# Evaluación VII. Mecánica Cuántica

Rubén Carrión Castro

Diciembre 2024

1. **La amplitud de dispersión de una partícula con momento $p = 200$ MeV/c es**

$$f(p,\theta,\varphi) = \frac{\hbar}{2p}\left[\left(1 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) + i\left(1 + \frac{9}{2}\cos\theta\right)\right]$$

   (a) **Calcula la sección eficaz total en mb (milibarns).**
   [$\hbar c \approx 200$ **MeV fm,** $1$ **fm** $= 10^{-13}$ **cm,** $1$ **mb**$= 10^{-27}$ **cm**$^2$]

   (b) **¿Se cumple el teorema óptico?**

   (c) **Halla todos los desfajes**

### Apartado (a)

Sabemos que la sección eficaz total viene de integrar la sección eficaz diferencial, que es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|f(p,\theta,\varphi)\right|^2 = \left|f(p,\theta,\varphi) = \tfrac{\hbar}{2p}\left[\left(1 + 3\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) + i\left(1 + \tfrac{9}{2}\cos\theta\right)\right]\right|^2 =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4p^2}\left[\left(1 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(1 + \frac{9}{2}\cos\theta\right)^2\right] = \frac{\hbar^2}{4p^2}\left[1 + \frac{27}{4}\cos^2\theta + 3\sqrt{3}\cos\theta + 1 + \frac{81}{4}\cos^2\theta + 9\cos\theta\right]$$

$$= \frac{\hbar^2}{4p^2}\left[2 + (9 + 3\sqrt{3})\cos\theta + 27\cos^2\theta\right]$$

Por tanto, la sección eficaz total viene dada por,

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\int_0^{2\pi} d\varphi\left|f(p,\theta,\varphi)\right|^2 = \frac{\cancel{2}\pi\hbar^2}{\cancel{4}p^2}\int_{-1}^{1}\left[2 + (9 + 3\sqrt{3})\cos\theta + 27\cos^2\theta\right]d(\cos\theta) =$$

$$= \frac{\hbar^2\pi}{2p^2}\left[2\int_{-1}^{1} d(\cos\theta) + (9 + 3\sqrt{3})\int_{-1}^{1}\cos\theta d(\cos\theta) + 27\int_{-1}^{1}\cos^2\theta d(\cos\theta)\right] =$$

Vamos a hacer el cambio de variable $x = \cos\theta$.

$$= \frac{\hbar^2\pi}{2p^2}\left[2\int_{-1}^{1} dx + (9 + 3\sqrt{3})\int_{-1}^{1} x\cdot dx + 27\int_{-1}^{1} x^2 dx\right] =$$

$$= \frac{\hbar^2\pi}{2p^2}\left[2\left. x\right|_{-1}^{1} + \frac{9 + 3\sqrt{3}}{2}\left. x^2\right|_{-1}^{1} + \frac{27}{3}\left. x^3\right|_{-1}^{1}\right] =$$

$$= \frac{\hbar^2 \pi}{2p^2}\left[4+18\right] = \frac{22\hbar^2\pi}{2p^2} = \frac{11\pi(\hbar c)^2}{(pc)^2} \overset{\left\{\begin{matrix}\hbar c \approx 200 \text{ MeV fm} \\ p = 200 \text{ MeV/c} \\ \Rightarrow pc = 200 \text{ MeV}\end{matrix}\right\}}{=} 11\pi \text{ fm}^2$$

Sabiendo que 1 fm$= 10^{-13}$ cm y que 1 mb$= 10^{-27}$ cm$^2$, tenemos que 1 fm$^2$ $= 10^{-2}$ b$=$ 10 mb. Por tanto, la sección eficaz total queda,

$$\sigma = 11\pi \text{ fm}^2 = 11\pi \cdot 10 \text{ mb} = 345,57 \text{ mb}$$

**Apartado (b)**

EL Teorema Óptico establece que,

$$Im[f(p, \theta = 0, \varphi)] = \frac{p}{4\pi\hbar}\sigma$$

Por tanto, comprobamos si esto se cumple:

$$Im[f(p, \theta = 0\varphi)] = \frac{\hbar}{2p}\left(1 + \frac{9}{2}\cos(0)\right) = \frac{11\hbar}{4p}$$

Por otra parte,

$$\frac{p}{4\pi\hbar}\sigma = \frac{\cancel{p}}{4\cancel{\pi}\cancel{\hbar}}\frac{11\cancel{\pi}\hbar^{\cancel{2}}}{p^{\cancel{2}}} = \frac{11\hbar}{4p}$$

Por tanto, vemos que ambas cantidades son iguales, por lo que se cumple el Teorema Óptico.

**Apartado (c)**

Sabemos que la amplitud de dispersión la podemos reescribir como,

$$f(p,\theta,\varphi) = \frac{\hbar}{2ip}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left(e^{2i\delta_l} - 1\right)\mathcal{P}_l(\cos\theta)$$

donde $P_l(\cos\theta)$ son los polinomios de Legendre, tal que

$$\begin{gathered}\mathcal{P}_0(\cos\theta) = 1 \\ \mathcal{P}_1(\cos\theta) = \cos\theta \\ \mathcal{P}_2(\cos\theta) = \tfrac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \\ \vdots\end{gathered}$$

Por comparación con nuestra amplitud de dispersión que es,

$$f(p,\theta,\varphi) = \frac{\hbar}{2p}\left[\left(1 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) + i\left(1 + \frac{9}{2}\cos\theta\right)\right]$$

vemos que los términos distintos de cero son $l = 0, 1$. Luego, tenemos

$$f(p,\theta,\varphi) = -\frac{i\hbar}{2p}\left[\left(\cos(2\delta_0) + i\sin(2\delta_0) - 1\right) + 3\left(\cos(2\delta_1) + i\sin(2\delta_1) - 1\right)\cos\theta\right] =$$

$$= \frac{\hbar}{2p}\left[\left(\sin(2\delta_0) + 3\sin(2\delta_1)\cos\theta\right) + i\left(1 - \cos(2\delta_0) + (3 - 3\cos(2\delta_1))\cos\theta\right)\right]$$

Por tanto, podemos igualar las partes reales e imaginarias (obviando la constante $\hbar/(2p)$, que es la misma),

$$1+\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\sin(2\delta_0)+3\sin(2\delta_1)\cos\theta$$

y

$$1+\frac{9}{2}\cos\theta=1-\cos(2\delta_0)+(3-3\cos(2\delta_1))\cos\theta$$

Vamos a comparar la igualdad de la parte real,

$$0:\quad 1=\sin(2\delta_0)\Rightarrow 2\delta_0=\arcsin(1)=\tfrac{(2n+1)\pi}{2};n\in\mathbb{Z}\Rightarrow\delta_0=\tfrac{(2n+1)\pi}{4};n\in\mathbb{Z}$$

$$\cos\theta:\quad 3\sqrt{3}/2=3\sin(2\delta_1)\Rightarrow 2\delta_1=\arcsin(\sqrt{3}/2)=2n\pi\pm\tfrac{2\pi}{3};n\in\mathbb{Z}\Rightarrow\delta_1=n\pi\pm\tfrac{\pi}{3};n\in\mathbb{Z}$$

Podemos comprobar los valores en la parte imaginaria, tal que

$$1-\cancelto{1}{\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}+(3-3\cancelto{-1/2}{\cos\left(2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}\right)}\cos\theta=1+\frac{9}{2}\cos\theta$$

Por tanto, los posibles desfajes son,

$$\delta_0=\frac{(2n+1)\pi}{4};\qquad\delta_1=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

con $n\in\mathbb{Z}$.

Vamos a quedarnos con $n=0$ y la parte positiva (pues queremos el ángulo antihorario), luego, los desfajes son,

$$\delta_0=\pi/4;\qquad\delta_1=\pi/3$$