

# Propuestos 5: Física Estadística

Rubén Carrón Castro

- ① Demuestre que para un gas ideal cuántico atrapado en una superficie de área  $S$  cumple la siguiente relación entre la presión y su energía interna:  $P = \frac{U}{S}$

Como tenemos un gas ideal cuántico, tendremos bosones y fermiones, por lo que usaremos la colectividad macrocanónica para quitar las restricciones del número de partículas.

Luego, la función de partición macrocanónica generalizada es,

$$\textcircled{H} = \prod_K \left[ 1 - \theta e^{\beta(\mu - \varepsilon_k)} \right]^{-\Theta} \quad \text{con } \Theta = \begin{cases} +1 & \text{bosones} \\ -1 & \text{fermiones} \end{cases}$$

Consideramos que el gas cuántico está a temperatura arbitraria, por lo que podemos aplicar el límite termodinámico, convirtiendo los sumatorios en integrales. Luego,

$$\begin{aligned} P \$ = -T = kT \ln \textcircled{G} &= \ln kT \sum_K \ln \left( 1 - \theta e^{\beta(\mu - \varepsilon_k)} \right)^{-\Theta} = \\ &= -\Theta kT \sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{k}} \ln \left( 1 - \theta e^{\beta(\mu - \varepsilon_{\vec{k}})} \right) = -g \Theta kT \sum_{\vec{p}} \ln \left( 1 - \theta e^{\beta(\mu - \varepsilon_{\vec{p}})} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P = -\frac{g \Theta k T}{\$} \sum_{\vec{p}} \ln \left( 1 - \theta e^{\beta(\mu - \varepsilon_{\vec{p}})} \right)$$

$$\text{Por otro lado, } U = \langle E \rangle = \sum_K \langle n_k \rangle \varepsilon_k = g \sum_{\vec{p}} \langle n_{\vec{p}} \rangle \varepsilon_{\vec{p}}$$

donde  $\langle n_{\vec{p}} \rangle$  es el número de ocupación media de cada estado cuántico de energía  $\varepsilon_{\vec{p}}$  y viene dado por,  $\langle n_{\vec{p}} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\mu - \varepsilon_{\vec{p}})} - \theta}$

$$\text{Luego, } U = g \sum_{\vec{p}} \frac{\varepsilon_{\vec{p}}}{e^{\beta(\mu - \varepsilon_{\vec{p}})} - \theta}$$

Como  $E_p$  es la energía dependiente del momento, al tener un gas atómico no relativista, tendremos que  $E_p = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ . Por tanto,

$$P = -g \frac{\Theta kT}{S} \sum_{\vec{p}} \ln \left( 1 - \Theta e^{\beta(\mu - \frac{\vec{p}^2}{2m})} \right); U = \sum_{\vec{p}} \frac{g \frac{\vec{p}^2}{2m}}{e^{\beta(\mu - \vec{p}\gamma_m)} - \Theta}$$

Aplicando el Límite Termodinámico,

$$\sum_{\vec{p}} (-) \xrightarrow{\text{L.T.}} \frac{S}{h^2} \int (-) d\vec{p} \xrightarrow{\text{Polares}} \frac{2\pi S}{h^2} \int_0^\infty (-) d\vec{p} p dp$$

Luego,

$$P = -g k T \cdot \frac{2\pi S}{h^2} \int_0^\infty p \ln \left( 1 - \Theta e^{\beta(\mu - \frac{p^2}{2m})} \right) dp$$

$$U = \frac{2\pi S g}{h^2} \int_0^\infty \frac{p^2/2m}{e^{\beta(\mu - p\gamma_m)} - \Theta} p dp$$

Hacemos el cambio de variable  $\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2m\varepsilon}; dp = \frac{m}{\sqrt{2m\varepsilon}} d\varepsilon$ . Tal que,

$$P = -g k T \frac{2\pi S}{h^2} \int_0^\infty \sqrt{2m\varepsilon} \ln \left( 1 - \Theta e^{\beta(\mu - \varepsilon)} \right) \frac{m}{\sqrt{2m\varepsilon}} d\varepsilon =$$

$$= -g k T \frac{2\pi m}{h^2} \int_0^\infty \ln \left( 1 - \Theta e^{\beta(\mu - \varepsilon)} \right) d\varepsilon$$

Usamos partes para quitar el logaritmo,

$$\begin{cases} u = \ln(1 - \Theta e^{\beta(\mu - \varepsilon)}); dv = d\varepsilon \\ du = \frac{\Theta \beta e^{\beta(\mu - \varepsilon)}}{1 - \Theta e^{\beta(\mu - \varepsilon)}} d\varepsilon; v = \varepsilon \end{cases}$$

Por tanto,

$$P = -g k T \Theta \frac{2\pi m}{h^2} \left[ \ln(1 - \Theta e^{\beta(\mu - \varepsilon)}) \varepsilon \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \varepsilon \frac{e^{\beta(\mu - \varepsilon)}}{1 - \Theta e^{\beta(\mu - \varepsilon)}} d\varepsilon \right] = \left\{ \begin{array}{l} \Theta^2 = 1 \\ \beta = \frac{1}{kT} \end{array} \right\} =$$

$$= g \cancel{kT} \cancel{\Theta} \frac{2\pi m}{h^2} \int_0^\infty \varepsilon \frac{e^{\beta(\mu - \varepsilon)}}{1 - \Theta e^{\beta(\mu - \varepsilon)}} d\varepsilon \cdot \cancel{\frac{e^{-\beta(\mu - \varepsilon)}}{e^{-\beta(\mu - \varepsilon)}}} =$$

$$= \frac{2\pi mg}{h^2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - \Theta} d\varepsilon$$

$$U = \frac{2\pi S g}{h^2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon m \varepsilon / 2m}{e^{\beta(\mu - \varepsilon)} - \Theta} \cancel{\sqrt{2m\varepsilon}} \cdot \cancel{\frac{m}{\sqrt{2m\varepsilon}}} d\varepsilon = \frac{2\pi mg S}{h^2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - \Theta} d\varepsilon \approx P.S$$

Por tanto,  $P = \frac{U}{S}$

② Considera un gas ideal cuántico en 2 dimensiones de bosones o fermiones

con Hamiltoniano  $H = \sum_{i=1}^N E(p_i)$  y una relación energía-momento no relativista,  $E(p) = \frac{p^2}{2m}$ .

(a) Derive la ecuación de estado general en forma paramétrica,  $P = P(T, \lambda)$

y  $\rho = \rho(T, \lambda)$ , siendo  $\lambda = e^{P\hbar}$  la fugacidad del gas.

En el ejercicio anterior hemos calculado la presión para este tipo de gases bidimensionales, obteniendo,

$$\lambda = e^{P\hbar}$$

$$P = \frac{2\pi mg}{h^2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - \theta} d\varepsilon \stackrel{\downarrow}{=} \frac{2\pi mg}{h^2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} d^{-1} - \theta} d\varepsilon$$

Hacemos el cambio de variable  $\eta = \beta\varepsilon$ :  $\varepsilon = \frac{\eta}{\beta} = kT\eta$ ;  $d\varepsilon = kT d\eta$

$$\Rightarrow P(T, \lambda) = \frac{2\pi mg}{h^2} (kT)^2 \int_0^\infty \frac{\eta}{e^{\eta/\lambda - 1} - \theta} d\eta \stackrel{\cancel{\text{}}}{} = g \Lambda(T)^2 kT \int_0^\infty \frac{\eta}{e^{\eta/\lambda - 1} - \theta} d\eta$$

La densidad la debemos calcular: con  $\Lambda(T) = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$

$$\rho = \frac{\langle N \rangle}{S} = \frac{1}{S} \sum_n \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_n - \mu)} - \theta} = \frac{g}{S} \sum_p \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_p - \mu)} - \theta}$$

Aplicamos el Límite Termodinámico:

$$\sum_{\vec{p}} (\dots) \xrightarrow{\text{L.T.}} \frac{S}{h^2} \int (\dots) d\vec{p} \xrightarrow{\text{Polares}} \frac{2\pi S}{h^2} \int (\dots) p dp$$

Luego,

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{2\pi g}{h^2} \int_0^\infty \frac{p}{e^{\beta(\varepsilon_p - \mu)} - \theta} dp = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_p = p^2/2m \\ = \frac{2\pi g}{h^2} \int_0^\infty \frac{p}{e^{\beta(p^2/2m - \mu)} - \theta} dp \end{array} \right. = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = p^2/2m \\ p = \sqrt{2m\varepsilon} \\ dp = \frac{m}{\sqrt{2m\varepsilon}} d\varepsilon \end{array} \right\} = \frac{2\pi g}{h^2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - \theta} \frac{m}{\sqrt{2m\varepsilon}} d\varepsilon = \frac{2\pi mg}{h^2} \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - \theta} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \eta = \beta\varepsilon \\ \varepsilon = kT\eta \\ d\varepsilon = kT d\eta \end{array} \right\} = \frac{2\pi mg}{h^2} (kT)^2 \int_0^\infty \frac{1}{e^{\eta/\lambda - 1} - \theta} d\eta = g \Lambda(T)^2 \int_0^\infty \frac{d\eta}{e^{\eta/\lambda - 1} - \theta} \end{aligned} \quad (*)$$

Luego, hemos obtenido la ecuación de estado paramétrica:  $P = P(T, \lambda)$   
para un gas cuántico ideal bidimensional.  $\rho = \rho(T, \lambda)$

(b) Encuentre la primera corrección cuántica a la ecuación de estado del gas ideal clásico en el límite de degeneración débil ( $\lambda \ll 1$ ).

Este límite es para  $\lambda \ll 1 \neq 0$ . Luego, aplicamos Taylor:

$$\frac{1}{e^{\eta} \lambda^{-1} - \Theta} = \frac{\lambda e^{-\eta}}{1 - \Theta \lambda e^{-\eta}} \approx \lambda e^{-\eta} \left[ 1 + \Theta \lambda e^{-\eta} + \lambda^2 \Theta^2 e^{-2\eta} + \Theta^3 \lambda^3 e^{-3\eta} + \dots \right] =$$

$$= \begin{cases} \Theta = \pm 1 \\ \Theta^2 = 1 \rightarrow \Theta^{2m} = 1 \\ \Theta^3 = \pm 1 = \Theta \rightarrow \Theta^{2m+1} = \Theta \end{cases} \left[ \lambda e^{-\eta} \left[ 1 + \Theta \lambda e^{-\eta} + \lambda^2 e^{-2\eta} + \Theta \lambda^3 e^{-3\eta} + \dots \right] \right]$$

Sustituímos en las integrales de  $P(T, \lambda)$  y  $p(T, \lambda)$ :

$$\int_0^\infty \eta \frac{1}{e^{\eta} \lambda^{-1} - \Theta} d\eta = \int_0^\infty \eta \left[ \lambda e^{-\eta} + \Theta \lambda^2 e^{-2\eta} + \lambda^3 e^{-3\eta} + \Theta \lambda^4 e^{-4\eta} + \dots \right] d\eta \quad (1)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^{\eta} \lambda^{-1} - \Theta} d\eta = \int_0^\infty \left[ \lambda e^{-\eta} + \Theta \lambda^2 e^{-2\eta} + \lambda^3 e^{-3\eta} + \Theta \lambda^4 e^{-4\eta} + \dots \right] d\eta \quad (2)$$

Tendremos integrandos de la forma:

$$(1) \rightarrow \int_0^\infty \eta \cdot \cancel{e^{-m\eta}} d\eta = \frac{\Gamma(1+\lambda)}{m^{1+\lambda}} = \frac{\Gamma(2)}{m^2} = m^{-2}$$

$$(2) \rightarrow \int_0^\infty e^{-m\eta} d\eta = -\frac{1}{m} e^{-m\eta} \Big|_0^\infty = \frac{1}{m} = m^{-1}$$

Por tanto,

cortamos a orden 2

$$P = g \Lambda(T)^{-2} \left[ 1 + \Theta \lambda \frac{1}{2} + \lambda^2 \cancel{\frac{1}{3}} + \dots \right] \approx g \Lambda(T)^{-2} \lambda \left[ 1 + \frac{\Theta}{2} \lambda \right]$$

Despejamos  $\lambda = \lambda(P)$ :

$$\lambda = \frac{2}{\Theta} \left[ \frac{P}{g \Lambda(T)^2} - 1 \right]$$

La presión queda a orden 2:

$$P \approx g \Lambda(T)^{-2} (\kappa T) \left[ \lambda + \frac{\Theta \lambda^2}{4} \right] = g \Lambda(T)^{-2} (\kappa T) \lambda \left[ 1 + \frac{\Theta}{2} \lambda \right]$$

Despejamos  $\lambda = \lambda(\rho)$ :

$$\lambda = \frac{\rho \Delta(T)^2}{g} \frac{1}{1 + \frac{\theta}{2}\alpha}$$

Aplicamos la aproximación  $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$ :

$$\lambda \approx \frac{\rho \Delta(T)^2}{g} \left[ 1 - \frac{\theta}{2}\alpha \right]$$

Sustituimos el  $\lambda$  anterior por  $\lambda = \frac{\rho \Delta(T)^2}{g}$ :

$$\lambda \approx \frac{\rho \Delta(T)^2}{g} \left[ 1 - \frac{\theta}{2} \frac{\rho \Delta(T)^2}{g} \right]$$

Sustituimos en la presión:

$$\begin{aligned} P &\approx g \cancel{\Delta(T)^2} (kT) \frac{\cancel{\rho \Delta(T)^2}}{g} \left[ 1 - \frac{\theta}{2} \frac{\cancel{\rho \Delta(T)^2}}{g} \right] \left[ 1 + \frac{\theta}{4} \frac{\cancel{\rho \Delta(T)^2}}{g} \left[ 1 - \frac{\theta}{2} \frac{\cancel{\rho \Delta(T)^2}}{g} \right] \right] = \\ &= kT \rho \left[ 1 - \frac{\theta}{2} \frac{\rho \Delta(T)^2}{g} \right] \left[ 1 - \frac{\theta}{2} \frac{\rho \Delta(T)^2}{g} + \frac{\theta}{4} \frac{\rho \Delta(T)^2}{g} - \frac{1}{8} \left( \frac{\rho \Delta(T)^2}{g} \right)^2 \right] = \\ &= kT \rho \left[ 1 - \frac{\theta}{4} \frac{\rho \Delta(T)^2}{g} + O(\rho^2) \right] = \underline{kT \rho \left[ 1 - \frac{\theta}{4} \frac{\rho \Delta(T)^2}{g} \right] + O(\rho^3)} \end{aligned}$$

donde hemos cortado los órdenes superiores de la densidad.

$$(*) = g \Delta(T)^2 \int_0^\infty \frac{d\eta}{e^{\eta} d^{-1} - \theta} = \begin{cases} x = e^\eta \\ \eta = \ln(x) \\ d\eta = \frac{1}{x} dx \end{cases} =$$

$$= g \Delta(T)^2 \int_1^\infty \frac{1}{x} \frac{1}{x d^{-1} - \theta} dx = g \Delta(T)^2 \int_1^\infty \frac{d\lambda}{x(x - \theta d)} dx =$$

$$= \frac{g \Delta(T)^2}{\theta} \int_1^\infty \left( \frac{1}{x - \theta d} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{g \Delta(T)^2 \theta}{\theta} \left[ \ln(x - \theta d) - \ln(x) \right]_1^\infty =$$

$$= g \Delta(T)^2 \theta \left[ \ln \left( \frac{\infty - \theta d}{1 - \theta d} \right) - \ln \left( \frac{1 - \theta d}{1} \right) \right] = \underline{-\theta g \Delta(T)^2 \ln(1 - \theta d)}$$

③ Consideremos un gas ideal cuántico (bosones o fermiones) en dos dimensiones, de espín  $s$  en equilibrio. La energía de cada una de las partículas posee una contribución de momento y un grado de libertad interno,  $E = \frac{p^2}{2m} + \varepsilon_{\text{int}}$ , donde  $\varepsilon_{\text{int}}$  hace referencia a grados internos de libertad de la partícula, de modo que puede estar en dos estados cuánticos de energía  $\{-\Delta, 0\}$ , ambos no degenerados (siendo  $\Delta > 0$ ). Para este sistema, se pide:

(a) Obtener una expresión analítica exacta para la densidad de partículas en función de la temperatura y de la fugacidad,  $\rho = \rho(T, \alpha)$ .

Renombramos  $\varepsilon_{\text{int}} = \varepsilon_n = -n\Delta$  con  $n \in \{0, 1\}$

Calculamos  $\langle N \rangle$ :

$$\langle N \rangle = \sum_k \frac{1}{d^{-1} e^{\beta E_k} - \theta} = \sum_g \sum_p \sum_n \frac{1}{e^{\beta(p^2/2m + \varepsilon_n)} d^{-1} - \theta} =$$

$$= g \sum_p \frac{1}{e^{\beta p^2/2m} d^{-1} - \theta} + g \sum_p \frac{1}{e^{\beta p^2/2m} e^{\beta \Delta} d^{-1} - \theta}$$

Aplicamos el límite termodinámico,  $\sum_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{S}{h^2} \int_0^\infty (-) d\tilde{p} \xrightarrow{\text{Polaris}} \frac{2\pi S}{h^2} \int_0^\infty (-) pdp$

$$\langle N \rangle = \frac{2\pi g S}{h^2} \int_0^\infty \frac{p}{e^{\beta p^2/2m} d^{-1} - \theta} dp + \frac{2\pi g S}{h^2} \int_0^\infty \frac{p}{e^{\beta p^2/2m} e^{\beta \Delta} d^{-1} - \theta} dp$$

Hacemos el cambio de variable,  $\varepsilon = p^2/2m \quad ; \quad p = \sqrt{2m\varepsilon} \quad ; \quad dp = \frac{m}{\sqrt{2m\varepsilon}} d\varepsilon$

$$\langle N \rangle = \frac{2\pi g S}{h^2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{e^{\beta\varepsilon} d^{-1} - \theta} \frac{m}{\sqrt{2m\varepsilon}} d\varepsilon + \frac{2\pi g S}{h^2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{e^{\beta\varepsilon} e^{\beta\Delta} d^{-1} - \theta} \frac{m}{\sqrt{2m\varepsilon}} d\varepsilon =$$

$$= \frac{2\pi m g S}{h^2} \left[ \underbrace{\int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} d^{-1} - \theta}}_{(A)} + \underbrace{\int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} e^{\beta\Delta} d^{-1} - \theta}}_{(B)} \right] = \left. \begin{array}{l} \gamma = \beta\varepsilon \\ d\varepsilon = kT d\gamma \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2\pi m g S}{h^2} (kT) \left\{ \underbrace{\int_0^\infty \frac{d\gamma}{e^\gamma d^{-1} - \theta}}_{(A)} + \underbrace{\int_0^\infty \frac{d\gamma}{e^\gamma e^{\beta\Delta} d^{-1} - \theta}}_{(B)} \right\}$$

Estas integrales son de la forma:

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x A^{-1} - B} dx = \int_0^\infty \frac{A}{e^x - AB} dx = \begin{cases} u = e^x \\ dx = \frac{du}{u} \end{cases} =$$

$$= \int_1^\infty \frac{A}{u(u-AB)} du$$

Que resolvemos usando el método de fracciones sencillos:  $\frac{A}{u(u-AB)} = \frac{C}{u} + \frac{D}{u-AB}$

$$\Rightarrow A = C(u-AB) + D \cdot u$$

$$\text{Para } u=0: A = -C \cdot AB \Rightarrow \boxed{C = -\frac{1}{B}}$$

$$\text{Para } u=AB: A = D \cdot AB \Rightarrow \boxed{D = \frac{1}{B}}$$

Luego,

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty \left( \frac{-1}{Bu} + \frac{1}{B(u-AB)} \right) du = \frac{1}{B} \int_1^\infty \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{u-AB} \right) du = \\ & = \frac{1}{B} \left[ \ln(u-AB) - \ln(u) \right]_1^\infty = \frac{1}{B} \left[ \ln\left(\frac{u-AB}{u}\right) \right]_1^\infty = \frac{1}{B} \left\{ \ln\left(\frac{\infty-AB}{\infty}\right) - \ln\left(\frac{1-AB}{1}\right) \right\} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{B} \ln(1-AB)$$

$$\theta = \frac{1}{B}$$

$$\text{Por tanto: (A) } \rightarrow A = \lambda ; B = \theta \Rightarrow (A) = -\frac{1}{\theta} \ln(1-\theta\lambda) = -\theta \ln(1-\theta\lambda)$$

$$(B) \rightarrow A = \lambda e^{F\Delta} ; B = \theta \Rightarrow (B) = -\frac{1}{\theta} \ln(1-\theta\lambda e^{F\Delta}) = -\theta \ln(1-\theta\lambda e^{F\Delta})$$

Luego,

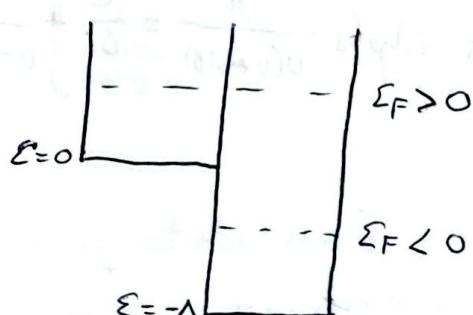
$$\boxed{\beta(T, \lambda) = \frac{\langle N \rangle}{S} = -\frac{2\pi m g \theta}{h^2} (kT) \left[ \ln(1-\theta\lambda) + \ln(1-\theta\lambda e^{F\Delta}) \right]}$$

(4)

(b) Considere ahora el caso particular de un gas de fermiones totalmente degenerado. Obtenga la expresión de la energía de Fermi,  $\varepsilon_F$ , en función de la densidad,  $\rho$ .

Un gas de fermiones totalmente degenerado se da para  $\lambda \gg 1$ .

Como tenemos dos niveles de energía, tendremos dos casos para la energía de Fermi, pues



Como tenemos fermiones,  $\Theta = -1$

y como queremos  $\varepsilon_F \rightarrow \varepsilon_F = e^{\beta \mu} = e^{\beta \varepsilon_F}$ . Así,

$$\rho = \frac{2\pi m g k T}{h^2} \left[ \ln(1 + e^{\beta \varepsilon_F}) + \ln(1 + e^{\beta(\varepsilon_F + \Delta)}) \right]$$

Caso 1:  $\varepsilon_F > 0$

$$\lambda \gg 1 \Rightarrow e^{\beta \mu} \gg 1 \Rightarrow \beta \rightarrow \infty$$

Por tanto,  $\ln(1 + e^{\beta \varepsilon_F}) \approx \ln(e^{\beta \varepsilon_F}) = \beta \varepsilon_F$

$$\ln(1 + e^{\beta(\varepsilon_F + \Delta)}) \approx \ln(e^{\beta(\varepsilon_F + \Delta)}) = \beta(\varepsilon_F + \Delta)$$

Luego,  $\rho = \frac{2\pi m g k T}{h^2} \left[ \beta \varepsilon_F + \beta \varepsilon_F + \beta \Delta \right] \Rightarrow \varepsilon_F = \frac{1}{2} \left( \frac{h^2 \rho}{2\pi m g} - \Delta \right)$  si  $\varepsilon_F > 0$

Caso 2:  $-\Delta < \varepsilon_F < 0$

$$\Rightarrow \ln(1 + e^{\beta \varepsilon_F}) \approx \ln(1 + e^{-\infty}) \approx \ln(1) = 0$$

$$\Rightarrow \ln(1 + e^{\beta(\varepsilon_F + \Delta)}) = \ln(1 + e^{-\infty}) \approx \beta(\varepsilon_F + \Delta)$$

Luego,  $\rho = \frac{2\pi m g k T}{h^2} \beta(\varepsilon_F + \Delta) \Rightarrow \varepsilon_F = \frac{h^2 \rho}{2\pi m g} - \Delta$  si  $-\Delta < \varepsilon_F < 0$

Si  $\varepsilon_F = 0$  ambas expresiones son equivalentes, obteniendo una  $\rho^*(\varepsilon_F = 0) :$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\hbar^2 \rho^*}{2\pi m g} - \Delta \right) = 0 \Rightarrow \rho^* = \frac{2\pi m g}{\hbar^2} \Delta$$

Tal que,

$$\varepsilon_F = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \frac{\hbar^2 \rho}{2\pi m g} - \Delta \right) & \text{si } \rho > \rho^* = \frac{2\pi m g}{\hbar^2} \Delta \\ \frac{\hbar^2 \rho}{2\pi m g} - \Delta & \text{si } \rho < \rho^* = \frac{2\pi m g}{\hbar^2} \Delta \end{cases}$$

(4) En las estrellas enanas blancas, la temperatura es del orden de  $T=10^7 K$ . La temperatura es tan elevada que los átomos de helio están completamente ionizados. Esta ionización produce un gas de electrones libres (gas ideal de electrones) que puede demostrarse que está totalmente degenerado, y es el responsable de la estabilidad de la estrella. Considerando que la densidad de los electrones libres es de  $10^{30}$  electrones/cm<sup>3</sup>, y suponiendo que la temperatura es tan elevada que los electrones se comportan como partículas relativistas, con una energía igual a  $E = pc$  ( $c$  es la velocidad de la luz), se pide:

(a) La función densidad de estados  $g(\varepsilon)$ :

Como tenemos electrones,  $\Theta = -2$  y  $g = 2$ :

$$\varepsilon_p = \frac{h \vec{p} k}{2}$$

$$\Theta = T \sum_K \ln(1 + e^{-\beta \varepsilon_K}) \Rightarrow \ln \Theta = \sum_K \ln(1 + e^{-\beta \varepsilon_K}) = \sum_{\sigma} \sum_{\vec{p}} \ln(1 + e^{-\beta \varepsilon_{\vec{p}}}) =$$

$$= 2 \sum_{\vec{p}} \ln(1 + e^{-\beta \vec{p} c}) \quad \text{con } d = e^{\beta c}$$

Aplicamos el Límite Termodinámico,  $\lim_{\text{partes infinitas}}$

$$2 \sum_{\vec{p}} \ln(1 + e^{-\beta \vec{p} c}) \xrightarrow{L.T.} \frac{2V}{h^3} \int \ln(1 + e^{-\beta \vec{p} c}) d\vec{p} = \frac{2\pi V}{h^3} \int_0^\infty p^2 \ln(1 + e^{-\beta pc}) dp = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = pc \\ d\varepsilon = cdp \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{8\pi V}{h^3 c^3} \int_0^\infty \varepsilon^2 \ln(1 + e^{-\beta \varepsilon}) d\varepsilon = \int_0^\infty g(\varepsilon) \cdot f(\varepsilon) d\varepsilon \quad \text{con } f(\varepsilon) = h_c(1 - e^{-\beta \varepsilon})$$

Por tanto, la densidad de estados es:

$$g(\varepsilon) = \frac{8\pi V}{h^3 c^3} \varepsilon^2$$

(b) La energía de Fermi,  $\epsilon_F$ , del sistema y la temperatura de Fermi. ¿Se cumple la hipótesis de degeneración?

Para calcular la energía de Fermi, primero debemos calcular la densidad para ~~T=0K~~, usando la densidad de estados  $g(\epsilon)$ : ( $T=0K$ )

$$\frac{\langle N \rangle}{V} = \rho = \frac{8\pi}{(hc)^3} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^2 d\epsilon = \frac{8\pi}{3(hc)^3} \epsilon_F^3 \Rightarrow \boxed{\epsilon_F = \left( \frac{3(hc)^3}{8\pi} \rho \right)^{1/3}}$$
$$f(\epsilon) = \Theta(\epsilon_F - \epsilon)$$

Sabiendo que  $\epsilon_F = k \cdot T_F$ ,  $T_F = \frac{\epsilon_F}{k}$

Luego,  $T_F = \frac{1}{k} \left( \frac{3(hc)^3}{8\pi} \rho \right)^{1/3} = \frac{hc}{k} \left( \frac{3\rho}{8\pi} \right)^{1/3}$

Sabiendo que  $\rho = 10^{30} e^-/\text{cm}^3 = 10^{36} e^-/\text{m}^3$  y  $T = 10^7 \text{ K}$ , entonces

$$\boxed{T_F = \frac{(61626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}) \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})}{(1138 \cdot 10^{-23} \text{ J/K})} \left[ \frac{3}{8\pi} \cdot 10^{36} e^-/\text{m}^3 \right]^{1/3} = 710923 \cdot 10^9 \text{ K}}$$

La hipótesis de degeneración se da si  $T \ll T_F$ , luego como  $T_F \approx 10^{10} \text{ K}$  y  $T \approx 10^7 \text{ K}$ , entonces  $T \ll T_F$ , por lo que sí se cumple la hipótesis de degeneración //

(c) La presión que ejerce el gas de electrones, en función de la densidad.

Calculamos la presión para  $T=0K$ , usando ~~el factor~~

$$PV = -\mathcal{F} = KT \ln \Theta = KT \cdot 2 \int_0^{\infty} \ln(1+e^{-\beta p/c}) dp$$

Aplicando el límite termodinámico y pasando a esferas tenemos,

$$\begin{aligned} P &= \cancel{\frac{8\pi e}{h^3}} (KT) \int_0^{\infty} p^2 \ln(1+e^{-\beta pc}) dp = \left\{ \begin{array}{l} c = pc \\ dc = cdp \end{array} \right\} = \\ &= \frac{8\pi e}{c^3 h^3} (KT) \int_0^{\infty} \varepsilon^2 \ln(1+e^{-\beta \varepsilon}) d\varepsilon = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(1+e^{-\beta \varepsilon}), \quad du = \frac{-\beta e^{-\beta \varepsilon}}{1+e^{-\beta \varepsilon}} \\ dv = \varepsilon^2 d\varepsilon \quad ; \quad v = \frac{\varepsilon^3}{3} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{8\pi e}{3(hc)^3} (KT) \left[ \frac{\varepsilon^3}{3} \ln(1+e^{-\beta \varepsilon}) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^3}{3} \frac{\beta e^{-\beta \varepsilon}}{1+e^{-\beta \varepsilon}} \cdot \frac{e^{\beta \varepsilon} d^{-1}}{e^{\beta \varepsilon} d^{-1}} d\varepsilon = \\ &= + \frac{8\pi e}{3(hc)^3} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{\beta \varepsilon} d^{-1} + 1} \varepsilon^3 d\varepsilon \end{aligned}$$

Como estamos a  $T=0K$ , podemos aproximar  $\frac{1}{e^{\beta \varepsilon} + 1} = \langle n_{\varepsilon} \rangle \approx \Theta(\varepsilon_F - \varepsilon)$

Luego,

$$P = + \frac{8\pi e}{3(hc)^3} \int_0^{\Theta} \varepsilon^3 \Theta(\varepsilon - \varepsilon_F) d\varepsilon = + \frac{8\pi e}{3(hc)^3} \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^3 d\varepsilon = + \frac{8\pi e}{3(hc)^3} \frac{\varepsilon_F^4}{4}$$

$$\text{Sustituyendo } \varepsilon_F = \left( \frac{3(hc)^3}{8\pi} e \right)^{1/3}$$

$$P = + \frac{8\pi e}{3(hc)^3} \frac{\varepsilon_F}{4} \frac{3(hc)^3}{8\pi} e \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{4} \rho \varepsilon_F}$$

(d) Encuentre la dependencia con la temperatura del potencial químico, energía interna, capacidad calorífica a volumen constante, energía libre de Helmholtz y entropía, demuestre las siguientes identidades, válidas hasta orden  $O(T^2)$ :

Ahora no podemos hacer la aproximación  $\langle n_\mu \rangle = \Theta(\epsilon_F - \epsilon)$ , pues la temperatura no es nula. Por lo que en las integrales de presión y densidad aparecen términos del estilo,

$$I = \int_0^\infty f(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} d\epsilon = \int_0^\mu f(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6\beta^2} f'(\mu)$$

resuelto en teoría.

Para nuestros casos,

$$\text{- Presión: } f(\epsilon) = \epsilon^3 \Rightarrow \int_0^\mu \epsilon^3 d\epsilon = \frac{\mu^4}{4}; \quad f'(\epsilon)|_\mu = 3\mu^2$$

$$\Rightarrow I = \frac{\mu^4}{4} + \frac{\pi^2}{2\beta^2} \mu^2 = \frac{\mu^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} \mu^2 (kT)^2$$

$$\Rightarrow P(T, \mu) = \frac{8\pi}{3(hc)^3} \frac{\mu^4}{4} \left[ 1 + \frac{2\pi^2}{\mu^2} (kT)^2 \right]$$

$$\text{- Densidad: } f(\epsilon) = \epsilon^2; \quad \int_0^\mu \epsilon^2 d\epsilon = \frac{\mu^3}{3}; \quad f'(\epsilon)|_\mu = 2\mu \Rightarrow I = \frac{\mu^3}{3} + \frac{\pi^2}{3} \mu (kT)^2$$

$$\Rightarrow \rho(T, \mu) = \frac{8\pi}{3(hc)^3} \frac{\mu^3}{3} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{\mu^2} (kT)^2 \right]$$

Como la densidad no debe cambiar,  $\rho(T=0K, \mu) = \rho(T)$ , luego

$$\cancel{\frac{8\pi}{3(hc)^3} \epsilon_F^3} = \cancel{\frac{8\pi}{3(hc)^3} \frac{\mu^3}{3}} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{\mu^2} (kT)^2 \right] \quad (1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$$

$$\epsilon_F = kT_F$$

$$\Rightarrow \mu = \boxed{\epsilon_F \left[ 1 + \frac{\pi^2}{\mu^2} (kT)^2 \right]^{1/3}} \simeq \epsilon_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{3\mu^2} (kT)^2 \right] \simeq \epsilon_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{3\epsilon_F^2} (kT)^2 \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\mu = \epsilon_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right]} //$$

La energía interna será,  $U = \frac{3}{2} PV$ ,

$$\Rightarrow U = \frac{8\pi V}{(hc)^3} \frac{\mu^4}{4} \left[ 1 + \frac{2\pi^2}{\mu^2} (\kappa T)^2 \right]$$

$$\text{Despejamos } \mu^3 \text{ de } \rho \Rightarrow \mu^3 = \frac{3\rho(hc)^3}{8\pi} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{\mu^2} (\kappa T)^2 \right]^{-1}$$

Sustituimos en  $U$ :

$$U = \frac{8\pi V}{(hc)^3} \cdot \frac{3\rho(hc)^3}{8\pi} \mu \left[ 1 + \frac{\pi^2}{\mu^2} (\kappa T)^2 \right]^{-1} \cdot \left[ 1 + \frac{2\pi^2}{\mu^2} (\kappa T)^2 \right] \underset{\mu = \mu(\varepsilon_F)}{\simeq}$$

$$\simeq \frac{3}{4} N \mu \left[ 1 - \frac{\pi^2}{\mu^2} (\kappa T)^2 \right] \left[ 1 + \frac{2\pi^2}{\mu^2} (\kappa T)^2 \right] \underset{\text{orden } O(T^2)}{\simeq}$$

$$= \frac{3}{4} N \varepsilon_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right] \left[ 1 - \frac{\pi^2}{\varepsilon_F^2} (\kappa T)^2 \right] \left[ 1 + \frac{2\pi^2}{\varepsilon_F^2} (\kappa T)^2 \right] \simeq$$

~~$\simeq \frac{3}{4} N \varepsilon_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right] \left[ 1 - \frac{\pi^2}{\varepsilon_F^2} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right] \left[ 1 + \frac{2\pi^2}{\varepsilon_F^2} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right]$~~

$$\simeq \frac{3}{4} N \varepsilon_F \left[ 1 - \pi^2 \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 - \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right] \left[ 1 + \frac{2\pi^2}{\varepsilon_F^2} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right] \simeq$$

$$\simeq \frac{3}{4} N \varepsilon_F \left[ 1 + 2\pi^2 \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 - \pi^2 \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 - \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right] =$$

$$= \frac{3}{4} N \varepsilon_F \left[ 1 + \frac{2\pi^2}{3} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right] //$$

La capacidad calorífica será,

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{N,V} = \frac{3}{4} N \varepsilon_F \frac{4\pi^2}{3} \frac{T}{T_F^2} \stackrel{\varepsilon_F = kT_F}{=} \pi^2 N k \frac{T}{T_F} //$$

La energía libre de Helmholtz será,

$$A = \mu N - PV = \mu N - \frac{2}{3} U = N \varepsilon_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} N \varepsilon_F \left[ 1 + \frac{2\pi^2}{3} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right] =$$

$$\cancel{N \varepsilon_F - \frac{2}{3} N \varepsilon_F \pi^2 \left( \frac{T}{T_F} \right)^2} = N \varepsilon_F \left[ \frac{1}{2} - \frac{2\pi^2}{3} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right]$$

$$= N \varepsilon_F - N_F \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 - \frac{1}{2} N \varepsilon_F - N_F \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} N \varepsilon_F - \frac{2}{3} N \varepsilon_F \pi^2 \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 = \frac{3}{2} N \varepsilon_F \left[ 1 - \frac{2\pi^2}{3} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right] //$$

La entropía será,  $S = \frac{1}{T} (U - A)$

$$S = \frac{1}{T} \left[ \frac{3}{4} N \varepsilon_F \left( 1 + \frac{2\pi^2}{3} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right) - \frac{3}{4} N \varepsilon_F \left( 1 - \frac{2\pi^2}{3} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right) \right] =$$

$$= \frac{3}{4} N \varepsilon_F \cdot \frac{4\pi^2}{3} \frac{T}{T_F^2} \stackrel{\varepsilon_F = kT_F}{=} N k \pi^2 \left( \frac{T}{T_F} \right) //$$

⑤ Considera un gas ideal de bosones no relativistas 3 dimensionales. Demuestra que la capacidad calorífica a volumen constante viene dada por:

$$\frac{C_V}{kN} = \begin{cases} \frac{15}{4} \frac{g}{\Lambda^3(T) \rho} Y(\lambda_0) - \frac{g}{4} \frac{y(\lambda_0)}{\lambda_0 y'(\lambda_0)} & \text{si } T > T_c \\ \frac{15}{4} \frac{g}{\Lambda^3(T) \rho} Y(\lambda) & \text{si } T < T_c \end{cases}$$

Siendo  $\lambda_0$  la solución a la ecuación:  $y(\lambda_0) = \rho \Lambda^3(T) / g$

La temperatura crítica,  $T_c$ , es la temperatura a partir de la cual se produce la condensación de Bose-Einstein.

Para bosones 3-Dimensionales no relativistas fuertemente degenerados tenemos,

$$P(T, \lambda) = g k T \left[ -\frac{\ln(1-\lambda)}{V} + \Lambda^{-3}(T) Y(\lambda) \right]$$

$$\rho(T, \lambda) = g \left[ \frac{\lambda}{V(1-\lambda)} + \Lambda^{-3}(T) y(\lambda) \right]$$

Donde la densidad diverge para  $\lambda \rightarrow 1$ .

Numéricamente, tenemos que  $y(\lambda) = 2^{1612} = \frac{\Lambda^3(T_c) \rho}{g}$

Por tanto,

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_0 & \text{si } \frac{g \Lambda^3(T)}{2^{1612}} < 2^{1612} \\ 1 & \text{si } \frac{g \Lambda^3(T)}{2^{1612}} > 2^{1612} \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} y(\lambda_0) = \frac{g \Lambda^3(T_c)}{2^{1612}} \\ y(1) = \frac{g \Lambda^3(T_c)}{2^{1612}} \end{cases}$$

El número de partículas será,

$$\langle N \rangle = \sum_n \langle n_{n\lambda} \rangle = g \sum_p \frac{1}{\lambda^{-1} e^{\beta \epsilon_p} - 1} = g \left[ \frac{1}{\lambda^{-1} - 1} + \sum_{p>0} \frac{1}{\lambda^{-1} e^{\beta \epsilon_p} - 1} \right] = \\ = g \left[ \frac{\lambda}{1-\lambda} + V \Lambda^{-3}(T) y(\lambda) \right] = \langle n_0 \rangle + \langle n_{p>0} \rangle$$

Despejando  $\langle n_0 \rangle$ :

$$\cancel{\langle n_0 \rangle} - \cancel{\langle n \rangle} = g V \Lambda^{-3}(T) y(\lambda) \Rightarrow \cancel{\langle n \rangle} \left[ 1 - \frac{g y(\lambda)}{g \Lambda^3(T)} \right] = \\ \langle n_0 \rangle = \frac{g \lambda}{1-\lambda}; \quad \langle n_0 \rangle = \langle N \rangle - g V \Lambda^{-3}(T) y(\lambda) = \langle N \rangle \left[ 1 - \frac{g y(\lambda)}{g \Lambda^3(T)} \right] = \begin{cases} 0 & \text{si } T < T_c \\ \langle N \rangle \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{1/2} \right] & \text{si } T > T_c \end{cases}$$

Tenemos que,

$$\lambda = \frac{\langle n_0 \rangle / g}{\langle n_0 \rangle / g + 1}$$

Luego, sustituimos  $\lambda$  en la ecuación. Veamos el primer sumando:

$$-\frac{\ln(1-\lambda)}{V} = -\frac{1}{V} \ln\left(\frac{1}{1+\langle n_0 \rangle / g}\right) = \frac{\ln(1+\langle n_0 \rangle / g)}{V} = \begin{cases} 0 & \text{si } T > T_c \\ \frac{\ln(1+ctc\langle N \rangle)}{V} \approx \frac{\ln\langle N \rangle}{V} \approx 0 & \text{si } T < T_c \end{cases}$$

Luego, este sumando no contribuye y tenemos que,

$$P = \begin{cases} gkT\Lambda^{-3}(T) Y(\lambda_0) & \text{si } T > T_c \\ gkT\Lambda^{-3}(T) Y(\lambda) & \text{si } T < T_c \end{cases}$$

La capacidad calorífica vendrá dada por,  $C_V = \frac{C_V}{\langle N \rangle} = \frac{3}{2} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_P$

Luego,

$$\begin{aligned} -T > T_c : \frac{\partial}{\partial T} \left[ gkT \left( \frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} Y(\lambda_0) \right]_P &= gk \cancel{\Lambda^{-3}(T)} \cancel{\lambda_0} \cancel{Y'(\lambda_0)} \\ &+ gkT \cdot \frac{3}{2} \cancel{\frac{2\pi m k T}{h^2}} \\ &= \frac{\partial}{\partial T} \left[ gk \left( \frac{2\pi m k T^{5/3}}{h^2} \right)^{3/2} Y(\lambda_0) \right]_P = \frac{\partial}{\partial T} \left[ gk \left( \frac{2\pi m k}{h^2} \right)^{3/2} \cdot T^{5/2} \cdot Y(\lambda_0) \right]_P = \\ &= gk \left( \frac{2\pi m k}{h^2} \right)^{3/2} \cdot \frac{5}{2} T^{3/2} Y(\lambda_0) + gkT \left( \frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \cdot \left( \frac{\partial Y(\lambda_0)}{\partial T} \right)_P = \\ &= \frac{5}{2} gk \Lambda^{-3}(T) \cancel{Y(\lambda_0)} + gkT \Lambda^{-3}(T) \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda_0} \cdot \left( \frac{\partial Y(\lambda_0)}{\partial \lambda_0} \right) \cdot \left( \frac{\partial \lambda_0}{\partial T} \right) = \\ &= \frac{5}{2} gk \Lambda^{-3}(T) + gkT \Lambda^{-3}(T) \cdot \frac{y(\lambda_0)}{\lambda_0 y'(\lambda_0)} \cdot \left( \frac{\partial \lambda_0}{\partial T} \right) = \\ &= \frac{5}{2} gk \Lambda^{-3}(T) + gkT \Lambda^{-3}(T) \frac{y(\lambda_0)}{\lambda_0 y'(\lambda_0)} \cdot \frac{\partial}{\partial T} (\Lambda^{-3}(T)/g) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{5}{2} g k \Lambda^{-3}(T) \frac{Y(\lambda_0)}{\partial_0 Y'(\lambda_0)} \cdot \frac{\partial}{\partial T} \left[ \frac{c}{g} \left( \frac{h^2}{2\pi mk} \right)^{3/2} \cdot T^{-3/2} \right] = \\
 &= \frac{5}{2} g k \Lambda^{-3}(T) \frac{Y(\lambda_0)}{\partial_0 Y'(\lambda_0)} \cdot \frac{3}{2} g k \Lambda^{-3}(T) \cdot \frac{c}{g} \left( \frac{h^2}{2\pi mk} \right)^{3/2} \cdot T^{-5/2} \cdot \frac{\partial}{\partial_0 Y'(\lambda_0)} = \\
 &= \frac{5}{2} g k \Lambda^{-3}(T) \frac{Y(\lambda_0)}{\partial_0 Y'(\lambda_0)} \cdot \frac{3}{2} c k \Lambda^{-3}(T) \Lambda^3(T) \frac{\partial}{\partial_0 Y'(\lambda_0)} = \\
 &= \frac{5}{2} g k \Lambda^{-3}(T) \frac{Y(\lambda_0)}{\partial_0 Y'(\lambda_0)} - \frac{3}{2} c k \frac{\partial}{\partial_0 Y'(\lambda_0)}
 \end{aligned}$$

Luego,  ~~$R(T > T_c)$~~

$$\begin{aligned}
 \frac{C_V}{kN} (T > T_c) &= \frac{3}{2e} \left[ \frac{5}{2} g k \Lambda^{-3}(T) \frac{Y(\lambda_0)}{\partial_0 Y'(\lambda_0)} - \frac{3}{2} c k \frac{\partial}{\partial_0 Y'(\lambda_0)} \right] = \\
 &= \frac{15}{4} \frac{g k Y(\lambda_0)}{e \Lambda^3(T)} - \frac{9}{4} c k \frac{\partial}{\partial_0 Y'(\lambda_0)}
 \end{aligned}$$

-  $T < T_c$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial T} \left[ g k \Lambda^{-3}(T) Y(1) \right] &= g k \left( \frac{2\pi m k}{h^2} \right)^{3/2} \cdot \frac{5}{2} T^{3/2} = \frac{5}{2} g k \Lambda^{-3}(T) Y(1) \\
 \Rightarrow \frac{C_V}{N} (T < T_c) &= \frac{3}{2e} \left[ \frac{5}{2} g k \Lambda^{-3}(T) Y(1) \right] = \frac{15}{4} \frac{g k}{e \Lambda^3(T)} Y(1)
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{C_V}{kN} = \begin{cases} \frac{15}{4} \frac{g k}{e \Lambda^3(T)} Y(1) - \frac{9}{4} c k \frac{\partial}{\partial_0 Y'(\lambda_0)} & \text{si } T > T_c \\ \frac{15}{4} \frac{g k}{e \Lambda^3(T)} Y(1) & \text{si } T < T_c \end{cases}$$

⑥ Suponga que, tras efectuar algunas medidas del calor molar a volumen constante ( $C_V$ ) de un sólido a bajas y altas temperaturas, se obtienen las siguientes medidas:

T (K)	$C_V$ (J/Kmol)
0'1	0'001
0'2	0'002
0'3	0'00304
0'5	0'0052
500	49'86
1000	49'87
1500	49'87

(a) A partir de estos datos, ¿podría ~~señalar~~ inferir si se trata de un sólido dielectrónico o conductor?

Para ver si es un conductor o un dielectrónico debemos ver el comportamiento a bajas temperaturas de  $C_V$ , donde para conductores sigue la ley,  $C_V = \gamma T + \beta T^3$ , mientras que los dielectrónicos siguen el modelo de Debye,  $C_V \propto T^3$ .

Vemos una dependencia lineal de la temperatura con  $C_V$ ,  $C_V \propto T$ , por lo que el término  $\gamma T$  se cumple, luego, estamos ante un conductor.

(b) ¿Se trata de un sólido monoatómico, diatómico o triatómico?

Por el modelo de Dulong y Petit, sabemos que los sólidos:

- Monoatómicos  $\rightarrow C_V \approx 6 \text{ cal/Kmol} = 24'9 \text{ J/Kmol}$

- Diatómico  $\rightarrow C_V \approx 12 \text{ cal/Kmol} = 49'8 \text{ J/Kmol}$  ✓

- Triatómico  $\rightarrow C_V \approx 18 \text{ cal/Kmol} = 74'7 \text{ J/Kmol}$

a temperaturas altas, luego el sólido es diatómico. //

7) Considera un sólido isotropo dielectrónico formado por  $N$  átomos en un espacio d-dimensional.

(a) Obtenga una expresión para la densidad espectral de Debye en función de la frecuencia.

El modelo de Debye nos permite deducir la expresión de  $g(\nu)$ , para ello, pasamos los sumatorios a integrales,

$$\sum_{\vec{p}} (\dots) \longrightarrow \frac{D}{h^d} \int (\dots) d\vec{p}$$

donde  $D$  es el hiper volumen d-dimensional.

Pasamos a coordenadas hiper esféricas d-dimensionales usando una generalización tal que, el radio  $p \in [0, \infty)$  y  $(d-1)$  ángulos  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d-1}) \in [0, \pi]^{d-2} \times [0, 2\pi]$

$$\text{Luego, } d^d p = p^{d-1} dp \cdot d\Omega_d \text{ donde } \int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

Por tanto,

$$\sum_{\vec{p}} (\dots) \longrightarrow \frac{2\pi^{d/2} \cdot D}{h^d \Gamma(d/2)} \int_0^\infty p^{d-1} dp = \frac{2\pi^{d/2} \cdot D}{h^d \Gamma(d/2)} \frac{h^d}{C^d} \int_0^{v_{\max}} v^{d-1} dv$$

Luego, la densidad espectral queda

$$g(\nu) = \frac{2\pi^{d/2} \cdot D}{C^d \Gamma(d/2)} v^{d-1}$$

y  $g(\nu) = 0$  si  $\nu > \nu_{\max}$ .

Pero tenemos distintos modos de vibración  $\Rightarrow \frac{1}{C^d} = \sum_{i=1}^d \frac{1}{c_i^d}$  y la integral de  $g(\nu)$  debe normalizarse, tal que  $\int_0^{v_{\max}} g(\nu) dv = dN$

$$\text{Luego, } \frac{2\pi^{d/2} \cdot D}{\sum_{i=1}^d c_i \Gamma(d/2)} \cdot \frac{v_{\max}^d}{d} = d \cdot N \Rightarrow \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{D}{\sum_{i=1}^d c_i} = \frac{d^2 \cdot N}{v_{\max}^d}$$

Por tanto,  $g(\nu) = \begin{cases} \frac{N \cdot d^2}{v_{\max}^d} \cdot v^{d-1} & \text{si } \nu < \nu_{\max} \\ 0 & \text{si } \nu > \nu_{\max} \end{cases}$

(b) Deducir una expresión general para  $C_V$  de acuerdo con el modelo de Debye, y compruebe que  $C_V \propto T^d$  cuando  $T \rightarrow 0K$ .

Tomando  $\nu_0 = \nu_{\max}$  y definiendo  $\Theta_D = \frac{h\nu_0}{k}$  la temperatura de Debye.

La capacidad calorífica vendrá dada por,

$$C_V = k \int_0^\infty g(\nu) \frac{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2} d\nu =$$

$$= \frac{k \cdot d^2 \cdot N}{\nu_0^d} \int_0^{\Theta_D} \nu^{d-2} \frac{h^2 \nu^2}{(kT)^2} \frac{e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2} d\nu = \begin{cases} x = \frac{h\nu}{kT} \\ \nu = \frac{kT}{h}x \end{cases} =$$

$$= \frac{d^2 \cdot N \cdot K}{\nu_0^d} \int_0^{\Theta_D/T} \left(\frac{kT}{h}\right)^{d-1} x^{d-2} \cdot x^2 \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \cdot \frac{kT}{h} dx = \Theta_D = \frac{h\nu_0}{k}$$

$$\approx = N \cdot d^2 \cdot K \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^d \int_0^{\Theta_D/T} x^{d+2} \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} dx$$

Luego, cuando  $T \rightarrow 0K \Rightarrow \frac{\Theta_D}{T} \rightarrow \infty$ , teniendo

$$C_V = N \cdot d^2 \cdot K \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^d \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^{d+2} e^x}{(e^x - 1)^2} dx = \begin{cases} u = x^{d-1} \\ du = (d-1)x^{d-2} dx \\ dv = \frac{e^x dx}{(e^x - 1)^2} ; v = -\frac{1}{e^x - 1} \end{cases} =$$

$$= N \cdot d^2 \cdot K \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^d \left\{ x^{d-1} \frac{1}{e^x - 1} \right\}_0^{\Theta_D/T} + \int_0^{\Theta_D/T} \frac{(d-1)x^{d-2}}{e^x - 1} dx \stackrel{=} \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^a}{e^x - 1} dx = P(a+1) J(a+1)$$

$$= N \cdot d^2 (d-1) K \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^d \cdot \Gamma(d-2+1) \cdot \Gamma(d-2+1) = N \cdot d^2 (d-1) \cdot \Gamma(d+1) \Gamma(d-1) \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^d$$

Luego,  $C_V \propto T^d$