EJERCICIOS DE GEOMETRÍA

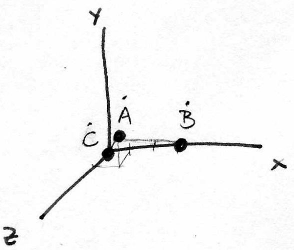
Índice:

1. Ejercicios de transformación de coordenadas

TR1:

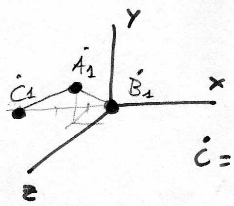
Tenemos tres puntos en el espacio: $A(1,1,1)$; $B(3,0,0)$ y $C(0,0,0)$

Deducir la transformación que coloca a B en el origen, A en el eje Y y C en el plano YZ



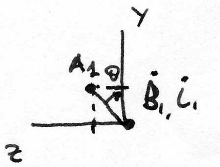
1- Traslación $T(-3,0,0)$:

$$T(-3,0,0)=\begin{bmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix};\quad \dot{A}_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\1\end{bmatrix};\quad \dot{B}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$



$$\dot{C}=\begin{bmatrix}-3\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

2- Rotación $R_x(-45°)$ para llevar $\dot{A}_1$ al plano XY

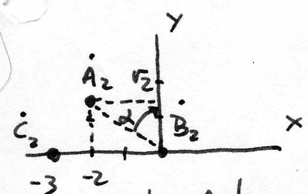


$\theta=-45°$ (sentido de rotación inverso al normalizado >0)

$\operatorname{sen}\theta=-\sqrt{2}/2$; $\cos\theta=\sqrt{2}/2$

$$\rightarrow R_x(-45)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2&0\\0&-\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

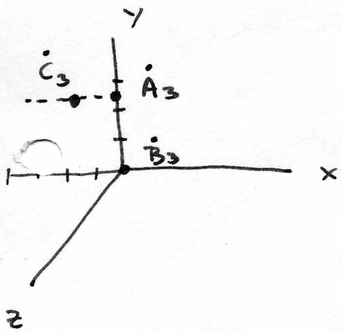
$$\dot{A}_2=\begin{bmatrix}-2\\\sqrt{2}\\0\\1\end{bmatrix};\quad \dot{B}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix};\quad \dot{C}_2=\begin{bmatrix}-3\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

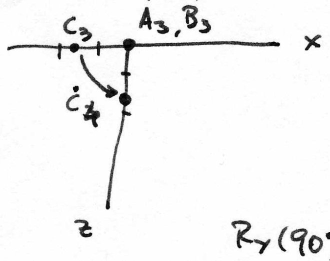


3- Rotación $R_z(-\alpha)$ para llevar $\dot{A}_2$ al eje Y

La distancia $|\overline{A_2B_2}|$ es $\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$. Por tanto: $\operatorname{sen}\alpha=\frac{-2}{\sqrt{6}}$ y $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$R_z(-\alpha)=\begin{bmatrix}\sqrt{2}/\sqrt{6}&2/\sqrt{6}&0&0\\-2/\sqrt{6}&\sqrt{2}/\sqrt{6}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix};\quad \dot{A}_3=\begin{bmatrix}0\\\sqrt{6}\\0\\1\end{bmatrix};\quad \dot{B}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix};\quad \dot{C}_3=\begin{bmatrix}-3\sqrt{2}/\sqrt{6}\\\sqrt{6}\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\\sqrt{6}\\0\\1\end{bmatrix}$$





4- Rotación $R_y(90°)$ para llevar $\dot{C}_3$ al plano YZ

$$R_y(90°)=\begin{bmatrix}\cos 90°&0&\operatorname{sen}90&0\\0&1&0&0\\-\operatorname{sen}90°&0&\cos 90&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

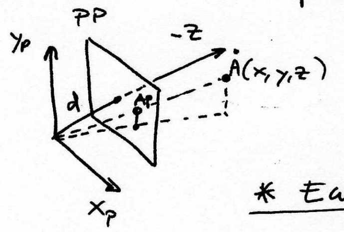
$$\dot{A}_4=\begin{bmatrix}0\\\sqrt{6}\\0\\1\end{bmatrix};\quad \dot{B}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix};\quad C_4=\begin{bmatrix}0\\\sqrt{6}\\\sqrt{3}\\1\end{bmatrix}$$

2. Ejercicios de proyección perspectiva

PR1:

2. Tenemos dos puntos: A (1, 0, 1) y B (-1, 0, 1). Queremos calcular su proyección utilizando una cámara (modelo "alfiler" o *pin-hole*) situada en el punto (0, 10, 0), de distancia focal 2, y orientada de forma que su eje óptico quede alineado con el eje Y del sistema de coordenadas *del mundo* y su eje X, con el eje X del sistema *del mundo*. Hallar previamente la transformación geométrica que coloca la cámara en el punto indicado, calculando después la matriz de proyección y las coordenadas de los puntos en el plano de proyección.

Tomaremos como modelo de cámara el siguiente:
(podríamos tomar otros, como por ejemplo con Z positivo)



$\dot{A}$: pto de coordenadas x, y, z, siendo $z < 0$
$\dot{A}_P$: proyección de A en el PP. Coord.: $(x_P, y_P, -d)$

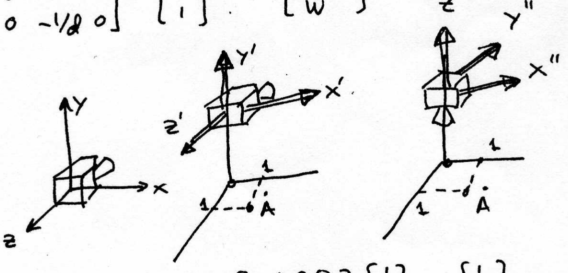
* Ecuaciones de la proyección:

$$x_P/d = x/(-z) \rightarrow x_P = x/(-z/d)$$
$$y_P/d = y/(-z) \rightarrow y_P = y/(-z/d)$$
$$z_P = -d$$

Por tanto, $\dot{A}_P = P \cdot \dot{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w x_P \\ w y_P \\ w z_P \\ w \end{bmatrix}$

siendo $w = -z/d$

* Posicionamiento de la cámara:



Debemos trasladar primero a $y=10$
y luego girar sobre el eje x 90°

- Traslación: $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ejemplo: $T \cdot \dot{A} = \dot{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Rotación: $R_x(90°) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90° & -\mathrm{sen}\, 90° & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}\, 90° & \cos 90° & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ejemplo: $\dot{A}'' = R_x(90°) \cdot \dot{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\dot{B}'' = R_x(90) \cdot T \cdot \dot{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Proyección: $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$ $\dot{A}_P = P \cdot \dot{A}'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -10 \\ 5 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1/5 \\ -1/5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

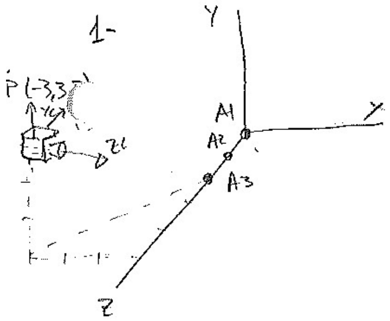
$\dot{B}_P = P \cdot R_x(90°) \cdot T \cdot \dot{B} = [-1/5 \;\; -1/5 \;\; -2 \;\; 1]^T$

NOTA

Como estamos trasladando y rotando el sistema de referencia, el signo de la traslación y rotación es el inverso al visto para transformaciones de objetos, y también debemos invertir el orden de aplicación de las transformaciones (traslación y rotación)

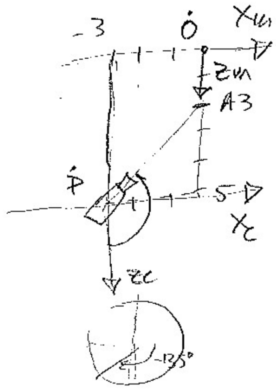
PR2: Tenemos los puntos A1(0,0,0), A2(0,0,1), y A3(0,0,2). Colocamos una cámara de distancia focal 1 de forma que su centro de proyección está situado en el punto P (-3,3,5) y su eje óptico apunte hacia el punto A3. Se pide calcular las matrices de traslación y rotación que necesitamos para colocar la cámara en este punto.

NOTA: No hace falta realizar las operaciones; se pide solamente calcular las matrices de transformación



Transformaciones para referir el mundo a la cámara en (-3, 3, 5)

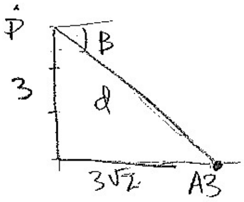
1- $T(3,-3,-5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



2- Necesitamos rotar en y y en x:

$R_y(-135°)$: $\text{sen}(-135°) = -\sqrt{2}/2$ $\quad \cos(-135°) = -\sqrt{2}/2$

$$R_y(-135°) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



3- Necesitamos ahora una rotación en x, $R_x(-\beta)$

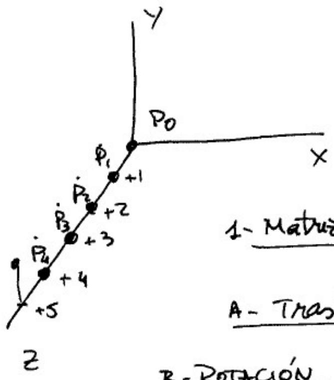
$d = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{3}$ $\quad \cos\beta = 3\sqrt{2}/3\sqrt{3} \rightarrow \cos\beta = \sqrt{2/3}$

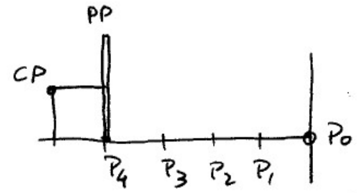
$\text{sen}\,\beta = -3/3\sqrt{3} = -1/\sqrt{3}$

$$R_x(-\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{3} & \sqrt{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PR3: Tenemos cinco puntos, P0 a P4, situados en las coordenadas 0, 1, 2, 3 y 4 del eje Z. Se pide:

a. Seleccionar la posición de los planos de recorte anterior y posterior
b. Calcular las coordenadas 3D de pantalla (incluyendo la transformada de pseudodistancia Z_p) y la proyección de los puntos P0 a P4, utilizando una cámara situada en el punto (0,1,5) y orientada con su eje óptico paralelo al eje -Z (apuntando en la dirección del origen O). La cámara tiene una distancia focal d=1 y un sensor o plano de proyección de tamaño h=1 en los ejes X_p e Y_p (el sensor iría de 1 a -1) (4 puntos)





1- Matriz de transformación para la nueva posición de la cámara:

A- Traslación: $T(0,-1,-5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

B- ROTACIÓN

Tenemos que rotar la cámara 180º en Y: $R_Y(180^\circ) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$R_Y(180^\circ) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C- PERSPECTIVA

$$T_P = \begin{bmatrix} d/h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d/h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f/(f-d) & -df/(f-d) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

TOMAMOS $\left\{ \begin{array}{l} h = d = 1 \\ f = 5 \end{array} \right.$

D- PROYECCIÓN DE LOS PUNTOS

$$\begin{bmatrix} wX_p \\ wY_p \\ wZ_p \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot P =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5/4 & 25/4-5/4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5/4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot P$$

$P_0 = [0\ \ -1\ \ 5\ \ 5]^T$ >< $[0\ \ -1/5\ \ 1\ \ 1]^T = [0\ \ -0{,}2\ \ 1\ \ 1]^T$ (este punto está sobre el plano de recorte posterior, y por lo tanto tiene una Z = 1)

$P_1 = [0\ \ -1\ \ (-5/4+5)\ \ (-1+5)]^T = [0\ \ -1\ \ 15/4\ \ 4]^T$ >< $[0\ \ -1/4\ \ 15/16\ \ 1]^T = [0\ \ -0{,}25\ \ 0{,}94\ \ 1]^T$

$P_2 = [0\ \ -1\ \ (-10/4+5)\ \ (-2+5)]^T = [0\ \ -1\ \ 5/2\ \ 3]^T$ >< $[0\ -1/3\ 5/6\ 1]^T = [0\ -0{,}33\ \ 0{,}83\ \ 1]^T$

$P_3 = [0\ \ -1\ \ (-15/4+5)\ \ (-3+5)]^T = [0\ \ -1\ \ 5/4\ \ 2]^T$ >< $[0\ \ -1/2\ \ 5/8\ \ 1]^T = [0\ \ -0{,}5\ \ 0{,}625\ \ 1]^T$

$P_4 = [0\ \ -1\ \ (-5+5)\ \ (-4+5)]^T = [0\ \ -1\ \ 0\ \ 1]^T$ (este punto está sobre el plano de recorte anterior, y por tanto tiene una Z = 0)

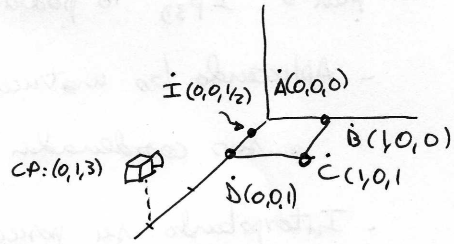
3. Interpolación en coordenadas de pantalla y coordenadas 3D homogéneas

INT1:

INTER P. 2

EJEMPLO

Cálculo de la proyección del pto. I mediante la matriz de proyección e interpolando entre $\dot{A}$ y $\dot{D}$. Usaremos interpolación en pantalla 2 y 3D



Teoría

Tenemos $\dot{I}_{3DPant} = \underbrace{\begin{bmatrix} d/h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d/h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f}{f-d} & \frac{-df}{f-d} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{T_p} \cdot \dot{I}_{VIS} = T_p \cdot \frac{1}{2}(\dot{A}_{VIS} + \dot{D}_{VIS}) = \frac{1}{2}(\dot{A}_{3DPant} + \dot{D}_{3DPant})$

Para una cámara con $d=1$; $h=1$ y $f=3$, $T_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Tenemos que referir los puntos al sistema de la cámara:

$T_{VIS} = R_y(180°) \cdot T(0, -1 -3) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot T(0,-1,-3)$

$T_{VIS} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Transformando los ptos,

$\dot{A}_{VIS} = T_{VIS} \cdot [0\ 0\ 0\ 1]^T = [0\ -1\ 3\ 1]^T$

$\dot{D}_{VIS} = T_{VIS} \cdot [0\ 0\ 1\ 1] = [0\ -1\ 2\ 1]^T$

$\dot{I}_{VIS} = T_{VIS} \cdot [0\ 0\ \frac{1}{2}\ 1] = [0\ -1\ 2'5\ 1]^T$

Ahora podemos calcular sus proyecciones multiplicando por T_p: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\dot{A}_{P3D} = T_p \cdot [0\ -1\ 3\ 1]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot [0\ -1\ 3\ 1]^T = [0\ -1\ 3\ 3]^T \approx [0\ -\frac{1}{3}\ 1\ 1]^T$

$\dot{D}_{P3D} = T_p \cdot [0\ -1\ 2\ 1]^T = [0\ -1\ 3/2\ 2]^T \approx [0\ -1/2\ 3/4\ 1]$

$\dot{I}_{P3D} = T_p \cdot [0\ -1\ 5/2\ 1]^T = [0\ -1\ 9/4\ 5/2]^T \approx [0\ -2/5\ 9/10\ 1]^T$

INTERP. 2'
(CONTINUAC.)

El punto $\dot{I}_{P3D}$ lo podríamos calcular:

- Aplicando las matrices de transformación y proyección T_{VIS} y T_P a sus coordenadas
- Interpolando su posición $\dot{I}_{P3D}$ a partir de $\dot{A}_{P3D}$ y $\dot{D}_{P3D}$

Pero esta interpolación hay que hacerla en HOMOGÉNEAS antes de normalizar por los w_i:

$$\dot{I}_{P3D} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 9/4 \\ 5/2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -2/5 \\ 9/10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si hacemos $\frac{1}{2}(\dot{A}_{P3D} + \dot{D}_{P3D})$ después de dividir por w (usando por tanto sus coordenadas cartesianas 3D en x e y:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{w_A}\dot{A}_{P3D} + \frac{1}{w_D}\dot{D}_{P3D}\right] = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1/3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 3/4 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -5/6 \\ 7/4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0'41\widehat{6} \\ 0'875 \\ 1 \end{bmatrix}$$

QUE NO ES CORRECTO

Para interpolar:

1 - O usamos coordenadas homogéneas: $\dot{I}_{P3D} = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3/2 \\ 2 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 9/4 \\ 5/2 \end{bmatrix}$

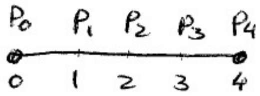
2 - O si usamos coordenadas cartesianas, ponderamos los coeficientes α_i de la suma afín por los w_i:

$$\text{Suma afín: } \frac{\sum \alpha_i w_i P_i}{\sum \alpha_i w_i} = \frac{1}{2}\left[w_A \dot{A}_{P3Dcart} + w_D \dot{D}_{P3Dcart}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{3\begin{bmatrix} 0 \\ -1/3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 3/4 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

INT2: Interpolar la posición de los puntos P1 a P3 del ejercicio PR3 de la página 5 a partir de las proyecciones de P0 y P4, utilizando directamente interpolación lineal sobre las coordenadas de pantalla, interpolación hiperbólica (corrigiendo los coeficientes) e interpolando en coordenadas homogéneas (3 puntos)

A- Interpolación lineal sobre coordenadas de pantalla:



$$P_1 = 3/4\, P_0 + 1/4\, P_4 = \frac{3}{4}\begin{bmatrix}0\\-1/5\\1\end{bmatrix} + 1/4\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-2/5\\3/4\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0\\-1/4\\15/16\end{bmatrix}$$

$$P_2 = 1/2\, P_0 + \frac{1}{2} P_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-1/5\\1\end{bmatrix} + 1/2\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-3/5\\1/2\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0\\-1/3\\5/6\end{bmatrix}$$

$$P_3 = 1/4\, P_0 + 3/4\, P_4 = 1/4\begin{bmatrix}0\\-1/5\\1\end{bmatrix} + 3/4\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-4/5\\1/4\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0\\-1/2\\5/8\end{bmatrix}$$

Los resultados que obtenemos no coinciden con los anteriores.

B- Interpolación hiperbólica:

Debemos utilizar coeficientes $\beta_i = \dfrac{\alpha_i w_i}{\sum_j \alpha_j w_j}$. Para cada punto $P_1 - P_3$ tendremos coeficientes β_0 y β_4 dictintos:

$$P_2: \quad \beta_0 = \frac{1/2 \cdot 5}{1/2 \cdot 5 + 1/2 \cdot 1} = 5/6 \;;\quad \beta_4 = \frac{1/2 \cdot 1}{6/2} = 1/6$$

$$P_3: \quad \beta_0 = \frac{1/4 \cdot 5}{1/4 \cdot 5 + 3/4 \cdot 1} = 5/8 \;;\quad \beta_4 = \frac{3/4 \cdot 1}{8/4} = 3/8$$

$$P_1: \quad \beta_0 = \frac{3/4 \cdot 5}{3/4 \cdot 5 + 1/4 \cdot 1} = 15/16 \;;\quad \beta_4 = \frac{1/4 \cdot 1}{16/4} = 1/16$$

Evidentemente, para todos los puntos se cumple que $\beta_0 + \beta_4 = 1$

Como $P_0 = [0\ -1/5\ 1]^T$ y $P_4 = [0\ -1\ 0]^T$, al interpolar obtenemos:

$$P_1 = 15/16 \cdot [0\ -1/5\ 1]^T + 1/16\,[0\ -1\ 0]^T = [0\ -1/4\ 15/16]^T$$
$$P_2 = 5/6 \cdot [0\ -1/5\ 1]^T + 1/6\,[0\ -1\ 0]^T = [0\ -1/3\ 5/6]^T$$
$$P_3 = 5/8 \cdot [0\ -1/5\ 1]^T + 3/8\,[0\ -1\ 0]^T = [0\ -1/2\ 5/8]^T$$

Que son los valores correctos.

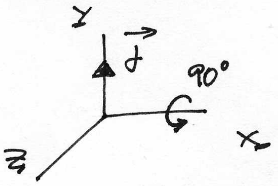
Si interpolamos directamente utilizando las coordenadas homogéneas 3D de pantalla de los puntos P_0 y P_4 obtenemos también valores correctos:

$P_1 = 3/4 P_0 + 1/4\, P_4 = 3/4\, [0\ -1\ 5\ 5]^T + 1/4 [0\ -1\ 0\ 1]^T = [0\ -1\ 15/4\ 4]^T >< [0\ -1/4\ 15/16\ 1]^T$
$P_2 = 1/2\, P_0 + 1/2\, P_4 = 1/2\, [0\ -1\ 5\ 5]^T + 1/2\, [0\ -1\ 0\ 1]^T = \;= [0\ -1\ 5/2\ 3]^T >< [0\ -1/3\ 5/6\ 1]^T$
$P_3 = 1/4\, P_0 + 3/4\, P_4 = 1/4\, [0\ -1\ 5\ 5]^T + 3/4\, [0\ -1\ 0\ 1]^T = \;= [0\ -1\ 5/4\ 2]^T >< [0\ -1/2\ 5/8\ 1]^T$

4. Cuaternios

CUAT1:

EJEMPLO: ROTACIONES CON CUATERNIOS



Tenemos un vector $\vec{j}$
queremos rotarlo 90° sobre X
en sentido antihorario

* Recordamos que el producto entre 2 cuaternios $\langle d_1; \vec{u}_1\rangle \cdot \langle d_2; \vec{u}_2\rangle$

sería $\langle d_1 d_2 - \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2;\ d_1\vec{u}_2 + d_2\vec{u}_1 + \vec{u}_1 \times \vec{u}_2\rangle$

* El cuaternio que nos especifica la rotación $R_x(90°)$ sería

$$q = \langle \cos 90°/2;\ \operatorname{sen} 90°/2 \cdot \vec{i}\rangle = \langle \sqrt{2}/2;\ \sqrt{2}/2\,\vec{i}\rangle = \langle \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0, 0\rangle$$

Al ser un cuaternio unitario, $q^{-1} = \langle \sqrt{2}/2;\ -\sqrt{2}/2\,\vec{i}\rangle = \langle \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0, 0\rangle$

* El vector $\vec{j}$ lo representamos por el cuaternio $\langle 0; \vec{j}\rangle = \langle 0, 0, 1, 0\rangle$

La rotación $R_x(90°)\cdot\vec{j}$ se puede hallar como $q \cdot \langle 0; \vec{j}\rangle\, q^{-1}$

1- Cálculo de $q \cdot \langle 0; \vec{j}\rangle$:

$(+\sqrt{2}/2\,\vec{i}) \cdot (\vec{j}) = 0$

$$\langle \sqrt{2}/2;\ +\sqrt{2}/2\,\vec{i}\rangle \langle 0; \vec{j}\rangle = \langle 0 - 0;\ \sqrt{2}/2 \cdot \vec{j} + 0 + (+\sqrt{2}/2\,\vec{i}) \times \vec{j}\rangle$$

$$= \langle 0;\ \sqrt{2}/2\,\vec{j} + \sqrt{2}/2\,\vec{k}\rangle$$

2- Ahora, calculamos $q \cdot \langle 0; \vec{j}\rangle \cdot q^{-1}$

$$\langle 0;\ \sqrt{2}/2\,\vec{j} + \sqrt{2}/2\,\vec{k}\rangle \cdot \langle \sqrt{2}/2;\ -\sqrt{2}/2\,\vec{i}\rangle =$$

$$= \langle 0 - 0;\ 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}\right)\rangle =$$

$$= \langle 0;\ \cancel{\tfrac{1}{2}\vec{j}} + \tfrac{1}{2}\vec{k} + \tfrac{1}{2}\vec{k} - \cancel{\tfrac{1}{2}\vec{j}}\rangle = \langle 0; \vec{k}\rangle$$

(Que evidentemente coincide con $R_x(90°)\cdot\vec{j}$

CUAT2: Rotar el vector $[1,1,1]^T$ un ángulo de 45º sobre el eje Y utilizando cuaternios.

SOLUCIÓN

Para cualquier vector $\underline{\mathbf{v}}$, podemos calcular $\underline{\mathbf{w}}$, el resultado de aplicarle la rotación $R_{\theta,\underline{\mathbf{u}}}$ (es decir, $\underline{\mathbf{w}} = R_{\theta,\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\mathbf{v}}$), calculando el cuaternio $\underline{\mathbf{w}} = q\underline{\mathbf{v}}q^{-1}$

Recordamos que podemos calcular el cuaternio q como $q = \langle c;\ s.u_x,\ ,\ s.u_y,\ s.u_z \rangle$, siendo:

$c = \cos(\theta/2)$, $s = \mathrm{sen}(\theta/2)$, $\underline{\mathbf{u}} = u_x, u_y, u_z$

También sabemos que podemos representar $\underline{\mathbf{v}}$ como el cuaternio $\langle 0, 1, 1, 1\rangle = \langle 0, \underline{\mathbf{i}} + \underline{\mathbf{j}} + \underline{\mathbf{k}}\rangle$

En nuestro caso, $c = \cos(22{,}5º) = 0{,}9239$, $s = \mathrm{sen}(22{,}5º) = 0{,}3827$, $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{j}}$. Por lo tanto,

$$q = \langle \cos(22{,}5º); 0, \mathrm{sen}(22{,}5º), 0\rangle = \langle 0{,}9239; 0, 0{,}3827, 0\rangle$$
$$q^{-1} = \langle \cos(22{,}5º); 0, -\mathrm{sen}(22{,}5º), 0\rangle = \langle 0{,}9239; 0, -0{,}3827, 0\rangle$$

$$\underline{\mathbf{w}} = q\underline{\mathbf{v}}q^{-1} = \langle \cos(22{,}5º); 0 + \mathrm{sen}(22{,}5º)\,\underline{\mathbf{j}} + 0\rangle \,.\, \langle 0, \underline{\mathbf{i}} + \underline{\mathbf{j}} + \underline{\mathbf{k}}\rangle . \langle \cos(22{,}5º); 0 - \mathrm{sen}(22{,}5º)\,\underline{\mathbf{j}} + 0\rangle$$

Dado que $\langle d; \underline{\mathbf{u}}\rangle\langle d'; \underline{\mathbf{u}}'\rangle = (dd' - \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{u}}';\ d'\underline{\mathbf{u}} + d\underline{\mathbf{u}}' + \underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{u}}')$, tendremos:

$$\underline{\mathbf{w}} = q\underline{\mathbf{v}}q^{-1} = \langle 0 - \mathrm{sen}(22{,}5º); \cos(22{,}5º) \,.\, (\underline{\mathbf{i}} + \underline{\mathbf{j}} + \underline{\mathbf{k}}) + 0 + \mathrm{sen}(22{,}5º)\,\underline{\mathbf{j}} \times (\underline{\mathbf{i}} + \underline{\mathbf{j}} + \underline{\mathbf{k}})\rangle \,.\, q^{-1}$$

Como $\underline{\mathbf{j}} \times (\underline{\mathbf{i}} + \underline{\mathbf{j}} + \underline{\mathbf{k}}) = \underline{\mathbf{i}} - \underline{\mathbf{k}}$, tenemos:

$$\underline{\mathbf{w}} = \langle -\mathrm{sen}(22{,}5º); \cos(22{,}5º).(\underline{\mathbf{i}} + \underline{\mathbf{j}} + \underline{\mathbf{k}}) + \mathrm{sen}(22{,}5º).(\underline{\mathbf{i}} - \underline{\mathbf{k}})\rangle \,.\, q^{-1}$$
$$\underline{\mathbf{w}} = \langle -\mathrm{sen}(22{,}5º); [\cos(22{,}5º) + \mathrm{sen}(22{,}5º)]\,\underline{\mathbf{i}} + \cos(22{,}5º)\,\underline{\mathbf{j}} + [\cos(22{,}5º) - \mathrm{sen}(22{,}5º)]\,\underline{\mathbf{k}}\rangle \,.\, q^{-1}$$

Multiplicando ahora por q^{-1} tendremos:

$$\underline{\mathbf{w}} = \langle -\mathrm{sen}(22{,}5º);[\cos(22{,}5º)+\mathrm{sen}(22{,}5º)]\underline{\mathbf{i}}+\cos(22{,}5º)\underline{\mathbf{j}}+[\cos(22{,}5º)-\mathrm{sen}(22{,}5º)]\underline{\mathbf{k}}\rangle\langle\cos(22{,}5º);-\mathrm{sen}(22{,}5º)\underline{\mathbf{j}}\rangle$$

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{w}} = \langle & -\mathrm{sen}(22{,}5º)\cos(22{,}5º) + \mathrm{sen}(22{,}5º)\cos(22{,}5º); \\ & \cos(22{,}5º) \,.\, \{[\cos(22{,}5º) + \mathrm{sen}(22{,}5º)]\,\underline{\mathbf{i}} + \cos(22{,}5º)\,\underline{\mathbf{j}} + [\cos(22{,}5º) - \mathrm{sen}(22{,}5º)]\,\underline{\mathbf{k}}\} - \\ & - \mathrm{sen}(22{,}5º) \,.\, [-\mathrm{sen}(22{,}5º)\underline{\mathbf{j}}] - \\ & - \{[\cos(22{,}5º) + \mathrm{sen}(22{,}5º)]\,\underline{\mathbf{i}} + \cos(22{,}5º)\,\underline{\mathbf{j}} + [\cos(22{,}5º) - \mathrm{sen}(22{,}5º)]\,\underline{\mathbf{k}}\} \times [-\mathrm{sen}(22{,}5º)\underline{\mathbf{j}}]\rangle\end{aligned}$$

Vamos a simplificar esta expresión por líneas. La segunda y tercera nos quedan:

$$\cos(22{,}5º)[\cos(22{,}5º) + \mathrm{sen}(22{,}5º)]\,\underline{\mathbf{i}} + [\cos^2(22{,}5º) + \mathrm{sen}^2(22{,}5º)]\underline{\mathbf{j}} + \cos(22{,}5º)[\cos(22{,}5º) - \mathrm{sen}(22{,}5º)]\,\underline{\mathbf{k}}$$

Teniendo en cuenta que $\underline{\mathbf{i}} \times \underline{\mathbf{j}} = \underline{\mathbf{k}}$, que $\underline{\mathbf{j}} \times \underline{\mathbf{j}} = \underline{\mathbf{0}}$, y que $\underline{\mathbf{k}} \times \underline{\mathbf{j}} = \underline{-\mathbf{i}}$, la última línea nos queda:

$$[\cos(22{,}5º) + \mathrm{sen}(22{,}5º)]\,[-\mathrm{sen}(22{,}5º)]\,\underline{\mathbf{k}} + [\cos(22{,}5º) - \mathrm{sen}(22{,}5º)]\,[-\mathrm{sen}(22{,}5º)]\,(-\,\underline{\mathbf{i}})$$

Agrupando términos y simplificando, nos queda:

$$\underline{\mathbf{w}}=\langle 0;[\cos^2(22{,}5º)+2\cos(22{,}5º)\mathrm{sen}(22{,}5º)-\mathrm{sen}^2(22{,}5º)]\underline{\mathbf{i}}+\underline{\mathbf{j}}+[\cos^2(22{,}5º)-\mathrm{sen}^2(22{,}5º)-2\cos(22{,}5º)\mathrm{sen}(22{,}5º)]\underline{\mathbf{k}}\rangle$$

Operando, y teniendo en cuenta que

$\mathrm{sen}(2A) = 2\,\mathrm{sen}(A)\cos(A)$

$\cos(2A) = \cos^2(A) - \mathrm{sen}^2(A)$

nos queda:

$$\underline{\mathbf{w}} = \langle 0; [\cos(45º) + \mathrm{sen}(45º)]\,\underline{\mathbf{i}} + \underline{\mathbf{j}} + [\cos(45º) - \mathrm{sen}(45º)]\,\underline{\mathbf{k}}\rangle$$

Finalmente, nos queda que $\underline{\mathbf{w}} = \langle 0 ; 2^{1/2}, 1, 0\rangle$, como corresponde a la rotación solicitada.