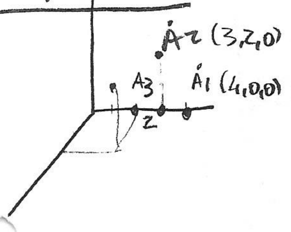
GRAFICOS 3D. Examen final, diciembre de 2016

1) Tenemos los puntos A1(4,0,0), A2(3,2,0), y A3(2,0,0). Se pide **calcular la proyección de estos puntos mediante una cámara de focal 1 situada en el punto (2,2,2) que apunta hacia el punto A2.** Utilizar para ello la matriz de proyección que conserva una medida de profundidad Z y la otra que no (la más simple). Elegir los parámetros que hagan falta para la primera matriz como se quiera (5 puntos)

$\boxed{\text{1. PROYECCIÓN}}$

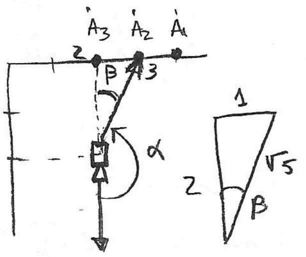


1- Posicionamiento de la cámara

- Traslación de la cámara: $T(-2,-2,-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\dot{A}'_1 = (2,-2,-2)$, $\dot{A}'_2 = (1,0,-2)$; $\dot{A}'_3 = (0,-2,-2)$

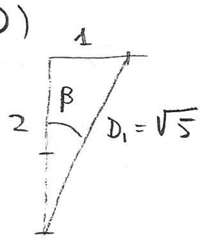
2- Rotación sobre el eje Y:



El ángulo de rotación es $\alpha = 180° - \beta$. Como estamos rotando el sistema de referencia, el ángulo es negativo: $\beta - 180° = -153'41$

siendo $\beta = \text{arccotg } 1/2 = 26'56°$ (positivo: giro sería ↺)

$\text{sen } \alpha = -1/\sqrt{5} = -0'447$ $\quad \cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -0'894$



Matriz de rotación $R_Y(-153'435°)$:

$$R_Y(-153'435°) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \text{sen}\,\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\,\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las coordenadas de los ptos serían $\dot{A}''_1 = R_X \cdot [2\ -2\ -2\ 1]^T = [-4/\sqrt{5} + 2/\sqrt{5},\ -2,\ 2/\sqrt{5} + 4/\sqrt{5},\ 1]^T$

$\dot{A}''_1 = [-2/\sqrt{5},\ -2,\ 6/\sqrt{5},\ 1]^T$ $\quad \dot{A}''_2 = [-2/\sqrt{5} + 2/\sqrt{5}, 0,\ 1/\sqrt{5} + 4/\sqrt{5}\ \ 1] = [0\ \ 0\ \ \sqrt{5}\ \ 1]^T$

$\dot{A}''_3 = [2/\sqrt{5}\ \ -2\ \ 4/\sqrt{5}\ \ 1]^T$

No hace falta rotar más. La cámara ya apunta a $\dot{A}''_2$

3- Proyección de los puntos

Matriz simple:

$$M_{proy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \dot{A}_{1P} = M_{proy} \cdot \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ -2 \\ 6/\sqrt{5} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ -2 \\ 6/\sqrt{5} \\ 6/\sqrt{5} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} -1/3 \\ -\sqrt{5}/3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \dot{A}_{2P} = M_{pr} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \\ \sqrt{5} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{A}_{3P} = M_{pr} \cdot \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -2 \\ 4/\sqrt{5} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -2 \\ 4/\sqrt{5} \\ 4/\sqrt{5} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{5}/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Proyección usando pseudodistancia:

El punto con mayor z respecto a la cámara es A_1, que tiene $z = \frac{6}{\sqrt{5}} = 2'68$.

Por sencillez, tomaremos $f = 3$, $n = d = 1$. Igualmente, tomaremos $h = 1$.

La matriz de proyección nos queda $M_{P3D} = \begin{bmatrix} n/h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n/h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f/(f-n) & -nf/(f-n) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Las proyecciones de los puntos quedan:

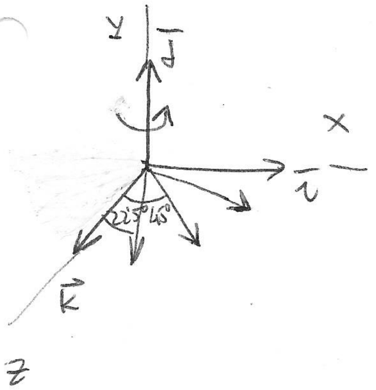
$$\dot{A}_{1P} = M_{P3D} \cdot \dot{A}_1'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ -2 \\ 6/\sqrt{5} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ -2 \\ 9/\sqrt{5} - 3/2 \\ 6/\sqrt{5} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} -1/3 \\ -\sqrt{5}/3 \\ 3/2 - \sqrt{5}/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Igualmente, $\dot{A}_{2P} = \left[0 \;\; 0 \;\; 3/2(\sqrt{5}-1) \;\; \sqrt{5}\right]^T \cong \left[0 \;\; 0 \;\; 3/2(1 - 1/\sqrt{5}) \;\; 1\right]^T$

$$\dot{A}_{3P} = \left[2/\sqrt{5} \;\; -2 \;\; 3/2(4/\sqrt{5} - 1) \;\; 4/\sqrt{5}\right]^T \cong \left[\tfrac{1}{2} \;\; \tfrac{-\sqrt{5}}{2} \;\; \tfrac{3}{2}\left(1 - \tfrac{\sqrt{5}}{4}\right) \;\; 1\right]^T$$

NOTA: Si nos hiciese falta, podríamos hacer que n fuese algo mayor: la z del punto más cercano, A_3, que es $4/\sqrt{5} = 1'79$

2) Calcular los cuaternios que rotan el vector **k** al rededor del eje Y unas magnitudes de 22,5º, 45º, 67,5º y 90º



Representaremos el vector $\vec{k}$ como un cuaternio:

$$k: \langle 0,0,0,1\rangle \equiv \langle 0, \vec{k}\rangle$$

Vamos a calcular el cuaternio que lo rota 90° y luego obtendremos 3 rotaciones intermedias a partir de la posición de partida

Para rotar $R_Y(90°)$ usamos el cuaternio $q: \langle \cos 45°; \operatorname{sen} 45° \bar{j}\rangle = \langle \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}\rangle$

Tenemos $q^{-1} = \langle \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}\rangle$. Calcularemos primero $q\cdot k = \langle \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}\rangle \cdot \langle 0; \bar{k}\rangle$

$$q\cdot k = \langle d_1 d_2 - \bar{u}_1\bar{u}_2 ; d_1\bar{u}_2 + d_2\bar{u}_1 + \bar{u}_1\times\bar{u}_2\rangle =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}\times\bar{k} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

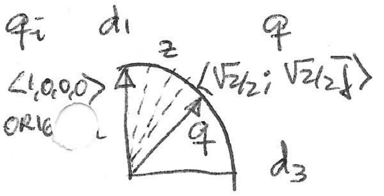
$$q\cdot k = \langle 0 - 0;\ \sqrt{2}/2\,\bar{k} + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\imath}\rangle$$

$$q k q^{-1} = \langle 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{k} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\imath}\rangle \langle \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}\rangle = \langle 0-0; \frac{1}{2}\bar{k} + \frac{1}{2}\bar{\imath} + (\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{k}) \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j})$$

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{k}) \times (-\sqrt{2}/2\,\bar{j}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & 0\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\bar{\imath} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{k}$$

$$q k q^{-1} = \langle 0; \cancel{\tfrac{1}{2}\bar{k}} + \tfrac{1}{2}\bar{\imath} + 1/2\,\bar{\imath} \cancel{- 1/2\,\vec{k}}\rangle = \langle 0; \vec{\imath}\rangle$$

Calcularemos la expresión de las rotaciones intermedias:



$z = SLERP(q_i, q, \alpha)$ siendo:
- q_i: Cuaternio correspondiente a la rotación inicial $\langle 1,0,0,0\rangle$
- $q: \langle \sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2\,\bar{j}\rangle \equiv R_Y(90°)$
- α: Coef. de interpolación
- φ: Angulo entre q_i y q: 45°

$\alpha = 0'25, 0'5$ y $0'75$

$$SLERP(q_i, q, \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(1-\alpha)\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} q_i + \frac{\operatorname{sen}\alpha\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} q$$

Para $\alpha = 0'5$, $SLERP(q_i, q, 0'5) = \frac{\operatorname{sen} 22'5°}{\operatorname{sen} 45°} q_i + \frac{\operatorname{sen} 22'5°}{\operatorname{sen} 45°} q$

$$\operatorname{Sen} 22'5° / \operatorname{sen} 45° = \frac{0'382}{\sqrt{2}/2}(q_i + q) = 0'541\,(q_i + q) = \langle 0'9239; 0'382\,\bar{j}\rangle$$

COMPROBACIÓN: $\langle 0'9239; 0'382\bar{j}\rangle \langle 0; \bar{k}\rangle \langle 0'9239; -0'382\bar{j}\rangle =$

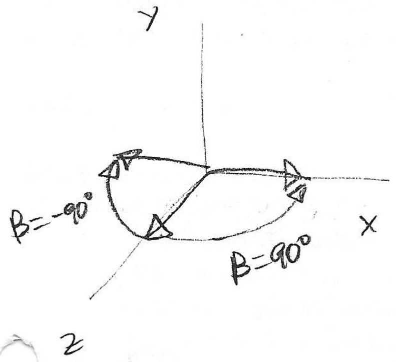
$$= \langle 0; 0'9239\,\bar{k} + 0'382\,\bar{j}\times\bar{k}\rangle \langle 0'9239; -0'382\bar{j}\rangle = \langle 0; 0'9239\bar{k} + 0'382\bar{\imath}\rangle\, q^{-1}$$

$$= \langle 0; 0'9239^2\,\bar{k} + 0'9239 . 0'382\,\bar{\imath} + \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0'382 & 0 & 0'9239 \\ 0 & -0'382 & 0\end{vmatrix}\rangle =$$

$$= \langle 0; 0'9239^2\,\bar{k} + 0'92 . 0'38\,\bar{\imath} + 0'92 . 0'38\,\bar{\imath} - 0'382^2\,\bar{k}\rangle = \langle 0; 0'707\,\vec{k} + 707\,\bar{\imath}\rangle,$$

que es correcto

2) Queremos animar la rotación de la cabeza de un personaje cuando niega con la cabeza, rotándola de -90 a 90º respecto del eje Y (es decir, la cabeza rota solamente respecto al eje Y, entre los ángulos +90 y -90º). Para ello, se pide calcular la interpolación de un punto intermedio de rotación genérico a partir de dos rotaciones (las que se quiera).
NOTA: No hace falta realizar todos los cálculos; basta con plantear los resultados, y si luego hay tiempo, desarrollarlos.



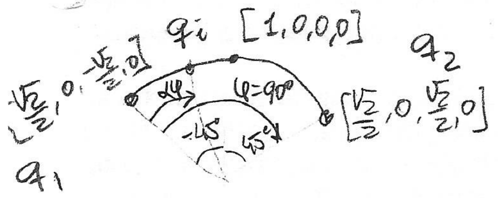
Consideramos las rotaciones $\beta = \pm 90°$ respecto a Y

Tenemos los cuaternios $q_+ = [\cos \frac{90}{2}; \operatorname{sen} \frac{90}{2} \vec{j}]$

$q_- = [\cos(-90/2); \operatorname{sen}(-90/2)\vec{j}]$

Substituyendo, $q_+ = [\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2 \vec{j}]$

$q_- = [\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2 \vec{j}]$



Para interpolar:

$$q_i = SLERP(q_1, q_2, \alpha)$$

$$q_i = \frac{\operatorname{sen}[(1-\alpha)\varphi]}{\operatorname{sen}\varphi} q_1 + \frac{\operatorname{sen}(\alpha\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi} q_2$$

Tenemos: $\varphi = 90°$, α es el coeficiente para interpolar, y $q_1 = q_-$; $q_2 = q_+$

Además, $\operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen}(90°) = 1$. Por tanto,

$$q_i = \operatorname{sen}(1-\alpha)\cdot 90° \cdot [\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2 \vec{j}] + \operatorname{sen}(\alpha \cdot 90°)\cdot[\tfrac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}/2 \vec{j}]$$

Por ejemplo, para $\alpha = 0'5$ tendríamos "no rotación", y sería

$$q_{0'5} = \operatorname{sen} 45° [\tfrac{\sqrt{2}}{2}; -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}] + \operatorname{sen} 45° [\tfrac{\sqrt{2}}{2}; \tfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}] =$$

$$= [\tfrac{1}{2}; -\tfrac{1}{2}\vec{j}] + [\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\vec{j}] = [1; 0],$$ que corresponde a la posición en la que no rotamos la cabeza

Otros valores de α nos permitirán tener valores intermedios

2) Tenemos el vector **k**, vector unitario en el eje Z. Se pide:

a) Calcular el cuaternio que rota un ángulo de 90º a **k** alrededor del eje Y (vector **j**), comprobando que da el resultado esperado (2 puntos)

b) Calcular los cuaternios que rotan ángulos de -90º, 270º y -270º a **k** alrededor del eje Y y comentar sobre ellos.

$R_y(90^\circ)$: $q_{90}\langle \cos\frac{90}{2}; \text{sen}\frac{90}{2}\vec{j}\rangle = \langle \sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2\,\vec{j}\rangle$

$R_y(270^\circ)$: $q_{270}\langle \cos\frac{270}{2}; \text{sen}\frac{270}{2}\vec{j}\rangle = \langle -\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2\,\vec{j}\rangle$

$R_y(-90^\circ)$: $q_{-90}\langle \cos(-45^\circ); \text{sen}(-45^\circ)\vec{j}\rangle = \langle \sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2\,\vec{j}\rangle$

$R_y(-270^\circ)$: $q_{-270}\langle \cos(-135^\circ); \text{sen}(-135^\circ)\vec{j}\rangle = \langle -\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2\,\vec{j}\rangle$

Como es normal, $q_{90} = q_{-270^\circ}$ y $q_{-90} = q_{270}$

Además, $(q_{90})^{-1} = q_{-90}$

Tenemos $q_{90} = \langle \sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2\,\vec{j}\rangle$

Rotación de 90º alrededor de Y: $V = \langle 0; \vec{k}\rangle$ $\quad d_1\bar{u}_2 + d_2\bar{u}_1 + \bar{u}_1\times\bar{u}_2\rangle$

$R_{90}(\vec{k}) = qVq^{-1} = \langle \sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2\,\vec{j}\rangle\langle 0; \vec{k}\rangle\langle \sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2\,\vec{j}\rangle = \langle d_1d_2 - \bar{u}_1\bar{u}_2;$

$= \langle 0-0; \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\times\vec{k}\rangle\cdot\langle \sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2\,\vec{j}\rangle = \langle 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}\rangle\cdot q^{-1}$

$R_{90}(\vec{k}) = \langle 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}\rangle\cdot\langle \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\rangle = \langle 0-0; 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i})$

$-\frac{1}{2}[\vec{k}\times\vec{j} + \vec{i}\times\vec{j}]\rangle = \langle 0; \cancel{\frac{1}{2}\vec{k}} + \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}(-\vec{i}) - \cancel{\frac{1}{2}\vec{k}}\rangle$

$R_{90}(\vec{k}) = \langle 0; \vec{i}\rangle$