La base obligataire dans les produits structurés représente le moyen de financement de la stratégie d'option. Une obligation est une dette émise par une entité : institution financière, État, qui rapporte des intérêts au détenteur. Dans le cas des produits structurés, l'obligation est de type zéro coupon et sera donc remboursée à maturité au pair, c'est-à-dire à 100%.

3. Il s'agit ici de la construction d'un Call Spread.

Comme indiqué précédemment, la base obligataire sert principalement à financer la partie optionnelle du produit. Cette partie permet le rendement du produit. En utilisant des options vanilles ou exotiques, le produit sera plus ou moins protégé en capital, ce qui, dans le cas d'un scénario défavorable, pourra entraîner une baisse du capital et, à maturité, un remboursement partiel du produit. Nous verrons par la suite des exemples de produits ainsi que leur mécanisme pour comprendre les causes d'une baisse de capital.

On peut alors comprendre qu'il existe deux types de produits structurés : les produits à capital garanti et les produits à capital non garanti. Dans le premier cas, l'investisseur souhaite s'assurer de la récupération de son capital initial à maturité. Ainsi, l'achat de l'obligation zéro coupon vient entièrement financer la stratégie optionnelle. Cela signifie que la somme prévue à maturité par le zéro coupon est exactement égale à la somme investie dans le produit. Toutefois, dans ce type de produit, l'investisseur devra faire attention au « rating » de l'émetteur. En effet, capital garanti ne signifie pas garantie de l'émetteur qui, en cas de faillite, aura un impact sur le capital de l'investisseur. C'est pourquoi la notation, le rating, permet à l'investisseur de choisir l'émetteur optimal dans son rapport au risque.

Le second type de produit, les produits à capital risqué, sont des produits de forme Reverse Convertible, dont nous allons étudier un exemple dans la partie 3 de ce mémoire. Cependant, capital risqué ne signifie pas sans aucune protection. En effet, certains mécanismes dans ce type de produit auront pour objectif de protéger le capital investi sous certaines conditions : par exemple, dans le cas d'un produit sur action, un mécanisme de barrière de protection du capital peut intervenir, c'est-à-dire que le capital est garanti tant que l'actif sous-jacent ne clôture pas en-dessous de cette barrière (à maturité dans le cas d'une barrière européenne).

Dans notre cadre d'étude, les produits structurés sont sous forme d'EMTN : Euro Medium Term Note. Il s'agit d'obligations de maturité moyenne émises par un émetteur qui se porte garant de l'émission. Le porteur d'un EMTN se retrouve créancier non sécurisé de la banque émettrice pour la partie zéro coupon. Voici le profil d'évolution simplifié d'un produit structuré :

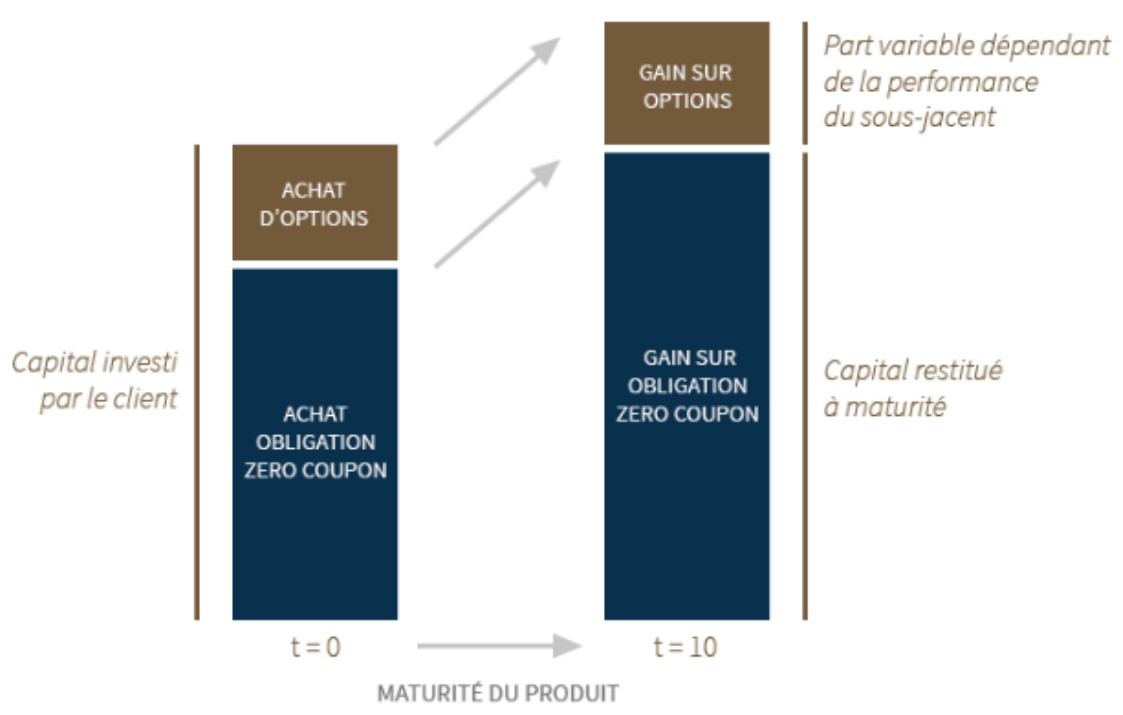


FIGURE 1 – Profil segmenté d'évolution d'un produit structuré

Ensuite, nous avons évoqué deux types de produits structurés. En réalité, ces deux types de produits se segmentent en quatre groupes :

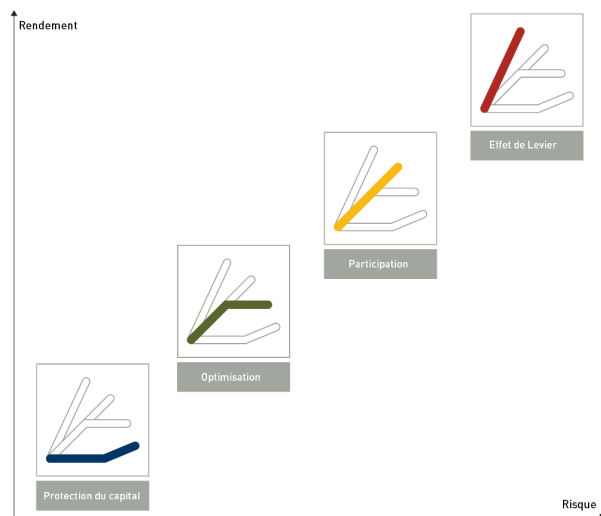


FIGURE 2 – Test de Breusch-Pagan sur les résidus de la régression linéaire multiple

Classés par niveau croissant de risque encouru, nous retrouvons en premier lieu les produits de protection du capital. Comme indiqué plus haut, ces produits confèrent de

faibles revenus périodiques en échange d'un capital garanti à maturité, c'est-à-dire qu'à maturité, l'investisseur récupère l'intégralité de son capital investi. Ces produits peuvent porter sur n'importe quelle classe d'actifs et conviennent à n'importe quelle situation économique, permettant de profiter d'une baisse ou d'une hausse du marché.

Ensuite, nous avons les produits d'optimisation de rendement. Ces produits offrent un gain limité, sujet à un cap. Cela signifie que l'investisseur peut récupérer jusqu'à un certain montant à maturité. De plus, ces produits confèrent une protection conditionnelle du capital. Comme évoqué précédemment, sous certaines conditions, le capital investi est sécurisé à maturité. Les investisseurs attirés par ce genre de produits espèrent une forte volatilité durant la détention du produit et sont légèrement averses au risque.

Continuons avec les produits de participation. Ils offrent une exposition à la performance du sous-jacent. Ainsi, tout en sécurisant son capital sous certaines conditions, l'investisseur pourra récupérer une performance non capée, à l'image d'un call. Ces produits présentent plus de risques, car les conditions sont plus restrictives et peuvent entraîner la perte de tout son capital sans gain.

Enfin, le dernier groupe de produits comprend les produits à effet de levier. Il s'agit des produits les plus risqués. En effet, bien que le gain potentiel soit important, accentué par un effet de levier, les pertes le sont également. Ainsi, un actif sous-jacent qui n'évolue pas selon les attentes peut rapidement entraîner une perte du capital.

En résumé, les produits structurés sont nombreux et couvrent l'ensemble des profils de risque que l'on peut retrouver sur le marché. De plus, ces produits offrent la possibilité d'investir sur différentes classes d'actifs et de monétiser des objets peu courants comme des spreads de taux. Aussi, les produits structurés sont une alternative pour les investisseurs ayant des stratégies précises et originales.

1.3 Les options barrières comme outils indispensables aux produits structurés

Maintenant que nous savons quels sont les fondamentaux des produits structurés : obligation zéro coupon et stratégie d'option, nous allons nous intéresser à ce qui alimente la stratégie d'option. Il est important de noter que n'importe quelle stratégie d'option peut se présenter sous forme de produits structurés à condition de financer ces options par l'achat d'une obligation zéro coupon.

Toutefois, dans ce mémoire, nous souhaitons étudier un type de produit structuré essentiel, la Reverse Convertible, à la base de nombreux produits « originaux » et pour cela, il sera indispensable de s'intéresser un peu plus aux options exotiques. Plus précisément, nous allons approfondir nos connaissances sur les options à barrière.

Comme son nom l'indique, ces options présentent un mécanisme supplémentaire par rapport aux Call et Put vanille : une barrière. Cette barrière peut prendre deux formes : activante ou désactivante. Dans le premier cas, un franchissement de la barrière entraînera l'activation de l'option ; dans le second cas, ce même franchissement entraînera une désactivation de l'option, c'est-à-dire que l'option n'aura plus de raison d'être.

De ces deux formes de barrière, nous pouvons construire quatre mécanismes : Up & In, Down & In, Up & Out et Down & Out. Ainsi, nous pouvons construire les graphiques suivants :

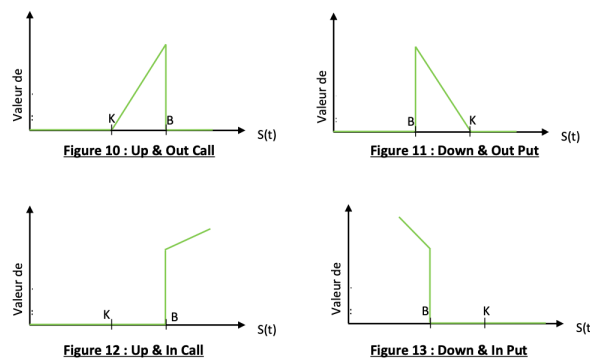


FIGURE 3 – Profils de rendement des options barrières

Commençons par noter que, pour chacune de ces options barrière, dans notre mémoire, nous observons le payoff à maturité. Cela signifie que la barrière ne fait effet qu'à maturité ; on parle de barrière de type européenne, en opposition aux barrières de type américaines, qui s'activent n'importe quand durant la vie de l'option lorsqu'elles sont franchies.

Le premier graphique montre un Call avec une barrière Up & Out, c'est-à-dire que ce Call a un sens, existe, qu'à condition que le sous-jacent clôture en dessous de ce niveau de barrière à maturité. Ainsi, par rapport à un Call classique, nous ajoutons un nouveau paramètre : le niveau de barrière B . Il est légitime de se demander pourquoi un investisseur souhaiterait détenir une option qui ne permet de récupérer la performance du sous-jacent que jusqu'à un certain montant. La raison est simple : cette option est moins coûteuse qu'un Call vanille car elle est plus risquée. En effet, l'investisseur risque de perdre tout son gain si le sous-jacent performe trop ; ce risque permet alors de diminuer le prix de ce Call. Enfin, cette barrière introduit une nouvelle sensibilité au Call. Nous pouvons, par exemple, remarquer que plus la barrière est proche du strike, moins le gain potentiel sera important et donc moins le prix de l'option sera élevé.

Illustrons ce nouveau concept à l'aide d'un exemple simple. Soit un Call Up & Out européen de strike $K = 100$, de spot $S_0 = 90$ et de barrière $B = 150$. Le payoff de cette option peut alors prendre trois chemins possibles :

- Soit, à maturité, S atteint un prix entre 100 et 150. Supposons pour notre exemple que $S = 130$, alors la barrière n'étant pas dépassée à maturité, nous obtenons un gain brut, c'est-à-dire en omettant le prix de l'option, $P = 130 - 100 = 30$.
- Soit, à maturité, S ne dépasse pas le strike et alors il n'y a pas de gain brut sur cette option ; l'investisseur perd sa prime.
- Sinon, à maturité, le prix de l'action dépasse la barrière. Ainsi, cette dernière s'active et l'investisseur perd sa prime sans récupérer la performance du sous-jacent.

Ensuite, nous avons le Put Down & Out. Toujours dans la catégorie des options à barrière désactivante, ce Put exotique permet à l'investisseur de récupérer la différence entre le strike et le prix du sous-jacent tant que ce dernier est au-dessus de la barrière de désactivation à maturité. Cela signifie qu'à maturité, un acheteur de Put Down & Out peut récupérer au maximum $K - B$ de gain.

Tout comme le Call Up & Out, une nouvelle sensibilité est introduite : la barrière désactivante. Ainsi, le prix de ce Put sera d'autant plus bas que la barrière sera proche du strike. En effet, une barrière proche du strike va restreindre le gain potentiel pouvant être réalisé sur l'option. En revanche, les restrictions sur le gain entraînent un coût d'option inférieur à un Put vanille. La stratégie derrière cette option barrière est simple : en anticipant une baisse plus ou moins modérée de la valeur du sous-jacent, l'investisseur réduira la prime d'option allouée à l'achat de ce Put et maximisera ainsi ses bénéfices.

Prenons un exemple : soit un Put Down & Out de strike K , de spot S_0 et de barrière B tel que $B < K < S_0$. Alors, à maturité T , l'investisseur pourra récupérer :

- $K - S(T)$, la différence entre le strike et la valeur du sous-jacent si $K > S(T) > B$
- 0, si $S(T) > K$
- 0, si $S(T) < B$

Continuons avec les barrières de type Knock-In. Contrairement aux options Knock-Out, celles-ci permettent de récupérer un gain non capé, c'est-à-dire un gain sans limite, comme une option classique.

Dans le cas d'un Call Up & In, le franchissement de la barrière permettra l'activation de l'option. Ainsi, un gain sera réalisé par l'investisseur uniquement si le prix de l'actif

sous-jacent est, à maturité, supérieur au prix de la barrière d'activation. Ici encore, la barrière devient une nouvelle sensibilité et son interprétation est simple. En effet, en regardant le payoff de cette option barrière, nous constatons que le gain maximal peut être infini peu importe la position de la barrière. Donc, à l'instar du Call Up & Out, le prix diminuera d'autant plus que la barrière sera éloignée du prix spot et strike. Cette sensibilité d'un prix décroissant par rapport à la valeur de la barrière s'interprète par le risque de ne pas atteindre la barrière avant la maturité, et alors de ne faire aucun bénéfice sur l'option. Aussi, cette sensibilité s'atténue avec la maturité ; elle est en fait une fonction décroissante du temps. En effet, plus la maturité d'une option sera éloignée, plus la probabilité que le prix augmente au-delà de la barrière sera élevée. Ainsi, un investisseur persuadé de voir une action évoluer au-delà d'une certaine valeur pourra envisager d'acheter une option barrière afin de réduire sa prime.

Donnons un exemple. Soit une option Call Up & In de strike K , de spot S_0 et de barrière B tels que $S_0 < K < B$. Alors, à maturité T , le gain de l'investisseur pourra prendre trois valeurs :

- $S(T) - K$, si $S(T) > B > K$
- 0 , si $K < S(T) < B$
- 0 , si $S(T) < K < B$

Pour terminer, nous retrouvons le Put Down & In. Cette option de vente à barrière activante permet, comme son nom l'indique, d'entrer dans un Put si le prix du sous-jacent clôture à maturité en dessous de la barrière. Ainsi, comme le Call Up & In, la barrière est une nouvelle sensibilité et le prix de ce Put diminue en même temps que la barrière s'éloigne du prix strike et spot.

En revanche, contrairement au Call, la barrière doit être inférieure au strike pour avoir un effet sur le prix de l'option. En effet, si la barrière est supérieure au strike K , comme l'investisseur n'applique pas son droit de vente sur une option de prix supérieur au strike, la barrière n'aura pas d'impact sur le mécanisme. Enfin, cette option est destinée à des investisseurs ayant une vision baissière de la valeur de leur sous-jacent, en dessous de la barrière, permettant de maximiser leur gain et minimiser leur coût.

Par exemple, soit une option Put Down & In de mêmes paramètres que le Call Up & In, tels que $B < K < S_0$, alors le gain s'écrit comme suit :

- $K - S(T)$, si $S(T) < B < K$
- 0 , si $B < S(T) < K$
- 0 , si $B < K < S(T)$

Nous venons de présenter les quatre types d'options exotiques majoritairement utilisées dans la construction de produits structurés avancés, c'est-à-dire qui ne reposent pas uniquement sur une stratégie d'option vanille. Toutefois, le Put Down & In reste l'option exotique la plus répandue car, en vendant une telle option, l'investisseur protège son capital face à une baisse limitée du sous-jacent. Enfin, l'introduction de cette nouvelle sensibilité liée à la barrière interroge sur la validité du modèle de Black & Scholes. Dans la suite nous étudierons les différents modèles d'évaluation des options.

1.4 Définitions, mécanismes fondamentaux et construction de la Reverse Convertible

On appelle une reverse convertible un produit délivrant des coupons garantis périodiques à l'image d'une obligation. Appartenant à la famille des produits d'optimisation, également appelé produit de rendement, la reverse convertible est le produit structuré le plus répandu. En effet, son mécanisme simple permet aux investisseurs néophytes de comprendre le fonctionnement du produit et donc d'acheter des produits structurés en comprenant les risques encourus. Son mécanisme de coupon est simple, peu importe le sens d'évolution du sous-jacent, un coupon sera délivré à l'investisseur à la fin de chaque période. La période peut être annuelle, semestrielle, trimestrielle ou encore mensuelle. Il est dès lors légitime de se demander quelles sont les différences entre une reverse convertible et une obligation classique délivrant des coupons périodiques et quels en sont les avantages ? Pour comprendre les différences entre une Reverse convertible et une obligation, voici un exemple de factsheet⁴ que nous distribuons aux clients chez Tradition Securities & Futures :

Tradition Investment Solutions			
Reverse Convertible sur Minerais de Fer			
2 Ans en USD		Idée d'investissement – Janvier 2023	
Stratégies			
<ul style="list-style-type: none"> ➤ Structure présentant une belle opportunité de s'exposer à cette matière première. ➤ Les prix du minerai de fer semblent tendre principalement à travers l'activité industrielle en Chine et la politique entourant la question. 			
Caractéristiques			
Emetteur	Rating A	Coupon Garanti	8.00% p.a
Devise	USD	Barrière de Protection	50%, Européenne
Maturité	2 Ans		
Sous-jacent	Minerais de Fer (IOEA Comdty)		
Mécanisme			
Mécanisme de Coupon Chaque année i ($i = 1 \text{ à } 2$), le coupon suivant est payé Coupon Garanti : 8.00% p.a		Remboursement à maturité Si le sous-jacent clôture à ou au-dessus de sa Barrière de protection, remboursement à : 100% Sinon, IOEA_{Final} / IOEA_{Initial}	

FIGURE 4 – Extrait n°1 d'une factsheet de Reverse Convertible

Cet exemple intitulé Reverse Convertible sur Minerais de Fer se construit comme suit :

- **La stratégie** : permet de situer le contexte à l'investisseur et de lui expliquer les raisons d'investir dans ce produit.
- **Les caractéristiques** : présente l'intégralité des données importantes du produit. Nous y retrouvons en partie la notation de l'émetteur assurant la sécurité du

4. Une factsheet est un PDF regroupant les informations sur un produit comme son mécanisme, ses caractéristiques, sa stratégie ou encore une simulation des cas favorables et défavorables.

produit et des paiements, la devise dans laquelle la transaction sera réalisée, la maturité du produit, le sous-jacent sur lequel le produit est construit (ici, le Fer), le taux de coupon garanti et la barrière de protection du capital.

- **Mécanisme** : cette section permet d'expliquer clairement et simplement à l'investisseur comment le produit évolue au cours du temps et les différents événements qui peuvent se produire durant la vie du produit et à maturité.

Ainsi, nous remarquons tout d'abord que le coupon garanti est largement supérieur (8.00% p.a.) aux coupons perçus par une obligation de même maturité. Il est également important de comprendre que les coupons sont calculés comme pour une obligation sur la base du nominal du produit. C'est-à-dire que pour un nominal de 1 000 000 \$, le coupon annuel de ce produit sera de 80 000 \$. Ensuite, contrairement à une obligation classique qui, à maturité, rembourse l'intégralité de son nominal à l'investisseur, ici nous avons la présence d'une barrière de protection du capital avec la dénomination « Européenne », c'est-à-dire qu'elle ne peut être activée qu'à maturité. Ce mécanisme permet alors, en cas de clôture à maturité au-dessus de cette barrière, de récupérer 100 % de son capital investi en plus du dernier coupon garanti. Cependant, si à maturité le sous-jacent clôture en-dessous de la barrière de protection, alors ce dernier sera remboursé à hauteur de la performance du sous-jacent. Voici une illustration des deux situations possibles :

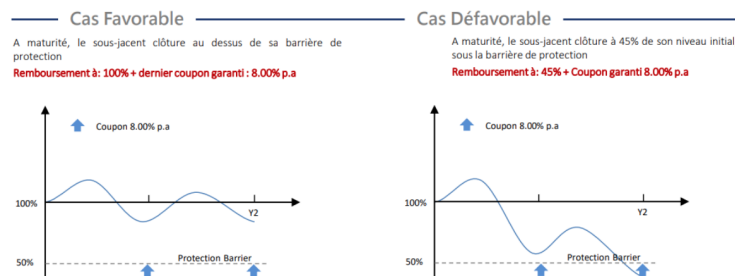


FIGURE 5 – Extrait n°2 d'une factsheet de Reverse Convertible

Dans le cas favorable, le sous-jacent clôture à maturité au-dessus de sa barrière de protection du capital et est donc remboursé à 100% de son capital investi plus son dernier coupon garanti, soit 108%. Dans le cas défavorable, le sous-jacent a sous-performé et à maturité il clôture en-dessous de sa barrière de protection du capital à 45%. Alors l'investisseur est remboursé à 45% plus son dernier coupon garanti de 8.00%, c'est-à-dire 53%.

La première remarque que nous pouvons nous faire est que le franchissement de cette barrière à maturité entraîne une baisse instantanée d'au moins 50% du capital. En fait, cette barrière de protection du capital est le résultat de la vente d'un Put Down & In avec un strike égal à son prix spot. Le principal avantage d'utiliser un PDI en barrière de protection du capital est que l'investisseur ne subit aucune perte sur son capital

tant que le sous-jacent reste au-dessus de la barrière. Ainsi, même si ce dernier diminue jusqu'à 49% par rapport à sa valeur initiale à maturité, le produit sera tout de même remboursé à 100%.

Imageons le payoff de la reverse convertible donnée en exemple afin de mieux comprendre le processus derrière ce produit :

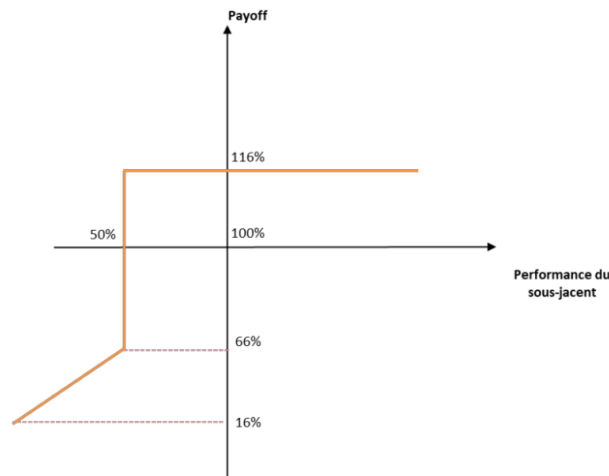


FIGURE 6 – Payoff de la Reverse Convertible donnée en exemple

On observe ainsi que peu importe la valeur finale du sous-jacent, l'investisseur récupère un coupon annuel, soit au total sur les deux années 16%. Ensuite, on remarque une protection à partir de 50%. C'est en fait l'effet du Put Down & In lorsque le prix du sous-jacent est au-dessus de la barrière d'activation. Tant que le taux de variation du sous-jacent n'est pas inférieur à -50%, l'option ne s'active pas et donc protège son capital.

Maintenant que nous avons une idée claire de ce que représente une reverse convertible, nous allons nous intéresser aux méthodes d'évaluations de ces composantes afin d'en extraire un modèle rapide et pratique à implémenter afin d'accélérer son pricing.

2 Présentations des modèles d'évaluation des options

L'objectif de cette partie est de présenter les deux principaux modèles que l'on retrouve sur les marchés financiers, le modèle de Black & Scholes et le modèle d'Heston. Nous commencerons par une brève introduction des résultats liés à ces modèles concernant les options vanilles européennes, puis nous étendrons notre analyse aux options barrières, en particulier le Put Down & In, qui est l'élément central de la BRC. Pour commencer voici quelques hypothèses générales que nous appliquerons dans la présentation de nos modèles.

Dans l'ensemble de ce projet, lorsque nous ferons référence aux options, vanilles ou barrières, ainsi qu'aux produits structurés, nous supposerons qu'ils suivent un modèle européen, c'est à dire que les mécanismes sous-jacents ne font effet qu'à la maturité. Nous supposons également l'existence d'une mesure risque neutre de probabilité Q .

2.1 Modèle de Black & Scholes

Dans cette sous-partie nous allons nous intéresser au modèle de Black & Scholes, un modèle largement développé au sein des salles de marchés, ayant déjà fait ses preuves. Nous verrons également que ce modèle, bien qu'il soit souvent utilisé présente de nombreuses limites.

2.1.1 Hypothèses et résultats du modèles de Black & Scholes

Développé en 1973 par Fischer Black, Myron Scholes et Robert Merton, il constitue l'un des fondements théoriques les plus importants pour la valorisation des options. Il repose sur un cadre probabiliste rigoureux et sur un certain nombre d'hypothèses structurelles qui permettent d'aboutir à une formule de pricing analytique dans le cas d'options européennes. Ces hypothèses sont les suivantes :

- L'évolution du prix de l'actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

où :

- r est le taux sans risque constant,
 - σ est la volatilité du sous-jacent supposée constante,
 - W_t est un mouvement brownien standard.
- Les marchés sont parfaits, complets et sans friction.
 - Il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage.

- Le sous-jacent ne verse pas de dividende durant la durée de vie de l'option.

Ces hypothèses permettent ainsi, d'élaborer une formule fermée du prix d'une option européenne en résolvant l'équation différentielle partielle de B&S obtenu comme suit : Soit $\pi_t = \pi(S_t, t)$, la valeur d'un portefeuille de réplication.

Par application du lemme d'Itô à π_t , il vient :

$$d\pi_t = \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial \pi}{\partial S} dS_t$$

Or la condition d'autofinancement du portefeuille conduit à écrire :

$$d\pi_t = r(\pi_t - \delta_t S_t) dt + \delta_t dS_t$$

Avec δ_t la part des titres risqués dans le portefeuille.

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2} \right) = r(\pi_t - \delta_t S_t) \\ \frac{\partial \pi}{\partial S} = \delta_t \end{cases}$$

Il vient :

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial t} + r S_t \frac{\partial \pi}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2} \right) = r \pi$$

Finalement, π étant un portefeuille de réplication, nous pouvons réécrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + r S_t \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = r C \\ C(S, T) = \max(S - K, 0) \end{cases}$$

Ce qui permet, après résolution, d'aboutir à ces deux formules bien connues :

— **Call européen :**

$$C(S, t) = S N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (2.1)$$

— **Put européen :**

$$P(S, t) = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S N(-d_1) \quad (2.2)$$

Où :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (2.3)$$

$N(\cdot)$ désigne la fonction de répartition de la loi normale standard.

Enfin, en analysant d'un peu plus près cette EDP nous pouvons dès à présent extraire trois sensibilités de l'option européenne :

— **Le Delta** :

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$$

Qui représente la sensibilité du prix de l'option par rapport à une variation du prix de l'actif sous-jacent.

— **Le Gamma** :

$$\Gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$$

Qui mesure la sensibilité du Delta par rapport au prix du sous-jacent, c'est-à-dire l'intensité de la variation du Delta lorsque le prix de l'actif évolue.

— **Le Thêta** :

$$\Theta = -\frac{\partial f}{\partial t}$$

Qui évalue la sensibilité du prix de l'option par rapport au temps, autrement dit la perte de valeur de l'option à mesure que la maturité approche.

Les deux dernières sensibilités ne sont pas directement obtenues à partir de l'équation aux dérivées partielles (EDP) de Black-Scholes. Toutefois, l'expression analytique des formules du call et du put dans ce modèle met en évidence deux autres variables auxquelles le prix des options vanilles peut être sensible. En effet, la valeur d'une option selon Black-Scholes dépend de plusieurs paramètres : le temps, le prix de l'actif sous-jacent, mais également la volatilité et le taux sans risque. Ces deux dernières sensibilités sont :

— **Le Véga** :

$$\nu_C = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$$

Qui mesure la sensibilité du prix de l'option à une variation de la *volatilité* du sous-jacent.

— **Le Rhô** :

$$\rho_C = \frac{\partial C}{\partial r}$$

Qui évalue la sensibilité de la valeur de l'option à une variation du *taux d'intérêt sans risque*.

Maintenant que nous avons rappelé clairement les principaux résultats qui découlent du modèle de Black & Scholes, nous pouvons nous intéresser à l'application de ce modèle dans le cadre de l'évaluation d'un Put Down & In ⁵

5. Ici encore, le mécanisme de barrière est européen et ne prend donc effet qu'à maturité.

2.1.2 Valorisation d'un Put Down & In européen

On rappelle la dynamique du sous-jacent sous les hypothèses du modèle de Black & Scholes :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \Rightarrow S_t = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right) \quad (2.4)$$

On note le prix du put down-and-in :

$$P_{DI} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} (K - S_T) 1_{S_T \leq H} \right]$$

Séparation en deux termes :

$$P_{DI} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} K 1_{S_T \leq H} \right] - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} S_T 1_{S_T \leq H} \right]$$

Premier terme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} K 1_{S_T \leq H} \right] &= K \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} 1_{S_T \leq H} \right] \\ &= K e^{-rT} \mathbb{Q}(S_T \leq H) \\ &= K e^{-rT} \mathbb{Q} \left(S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W_T \right) \leq H \right) \\ &= K e^{-rT} \mathbb{Q} \left(W_T \leq \frac{1}{\sigma} \left(\ln \left(\frac{H}{S_0} \right) - \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T \right) \right) \end{aligned}$$

Posons :

$$Z_T = \frac{W_T}{\sqrt{T}} \Rightarrow Z_T \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Donc :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} K 1_{S_T \leq H} \right] = K e^{-rT} N(d_H), \quad \text{avec} \quad d_H = \frac{\ln \left(\frac{S_0}{H} \right) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \quad (2.5)$$

Deuxième terme (changement de mesure) : On pose :

$$\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} = \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 T + \sigma W_T \right) \Rightarrow \tilde{W}_t = W_t + \sigma t \text{ est un mouvement brownien standard sous } \tilde{\mathbb{Q}}.^6$$

Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} S_T 1_{S_T \leq H} \right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[S_T 1_{S_T \leq H} e^{-rT} \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W_T \right) 1_{S_T \leq H} \right] e^{-rT} \\ &= S_0 \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}} \left[1_{\tilde{S}_T \leq H} \right] \\ &= S_0 \tilde{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_T \leq H) \end{aligned}$$

6. Résultat du théorème de Girsanov.

Or sous $\tilde{\mathbb{Q}}$:

$$d\tilde{S}_t = r\tilde{S}_t dt + \sigma\tilde{S}_t d\tilde{W}_t \Rightarrow \tilde{S}_T = S_0 \exp\left(\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\tilde{W}_T\right)$$

Donc :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}S_T 1_{S_T \leq H}\right] = S_0 \tilde{\mathbb{Q}}\left(W_T \leq \frac{1}{\sigma}\left(\ln\left(\frac{H}{S_0}\right) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)\right) = S_0 N(d_H - \sigma\sqrt{T})$$

De la même façon que précédemment, on pose : $\tilde{Z}_t = \frac{\tilde{W}_T}{\sqrt{T}} \Rightarrow \tilde{Z}_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Formule finale :

$$P_{DI} = Ke^{-rT}N(-d_{H-}) - SN(-d_{H+}) \quad (2.6)$$

où :

$$d_{H-} = \frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_{H+} = d_{H-} + \sigma\sqrt{T}$$

Nous venons ainsi de démontrer la valeur d'un Put Down & In sous les conditions de Black & Scholes. La première remarque que nous pouvons faire est que cette formule se rapproche grandement de celle d'un Put vanille. Cependant, la différence se retrouve dans l'expression des paramètres d_{H+} et d_{H-} . On peut alors se demander, comment le delta, à l'origine bornés pour les options vanilles, sera-t-il impacté par ce changement ?

2.1.3 Détermination du delta d'un PDI sous le modèle de Black & Scholes

Commençons par dériver partiellement (2.6) par rapport à S afin de retrouver Δ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{DI}}{\partial S} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(Ke^{-rT}N(-d_{H-}) \right) - \frac{\partial}{\partial S} \left(SN(-d_{H+}) \right) \\ &= -Ke^{-rT}N'(-d_{H-}) \cdot \frac{\partial d_{H-}}{\partial S} - N(-d_{H+}) + SN'(-d_{H+}) \cdot \frac{\partial d_{H+}}{\partial S} \end{aligned} \quad (2.7)$$

où :

Or, comme $d_{H+} = d_{H-} + \sigma\sqrt{T}$, on a :

$$\frac{\partial d_{H+}}{\partial S} = \frac{\partial d_{H-}}{\partial S} = -\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}$$

On calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N(-d_H^-)}{\partial d_H^-} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(d_H^+ + \sigma\sqrt{T})^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}d_H^{+2} - d_H^+ \sigma\sqrt{T} - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) \\
&= N'(d_H^+) \cdot \exp\left(-\ln\left(\frac{H}{S}\right) + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right) \\
&= N'(d_H^+) \cdot \frac{S}{H} \cdot e^{rT}
\end{aligned}$$

Donc finalement, en remplaçant $\frac{\partial N(d_H^-)}{\partial d_H^-}$ dans (2.7) :

$$\frac{\partial P_{DI}}{\partial S} = -N(-d_H^+) + \left(\frac{K}{H} - 1\right) S N'(d_H^+) \cdot \left(-\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}\right)$$

On écrit enfin :

$$\boxed{\Delta_{PDI} = -N(-d_H^+) + \left(1 - \frac{K}{H}\right) \cdot \frac{N'(d_H^+)}{\sigma\sqrt{T}}} \quad (2.8)$$

Cas particulier : $H = K$

Dans ce cas, $\frac{K}{H} = 1$, donc le second terme disparaît :

$$\Delta_{PDI} = -N(-d_H^+)$$

Regardons ce que devient d_H^+ quand $H = K$:

$$d_H^+ = -\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{K}{S}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T \right) - \sigma\sqrt{T}$$

Soit :

$$d_H^+ = -\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T \right) = -d_1 \quad (\text{formule classique de Black-Scholes})$$

Donc :

$$\Delta_{PDI} = -N(-d_H^+) = -N(-d_1) = N(d_1) - 1$$

Ce qui est bien le Δ d'un put européen classique.

2.1.4 Limite du modèle de Black & Scholes

Bien que le modèle de Black & Scholes soit couramment utilisé comme référence dans l'industrie des dérivés, il présente une limite fondamentale dans le cadre du pricing de notre produit structuré, la Reverse Convertible. En particulier, l'hypothèse de volatilité constante se révèle incompatible avec la nature même de ce produit.

Fixer une volatilité constante revient en effet à supposer que cette dernière restera inchangée tout au long de la vie du produit, ce qui apparaît irréaliste. Dans un environnement de marché dynamique, marqué par des régimes de volatilité variables et souvent brusques, cette hypothèse conduit à un risque de misspricing significatif. Ce biais de valorisation se traduit par une mauvaise estimation des sensibilités, notamment du Δ , et par conséquent, par une stratégie de couverture sous-optimale, voire erronée.

Cela étant dit, il convient de nuancer ce constat en reconnaissant les avantages pratiques du modèle de Black & Scholes. Sa simplicité d'implémentation, sa faible complexité algorithmique, et sa capacité à fournir des formules fermées en font un outil particulièrement efficace dans des contextes simples ou pour des premiers niveaux d'approximation. Il est donc légitime de s'interroger sur l'existence de conditions dans lesquelles son utilisation resterait acceptable, voire pertinente. Nous essayerons de répondre à cette question dans la suite de ce projet lors de l'implémentation des modèles.

Toutefois, pour les produits fortement path-dépendant ou dont la valorisation est très sensible aux anticipations de volatilité comme c'est le cas ici l'usage d'un modèle à volatilité constante atteint rapidement ses limites.

Dès lors, une solution naturelle consiste à adopter un cadre plus flexible, dans lequel la volatilité est elle-même un processus stochastique. Cela permet de mieux capturer les dynamiques de marché réelles, de corriger les biais de valorisation, et d'améliorer la robustesse des stratégies de couverture.

C'est précisément ce que permet le modèle de Heston, que nous présenterons dans la section suivante.

2.2 Modèle à volatilité stochastique : Heston

Le modèle de Heston poursuit le même objectif que celui de Black-Scholes : représenter l'évolution du prix d'un actif au cours du temps. On retrouve d'ailleurs, dans la première équation du système, une dynamique similaire à celle utilisée par Black-Scholes pour modéliser le sous-jacent. La véritable innovation introduite par Heston réside dans sa prise en compte d'une volatilité aléatoire, modélisée par un processus de type CIR (Cox-Ingersoll-Ross) appliqué à la variance.

Alors que le modèle de Black-Scholes ne prend en compte que l'incertitude liée au prix de l'actif sous-jacent, celui de Heston intègre également l'aléa inhérent à la volatilité. Ainsi, il permet de modéliser deux sources d'incertitude : celle liée au sous-jacent et celle provenant de la variance, rendant le cadre plus riche et réaliste.

2.2.1 Hypothèses et résultats du modèle d'Heston

Les hypothèses du modèle de Heston reprennent en grande partie celles du modèle de Black & Scholes. Toutefois, dans un souci de réalisme et afin de mieux refléter le comportement observé sur les marchés, ce modèle introduit une hypothèse essentielle : la volatilité n'est plus considérée comme une constante déterministe, mais comme une variable aléatoire suivant un processus de diffusion. L'hypothèse centrale du modèle repose donc sur la modélisation de la dynamique du prix du sous-jacent S_t , dont l'évolution est affectée par une volatilité stochastique.

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1,t}, \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_{2,t}. \end{cases}$$

tel que :

$$\mathbb{E}[dW_{1,t} dW_{2,t}] = \rho dt$$

Avec,

- μ désigne le taux de rendement espéré à l'instant, comme dans le cadre classique de Black & Scholes.
- $\sqrt{v_t}$ correspond à la volatilité instantanée du sous-jacent ; elle est définie comme la racine carrée de la variance v_t .
- θ représente la variance à long terme, également appelée variance cible. Lorsque $t \rightarrow \infty$, le processus v_t converge vers cette valeur.

- κ désigne la vitesse de retour à la moyenne. Il quantifie la rapidité avec laquelle la variance v_t revient vers sa moyenne θ . Plus κ est élevé, plus le retour à l'équilibre est rapide. Son unité est l'inverse d'un temps.
- σ est la volatilité de la variance, souvent appelée *vol of vol*. Elle contrôle la dispersion des fluctuations de v_t : plus σ est faible, plus les trajectoires de variance sont concentrées autour de leur valeur moyenne.
- ρ désigne la corrélation instantanée entre les deux mouvements browniens W_1 et W_2 qui pilotent respectivement le sous-jacent S_t et la variance v_t . Cette corrélation permet de modéliser l'effet de levier observé sur les marchés financiers : en général, une baisse du sous-jacent s'accompagne d'une hausse de la volatilité, ce qui se traduit par une valeur de ρ négative.

De la même manière que dans le cadre du modèle de Black & Scholes, considérons un portefeuille de couverture autofinancé. Dans le modèle de Black & Scholes, une couverture parfaite pouvait être obtenue en vendant δ actions, grâce à la complétude du marché.

Dans le cas du modèle de Heston, cette approche ne permet de couvrir que le risque associé au mouvement brownien W_1 . Le second processus aléatoire, W_2 , introduit une source supplémentaire d'incertitude liée à la variance stochastique, qui n'est pas couverte par une simple position en actions.

Dès lors, le marché devient incomplet : il n'est plus possible de couvrir tous les risques avec un seul actif. Pour rétablir la complétude du marché et permettre une couverture plus fine, nous introduisons une deuxième option liquide, notée C_2 .

Le portefeuille autofinancé π , sous le modèle de Heston, peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\pi_t = C_{1,t} + \delta.S_t + \phi.C_{2,t} \quad (2.9)$$

Soit la dynamique suivante :

$$d\pi_t = dC_{1,t} + \delta.dS_t + \phi.dC_{2,t} \quad (2.10)$$

- Par application du lemme d'Itô : soit $i \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} dC_{i,t} = & \frac{\partial C_i}{\partial t} dt + \frac{\partial C_i}{\partial S} dS + \frac{\partial C_i}{\partial v} dv + \frac{\partial^2 C_i}{\partial S \partial v} d\langle S, v \rangle_t \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_i}{\partial S^2} d\langle S \rangle_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_i}{\partial v^2} d\langle v \rangle_t \end{aligned} \quad (2.11)$$

On a $d\langle S \rangle_t = v_t S_t^2 dt$, $d\langle v \rangle_t = \sigma^2 v_t dt$ et $d\langle S, v \rangle_t = \rho \sigma v_t S_t dt$.

Ainsi, l'équation (2.11) devient, $\forall i \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} dC_{i,t} = & \frac{\partial C_i}{\partial t} dt + \frac{\partial C_i}{\partial S} dS + \frac{\partial C_i}{\partial v} dv + \frac{\partial^2 C_i}{\partial S \partial v} \rho \sigma v_t S_t dt \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_i}{\partial S^2} v_t S_t^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_i}{\partial v^2} v_t \sigma^2 dt \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ainsi on retrouve en substituant C_1 et C_2 dans la dynamique du portefeuille :

$$\begin{aligned} d\pi_t = & \left(\frac{\partial C_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 C_1}{\partial S \partial v} \rho \sigma v_t S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1}{\partial S^2} v_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1}{\partial v^2} v_t \sigma^2 \right. \\ & + \phi \left(\frac{\partial C_2}{\partial t} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial S \partial v} \rho \sigma v_t S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_2}{\partial S^2} v_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_2}{\partial v^2} v_t \sigma^2 \right) \Big) dt \\ & + \left(\frac{\partial C_1}{\partial S} + \phi \frac{\partial C_2}{\partial S} + \delta \right) dS + \left(\frac{\partial C_1}{\partial v} + \phi \frac{\partial C_2}{\partial v} \right) dv \end{aligned} \quad (2.13)$$

Puisque π est un portefeuille sans risque, nous pouvons annuler dans (2.13) les termes en dS et dv :

$$\begin{cases} \frac{\partial C_1}{\partial S} + \phi \frac{\partial C_2}{\partial S} + \delta = 0 \\ \frac{\partial C_1}{\partial v} + \phi \frac{\partial C_2}{\partial v} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \delta = -\frac{\partial C_1}{\partial S} + \frac{\frac{\partial C_1}{\partial v}}{\frac{\partial C_2}{\partial v}} \times \frac{\partial C_2}{\partial S} \\ \phi = -\frac{\frac{\partial C_1}{\partial v}}{\frac{\partial C_2}{\partial v}} \end{cases}$$

De plus, toujours suivant l'hypothèse sans risque de π , nous retrouvons que le rendement du portefeuille doit être égale au taux sans risque r :

$$d\pi_t = r\pi_t dt = r(C_{1,t} + \delta S_t + \phi C_{2,t}) dt$$

Soit en utilisant les expressions de δ et ϕ données ci-dessus :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\frac{\partial C_1}{\partial v}} \left(\frac{\partial C_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 C_1}{\partial S \partial v} \rho \sigma v_t S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1}{\partial S^2} v_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1}{\partial v^2} v_t \sigma^2 + r S_t \frac{\partial C_1}{\partial S} - r C_{1,t} \right) dt \\ = & \frac{1}{\frac{\partial C_2}{\partial v}} \left(\frac{\partial C_2}{\partial t} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial S \partial v} \rho \sigma v_t S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_2}{\partial S^2} v_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_2}{\partial v^2} v_t \sigma^2 + r S_t \frac{\partial C_2}{\partial S} - r C_{2,t} \right) dt \end{aligned} \quad (2.14)$$

Le membre de gauche est une fonction uniquement de C_1 et celui de droite de C_2 . Ainsi, il existe une fonction f de S, v et t telle que :

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 C_1}{\partial S \partial v} \rho \sigma v_t S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1}{\partial S^2} v_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1}{\partial v^2} v_t \sigma^2 + r S_t \frac{\partial C_1}{\partial S} - r C_1 = f(S, v, t) \frac{\partial C_1}{\partial v}$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 C_1}{\partial S \partial v} \rho \sigma v_t S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1}{\partial S^2} v_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_1}{\partial v^2} v_t \sigma^2 + r S_t \frac{\partial C_1}{\partial S} - r C_1 \\ = \frac{\partial C_i}{\partial v} (\kappa(\theta - v_t) - \Lambda(S, v, t) \sigma \sqrt{v_t}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

En suivant les indications de l'article d'Heston on choisit :

$$\Lambda(S, v, t) = \frac{\lambda(S, v, t) \sqrt{v_t}}{\sigma}$$

On remplace ainsi dans (2.15) l'expression de $\Lambda(S, v, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{\partial^2 C_t}{\partial S \partial v} \rho \sigma v_t S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_t}{\partial S^2} v_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_t}{\partial v^2} v_t \sigma^2 \\ + r S_t \frac{\partial C_t}{\partial S} - r C_t + \frac{\partial C_t}{\partial v} (\kappa(\theta - v_t) - \lambda(S, v, t) v_t) = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Nous venons d'expliciter l'équation différentielle partielle vérifiée par un call européen sous le modèle d'Heston. En choisissant de poser $\lambda(S, v, t) = \lambda$, il vient alors après résolution de cette EDP :

On pose $x = \ln(S)$,

$$C = e^x \Psi_1 - K e^{-r(T-t)} \Psi_2$$

On obtient la prix d'un Put sous les conditions du modèle d'Heston en écrivant la relation de partié Call - Put : $C - P = S - K e^{-rT}$.

Avec , $\forall i \in \{1, 2\}$

$$\Psi_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re} \left[\frac{e^{-iz \ln(K)} f_j(z, x, v, T)}{iz} \right] dz \quad (2.17)$$

Les fonctions Ψ_j représentent deux probabilité risque neutre de terminer dans la monnaie à maturité et les fonctions f_j sont les transformées de Fourier de la densité de probabilité du logarithme du prix du sous-jacent ⁷

Enfin, nous pouvons construire le tableau suivant comparant les grecques obtenues sous le modèle de Black & Scholes et ceux sous le modèle d'Heston :

7. La définition et l'expression explicite des fonctions caractéristiques f_j sont complexes et ne seront pas détaillées dans ce mémoire.

TABLE 1 – Formules des Grecques pour les modèles Heston et Black-Scholes-Merton

Grecques	Modèle d'Heston	Modèle de Black & Scholes
$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-iz \ln K} f_1}{iz} \right] dz$	$N(d_1)$
$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$	$\frac{1}{\pi S_0} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[e^{-iz \ln K} f_1 \right] dz$	$\frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma_{bsm} \sqrt{T}}$
$\rho = \frac{\partial C}{\partial r}$	$KT e^{-rT} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-iz \ln K} f_2}{iz} \right] dz \right]$	$Ke^{-rT} N(d_2)$
$\vartheta = \frac{\partial C}{\partial v}$	$2\sqrt{v_0} \left[\frac{S_0}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-iz \ln K} f_1 D_1}{iz} \right] dz \right] - 2\sqrt{v_0} \left[\frac{Ke^{-rT}}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-iz \ln K} f_2 D_2}{iz} \right] dz \right]$	$S_0 \sqrt{T} N'(d_1)$

Nous pouvons maintenant passer à l'évaluation d'un PDI à barrière européenne.

2.2.2 Valorisation d'un Put Down & In européen sous Heston

À l'image de la sous partie 2.1.3 nous allons calculer le prix d'un Put Down & In à barrière européenne avec le modèle d'Heston. En revanche, abordons ce problème d'une autre façon : par réplication du PDI. Une observation rapide nous montre que :

$$P_{DI}(K, H, T) = P(H, T) + (K - H) \text{Digital}_{\text{put}}(H) \quad (2.18)$$

On rappelle, d'après la partie précédente, pour un put vanille de strike H :

$$P = e^x (\Psi_1 - 1) - H e^{-r(T-t)} (\Psi_2 - 1)$$

Avec cette fois-ci , $\forall i \in \{1, 2\}$

$$\Psi_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-iz \ln(H)} f_j(z, x, v, T)}{iz} \right] dz$$

Ce qui donne finalement :

$$P = e^x \tilde{\Psi}_1 - H e^{-r(T-t)} \tilde{\Psi}_2 \quad (2.19)$$

Où :

$$\tilde{\Psi}_j = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-iz \ln(H)} f_j(z, x, v, T)}{iz} \right] dz$$

Il nous reste donc le calcul du digital put sous les conditions d'Heston. On rappelle la relation de parité entre un Digital Put et un Digital Call :

$$Digital_{put} + Digital_{call} = e^{-rT} \quad (2.20)$$

Ainsi nous allons évaluer un Digital Call puis avec la relation de parité donner la valeur d'un Digital Put.

Supposons l'équation différentielle partielle d'Heston avec la condition finale :

$$DC(S, \nu, T) = \begin{cases} 1 & \text{si } S_T > K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On garde la notation précédemment introduite : $x = \ln(S)$, ainsi :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (r - \frac{\nu}{2}) \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + (k(\theta - \nu) - \lambda \nu) \frac{\partial C}{\partial \nu} + \frac{\sigma^2 \nu}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial \nu^2} + \rho \sigma \nu \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial \nu} - rC = 0 \quad (2.21)$$

Supposons que la solution est de la forme :

$$Digital_{call}(S, \nu, t) = e^{-r\tau} P \quad \text{avec } \tau = T - t,$$

Avec P représentant la probabilité conditionnelle que l'option se termine dans la monnaie : $P = Pr(x(T) > \ln(K) | x(t) = x, \nu(t) = \nu)$.

On substitue ainsi $Digital_{call}(S, \nu, t)$ dans l'équation (2.21) et on obtient que P vérifie :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (r - \frac{1}{2}\nu) \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + (k(\theta - \nu) - \lambda \nu) \frac{\partial P}{\partial \nu} + \frac{\sigma^2 \nu}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \nu^2} + \rho \sigma \nu \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial \nu} = 0 \quad (2.22)$$

Sous la condition $P(x, \nu, T; \ln(K)) = 1_{x \geq \ln(K)}$.

On rappelle que sous le modèle d'Heston :

$$\begin{aligned} dx(t) &= \left(r - \frac{1}{2}\nu(t) \right) dt + \sqrt{\nu(t)} dW_{1,t} \\ d\nu(t) &= (k(\theta - \nu(t)) - \lambda \nu(t)) dt + \sigma \sqrt{\nu(t)} dW_{2,t} \end{aligned}$$

Soit f une fonction deux fois différentiable telle que : $f(x, \nu, t) = \mathbb{E} [g(x(T), \nu(T)) | x(t) = x, \nu(t) = \nu]$, avec g une fonction complexe que nous introduirons.

De plus, puisque f est une martingale, il vient que la composante en dt de sa dynamique doit être nulle :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - \frac{1}{2}\nu) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (k(\theta - \nu) - \lambda\nu) \frac{\partial f}{\partial \nu} + \frac{\sigma^2 \nu}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \nu^2} + \rho\sigma\nu \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \nu} = 0 \quad (2.23)$$

sous la condition terminale : $f(x, \nu, T) = g(x, \nu)$.

On choisit ensuite de poser $g(x, \nu) = e^{izx}$ et d'effectuer le changement de variable : $\tau = T - t$, ce qui conduit à :

$$-\frac{\partial f}{\partial \tau} + (r - \frac{1}{2}\nu) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (k(\theta - \nu) - \lambda\nu) \frac{\partial f}{\partial \nu} + \frac{\sigma^2 \nu}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \nu^2} + \rho\sigma\nu \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \nu} = 0 \quad (2.24)$$

sous la condition initiale : $f(x, \nu, 0) = e^{izx}$.

On cherche une solution de la forme :

$$f(z, x, \nu, \tau) = \exp(C(\tau) + D(\tau)\nu + izx) \quad (2.25)$$

avec pour conditions initiales $C(0) = D(0) = 0$.

En substituant la forme (2.25) dans l'EDP (2.24) et en remarquant que D et C ne dépendent ni de ν ni de x , nous obtenons les 2 EDO :

$$D' = \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 + \rho\sigma iz D - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}iz - (k - \lambda)D \quad (2.26)$$

$$C' = riz + k\theta D \quad (2.27)$$

Enfin, la fonction D est solution de Ricatti. On pose : $D = -\frac{2}{\sigma^2} \frac{G'}{G}$.
Soit en substituant dans (2.26) :

$$G'' - (\rho\sigma iz - k - \lambda)G' + \frac{\sigma^2}{2} \left(-\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}iz \right) = 0 \quad (2.28)$$

Dont l'équation caractéristique est :

$$\alpha^2 - (\rho\sigma iz - k - \lambda)\alpha + \frac{\sigma^2}{4}(-z^2 - iz) = 0$$

de discriminant : $\Delta = (\rho\sigma iz - k - \lambda)^2 - \sigma^2(-z^2 - iz)$.

On en conclut la solution générale de l'EDO (2.28) :

$$G(\tau) = Ae^{\alpha_1 \tau} + Be^{\alpha_2 \tau}$$

Avec : $\alpha_{1,2} = \frac{\rho\sigma iz - k - \lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2}$.

D'après les conditions initiales :

$$\begin{cases} G(0) = A + B \\ A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{\alpha_2 G(0)}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad \text{et} \quad B = -\frac{\alpha_1 G(0)}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

Par la suite nous déduisons l'expression de G que nous utilisons pour calculer D :

$$D(\tau) = \frac{k + \lambda + \sqrt{\Delta} - \rho\sigma iz}{\sigma^2} \left[\frac{1 - e^{\sqrt{\Delta}\tau}}{1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{\sqrt{\Delta}\tau}} \right] \quad (2.29)$$

Enfin on intègre C à partir de D et on obtient :

$$C(\tau) = riz\tau + \frac{k\theta}{\sigma^2} \left((k + \lambda + \sqrt{\Delta} - \rho\sigma iz)\tau - 2 \ln \left(\frac{1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{\sqrt{\Delta}\tau}}{1 - e^{\sqrt{\Delta}\tau}} \right) \right) \quad (2.30)$$

Nous obtenons enfin l'expression d'un call digital en inversant la fonction caractéristique f , telle que :

$$Digital_{call}(S, \nu, t) = e^{-r\tau} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re} \left[\frac{e^{-iz \ln(K)} f(z, x, \nu, \tau)}{iz} \right] dz \right)$$

Pour conclure, par relation de parité :

$$\begin{aligned} Digital_{put}(S, \nu, \tau) &= e^{-r\tau} \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re} \left[\frac{e^{-iz \ln(K)} f(z, x, \nu, \tau)}{iz} \right] dz \right) \right) \\ &= e^{-r\tau} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re} \left[\frac{e^{-iz \ln(K)} f(z, x, \nu, \tau)}{iz} \right] dz \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ce qui nous conduit finalement en addition (2.19) et (2.31) à l'expression d'un Put Down & In sous le modèle d'Heston :

$$P_{DI}(K, H, T) = e^x \tilde{\Psi}_1 - K e^{-r\tau} \tilde{\Psi}_2^8 \quad (2.32)$$

2.2.3 Détermination du delta d'un PDI sous le modèle d'Heston

On rappelle l'équation (2.18) :

$$P_{DI}(K, H, T) = P(H, T) + (K - H) \cdot \text{Digital put}(H, T)$$

Ainsi par linéarité de l'opérateur de différentiation :

$$\frac{\partial P_{DI}}{\partial S} = \frac{\partial P}{\partial S} + (K - H) \frac{\partial \text{Digital put}}{\partial S}$$

$$\Leftrightarrow \Delta_{PDI, \text{Heston}} = \Delta_{Put, \text{Heston}} + (K - H) \Delta_{\text{Digital Put, Heston}} \quad (2.33)$$

8. Avec $\tilde{\Psi}_j$ définies en 2.2.2.

Calcul de $\Delta_{\text{put,Heston}}$

On sait, par homogénéité d'ordre 1 du call sous le modèle d'Heston, que :

$$\Delta_{\text{call,Heston}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re} \left(\frac{e^{-iz \ln(H)} f_1(z, x, \nu, T)}{iz} \right) dz = \Psi_1$$

Par parité call-put :

$$\Delta_{\text{put,Heston}} = \Psi_1 - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re} \left(\frac{e^{-iz \ln(H)} f_1(z, x, \nu, T)}{iz} \right) dz \quad (1)$$

$$\Delta_{\text{put,Heston}} = \tilde{\Psi}_1 \quad (2.34)$$

Calcul du $\Delta_{\text{Digital put, Heston}}$

$$\Delta_{\text{Digital put, Heston}} = \frac{\partial \text{Digital put}}{\partial S} = -\frac{e^{-r\tau}}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re} \left[\frac{e^{-iz \ln(H)} \frac{\partial f_2(z, x, \nu, T)}{\partial S}}{iz} \right] dz$$

or d'après (2.25), $f_2(z, x, \nu, T) = \exp(C(\tau) + D(\tau)\nu + izx)$ où $x = \ln(S)$.

Comme $C(\cdot)$ et $D(\cdot)$ ne dépendent pas de S , ainsi :

$$\frac{\partial f_2}{\partial S} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = (iz f_2) \left(\frac{1}{S} \right) = \frac{iz}{S} f_2(z, x, \nu, \tau)$$

Soit finalement :

$$\Delta_{\text{Digital put, Heston}} = -\frac{e^{-r\tau}}{\pi S} \int_0^{+\infty} \text{Re} \left[e^{-iz \ln(H)} f_2(z, x, \nu, T) \right] dz \quad (2.35)$$

On en conclut l'expression du delta d'un PDI sous le modèle d'Heston en regroupant (2.34) et (2.35) tel que :

$$\Delta_{PDI, \text{Heston}} = \tilde{\Psi}_1 + (K - H) \frac{e^{-r\tau}}{\pi S} \int_0^{+\infty} \text{Re} \left[e^{-iz \ln(H)} f_1(z, x, \nu, T) \right] dz$$

2.2.4 Limite du modèle de Heston

Le modèle de Heston représente une avancée significative par rapport au modèle de Black & Scholes, en intégrant une volatilité stochastique susceptible d'évoluer au cours du temps. Ce cadre plus réaliste permet de mieux capturer les régimes de volatilité observés en pratique et de corriger certaines distorsions de prix générées par l'hypothèse de volatilité constante. Toutefois, malgré ses atouts théoriques et empiriques, le modèle de Heston présente également plusieurs limites qui méritent d'être soulignées dans le cadre spécifique de la valorisation d'une Reverse Convertible.

Tout d'abord, bien que le modèle autorise une dynamique plus riche de la volatilité, il repose sur un certain nombre d'hypothèses structurelles qui peuvent s'avérer restrictives. En particulier, la forme choisie pour le processus de variance (type CIR) impose une moyenne-réversion stricte et une distribution spécifique des niveaux de volatilité, qui ne reflète pas toujours fidèlement les comportements extrêmes observés lors de chocs de marché.

Ensuite, le modèle suppose une corrélation constante entre le prix de l'actif sous-jacent et sa volatilité. Or, cette corrélation peut elle-même être instable dans le temps, notamment en période de stress où les dynamiques de marché se complexifient. Ce phénomène, souvent désigné sous le nom de "volatility skew dynamics", n'est pas capturé de manière satisfaisante par le modèle de Heston standard, ce qui peut engendrer des erreurs d'évaluation pour des produits sensibles aux mouvements conjoints de prix et de volatilité, comme la Reverse Convertible.

Par ailleurs, l'usage du modèle de Heston requiert une calibration fine à la surface de volatilité implicite, ce qui introduit une dépendance forte aux conditions de marché au moment de l'estimation. Une mauvaise calibration ou un changement brutal de régime peut ainsi affecter la robustesse des résultats obtenus.

En résumé, si le modèle de Heston constitue une réponse naturelle aux limites du cadre de Black & Scholes, son application à des produits complexes comme la Reverse Convertible reste sujette à prudence. La sophistication du modèle ne garantit pas nécessairement une amélioration systématique du pricing ou de la couverture, surtout en présence de paramètres mal calibrés ou de dynamiques de marché extrêmes. Son utilisation doit donc s'inscrire dans une démarche rigoureuse, combinant modélisation, calibration soignée, et tests de robustesse adaptés à la nature du produit étudié.

Dans la sous partie suivante nous allons calibrer le modèle d'Heston pour les options vanilles et comparer les résultats à ceux obtenus avec le modèle de Black & Scholes.

2.3 Calibration des modèles

2.3.1 Objectifs de la calibration

La calibration d'un modèle d'évaluation d'options consiste à ajuster ses paramètres pour qu'il reproduise au mieux les prix observés sur le marché, en particulier ceux des options vanilles, qui sont les plus liquides. C'est une étape clé pour rendre le modèle réellement exploitable dans un cadre pratique.

L'objectif principal est de faire en sorte que le modèle reflète les conditions de marché à un instant donné. En d'autres termes, on cherche à faire correspondre les prix théoriques issus du modèle avec les prix réels des options standards, afin que le modèle soit cohérent avec les anticipations des investisseurs.

Une fois calibré sur ces instruments liquides, le modèle peut alors être utilisé pour valoriser des produits plus complexes, comme les options barrières ou les produits structurés. Cette approche permet d'avoir une évaluation plus réaliste, fondée sur des paramètres alignés avec le marché.

Ainsi, dans la suite du mémoire, les modèles calibrés sur options vanilles serviront de base pour simuler des trajectoires et estimer la valeur d'une Reverse Convertible intégrant une option barrière de type put down-and-in.

2.3.2 Calibration du modèle de Black & Scholes

Pour calibrer le modèle de Black-Scholes sur des données réelles, nous avons adopté une approche par inversion numérique. Les données de marché ont été extraites de Yahoo Finance et concernent des options vanilles ayant pour sous-jacent l'action Amazon, choisie en raison de son absence de dividendes. Pour chaque option observée, nous disposons de son prix, de son type (call ou put), du prix spot du sous-jacent, du taux sans risque⁹, du prix d'exercice (strike) ainsi que du temps restant jusqu'à l'échéance. Le seul paramètre inconnu du modèle de Black-Scholes étant la volatilité implicite, notre objectif est d'en estimer la valeur. Pour cela, nous utilisons la méthode de Brent, une technique robuste de résolution d'équations non linéaires, afin d'inverser numériquement la formule du modèle et d'identifier, pour chaque option, la volatilité qui permet de reproduire précisément son prix de marché. Cette procédure est appliquée à l'ensemble des options disponibles, couvrant une large gamme de maturités et de strikes, ce qui nous permet de reconstituer une surface de volatilité implicite calibrée. Enfin, cette surface est comparée à celle fournie par Yahoo Finance, servant de benchmark pour évaluer la qualité de notre ajustement.

9. Nous supposons le taux sans risque r constant égal à 5%.

K	days	T_years	σ_{calib}	σ_{Yahoo}	$ \Delta\sigma $ (%)	P_{mkt}	P_{BS}
145	5	0.01370	1.45393	1.42774	2.21	64.950	64.950
150	5	0.01370	1.49987	1.43164	4.77	60.125	60.125
160	5	0.01370	1.14957	1.12408	2.73	50.000	50.000
170	5	0.01370	1.04165	0.99805	4.37	40.200	40.200
175	5	0.01370	0.74668	0.76172	1.98	34.925	34.925
180	5	0.01370	0.59083	0.63379	6.90	29.875	29.875
185	5	0.01370	0.65152	0.63672	2.32	25.125	25.125

TABLE 2 – Volatilité implicite calibrée sous Black–Scholes comparée à la volatilité Yahoo pour la maturité de 5 jours.

Ce tableau met en évidence la capacité du modèle de Black-Scholes à reproduire les prix observés sur le marché. En effet, les écarts entre les prix calibrés et les prix issus de Yahoo Finance restent globalement faibles, ce qui suggère que ces derniers ont probablement été obtenus à l’aide d’un modèle similaire. Les différences résiduelles peuvent s’expliquer par certaines hypothèses simplificatrices, notamment celle d’un taux sans risque constant fixé à 5%, alors qu’en pratique ce taux est à la fois variable dans le temps et potentiellement différent de cette valeur.

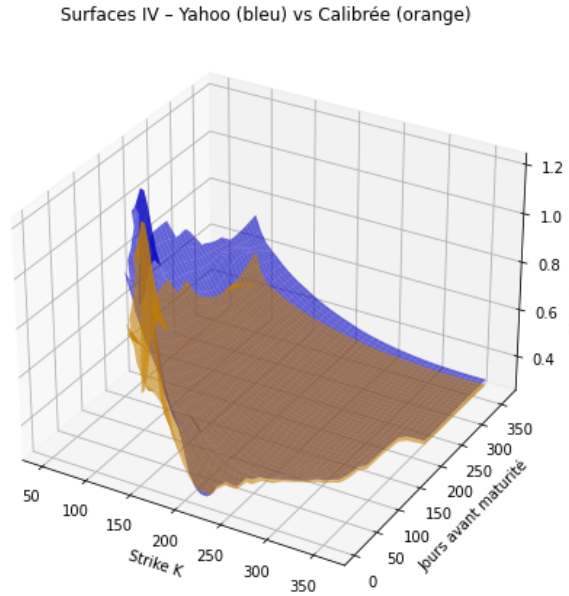


FIGURE 7 – Surface de volatilité implicite - Black & Scholes

La surface ci-dessus compare la volatilité implicite observée sur le marché (en bleu), telle

que fournie par Yahoo Finance, à celle recalculée à l'aide du modèle de Black-Scholes après calibration sur l'ensemble des options disponibles. On observe une concordance globale satisfaisante entre les deux surfaces, notamment pour les maturités courtes et les strikes proches du cours spot. Toutefois, certaines divergences apparaissent aux extrémités de la surface, notamment pour les strikes très éloignés (deep in/out of the money) ou les maturités plus longues, où le modèle de Black-Scholes tend à lisser davantage la structure de volatilité. Ces écarts peuvent être attribués aux limites du modèle, qui repose sur l'hypothèse d'une volatilité constante, alors que la surface de marché reflète des phénomènes plus complexes comme la volatilité implicite stochastique ou la préférence des investisseurs pour la protection contre les chocs extrêmes.

Enfin, nous observons un léger effet de skew, ce qui ne reflète pas la réalité du marché. En effet ce phénomène qui reflète l'aversion au risque des investisseurs et leur demande plus forte pour se couvrir contre les baisses brutales n'est pas bien capturé par le modèle de Black & Scholes. Pour cause, l'hypothèse de volatilité constante, principale raison des limites du modèle.

2.3.3 Calibration du modèle d'Heston

Pour calibrer le modèle de Heston, nous avons adopté une approche d'optimisation numérique consistant à ajuster les paramètres du modèle afin de minimiser l'erreur entre les prix théoriques issus du modèle et les prix observés sur le marché. Contrairement au modèle de Black-Scholes, le modèle de Heston intègre une volatilité stochastique, ce qui le rend plus flexible et mieux adapté à la capture des phénomènes de *skew* et de *smile* observés dans les surfaces de volatilité.

Les données utilisées pour la calibration proviennent de Yahoo Finance et comprennent, pour chaque option vanille, le prix du marché, le strike, le temps jusqu'à maturité, le taux sans risque, ainsi que le prix spot du sous-jacent (en l'occurrence Amazon).

Le processus de calibration consiste à estimer les cinq paramètres clés du modèle de Heston : la corrélation ρ , la volatilité de la variance σ , la variance long terme θ , la vitesse de retour à la moyenne κ , et la variance initiale v_0 . Pour chaque jeu de paramètres testé, nous utilisons la méthode de *pricing* par transformation de Fourier (Carr & Madan) afin de calculer le prix des options, puis minimisons une fonction objectif pondérée par l'écart entre ces prix et ceux du marché.

Si l'on note Θ l'ensemble des paramètres du modèle, l'objectif est de trouver les paramètres optimaux Θ^* minimisant la fonction objectif suivante :

$$\sum_{i=1}^N w_i (P_i - f(K_i | \Theta))^2$$

où P_i représente les prix de marché, f est la fonction de valorisation (pricing), et w_i

sont des poids généralement définis par :

$$w_i = \frac{1}{\text{spread}_i}$$

TABLE 3 – Paramètres du modèle de Heston : valeurs initiales et calibrées

Paramètre	ρ	σ	θ	κ	v_0
Initial	-0,4	0,3	0,04	1,0	0,04
Calibré	-0,3566	0,4676	0,0732	1,493	0,0646

TABLE 4 – Extrait des prix du marché vs. prix issus du modèle de Heston

S_0	Jours avant maturité	Strike K	Prix marché	Prix Heston
209,69	5	140	69,80	69,83
209,69	5	145	64,95	64,83
209,69	5	150	60,13	59,84
209,69	5	155	54,58	54,84
209,69	5	160	50,00	49,85

Les résultats du tableau ci-dessus mettent en évidence la qualité d'ajustement du modèle de Heston aux prix observés sur le marché. Pour les différentes options considérées les prix calculés à l'aide du modèle calibré sont très proches des prix réels de marché. L'écart relatif est systématiquement inférieur à un dollar, ce qui traduit une excellente capacité du modèle à capturer la dynamique des prix dans cette zone. Cette précision s'explique notamment par la richesse du modèle de Heston, qui intègre la stochasticité de la volatilité et permet ainsi de mieux modéliser les effets observés en pratique sur les marchés, tels que le skew ou le smile de volatilité implicite. La calibration effectuée sur l'ensemble de la surface permet d'obtenir des paramètres robustes, adaptés à une grande variété de configurations de marché.

Surfaces IV - Yahoo (bleu) vs Calibrée (orange)

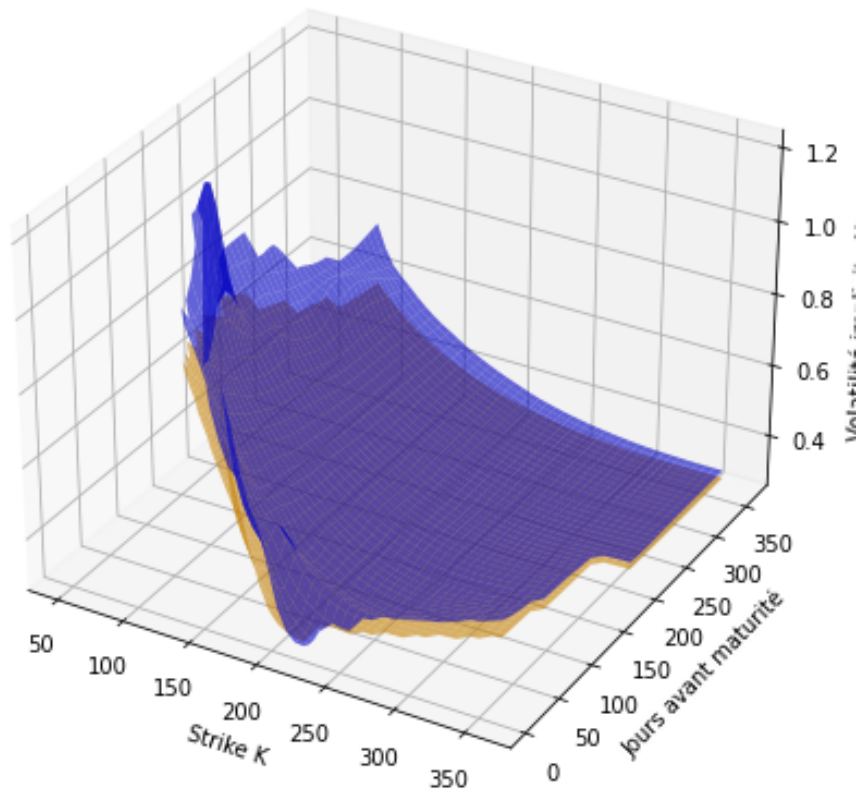


FIGURE 8 – Surface de volatilité implicite - Heston

La figure ci-dessus illustre la surface de volatilité implicite obtenue après calibration du modèle de Heston, superposée à la surface observée sur le marché. On observe une bonne concordance globale entre la surface calibrée et les données du marché, notamment dans les zones de maturités courtes à modérées et pour les strikes proches du spot. Le modèle de Heston parvient ainsi à capturer de manière satisfaisante les variations de volatilité en fonction du strike et du temps. Comparée à la surface calibrée sous le modèle de Black & Scholes, celle obtenue via Heston montre une capacité nettement supérieure à suivre les déformations de la structure de volatilité, en particulier le *skew* et le *smile*. Là où la surface Black & Scholes peine à reproduire la courbure de la volatilité implicite, en raison de l'hypothèse de volatilité constante, le modèle de Heston bénéficie de sa structure stochastique pour ajuster localement la volatilité selon le niveau du strike et la maturité. Visuellement, cela se traduit par une surface Heston plus flexible, qui épouse mieux les variations observées sur le marché, tandis que la surface Black & Scholes tend à lisser ou à sous-estimer les irrégularités. Ce constat confirme l'intérêt d'un modèle à volatilité stochastique pour la calibration sur une nappe complète et pour

une utilisation en pricing sur des produits dérivés plus complexes.

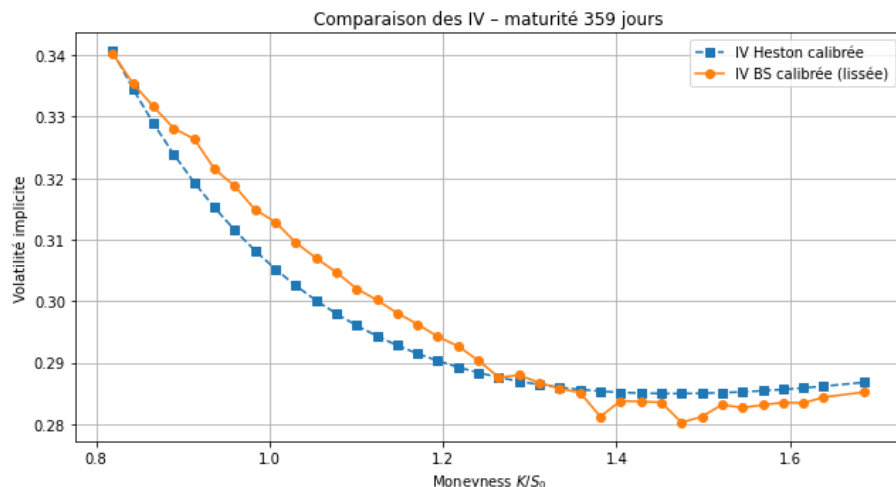


FIGURE 9 – Comparaison du skew produit par BS & Heston sur le sous-jacent Amazon

Le graphique ci-dessus compare les courbes de volatilité implicite issues des calibrations du modèle de Heston et du modèle de Black-Scholes pour une maturité de 359 jours. On y observe que la courbe issue du modèle de Black & Scholes, bien que lissée, ne reflète pas fidèlement la forme réelle du skew, en effet, elle présente une faible convexité et quelques irrégularités. En revanche, le modèle de Heston offre une description plus réaliste : sa courbe s'aplatit progressivement en dehors de la monnaie, traduisant une meilleure capacité à reproduire les comportements observés sur les marchés. Cette différence s'explique par la nature même des deux modèles : là où Black-Scholes suppose une volatilité constante, Heston permet à celle-ci de varier au cours du temps, ce qui lui donne une plus grande flexibilité pour s'adapter à la structure du marché. Ce constat confirme la pertinence du modèle de Heston pour la valorisation de produits optionnels complexes, notamment lorsqu'une bonne représentation de la surface de volatilité est essentielle.

En conclusion de cette seconde partie, nous avons posé les fondements théoriques des deux modèles de référence : le modèle de Black-Scholes et le modèle de Heston. Cette étape nous a permis de mieux comprendre leurs mécanismes, tout en mettant en lumière leurs forces et leurs limites respectives. Ces limites ont ensuite été confrontées à la réalité des données de marché à travers un processus de calibration sur Python. Il ressort de cette analyse comparative que le modèle de Heston constitue une approche plus pertinente pour le pricing des options. En autorisant une dynamique stochastique de la volatilité, il permet de capturer plus fidèlement les comportements observés sur les marchés réels, notamment le skew de volatilité. Contrairement au modèle de Black-Scholes, qui repose sur l'hypothèse restrictive d'une volatilité constante, le modèle de

Heston s'adapte davantage à la structure complexe de la surface de volatilité implicite. C'est pourquoi, dans la suite de ce mémoire, nous retiendrons principalement le modèle de Heston comme cadre de valorisation¹⁰.

Cependant, cette supériorité théorique et empirique s'accompagne d'un coût computationnel non négligeable. La calibration du modèle de Heston s'est révélée particulièrement exigeante en temps de calcul. Afin de pallier cette difficulté, nous explorerons par la suite des méthodes d'apprentissage supervisé, non seulement pour estimer efficacement les prix de produits dérivés complexes comme les PDI, mais également pour améliorer le processus même de calibration. En particulier, nous présenterons une application du machine learning visant à accélérer et fiabiliser l'estimation des paramètres du modèle de Heston, réduisant ainsi significativement son coût opérationnel.

10. Notre pricer final inclura à la fois le modèle de Black-Scholes et celui de Heston, mais seule l'implémentation détaillée du modèle de Heston sera présentée.

3 Valorisation de la Reverse Convertible

Nous disposons à présent de l'ensemble des outils nécessaires pour réaliser un pricing rigoureux d'une Reverse Convertible. Toutefois, dans un contexte professionnel, la rapidité constitue un enjeu central. Il n'est pas rare qu'un Sales¹¹ sollicite un Structurer pour établir une grille complète de Reverse Convertibles, couvrant différents sous-jacents, maturités et niveaux de barrière. Comme nous l'avons observé dans la section précédente, le temps de calibration du modèle de Heston peut représenter un obstacle majeur lorsque chaque seconde compte en salle de marché.

Dans ce contexte, il devient crucial pour les Structurers de mettre en place des solutions permettant d'accélérer le processus de pricing tout en maintenant un haut niveau de précision. C'est précisément l'objectif de cette dernière partie : nous allons explorer comment intégrer des techniques d'apprentissage automatique au modèle de Heston afin de réduire significativement le temps de calcul sans compromettre la qualité des résultats.

Dans ce contexte, nous avons conçu une architecture orientée objet en `Python 3.8.8`, à l'aide de l'environnement de développement `Spyder`. Notre programme repose sur une structuration en six classes principales, chacune jouant un rôle spécifique dans le cadre de la modélisation et de l'apprentissage automatique des surfaces d'options :

- **BSModel** : classe implémentant le modèle de Black-Scholes, utilisée principalement pour le calcul des prix et des volatilités implicites des options de type européen. Elle sert également de référence dans l'étape de calibration du modèle de Heston.
- **HestonModel** : classe centrale représentant le modèle de Heston. Elle contient une implémentation complète du pricing via la méthode FFT (Fast Fourier Transform) ainsi qu'une fonction de simulation de chemins.
- **Calibration** : classe dédiée à la calibration du modèle de Heston sur des données de marché. Elle utilise des méthodes d'optimisation pour estimer les cinq paramètres du modèle (v_0 , θ , κ , σ , ρ) à partir des prix d'options observés.
- **MachineLearning** : cette classe gère la génération des données simulées, la création du réseau de neurones, l'entraînement, et la prédiction des paramètres du modèle de Heston à partir de surfaces de volatilité. Elle permet notamment de comparer différentes tailles d'échantillons pour étudier la vitesse de convergence de l'apprentissage.
- **MarketData** : classe responsable du chargement et du traitement des données de marché (issues de Yahoo Finance, par exemple). Elle permet d'interpoler les surfaces de volatilité du marché sur une grille compatible avec celle utilisée en simulation.

11. Le Sales est l'intermédiaire entre la salle de marché et les clients institutionnels, il est chargé de proposer rapidement des produits financiers adaptés à la demande.

- **main** : point d'entrée principal du programme. Elle orchestre les appels aux différentes classes pour simuler les données, entraîner les modèles, prédire les paramètres sur des données réelles, et visualiser les résultats (courbes de perte, comparaison des prix, etc.).

Cette organisation en classes assure la clarté, la réutilisabilité et l'extensibilité du code, ce qui est particulièrement utile pour les tests comparatifs entre les méthodes traditionnelles et les approches basées sur l'apprentissage automatique.

3.1 Utilisation du machine learning pour la calibration du modèle d'Heston

L'un des principaux freins à l'utilisation du modèle de Heston en pratique réside dans le coût computationnel élevé de sa calibration. En effet, contrairement au modèle de Black & Scholes, la calibration de Heston repose sur l'ajustement de plusieurs paramètres (volatilité de variance, vitesse de retour à la moyenne, corrélation, etc.) à partir des prix de marché, ce qui nécessite l'optimisation de fonctions complexes, souvent non convexes, et sensibles aux conditions initiales. Cette étape peut rapidement devenir chronophage dans un environnement de marché où la réactivité est essentielle.

C'est dans ce contexte que le machine learning se révèle particulièrement prometteur. L'idée consiste à entraîner un modèle d'apprentissage supervisé sur un ensemble de données calibrées hors-ligne, pour qu'il soit ensuite capable de prédire rapidement, en temps réel, les paramètres du modèle de Heston à partir de nouvelles conditions de marché. Cette approche permettrait de contourner les lenteurs de l'optimisation classique tout en conservant la capacité du modèle de Heston à capturer des phénomènes de volatilité observés sur les marchés, comme le skew ou le smile. Nous présentons dans cette sous-partie la mise en œuvre concrète de cette méthode et ses bénéfices en termes de rapidité et de robustesse.

Pour la calibration des paramètres du modèle de Heston, nous avons opté pour une approche d'apprentissage profond (deep learning) à l'aide de réseaux de neurones. Cette méthode consiste à apprendre une correspondance entre une surface de volatilité implicite et les paramètres du modèle qui l'ont générée.

La première étape consiste à générer une base de données synthétique de surfaces de volatilité via la fonction `simulate_heston_surfaces` de la classe `MarketData`. Cette fonction génère n surfaces¹² en simulant aléatoirement des jeux de paramètres $(v_0, \theta, \kappa, \sigma, \rho)$ selon des lois uniformes sur des intervalles prédéfinis.

Chaque surface est composée de 150 points correspondant à une grille régulière de couples (**moneyness**, **maturité**), où la moneyness K/S varie de 0.7 à 1.3 et la maturité

12. chaque surface représentant une observation de marché aléatoire et fictive

T de 0.1 à 1 an.¹³ Ainsi, la base de données finale est de taille $(n, 150)$ en entrée pour les surfaces, et de taille $(n, 5)$ en sortie pour les paramètres à calibrer.

Comme la simulation est particulièrement coûteuse en temps de calcul, nous avons parallélisé le processus à l’aide du module `multiprocessing` de Python, ce qui nous a permis de diviser le temps de génération par quatre en exploitant les quatre cœurs de notre processeur.

Une fois les données générées, nous les divisons en deux ensembles :

- **Train set** : 80% des données, utilisé pour entraîner le modèle.
- **Test set** : 20% des données, utilisé pour évaluer la capacité du modèle à généraliser.

Le modèle de réseau de neurones est ensuite entraîné en minimisant une fonction de perte de type **erreur quadratique moyenne (MSE)** :

$$\mathcal{L}_{\text{MSE}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\hat{y}_i - y_i\|^2$$

où \hat{y}_i est la prédiction du modèle pour la surface i et y_i est le vecteur des vrais paramètres Heston associés.

L’entraînement se fait sur plusieurs époques, et à chaque époque nous suivons l’évolution de la perte sur le train set ainsi que sur le test set. Cela permet d’analyser la convergence du modèle, détecter un éventuel overfitting, et ajuster le nombre de surfaces nécessaires pour atteindre une bonne calibration.

Dans un premier temps, nous avons comparé l’impact du nombre de surfaces utilisées pour l’entraînement du modèle sur trois aspects clés :

1. la **vitesse d’exécution** de la phase d’entraînement,
2. la **vitesse de convergence** de la fonction de perte,
3. la **précision finale** du modèle sur l’ensemble de test.

Pour ce faire, nous avons entraîné le modèle sur trois jeux de données de tailles différentes : 10, 100 et 1000 surfaces.¹⁴

Cette comparaison permet d’identifier le compromis optimal entre performance computationnelle et qualité de calibration.

Nombre de surfaces	Temps d’exécution (secondes)
10	32.23
100	317.22
1000	2887.61

TABLE 5 – Temps d’exécution selon le nombre de surfaces simulées

13. Ce choix est arbitraire mais réaliste : les reverse convertibles sont généralement des produits de maturité inférieure à un an, et l’option de type Put Down-and-In est souvent valorisée à-the-money.

14. Pour rappel, chaque surface est constituée de 150 points correspondant à différentes combinaisons de maturité et de moneyness. Ainsi, un ensemble de 1000 surfaces contient 150 000 données d’entrée.

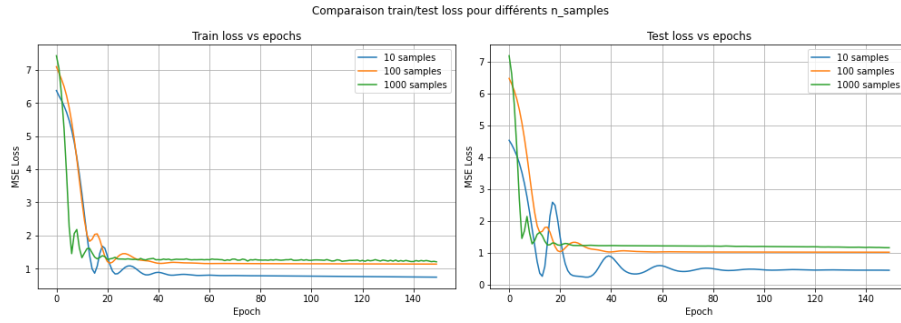


FIGURE 10 – Comparaison du skew produit par BS & Heston sur le sous-jacent Amazon

L'analyse des performances selon le nombre de surfaces d'entraînement met en évidence un compromis clair entre temps de calcul et qualité d'ajustement. Comme indiqué dans le Tableau 5, le temps d'exécution croît de manière quasi-linéaire avec le nombre de surfaces simulées, passant d'environ 32 secondes pour 10 surfaces à près de 48 minutes pour 1000 surfaces. Toutefois, l'étude des courbes de perte en figure 10 montre que l'augmentation du nombre de surfaces améliore la rapidité de convergence et la stabilité des prédictions.

Sur le graphe de gauche, correspondant à la loss sur l'ensemble d'entraînement, on observe que le modèle converge significativement plus rapidement avec 1000 surfaces. Toutefois, la loss finale est légèrement plus élevée que celle obtenue avec 10 ou 100 surfaces. Sur le graphe de droite (test set), le comportement est cohérent : le modèle entraîné avec 1000 surfaces généralise mieux (courbe plus lisse et moins de surapprentissage), bien que l'erreur quadratique moyenne reste un peu plus élevée.

Cette légère hausse de la loss peut s'expliquer par le fait que le modèle, exposé à une base d'apprentissage plus variée, ne surajuste pas les données comme c'est le cas avec seulement 10 ou 100 surfaces. Ainsi, les modèles entraînés avec peu de données semblent obtenir une erreur plus faible uniquement parce qu'ils surapprennent (overfitting) un jeu d'entraînement limité. À l'inverse, le modèle entraîné avec 1000 surfaces sacrifie une petite partie de précision pour mieux généraliser à des données nouvelles, ce qui est généralement préférable en pratique surtout dans le cas d'évaluation de produit structuré où il est nécessaire de pouvoir proposer rapidement une estimation du prix du produit pour des caractéristiques variées.

Enfin, une fois le réseau neuronal entraîné, la prédiction des paramètres à partir d'une nouvelle surface de volatilité s'effectue de manière quasi-instantanée, indépendamment de la complexité du processus de calibration classique.

À titre de comparaison, la calibration traditionnelle (par optimisation numérique) nécessite environ 43 secondes par surface, contre une prédiction quasi immédiate (moins d'une

seconde) via notre modèle entraîné. Ce gain en efficacité est d'autant plus significatif lorsqu'il s'agit de calibrer un grand nombre de surfaces ou de mettre à jour les paramètres en temps réel dans un cadre de trading algorithmique ou de gestion de risque dynamique.

De plus, l'approche par machine learning offre une meilleure robustesse à la structure de la surface : tant que celle-ci est interpolée sur la même grille que celle d'apprentissage, le modèle reste capable de fournir une calibration fiable, même dans des situations hors distribution (ex. : volatilité extrême ou paramètres atypiques). Il constitue donc un outil rapide, adaptable et efficace pour la calibration paramétrique dans un environnement de marché en constante évolution.

3.2 Pricing du Put Down & In

Dans cette section, nous nous intéressons à l'évaluation du prix d'un Put Down & In européen dans le cadre du modèle de Heston, où la condition de barrière est observée uniquement à maturité. Pour cela, nous adoptons une approche fondée sur la simulation de trajectoires via la méthode de Monte Carlo.

Le modèle de Heston étant caractérisé par une volatilité stochastique, nous discrétisons ses dynamiques à l'aide d'un schéma d'Euler explicite avec *troncature complète* (full truncation) afin de garantir la positivité du processus de variance. Plus précisément, à chaque pas de temps, la variance v_t est mise à jour en imposant $v_t \geq 0$ à chaque étape de la simulation, ce qui assure la stabilité numérique du processus. La corrélation entre les chocs du sous-jacent et de la variance est prise en compte à l'aide d'un couplage de deux mouvements browniens corrélés, selon une structure de corrélation de type Cholesky.

Plus précisément, si l'on souhaite simuler deux processus browniens $W_t^{(1)}$ et $W_t^{(2)}$ corrélés avec un coefficient $\rho \in [-1, 1]$, on procède généralement en générant deux variables indépendantes standard normales Z_1 et Z_2 , puis en construisant :

$$W_t^{(1)} = Z_1, \quad W_t^{(2)} = \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2.$$

Ce changement de variable correspond à une décomposition de Cholesky de la matrice de covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = LL^\top \quad \text{où} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix}.$$

Cette construction garantit que les deux variables simulées possèdent bien la corrélation souhaitée, tout en restant simples à générer à partir de variables normales indépendantes. Elle est particulièrement adaptée aux simulations de Monte Carlo pour les modèles stochastiques tels que celui de Heston.

Une fois les trajectoires simulées, le prix de l'option est obtenu en évaluant le payoff du Put classique, $\max(K - S_T, 0)$, uniquement sur les trajectoires pour lesquelles le sous-jacent est inférieur à la barrière H à maturité, conformément à la définition d'un Put Down & In avec barrière européenne. Enfin, le prix est estimé comme l'espérance actualisée de ces payoffs, et l'incertitude statistique est quantifiée par l'écart-type de l'estimateur de Monte Carlo.

N'ayant pas accès à une base de données réelle sur les prix de Put Down & In (PDI) pour l'action Amazon, nous avons choisi de comparer les prix obtenus à l'aide de la formule fermée du modèle de Black-Scholes avec ceux issus d'une simulation de Monte Carlo dans le cadre du modèle de Heston.

TABLE 6 – Prix du Put Down & In sur Amazon sous Black-Scholes et Heston

Barrière H	Maturité T	BS (Fermée)	Heston (MC)
220	0.5 an	14.8997	14.2967 ± 0.1483
220	1.0 an	19.4350	20.5937 ± 0.2001
220	1.5 an	22.2359	24.6805 ± 0.2295
215	0.5 an	14.5698	14.2416 ± 0.1512
215	1.0 an	19.2058	20.3650 ± 0.2003
215	1.5 an	22.0529	24.3482 ± 0.2298
210	0.5 an	14.0238	13.7131 ± 0.1513
210	1.0 an	18.8212	19.9055 ± 0.2007
210	1.5 an	21.7445	24.1234 ± 0.2300
205	0.5 an	13.2751	12.9594 ± 0.1524
205	1.0 an	18.2828	19.5852 ± 0.2022
205	1.5 an	21.3099	23.7776 ± 0.2316
200	0.5 an	12.3467	12.3961 ± 0.1533
200	1.0 an	17.5958	18.9335 ± 0.2028
200	1.5 an	20.7500	23.2196 ± 0.2325

Les résultats montrent une différence notable entre les deux modèles, en particulier pour les maturités longues. Le modèle de Heston, en intégrant une volatilité stochastique et une corrélation négative entre le sous-jacent et sa variance, attribue une probabilité plus importante aux scénarios extrêmes, en particulier les baisses de prix brutales. Cela se traduit par des prix systématiquement plus élevés pour les PDI, notamment pour les maturités de un an et plus.

Ainsi, cette comparaison confirme l'intérêt du modèle de Heston dans la valorisation de produits exotiques sensibles à la dynamique de volatilité implicite, comme c'est le cas des options à barrière.

3.3 Un premier pas vers la couverture delta neutre

Étant donné que nous travaillons dans le cadre du modèle de Heston et que le produit considéré est une option à barrière avec activation à maturité, il n'existe pas de formule fermée pour le delta. Nous adoptons donc une méthode de différentiation numérique, couramment utilisée dans les approches de Monte Carlo.

Le delta est défini comme la dérivée partielle du prix de l'option par rapport au prix initial de l'actif sous-jacent S_0 :

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_0}.$$

En pratique, cette dérivée est approximée à l'aide de la méthode des différences finies centrées :

$$\Delta \approx \frac{V(S_0 + \varepsilon) - V(S_0 - \varepsilon)}{2\varepsilon},$$

où ε est une perturbation de petite amplitude.

Cette technique consiste à calculer deux fois le prix de l'option en faisant varier légèrement S_0 autour de sa valeur initiale, puis à en déduire le delta comme taux de variation local.

L'estimation du prix étant obtenue par Monte Carlo, cette approche introduit naturellement un bruit statistique. Il est donc important de choisir un ε suffisamment grand pour éviter les erreurs de troncature numériques, mais pas trop grand pour conserver une bonne précision locale. En pratique, il est aussi possible d'utiliser des common random numbers entre les deux simulations pour réduire la variance de l'estimateur.

Cette méthode constitue une première étape vers la mise en place d'une couverture delta-neutre, en permettant d'évaluer comment le prix du Put Down & In réagit aux variations infinitésimales du sous-jacent. Bien qu'approximative, elle fournit une information précieuse sur la sensibilité directionnelle du produit, et peut être généralisée à d'autres sensibilités si nécessaire.

3.4 Construction du pricer

Nous avons désormais l'ensemble des éléments nécessaires pour procéder au pricing de notre Barrier Reverse Convertible (BRC). Nous allons ainsi pouvoir comparer les prix obtenus par nos modèles de pricing avec ceux disponibles sur internet, ainsi que le temps de calcul associé à chaque modèle. Cela nous permettra de tirer des conclusions sur les avantages d'utiliser le Machine Learning dans la calibration du modèle de Heston, ainsi que sur la supériorité de ce modèle par rapport à celui de Black & Scholes.

3.4.1 Calcul des coupons

Avant de présenter l'élaboration de notre pricer, il est essentiel de comprendre ce que signifie réellement "pricer" en banque pour un produit comme la BRC. En pratique, le pricing des produits structurés consiste à déterminer les montants des coupons pour des produits d'optimisation tels que la Reverse Convertible, l'Autocall, ou encore le Phoenix. Pour les produits de protection du capital, de participation ou de levier, il s'agit de calculer la valeur des cap et des floor.

L'investisseur choisit en réalité le montant qu'il souhaite investir dans un produit, sous réserve d'un minimum, et l'émetteur considère que ce montant correspond à 100% de la valeur nominale. À partir de là, l'émetteur évalue les différentes composantes du produit, comme le Put Down & In pour la Reverse Convertible, ou toute autre stratégie d'options (achat ou vente). Une fois le prix de chaque composante connu, il devient possible de calculer les coupons ou d'établir les barrières (dans le cas d'une Twin Win ou d'une Shark Note).

Ainsi, si nous notons P_{PDI} le prix du Put Down & In en pourcentage de la valeur nominale, et ZC le prix du Zéro Coupon, il en résulte qu'au moment de l'achat du produit, un montant de revenu égal à $100\% - ZC + P_{PDI}$ est dégagé par le produit, et donc dédié à l'investisseur.

Les coupons garantis perçus sont répartis selon une fréquence de paiement¹⁵ tout au long de la vie du produit. Ainsi, en notant C ce revenu initial au moment de l'achat du produit et c les coupons garantis, on obtient :

$$C = \sum_{i=1}^n c e^{-r \frac{T}{h} i}$$

avec n le nombre de coupon payé jusqu'à la maturité du produit.

Soit ,

$$c = C \frac{e^{-r \frac{T}{h}} - e^{-r \frac{T}{h} (n+1)}}{1 - e^{-r \frac{T}{h}}}$$

3.4.2 Présentation du pricer

Le pricer développé dans cette application permet de déterminer le prix des Reverse Convertible en utilisant différents modèles financiers, à savoir les modèles de Black-Scholes et de Heston. L'objectif principal de cet outil est de fournir aux utilisateurs une estimation précise du prix d'une BRC, en tenant compte des différents paramètres financiers, tels que le sous-jacent, la barrière de protection, la maturité du produit, la fréquence des paiements de coupons, ainsi que le modèle de calibration choisi pour les paramètres du modèle de Heston.

15. Nous notons h cette fréquence de paiement

L'application offre une interface graphique intuitive grâce à la bibliothèque **Tkinter**, permettant aux utilisateurs de sélectionner les actions sous-jacentes, les barrières de protection, les maturités et la fréquence des paiements de coupons. Elle propose également la possibilité de choisir entre un modèle de pricing classique de Black-Scholes ou le modèle de Heston, avec une option de calibration via une approche classique ou utilisant des méthodes de Machine Learning pour estimer les paramètres du modèle.

Voici un aperçu du fonctionnement du pricer :

- **Sélection des actifs et des paramètres** : L'utilisateur sélectionne les actions sous-jacentes, les barrières de protection (exprimées en pourcentage du prix initial), ainsi que les maturités parmi les choix disponibles (3 mois, 6 mois, 1 an, 18 mois). La fréquence des coupons peut être trimestrielle, semestrielle ou annuelle.
- **Choix du modèle de pricing** : L'utilisateur peut choisir entre le modèle de Black-Scholes ou de Heston pour le calcul du prix du produit. Le modèle de Black-Scholes est un modèle classique, tandis que le modèle de Heston permet de mieux prendre en compte la volatilité stochastique et les effets de corrélation entre le sous-jacent et sa volatilité.
- **Calibration des paramètres** : Selon le modèle sélectionné, les paramètres sont calibrés. Pour le modèle de Heston, deux options sont proposées : une calibration classique basée sur des paramètres constants ou une calibration utilisant une approche de Machine Learning pour affiner les estimations.
- **Calcul des prix et des résultats** : Une fois les paramètres définis, le pricer calcule le prix du produit, le coupon associé, ainsi que le delta au moment de l'achat. Le calcul est effectué pour chaque combinaison de ticker, barrière, maturité et modèle. Les résultats sont ensuite affichés dans un tableau récapitulatif.
- **Affichage des résultats** : L'application génère un tableau récapitulatif des résultats, incluant le prix du BRC, les coupons, le delta, et le temps de calcul pour chaque simulation. Cela permet à l'utilisateur de comparer les différents scénarios et d'analyser l'impact des différentes variables sur le pricing du produit.

Cet outil est conçu pour être utilisé par des étudiants intéressés par le pricing des produits dérivés complexes. Il offre une grande flexibilité et une vue d'ensemble complète des facteurs influençant la valorisation des Reverse Convertibles mais n'est pas conçu pour un usage professionnel.

3.4.3 Résultats finaux et comparaison

Les résultats obtenus à l'issue des simulations pour les actions AMZN, AAPL et NVDA sur une maturité d'un an, avec différentes barrières (60%, 70%, 80%, 90%),

permettent de comparer la rapidité d'exécution entre les modèles utilisés : Black-Scholes, Heston avec calibration classique, et Heston avec calibration via Machine Learning.

Action	Modèle	Calibration	Durée totale (s)
AMZN	Black-Scholes	BS	1.22
	Heston	ML	19.71
	Heston	Classique	24.87
AAPL	Black-Scholes	BS	1.34
	Heston	ML	12.17
	Heston	Classique	23.52
NVDA	Black-Scholes	BS	2.01
	Heston	ML	15.02
	Heston	Classique	17.65

TABLE 7 – Durées d'exécution totales pour chaque pricing.

On constate immédiatement que le modèle de Black-Scholes est le plus rapide, avec des temps d'exécution systématiquement inférieurs à 5 secondes, même en traitant plusieurs barrières pour une même action. Ce résultat est cohérent avec la simplicité analytique du modèle et l'absence de calibration lourde.

Cependant, l'utilisation du Machine Learning dans la calibration du modèle de Heston réduit significativement le temps de calcul par rapport à la méthode classique. Sur chaque action, le gain en performance est net, en moyenne 28% de temps gagné grâce à la calibration via apprentissage supervisé. Ce résultat valide notre choix d'intégrer une approche data-driven dans le processus de calibration, qui s'avère plus efficace tout en conservant la richesse du modèle stochastique.

Ticker	Barrière (%)	Prix PDI (%) - Heston	Coupon (%) - Heston	Prix PDI (%) - BS	Coupon (%) - BS
AMZN	70	2.1758	6.5799	2.4484	6.8643
AMZN	90	3.9379	8.4180	4.5695	9.0768
AAPL	70	2.1502	6.5531	1.9383	6.3321
AAPL	90	4.0835	8.5698	4.2136	8.7055
META	70	0.0000	4.3103	0.9000	5.2491
META	90	0.0000	4.3103	1.4910	5.8656
NVDA	70	3.5882	8.0531	5.5805	10.1313
NVDA	90	5.7204	10.2773	7.9431	12.5958

TABLE 8 – Comparatif des prix PDI et coupons entre les modèles Heston et Black-Scholes.

Il est également à noter que, bien que le modèle de Black-Scholes soit plus rapide, les différences observées sur les prix des produits (prix du Put Down & In et des coupons associés) semblent indiquer une surévaluation dans certains cas.

Conclusion

Ce mémoire avait pour ambition d’explorer des méthodes avancées de valorisation d’un produit structuré Reverse Convertible, en comparant la performance de différents modèles de pricing, notamment Black-Scholes et Heston, avec et sans calibration par Machine Learning. À travers le développement d’un pricer complet et interactif, nous avons pu observer les avantages et les limites de chaque approche.

L’un des apports majeurs de ce travail réside dans l’intégration de l’intelligence artificielle dans le processus de calibration. En entraînant un réseau de neurones à prédire les paramètres du modèle de Heston à partir d’une surface de volatilité implicite, nous avons considérablement réduit le temps de calibration, tout en conservant une précision de pricing satisfaisante. Ce gain de performance est particulièrement notable en environnement opérationnel, où la réactivité constitue un facteur clé.

Par ailleurs, la comparaison avec les prix de marché met en lumière les limites du modèle de Black-Scholes, qui semble parfois surévaluer les Reverse Convertible en raison de son incapacité à capturer la dynamique stochastique de la volatilité. Le modèle de Heston calibré par Machine Learning offre une alternative plus robuste et efficace.

Je suis toutefois pleinement conscient des hypothèses simplificatrices adoptées tout au long de ce travail. Fixer un taux d’intérêt constant, supposer l’absence de dividendes ou s’appuyer exclusivement sur les données de Yahoo Finance sont autant de choix qui limitent la portée de ce mémoire. Il serait pertinent, dans une version ultérieure, d’élaborer une courbe des taux à partir des marchés de taux d’intérêt, d’exploiter des bases de données professionnelles plus complètes, ou encore d’introduire des frais de transaction et une modélisation plus fine de la volatilité implicite.

Enfin, ce travail ouvre des perspectives intéressantes pour l’automatisation du pricing dans les banques d’investissement. Il serait pertinent d’envisager l’extension de cette approche à d’autres types de produits structurés, voire à la calibration de modèles à plusieurs facteurs. L’usage de techniques de Deep Learning plus avancées (telles que les réseaux convolutionnels ou transformers) pourrait également permettre une généralisation du cadre proposé.

A Annexe 1 - Apperçu du pricer

Reverse Convertible Pricer

Sélection des sous-jacents

☐ AMZN (Amazon)

☐ AAPL (Apple)

☐ MSFT (Microsoft)

☐ TSLA (Tesla)

☐ GOOG (Alphabet)

☐ META (Meta)

☐ NVDA (NVIDIA)

☐ ASML (ASML NA)

Choix des maturités

☐ 3 mois

☐ 6 mois

☐ 1 an

☐ 18 mois

Barrières de protection

☐ 40%

☐ 45%

☐ 50%

☐ 55%

☐ 60%

☐ 65%

☐ 70%

☐ 75%

☐ 80%

☐ 85%

☐ 90%

Fréquence des coupons

☒ Trimestrielle

☐ Semestrielle

☐ Annuelle

Modèle de pricing

☒ Black-Scholes

☐ Heston

Calibration Heston

☒ Machine Learning

☐ Classique

Lancer le Pricing

FIGURE 11 – Pricer de BRC

B Annexe B - Résultats de calcul stochastique

Lemme d'Itô

B.0.0.1 Dimension 1 :

Soit X_t un processus de diffusion de la forme :

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t,$$

et $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Alors :

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dW_t.$$

B.0.0.2 Dimension 2 :

Soit $X_t = (X_t^1, X_t^2)$ solution de :

$$dX_t^i = \mu_i(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t, X_t)dW_t^j, \quad i = 1, 2,$$

et $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$. Alors :

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) dt + \sum_{k=1}^d \left(\sum_{i=1}^2 \sigma_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) dW_t^k,$$

où $a_{ij} = \sum_{k=1}^d \sigma_{ik} \sigma_{jk}$.

Théorème de Girsanov (rappel)

Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien sous la probabilité \mathbb{P} , et soit $\theta = (\theta_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté, satisfaisant :

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds \right) \right] < \infty.$$

Alors la mesure \mathbb{Q} définie par :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(- \int_0^T \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds \right)$$

est une probabilité équivalente à \mathbb{P} , sous laquelle le processus :

$$\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds$$

est un mouvement brownien.

C Annexe C - Code Python

L'ensemble du code Python est à retrouver dans une pièce jointe transmise avec ce mémoire.

Références

- [1] Heston, S. L., 1993, “A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options”, *The Review of Financial Studies*, Vol. 6, No. 2, pp. 327–343. https://www.ma.imperial.ac.uk/~ajacquie/IC_Num_Methods/IC_Num_Methods_Docs/Literature/Heston.pdf
- [2] Black, F. and Scholes, M., 1973, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637–654. https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall09/cos323/papers/black_scholes73.pdf
- [3] Horvath, A., Muguruza, A. and Tomas, M., 2021, “Deep Learning Volatility : A Deep Neural Network Perspective on Heston Model Calibration”, *Quantitative Finance*, Vol. 21, No. 11, pp. 1839–1856. <https://arxiv.org/abs/1901.09647>
- [4] Ruf, J. and Wang, W., 2020, “Neural Networks for Option Pricing and Hedging : A Literature Review”, <https://arxiv.org/abs/1911.05620>
- [5] Tiedemann, M., “L’analyse des risques d’un produit structuré”, Mémoire de bachelor : Haute école de gestion de Genève, 2013. <https://sonar.ch/hesso/documents/314493>
- [6] Le, M. T., 2011, “Analyse de Marge de Commercialisation d’un Panier de Produits Structurés”, Mémoire présenté devant l’Institut de Science Financière et d’Assurances pour l’obtention du diplôme d’Actuaire de l’Université de Lyon. [https://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/0/11b376de766fae99c1257a180065f898/\\$FILE/Memoire%20%20Resume%20LE%20Minh%20Tuyen.PDF](https://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/0/11b376de766fae99c1257a180065f898/$FILE/Memoire%20%20Resume%20LE%20Minh%20Tuyen.PDF)
- [7] Maverick, J. B., “How Does Implied Volatility Impact Options Pricing?”, *Investopedia*, <https://www.investopedia.com/ask/answers/062415/how-does-implied-volatility-impact-pricing-options.asp>
- [8] Bec, C., 2021, “Impacts des risques financiers inhérents à la détention de produits structurés « Autocalls »”, Mémoire DU Actuariat ISFA. <https://www.institutdesactuaires.com/docs/mem/e38420e2352af0b42c762b1bad96708a.pdf>
- [9] Tra Bi Nene Othniel, 2024, “Évaluation des options sous le modèle de Heston”. <https://ornelle.quarto.pub/heston-model/>
- [10] Chen Zhang, Giovanni Amici, 2024, “Calibrating the Heston Model with Deep Differential Networks” <https://arxiv.org/html/2407.15536v1>
- [11] Adel BEN HAJ YEDDER, 2007, “Modèle de Heston Pricing d’options européennes et calibration”, PROJET IMI ENPC. http://eric.jeangirard.free.fr/mathfi/heston_rapport.pdf

- [12] Adel BEN HAJ YEDDER, 2007, “Modèle de Heston Pricing d’options européennes et calibration”, PROJET IMI ENPC.
http://eric.jeangirard.free.fr/mathfi/heston_rapport.pdf
- [13] Anders B. B., Espen Hamre 2023, “Hedging Exercise with Heston Model”, Master Thesis, MSc Advanced Economics and Finance.
https://research-api.cbs.dk/ws/portalfiles/portal/92148212/1627284_EHABBthesis.pdf
- [14] VASILE L. LAZAR, 2003, “PRICING DIGITAL CALL OPTION IN THE HESTON STOCHASTIC VOLATILITY MODEL”.
<https://www.cs.ubbcluj.ro/journal/studia-mathematica/archive/2003-3/lazar.pdf>
- [15] Igor Kravchenko, 2013, “BARRIER OPTION PRICING VIA HESTON MODEL”, A Thesis submitted for the degree of Master of Finance.
https://repositorio.iscte-iul.pt/bitstream/10071/8535/1/master_Igor_kravchenko.pdf
- [16] Peter TANKOV, 2015, “Surface de volatilité”, Université Paris-Diderot (Paris VII).
https://masterfinance.math.univ-paris-diderot.fr/attachments/article/39/poly_volatilite.pdf
- [17] Sergei Mikhailov, Ulrich Nögel, “Heston’s Stochastic Volatility Model Implementation, Calibration and Some Extensions”, Wilmott magazine.
http://screpey.free.fr/doc/051111_mikh%20heston.pdf
- [18] Abir Sridi , 2022, “DML-Calibration-Heston-Model”.
<https://github.com/asridi/DML-Calibration-Heston-Model/blob/main/DataGeneration.ipynb>
- [19] Canopee, “Deep Learning pour la calibration du modèle de Heston”, Study carried out by the Quantitative Practice.
<https://www.canopee-group.com/wp-content/uploads/2023/12/DeepLearningpourelacalibrationdumodeleHeston.pdf>