Universidad
Rey Juan Carlos

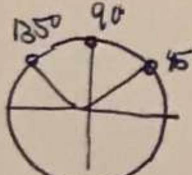
GRAFICOS 3D
Máster Universitario en Informática Gráfica, Juegos y Realidad Virtual
Examen final, enero de 2013

1) Imaginad que queremos representar un avión que entra en barrena (mientras avanza, gira con velocidad angular uniforme respecto del eje Z, girando en sentido contrario a las agujas del reloj). Nos piden calcular las rotaciones sobre el eje Z de ángulos 90º, 180º y 270º mediante interpolación de cuaternios. **Para subir nota:** ¿Podríamos interpolar entre la posición original y el giro de 360º? ¿Por qué?

SOLUCIÓN

Podemos representar rotaciones $R_z(\theta)$ como $\langle \cos\frac{\theta}{2}; 0, 0, \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \rangle$

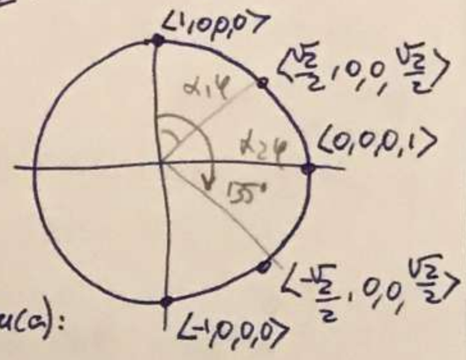
En nuestro caso, tenemos:



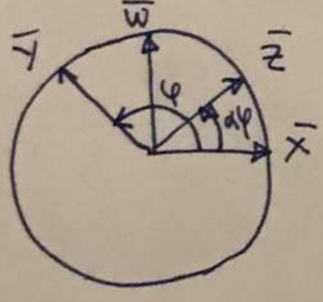
$\langle \cos 45°; 0, 0, \operatorname{sen} 45° \rangle = \langle \sqrt{2}/2; 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$

$\langle \cos 90°; 0, 0, \operatorname{sen} 90° \rangle = \langle 0; 0, 0, 1 \rangle$

$\langle \cos 135°; 0, 0, \operatorname{sen} 135° \rangle = \langle -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$



Interpolación entre cuaternios (Interpolac. esférica):



Entre los vectores $\bar{x}$ e $\bar{y}$:

$$\bar{z} = \text{SLERP}(\bar{x}, \bar{y}, \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(1-\alpha)\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\,\bar{x} + \frac{\operatorname{sen}(\alpha\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}\,\bar{y}$$

Para cuaternios es igual. Nosotros tenemos:

$\varphi: 135°$; $\alpha_1 = 1/3$; $\alpha_2 = 2/3$

$$z_1 = \langle \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \tfrac{\sqrt{2}}{2} \rangle = \frac{\operatorname{sen} \overbrace{\tfrac{2}{3}\cdot 135°}^{90°}}{\operatorname{sen} 135°} \cdot \langle 1,0,0,0 \rangle + \frac{\operatorname{sen} \overbrace{\tfrac{1}{3}\cdot 135°}^{45°}}{\operatorname{sen} 135°} \cdot \langle -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \tfrac{\sqrt{2}}{2} \rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}/2} \cdot \langle 1,0,0,0 \rangle + \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} \langle -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \tfrac{\sqrt{2}}{2} \rangle = \langle \sqrt{2}, 0, 0, 0 \rangle + \langle -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \tfrac{\sqrt{2}}{2} \rangle$$

$= \langle \sqrt{2}/2, 0, 0, \sqrt{2}/2 \rangle$ (que es lo correcto)

$$z_2 = \langle 0,0,0,1 \rangle = \frac{\operatorname{sen}(\overbrace{1/3 \cdot 135°}^{45°})}{\operatorname{sen} 135°} \langle 1,0,0,0 \rangle + \frac{\operatorname{sen}(\overbrace{\tfrac{2}{3} 135}^{90°})}{\operatorname{sen} 135°} \langle -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \tfrac{\sqrt{2}}{2} \rangle =$$

$$= \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} \langle 1,0,0 \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}/2} \langle -\sqrt{2}/2, 0, 0, \sqrt{2}/2 \rangle = \langle 1,0,0,0 \rangle + \langle -1,0,0,1 \rangle$$

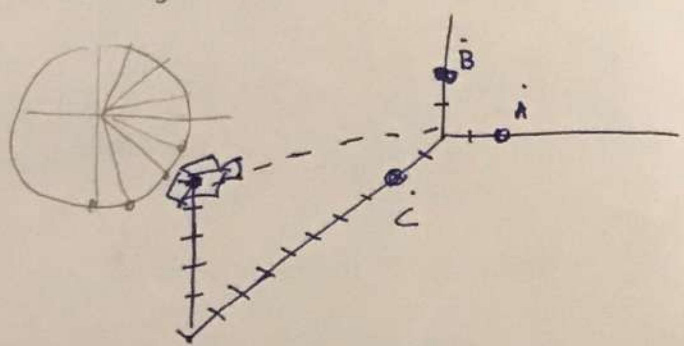
$= \langle 0,0,0,1 \rangle$ (que también es correcto)

Universidad
Rey Juan Carlos

GRAFICOS 3D
Máster Universitario en Informática Gráfica, Juegos y Realidad Virtual
Examen final, enero de 2013

1) Imaginad que queremos representar un avión que entra en barrena (mientras avanza, gira con velocidad angular uniforme respecto del eje Z, girando en sentido contrario a las agujas del reloj). Nos piden calcular las rotaciones sobre el eje Z de ángulos 90°, 180°, 270° y 360° (posición original) mediante interpolación de cuaterníos.

cada 45°:



1- Traslac. $T(0,-5,-10)$

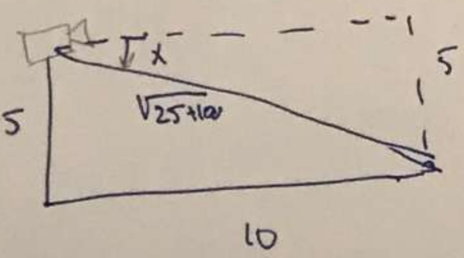
2 - Rot. $R_y(180°)$

3 - $R_x(-\alpha)$

$$R_y(180°) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{sen}\,\alpha = -5/\sqrt{125} = -1/\sqrt{5}$

$\cos\alpha = 10/\sqrt{125} = 2/\sqrt{5}$



$$R_x(-\alpha): \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\alpha) & -\text{sen}(-\alpha) & 0 \\ 0 & \text{sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha & 0 \\ 0 & -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0'89 & 0'45 & 0 \\ 0 & -0'45 & 0'89 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cam:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 0'05 \\ 11'15 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1'83 \\ 10'25 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$d = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -0'85 \\ 9'37 \\ 1 \end{bmatrix}$$

P
z negat:

$$\begin{bmatrix} d/n & 0 & 0 \\ 0 & d/n & 0 \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$