

③ Sea ϕ un campo complejo cuya dinámica está gobernada por el Lagrangiano,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{\lambda}{2} (\phi^* \phi)^2$$

a) Escribe las ecuaciones de Euler-Lagrange para el sistema.

Como podemos tratar los campos de forma independiente, escribimos un sistema de dos ecuaciones de Euler-Lagrange, así:

~~Para ϕ~~
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi^* - \lambda \phi^* (\phi^* \phi) \quad \text{---} \quad A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \cancel{\partial^\mu \phi^*} = \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi) = \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi) = \partial^\mu \phi^*$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = \partial_\mu \partial^\mu \phi^*$$

$$\text{Así queda, } -m^2 \phi^* - \lambda \phi^* (\phi^* \phi) - \square \phi^* = 0 \quad ; \quad \boxed{m^2 \phi^* + \lambda \phi^* (\phi^* \phi) + \square \phi^* = 0}$$

Equivalentemente, para ϕ^* :

$$\boxed{m^2 \phi + \lambda \phi (\phi \phi^*) + \square \phi = 0}$$

b) Encuentra una solución perturbativa de las mismas hasta orden λ^2 .

Tenemos el sistema de ecuaciones, ~~$(\square + m^2)\phi = -\lambda\phi(\phi\phi^*)$~~ $(\square + m^2)\phi = -\lambda\phi(\phi\phi^*)$ {

Que vemos que lo podemos interpretar $(\square + m^2)\phi^* = -\lambda\phi^*(\phi\phi^*)$ {
como una perturbación de la ecuación inhomogénea de Klein-Gordon, $(\square + m^2)\phi_0 = 0$,
cuya solución es,

$$\phi_0(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ip^0 x_0 + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip^0 x_0 - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) ; (a_{\vec{p}})^\dagger = a_{\vec{p}}^\dagger ; (a_{\vec{p}}^\dagger)^\dagger = a_{\vec{p}}$$

que será la solución a orden λ^0 .

$$\phi_0^*(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}^\dagger e^{-ip^0 x_0 + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}} e^{ip^0 x_0 - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}^\dagger e^{+ip^0 x_0 - i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{p}} e^{-ip^0 x_0 + i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$$

Entonces, $\phi_0 = \phi_0^*$, por lo que no ~~se~~ será un campo complejo

Para ϕ_1 , tenemos la ecuación $(\square + m^2)\phi_1 = (\phi_0^\dagger \phi_0)\phi_0$, luego

$$(\square + m^2)\phi_1 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d^3r}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{8E_p E_q E_r}} \left[a_p a_q a_r e^{-i(p+q+r)x} + a_p a_q a_r^\dagger e^{-i(p+q-r)x} + a_p a_q^\dagger a_r e^{-i(p-q+r)x} + a_p^\dagger a_q a_r e^{-i(-p+q+r)x} + a_p^\dagger a_q^\dagger a_r e^{-i(-p-q+r)x} + a_p^\dagger a_q^\dagger a_r^\dagger e^{-i(-p-q-r)x} + a_p^\dagger a_q^\dagger a_r^\dagger e^{-i(-p-q-r)x} + a_p^\dagger a_q^\dagger a_r^\dagger e^{-i(-p-q-r)x} \right]$$

~~Sabemos que $[a_i, a_j] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$, $[a_i, a_j^\dagger] = 0$, $[a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$~~

Vamos a considerar $(\square + m^2)\phi_1 = S(x)$ para simplificar los cálculos.

Sabemos que al tener una ecuación de Klein-Gordon inhomogénea,

la solución será $\phi_1(x) = \int d^4y G(x-y) S(y)$ donde $G(x-y)$ es una función

de Green de la forma $G(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

Así, la solución a orden 2 será

$$\phi = \phi_0 + \lambda \phi_1 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{ipx} \right) + \lambda \int \frac{d^4y d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} S(y)$$

donde $S(y) = (\phi_0^\dagger \phi_0)\phi_0$

(Cálculos de estas soluciones en el ejercicio 1)

c) Verifica que el Lagrangiano es invariante bajo la transformación $\phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x)$, $\phi^{*'}(x) = e^{-i\alpha}\phi^*(x)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Entonces vemos si $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}'$ donde $\mathcal{L}' = \partial_\mu \phi^{*'} \partial^\mu \phi' - m^2 \phi^{*'} \phi' - \frac{1}{2} (\phi^{*'} \phi')^2$

Luego,

$$\mathcal{L}' = \partial_\mu (\phi^* e^{-i\alpha}) \partial^\mu (\phi e^{i\alpha}) - m^2 (\phi^* e^{-i\alpha}) (\phi e^{i\alpha}) - \frac{1}{2} (\phi^* e^{-i\alpha} \phi e^{i\alpha})^2 =$$

$$= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{2} (\phi^* \phi)^2$$

pues $\alpha \in \mathbb{R}$, así $\partial_\mu e^{\pm i\alpha} = 0$.

d) Encuentra la corriente de Noether asociada a esta transformación y verifica explícitamente que es conservada cuando se verifican las ecuaciones de E-L.

Sabemos que para transformaciones generales $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$, la corriente de Noether asociada es $J^\mu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \delta\phi_i$, entonces para nuestras transformaciones,

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi \cdot e^{i\alpha} \approx \phi + i\alpha\phi \Rightarrow \delta\phi = i\alpha\phi$$

$$\phi^* \rightarrow \phi^{*'} = \phi^* e^{-i\alpha} \approx \phi^* - i\alpha\phi^* \Rightarrow \delta\phi^* = -i\alpha\phi^*$$

Por tanto,

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \delta\phi^* = \partial^\mu \phi^* \cdot \delta\phi + \partial^\mu \phi \cdot \delta\phi^* = i\alpha\phi \partial^\mu \phi^* - i\alpha\phi^* \partial^\mu \phi$$

$$\text{Así, } \boxed{J^\mu = i\alpha(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi)}$$

Suponiendo que satisfacen E-L, deberemos ver que $\partial_\mu J^\mu = 0$, luego

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu [i\alpha(\bar{\phi} \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \bar{\phi})] = i\alpha [\cancel{\partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi} + \bar{\phi} \square \phi - \cancel{\partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi}} - \phi \square \bar{\phi}] =$$

$$= i\alpha \left\{ \cancel{\partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi} + \bar{\phi} (m^2 \phi + \lambda \phi^* \phi) - \phi^* (m^2 \bar{\phi} + \lambda \bar{\phi} \phi^*) \right\} =$$

$$= i\alpha \left\{ \cancel{\partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi} + \lambda \bar{\phi}^* \phi^2 - m^2 \bar{\phi} \phi - \lambda \bar{\phi}^2 \phi^* \right\} = 0 \quad \checkmark$$

Luego, la corriente es conservada //