Evaluación I. Mecánica Cuántica

Rubén Carrión Castro

Octubre 2024

1. **Considera un sistema cuántico en el estado $|\boldsymbol{\Psi}\rangle = \mathbf{c}(|\mathbf{u_1}\rangle + |\mathbf{u_2}\rangle) \in \mathscr{H}$ y los observables**

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}(-\mathbf{i}\,|\mathbf{u_1}\rangle\langle\mathbf{u_3}| + \mathbf{i}\,|\mathbf{u_3}\rangle\langle\mathbf{u_1}| + |\mathbf{u_2}\rangle\langle\mathbf{u_2}|), \qquad \mathbf{B} = \hbar\omega(|\mathbf{u_2}\rangle\langle\mathbf{u_2}| + |\mathbf{u_3}\rangle\langle\mathbf{u_3}|),$$

donde c es la constante de normalización y $\{|\mathbf{u_1}\rangle, |\mathbf{u_2}\rangle, |\mathbf{u_3}\rangle\}$ una base ortonormal de $\mathscr{H}$. Supón que dispones de 1000 copias idénticas del sistema y que a cada una le mides secuencialmente uno de los observables elegidos al azar y luego el otro, seleccionando el estado final independientemente de los resultados y sin saber lo que se ha obtenido. Encuentra la matriz densidad que describe al sistema resultante.

Lo primero que debemos hacer es pasar tanto el estado $|\Psi\rangle$ como los observables A y B a notación matricial,

$$|\Psi\rangle \doteq c\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}; \quad A \doteq a\begin{pmatrix}0 & 0 & -i\\0 & 1 & 0\\i & 0 & 0\end{pmatrix}; \quad B \doteq \hbar\omega\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ahora debemos normalizar nuestro estado $|\Psi\rangle$, usando que la norma debe ser la unidad:

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = c^2\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 2\cdot c^2 = 1 \Longrightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow |\Psi\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Ahora procedemos a buscar los autovalores de los observables, comenzamos por A;

$$\left|A - \lambda_A\mathbb{I}\right| = \begin{vmatrix}-\lambda_A & 0 & -i\cdot a\\0 & a-\lambda_A & 0\\i\cdot a & 0 & -\lambda_A\end{vmatrix} = \lambda_A^2(a-\lambda_A) - a^2(a-\lambda_A) = (a-\lambda_A)(\lambda_A^2 - a^2) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a - \lambda_A = 0 & \Rightarrow \quad \lambda_A = a\\ \lambda_A^2 - a^2 = 0 & \Rightarrow \quad \lambda_A = \pm a\end{cases}$$

Por tanto, tenemos un autovalor no degenerado $(-a)$ y otro 2-degenerado (a). Calculamos ahora los autovectores para los autovalores,

$$\lambda_A = a$$

$$\begin{pmatrix} -a & 0-i\cdot a & \\ 0 & 0 & 0 \\ i\cdot a & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -ax - iaz = 0 & \Rightarrow x = -iz \\ iax - az = 0 & \end{cases}$$

Tomando $y = \gamma; z = \tau$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\tau \\ \gamma \\ \tau \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow |a_1\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \ |a_2\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde hemos normalizado $|a_2\rangle$.

$$\lambda_A = -a$$

$$\begin{pmatrix} a & 0-i\cdot a & \\ 0 & 2a & 0 \\ i\cdot a & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} ax - iaz = 0 & \Rightarrow x = iz \\ 2ay = 0 & \Rightarrow y = 0 \\ iax + az = 0 & \end{cases}$$

Tomando $z = \tau$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\tau \\ 0 \\ \tau \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow |a_3\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde hemos normalizado $|a_3\rangle$.

Vamos ahora con el observable B, pero como por suerte es una matriz diagonal, los autovalores serán directamente los valores de la diagonal, $\lambda_B = \{0, \hbar\omega, \hbar\omega\}$ y los autovectores asociados a cada autovalor serán los vectores de la base canónica, así

$$|b_i\rangle \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Vamos ahora a calcular los productos escalares de los autovectores con nuestro estado, pues los vamos a necesitar:

$$\langle a_1|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \langle b_1|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle a_2|\Psi\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{2}; \quad \langle b_2|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle a_3|\Psi\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-i}{2}; \quad \langle b_3|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Ahora procedemos a calcular las probabilidades de cada autovalor al medir su observable, pues nos serán útiles para cálculos posteriores:

$$\mathscr{P}(\lambda_A = a) = \left|\langle a_1|\Psi\rangle\right|^2 + \left|\langle a_2|\Psi\rangle\right|^2 = \tfrac{3}{4}; \quad \mathscr{P}(\lambda_B = 0) = \left|\langle b_1|\Psi\rangle\right|^2 = \tfrac{1}{2}$$
$$\mathscr{P}(\lambda_A = -a) = \left|\langle a_3|\Psi\rangle\right|^2 = \tfrac{1}{4}; \quad \mathscr{P}(\lambda_B = \hbar\omega) = \left|\langle b_2|\Psi\rangle\right|^2 + \left|\langle b_3|\Psi\rangle\right|^2 = \tfrac{1}{2}$$

Vamos a calcular ahora los estados tras las medidas:

1) $\boldsymbol{\lambda_A = a}$; $\boldsymbol{\lambda_B = 0}$

El estado tras la medida de A es,

$$|\Phi_1\rangle = \frac{P_{(a)}|\Psi\rangle}{\sqrt{\langle\Psi|P_{(a)}|\Psi\rangle}} = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\left\{\langle a_1|\Psi\rangle\,|a_1\rangle + \langle a_2|\Psi\rangle\,|a_2\rangle\right\} = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \tfrac{i}{2}\begin{pmatrix}-i\\0\\1\end{pmatrix}\right] =$$
$$= \tfrac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \tfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\0\\i\end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\i\end{pmatrix}$$

2) $\boldsymbol{\lambda_A = a}$; $\boldsymbol{\lambda_B = \hbar\omega}$

El estado tras la medida de A es el mismo que el anterior,

$$|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\i\end{pmatrix}$$

3) $\boldsymbol{\lambda_A = -a}$; $\boldsymbol{\lambda_B = 0}$

El estado tras la medida de A es,

$$|\Phi_3\rangle = |a_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\0\\1\end{pmatrix}$$

pues el autovalor es no degenerado.

4) $\boldsymbol{\lambda_A = -a}$; $\boldsymbol{\lambda_B = \hbar\omega}$

El estado tras la medida de A es el mismo que el anterior,

$$|\Phi_4\rangle = |a_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\0\\1\end{pmatrix}$$

Para los estados tras la medida de B vamos a hacer solo uno de cada pareja, pues también coinciden, así para $\lambda_B = 0$, como es no degenerado, tendremos

$$|\Phi_5\rangle = |\Phi_6\rangle = |b_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Para $\lambda_B = \hbar\omega$ tenemos,

$$|\Phi_7\rangle = |\Phi_8\rangle = \frac{P_{(\hbar\omega)}|\Psi\rangle}{\sqrt{\langle\Psi|P_{(\hbar\omega)}|\Psi\rangle}} = \sqrt{2}\left\{\langle b_2|\Psi\rangle\,|b_2\rangle + \langle b_3|\Psi\rangle\,|b_3\rangle\right\} = \sqrt{2}\left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Ahora vamos a calcular las probabilidades conjugadas:
1) $\lambda_{\mathbf{A}} = \mathbf{a};\ \lambda_{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$
La probabilidad de B tras medir A será

$$\mathscr{P}(\lambda_B = 0|\lambda_A = a) = \left|\langle b_1|\Phi_1\rangle\right|^2 = \left|\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right|^2 = \frac{1}{6}$$

Por tanto, la probabilidad total será,

$$P_1 \equiv \mathscr{P}(\lambda_A = a; \lambda_B = 0) = \mathscr{P}(\lambda_A = a) \cdot \mathscr{P}(\lambda_B = 0|\lambda_A = a) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$$

con estado final

$$|\phi_1\rangle = |b_1\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) $\lambda_{\mathbf{A}} = \mathbf{a};\ \lambda_{\mathbf{B}} = \hbar\omega$
La probabilidad de B tras medir A será

$$\mathscr{P}(\lambda_B = \hbar\omega|\lambda_A = a) = \left|\langle b_2|\Phi_2\rangle\right|^2 + \left|\langle b_3|\Phi_2\rangle\right|^2 = \left|\tfrac{2}{\sqrt{6}}\right|^2 + \left|\tfrac{i}{\sqrt{6}}\right|^2 = \frac{5}{6}$$

Por tanto, la probabilidad total será,

$$P_2 \equiv \mathscr{P}(\lambda_A = a; \lambda_B = \hbar\omega) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{8}$$

con estado final

$$|\phi_2\rangle = \frac{P_{(\hbar\omega)}\,|\Phi_2\rangle}{\sqrt{\langle\Psi|\,P_{(\hbar\omega)}\,|\Psi\rangle}} = \sqrt{\frac{6}{5}}\,[\langle b_2|\Phi_2\rangle\,|b_2\rangle + \langle b_3|\Phi_2\rangle\,|b_3\rangle] = \sqrt{\frac{6}{5}}\left[\frac{2}{\sqrt{6}}\,|b_2\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}\,|b_3\rangle\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ i \end{pmatrix}$$

3) $\lambda_{\mathbf{A}} = -\mathbf{a};\ \lambda_{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$
La probabilidad de B tras medir A será

$$\mathscr{P}(\lambda_B = 0|\lambda_A = -a) = \left|\langle b_1|\Phi_3\rangle\right|^2 = \left|\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la probabilidad total será,

$$P_3 \equiv \mathscr{P}(\lambda_A = -a; \lambda_B = 0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

con estado final

$$|\phi_3\rangle = |b_1\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4) $\lambda_{\mathbf{A}} = -\mathbf{a};\ \lambda_{\mathbf{B}} = \hbar\omega$
La probabilidad de B tras medir A será

$$\mathscr{P}(\lambda_B = \hbar\omega|\lambda_A = -a) = \left|\langle b_2|\Phi_4\rangle\right|^2 + \left|\langle b_3|\Phi_4\rangle\right|^2 = \left|0\right|^2 + \left|\tfrac{-i}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la probabilidad total será,

$$P_4 \equiv \mathscr{P}(\lambda_A = a; \lambda_B = \hbar\omega) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

con estado final

$$|\phi_4\rangle = \frac{P_{(\hbar\omega)}\,|\Phi_4\rangle}{\sqrt{\langle\Psi|\,P_{(\hbar\omega)}\,|\Psi\rangle}} = \sqrt{2}\,[\langle b_2|\Phi_4\rangle\,|b_2\rangle + \langle b_3|\Phi_4\rangle\,|b_3\rangle] = \sqrt{2}\left[0 + \frac{-i}{\sqrt{2}}\,|b_3\rangle\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$$

5) $\lambda_{\mathbf{B}} = \mathbf{0};\ \lambda_{\mathbf{A}} = \mathbf{a}$
La probabilidad de A tras medir B será

$$\mathscr{P}(\lambda_A = a|\lambda_B = 0) = \left|\langle a_1|\Phi_5\rangle\right|^2 + \left|\langle a_2|\Phi_5\rangle\right|^2 = \left|0\right|^2 + \left|\tfrac{i}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la probabilidad total será,

$$P_5 \equiv \mathscr{P}(\lambda_B = 0; \lambda_A = a) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

con estado final

$$|\phi_5\rangle = \frac{P_{(a)}\,|\Phi_5\rangle}{\sqrt{\langle\Psi|\,P_{(a)}\,|\Psi\rangle}} = \sqrt{2}\,[\langle a_1|\Phi_5\rangle\,|a_1\rangle + \langle a_2|\Phi_5\rangle\,|a_2\rangle] = \sqrt{2}\left[0 + \frac{i}{\sqrt{2}}\,|a_2\rangle\right] = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

6) $\lambda_{\mathbf{B}} = \mathbf{0};\ \lambda_{\mathbf{A}} = -\mathbf{a}$
La probabilidad de A tras medir B será

$$\mathscr{P}(\lambda_A = -a|\lambda_B = 0) = \left|\langle a_3|\Phi_6\rangle\right|^2 = \left|\tfrac{-i}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la probabilidad total será,

$$P_6 \equiv \mathscr{P}(\lambda_B = 0; \lambda_A = -a) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

con estado final

$$|\phi_6\rangle = |a_3\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7) $\lambda_{\mathbf{B}} = \hbar\omega;\ \lambda_{\mathbf{A}} = \mathbf{a}$
La probabilidad de A tras medir B será

$$\mathscr{P}(\lambda_A = a|\lambda_B = \hbar\omega) = \left|\langle a_1|\Phi_7\rangle\right|^2 + \left|\langle a_2|\Phi_7\rangle\right|^2 = \left|1\right|^2 + \left|0\right|^2 = 1$$

Por tanto, la probabilidad total será,

$$P_7 \equiv \mathscr{P}(\lambda_B = \hbar\omega; \lambda_A = a) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

con estado final

$$|\phi_7\rangle = \frac{P_{(a)}\,|\Phi_7\rangle}{\sqrt{\langle\Psi|\,P_{(a)}\,|\Psi\rangle}} = 1\,[\langle a_1|\Phi_7\rangle\,|a_1\rangle + \langle a_2|\Phi_7\rangle\,|a_2\rangle] = 1\,|a_2\rangle + 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8) $\lambda_{\mathbf{B}} = \hbar\omega;\ \lambda_{\mathbf{A}} = -\mathbf{a}$
La probabilidad de A tras medir B será

$$\mathscr{P}(\lambda_A = -a|\lambda_B = \hbar\omega) = \left|\langle a_3|\Phi_8\rangle\right|^2 = 0$$

Por tanto, la probabilidad total será,

$$P_8 \equiv \mathscr{P}(\lambda_B = \hbar\omega; \lambda_A = -a) = 0$$

Construimos la matriz densidad usando que

$$\rho = \sum_i \omega_i \left|\phi_i\right\rangle \left\langle\phi_i\right|$$

donde las frecuencias son

$$\omega_i = \frac{P_i}{\sum_i P_i \equiv P_{Total}}$$

Calculamos las frecuencias, pero primero vemos la probabilidad total,

$$P_{Total} = \sum_i P_i = \frac{1}{8} + \frac{5}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 0 = 2$$

Vemos las frecuencias,

$$\begin{array}{ll}
\omega_1 = \frac{P_1}{P_T} = \frac{1/8}{2} = 1/16; & \omega_5 = \frac{P_5}{P_T} = \frac{1/4}{2} = 1/8 = 2/16 \\
\omega_2 = \frac{P_2}{P_T} = \frac{5/8}{2} = 5/16; & \omega_6 = \frac{P_6}{P_T} = \frac{1/4}{2} = 1/8 = 2/16 \\
\omega_3 = \frac{P_3}{P_T} = \frac{1/8}{2} = 1/16; & \omega_7 = \frac{P_7}{P_T} = \frac{1/2}{2} = 1/4 = 4/16 \\
\omega_4 = \frac{P_4}{P_T} = \frac{1/8}{2} = 1/16; & \omega_8 = \frac{P_8}{P_T} = \frac{0}{2} = 0
\end{array}$$

Así tenemos,

$$\rho = \frac{1}{16}\left\{\left|\phi_1\right\rangle\left\langle\phi_1\right| + 5\left|\phi_2\right\rangle\left\langle\phi_2\right| + \left|\phi_3\right\rangle\left\langle\phi_3\right| + \left|\phi_4\right\rangle\left\langle\phi_4\right| + 2\left|\phi_5\right\rangle\left\langle\phi_5\right| + 2\left|\phi_6\right\rangle\left\langle\phi_6\right| + \left|4\right\rangle \phi_7 \left\langle\phi_7\right| + 0\left|\phi_8\right\rangle\left\langle\phi_8\right|\right\}$$

Calculamos los proyectores,

$$\left|\phi_1\right\rangle\left\langle\phi_1\right| = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}; \quad \left|\phi_5\right\rangle\left\langle\phi_5\right| = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -i\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-i\\0&0&0\\i&0&1\end{pmatrix}$$

$$\left|\phi_2\right\rangle\left\langle\phi_2\right| = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\2\\i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2 & -i\end{pmatrix} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&4&-2i\\0&2i&1\end{pmatrix}; \quad \left|\phi_6\right\rangle\left\langle\phi_6\right| = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}i\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i & 0 & 1\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&i\\0&0&0\\-i&0&1\end{pmatrix}$$

$$\left|\phi_3\right\rangle\left\langle\phi_3\right| = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}; \quad \left|\phi_7\right\rangle\left\langle\phi_7\right| = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\left|\phi_4\right\rangle\left\langle\phi_4\right| = \begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & -i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-2i&1\end{pmatrix}; \quad \left|\phi_8\right\rangle\left\langle\phi_8\right| = \nexists$$

$$\begin{aligned}\rho \doteq\ & \tfrac{1}{16}\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \tfrac{5}{5}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&4&-2i\\0&2i&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-2i&1\end{pmatrix} + \right.\\ & \left. + \tfrac{2}{2}\begin{pmatrix}1&0&-i\\0&0&0\\i&0&1\end{pmatrix} + \tfrac{2}{2}\begin{pmatrix}1&0&i\\0&0&0\\-i&0&1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\} = \tfrac{1}{8}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&-i\\0&i&2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Comprobamos si satisface algunas de las propiedades de la matriz densidad,

1. $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$?

$$\mathrm{Tr}(\rho) = \frac{1}{8}(2 + 4 + 2) = 1 \quad \checkmark$$

2. $\rho = \rho^\dagger$?

$$\rho^\dagger = (\rho^T)^* = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -i \\ 0 & i & 2 \end{pmatrix} = \rho \quad \checkmark$$

Concluimos que la matriz densidad obtenida debería estar bien, pues satisface estas propiedades.