

③ Sea ϕ un campo complejo cuya dinámica está gobernada por el Lagrangiano,

$$L = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{\lambda}{2} (\phi^* \phi)^2$$

a) Escribe las ecuaciones de Euler-Lagrange para el sistema.

Como podemos tratar los campos de forma independiente, tenemos un sistema de dos ecuaciones de Euler-Lagrange así

~~$$\frac{\partial L}{\partial \phi} \quad \text{Para } \phi \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0$$~~

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -m^2 \phi^* - \lambda \phi^* (\phi^* \phi) \quad \cancel{\text{cancelar } \partial_\mu \phi^* \text{ y } \partial_\mu \phi} \quad \rightarrow A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu$$

$$\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \cancel{\partial_\mu \phi} = \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) = \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi) = \partial^\mu \phi^*$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = \partial_\mu \partial^\mu \phi^*$$

Así queda, $-m^2 \phi^* - \lambda \phi^* (\phi^* \phi) - \square \phi^* = 0$; $\boxed{m^2 \phi^* + \lambda \phi^* (\phi^* \phi) + \square \phi^* = 0}$

Equivalentemente, para ϕ :

$$\boxed{m^2 \phi + \lambda \phi (\phi \phi^*) + \square \phi = 0}$$

b) Encuentra una solución perturbativa de las mismas hasta orden λ^2 .

Tenemos el sistema de ecuaciones, ~~\square~~ $(\square + m^2)\phi = -\lambda\phi(\phi\phi^*)$ (

Que vemos que lo podemos interpretar $(\square + m^2)\phi^* = -\lambda\phi^*(\phi^*\phi)$ (

como una perturbación de la ecuación inhomogénea de Klein-Gordon, $(\square + m^2)\phi_0 = 0$,
uya solución es,

$$\phi_0(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ip^mu} + a_{\vec{p}}^+ e^{ip^mu} \right) ; (a_{\vec{p}})^* = a_{\vec{p}}^+ ; (a_{\vec{p}}^+)^* = a_{\vec{p}}$$

que será la solución a orden λ^0 .

$$\phi_0^*(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}^* e^{-ip^+x^u} + a_{\vec{p}} e^{ip^+x^u} \right)^* = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}^+ e^{+ip^+x^u} + a_{\vec{p}} e^{-ip^+x^u} \right)$$

Entonces, $\phi_0 = \phi_0^*$, por lo que no ~~se~~ será un campo complejo

Para Δ^2 , tenemos la ecuación $(\Delta + m^2)\phi_2 = (\phi_0^* \phi_0)\phi_0$, luego

$$(\Delta + m^2)\phi_2 = \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 r}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{8 E_p E_q E_r}} \left[a_p^* a_q^* a_r^* e^{-i(p+q+r) \cdot x} + a_p^* a_q^* a_r^* e^{-i(p+q-r) \cdot x} + a_p^* a_q^* a_r^* e^{-i(p-q+r) \cdot x} + a_p^* a_q^* a_r^* e^{-i(-p+q+r) \cdot x} + a_p^* a_q^* a_r^* e^{-i(-p-q+r) \cdot x} + a_p^* a_q^* a_r^* e^{-i(-p-q-r) \cdot x} + a_p^* a_q^* a_r^* e^{-i(p-q-r) \cdot x} + a_p^* a_q^* a_r^* e^{-i(p-q+r) \cdot x} + a_p^* a_q^* a_r^* e^{-i(p-q-r) \cdot x} \right]$$

~~Sabemos que $[a_i^*, a_j^*] = (2\pi)^3 \delta^3(p^i - q^j)$, $[a_i^*, a_j] = 0$, $[a_i, a_j^*] = 0$~~

Vamos a considerar $(\Delta + m^2)\phi_2 = S(x)$ para simplificar los cálculos.

Sabemos que al tener una ecuación de Klein-Gordon inhomogénea,

la solución será $\phi_2(x) = \int d^4 y G(x-y) S(y)$ donde $G(x-y)$ es una función

de Green de la forma $G(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

Así, la solución a orden 2 será

$$\phi = \phi_0 + \Delta \phi_2 = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \left(a_p^* e^{-ipx} + a_p^* e^{ipx} \right) + \int \frac{d^4 y d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} S(y)$$

donde $S(y) = (\phi_0^* \phi_0) \phi_0$

(Cálculos de estas soluciones en el ejercicio 1)

c) Verifica que el Lagrangiano es invariante bajo la transformación $\phi'(x) = e^{ix}\phi(x)$, $\phi^{*1}(x) = e^{-ix}\phi^*(x)$ con $x \in \mathbb{R}$

Entonces veremos si $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ donde $\mathcal{L}' = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi' - m^2 \phi^* \phi' - \frac{1}{2} (\phi^* \phi')^2$

Luego,

$$\mathcal{L}' = \partial_\mu (\phi^* e^{-ix}) \partial^\mu (\phi e^{ix}) - m^2 (\phi^* e^{-ix})(\phi e^{ix}) - \frac{1}{2} (\phi^* e^{-ix} \phi e^{ix})^2 = \\ = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{2} (\phi^* \phi)^2$$

pues $x \in \mathbb{R}$, así $\partial_\mu e^{ix} = 0$.

d) Encuentra la corriente de Noether asociada a esta transformación y verifica explícitamente que es conservada cuando se verifican las ecuaciones de E-L.

Sabemos que para transformaciones generales $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$, la corriente de Noether asociada es $J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta\phi$, entonces para nuestras transformaciones,

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi \cdot e^{ix} \approx \phi + ix\phi \Rightarrow \delta\phi = ix\phi$$

$$\phi^* \rightarrow \phi^{*1} = \phi^* e^{-ix} \approx \phi^* - ix\phi^* \Rightarrow \delta\phi^* = -ix\phi^*$$

Por tanto,

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \delta\phi^* = \partial^\mu \phi^* \cdot \delta\phi + \partial^\mu \phi \cdot \delta\phi^* = ix\phi \partial^\mu \phi^* - ix\phi^* \partial^\mu \phi$$

Así, $\boxed{J^\mu = ix(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi)}$

Suponiendo que satisfacen E-L, daremos ver que $\partial_\mu J^\mu = 0$, luego

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu [ix(\bar{\phi} \partial^\mu \bar{\phi}^* - \bar{\phi}^* \partial^\mu \bar{\phi})] = ix \left[\bar{\phi} \partial^\mu \bar{\phi}^* + \bar{\phi}^* \partial^\mu \bar{\phi} - \cancel{\partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \bar{\phi}} - \cancel{\bar{\phi}^* \partial^\mu \bar{\phi}} \right] = \\ = ix \left\{ \cancel{\bar{\phi} \partial^\mu \bar{\phi}^*} \bar{\phi} (m^2 \bar{\phi}^* + \lambda \bar{\phi}^* (\bar{\phi}^* \bar{\phi})) - \cancel{\bar{\phi}^* \partial^\mu \bar{\phi}} (\bar{\phi}^* \bar{\phi} + \lambda \bar{\phi} (\bar{\phi}^* \bar{\phi})) \right\} = \\ = ix \left\{ \cancel{m^2 \bar{\phi} \bar{\phi}^*} + \cancel{\lambda \bar{\phi}^* \bar{\phi}^2} - \cancel{m^2 \bar{\phi}^* \bar{\phi}} - \cancel{\lambda \bar{\phi}^2 \bar{\phi}^*} \right\} = 0 \quad \checkmark$$

Luego, la corriente es conservada //