Evaluación VI. Mecánica Cuántica

Rubén Carrión Castro

Diciembre 2024

1. **Un oscilador armónico 1-dimensional de frecuencia angular ω y carga q es perturbado durante el intervalo de tiempo $\mathbf{0 < t < \pi/\omega = T}$ por un campo eléctrico con $\mathbf{V(x) = -q\mathcal{E}x}$.**
   (a) **Si a las $\mathbf{t = 0}$ el oscilador se encontraba con igual probabilidad en el estado $|\mathbf{0}\rangle$ o en el estado $|\mathbf{1}\rangle$, calcula a primer orden en la perturbación la probabilidad de que a las $\mathbf{t = T}$ se encuentre en el estado $|\mathbf{1}\rangle$.**
   (b) **Si a las $\mathbf{t = 0}$ el oscilador se encontraba en el estado fundamental y a las $\mathbf{t = T}$ se mide el observable $\mathbf{O} = |\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{1}| + |\mathbf{1}\rangle\langle\mathbf{0}|$, determina a orden $\mathcal{O}(\mathcal{E}^2)$ los posibles valores de esta medida y su probabilidad.**

Sabemos que la energía de un oscilador armónico no perturbado es,

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

Tenemos un oscilador armónico perturbado en un intervalo de tiempo, de frecuencia ω y carga q, por tanto, el Hamiltoniano en el intervalo $0 < t < T$, queda

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 - 1\mathcal{E}x = H_0 + V(x)$$

donde $\mathcal{E}$ es el campo eléctrico, $H_0 = p^2/(2m) + (1/2)m\omega^2$ es el Hamiltoniano no perturbado y $V(x) = -q\mathcal{E}x$ es la perturbación. Como la perturbación se da en un intervalo de tiempo, tenemos que

$$V(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ V(x) & \text{si} \quad 0 < t < T0 \quad \text{si} \quad t > T \end{cases}$$

Apartado (a)

Nos dicen que para $t = 0$, el oscilador se encuentra con igual probabilidad en el estado $|0\rangle$ o en el estado $|1\rangle$, esto es, que los estados $|0\rangle$ Y $|1\rangle$ son equiprobables para el estado inicial, por lo que el estado inicial será una combinación lineal de ambos estados, tal que

$$|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + |1\rangle\right]$$

Sabemos que a primer orden la probabilidad de transición viene dada por,

$$\omega(i \to f, t) = \left|\langle f|U_I(t)\rangle\,|i|\right|^2 = \left|\langle f|i\rangle - \tfrac{i}{\hbar}\int_0^t dt' e^{\frac{i}{\hbar}\Delta E\cdot t'}\langle f|V(x)|i\rangle\right|^2$$

donde $\frac{\Delta E}{\hbar} = \omega$.
Luego, tomando $|i\rangle = |\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)$ y $|f\rangle = |Psi(T)\rangle = |1\rangle$, podemos calcular,

$$\langle f|i\rangle = \langle 1| \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cancelto{0}{\langle 1|0\rangle} + \cancelto{1}{\langle 1|1\rangle}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y también calculamos,

$$\langle f|V(x)|i\rangle = \langle 1|\, V(x) \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\langle 1|V(x)|0\rangle + \langle 1|V(x)|1\rangle\right] = \frac{-q\mathcal{E}}{\sqrt{2}}\left[\langle 1|V(x)|0\rangle + \langle 1|V(x)|1\rangle\right]$$

Usando el formalismo de operadores construcción y destrucción, tenemos que $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$. Por tanto, debemos calcular,

$$\langle 1|x|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle 1|(a + a^\dagger|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\langle 1|a|0\rangle + \langle 1|a^\dagger|0\rangle\right] = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\cancelto{0}{\langle 1|a|0\rangle} + \cancelto{1}{\langle 1|1\rangle}\right] = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

$$\langle 1|x|1\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle 1|(a + a^\dagger|1\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\langle 1|a|1\rangle + \langle 1|a^\dagger|1\rangle\right] = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\cancelto{0}{\langle 1|0\rangle} + \cancelto{0}{\langle 1|2\rangle}\right] = 0$$

Por tanto tenemos,

$$\langle 1|V(x)|\Psi(0)\rangle = \frac{-q\mathcal{E}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

Por tanto,

$$\langle f|U_I(t)|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{i}{\hbar}q\mathcal{E}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\int_0^t dt' e^{i\omega t'}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{1}{\Delta E}q\mathcal{E}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(e^{i\omega t} - 1)\right]$$

Para ΔE usamos $\Delta E = E_1 - E_0$, pues solo contribuye esta energía, así, $\Delta E = \hbar\omega$.
Para $t = T = \pi/\omega$ tenemos,

$$\langle f|U_I(T)|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{1}{\hbar\omega}q\mathcal{E}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\cancelto{-1}{e^{i\pi}} - 1)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 - q\mathcal{E}\sqrt{\frac{2}{2m\omega^3\hbar}}\right]$$

Así, la probabilidad de transición es,

$$\omega(\Psi(0) \to |1\rangle, T = \frac{\pi}{\omega}) = \frac{1}{2}\left|1 - q\mathcal{E}\sqrt{\tfrac{2}{2m\omega^3\hbar}}\right|^2 \checkmark$$

Apartado (b)

Como nos piden los posibles valores de la medida de O a orden $\mathcal{O}(\mathcal{E}^2)$. debemos calcular los autovalores de O. Para ello, vemos cómo actúa O sobre $|0\rangle$ y $|1\rangle$:

$$O\,|0\rangle = |0\rangle\,\cancelto{0}{\langle 1|0\rangle} + |1\rangle\,\cancelto{1}{\langle 1|1\rangle} = |1\rangle$$

$$0\,|1\rangle = |0\rangle\,\cancelto{1}{\langle 1|1\rangle} + |1\rangle\,\cancelto{0}{\langle 0|1\rangle} = |0\rangle$$

Por tanto, el observable O se puede escribir en forma matricial, en la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, como

$$O = \begin{pmatrix} \langle 0|O|0\rangle & \langle 0|O|1\rangle \\ \langle 1|O|0\rangle & \langle 1|O|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancelto{0}{\langle 0|1\rangle} & \cancelto{1}{\langle 0|0\rangle} \\ \cancelto{1}{\langle 1|1\rangle} & \cancelto{0}{\langle 1|0\rangle} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el polinomio característico $\left|\lambda \cdot O - \mathbb{I}\right| = 0$ y obtenemos los autovalores,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$

Luego, las posibles medidas del observable O son $o_+ = +1$ y $o_- = -1$. ✓

Ahora calculamos los autovectores, pues nos van a servir para calcular la probabilidad de medir cada autovalor:

$o_+ = +1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} x - y = 0; \\ x = y = \gamma; \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |o_+\rangle = |0\rangle + |1\rangle \Longrightarrow |o_+\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$o_- = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} x + y = 0; \\ x = -y = \gamma; \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad |o_-\rangle = |0\rangle - |1\rangle \Longrightarrow |o_-\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - 0\,|1\rangle)$$

Por tanto, tenemos los autovectres

$$|o_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$
$$|o_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

Nos piden que hagamos los cálculos a orden $O(\mathcal{E}^2)$, por lo que deberemos calcular $|\Psi(T)\rangle$ a este orden:

$$\begin{aligned} |\Psi(T)\rangle &= |0\rangle + c_1\,|1\rangle + \dots = |0\rangle - \left(\tfrac{i}{\hbar}\int_0^T dt e^{\frac{i}{\hbar}\Delta E \cdot t}\,\langle 1|V|0\rangle\right)|1\rangle + \dots = \\ &= |0\rangle - \tfrac{\cancel{i}/\cancel{\hbar}}{\cancel{\hbar}/\cancel{i}}\tfrac{\left(e^{i\omega\pi}-1\right)}{\Delta E}(-q\mathcal{E})\sqrt{\tfrac{\hbar}{2m\omega}}\,|1\rangle + \dots = |0\rangle - \tfrac{2q\mathcal{E}}{\hbar\omega}\sqrt{\tfrac{\hbar}{2m\omega}}\,|1\rangle + \dots \end{aligned}$$

Debemos normalizar el estado,

$$N^2 = \langle\Psi(T)|\Psi(T)\rangle = \left[\langle 0| - \frac{2q\mathcal{E}}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle 1|\right]\left[|0\rangle - \frac{2q\mathcal{E}}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,|1\rangle\right] = 1 + \frac{4q^2\mathcal{E}^2}{(\hbar\omega)^2}\frac{\hbar}{2m\omega}$$

Por tanto el estado final normalizado a orden $\mathcal{O}(\mathcal{E}^2)$ queda,

$$|\Psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4q^2\mathcal{E}^2}{(\hbar\omega)^2}\frac{\hbar}{2m\omega}}}\left[|0\rangle - \frac{2q\mathcal{E}}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,|1\rangle\right]$$

Suponemos que el sistema está en el estado $|\Psi(T)\rangle$, por tanto la probabilidad de hallar $o_+ = +1$ será la proyección al cuadrado del autovector $|o_+\rangle$ con $|\Psi(T)\rangle$, y la de $o_- = -1$, será la proyección al cuadrado del autovector $|o_-\rangle$ con $|\Psi(T)\rangle$. Así,

$$\mathcal{P}(\lambda = o_+) = \left|\langle o_+|\Psi(T)\rangle\right|^2; \quad \mathcal{P}(\lambda = o_-) = \left|\langle o_-|\Psi(T)\rangle\right|^2$$

Luego,

$$\langle o_+|\Psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{4q^2\mathcal{E}^2}{(\hbar\omega)^2}\frac{\hbar}{2m\omega}}}\left[\langle 0| + \langle 1|\right]\left[|0\rangle - \frac{2q\mathcal{E}}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,|1\rangle\right] = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{4q^2\mathcal{E}^2}{(\hbar\omega)^2}\frac{\hbar}{2m\omega}}}\left[1 - \frac{2q\mathcal{E}}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right]$$

$$\langle o_-|\Psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{4q^2\mathcal{E}^2}{(\hbar\omega)^2}\frac{\hbar}{2m\omega}}}\left[\langle 0| - \langle 1|\right]\left[|0\rangle - \frac{2q\mathcal{E}}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,|1\rangle\right] = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{4q^2\mathcal{E}^2}{(\hbar\omega)^2}\frac{\hbar}{2m\omega}}}\left[1 + \frac{2q\mathcal{E}}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right]$$

Por tanto las probabilidades son,

$$\mathcal{P}(o_+) = \frac{1}{2\left[1+\frac{4q^2\mathcal{E}^2}{(\hbar\omega)^2}\frac{\hbar}{2m\omega}\right]}\left[1 - \frac{2q\mathcal{E}}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right]^2$$

$$\mathcal{P}(o_-) = \frac{1}{2\left[1+\frac{4q^2\mathcal{E}^2}{(\hbar\omega)^2}\frac{\hbar}{2m\omega}\right]}\left[1 + \frac{2q\mathcal{E}}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right]^2$$

que simplificando quedan,

$$\mathcal{P}(o_+) = \frac{1}{2}\frac{\cancel{1+\frac{4q^2\mathcal{E}^2}{(\hbar\omega)^2}\frac{\hbar}{2m\omega}}}{\cancel{1+\frac{4q^2\mathcal{E}^2}{(\hbar\omega)^2}\frac{\hbar}{2m\omega}}} - \frac{2q\mathcal{E}}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{4q\mathcal{E}}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right]$$

$$\mathcal{P}(o_+) = \frac{1}{2}\frac{\cancel{1+\frac{4q^2\mathcal{E}^2}{(\hbar\omega)^2}\frac{\hbar}{2m\omega}}}{\cancel{1+\frac{4q^2\mathcal{E}^2}{(\hbar\omega)^2}\frac{\hbar}{2m\omega}}} + \frac{2q\mathcal{E}}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{4q\mathcal{E}}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right]$$

Así, las probabilidades son,

$$\mathcal{P}(o_+) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{4q\mathcal{E}}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right]\,; \quad \mathcal{P}(o_-) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{4q\mathcal{E}}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right] \checkmark$$