Evaluación II. Teoría de Campos y Partículas

Rubén Carrión Castro

Marzo 2025

1. **Considera las transformaciones de Lorentz $\mathbf{R_x}(\phi)$ y $\mathbf{B_z}(\eta)$, cuya actuación sobre espinores LH están dadas por las matrices $\mathbf{R_x}(\phi) \doteq \exp\left(-\mathbf{i}\phi\sigma_1/2\right)$ y $\mathbf{B_z}(\eta) \doteq \exp\left(-\eta\sigma_3/2\right)$, respectivamente. Considerando la correspondiente actuación sobre vectores, muestra que $\mathbf{R_x}(\phi)$ es una rotación en el plano $\mathbf{y}-\mathbf{z}$ de ángulo ϕ y que $\mathbf{B_z}(\eta)$ es un boost en dirección z con rapidity η. ¿Cuáles son las matrices que implementan la actuación de estas transformaciones sobre espinores RH?**

Debemos ver que $R_x(\phi)$ y $B_z(\eta)$ son rotaciones en el plano $y-z$ de ángulo ϕ y boosts en dirección z con rapidity η, respectivamente.

Sabemos que el grupo de Poincaré es el $SL(2,\mathbb{C})$, pero si trabajamos de forma local, podemos encontrar el grupo $SO(1,3)^{\uparrow}$, isomorfo localmente a $SL(2,\mathbb{C})$; luego trabajaremos en este grupo, donde las transformaciones de Lorentz, de forma general, son Λ^{μ}_{ν} y cumplen que

$$\det\Lambda = 1; \quad \Lambda^0_0 > 0$$

Los elementos del grupo de Lorentz se escribirán de la forma (Λ, a).

Además, sabemos que las rotaciones tienen la forma,

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I} & 0 \\ \hline 0 & R \end{array}\right)$$

donde R es la matriz de rotaciones 2×2; y los boosts son de la forma,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\eta & 0 & 0 & \sinh\eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\eta & 0 & 0 & \cosh\eta \end{pmatrix}$$

Tendremos subgrupos, cuyos elementos vienen dados por, $(\sigma_\mu)_{\dot{\alpha}\alpha} \equiv \sigma_\mu \equiv (I,\vec{\sigma})_\mu$ y $(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \equiv \bar{\sigma}_\mu \equiv (I,-\vec{\sigma})_\mu$, donde $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli, que son,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Además, $\sigma^i = -\sigma_i$, pero $\bar{\sigma}^i = -\sigma^i$, luego $\bar{\sigma}^i = \sigma_i$. Por otro lado, una transformación N puede descomponerse infinitesimalmente, tal que

$$N \approx \mathbb{I} + M + O(M^2) \approx e^M + O(M^2)$$

donde sabemos que $\det N = 1 = \det e^{TrM}$, luego, $TrM = 0$. Luego, podemos definir una base compleja del espacio vectorial de las matrices M, tal que

$$B_{\mathbb{C},M} = \left\{ i\frac{\sigma_j}{2}; j = 1,2,3 \right\}$$

con

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}$$

Luego, deberemos ver que $R_x(\phi)$ y $B_z(\eta)$ tienen la forma anteriormente descrita. Comenzamos con $R_x(\phi)$:

$$\begin{aligned}
R_x(\phi) &\doteq e^{-i\phi\frac{\sigma_1}{2}} = \cos\left(\phi\tfrac{\sigma_1}{2}\right) - i\sin\left(\phi\tfrac{\sigma_1}{2}\right) \approx \\
&\approx \sum_k \tfrac{(-1)^k\left(\phi\frac{\sigma_1}{2}\right)^{2k}}{(2k)!} - i\sum_k \tfrac{(-1)^k\left(\phi\frac{\sigma_1}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_k \tfrac{(-1)^k\phi^{2k}\mathbb{I}}{2^{2k}(2k!)} - i\sum_k \tfrac{(-1)^k\phi^{2k+1}\sigma_1}{2^{2k+1}(2k+1)!} = \\
&= \mathbb{I}\sum_k \tfrac{(-1)^k\phi^{2k}}{2^{2k}(2k!)} - i\sigma_1\sum_k \tfrac{(-1)^k\phi^{2k+1}}{2^{2k+1}(2k+1)!} = \mathbb{I}\cos\tfrac{\phi}{2} - i\sigma_1\sin\tfrac{\phi}{2} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos\phi/2 & 0 \\ 0 & \cos\phi/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\sin\phi/2 \\ -i\sin\phi/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi/2 & -i\sin\phi/2 \\ -i\sin\phi/2 & \cos\phi/2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Para pasar a las rotaciones en 4 dimensiones, usamos que

$$\Lambda^\mu_\nu = \frac{1}{2}Tr(\bar{\sigma}^\mu g\sigma_\nu g^\dagger)$$

donde g es un elemento de $SL(2,\mathbb{C})$, ver la sección 1 para ver de donde viene esta fórmula. Particularizando para $R_x(\phi)$, tendremos que

$$\Lambda^\mu_\nu = \frac{1}{2}Tr(\bar{\sigma}^\mu R_x\sigma_\nu R_x^\dagger)$$

donde esta fórmula servirá para calcular las componentes de Λ. Como la parte temporal no cambia, $\Lambda^0_0 = 1$ y $\Lambda^i_0 = \Lambda^0_i = 0$. Luego, para $\mu = \nu = i$:

$$\begin{aligned}
&\Lambda^i_i = \tfrac{1}{2}Tr(\bar{\sigma}^i R_x\sigma_i R_x^\dagger) = \tfrac{1}{2}\left\{ \overbrace{Tr\left[\bar{\sigma}^1 R_x\sigma_1 R_x^\dagger\right]}^{\Lambda^1_1}, \overbrace{\left[\bar{\sigma}^2 R_x\sigma_2 R_x^\dagger\right]}^{\Lambda^2_2}, \overbrace{\left[\bar{\sigma}^3 R_x\sigma_3 R_x^\dagger\right]}^{\Lambda^3_3} \right\} = \\
&= \tfrac{1}{2}\left\{ Tr\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi/2 & -i\sin\phi/2 \\ -i\sin\phi/2 & \cos\phi/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi/2 & i\sin\phi/2 \\ i\sin\phi/2 & \cos\phi/2 \end{pmatrix} \right], \right. \\
&Tr\left[\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi/2 & -i\sin\phi/2 \\ -i\sin\phi/2 & \cos\phi/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi/2 & i\sin\phi/2 \\ i\sin\phi/2 & \cos\phi/2 \end{pmatrix} \right], \\
&\left. Tr\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi/2 & -i\sin\phi/2 \\ -i\sin\phi/2 & \cos\phi/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi/2 & i\sin\phi/2 \\ i\sin\phi/2 & \cos\phi/2 \end{pmatrix} \right] \right\} = \\
&= \tfrac{1}{2}\left\{ Tr\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right], Tr\left[\begin{pmatrix} \cos\phi & -i\sin\phi \\ -i\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \right], Tr\left[\begin{pmatrix} \cos\phi & i\sin\phi \\ i\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \right] \right\} = \\
&= (1, \cos\phi, \cos\phi)
\end{aligned}$$

Luego, $\Lambda^1_1 = 1$ y $\Lambda^2_2 = \Lambda^3_3 = \cos\phi$.

Ahora, para $\mu = i \neq \nu = j$:

$$\mu = 1, \nu = 2 \quad \Lambda^2_1 = \tfrac{1}{2} Tr\left[\bar{\sigma}^1 R_x \sigma_2 R_x^\dagger\right] = \tfrac{1}{2} Tr\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi/2 & -i\sin\phi/2 \\ -i\sin\phi/2 & \cos\phi/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi/2 & i\sin\phi/2 \\ i\sin\phi/2 & \cos\phi/2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2} Tr\left[\begin{pmatrix} -i\cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & i\cos\phi \end{pmatrix}\right] = 0 == \Lambda^1_2$$

$$\mu = 1, \nu = 3 \quad \Lambda^3_1 = \tfrac{1}{2} Tr\left[\bar{\sigma}^1 R_x \sigma_3 R_x^\dagger\right] = \tfrac{1}{2} Tr\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi/2 & -i\sin\phi/2 \\ -i\sin\phi/2 & \cos\phi/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi/2 & i\sin\phi/2 \\ i\sin\phi/2 & \cos\phi/2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= Tr\left[\begin{pmatrix} -i\sin\phi & -\cos\phi \\ \cos\phi & i\sin\phi \end{pmatrix}\right] = 0 = \Lambda^1_3$$

$$\mu = 2, \nu = 3 \quad \Lambda^3_2 = \tfrac{1}{2} Tr\left[\bar{\sigma}^2 R_x \sigma_3 R_x^\dagger\right] = \tfrac{1}{2} Tr\left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi/2 & -i\sin\phi/2 \\ -i\sin\phi/2 & \cos\phi/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi/2 & i\sin\phi/2 \\ i\sin\phi/2 & \cos\phi/2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2} Tr\left[\begin{pmatrix} -\sin\phi & i\cos\phi \\ i\cos\phi & -\sin\phi \end{pmatrix}\right] = -\sin\phi$$

$$\Lambda^2_3 = \tfrac{1}{2} Tr\left[\bar{\sigma}^2 R_x \sigma_3 R_x^\dagger\right] = \tfrac{1}{2} Tr\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi/2 & -i\sin\phi/2 \\ -i\sin\phi/2 & \cos\phi/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi/2 & i\sin\phi/2 \\ i\sin\phi/2 & \cos\phi/2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2} Tr\left[\begin{pmatrix} \sin\phi & -i\cos\phi \\ -i\cos\phi & \sin\phi \end{pmatrix}\right] = \sin\phi$$

El cálculo de las matrices se encuentra en 2. Por tanto, la matriz de Lorentz para $R_x(\phi)$ será,

$$\Lambda(R_x(\phi)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

que, efectivamente, corresponde a una rotación en el plano $y - z$ de ángulo ϕ.

Veamos ahora la matriz de $B_z(\eta)$:

$$B_z(\eta) \quad \doteq e^{-\eta\frac{\sigma_3}{2}} = \cosh\left(\eta\tfrac{\sigma_3}{2}\right) - \sin\left(\eta\tfrac{\sigma_3}{2}\right) \approx$$

$$\approx \sum_k \frac{\left(\eta\frac{\sigma_3}{2}\right)^{2k}}{(2k)!} - \sum_k \frac{\left(\eta\frac{\sigma_3}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_k \frac{\eta^{2k}\mathbb{I}}{2^{2k}(2k!)} - \sum_k \frac{\eta^{2k+1}\sigma_3}{2^{2k+1}(2k+1)!} =$$

$$= \mathbb{I}\sum_k \frac{\eta^{2k}}{2^{2k}(2k!)} - \sigma_3 \sum_k \frac{(-1)^k\eta^{2k+1}}{2^{2k+1}(2k+1)!} = \mathbb{I}\cosh\tfrac{\eta}{2} - \sigma_3 \sin\tfrac{\eta}{2} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh\eta/2 & 0 \\ 0 & \cosh\eta/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sinh\eta/2 & 0 \\ 0 & \sinh\eta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\eta/2 - \sinh\eta/2 & 0 \\ 0 & \cosh\eta/2 + \sinh\eta/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-\eta/2} & 0 \\ 0 & e^{\eta/2} \end{pmatrix}$$

Volvemos a usar la fórmula de la traza, tal que

$$\Lambda^\mu_\nu = \frac{1}{2} Tr\left[\bar{\sigma}^\mu B_z \sigma_\nu B_z^\dagger\right]$$

Realizando los cálculos (ver la sección 3), obtenemos

$$\Lambda(B_z(\eta)) = \begin{pmatrix} \cosh\eta & 0 & 0 & \sinh\eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\eta & 0 & 0 & \cosh\eta \end{pmatrix}$$

que, efectivamente, corresponde a un boost con rapidity η.

Una vez demostrado la primera parte, procedemos a calcular $R_x(\phi)$ y $B_z(\eta)$ en la representación RH.

Sabemos que las representaciones LH y RH vienen dadas por,

$$LH \to \begin{cases} [\rho(N)\varphi]_\alpha = N_\alpha^\beta \varphi_\beta \\ [\rho'(N)\varphi]^\alpha = \left(\left(N^{-1}\right)^T\right)^\alpha_{\ \beta} \varphi^\beta \end{cases}$$

$$RH \to \begin{cases} [\bar{\rho}(N)\bar{\chi}]_{\dot{\alpha}} = (N^*)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \dot{\chi}_{\dot{\beta}} \\ [\bar{\rho}'(N)\bar{\chi}]^{\dot{\alpha}} = \left(\left(N^\dagger\right)^{-1}\right)^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}} \end{cases}$$

donde φ y $\bar{\chi}$ son espinores. Hemos escrito dos tipos de espinores para cada representación porque son equivalentes.

En el enunciado nos dicen que las transformaciones $R_x(\phi)$ y $B_z(\eta)$ en la representación LH vienen dadas por

$$R_x(\phi) \doteq e^{-i\phi\frac{\sigma_1}{2}}; \quad B_z(\eta) \doteq e^{-\eta\frac{\sigma_3}{2}}$$

y nos piden ver cómo son estas matrices en la representación RH. Vamos a considerar $N = e^M$, tomando la base antes descrita para las M, tal que

$$M = \sum_{k=1}^{3} i\lambda_k \frac{\sigma_k}{2}$$

donde los λ_i son los coeficientes.

Vemos que, para un espinor general LH tenemos,

$$\rho(N)\varphi = \varphi \exp\left(\sum_{k=1}^{3} i\lambda_k \frac{\sigma_k}{2}\right)$$

donde hemos suprimido los índices. Luego, por comparación para $R_x(\phi)$, vemos que

$$\rho(R_x(\phi))\varphi = \varphi \exp\left(\sum_{k=1}^{3} i\lambda_k \frac{\sigma_k}{2}\right) = \varphi e^{-i\phi\frac{\sigma_1}{2}}$$

Luego, $\lambda_3 = \lambda_2 = 0$ y $\lambda_1 = -\phi$. Además, para $B_z(\eta)$ tenemos,

$$\rho(B_z(\eta))\varphi = \varphi \exp\left(\sum_{k=1}^{3} i\gamma_k \frac{\sigma_k}{2}\right) = \varphi e^{-\eta\frac{\sigma_1}{2}}$$

Por tanto, $\gamma_2 = \gamma_1 = 0$ y $\gamma_3 = i\eta$.

Ahora vamos a ver la relación entre los coeficientes de LH con los de RH, pues la N no cambia. Entonces, vemos que

$$\rho(N)\bar{\chi} = \bar{\chi} \exp\left(\sum_{k=1}^{3} i\lambda_k \frac{\sigma_k}{2}\right)^* = \bar{\chi} \exp\left(\sum_{k=1}^{3} -i\lambda_k^* \frac{\sigma_k^*}{2}\right) \overset{\{\sigma_k^* = \sigma_k\}}{=} \bar{\chi} \exp\left(\sum_{k=1}^{3} -i\lambda_k^* \frac{\sigma_k}{2}\right)$$

Por tanto, los coeficientes de LH y RH se relacionan, tal que

$$\lambda_k^{\prime(RH)} = -\lambda_k^{*(LH)}$$

es decir, el coeficiente de (RH) es igual a menos el coeficiente conjugado de (LH). Luego,

$$\begin{array}{rl} R_x(\phi): & \lambda_k^{(LH)} = \lambda_1 = -\phi \Rightarrow \lambda_k^{\prime(RH)} = -\lambda_1^* = \phi \\ B_z(\eta): & \lambda_k^{(LH)} = \lambda_3 = i\eta \Rightarrow \lambda_k^{\prime(RH)} = -\lambda_3^* = i\eta \end{array}$$

Por tanto, las matrices $R_x(\phi)$ y $B_z(\eta)$, en la representación RH serán:

$$R_x(\phi)^{(RH)} = e^{-i\phi\frac{\sigma_1}{2}}; \quad B_z(\eta) = e^{\eta\frac{\sigma_3}{2}}$$

donde no hemos tomado los conjugados de ϕ y η porque al tratarse de un ángulo y de un rapidity, respectivamente, son magnitudes reales.

1 Obtención de la fórmula

La fórmula

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\bar{\sigma}^\mu g \sigma_\nu g^\dagger)$$

proviene de la relación entre el grupo de Lorentz $SO(1,3)^\uparrow$ y el grupo de transformaciones espinoriales $SL(2,\mathbb{C})$. Esta relación es fundamental en la representación espinorial del grupo de Lorentz y en la correspondencia entre matrices 2×2 y cuadrivectores en espacio-tiempo.

1. Contexto: Representación Espinorial del Grupo de Lorentz

El grupo de Lorentz $SO(1,3)^\uparrow$ describe las transformaciones que preservan la métrica de Minkowski:

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1).$$

Sin embargo, el grupo de recubrimiento doble de $SO(1,3)^\uparrow$ es $SL(2,\mathbb{C})$, que actúa sobre los espinores de Weyl. Esto significa que cualquier transformación de Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu$ puede representarse por un elemento de $SL(2,\mathbb{C})$ denotado como g.

El objetivo es construir una correspondencia entre la representación en $SL(2,\mathbb{C})$ y el espacio de Minkowski.

2. Relación entre cuadrivectores y matrices 2×2

Cualquier cuadrivector en espacio-tiempo x^μ se puede asociar a una matriz hermítica de la forma:

$$X = x^\mu \sigma_\mu = x^0 \mathbb{I} + x^i \sigma_i = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}.$$

Aquí, las matrices σ_μ son:

$$\sigma^\mu = (\mathbb{I}, \sigma^i),$$

$$\bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{I}, -\sigma^i).$$

La transformación de Lorentz debe actuar sobre X de manera que conserve la estructura de la métrica de Minkowski. Se define entonces la transformación:

$$X' = gXg^\dagger.$$

Esto garantiza que la transformación respeta la estructura del espacio-tiempo.

3. Derivación de la fórmula

Como $X = x^\mu\sigma_\mu$, después de la transformación tenemos:

$$x'^\mu \sigma_\mu = g(x^\nu \sigma_\nu) g^\dagger.$$

Tomamos la traza en ambos lados:

$$\mathrm{Tr}(x'^\mu \sigma_\mu) = \mathrm{Tr}(g x^\nu \sigma_\nu g^\dagger).$$

Utilizando la linealidad de la traza:

$$x'^{\mu} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\bar{\sigma}^{\mu} g \sigma_{\nu} g^{\dagger}) x^{\nu}.$$

Comparando con la ecuación de una transformación de Lorentz $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$, se obtiene la expresión:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\bar{\sigma}^{\mu} g \sigma_{\nu} g^{\dagger}).$$

2 Cálculo de matrices de las rotaciones

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$
$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -i\operatorname{sen}\alpha \\ -i\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & i\operatorname{sen}\alpha \\ i\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -i\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -i\operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & i\operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +s^2+c^2 & -isc+isc \\ -isc+isc & s^2+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} //$$

$$\begin{pmatrix} 0 & +i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -is \\ -is & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & is \\ is & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s & -ic \\ ic & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & -ic \\ ic & -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s^2+c^2 & -isc-ics \\ -ics-ics & -c^2+s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -i\operatorname{sen}\phi \\ -i\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -is \\ -is & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & is \\ is & c \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} c & -is \\ is & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & is \\ -is & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2-s^2 & isc+isc \\ isc+isc & -s^2+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & i\operatorname{sen}\phi \\ i\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -is \\ -is & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & is \\ is & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -is & c \\ c & -is \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -s & ic \\ -ic & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} is^2-ic^2 & sc+cs \\ -sc-sc & ic^2-is^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -i\cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & i\cos\phi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -is \\ -is & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & is \\ is & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -is & c \\ c & -is \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & is \\ -is & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -isc-isc & s^2-c^2 \\ c^2-s^2 & isc+isc \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -i\operatorname{sen}\phi & -\cos\phi \\ \cos\phi & +i\operatorname{sen}\phi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -is \\ -is & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & is \\ is & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s & -ic \\ ic & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & is \\ -is & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sc-sc & -is^2+ic^2 \\ ic^2-is^2 & -sc-cs \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\phi & i\cos\phi \\ i\cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -is \\ -is & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & is \\ is & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -is \\ is & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & -ic \\ ic & -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cs+sc & -ic^2+is^2 \\ is^2-ic^2 & sc+cs \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\phi & -i\cos\phi \\ -i\cos\phi & \operatorname{sen}\phi \end{pmatrix}$$

3 Cálculo de matrices del boost

$$\Lambda^0_0 = \frac{1}{2} Tr\left[\bar{\sigma}^0 B_z \sigma_0 B_z^\dagger\right] = \frac{1}{2} Tr\left[\mathbb{I} B_z \mathbb{I} B_z^\dagger\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\alpha} & 0 \\ 0 & e^{2\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{-2\alpha} + e^{2\alpha} = 2\cosh(2\alpha) \Rightarrow \boxed{\Lambda^0_0 = \cosh(\eta)}$$

$$\Lambda^0_1 = \frac{1}{2} Tr\left[\bar{\sigma}^0 B_z \sigma_1 B_z^\dagger\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e^{\alpha} \\ e^{-\alpha} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Lambda^0_1 = 0 = \Lambda^1_0}$$

$$\Lambda^0_2 = \frac{1}{2} Tr\left[\bar{\sigma}^0 B_z \sigma_2 B_z^\dagger\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\Lambda^0_2 = 0 = \Lambda^2_0}$$

$$\Lambda^0_3 = \frac{1}{2} Tr\left[\bar{\sigma}^0 B_z \sigma_3 B_z^\dagger\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & -e^{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\alpha} & 0 \\ 0 & -e^{2\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{-2\alpha} - e^{2\alpha} = 2\,\mathrm{senh}(2\alpha) \Rightarrow \boxed{\Lambda^0_3 = \mathrm{senh}\,\eta}$$

$$\Lambda^1_1 = \frac{1}{2} Tr\left[\bar{\sigma}^1 B_z \sigma_1 B_z^\dagger\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\alpha} \\ e^{\alpha} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e^{-\alpha} \\ e^{\alpha} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Lambda^1_1 = 1}$$

$$\Lambda^2_1 = \frac{1}{2} Tr\left[\bar{\sigma}^2 B_z \sigma_1 B_z^\dagger\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{\alpha} \\ ie^{-\alpha} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e^{\alpha} \\ e^{-\alpha} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Lambda^2_1 = \frac{1}{2}(-i+i) = 0 = \Lambda^1_2}$$

$$\Lambda^3_1 = \frac{1}{2} Tr\left[\bar{\sigma}^3 B_z \sigma_1 B_z^\dagger\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & -e^{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e^{\alpha} \\ e^{-\alpha} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Lambda^3_1 = 0 = \Lambda^1_3}$$

$$\Lambda^3_2 = \frac{1}{2} Tr\left[\bar{\sigma}^3 B_z \sigma_2 B_z^\dagger\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & -e^{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -ie^{\alpha} \\ ie^{-\alpha} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Lambda^3_2 = 0 = \Lambda^2_3}$$

$$\Lambda^3_0 = \frac{1}{2} Tr\left[\bar{\sigma}^3 B_z \sigma_0 B_z^\dagger\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & -e^{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\alpha} & 0 \\ 0 & -e^{2\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{-2\alpha} - e^{2\alpha} = 2\,\mathrm{senh}(2\alpha) \Rightarrow \boxed{\Lambda^3_0 = \mathrm{senh}\,\eta}$$

$$\Lambda^2_2 = \frac{1}{2} Tr\left[\bar{\sigma}^2 B_z \sigma_2 B_z^\dagger\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{\alpha} \\ ie^{-\alpha} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -ie^{\alpha} \\ ie^{-\alpha} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Lambda^2_2 = 1}$$

$$\Lambda^3_3 = \frac{1}{2} Tr\left[\bar{\sigma}^3 B_z \sigma_3 B_z^\dagger\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & -e^{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & -e^{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\alpha} & 0 \\ 0 & e^{2\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{-2\alpha} + e^{2\alpha} = 2\cosh(2\alpha) \Rightarrow \boxed{\Lambda^3_3 = \cosh\eta}$$

Ejercicio extra:

2. **Consideremos el vector de Pauli-Lubanski, $\mathbf{W}_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathbf{J}^{\nu\rho}\mathbf{P}^\sigma$**

   (a) **Comprueba las siguientes relaciones:**

   $$\mathbf{W}_\mu\mathbf{P}^\mu = \mathbf{0}; \quad [\mathbf{W}_\mu, \mathbf{P}_\nu] = \mathbf{0}; \quad [\mathbf{J}_{\mu\nu}, \mathbf{W}_\rho] = \mathbf{i}\left(\eta_{\mu\rho}\mathbf{W}_\nu - \eta_{\nu\rho}\mathbf{W}_\mu\right); \quad [\mathbf{W}_\mu, \mathbf{W}_\nu] = \mathbf{i}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathbf{W}^\rho\mathbf{P}^\sigma$$

   - $W_\mu P^\mu = 0$:

     Vemos que el resultado de $W^\mu P_\mu$ debe ser un escalar, pues están los índices contraídos. Por otro lado, al escribir el tensor de forma explícita, vemos que

     $$W_\mu P^\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma P^\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(P^\sigma P^\mu)J^{\nu\rho}$$

     Por lo que, vemos que tenemos un tensor simétrico, la parte de $P^\sigma P^\mu$, mientras que el tensor de Levi-Civita es antisimétrico, luego al tener 'antisimétrico $\times$ simétrico', el resultado es nulo.

   - $[W_\mu, P_\nu] = 0$:

     Escribiendo explícitamente el conmutador, tenemos

     $$[W_\mu, P_\nu] = \left[\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma, P_\nu\right]$$

     Usando la propiedad,

     $$[ABC, D] = AB\,[C, D] + A\,[B, D]\,C + [A, D]\,BC$$

     Llegamos a

     $$[W_\mu, P_\alpha] = \frac{1}{2}\left\{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}\,[P^\sigma, P_\alpha] + \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,[J^{\nu\rho}, P_\alpha]\,P^\sigma + [\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, P_\alpha]\,J^{\nu\rho}P^\sigma\right\}$$

     Al estar en el álgebra de Poincaré, sabemos (de teoría) que

     $$[P_\mu, P_\nu] = 0; \quad [P_\mu, J_{\rho\sigma}] = -i\left(\eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho\right); \quad [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i\left(\eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}\right)$$

     Por tanto, el primer sumando se anula, pues al ser $[P_\mu, P_\alpha] = 0$, entonces $[P^\sigma, P_\alpha] = 0$. Por otro lado, el tercer sumando también se anula, porque el tener un tensor de Levi-Civita solo en un conmutador siempre nos da cero. Analizando el segundo sumando llegamos a

     $$[J^{\nu\rho}, P_\alpha] = -\,[P_\alpha, J^{\nu\rho}] = i\left(\eta^\nu_\alpha P^\rho - \eta^\rho_\alpha P^\nu\right)$$

     Razonando igual que para la primera demostración, tendremos un tensor simétrico $P^\rho P^\sigma$ multiplicando por Levi-Civita, por lo que también se anulará. Así, $[W_\mu, P_\alpha] = 0$.

   - $[J_{\mu\nu}, W_\rho] = i\left(\eta_{\mu\rho}W_\nu - \eta_{\nu\rho}W_\mu\right)$:

     Volvemos a escribir la forma explícita del conmutador:

     $$[J_{\mu\nu}, W_\rho] = \left[J_{\mu\nu}, \frac{1}{2}\epsilon_{\rho\sigma\lambda\delta}J^{\sigma\lambda}P^\delta\right]$$

Usando la propiedad,

$$[A, BCD] = BC\,[A, D] + B\,[A, C]\,D + [A, B]\,CD$$

Luego,

$$\begin{aligned}
[J_{\mu\nu}, W_\rho] &= \tfrac{1}{2}\left\{\epsilon_{\mu\sigma\lambda\delta} J^{\sigma\lambda}\left[J_{\mu\nu}, P^\delta\right] + \epsilon_{\rho\sigma\lambda\delta}\left[J_{\mu\nu}, J^{\sigma\lambda}\right] P^\delta + \cancelto{0}{\left[J_{\mu\nu}, \epsilon_{\rho\sigma\lambda\delta}\right]} J^{\sigma\lambda} P^\delta\right\} = \\
&= \tfrac{1}{2}\left\{i\epsilon_{\mu\sigma\lambda\delta} J^{\sigma\lambda}\left(\eta^\delta_\nu P_\mu - \eta^\delta_\mu P_\nu\right) + \epsilon_{\rho\sigma\lambda\delta}\cancelto{0}{\left(J_{\mu\nu} J^{\sigma\lambda} - J^{\sigma\lambda} J_{\mu\nu}\right)} P^\delta\right\} = \\
&= i\left\{\eta^\delta_\nu \tfrac{1}{2}\epsilon_{\mu\sigma\lambda\delta} J^{\sigma\lambda} P_\mu - \eta^\delta_\mu \tfrac{1}{2}\epsilon_{\mu\sigma\lambda\delta} J^{\sigma\lambda} P_\nu\right\} = i\left\{\eta^\delta_\nu \tfrac{1}{2}\epsilon_{\mu\sigma\lambda\delta} J^{\sigma\lambda}\eta_{\mu\alpha} P^\alpha - \eta^\delta_\mu \tfrac{1}{2}\epsilon_{\mu\sigma\lambda\delta} J^{\sigma\lambda}\eta_{\nu\beta} P^\beta\right\} = \\
&= i\left(\eta_{\mu\rho} W_\nu - \eta_{\nu\rho} W_\mu\right)
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se anula el término porque $J_{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico, luego $J_{\mu\nu} J^{\sigma\lambda}$ es simétrico, y al multiplicar por Levi-Civita se anula. Hemos reescrito índices para obtener la expresión que queremos.

- $[W_\mu, W_\alpha] = i\epsilon_{\mu\alpha\rho\sigma} W^\rho P^\sigma$:

Tenemos que,

$$[W_\mu, W_\alpha] = \left[\tfrac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\rho\sigma} P^\nu, \tfrac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} J^{\gamma\delta} P^\beta\right]$$

Expandiendo el conmutador:

$$[W_\mu, W_\alpha] = \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}[J^{\rho\sigma} P^\nu, J^{\gamma\delta} P^\beta]$$

Utilizando las relaciones de conmutación del álgebra de Poincaré:

$$[J^{\rho\sigma}, P^\nu] = i(\eta^{\sigma\nu} P^\rho - \eta^{\rho\nu} P^\sigma)$$

$$[J^{\rho\sigma}, J^{\gamma\delta}] = i(\eta^{\rho\gamma} J^{\sigma\delta} + \eta^{\sigma\delta} J^{\rho\gamma} - \eta^{\rho\delta} J^{\sigma\gamma} - \eta^{\sigma\gamma} J^{\rho\delta})$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$[J^{\rho\sigma} P^\nu, J^{\gamma\delta} P^\beta] = i(\eta^{\sigma\nu} P^\rho - \eta^{\rho\nu} P^\sigma) J^{\gamma\delta} P^\beta + i(\eta^{\gamma\rho} J^{\sigma\delta} + \eta^{\sigma\delta} J^{\rho\gamma} - \eta^{\rho\delta} J^{\sigma\gamma} - \eta^{\sigma\gamma} J^{\rho\delta}) P^\nu P^\beta$$

Multiplicamos por los símbolos de Levi-Civita:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(i(\eta^{\sigma\nu} P^\rho - \eta^{\rho\nu} P^\sigma) J^{\gamma\delta} P^\beta + i(\eta^{\gamma\rho} J^{\sigma\delta} + \eta^{\sigma\delta} J^{\rho\gamma} - \eta^{\rho\delta} J^{\sigma\gamma} - \eta^{\sigma\gamma} J^{\rho\delta}) P^\nu P^\beta)$$

Usamos la identidad de contracción de dos símbolos de Levi-Civita:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\det\begin{vmatrix} \eta_{\mu\alpha} & \eta_{\mu\beta} & \eta_{\mu\gamma} & \eta_{\mu\delta} \\ \eta_{\nu\alpha} & \eta_{\nu\beta} & \eta_{\nu\gamma} & \eta_{\nu\delta} \\ \eta_{\rho\alpha} & \eta_{\rho\beta} & \eta_{\rho\gamma} & \eta_{\rho\delta} \\ \eta_{\sigma\alpha} & \eta_{\sigma\beta} & \eta_{\sigma\gamma} & \eta_{\sigma\delta} \end{vmatrix}$$

Finalmente, obtenemos:

$$[W_\mu, W_\alpha] = i\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}P^\beta W^\gamma$$

que es la misma expresión que queríamos obtener, pero con otros índices, cosa que no importa, porque son índices del convenio de Einstein, luego son 'mudos'.

(b) **Demuestra que $-\mathbf{W}_\mu \mathbf{W}^\mu$ es un operador de Casimir del álgebra de Poincaré.**

Para ver que $-W_\mu W^\mu$ es un operador de Casimir del álgebra de Poincaré debemos ver que conmute con los generadores del grupo, que son $P_\nu = \eta^\nu_\mu P^\mu$ y $J_{\rho\sigma} = \eta^\rho_\alpha \eta^\sigma_\beta J^{\alpha\beta}$.

Primero veamos la forma extendida del operador de Casimir $-W_\mu W^\mu$:

$$-W_\mu W^\mu = -\left(\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\rho\sigma}P^\nu\right)\left(\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}J_{\beta\gamma}P_\alpha\right)$$

Expandiendo los productos,

$$-W_\mu W^\mu = -\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}J^{\rho\sigma}P^\nu J_{\beta\gamma}P_\alpha$$

Usamos la identidad de contracción de los tensores de Levi-Civita:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} = -\det\begin{vmatrix} \eta^\alpha_\nu & \eta^\beta_\nu & \eta^\gamma_\nu \\ \eta^\alpha_\rho & \eta^\beta_\rho & \eta^\gamma_\rho \\ \eta^\alpha_\sigma & \eta^\beta_\sigma & \eta^\gamma_\sigma \end{vmatrix}$$

Que se puede descomponer como:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} = -(\eta^\alpha_\nu\eta^\beta_\rho\eta^\gamma_\sigma - \eta^\alpha_\nu\eta^\gamma_\rho\eta^\beta_\sigma + \eta^\beta_\nu\eta^\gamma_\rho\eta^\alpha_\sigma - \eta^\beta_\nu\eta^\alpha_\rho\eta^\gamma_\sigma + \eta^\gamma_\nu\eta^\alpha_\rho\eta^\beta_\sigma - \eta^\gamma_\nu\eta^\beta_\rho\eta^\alpha_\sigma)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior y realizando las contracciones:

$$-W_\mu W^\mu = P_\mu P^\mu J_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - 2P_\mu J^{\mu\nu}P^\rho J_{\nu\rho}$$

Luego, vemos con P_ν:

$$[-W_\mu W^\mu, P_\alpha] = -W_\mu\left[W^\mu, P_\alpha\right] - \left[W_\mu, P_\alpha\right]W^\mu = -\eta^{\mu\rho}\left\{W_\mu \cancelto{0}{[W_\rho, P_\alpha]} + \cancelto{0}{[W_\mu, P_\alpha]\, W_\rho}\right\} = 0$$

Vamos con el otro:

$$\begin{aligned}
[-W_\mu W^\mu, J_{\alpha\beta}] &= -W_\mu\left[W^\mu, J_{\alpha\beta}\right] - \left[W_\mu, J_{\alpha\beta}\right]W^\mu = -\eta^{\mu\rho}\left\{W_\mu\left[W_\rho, J_{\alpha\beta}\right] + \left[W_\mu, J_{\alpha\beta}\right]W_\rho\right\} \\
&= i\eta^{\mu\rho}\left\{W_\rho\left(\eta_{\beta\mu}W_\alpha - \eta_{\alpha\mu}W_\beta\right) + \left(\eta_{\beta\mu}W_\alpha - \eta_{\alpha\mu}W_\beta\right)W_\rho\right\} = \\
&= -i\left\{\delta^\rho_\beta W_\rho W_\alpha - \delta^\rho_\beta W_\rho W_\beta + \delta^\mu_\beta W_\alpha W_\mu - \delta^\mu_\alpha W_\beta W_\mu\right\} = \\
&= -i\left\{\cancel{W_\alpha W_\beta} - \cancel{W_\beta W_\alpha} + \cancel{W_\beta W_\alpha} - \cancel{W_\alpha W_\beta}\right\} = 0
\end{aligned}$$

(c) **Escribe explícitamente las distintas componentes de $\mathbf{W}_\mu$ en una representación del álgebra de Poincaré que es múltiplo de la identidad para las cuatro componentes $\mathbf{P}^\mu$, con autovalores $\left(\mathbf{p^0}, \mathbf{p^1}, \mathbf{p^2}, \mathbf{p^3}\right) = (\mathbf{E}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{E})$, y espinorial LH bajo las transformaciones de Lorentz que no cambian estos autovalores. Usando componentes de $\mathbf{W}_\mu$, define una base del álgebra a este *little group* y encuentra explícitamente las constantes de estructura. Argumenta que este álgebra es isomorfa al álgebra del grupo Euclídeo de traslaciones y rotaciones en dimensión 2. Calcula $-\mathbf{W}_\mu \mathbf{W}^\mu$. ¿Es múltiplo de la identidad? ¿Debería serlo?**