Evaluación III. Mecánica Cuántica

Rubén Carrión Castro

Noviembre 2024

1. **Un pion ($\mathbf{J^P_\pi = 0^-}$) se desintegra a dos fotones $\mathbf{J^P_\gamma = 1^-}$ conservando paridad:**

$$\pi^{\mathbf{0}} \to \gamma + \gamma$$

   (a) **¿Cuál será el momento angular orbital y el momento angular de espín de los dos fotones? Determina el estado $|\mathbf{\Psi}\rangle \in \mathcal{H}^{\mathbf{l}} \otimes \mathcal{H}^{\mathbf{s_1}} \otimes \mathcal{H}^{\mathbf{s_2}}$ que lo describe.**

   (b) **Encuentra la distribución angular de los fotones. Determina el estado de espín de los fotones que salen en la dirección del eje Z**.

Apartado (a)

Como el pion está solo en los reactivos, debe tener $l_i = 0$, pues también consideramos que está en el estado fundamental. Así, tenemos entonces que,

$$\begin{array}{rcl} \pi^0 & \to & \gamma + \gamma \\ \textbf{Paridad}: \quad (-) & \to & (-)(-)(-)^l \implies (-)^l = (-) \Rightarrow l \equiv \text{impar} \end{array}$$

Ahora, aplicamos conservación del momento angular total, es decir, $J_i = J_f$, de forma que

$$J_i = 0 = J_f = l_f \otimes s_f = l_f \otimes s_1 \otimes s_2$$

Por tanto, $l_f = 0, 1, 2$ y $s_f = 0, 1, 2 = s_1 \otimes s_2$. Como los fotones son bosones, deberán tener una función de onda simétrica, pues son partículas indistinguibles, así tenemos que

$$\Psi_S \to (+) = (-1)^{l_f} (-)^{s_f} \implies l_f + s_f \equiv \text{par}$$

Como l_f es impar, entonces s_f también es impar, pues $(2n+1)+(2m+1) = 2(n+m+2) = 2k$, donde $k, n, m \in \mathbb{Z}$, es decir, la suma de dos números impares da siempre uno par.
Por tanto, la única opción, al ser $l_f, s_f = 0, 1, 2$, será $l_f = 1$ y $s_f = 1$. ✓

Ahora vamos a determinar el estado $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^l \otimes \mathcal{H}^{s_1} \otimes \mathcal{H}^{s_2}$. Sabemos que $l_f = 1$ y $s_f = 1$, por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} |l_f, m\rangle &= \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1,-1\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1,1\rangle \\ |s_f, s_{fz}\rangle &= \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1,-1\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1,1\rangle \end{aligned}$$

donde hemos normalizado los estados.
Por tanto, el estado compuesto será,

$$\begin{aligned} |J, M\rangle &= |l_f, m\rangle \otimes |s_f, s_{fz}\rangle = |l_f, l_{fz}; s_f, s_{fz}\rangle = \\ |0,0\rangle &= \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1,-1;1,-1\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1,0;1,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1,1;1,1\rangle \end{aligned}$$

donde hemos usado los coeficientes de Clebsch-Gordan para un estado $1 \otimes 1$ con $\{J, M\} = \{0, 0\}$, y no hay términos cruzados porque son ortogonales.

Como nos piden el estado en la base $|l, m; s_1, s_{z_1}; s_2, s_{z_2}\rangle \in \mathcal{H}^l \otimes \mathcal{H}^{s_1} \otimes \mathcal{H}^{s_2}$, debemos hacer un cambio de base, de forma que $\mathcal{H}^{s_f} = \mathcal{H}^{s_1} \otimes \mathcal{H}^{s_2}$, tal que

$$\begin{aligned}
|s_f, s_{fz}\rangle &= |s_1, s_{z_1}\rangle \otimes |s_2, s_{z_2}\rangle = |s_1, s_{z_1}; s_2, s_{z_2}\rangle = |1, s_{z_1}; 1, s_{z_2}\rangle \\
|1, 1\rangle &= \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, |1, 1; 1, 0\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, |1, 0; 1, 1\rangle \\
|1, 0\rangle &= \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, |1, 1; 1, -1\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, |1, -1; 1, 1\rangle \\
|1, -1\rangle &= \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, |1, 0; 1, -1\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, |1, -1; 1, 0\rangle
\end{aligned}$$

Por tanto, el estado final será,

$$\begin{aligned}
|0, 0\rangle &= \sqrt{\tfrac{1}{6}}[|1, -1; 1, 1; 1, 0\rangle - |1, -1; 1, 0, 1, 1\rangle - |1, 0; 1, 1; 1, -1\rangle + \\
&\quad + |1, 0; 1, -1; 1, 1\rangle + |1, 1; 1, 0; 1, -1\rangle - |1, 1; 1, -1; 1, 0\rangle] \quad \checkmark
\end{aligned}$$

donde hemos normalizado el estado.

Apartado (b)

La distribución angular de los fotones viene dada por

$$\begin{aligned}
I(\theta, \varphi) &= \langle 0, 0|\mathcal{P}_{\theta,\varphi}|0, 0\rangle = \langle 0, 0|\theta, \varphi\rangle \langle \theta, \varphi| \otimes \mathbb{I}_{s_f}|0, 0\rangle = \langle 0, 0|\theta, \varphi\rangle \langle \theta, \varphi|0, 0\rangle = \\
&= \tfrac{1}{3}\left|Y_1^1\right|^2 + \tfrac{1}{3}\left|Y_1^0\right|^2 + \tfrac{1}{3}\left|Y_1^{-1}\right|^2 = \tfrac{1}{3}\left\{\left|Y_1^1\right|^2 + \left|Y_1^0\right|^2 + \left|Y_1^{-1}\right|^2\right\} = \\
&= \tfrac{1}{3}\left\{\tfrac{3}{8\pi}\sin^2\theta + \tfrac{3}{8\pi}\sin^2\theta + \tfrac{3}{4\pi}\cos^2\theta\right\} = \tfrac{1}{4\pi}\left\{\cancelto{1}{\sin^2\theta + \cos^2\theta}\right\} = \tfrac{1}{4\pi} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Ahora vamos a determinar el estado de espín de los fotones que salen en la dirección del eje Z, es decir, los que salen paralelos al eje Z, que será cuando $\theta = 0$, pues al estar trabajando en coordenadas esféricas, la dirección cartesiana del eje Z se consigue haciendo este ángulo cero. Por tanto, debemos proyectar en la parte de momento angular orbital l, de forma que, usando $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^{s_f}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \theta = 0, \varphi|\Psi\rangle &= \langle 0, \varphi|0, 0\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, |1, -1\rangle \cancelto{0}{Y_1^1(\theta = 0)} - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, |1, 0\rangle\, Y_1^0(\theta = 0) + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, |1, 1\rangle \cancelto{0}{Y_1^{-1}(\theta = 0} = \\
&\sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(-\sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\, |1, 0\rangle\right) = -\sqrt{\tfrac{1}{4\pi}}\, |1, 0\rangle
\end{aligned}$$

que debemos normalizar, tal que

$$|\Psi\rangle = -\,|1, 0\rangle \in \mathcal{H}^{s_f}$$

Por tanto, debemos pasar a la base $\mathcal{H}^{s_1} \otimes \mathcal{H}^{s_2}$, tal que

$$|\Psi'\rangle = -\sqrt{\frac{1}{2}}\, |1, 1; 1, -1\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\, |1, -1; 1, 1\rangle \in \mathcal{H}^{s_1} \otimes \mathcal{H}^{s_2} \quad \checkmark$$