Evaluación III. Teoría de Campos y Partículas

Rubén Carrión Castro

Abril 2025

1. **En primera aproximación, la amplitud de colisión para un proceso $\varphi\varphi \to \varphi\varphi$ de una partícula sin espín con carga eléctrica e es**

$$\mathcal{M}_{\mathbf{34,12}} = \mathbf{e^2}\left[\frac{(\mathbf{p_1^\mu} + \mathbf{p_3^\mu})(\mathbf{p_{2\mu}} + \mathbf{p_{4\mu}})}{\mathbf{t}} + \frac{(\mathbf{p_1^\mu} + \mathbf{p_4^\mu})(\mathbf{p_{2\mu}} + \mathbf{p_{3\mu}})}{\mathbf{u}}\right]$$

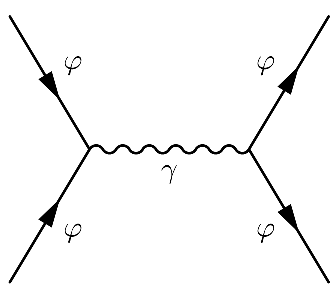
donde e es la intensidad de la interacción y $\mathbf{t}, \mathbf{u}$ son dos de las variables de Mandelstam. Calcula la sección eficaz diferencial. Debe salir el siguiente resultado:

$$\frac{\mathbf{d}\sigma}{\mathbf{d}\boldsymbol{\Omega}} = \frac{\alpha^{\mathbf{2}}}{\mathbf{4s}}\left[\frac{\mathbf{s}-\mathbf{u}}{\mathbf{t}} + \frac{\mathbf{s}-\mathbf{t}}{\mathbf{u}}\right]^{\mathbf{2}}$$

Consideramos un 'scattering' $2 \to 2$, es decir, colisionan dos partículas y generan otras dos, tal que,

$$\varphi + \varphi \to \varphi + \varphi$$

O bien,



donde la partícula de interacción es el fotón, pues las partículas tienen carga y por tanto, estamos en una interacción electromagnética.

Tomamos el sistema de referencia centro de masas,

$$p_1 + p_2 \to p_3 + p_4$$

con $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$, $\vec{p}_3 = -\vec{p}_4$ y $E_1 + E_2 = E_3 + E_4 = E_{CM}$, donde E_{CM} es la energía total en el sistema centro de masas. Entonces,

$$d\Pi_{LIPS} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)\frac{d^3p_3}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_3}\frac{d^3p_4}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_4}$$

Podemos integrar en $\vec{p}_4$ usando la función delta, tal que

$$d\Pi_{LIPS} = \frac{1}{16\pi^2} d\Omega \int dp_f \frac{p_f^2}{E_3} \frac{1}{E_4} \delta(E_3 + E_4 - E_{CM})$$

donde $p_f = |\vec{p}_3| = |\vec{p}_4|$ y $E_3 = \sqrt{m_3^2 + p_f^2}$ y $E_4 = \sqrt{m_4^2 + p_f^2}$. Hacemos ahora un cambio de variable de p_f a $x(p_f) = E_3(p_f) + E_4(p_f) - E_{CM}$. El Jacobiano es

$$\frac{dx}{dp_f} = \frac{d}{dp_f}(E_3 + E_4 - E_{CM}) = \frac{p_f}{E_3} + \frac{p_f}{E_4} = \frac{E_3 + E_4}{E_3 E_4} p_f$$

y entonces, usando $E_3 + E_4 = E_{CM}$, tenemos

$$d\Pi_{LIPS} = \frac{1}{16\pi^2} d\Omega \int_{m_3+m_4-E_{CM}}^{\infty} dx \frac{p_f}{E_{CM}} \delta(x) = \frac{1}{16\pi^2} d\Omega \frac{p_f}{E_{CM}} \Theta(E_{CM} - m_3 - m_4)$$

donde Θ es la función escalón. Luego, la sección eficaz diferencial queda,

$$d\sigma = \frac{1}{2E_1 2E_2 \, |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{1}{16\pi^2} d\Omega \frac{p_f}{E_{CM}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \Theta(E_{CM} - m_3 - m_4)$$

Usando que

$$|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \left| \frac{|\vec{p}_1|}{E_1} + \frac{|\vec{p}_2|}{E_2} \right| = |\vec{p}_i| \, \frac{E_{CM}}{E_1 E_2}$$

tenemos que

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 E_{CM}^2} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} \, |\mathcal{M}_{fi}|^2 \, \Theta(E_{CM} - m_3 - m_4)$$

La función escalón nos dice que el proceso es imposible si la energía del estado inicial, $E_{CM} = E_1 + E_2$, no es suficiente para crear las demás partículas. Como todas las masas son iguales, tenemos que $|\vec{p}_f| = |\vec{p}_i|$, luego

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 E_{CM}^2} |\mathcal{M}_{fi}|^2$$

Luego, para nuestro caso, tendremos pa

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 E_{CM}^2} \left| e^2 \left[\frac{(p_1^\mu + p_3^\mu)(p_{2\mu} + p_{4\mu})}{t} + \frac{(p_1^\mu + p_4^\mu)(p_{2\mu} + p_{3\mu})}{u} \right] \right|^2$$

Por otro lado, la solución depende de α, que es la constante de estructura fina, sabemos que viene dada por,

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$$

donde la hemos puesto en unidades naturales. También, la solución depende de las variables de Mandelstam, que se definen como,

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2; \qquad t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2; \qquad u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2$$

Luego, considerando que los cuadrimomentos vienen dados por,

$$p_1 = (E_1, 0, 0, |\vec{p}_i|); \quad p_2 = (E_2, 0, 0, -|\vec{p}_i|); \quad p_3 = (E_3, |\vec{p}_f| \sin\theta, 0, |\vec{p}_f| \cos\theta); \quad p_4 = (E_4, -|\vec{p}_f| \sin\theta, 0, -|\vec{p}_f| \cos\theta)$$

Tendremos que,

$$s = (p_1 + p_2)^2 = \left(E_1 + \cancel{|\vec{p}_i|} + E_2 - \cancel{|\vec{p}_i|}\right)^2 = E_{CM}^2$$

Pues $E_1 + E_2 = E_{CM}$.

Así, la primera parte de la expresión la podemos reescribir como,

$$\frac{e^4}{64\pi^2 E_{CM}^2} = \frac{\alpha^2}{4E_{CM}^2} = \frac{\alpha^2}{4s}$$

Si desarrollamos la otra parte de la expresión tendremos productos de cuadrimomentos, que los podemos reescribir en función de las variables de Mandelstam, tal que

$$s = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 = 2m_i^2 + 2p_1p_2 \Rightarrow p_1p_2 + m_i^2 = \frac{s}{2}$$

$$s = p_3^2 + p_4^2 + 2p_3p_4 = 2m_f^2 + 2p_3p_4 \Rightarrow p_3p_4 + m_f^2 = \frac{s}{2}$$

$$t = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1p_3 = m_i^2 + m_f^2 - 2p_1p_2 \Rightarrow p_1p_3 = \frac{m_i^2 + m_f^2 - t}{2}$$

$$t = p_2^2 + p_4^2 - 2p_2p_4 = m_i^2 + m_f^2 - 2p_2p_4 \Rightarrow p_2p_4 = \frac{m_i^2 + m_f^2 - t}{2}$$

$$u = p_1^2 + p_4^2 - 2p_1p_4 = m_i^2 + m_f^2 - 2p_1p_4 \Rightarrow p_1p_4 = \frac{m_i^2 + m_f^2 - u}{2}$$

$$u = p_2^2 + p_3^2 - 2p_2p_3 = m_i^2 + m_f^2 - 2p_2p_3 \Rightarrow p_2p_3 = \frac{m_i^2 + m_f^2 - u}{2}$$

En resumen,

$$m_i^2 + (p_1p_2) = m_f^2 + (p_3p_4) = \tfrac{s}{2}$$

$$(p_1p_3) = (p_2p_4) = \tfrac{m_i^2 + m_f^2 - t}{2}$$

$$(p_1p_4) = (p_2p_3) = \tfrac{m_i^2 + m_f^2 - u}{2}$$

Luego, el numerador del primer sumando queda,

$$\begin{aligned}
(p_1 + p_3)(p_2 + p_4) \quad &= p_1p_2 + p_1p_4 + p_3p_2 + p_3p_4 = \\
&= \tfrac{s}{2} - m_i^2 + \tfrac{m_i^2 + m_f^2 - u}{2} + \tfrac{m_i^2 + m_f^2 - u}{2} + \tfrac{s}{2} - m_f^2 = \\
&= s - \cancel{m_i^2} + \cancel{m_i^2} - \cancel{m_f^2} + \cancel{m_f^2} - u = s - u
\end{aligned}$$

El numerador del segundo sumando queda,

$$\begin{aligned}
(p_1 + p_4)(p_2 + p_3) \quad &= p_1p_2 + p_1p_3 + p_4p_2 + p_4p_3 = \\
&= \tfrac{s}{2} - m_i^2 + \tfrac{m_i^2 + m_f^2 - t}{2} + \tfrac{m_i^2 + m_f^2 - t}{2} + \tfrac{s}{2} - m_f^2 = \\
&= s - \cancel{m_i^2} + \cancel{m_i^2} - \cancel{m_f^2} + \cancel{m_f^2} - t = s - t
\end{aligned}$$

Así, juntando todo, obtenemos

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{\alpha^2}{4s}\left[\frac{s-u}{t} + \frac{s-t}{u}\right]^2$$

obteniendo el resultado esperado.