Notas Tensores

April 4, 2024

Contents

1 Preliminares

1.1 Espacio vectorial

Definición 1.1. *Sea V un conjunto y $\mathbb{K}$ un cuerpo.*

Se dice que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, o bien suele decirse que V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, si se verifica:

1. *Existe operación interna:* $+ : V \times V \to V$
2. *Existe operación externa:* $\cdot : V \times \mathbb{K} \to V$

que cumplan:

(i) $(V, +)$ *es un grupo abeliano.*

  (a) Se cumple que $+ : V \times V \to V$ *es una operación cerrada, es decir,* $\forall v, w \in V$ *se tiene que* $v + w \in V$.

  (b) Propiedad asociativa:

$$\forall u, v, w \in V, \quad u + (v + w) = (u + v) + w$$

  (c) Existe el elemento neutro:

$$\forall v \in V, \exists 0 \in V; \quad v + 0 = 0 + v = v$$

  (d) Existe elemento simétrico:

$$\forall v \in V, \exists - v \in V; \quad v + (-v) = (-v) + v = 0$$

  (e) Propiedad conmutativa:

$$\forall v, w \in V; \quad v + w = w + v$$

(ii) Doble propiedad distributiva:

  (a) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall v \in V; \quad (\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$

  (b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v, w \in V; \quad \lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$

(iii) Propiedad pseudo-asociativa:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall v \in V; \quad \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$$

(iv) Se verifica que:

$$\forall v \in V; \quad 1 \cdot v = v \cdot 1 = v, \text{ donde } 1 \in \mathbb{K} \text{ es el elemento unitario de } \mathbb{K}$$

Definición 1.2. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$:*

- *Se dice que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto generador si $< \{v_1, v_2 \ldots, v_n\} >= V$.*

- *Se dice que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son linealmente independientes si* $\lambda^1 \cdot v_1 + \lambda^2 \cdot v_2 + \ldots \lambda^n \cdot v_n = 0$ *con $\lambda_i \in \mathbb{K}$, si y solo si $\lambda^1 = \lambda^2 = \cdots = \lambda^n = 0$.*

- *Se dice que* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *es una base si es a la vez conjunto generador y los vectores son linealmente independientes.*

Definición 1.3. *Se llama dimensión de un espacio vectorial al cardinal de cualquiera de sus bases, es decir,* $dimG = \#B_G$.

Definición 1.4. *Sean* V *y* V*' dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo* $\mathbb{K}$. *Se dice que una aplicación* $f : V \to V$*' es una aplicación lineal si verifica:*

(i) $\forall x, y \in V; \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in V; \quad f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$

Definición 1.5. *Sea un espacio vectorial* V *sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$, *a las aplicaciones lineales (formas lineales),* $f : V \to \mathbb{K}$, *se les denomina formas lineales.*

1.2 Aplicaciones lineales

Definición 1.6. *Sean* V *y* V' *dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo* $\mathbb{K}$.

Se dice que en una aplicación $f : V \longrightarrow V'$ *es una aplicación lineal, siendo homomorfismo de espacios vectoriales, si verifica:*

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in V$

(ii) $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in V$

Si f *es biyectiva, entonces se llamará isomorfismo lineal.*

Si $V = V'$, *entonces se llama endomorfismo.*

Si $V' = V$ *y además* f *es biyectiva, se llamará automorfismo.*

Definición 1.7. *Sea* $f : V \longrightarrow W$ *definimos el núcleo o kernel de la aplicación* f *como*

$$Kerf = \{v \in V : f(v) = 0\}$$

y la imagen como

$$Imf = \{w \in W : \exists v \in V / f(v) = w\}$$

Corollary 1.1.

$$\begin{array}{ll} Imf = f(V) \leq V', & V \leq V \Rightarrow f(V) \leq V' \\ Kerf = f^{-1}(\{0\}) \leq V, & \{0\} \leq V' \Rightarrow f^{-1}(\{0\}) \leq V \end{array}$$

Proposition 1.2. *Sea* $f : V \longrightarrow V'$ *una aplicación lineal,*

(i) entonces f *es inyectiva si y solo si* $Kerf = \{0\}$

Proof.
$\Rightarrow$

Suponiendo que f es inyectiva, sabemos que su Kernel es,

$$Kerf = \{v \in V : f(v) = 0\}$$

pero como la inyectividad nos implica que la imagen debe provenir de un único vector de entrada, entonces este vector será $v = 0$, y por tanto, $kerf = \{0\}$. ✓

$\Leftarrow$

Suponiendo que $kerf = \{0\}$, esto nos quiere decir que únicamente el vector $v = 0$ satisface $f(v) = 0$, luego como un vector tiene una única imagen, decimos que f es inyectiva. $\square$

(ii) si G es un conjunto generador de V, $< G >= V$, entonces $f(G)$ es generador de Imf, $< f(G) >= Imf$.

Proof.

$< f(G) >= Imf \Leftrightarrow \forall y \in Imf, \exists \lambda^1, \ldots, \lambda^n \in \mathbb{K}, y_1, \ldots, y_n \in f(G)$ tales que $y = \lambda^1 y_1 + \cdots + \lambda^n y_n$.

Sabemos que G es conjunto generador, luego, sea $y \in Imf \Leftrightarrow \exists x \in V, f(x) = y$.

Sabemos que $< G >= V$ y existe $\lambda^1, \ldots, \lambda^n \in \mathbb{K}$, $v_1, \ldots, v_n \in G$ tales que $y = f(x) = f(\lambda^1 v_1 + \cdots + \lambda^n v_n) = \lambda^1 f(v_1) + \cdots + \lambda^n f(v_n)$, $v_j \in G$, $f(v_j) \in f(G)$ e $y \in < f(G) >$ □

(iii) si $S \subset V$ es un conjunto de vectores linealmente independientes, si f es inyectiva, entonces $f(S)$ es linealmente independiente.

Proof. S conjunto linealmente independiente en V.
Supongamos que f es inyectiva, vamos a probar que $f(S)$ es l.i.

$$\lambda^1 y_1 + \cdots + \lambda^n y_n = 0 \Rightarrow \lambda^1 = \lambda^2 = \cdots = \lambda^n = 0$$

$\forall y_1, \ldots, y_n \in f(S), \;\; \forall \lambda^1, \ldots, \lambda^n \in \mathbb{K}$
Supongamos $\lambda^1 y_1 + \cdots + \lambda^n y_n = 0$.

Como $y_j \in f(S), \exists x_j \in S / f(x_j) = y_j$.

$$f(0) = 0 \Rightarrow \lambda^1 x_1 + \cdots + \lambda^n x_n = 0 \Rightarrow f \text{ inyectiva} \Rightarrow \lambda^1 = \cdots = \lambda^n = 0$$

$\lambda^1 f(x_1) + \cdots + \lambda^n f(x_n) = 0, \;\; f(\lambda^1 x_1 + \cdots + \lambda^n x_n) = 0$ □

(iv) f es inyectiva $\Leftrightarrow$ conserva la independencia lineal.

Proof. $\Longrightarrow$

Trivial por (iii) ✓

$\Longleftarrow$

Por reducción al absurdo:

Supongamos que existen $v_1, v_2 \in V$ distintos, tales que $f(v_1) = f(v_2) \Leftrightarrow f(v_1) - f(v_2) = 0 \Leftrightarrow f(v_1 - v_2) = 0$

Luego, $v = v_1 - v_2 \neq 0$ verifica que $f(v) = 0$, $\{v\}$ es un conjunto linealmente independiente, $f(\{v\})$ tendría que ser un conjunto l.i. por hipótesis, pero $f(\{v\}) = \{0\}$ que no es un conjunto l.i. cosa absurda. □

(v) si f es biyectiva y B es una base de V, entonces $f(B)$ es base de V'.

Proof. Sea una aplicación lineal biyectiva

$$f : V \to V'$$

y una base de V, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. Entones, si aplicamos

$$f(B) = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\} = \left\{v_1', \dots, v_n'\right\}$$

y entonces, estos $v_i' \in V'$ van a formar una base de V', pues al ser f biyectiva, los vectores serán linealmente independientes, pues los de B lo son; y además, como tienen la misma dimensión que V', pasan de ser conjunto generador a base. □

(vi) *f es sobreyectiva* $\Leftrightarrow Imf = V'$

Proof.
$\Rightarrow$
Suponiendo que f es sobreyectiva, tendremos que para cada $y \in V'$, existe al menos un $x \in V$, tal que $f(x) = y$. Por consiguiente, cada elemento de V' es la imagen de un elemento de V, es decir, $Imf = V'$. ✓
$\Leftarrow$
Suponiendo que $imf = V'$, tenemos que todos los elementos de V' son imagen de los elementos de V, siendo esta la propia definición de sobreyectividad, luego f es sobreyectiva. □

Proposition 1.3. *Si $f : V \longrightarrow V'$ es una aplicación lineal, es suficiente conocerla en una base.*

Proof.
Supongamos que B es una base y que conocemos $f(v_j), \forall v_j \in B$.

Sea $v \in V$, $v = \lambda^1 v_1 + \dots + \lambda^n v_n$, $v_i \in B$, $\lambda^i \in \mathbb{K}$

$f(x) = f(\lambda^1 v_1 + \dots + \lambda^n v_n) = \lambda^1 f(v_1) + \dots \lambda^n f(v_n)$ □

Proposition 1.4. *Sean $(V, +, \cdot)$ y $(V', +, \cdot)$ $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita con $dimV = n$ y $dimV' = m$.*

Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal, entonces dadas $\begin{cases} B = \{v_1, \dots, v_n\} & \textit{base de } V \\ B' = \{v_1', \dots, v_n'\} & \textit{base de } V' \end{cases}$

f se representa en esas bases como una matriz en $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Proof.
Como f es lineal, me basta con conocer $f(B)$, para ello, tenemos que conocer $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$, teniendo:

$$\begin{array}{rcl} f(v_1) & = & a_{11}v_1' + a_{21}v_2' + \dots + a_{m1}v_m', \quad a_{i1} \in \mathbb{K} \\ f(v_2) & = & a_{12}v_1' + a_{22}v_2' + \dots + a_{m2}v_m', \quad a_{i2} \in \mathbb{K} \\ \vdots & & \\ f(v_n) & = & a_{1n}v_1' + a_{2n}v_2' + \dots + a_{mn}v_m', \quad a_{in} \in \mathbb{K} \end{array}$$

Sea $v \in V : v = \lambda^1 v_1 + \dots + \lambda^n v_n, \lambda^i \in \mathbb{K}$

$$f(v) = \lambda^1 f(v_1) + \dots + \lambda^n f(v_n) =$$

$$= \lambda^1(a_{11}v_1' + \cdots + a_{m1}v_m') + \lambda^2(a_{12}v_1' + \cdots + a_{m2}v_m') + \cdots + \lambda^n(a_{1n}v_1' + \cdots + a_{mn}v_m') =$$
$$= (a_{11}\lambda^1 + a_{12}\lambda^2 + \cdots + a_{1m}\lambda^n)v_1' + (a_{12}\lambda^1 + \cdots + a_{2n}\lambda^n) + \cdots + (a_{m1}\lambda^1 + \cdots + a_{mn}\lambda^n)v_m'$$

$f(v) = \mu_1 v_1' + \mu_2 v_2' + \cdots + \mu_m v_m'$, siendo $\mu_i = (a_{i1}\lambda^1 + \cdots + a_{in}\lambda^n)$, luego, para construir la matriz A, ponemos las coordenadas de v_1 en la primera columna, las de v_2 en la segunda y así sucesivamente, tal que:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{pmatrix} \Rightarrow \mu = A \cdot \lambda$$

□

Proposition 1.5. *Sean V y V' dos espacios vectoriales en $\mathbb{K}$, sea $f : V \longrightarrow V'$ lineal.*

Sea $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V, $B_1' = \{v_1', \dots, v_m'\}$ base de V'.

Sea $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ la matriz que representa a f en B_1, B_1'.

Sea $B_2 = \{u_1, \dots, u_n\}$ base de V, $B_2' = \{u_1', \dots, u_m'\}$ base de V'.

Sea $\tilde{A} \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ la matriz que representa a f en B_2, B_2'.

Sea P la matriz de cambio de base de B_1 en B_2.

Sea Q la matriz de cambio de base de B_1' en B_2'.

Entonces $\tilde{A} = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

Proof. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal con $n = dimV$ y $m = dimV'$. Si A y $\tilde{A}$ son las matrices asociadas a f respecto de distintas bases, entonces

$$rg(A) = dim(Imf) = rg(\tilde{A})$$

Luego A y $\tilde{A}$ tienen igual rango, y por tanto, son matrices equivalentes. Concretemos más esta situación:
Sean B_1 y B_2 bases de V con cambio de base de B_1 a B_2 dado por $X_1 = PX_2$ y sean B_1' y B_2' bases de V', con cambio de B_1' a B_2' dado por $Y_1 = QY_2$.
Consideremos la matriz asociada a f respecto de B_1 y B_1', $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathscr{K})$, tal que $A = \mathscr{M}_{B_1,B_1'}(f)$ y la ecuación matricial

$$Y_1 = AX_1$$

De igual forma, sea $\tilde{A} \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ la matriz asociada a f respecto de B_2 y B_2', tal que $\tilde{A} = \mathscr{M}_{B_2,B_2'}(\mathbb{K})$ y la ecuación matricial de f respecto de estas bases,

$$Y_2 = \tilde{A}X_2$$

Gráficamente,

$$V \quad \to \quad V'$$

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & B_1 & \longrightarrow & B_1' & \\ P & \uparrow & & \uparrow & Q \\ & & \tilde{A} & & \\ & B_2 & \longrightarrow & B_2' & \end{array}$$

Entonces,

$$Y_2 = \begin{cases} \tilde{A}X_2 \\ Q^{-1}Y_1 = Q^{-1}AX_1 = Q^{-1}APX_2 \end{cases}$$

y en consecuente,

$$\tilde{A} = Q^{-1}AP$$

O bien,

$$X_2 = \begin{cases} \tilde{A}^{-1}Y_2 \\ P^{-1}X_1 = P^{-1}A^{-1}Y_1 = P^{-1}A^{-1}QY_2 \end{cases}$$

y en consecuente,

$$\tilde{A}^{-1} = P^{-1}A^{-1}Q$$

□

Theorem 1.8 (Primer teorema de isomorfía). *Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal, entonces:*

(i) Existe una aplicación lineal sobreyectiva $\pi : V \longrightarrow V/Kerf$

(ii) Existe un isomorfismo $\bar{f} : V/Kerf \longrightarrow Imf$

(iii) Existe una aplicación lineal inyectiva $i : Imf \longrightarrow V'$, tales que $f = i \circ \bar{f} \circ \pi$, tal que

$$\begin{array}{ccccc} & & f & & \\ & V & \longrightarrow & V' & \\ \pi & \downarrow & & \uparrow & i \\ & & \bar{f} & & \\ & V/Kerf & \longrightarrow & Imf & \end{array}$$

Si además V es finitamente generado,

$$dimV = dim(Kerf) + dim(Imf)$$

Definición 1.9. *Se llama rango de una aplicación lineal (matriz) a la dimensión de su imagen.*

1.3 Espacio dual

Definición 1.10. *Al conjunto de todas las formas lineales de un espacio vectorial V, se le denomina espaco dual de V y se le designa por V^*, es decir,*

$$V^* = \{f : V \to \mathbb{K} : \text{ lineales}\}$$

o bien

$$V^* = Hom_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$$

Definición 1.11. *Dadas $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base de V y $B^* = \{f^1, f^2, \dots, f^n\}$ base de V^*, decimos que B^* es la base dual de B si para cada $i = 1, 2, \dots, n$ se verifica que*

$$f^i(e_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Proposition 1.6. *Si V tiene dimensión n, entonces V^* es también un espacio vectorial de dimensión n.*

Proof.
Sea $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base de V, tendremos que $dimV = n$. Construimos la base dual como $B^* = \left\{f^1, f^2, \dots, f^n\right\}$, tal que para cada j, tenemos

$$\begin{array}{rccc} f^j: & V & \to & \mathbb{K} \\ & v = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda^j e_j & \mapsto & f^j(v) = \lambda_j \end{array}$$

Tenemos que verificar que las formas sean linealmente independientes, para ello debe cumplirse que

$$\lambda_1 f^1 + \lambda_2 f^2 + \cdots + \lambda_n f^n = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Para ello, lo aplicamos a un $e_i \in B$, tal que

$$(\lambda_1 f^1 + \lambda_2 f^2 + \cdots + \lambda_n f^n)(e_i) = 0$$

Al ser aplicación lineal,

$$\lambda_1 f^1(e_i) + \lambda_2 f^2(e_i) + \cdots + \lambda_n f^n(e_i) = 0$$

pero sabemos que $f^j(e_i) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$, luego la ecuación anterior se reduce a

$$\lambda_i f^i(e_i) = \lambda_i = 0$$

luego, como hemos cogido un i arbitrario, tendremos que $\lambda_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Por tanto, son linealmente independientes.

Ahora vamos comprobar que los elementos de B^* son un conjunto generador que genera el espacio V^*. Para ello, tomamos un elemento $g \in V^*$ y se deberá poder escribir como combinación lineal de los elementos de la base de V^*.
Sabemos que g debe satisfacer que $g(e_j) = \alpha_j$, pues debe estar determinado por la imagen de la base.
Podemos tomar un $v \in V$, que sea $v = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda^j e_j = \lambda^j e_j$, así,

$$g(v) = g\left(\lambda^j e_j\right) = \lambda^j g(e_j) = \lambda^j \alpha_j$$

siendo $\alpha_j \in \mathbb{K}$ y usando que $\lambda_j = f^j(v)$, tenemos que

$$g(v) = \alpha_j f^j(v)$$

y por tanto,

$$g = \alpha_1 f^1 + \alpha_2 f^2 + \cdots + \alpha_n f^n$$

Luego, hemos concluido que B^* es también conjunto generador, y por tanto es base de V^*, que posee n elementos, así $dimV = dimV^* = n$. $\square$

Este será el caso que nos interese, cuando V y, por tanto, V^* son espacios vectoriales de dimensión finita. Así, para la matriz asociada a una forma lineal $f : V \to \mathbb{K}$ usaremos siempre la base $\{1\}$ de este espacio y escribiremos $\mathscr{M}_B(f) \equiv \mathscr{M}_{B,\{1\}}(f)$

Proposition 1.7 (1ª Propiedad de las bases duales)**.** *Si B^* es la base dual de B, entonces para cada forma lineal f, los elementos de su matriz asociada en la base B coinciden con sus coordenadas en la base B^*.*

Proof. Llamemos $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ a la matriz asociada a f en la base B. Entonces $a_i = f(e_i)$, siendo los e_i los elementos de la base B. Por otra parte, si $f = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}_{B^*}$ entonces,

$$f = b_1 f^1 + b_2 f^2 + \cdots + b_n f^n$$

luego,

$$a_i = f(e_i) = (b_1 f^1 + b_2 f^2 + \dots b_n f^n)(e_i) = b_1 f^1(e_i) + b_2 f^2(e_i) + \cdots + b_i f^i(e_i) + \dots b_n f^n(e_i)$$

Usando la definición de la base dual, que es

$$f^j(e_i) = \delta_j^i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

nos queda entonces que $a_i = b_i$, luego, los elementos de la matriz asociada de f en B se corresponden con sus coordenadas en B^*. $\square$

Proposition 1.8. *Para cada base B de un espacio vectorial V, existe una base de V^* que es dual de B.*

Proof. Dada la base $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V, y sabiendo que una forma lineal está completamente determinada conociendo las imágenes de los vectores de B, por tanto, para cada $i = 1, 2, \dots, n$ existe una única f^i verificando

$$f^i(e_i) = 1 \quad \text{y} \quad f^j(e_i) = 0, \ \forall i \neq j$$

Luego, un conjunto de formas lineales $\left\{f^1, f^2, \dots, f^n\right\}$ verificando las condiciones para ser base dual (lo anterior), siempre existe.
Debemos comprobar que realmente sea una base de V^*. Como conocemos que la dimensión del espacio es n, solo necesitamos demostrar que los f^i son linealmente independientes:

$$\lambda_1 f^1 + \lambda_2 f^2 + \cdots + \lambda_n f^n = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Evaluamos un e_i arbitrario, tal que

$$0 = (\lambda_1 f^1 + \lambda_2 f^2 + \cdots + \lambda_n f^n)(e_i) = \lambda_1 f^1(e_i) + \lambda_2 f^2(e_i) + \cdots + \lambda_i f^i(e_i) + \cdots + \lambda_n f^n(e_i) = \lambda_i$$

Luego, son linealmente independientes y por tanto, son base dual. $\square$

Note 1.9. *El siguiente Teorema lo vamos a necesitar para demostrar la Proposición 1.10, ver su demostración en [**?**, Chapter I, Section 4, Theorem 1, Page 38]*

Theorem 1.12. *Para un matriz cuadrada $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es invertible.*
2. *A es regular a derecha (esto es, $BA = 0 \Rightarrow B = 0$).*
3. *A es regular a izquierda (esto es, $AB = 0 \Rightarrow B = 0$).*
4. *$rg(A) = n$.*
5. *La forma de Hermite por filas de A es la identidad.*

6. *La forma de Hermite por columnas de A es la identidad.*

7. *A es un producto de matrices elementales.*

Proposition 1.10. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea B una base de V respecto de la cual todos los vectores y formas lineales vienen dados. Si $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base cuyos vectores, escritos por columnas, forman la matriz A, entonces la base dual de B, $B^* = \left\{f^1, f^2, \ldots, f^n\right\}$ viene dada por las filas de A^{-1} y viceversa.*

Proof. En primer lugar, como B es base, entonces la matriz A es regular, es decir, tiene inversa[1]. Si $\begin{pmatrix} b_{i_1} & b_{i_2} & \ldots & b_{i_n}\end{pmatrix}$ es la matriz asociada a f^i y $e_j = \begin{pmatrix} a_{j_1} & a_{j_2} & \ldots & a_{j_n}\end{pmatrix}_B$, entonces debe cumplirse que

$$f^i(e_j) = \begin{pmatrix} b_{i_1} & b_{i_2} & \ldots & b_{i_n}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{j_1} \\ a_{j_2} \\ \vdots \\ a_{j_n}\end{pmatrix} = \delta_{ij}$$

Es decir, las matrices asociadas a f^i, con $i = 1, 2, \ldots, n$, son las filas de A^{-1}, o lo que es lo mismo, sus coordenadas en la base B^*. Además, puesto que A^{-1} es regular, sus filas son linealmente independientes. $\square$

Note 1.11. *Esta proposición nos sirve para calcular el problema inverso, es decir, dada una base de V^*, calcular la base de V de la cual es dual.*

Ejemplo 1.12 (Ejemplo de las proposiciones 1.3 y 1.4)**.**
(a) ***Considerando en*** $\mathbb{R}^3$ ***la base*** $B = \{(1,-1,1), (-1,2,-1), (-1,1,0)\}$***, calcular la base dual de*** B. *(b)* ***Hacerlo también a la inversa.***

(a) Tenemos $B = \{(1,-1,1), (-1,2,-1), (-1,1,0)\} \in \mathbb{R}^3$. ¿$B^* = \left\{f^1, f^2, \ldots, f^n\right\}$?

Como debemos obtener 3 formas lineales (componentes de B^*), bastará con obtener las matrices asociadas a la base canónica:

- *Comenzamos obteniendo la matriz asociada de f^1:*

  Por definición de base dual, sabemos que $f^i(e_j) = \delta_{ij}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f^1\left[(1,-1,1)\right] = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1\end{pmatrix} = 1 \\[2em] f^2\left[(-1,2,-1)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1\end{pmatrix} = 0 \\[2em] f^3\left[(-1,1,0)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

[1]Cosa que se cumple, pues al ser A la matriz asociada a una f en la base B, que tiene dimensión n, por tanto $rg(A) = n$. Así, usando el siguiente Teorema vemos que A es regular por el Teorema 1.12

Entonces, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}-a_{12}+a_{13}=1 \\ -a_{11}+2a_{12}-a_{13}=0 \\ -a_{11}+a_{12}+0=0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema tenemos, $a_{11}=a_{12}=a_{13}=1$.

- *Ahora calculamos la de* f^2*:*

$$\Rightarrow \begin{cases} f^1\left[(1,-1,1)\right]=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \\ f^2\left[(-1,2,-1)\right]=1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \\ \\ f^3\left[(-1,1,0)\right]=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

Entonces, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a_{21}-a_{22}+a_{23}=0 \\ -a_{21}+2a_{22}-a_{23}=1 \\ -a_{21}+a_{22}+0=0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema tenemos $a_{21}=a_{22}=1$ *y* $a_{23}=0$.

- *Ahora calculamos la de* f^3*:*

$$\Rightarrow \begin{cases} f^1\left[(1,-1,1)\right]=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \\ f^2\left[(-1,2,-1)\right]=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ \\ f^3\left[(-1,1,0)\right]=1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \end{cases}$$

Entonces, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a_{31}-a_{32}+a_{33}=0 \\ -a_{31}+2a_{32}-a_{33}=0 \\ -a_{31}+a_{32}+0=1 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema tenemos $a_{31}=-1$, $a_{32}=0$ *y* $a_{33}=1$.

Por tanto la matriz asociada en la base canónica será,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde la primera fila será la matriz asociada a $f^1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*, la segunda fila será la matriz asociada a* $f^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *y la tercera fila será la matriz asociada a* $f^3 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*.*
Entonces tendremos:

$$f^1, f^2, f^3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(x,y,z) &= x+y+z \\ f^2(x,y,z) &= x+y \\ f^3(x,y,z) &= -x+z \end{aligned}\right\} (\triangle)$$

(b) *Partiendo de* $(\triangle)$*, vamos a llegar a la base* B*.*
Sabemos que $\left\{f^1, f^2, f^3\right\}$ *forman una base dual de* $\mathbb{R}^3$*, pues lo acabamos de obtener, pero como queremos hacerlo como un ejercicio genérico, debemos comprobar que son linealmente independientes, ya que* $dim(\mathbb{R}^3) = 3$*. La forma más sencilla de ver que son l.i. es introducir los vectores en una matriz y calcular su rango.*
Usando la primera propiedad de las bases duales, la matriz asociada a f^i *en la base canónica nos proporciona también las coordenadas de* f^i *en la base dual de la base canónica. Así, las matrices asociadas a* f^1, f^2, f^3 *son:*

$$f^1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f^3 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, ver que son l.i. se reduce al cálculo del determinante,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+0+1-1-0 = 1 \neq 0$$

por tanto, son linealmente independiente.
Para encontrar la base de $\mathbb{R}^3$ *de la cual es dual* $\left\{f^1, f^2, f^3\right\}$*, solo tenemos que calcular la inversa de la matriz cuyo determinante acabamos de calcular:*

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)^t}{\cancelto{1}{|A|}}, \quad Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto, los vectores de la base de $\mathbb{R}^3$ *de la cual es dual* $\left\{f^1, f^2, f^3\right\}$*, serán las columnas de la matriz* A^{-1}*, tal que*

$$B = \{(1,-1,1), (-1,2,-1), -1, 1, 0\}$$

Proposition 1.13 (2ª Propiedad de las bases duales)**.** *Si* $B^* = \left\{f^1, \ldots, f^n\right\}$ *es la base dual de* B*, entonces dado un vector* $x \in V$*, si* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_B$*, se verifica que* $x^i = f^i(x)$*;* $\forall i = 1, \ldots, n$*.*

Proof. Como $x \in V$ y $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, base de V, entonces podremos escribir $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \ldots x^n e_n$, luego

$$f^i(x) = f^i(x^1 e_1 + x^2 e_2 + \ldots x^n e_n) = x^1 f^i(e_1) + x^2 f^i(e_2) + \cdots + x^i f^i(e_i) + \cdots + x^n f^i(e_n) = x^i$$

Por tanto, $x^i = f^i(x)$. $\square$

Theorem 1.13. *V es isomorfo con $(V^*)^*$, siendo el espacio bidual ($V \cong (V^*)^*$).*

Proof. Sea

$$\begin{aligned} \phi: \quad & V \to (V^*)^* \\ & v \mapsto \phi(v) \end{aligned}$$

donde $\phi(v) \in (V^*)^*$. Se define como

$$\begin{aligned} \phi(v): \quad & V^* \to \mathbb{K} \\ & f \mapsto f(v) \end{aligned}$$

Veamos que ϕ es lineal, $\forall u, v \in V$;

$$\begin{aligned} \phi(u): \quad & V^* \to \mathbb{K} \\ & f \mapsto f(u) \end{aligned}; \quad \begin{aligned} \phi(v): \quad & V^* \to \mathbb{K} \\ & f \mapsto f(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(u+v): \quad & V^* \to \mathbb{K} \\ & f \mapsto f(u+v) \end{aligned}; \quad \begin{aligned} \phi(v)+\phi(u): \quad & V^* \to \mathbb{K} \\ & f \mapsto f(v)+f(u) \end{aligned}$$

Como $f \in V^*$ es lineal, entonces se cumple que $f(u+v) = f(u)+f(v)$ y por tanto, $\phi(u+v) = \phi(u)+\phi(v)$. También,

$$\forall u \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}; \quad \begin{aligned} \phi(\lambda \cdot u): \quad & V^* \to \mathbb{K} \\ & f \mapsto f(\lambda \cdot u) \end{aligned}; \quad \begin{aligned} \lambda \cdot \phi(u): \quad & V^* \to \mathbb{K} \\ & f \mapsto \lambda \cdot f(u) \end{aligned}$$

como $f \in V^*$ es lineal, se cumple que $f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$ y por tanto, $\phi(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot \phi(u)$. Luego, ϕ es lineal.

Veamos que $Ker\phi = \{0\}$:
si $u \in \ker \phi$, entonces $\phi(u) = 0$, tal que

$$\begin{aligned} \phi(u): \quad & V^* \to \mathbb{K} \\ & f \mapsto 0 \end{aligned}$$

Sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base de V, sabemos que

$$\begin{aligned} \phi_{e_j}: \quad & V \to \mathbb{K} \\ & v \mapsto \phi_{e_j}(x) = x_j \end{aligned}$$

tal que $v = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots x^n e_n$, se verifica que $\phi_{e_j} \in V^*$. Por tanto, $\phi(u)(\phi_{e_j}) = 0$, pues $u \in Ker\phi$ y $\phi(u)$ es la función nula, tal que

$$u = x^1 e_1 + \dots x^n e_n = 0e_1 + \dots + 0e_n = 0$$

Por tanto, $Ker\phi = \{0\}$, luego $\phi : V \to (V^*)^*$ es inyectiva y lineal.
Por la Proposición 1.6, tenemos que $dimV = dimV^* = n$ y por tanto, $dim(V^*)^* = n = dimV^*$. Luego, $\phi : V \to V^*$ verifica

$$dimIm\phi = dimV - dimKer\phi = n - 0 = n \Rightarrow dimIm\phi = dim(V^*)^* = n \Rightarrow Im\phi = (V^*)^*$$

luego, la aplicación es sobreyectiva y por tanto, es biyectiva. Luego, al ser biyectiva y aplicación lineal, son isomorfos. $\square$

1.3.1 Anulador de un subespacio

Definición 1.14. *Consideremos un espacio vectorial V y sea S un subconjunto de V, entonces se define el anulador de S como el conjunto*

$$an(S) = \{f \in V^* \mid f(v) = 0, \forall v \in S\}$$

Proposition 1.14. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea S un subconjunto de V, entonces se verifica:*

(i) $an(S)$ *es un subespacio vectorial de* V^*.

(ii) $an(S) = an(L(S))$

Proof.
(i)
Dadas dos formas de $an(S)$, digamos $f, g \in an(S)$, queremos probar que $f + g \in an(S)$, y sea $\lambda \in \mathbb{K}$, probar que $\lambda f \in an(S)$.
Para lo primero, hacemos $\forall v \in V$,

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow f + g \in an(S)$$

Para lo segundo hacemos,

$$(\lambda f)(v) = \lambda f(v) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda f \in an(S)$$

Por tanto, es subespacio vectorial de V^*. □

(ii)

$\subseteq$ Sabemos que $S \subseteq L(S)$, entonces si $f \in an(L(S))$ anula a todo vector de $L(S)$, en particular, anula a todo vector de S y así se tiene la inclusión $an(L(S)) \subseteq an(S)$.

$\supseteq$
Considerando $g \in an(S)$ y cualquier vector de $L(S)$ de la forma,

$$v = a^1 s_1 + a^2 s_2 + \dots a^r s_r$$

con $s_i \in S$ para cada $i = 1, 2, \dots, r$. Entonces,

$$f(v) = f(a^1 s_1 + a^2 s_2 + \dots a^r s_r) = a^1 \cancelto{0}{f(s_1)} + a^2 \cancelto{0}{f(s_2)} + \dots + a^r \cancelto{0}{f(s_r)} = 0$$

y por tanto, $f \in an(S)$, luego $an(S) \subseteq an(L(S))$. Luego, $an(S) = an(L(S))$. □

Note 1.15. *Cuando consideramos un subespacio $U \leq V$, su anulador $an(U)$ puede calcularse fácilmente usando la segunda de las propiedades anteriores.*

Note 1.16. *En general, si llamamos $n = dimV$ y U es un subespacio de V con una base $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$, entonces $an(U) = an(\{u_1, \dots, u_r\})$ (por la Proposición 1.14), lo que permite escribir las r-ecuaciones cartesianas de $an(U)$. Además, como $\{u_1, \dots, u_r\}$ son l.i., entonces $din(an(U)) = n - r$, es decir,*

$$din(an(U)) = dimV - dimU$$

1.3.2 Aplicación lineal traspuesta

Definición 1.15. *Dados dos espacios vectoriales V y V' sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, es posible considerar los respectivos espacios duales, y si $f : V \to V$' es una aplicación lineal con matriz asociada A respecto de ciertas bases B y B', entonces se puede definir una aplicación lineal entre los duales mediante f. Para ello, tomemos $\varphi \in (V')^*$, es decir, $\varphi : V' \to \mathbb{K}$, entonces podemos considerar el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ V & \to & V' \\ & & \downarrow \quad \varphi \\ & & \mathbb{K} \end{array}$$

y la composición $\varphi \circ f : V \to \mathbb{K}$ es un elemento de V^*. De esta manera, tenemos definida una aplicación a la que llamamos f^t, aplicación traspuesta de f, tal que $f^t : (V')^* \to V^*$ dada por $f^t(\varphi) = \varphi \circ f$.

Proposition 1.17. *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal y sean B y B^* bases de V y V' respectivamente, entonces se verifica:*

(i) *f^t es una aplicación lineal.*

(ii) *Si la matriz asociada a f respecto de las bases B y B' es A, entonces la matriz asociada a f^t en las bases B^* y $(B')^*$ es A^t.*

Proof.
(i)
Si $\varphi_1, \varphi_2 \in (V')^*$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, entonces

$$f^t(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = (a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) \circ f$$

Dado $v \in V$, tenemos

$$((a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) \circ f)(v) = (a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2)(f(v)) = a_1\varphi_1(f(v)) + a_2\varphi_2(f(v)) =$$

$$= a_1(\varphi_1 \circ f)(v) + a_2(\varphi_2 \circ f)(v) = (a_1(\varphi_1 \circ f) + a_2(\varphi_2 \circ f))(v) = (a_1 f^t(\varphi_1) + a_2 f^t(\varphi_2))(v)$$

con lo que

$$f^t(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 f^t(\varphi_1) + a_2 f^t(\varphi_2)$$

luego, es aplicación lineal.

(ii)
Calculamos las imágenes de las formas lineales de $(B')^*$ por f^t:
si φ_i es el i-ésimo elemento de $(B')^*$, su matriz asociada en la base B' es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1^{(i)} & \dots & 0 \end{pmatrix}$, donde el 1 está en el i-ésimo lugar.
Entonces, $f^t(\varphi_i) = \varphi_i \circ f$ tiene como matriz asociada en la base B el producto siguiente,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1^{(i)} & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$$

que es la i-ésima fila de A. Nos da las coordenadas de $f^t(\varphi_i)$ en la base B^*; estas coordenadas constituyen a la i-ésima columna de la matriz asociada a f^t. □

1.3.3 Una aplicación de la teoría del espacio dual: Interpretación de Lagrange

Definición 1.16. *Sea $a \in \mathbb{R}$, llamamos evaluar un polinomio $q(x)$ en a, al proceso de sustituir la indeterminada x por el valor real a en el polinomio $p(x)$; al número real obtenido de esta forma lo denotamos por $p(a)$.*

Proposition 1.18. *La aplicación evaluar en a, que denotamos por E_a, es una forma lineal en $\mathbb{P}(\mathbb{R})$.*

Proof. Consideramos dos polinomios,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$E_a(\lambda_1 p(x) + \lambda_2 q(x)) = E_a((\lambda_1 a_0 + \lambda_2 b_0) + (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1)x + \cdots + (\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n)x^n) =$$

$$= \lambda_1 a_0 + \lambda_2 b_0 + (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1)a + \cdots + (\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n)a^n$$

y también,

$$\lambda_1 E_a(p(x)) + \lambda_2 E_a(q(x)) = \lambda_1 E_a(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) + \lambda_2 E_a(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) =$$

$$= \lambda_1(a_0 + a_1 a + \cdots + a_n a^n) + \lambda_2(b_0 + b_1 a + \cdots + b_n a^n) =$$

$$= \lambda_1 a_0 + \lambda_2 b_0 + (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1)a + \cdots + (\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n)a^n$$

Luego, $E_a(\lambda_1 p(x) + \lambda_2 q(x)) = \lambda_1 E_a(p(x)) + \lambda_2 E_a(q(x))$, y por tanto, es una aplicación lineal. □

Note 1.19. *La matriz asociada a E_a en la base $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ de $\mathbb{P}(\mathbb{R})$, como $E_a(1) = 1$, $E_a(x) = a$, $E_a(x^2) = a^2$, …, $E_a(x^n) = a^n$, y por tanto, la matriz asociada de E_a es $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \end{pmatrix}_{\mathbb{P}(\mathbb{R})}$.*

Proposition 1.20. *Si $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ con $a_i \overset{i \neq j}{\neq} a_j$, entonces $\{E_{a_0}, E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}\}$ es una base del espacio dual de $\mathbb{P}(\mathbb{R})$.*

Proof. Llamemos B^* a la base dual de la base $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ de $\mathbb{P}(\mathbb{R})$. Entonces las coordenadas de $E_{a_0}, E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}$ en la base B^* son

$$(1, a_0, a_0^2, \ldots, a_o^n), (1, a_1, a_1^2, \ldots, a_1^n), \ldots, (1, a_n, a_n^2, \ldots, a_n^n)$$

respectivamente. Veamos que son linealmente independientes; para ello, vemos que el determinante e la matriz es no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(a_i - a_j)$$

siendo este el Determinante de Vandermonde.
Como $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$, este determinante nunca se anula, luego son linealmente independientes, y por tanto, son una base. □

Proposition 1.21. *Los polinomios*

$$p_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - a_j}{a_j - a_i}; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n$$

forman la base de $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ *de la cual es dual la formada por* $E_{a_0}, E_{a_1}, \ldots, E_{a_n}$.

Proof. Si evaluamos el polinomio $p_j(x) = \prod\limits_{i \neq j} \frac{x-a_j}{a_i-a_j}$ en a_i con $i \neq j$, como en el producto aparece el término $(a_i - a_i) = 0$, obtenemos $p_j(a_i) = 0$. Al evaluar en a_j, el numerador y el denominador de $p_j(a_j)$ son idénticos, y se tiene $\frac{a_j-a_i}{a_j-a_i} = 1$, luego $p_j(a_j) = 1$. Así, $E_{a_i}(p_j) = \delta_{ij}$, que es la condición de base dual. $\square$

Note 1.22. *Los polinomios descritos en la Proposición 1.15, reciben el nombre de polinomios de interpolación de Lagrange.*

Theorem 1.17. *Dados* $n+1$*-números reales distintos* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *para cualesquiera* $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, *existe un único polinomio* $p(x)$ *de grado menor o igual que* n, *de forma que* $p(a_i) = b_i$, *para cada* $i = 0.1.2, \ldots, n$. *Dicho polinomio viene dado por*

$$p(x) = \sum_{j=0}^{N} b_j p_j(x)$$

siendo $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ *los polinomios de interpolación de Lagrange.*

Proof. Si $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{N} b_i p_i(x)$ con $p_j(x) = \prod\limits_{i \neq j} \frac{x-a_i}{a_j-a_i}$. Vamos a ver que $p(x)$ es único:
Tomamos un polinomio de grado n, $q(x)$, que satisface lo mismo que $p(x)$, tal que $q(a_i) = b_i$. Definimos otro polinomio de grado n, tal que

$$r(x) = p(x) - q(x), \quad \text{con} \quad \begin{cases} r(a_i) = 0 & i = 0, 1, \ldots, n \\ \text{Como } r(a_i) = 0, & (x - a_i)\,|r(x) \end{cases}$$

luego,

$$r(x) = (x - a_i)s(x) = \Lambda(x)(x - a_0)(x - a_1)\ldots(x - a_n)$$

pero vemos que el grado de $r(x)$ es mayor o igual que $n+1$, que es una contradicción, salvo que $\Lambda(x) = 0$ y por tanto $q(x) = p(x)$, luego, el polinomio es único. Ahora, vamos a demostrar que este polinomio satisface la igualdad:

$$p(a_0) = \sum_{i=0}^{N} b_i p_i(a_0) = \sum_{i=0}^{N} b_i \delta_0^i = b_0$$

$$p(a_j) = \sum_{i=0}^{N} b_i p_i(a_j) = \sum_{i=0}^{N} b_i \delta_j^i = b_j$$

Luego, queda demostrado. $\square$

1.3.4 Notación de Einstein

La notación de Einstein va a servir para facilitarnos la escritura, pues cada vez que tengamos un vector o una forma escrita como combinación lineal, vamos a poder redefinirlos como

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i v_i \equiv \lambda^i v_i$$

esto para un vector. Para una forma, tendremos

$$p = \sum_{i=1}^{n} \mu_i f^i \equiv \mu_i f^i$$

Además, para simplificar aún más la notación y dejarnos de tantas letras, vamos a identificar los escalares de w como

$$\lambda^i \equiv w^i$$

Así, los vectores como combinación lineal de otros vectores, los escribiremos como

$$w = w^i v_i$$

Y para las formas, haremos la identificación

$$\mu_i \equiv p_i$$

Así, las formas como combinación lineal de otras formas se escribirán como

$$p = p_i f^i$$

Ejemplo 1.23. *Un ejemplo de ello, será a la hora de identificar un vector en los términos de su base, pues suponiendo un V espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y cuya base sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, tomando un $u \in V$, lo denotaremos como,*

$$u = u^i v_i$$

Ejemplo 1.24. *Otro ejemplo será a la hora de identificar una forma en términos de la base dual, pues suponiendo un V^* espacio dual de V, cuya base dual es $B^* = \left\{f^1, f^2, \ldots, f^n\right\}$, tomando un $q \in V^*$, lo denotaremos como,*

$$q = q_i f^i$$

Note 1.25. *En un artículo físico, se identifica directamente el escalar con el vector, es decir,*

$$w^i \equiv w$$

pues se presupone que existe una base donde w está bien definido. Así, los físicos usaremos de forma indistinguible los vectores y sus componentes respecto de una base fijada.

1.4 Formas bilineales, productos escalares y formas cuadráticas

1.4.1 Producto escalar

Definición 1.18. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, una forma bilineal en V es una aplicación*

$$f : V \times V \to \mathbb{K}$$

verificando:

(i) $f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v)$

(ii) $f(u, v_1 + v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2)$

(iii) $f(\lambda u, v) = \lambda f(u, v)$

(iv) $f(u, \lambda v) = \lambda f(u, v)$

para cualesquiera $\lambda \in \mathbb{K}$ *y* $u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$*.*

Proposition 1.26. *Una aplicación* $f : V \times V \to \mathbb{K}$ *es una forma bilineal si y solamente si,*

(i) $f(\lambda u_1 + \mu u_2, v) = \lambda f(u_1, v) + \mu f(u_2, v)$

(ii) $f(u, \lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(u, v_1) + \mu f(u, v_2)$

para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *y* $u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$*.*

Proof. Supongamos que f es bilineal, entonces

$$f(\lambda u_1 + \mu u_2, v) = f(\lambda u_1, v) + f(\mu u_2, v) = \lambda f(u_1, v) + \mu f(u_2, v)\checkmark$$

$$f(u, \lambda v_1 + \mu v_2) = f(u, \lambda v_1) + f(u, \mu v_1) = \lambda f(u, v_1) + \mu f(u, v_2)\checkmark$$

Recíprocamente, suponiendo que se verifican estas condiciones, entonces para $\lambda = 1, \mu = 1$ se obtienen *(i)* y *(ii)*, y con $\mu = 0$, obtenemos *(iii)* y *(iv)*. $\square$

Definición 1.19. *Sea* $\mathbb{K}$ *un cuerpo y* V *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial, una forma bilineal en* V *es una aplicación* $f : V \times V \to \mathbb{K}$ *que verifica:*

(i) $f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v)$

(ii) $f(u, v_1 + v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2)$

(iii) $f(a \cdot u, v) = a \cdot f(u, v)$

(iv) $f(u, a \cdot v) = a \cdot f(u, v)$

tal que $\forall a \in \mathbb{K}$*,* $\forall u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$*.*

Proposition 1.27 (Propiedades)**.** *Sea* $f : V \times V \to \mathbb{K}$ *una forma bilineal, entonces se verifica:*

(i) $f(u, 0) = f(0, u) = 0$*;* $\forall u, v \in V$*.*

(ii) $f(-u, v) = f(u, -v) = -f(u, v)$*;* $\forall u, v \in V$

(iii) $f\left(\sum_i a^i u_i, \sum_j b^j v_j\right) = f\left(a^i u_i, b^j v_j\right) = a^i b^j f(u_i, v_j)$*;* $\forall a^i, b^j \in \mathbb{K}$*,* $\forall u_i, v_j \in V$*.*

Proof.

(i) Sea $0 = v - v$, $\forall v \in V$,

$$f(u, 0) = f(u, v - v) \overset{(ii),(iv)}{=} f(u, v) - f(u, v) = 0$$

$$f(0, u) = f(v - v, u) \overset{(i),(iii)}{=} f(v, u) - f(v, u) = 0$$

(ii) Sea $-v = (-1) \cdot v$, $(-1) \in \mathbb{K}$, $\forall u, v \in V$,

$$f(-u, v) \overset{(iii)}{=} -f(u, v)$$

$$f(u, -v) \overset{(iv)}{=} -f(u, v)$$

(iii) Sean $\forall v_j, u_i \in V$ y $\forall a_i, b_j \in \mathbb{K}$,

$$f\left(a^i u_i, b^j v_j\right) \overset{(i),(ii)}{=} f(a^i u_i, b^j v_j) \overset{(iii),(iv)}{=} a^i b^j f(u_i, v_j)$$

donde hemos usado las condiciones de la definición de forma bilineal. □

Definición 1.20. *Dado un espacio vectorial real V, definimos el producto escalar como una aplicación*

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

verificando,

(i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, $\forall u, v \in V$

(ii) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$, $\forall u, v, w \in V$

(iii) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$, $\forall u, v, \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

(iv) No degenerada, es decir, $\nexists v \neq 0$, $v \in V$, *tal que* $\langle v, w \rangle = 0$, $\forall w \neq 0 \in V$

Proposition 1.28. *El producto escalar es una forma bilineal.*

Proof. Para ver que el producto escalar sea una forma bilineal, debe satisfacer:

$$\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$$

$$\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$$

$$\langle \lambda \cdot u, v \rangle = \lambda \cdot \langle u, v \rangle$$

$$\langle u, \lambda \cdot v \rangle = \lambda \cdot \langle u, v \rangle$$

pero es trivial ver que las dos primeras condiciones se satisfacen por *(ii)*, y las dos últimas, por *(iii)*, que vienen de la definición de producto escalar, luego es una forma bilineal. □

Definición 1.21. *Una forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{K}$ es simétrica si verifica:*

$$f(x, y) = f(y, x); \quad \forall x, y \in V$$

Definición 1.22. *Una forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{K}$ es antisimétrica si verifica:*

$$f(x, y) = -f(y, x); \quad \forall x, y \in V$$

Proposition 1.29. *El producto escalar es una forma bilineal simétrica.*

Proof. Por la definición de producto escalar, la condición *(i)* nos dice que es una forma simétrica. □

Lemma 1.30. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces se verifica:*

$$f \text{ es antisimétrica } \Leftrightarrow f(x, x) = 0, \text{ para cada } x \in V$$

Proof. Si f es antisimétrica, entonces $f(x,x) = -f(x,x)$, luego, sumando $f(x,x)$ a ambos lados, tenemos $2f(x,x) = 0$, con $2 \in \mathbb{C}$, luego $f(x,x) = 0$.
Si $f(x,x) = 0$, $\forall x \in V$, tal que

$$0 = \cancelto{0}{f(u+v, u+v)} = \cancelto{0}{f(u,u)} + f(u,v) + f(v,u) + \cancelto{0}{f(v,v)}$$

luego, $f(u,v) + f(v,u) = 0$, y entonces $f(u,v) = -f(v,u)$, luego es antisimétrica. □

Proposition 1.31. *Toda forma bilineal puede descomponerse como suma de una forma bilineal simétrica y una antisimétrica.*

Proof. Sea una forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{K}$, consideramos las aplicaciones $f_S, f_T : V \times V \to \mathbb{K}$ definidas por

$$f_S(x,y) = \frac{1}{2}\left[f(x,y) + f(y,x)\right]$$

$$f_T(x,y) = \frac{1}{2}\left[f(x,y) - f(y,x)\right]$$

Vamos a ver que son formas bilineales:
Empezamos por f_S,

$$f_S(x_1+x_2, y) = \frac{1}{2}\left[f(x_1+x_2, y) + f(y, x_1+x_2)\right] = \frac{1}{2}\left[f(x_1,y) + f(x_2,y) + f(y,x_1) + f(y,x_2)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(x_1,y) + f(y,x_1)\right] + \frac{1}{2}\left[f(x_2,y) + f(y,x_2)\right] = f_S(x_1,y) + f_S(x_2,y)\checkmark$$

$$f_S(x, y_1+y_2) = \frac{1}{2}\left[f(x, y_1+y_2) + f(y_1+y_2, x)\right] = \frac{1}{2}\left[f(x,y_1) + f(x,y_2) + f(y_1,x) + f(y_2,x)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(x,y_1) + f(y_1,x)\right] + \frac{1}{2}\left[f(x,y_2) + f(y_2,x)\right] = f_S(x,y_1) + f_S(x,y_2)\checkmark$$

$$f_S(\lambda \cdot x, y) = \frac{1}{2}\left[f(\lambda \cdot x, y) + f(y, \lambda \cdot x)\right] = \frac{1}{2}\left[\lambda \cdot f(x,y) + \lambda f(y,x)\right] = \lambda\frac{1}{2}\left[f(x,y) + f(y,x)\right] = \lambda f_S(x,y)\checkmark$$

$$f_S(x, \lambda \cdot y) = \frac{1}{2}\left[f(x, \lambda \cdot y) + f(\lambda \cdot y, x)\right] = \frac{1}{2}\left[\lambda \cdot f(x,y) + \lambda f(y,x)\right] = \lambda\frac{1}{2}\left[f(x,y) + f(y,x)\right] = \lambda f_S(x,y)\checkmark$$

Veamos que f_S es simétrica:

$$f_S(x,y) = \frac{1}{2}\left[f(x,y) + f(y,x)\right] = \frac{1}{2}\left[f(y,x) + f(x,y)\right] = f(y,x)\checkmark$$

Seguimos con f_T,

$$f_T(x_1+x_2, y) = \frac{1}{2}\left[f(x_1+x_2, y) - f(y, x_1+x_2)\right] = \frac{1}{2}\left[f(x_1,y) + f(x_2,y) - f(y,x_1) - f(y,x_2)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(x_1,y) - f(y,x_1)\right] + \frac{1}{2}\left[f(x_2,y) - f(y,x_2)\right] = f_T(x_1,y) + f_T(x_2,y)\checkmark$$

$$f_T(x, y_1+y_2) = \frac{1}{2}\left[f(x, y_1+y_2) - f(y_1+y_2, x)\right] = \frac{1}{2}\left[f(x,y_1) + f(x,y_2) - f(y_1,x) - f(y_2,x)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(x,y_1) - f(y_1,x)\right] + \frac{1}{2}\left[f(x,y_2) - f(y_2,x)\right] = f_T(x,y_1) + f_T(x,y_2)\checkmark$$

$$f_T(\lambda \cdot x, y) = \frac{1}{2}\left[f(\lambda \cdot x, y) - f(y, \lambda \cdot x)\right] = \frac{1}{2}\left[\lambda \cdot f(x,y) - \lambda f(y,x)\right] = \lambda\frac{1}{2}\left[f(x,y) - f(y,x)\right] = \lambda f_T(x,y)\checkmark$$

$$f_T(x, \lambda \cdot y) = \frac{1}{2}\left[f(x, \lambda \cdot y) - f(\lambda \cdot y, x)\right] = \frac{1}{2}\left[\lambda \cdot f(x, y) - \lambda f(y, x)\right] = \lambda \frac{1}{2}\left[f(x, y) - f(y, x)\right] = \lambda f_T(x, y)\checkmark$$

Veamos que f_T es antisimétrica:

$$f_T(x, y) = \frac{1}{2}\left[f(x, y) - f(y, x)\right] = \frac{1}{2}\left[-f(y, x) + f(x, y)\right] = -\frac{1}{2}\left[f(y, x) - f(x, y)\right] = -f(y, x)\checkmark$$

Para cada par de vectores $x, y \in V$ tenemos:

$$f_S(x, y) + f_T(x, y) = \frac{1}{2}\left[f(x, y) + \cancel{f(y, x)}\right] + \frac{1}{2}\left[f(x, y) - \cancel{f(y, x)}\right] = f(x, y)$$

$\square$

1.4.2 Formas cuadráticas

Definición 1.23. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal en V. Se llama* ***forma cuadrática*** *asociada a f, a la aplicación,*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & V & \to & \mathbb{K} \\ & \Phi(x) & \mapsto & f(x, x) \end{array}$$

$\forall x \in V$.

Proposition 1.32 (Propiedades)**.** *Sea $\Phi : V \to \mathbb{K}$ la forma cuadrática asociada a la función bilineal f, para cualesquiera $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y \in V$ se verifica:*

(i) $\Phi(0) = 0$

(ii) $\Phi(\lambda x) = \lambda^2 \Phi(x)$

(iii) $\Phi(x, y) = \Phi(x) + \Phi(y) + f(x, y) + f(y, x)$

Proof. (i) $\Phi(0) = f(0, 0) = 0$ $\square$

(ii) $\Phi(\lambda x) = f(\lambda x, \lambda x) = \lambda(x, \lambda x) = \lambda^2 f(x, x) = \lambda^2 \Phi(x)$ $\square$

(iii) $\Phi(x + y) = f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(y, y) + f(x, y) + f(y, x) = \Phi(x) + \Phi(y) + f(x, y) + f(y, x)$ $\square$

Note 1.33. *Distintas formas bilineales pueden dar lugar a la misma forma cuadrática.*

Proposition 1.34. *Si f es una forma bilineal simétrica y Φ es la forma cuadrática asociada a f, entonces para cada forma bilineal antisimétrica g se tiene,*

$$\Phi(x) = f(x, x) = f(x, x) + g(x, x) = (f + g)(x, x)$$

Proof. Si g es antisimétrica, entonces $g8(x, x) = -g(x, x) \Rightarrow g(x, x) = 0$, luego,

$$\Phi(x) = f(x, x) = f(x, x) + 0 = f(x, x) + g(x, x)$$

al ser f y g aplicaciones bilineales, entonces

$$(f + g)(x, x) = f(x, x) + g(x, x)$$

luego,

$$\Phi(x) = f(x, x) = (f + g)(x, x)$$

Por tanto, Φ también será la forma cuadrática asociada a $f+g$. Por tanto, podemos decir que la forma cuadrática asociada a una forma bilineal solo depende de la parte simétrica de ésta.

Vemos entonces que de entre todas las formas bilineales que dan lugar a la misma forma cuadrática (existen infinitas), solo existe una forma que es simétrica.

Proposition 1.35. *Dada una forma cuadrática Φ en V, existe una única forma bilineal simétrica f_P, cuya forma cuadrática asociada es Φ. Llamada forma polar de Φ.*

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$
Para cada forma bilineal f cuya forma cuadrática asociada sea Φ, se tiene por la propiedad *(iii)*, $f(x,y)+f(y,x)=\Phi(x+y)-\Phi(x)-\Phi(y)$.
Si imponemos que f sea simétrica, entonces $2f(x,y)=\Phi(x+y)-\Phi(x)-\Phi(y)$, con lo cual, f está unívocamente determinada por:

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left[\Phi(x+y)-\Phi(x)-\Phi(y)\right]$$

y por tanto, es única.
$\boxed{\Leftarrow}$
Sea la forma bilineal f, definida por $f(x,y)=\frac{1}{2}\left[\Phi(x+y)-\Phi(x)-\Phi(y)\right]$, vemos que es simétrica:

$$\begin{aligned} f(x,y)=\frac{1}{2}\left[f(x+y,x+y)-f(x,x)-f(y,y)\right]= \\ =\frac{1}{2}\left[\cancel{f(x,x)}+\cancel{f(y,y)}+f(x,y)+f(y,x)-\cancel{f(x,x)}-\cancel{f(y,y)}\right]= \\ =\frac{1}{2}\left[f(x,y)+f(y,x)\right]\end{aligned}$$

luego,

$$2f(x,y)=f(x,y)+f(y,x)\Rightarrow \cancel{2}f(x,y)-\cancel{f(x,y)}=f(y,x)\Rightarrow f(x,y)=f(y,x)$$

luego, f es antisimétrica.
Hemos demostrad que existe una única forma bilineal simétrica, cuya forma cuadrática asociada es Φ. $\square$

Corollary 1.36. *Sea Φ una forma cuadrática en V asociada a la forma bilineal g. La forma polar f_P de Φ se puede obtener como:*

(i) $f_P(x,y)=\frac{1}{2}\left[\Phi(x+y)-\Phi(x)-\Phi(y)\right]$

(ii) $f_P(x,y)=\frac{1}{4}\left[\Phi(x+y)-\Phi(x-y)\right]$

(iii) $f_P(x,y)=\frac{1}{2}\left[g(x,y)+g(y,x)\right]$

Proof. (i) Ya lo hicimos antes. $\square$

(ii) Sabemos que $\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y)+2f_P(x,y)$ y que $\Phi(x-y)=f(x-y,x-y)=f(x,x)+f(y,y)-f(x,y)-f(y,x)=\Phi(x)+\Phi(y)-2f_P(c,y)$, luego, restando ambas expresiones:

$$\Phi(x+y)-\Phi(x-y)=4f_P(x,y)\Rightarrow f_P(x,y)=\frac{1}{4}\left[\Phi(x+y)-\Phi(x-y)\right] \quad \square$$

(iii) Si Φ es la forma cuadrática asociada a g, entonces

$$\Phi(x+y)=\cancel{\Phi(x)}+\cancel{\Phi(y)}+g(x,y)+g(y,x)=\cancel{\Phi(x)}+\cancel{\Phi(y)}+2f_P(x,y)$$

luego,

$$f_P(x,y)=\frac{1}{2}\left[g(x,y)+g(y,x)\right]$$

Matriz asociada a una forma cuadrática

Dada una forma cuadrática Φ en V y dada una base B de V, llamaremos matriz asociada a Φ respecto de la base B a la matriz asociada respecto de la base B de la forma polar de Φ. En particular, la matriz asociada a una forma cuadrática es siempre una matriz simétrica. Llamaremos rango de Φ al rango $rg(\Phi)$ de su matriz asociada, que coincide con el rango de su forma polar. Luego,

$$\Phi(x) = X^t \cdot A \cdot X = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \overset{a_{ij}=a_{ji}}{\Rightarrow} \Phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j$$

Luego,

$$\text{Para } n = 2: \quad \Phi(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy$$

$$\text{Para } n = 3: \quad \Phi(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

Conjugación respecto de una forma cuadrática

Definición 1.24. *Sea $\Phi : V \to \mathbb{K}$ una forma cuadrática, y sea $f_P : V \times V \to \mathbb{K}$ su forma polar. Dos vectores $x, y \in V$ se dice que son conjugados respecto de Φ si $f_P(x, y) = 0$. Se dice que el vector x es autoconjugado si es conjugado consigo mismo, es decir, $\Phi(x) = 0$.*
Dado un conjunto $S \subseteq V$, consideremos el conjunto de los vectores de V conjugados con todos los vectores de S:

$$S^C = \{x \in V \mid f_P(x, y) = 0, \quad \forall x, y \in V\}$$

Proposition 1.37. *Para cada subconjunto no vacío S de V, el conjunto S^C es un subespacio vectorial de V. Además, $S^C = (L(S))^C$.*

Proof. Sean $a, b \in \mathbb{K}$ y $u, v \in S^C$ arbitrarios, entonces para cada $y \in S$ se tiene,

$$f_P(a \cdot u + b \cdot v, y) = a \cdot f_P(u, y) + b \cdot f_P(v, y) = 0$$

Luego, $a \cdot u + b \cdot v \in S^C$, y en consecuencia, S^C es subespacio vectorial de V. □

Por otra parte, puesto que $S \subseteq L(S)$, se tiene que $(L(S))^C \subseteq S^C$. Para la otra inclusión, consideramos $x \in S^C$ y sea $y \in L(S)$ arbitrario. Entonces y se escribe como combinación lineal de vectores de S,

$$y = a_1s_1 + \ldots a_ks_k; \quad a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}; \;\; s_1, \ldots, s_k \in S$$

Así pues,

$$f_P(x, y) = f_P(x, a_1s_1 + \ldots a_ks_k) = a_1f_P(x, s_1) + \ldots a_kf_P(x, s_k) = 0$$

ya que $x \in S^C$ y los $s_i \in S$. Por tanto, $x \in (L(S))^C$ y así, $S^C \subseteq (L(S))^C$. Luego, hemos demostrado que $S^C = (L(S))^C$ □

Definición 1.25. *Se llama núcleo de la forma cuadrática Φ al subespacio V a*

$$N(\Phi) = V^C = \{x \in V \mid f_P(x, y) = 0; \;\; \forall y \in V\}$$

Se dice que Φ es no degenerada si $N(\Phi) = 0$, es decir, si el único vector que es conjugado a todos los vectores de V es el vector 0.

1.4.3 Signatura de una forma cuadrática real

Theorem 1.26. *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $\Phi : V \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Existe una base de V para la cual, la matriz asociada a Φ es diagonal.*

Theorem 1.27 (Ley de inercia de Sylvester)**.** *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $\Phi : V \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Si D_1 y D_2 son matrices diagonales asociadas a Φ respecto de distintas bases B_1 y B_2, entonces el número de elementos positivos y elementos negativos en D_1 y D_2, es el mismo.*

Proof. Como el núcleo de elementos positivos más el de negativos es en cualquier caso igual al rango de Φ, por lo que, bastará probar que el número de positivos será igual para todas las bases de V que proporcionen una forma diagonal.
Sean pues B_1 y B_2 bases de V para las cuales la matriz de Φ es diagonal y de forma que tienen en la diagonal, y de forma que tienen en la diagonal p y t elementos positivos respectivamente, y veamos que $p = t$. Escribiendo,

$$B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n\}$$

$$B_2 = \{v_1, v_{,,}, \dots, v_t, v_{t+1}, \dots, v_n\}$$

las matrices asociadas a Φ respecto de B_1 y B_2 serán,

$$\begin{pmatrix} \Phi(u_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Phi(u_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Phi(u_n) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \Phi(v_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Phi(v_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \doteq & \Phi(v_n) \end{pmatrix}$$

Por hipótesis, tenemos que

$$\Phi(u_1) > 0, \Phi(u_2) > 0, \dots, \Phi(u_p) > 0, \Phi(u_{p+1}) \le 0, \dots, \Phi(u_n) \le 0$$

$$\Phi(v_1) > 0, \Phi(v_2) > 0, \dots, \Phi(v_t) > 0, \Phi(v_{t+1}) \le 0, \dots, \Phi(v_n) \le 0$$

Considerando los subespacios de V siguientes,

$$U = L(u_1, \dots, u_p), \qquad W = L(v_{t+1}, \dots, v_n)$$

Para cada $0 \neq x \in U$, se verifica $\Phi(x) > 0$, y para cada $y \in W$, se verifica $\Phi(y) \le 0$. Por tanto, es evidente que $U \cup W = \{0\}$ y por tanto, $dim(U + W) = dimU + dimW = p + n - t$. Como $U + W \le V$, entonces $p + \cancel{n} - t \le \cancel{n} \Rightarrow p \le t$. Por simetría, llegamos también a que $t \le p$, por tanto, $p = t$, luego, hay el mismo número de elementos negativos y positivos. □

Definición 1.28. *Llamaremos **signatura** de la forma cuadrática real Φ al par $sg(\Phi) = (p, 1)$, donde p es el número de elementos positivos y q, el de negativos en una forma diagonal de Φ.*
Notemos que p es igual al número de autovalores positivos de la matriz de Φ, y q es igual al número de autovalores negativos.
Por otro lado, el rango de Φ es igual al número de filas no nulas de su forma diagonal, y por tanto, como ya hemos mencionado, $rg(\Phi) = p + q$.

Theorem 1.29. *Sea $\Phi : V \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática real, y llamemos $n = dimV$, entonces,*

(i) *Φ es definida positiva si y solo si $sg(\Phi) = (n, 0)$*

(ii) *Φ es definida negativa si y solo si $sg(\Phi) = (0, n)$*

(iii) Φ *es semidefinida positiva si y solo si* $sg(\Phi) = (r, 0)$ *con* $r < n$

(iv) Φ *es semidefinida negativa si y solo si* $sg(\Phi) = (0, r)$ *con* $r < n$

Proof. (i) Supongamos que Φ es definida positiva, es decir, $\Phi(x) > 0; \forall 0 \neq x \in V$ y sea $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de V para la cual la matriz asociada a Φ es diagonal,

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}$$

y notemos que, por la propia definición de matriz asociada a una forma cuadrática, se tiene $d_i = \Phi(e_i)$. Así pues, siendo Φ definida positiva, se obtiene $d_1 > 0, \ldots, d_n > 0$ y por tanto, $sg(\Phi) = (n, 0)$✓

Supongamos ahora que $sg(\Phi) = (n, 0)$. Entonces con la misma notación de antes, se tiene $d_1 > 0, \ldots, d_n > 0$ y, en consecuencia, si un vector cualquiera no nulo $x = (x_1, \ldots, x_n)_B$ de V, se verifica $\Phi(x) = d_1 x_1^2 + \cdots + d_n x_n^2 > 0$ por ser cada $d_i > 0$ □

(ii) Supongamos que Φ es definida negativa, es decir, $\Phi(x) < 0; \forall 0 \neq x \in V$ y sea $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de V para la cual la matriz asociada a Φ es diagonal,

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}$$

y notemos que, por la propia definición de matriz asociada a una forma cuadrática, se tiene $d_i = \Phi(e_i)$. Así pues, siendo Φ definida negativa, se obtiene $d_1 < 0, \ldots, d_n < 0$ y por tanto, $sg(\Phi) = (0, n)$✓

Supongamos ahora que $sg(\Phi) = (0, n)$. Entonces con la misma notación de antes, se tiene $d_1 < 0, \ldots, d_n < 0$ y, en consecuencia, si un vector cualquiera no nulo $x = (x_1, \ldots, x_n)_B$ de V, se verifica $\Phi(x) = d_1 x_1^2 + \cdots + d_n x_n^2 < 0$ por ser cada $d_i < 0$ □

(iii) Por el teorema de Sylvester, sabemos que existen r valores propios positivos y $n - r$ valores propios que son cero (ya que no es definida positiva y no hay valores propios negativos). Esto da lugar a una signatura de $(r, 0)$ con $r < n$, ya que si r fuera igual a n, sería definida positiva, lo cual contradice nuestra suposición inicial de que es solamente semidefinida positiva.✓

Inversamente, si $sg(\Phi) = (r, 0)$ con $r < n$, entonces la matriz asociada A a la forma cuadrática Φ tiene r valores propios positivos y $n - r$ ceros. Esto significa que para cualquier vector v, $\Phi(v) = v^T A v$ será una suma de términos no negativos, dado que los valores propios negativos corresponden a términos negativos en esta suma y no hay ninguno. Por lo tanto, $\Phi(v) \geq 0$ para todo v, lo que significa que es semidefinida positiva. □

(iv) Supongamos que Φ es semidefinida negativa. Esto significa que para todo vector $v \in V$, $\Phi(v) \geq 0$. Dado que Φ no es definida negativa, no todos los valores propios pueden ser negativos (de lo contrario, $\Phi(v) < 0$ para todo $v \neq 0$). Entonces, algunos de los valores propios deben ser cero. La signatura $sg(\Phi)$ cuenta el número de valores propios negativos y positivos de la matriz simétrica asociada a Φ. Si Φ es semidefinida negativa, entonces no tiene valores propios positivos, lo que implica que $sg(\Phi) = (0, r)$ con r siendo el número de valores propios negativos, y $r < n$ porque si r fuera igual a n, sería definida negativa.✓

Ahora supongamos que $sg(\Phi) = (0, r)$ con r¡n. Esto indica que hay r valores propios negativos y $n - r$ ceros (puesto que no hay valores propios positivos). Por lo tanto, para cualquier vector v, la forma cuadrática $\Phi(v) = v^T Av$ será una suma de términos no positivos, debido a que los valores propios positivos resultarían en términos positivos en esta suma, y no hay ninguno. Esto significa que $\Phi(v) \leq 0$ para todo $v \in V$, y por lo tanto Φ es semidefinida negativa.

$\square$

1.5 Aplicaciones multilineales: Definición y propiedades

Definición 1.30. *Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, diremos que una aplicación $f : V \times \overset{n)}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ es multilineal si:*

(i) $f(x_1, x_2, \ldots, x_i + y_i, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)$

(ii) $f(x_1, x_2, \ldots, \lambda \cdot x_i, \ldots, x_n) = \lambda \cdot f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$

Definición 1.31. *Sea $f : V \times \overset{n)}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una aplicación multilineal. Se dice que f es alternada o antisimétrica si $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = sgn(\sigma) \cdot f(x_1, \ldots, x_n); \sigma \in S_n$.*

Definición 1.32. *Una aplicación multilineal alternada se llama una n-forma lineal.*

Proposition 1.38. *Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio finito dimensional.*
Sea $f : V \times \overset{m)}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una aplicación multilineal, entonces f está determinada por la imagen de una base.

Proof. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de V, $\forall x_1, \ldots, x_m \in V$

$$\begin{gathered}
x_1 = a^{11}e_1 + a^{21}e_2 + \cdots + a^{n1}e_n, \qquad a^{i1} \in \mathbb{K} \\
x_2 = a^{12}e_1 + a^{22}e_2 + \cdots + a^{n2}e_n, \qquad a^{i2} \in \mathbb{K} \\
\vdots \\
x_m = a^{1m}e_1 + a^{2m}e_2 + \cdots + a^{nm}e_n, \quad a^{im} \in \mathbb{K}
\end{gathered}$$

$$f(x_1, \ldots, x_m) = f\left(\sum_{i_1=1}^{n} a^{i_1}e_{i_1}, x_2, \ldots, x_m\right) = a^{i_1 1} f\left(e_{i_1}, a^{i_2 2}e_{i_2}, \ldots, x_m\right) =$$

$$= a^{i_1 1} \cdot a^{i_2 1} \cdot f(e_{i_1 1}, e_{i_2 2}, \ldots, x_m) =$$

$$= a^{i_1 1} a^{i_2 2} \ldots a^{i_m m} \cdot f(e_{i_1 1}, e_{i_2 2}, \ldots, e_{i_m m})$$

entonces tenemos n^m combinaciones $\Rightarrow n!$ combinaciones $\neq 0$ $\square$

2 Álgebra de Tensores

2.1 Producto tensorial: Caso dos términos

Proposition 2.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar euclídeo y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V,*

$$\begin{array}{rccl}
f_v; & V & \rightarrow & V^* \\
 & v & \mapsto & f_v(v) = \langle v, \cdot \rangle
\end{array}$$

siendo f_v una aplicación lineal, es un isomorfismo.

Proof. Vemos que f_v es aplicación lineal,

$$f_v(w_1 + w_2) = \langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle = f_v(w_1) + f_v(w_2) \checkmark$$

$$f_v(\lambda \cdot w) = \langle v, \lambda \cdot w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle = \lambda f_v(w) \checkmark$$

para $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ y $\forall w_1, w_2, w \in V$. Luego, es aplicación lineal.

Veamos que es isomorfo demostrando que es biyectivo, pues ya hemos visto que es aplicación lineal.
Sabemos que $ker\{f_v\} = \{0\} \Leftrightarrow f_v$ es inyectiva. Luego, vemos si $ker\{f_v\} = \{0\}$:

$$ker\{f_v\} = \{w \in V, f_v(w) = 0\} = \{w \in V; \langle v, w \rangle = 0 \Leftrightarrow w = 0\}$$

Por tanto, $ker\{f_v\} = \{0\}$ y así, f_v es inyectiva. ✓

Usando el Primer Teorema de isomorfía, tenemos que $dim(V) = \cancelto{0}{dim(ker\{f_v\})} + dim(Imf_v)$, pero como la $dimB = dimB^*$, siendo B base de V y B^* base de V^*, entonces $dimV = dimV^*$, y por tanto, $dimV = dimImf_v = dimV^*$, luego Imf_v es V^* y por tanto, f_v es sobreyectiva. ✓
Luego, f_v es un isomorfismo. □

Definición 2.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, V^* el dual de V, y $g^1, g^2 \in V^*$ aplicaciones lineales, tal que $g^1 : V \to \mathbb{K}$ y $g^2 : V \to \mathbb{K}$. Así, definimos el producto tensorial como,*

(i) Producto tensorial entre dos formas $g^1, g^2 \in V^*$,

$$\begin{array}{rccc} g^1 \otimes g^2 : & V \times V & \to & \mathbb{K} \\ & (v, w) & \mapsto & g^1(v) g^2(w) \end{array}$$

(ii) Producto tensorial entre dos vectores $v_1, v_2 \in V$,

$$\begin{array}{rccc} v_1 \otimes v_2 : & V^* \times V^* & \to & \mathbb{K} \\ & (f, g) & \mapsto & f(v_1) g(v_2) \end{array}$$

(iii) Producto tensorial de una forma y un vector $v_1 \in V$, $f^1 \in V^*$,

$$\begin{array}{rccc} v_1 \otimes f^1 : & V^* \times V & \to & \mathbb{K} \\ & (g, w) & \mapsto & g(v_1) f^1(w) \end{array}$$

Proposition 2.2. *Los productos tensoriales definidos anteriormente son formas bilineales.*

Proof. Usando $\forall v_1, v_2, u_1, u_2, v, w, u \in V$, $\forall f^1, f^2, g, p, q \in V^*$ y $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

(i)

$$\begin{array}{rccc} f^1 \otimes f^2 : & V \times V & \to & \mathbb{K} \\ & (v, w) & \mapsto & f^1(v) f^2(w) \end{array}$$

siendo $f^1, f^2 \in V^*$. Veamos que es forma bilineal,

$$\begin{array}{lrl} \bullet) & (f^1 \otimes f^2)(u_1 + u_2, v) = & f^1(u_1 + u_2) f^2(v) = \left[f^1(u_1) + f^1(u_2) \right] f^2(v) \\ & = & f^1(u_1) f^2(v) + f^1(u_2) f^2(v) = (f^1 \otimes f^2)(u_1, v) + (f^1 \otimes f^2)(u_2, v), \checkmark \\ \bullet) & (f^1 \otimes f^2)(v, u_1 + u_2) = & f^1(v) f^2(u_1 + u_2) = f^1(v) \left[f^2(u_1) + f^2(u_2) \right] \\ & = & f^1(v) f^2(u_1) + f^1(v) f^2(u_2) = (f^1 \otimes f^2)(v, u_1) + (f^1 \otimes f^2)(v, u_2) \checkmark \end{array}$$

Luego, $f^1 \otimes f^2$ es una forma bilineal. □

(ii)

$$\begin{array}{rccl} v_1 \otimes v_2 : & V^* \times V^* & \to & \mathbb{K} \\ & (f,g) & \mapsto & f(v_1)g(v_2) \end{array}$$

$$\bullet) \quad (v_1 \otimes v_2)(f^1 + f^2, g) = (f^1 + f^2)(v_1)g(v_2) = \left[f^1(v_1) + f^2(v_1)\right] g(v_2) =$$
$$= f^1(v_1)g(v_2) + f^2(v_1)g(v_2) = (v_1 \otimes v_2)(f^1, g) + (v_1 \otimes v_2)(f^2, g)\checkmark$$

$$\bullet) \quad (v_1 \otimes v_2)(g, f^1 + f^2) = g(v_1)(f^1 + f^2)(v_2)g = g(v_1)\left[f^1(v_2) + f^2(v_2)\right] =$$
$$= g(v_1)f^1(v_2) + g(v_1)f^2(v_2) = (v_1 \otimes v_2)(g, f^1) + (v_1 \otimes v_2)(g, f^2)\checkmark$$

$$\bullet) \quad (v_1 \otimes v_2)(\lambda f, g) = (\lambda f)(v_1)g(v_2) = \lambda f(v_1)g(v_2) = \lambda(v_1 \otimes v_2)(f, g)\checkmark$$

$$\bullet) \quad (v_1 \otimes v_2)(g, \lambda f) = g(v_1)(\lambda f)(v_2) = \lambda g(v_1)f(v_2) = \lambda(v_1 \otimes v_2)(g, f)\checkmark$$

Luego, $v_1 \otimes v_2$ es una forma bilineal. □

(iii)

$$\begin{array}{rccl} v_1 \otimes f^1 : & V^* \times V & \to & \mathbb{K} \\ & (g,w) & \mapsto & g(v_1)f(w) \end{array}$$

$$\bullet) \quad (v_1 \otimes f^1)(p + q, w) = (p + q)(v_1)f^1(w) = \left[p(v_1) + q(v_1)\right] f^1(w) =$$
$$= p(v_1)f^1(w) + q(v_1)f^1(w) = (v_1 \otimes f^1)(p, w) + (v_1 \otimes f^1)(q, w)\checkmark$$

$$\bullet) \quad (v_1 \otimes f^1)(g, u + w) = g(v_1)f^1(u + w) = g(v_1)\left[f^1(u) + f^1(w)\right] =$$
$$= g(v_1)f^1(u) + g(v_1)f^1(w) = (v_1 \otimes f^1)(g, u) + (v_1 \otimes f^1)(g, w)\checkmark$$

$$\bullet) \quad (v_1 \otimes f^1)(\lambda g, w) = (\lambda g)(v_1)f^1(w) = \lambda g(v_1)f^1(w) = \lambda(v_1 \otimes f^1)(g, w)\checkmark$$

$$\bullet) \quad (v_1 \otimes f^1)(g, \lambda w) = g(v_1)f^1(\lambda w) = \lambda g(v_1)f^1(w) = \lambda(v_1 \otimes f^1)(g, w)\checkmark$$

Luego, $v_1 \otimes f^1$ es una forma bilineal. □

Proposition 2.3. *El espacio $V \otimes V$ tiene estructura de espacio vectorial.*

Proof. 1. Vemos que $(V \otimes V, +)$ es grupo abeliano:

(i) Vemos si la operación $+$ es cerrada:
$\forall v, w, z \in V$ con $v \otimes w, v \otimes z, w \otimes z \in V \otimes V$, tenemos que ver si $(v + w) \otimes z \in V \otimes V$. Sabemos que,

$$\begin{array}{rccl} v \otimes w : & V^* \times V^* & \to & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \mapsto & f(v)g(w) \end{array}$$

luego,

$$\begin{array}{rccl} (v + w) \otimes z : & V^* \times V^* & \to & \mathbb{R} \\ & (f,p) & \mapsto & f(v + w)p(z) \end{array}$$

Entonces,

$$((v + w) \otimes z)(g, p) = f(v + w)p(z) = \left[f(v) + f(w)\right] p(z) =$$
$$= f(v)p(z) + f(w)p(z) = (v \otimes z)(f, p) + (w \otimes z)(f, p)$$

Luego, $(v + w) \otimes z \in V \otimes V$ y así, la operación $+$ es cerrada. ✓

(ii) Asociatividad:
Sean $a\otimes b, c\otimes d, e\otimes f \in V\otimes V$, tenemos que ver si $a\otimes b+[c\otimes d+e\otimes f]=[a\otimes b+c\otimes d]+e\otimes f$, tal que

$$(a\otimes b+[c\otimes d+e\otimes f])(p,q)=p(a)q(b)+[p(c)q(d)+p(e)q(f)]=p(a)q(b)+p(c+e)q(d+f)=$$

$$=p(a+c+e)q(b+d+f)=p(a+c)q(b+d)+p(e)q(f)=[p(a)q(b)+p(c)q(d)]+p(e)q(f)=$$

$$=([a\otimes b+c\otimes d]+e\otimes f)(p,q)\checkmark$$

(iii) Elemento neutro:
Sea $e_1\otimes e_2\in V\otimes V$ el elemento neutro de $V\otimes V$, tal que

$$e_1\otimes e_2+v\otimes w=v\otimes w+e_1\otimes e_2=v\otimes w$$

Vemos el valor de este elemento neutro,

$$(e_1\otimes e_2+v\otimes w)(f,g)=(v\otimes w)(f,g)$$

$$f(e_1)g(e_2)+f(v)+g(w)=f(v)g(w)$$

$$f(e_1+v)g(e_w+w)=f(v)g(w)\Leftrightarrow\begin{cases}e_1=0\\ e_2=0\end{cases}$$

luego, $e_1\otimes e_2=0$. ✓

(iv) Elemento simétrico:
$\forall v\otimes u\in V\otimes V$, $\exists\tilde{v}\otimes\tilde{u}\in V\otimes V$, tal que

$$v\otimes u+\tilde{v}\otimes\tilde{u}=\tilde{v}\otimes\tilde{u}+v\otimes u=e_1\otimes e_2=0$$

Veamos quién es $\tilde{v}\otimes\tilde{u}$,

$$(v\otimes u+\tilde{v}\otimes\tilde{u})(f,g)=f(v)g(u)+f(\tilde{v})g(\tilde{u})=(0\otimes 0)(f,g)=f(0)g(0)$$

luego,

$$v+\tilde{v}=0\Rightarrow\tilde{v}=-v$$

$$u+\tilde{u}=0\Rightarrow\tilde{u}=-u$$

Por tanto, el elemento simétrico de $v\otimes u$ es $(-v)\otimes(-u)$. ✓

(v) Conmutabilidad:
Sean $v\otimes w, u\otimes z\in V\otimes V$, entonces

$$(v\otimes w+u\otimes z)(f,g)=f(v)g(w)+f(u)g(z)=f(v+u)g(w+z)=$$

$$=f(u+v)g(z+w)=f(u)g(z)+f(v)g(w)=(u\otimes z+v\otimes w)(f,g)\checkmark$$

Luego, es grupo abeliano. ✓

2. Doble propiedad distributiva:

(a) $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\forall v\otimes w\in V\otimes V$,

$$(\lambda+\mu)\cdot(v\otimes w)(f,g)=(\lambda+\mu)f(v)g(w)=$$

$$=\lambda f(v)g(w)+\mu f(v)g(w)=\lambda(v\otimes w)(f,g)+\mu(v\otimes w)(f,g)\checkmark$$

(b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \otimes w, u \otimes z \in V \otimes V$, tenemos que

$$\lambda(v \otimes w)(f,g) + \lambda(u \otimes z)(f,g) = \lambda f(v)g(w) + \lambda f(u)g(z) =$$

$$= \lambda \left[f(v)g(w) + f(u)g(z)\right] = \lambda(v \otimes w + u \otimes z)(f,g) \checkmark$$

3. Propiedad pseudo-asociativa:
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $\forall v \otimes w \in V \otimes V$, tenemos que

$$\lambda \cdot [\mu \cdot (v \otimes w)(f,g)] = \lambda \left[\mu f(v)g(w)\right] = \lambda f(\mu v)g(\mu w) =$$

$$= f(\lambda\mu v)g(\lambda\mu w) = f(\mu\lambda v)g(\mu\lambda w) = \mu \left[f(\lambda v)g(\lambda w)\right] = (\mu \cdot \lambda)f(v)g(w) = (\mu \cdot \lambda)(v \otimes w)(f,g) \checkmark$$

4. Elemento unitario del cuerpo: $\forall v \otimes w \in V \otimes V$; $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}$, entonces $\tilde{\mu} \cdot v \otimes w = v \otimes w \cdot \tilde{\mu} = v \otimes w$

$$(\tilde{\mu} \cdot v \otimes w)(f,g) = f(\tilde{\mu}v)g(\tilde{\mu}w) = (v \otimes w)(f,g) = f(v)g(w) \Rightarrow \begin{matrix} \tilde{\mu} \cdot v = v \\ \tilde{\mu} \cdot w = w \end{matrix} \Leftrightarrow \tilde{\mu} = 1 \checkmark$$

Luego, $(V \otimes V, +, \cdot)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. $\square$

Proposition 2.4 (Base de $V \otimes V$)**.** *Si tenemos un V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces todo $v \otimes w$ será combinación lineal de los elementos de la base de $V \otimes V$ dada por $B \otimes B = \{v_i \otimes v_j\}_{i,j=1}^n$*

Proof. Queremos ver que $\{v_i \otimes v_j\}_{i,j=1}^n$ es base de $V \otimes V$. Para ello, tendremos que ver que esta base $B \otimes B$ complete el espacio $V \otimes V$ y que los vectores de la misma sean linealmente independientes. Sabemos que $v \otimes w \in V \otimes V$ y que

$$\begin{array}{rccc} v \otimes w : & V^* \times V^* & \to & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \mapsto & f(v)g(w) \end{array}$$

Luego, para que la base $B \otimes B$ complete el espacio $V \otimes V$, se deberá poder expresar cualquier vector $v \otimes w \in V \otimes V$ como combinación lineal de los vectores de $B \otimes B$. Podemos usar $B = \{v_i\}_{i=1}^n$ base de V, tal que

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda^i v_i = \lambda^i v_i, \quad w = \sum_{j=1}^n \mu^j v_j = \mu^j v_j$$

Por tanto, usando $f, g \in V^*$, tenemos que

$$v \otimes w(f,g) = f(v)g(w) = f(\lambda^i v_i)g(\mu^j v_j) = \lambda^i f(v_i)\mu^j g(v_j) = \lambda^i \mu^j f(v_i)g(v_j) = \lambda^i \mu^j (v_i \otimes v_j)(f,g)$$

Luego, hemos expresado un vector del espacio $V \otimes V$ como combinación lineal de los vectores de la base $B \otimes B$. ✓

Veamos que son linealmente independientes, para ello, se debe cumplir que,

$$\sum_{i,j=1}^n \lambda^{ij}(v_i \otimes v_j) = \lambda^{ij}(v_i \otimes v_j) = 0 \Leftrightarrow \lambda^{ij} = 0$$

Sabiendo que la base de V^* es $B^* = \left\{f^1, f^2, \ldots, f^n\right\}$, tal que

$$f^i(v_i) = 1 \quad f^j(v_i) \overset{i \neq j}{=} 0 \Rightarrow f^i(v_j) = \delta_{ij}$$

Podemos evaluar lo anterior en dos elementos arbitrarios de B^*, tal que

$$0 = \lambda^{ij}(v_i \otimes v_j)(f^n, f^m) = \lambda^{ij} f^n(v_i) f^m(v_j) = \lambda_{ij}\delta^i_n \delta^j_m = \lambda^{nm}$$

luego, $\lambda^{nm} = 0$ y por tanto, los vectores son linealmente independientes. ✓

Así, hemos demostrado que $B \otimes B$ es base de $V \otimes V$. □

Note 2.5. *Denotaremos $v \otimes w \equiv h$, tal que*

$$\begin{array}{rccl} h: & V^* \times V^* & \to & \mathbb{R} \\ & (f^i, f^j) & \mapsto & h(f^i, f^j) = h^{ij} \end{array}$$

siendo $f^i, f^j \in B^*$. Por tanto, para dos $p, q \in V^*$ cualesquiera, escribiremos

$$(v \otimes w)(p,q) = h(p,q) = h\left(\sum_{i=1}^n p_i f^i, \sum_{j=1}^n q_j f^j\right) = p_i q_j (f^i, f^j) = h^{ij} p_i q_j$$

Proposition 2.6 (Propiedades del producto tensorial)**.** *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial,*

(i) $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$*;* $\forall v_1, v_2, w \in V$.

(ii) $w \otimes (v_1 + v_2) = w \otimes v_1 + w \otimes v_2$, $\forall v_1, v_2, w \in V$.

(iii) $(\lambda v) \otimes w = \lambda v \otimes w$, $\forall v, w \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(iv) $w \otimes (\lambda v) = \lambda w \otimes v$, $\forall v, w \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(v) $v \otimes w \neq w \otimes v$.

(vi) $v \otimes w \neq 0$ *si* $v \neq 0$ *ó* $w \neq 0$.

(vii) Sea $a \otimes b \neq 0$, $a \otimes b = a' \otimes b' \Leftrightarrow a' = \lambda a$ *y* $b' = \lambda^{-1} b$.

(viii) $V \otimes W$ *es isomorfo con* $W \otimes V$.

Proof. (i) $\forall v_1, v_2, w \in V$,

$$((v_1 + v_2) \otimes w)(f,g) = f(v_1 + v_2)g(w) = [f(v_1 + f(v_2)]\, g(w) =$$

$$= f(v_1)g(w) + f(v_2)g(w) = (v_1 \otimes w)(f,g) + (v_2 \otimes w)(f,g) \quad \square$$

(ii) $\forall v_1, v_2, w \in V$,

$$(w \otimes (v_1 + v_2))(f,g) = f(w)g(v_1 + v_2) = f(w)\,[g(v_1) + g(v_2)] =$$

$$= f(w)g(v_1) + f(w)g(v_2) = (w \otimes v_1)(f,g) + (w \otimes v_2)(f,g) \quad \square$$

(iii) $\forall v, w \in V$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$((\lambda \cdot v) \otimes w)(f,g) = f(\lambda \cdot v)g(w) = \lambda \cdot f(v)g(w) = \lambda \cdot (v \otimes w)(f,g) \quad \square$$

(iv) $\forall v, w \in V$ y $\forall \mu \in \mathbb{R}$,

$$(w \otimes (\lambda \cdot v))(f,g) = f(w)g(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(w)g(v) = \lambda \cdot (w \otimes v)(f,g) \quad \square$$

(v) Vemos que, $(v\otimes w)(f,g) = f(v)g(w)$ y que $(w\otimes v)(f,g) = f(w)g(v)$, luego estos elementos serían iguales solo si $f \equiv g$. $\square$

(vi) Sean $v, w \in V$ y $f, g \in V^*$, tales que $f \not\equiv 0$ y $g \not\equiv 0$, entonces

$$(v\otimes w)(f,g) = f(v)g(w) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{cl} f(v) = 0 & \Leftrightarrow v = 0 \\ \text{ó} & \\ g(w) = 0 & \Leftrightarrow w = 0 \end{array} \qquad \square$$

(vii) $\Rightarrow$

Sea $a\otimes b = a'\otimes b'$ entonces

$$(a\otimes b)(f,g) = f(a)g(b) = (a'\otimes b')(f,g) = f(a')g(b')$$

luego,

$$f(a)g(b) = f(a')g(b')$$

pero como $a \neq a'$ y $b \neq b'$, debe haber una relación entre ambos, de tal forma que se cumpla la igualdad anterior. Supondremos que a y a' tienen una relación lineal (la más sencilla), tal que $a' = \lambda a + c$, luego

$$f(a)g(b) = f(a')g(b') = f(\lambda a + c)g(b') = f(\lambda a)g(b') + f(c)g(b') = \lambda f(a)g(b') + f(c)g(b')$$

Agrupamos términos de la igualdad, tal que,

$$0: \quad 0 = f(c)g(b')$$

$$f(a): \quad g(b) = \lambda g(b')$$

Por la propiedad *(vi)*, como $b' \neq 0$, entonces $c = 0$. Además,

$$g(b) = \lambda g(b') \Rightarrow g(b') = \lambda^{-1}g(b) \Rightarrow g(b') = g(\lambda^{-1}b) \Rightarrow b' = \lambda^{-1}b$$

Luego,

$$\begin{array}{c} a' = \lambda a \\ b' = \lambda^{-1}b \end{array} \quad \checkmark$$

$\Leftarrow$

Sea $a' = \lambda a$ y $b' = \lambda^{-1}b$, entonces

$$(a'\otimes b')(f,g) = f(a')g(b') = f(\lambda a)g(\lambda^{-1}b) = \cancel{\lambda\lambda^{-1}}f(a)g(b) = (a\otimes b)(f,g)\checkmark$$

(viii) Sean V, W espacios vectoriales, tales que

$$\begin{array}{ccc} V\otimes W & \rightarrow & W\otimes V \\ v\otimes w & \mapsto & w\otimes v \end{array}$$

Si suponemos que $dimV = n$ y $dimW = m$, sabemos por tanto que $dim(V\otimes W) = n\cdot m$ y $dim(W\otimes V) = m\cdot n$, luego tienen la misma dimensión y por tanto, son isomorfos. $\checkmark$

También podemos hacerlo sin usar la proposición de que $dim(V\otimes W) = n\cdot m$. Es claro ver que la aplicación es inyectiva, pues no hay dos elementos con la misma imagen, ya que la imagen se forma al permutar los elementos. Luego, al ser inyectivo, tenemos que $dimKer = 0$. Por el Primer Teorema de Isomorfía,

$$dim(V\otimes W) = \overset{0}{\cancel{dimKer}} + dimIm = dimIm = dim(W\otimes V)$$

Luego, como $V\otimes W$ y $W\otimes V$ tienen la misma dimensión, entonces son isomorfos.

$\square$

2.2 El espacio de tensores (r, s): Definición, propiedades y ejemplos

Definición 2.2. *Sea V un espacio vectorial y V^* un espacio dual, definimos*

$$\Omega^{r,s}(V) = \{f \text{ aplicación multilineal; } f : V^* \times \overset{r}{\dots} \times V^* \times V \times \overset{s}{\dots} \times V\}$$

es decir,

$$\Omega^{r,s}(V) \equiv V \otimes \overset{r}{\dots} \otimes V \otimes V^* \otimes \overset{s}{\dots} \otimes V^*$$

Note 2.7. *Sea V un espacio vectorial. Las formas multilineales cuyas variables están en V^* o V, se denominan **tensores sobre V** y los espacios vectoriales que forman, se denominan **espacios tensoriales sobre V**.*

*El número de variables de V^* y V se denominan los **grados** de un tensor; al número de variables de V^* se les denomina **grados contravariantes** y al número de variables de V, **grados covariantes**. Así, una forma multilineal del tipo $V^* \times V \times V$ es un tensor de tipo $(1, 2)$, denotado como $V \otimes V^* \otimes V^* = T_2^1$.*

Note 2.8. *Un tensor de tipo $(0, 0)$ se define como un escalar, tal que $T_0^0 = \lambda$.*
*Un tensor de tipo $(1, 0)$ se denomina **vector contravariante** y a uno del tipo $(0, 1)$, **vector covariante**.*
*Un tensor de tipo $(r, 0)$ se denomina **tensor contravariante** y uno del tipo $(0, s)$, se denomina **tensor covariante**.*

Proposition 2.9. *$\Omega^{r,s}(V)$ es espacio vectorial.*

Proof. Tenemos que ver que $(\Omega^{r,s}(V), +, \cdot)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, siendo $+$ una operación interna y $\cdot$ una operación externa, tal que

$$+: \ \Omega^{r,s}(V) \times \Omega^{r,s}(V) \ \to \ \Omega^{r,s}(V) \quad y \quad \cdot: \ \Omega^{r,s}(V) \times \mathbb{R} \ \to \ \Omega^{r,s}(V)$$

Veamos si verifica las condiciones de espacio vectorial:

1. ¿$(\Omega^{r,s}(V), +)$ es un grupo abeliano?

   (i) ¿$+$ es una operación cerrada?
   Sabiendo que $f, g \in \Omega^{r,s}(V)$ son aplicaciones multilineales, entonces $h = f + g$ será otra aplicación multilineal, lo vemos,

$$h(v_1^*, \dots, \alpha v_i^* + \lambda w_i^*, \dots, v_s^*) = (f + g)(v_1^*, \dots, \alpha v_i^* + \lambda w_i^*, \dots, v_s^*) =$$
$$= f(v_1^*, \dots, \alpha v_i^* + \lambda w_i^*, \dots, v_s^*) + g(v_1^*, \dots, \alpha v_i^* + \lambda w_i^*, \dots, v_s^*) =$$
$$= \alpha f(v_1^*, \dots, v_i^*, \dots, v_s^*) + \lambda f(v_1^*, \dots, w_i^*, \dots, v_s^*) + \alpha g(v_1^*, \dots, v_i^*, \dots, v_s^*) + \lambda g(v_1^*, \dots, w_i^*, \dots, v_s^*) =$$
$$= \alpha \left[f(v_1^*, \dots, v_i^*, \dots, v_s^*) + g(v_1^*, \dots, v_i^*, v_s^*)\right] + \lambda \left[f(v_1^*, \dots, w_i^*, \dots, v_s^*) + g(v_1^*, \dots, w_i^*, \dots, v_s^*)\right] =$$
$$= \alpha(f + g)(v_1^*, \dots, v_i^*, \dots, v_s^*) + \lambda(f + g)(v_1^*, \dots, w_i^*, \dots, v_s^*) =$$
$$= \alpha h(v_1^*, \dots, v_i^*, \dots, v_s^*) + \lambda h(v_1^*, \dots, w_i^*, \dots, v_s^*) \checkmark$$

   Luego, $h \in \Omega^{r,s}(V)$, y por tanto, la operación es cerrada. ✓

   (ii) ¿Asociatividad?
   $\forall f, g, h \in \Omega^{r,s}(V)$

$$(f + (g + h))(v) = f(v) + (g + h)(v) = f(v) + (g(v) + h(v)) = ((f)(v) + g(v)) + h(v) =$$
$$= (f + g)(v) + h(v) = ((f + g) + h)(v) \checkmark$$

(iii) ¿Elemento neutro?
$\forall f \in \Omega^{r,s}(V)$, $\exists f^0 \in \Omega^{r,s}(V)$ tal que $f^0 + f = f + f^0 = f$

$$(f + f^0)(v) = f(v) + f^0(v) = f(v) \Rightarrow f^0(v) = 0 \Rightarrow f^0 \equiv 0 \checkmark$$

(iv) ¿Elemento simétrico?
$\forall f \in \Omega^{r,s}(V)$, $\exists \tilde{f} \in \Omega^{r,s}(V)$ tal que $f + \tilde{f} = \tilde{f} + f = f^0$

$$(f + \tilde{f})(v) = f(v) + \tilde{f}(v) = f^0(v) = 0 \Rightarrow \tilde{f}(v) = -f(v) \Rightarrow \tilde{f} \equiv -f \checkmark$$

(v) ¿Conmutabilidad?
$\forall f, g \in \Omega^{r,s}(V)$,

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v) = g(v) + f(v) = (g + f)(v) \checkmark$$

Luego, $(\Omega^{r,s}(V), +)$ es grupo abeliano. $\square$

2. Doble propiedad distributiva:

(a) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\forall f \in \Omega^{r,s}(V)$,

$$(\lambda + \mu) f(v) = f((\lambda + \mu)v) = f(\lambda v) + f(\mu v) = \lambda f(v) + \mu f(v) \checkmark$$

(b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall f, g \in \Omega^{r,s}(V)$,

$$\lambda(f + g)(v) = (f + g)(\lambda v) = f(\lambda v) + g(\lambda v) = \lambda f(v) + \lambda g(v) \checkmark$$

3. Propiedad pseudo-asociativa:
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\forall f \in \Omega^{r,s}(V)$,

$$\lambda(\mu f(v)) = \lambda f(\mu v) = f((\lambda\mu)v) = (\lambda\mu) f(v) \checkmark$$

4. Elemento unitario de $\mathbb{R}$:
$\forall f \in \Omega^{r,s}(V)$, $\exists \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\lambda} \cdot f = f \cdot \tilde{\lambda} = f$,

$$\tilde{\lambda} \cdot f(v) = f(\tilde{\lambda} \cdot v) = f(v) \Rightarrow \tilde{\lambda} v = v \Rightarrow \tilde{\lambda} = 1 \checkmark$$

Luego, $(\Omega^{r,s}(V), +, \cdot)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. $\square$

Proposition 2.10. *Si tenemos un conjunto V que sea un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ y V^* el espacio dual de V con base $B^* = \left\{f^1, \dots, f^n\right\}$, entonces todo $h \in \Omega^{r,s}$ será combinación lineal de $B^{r,s} = \left\{v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_s}\right\}$
tal que $h \equiv \left(h^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}\right)^n_{i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_s}$*

Proof. Tenemos que ver que los elementos de la base son linealmente independientes y para ello, se debe cumplir que

$$\sum_{\substack{i_1,\dots,i_r \\ j_1,\dots,j_s}}^{n} \lambda^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_s} = 0 \Leftrightarrow \lambda^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} = 0$$

Luego, dados $i_1^0, \dots, i_r^0, j_1^0, \dots, j_s^0$ índices fijos, y vamos a tomar

$$f \equiv \sum_{\substack{i_1,\dots,i_r\\ j_1,\dots,j_s}}^{n} \lambda_{j_1,\dots,j_s}^{i_1,\dots,i_r} (v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_r} \otimes f^{j_1} \otimes \dots \otimes f^{j_s}) = \lambda_{j_1,\dots,j_s}^{i_1,\dots,i_r} (v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_r} \otimes f^{j_1} \otimes \dots \otimes f^{j_s})$$

luego,

$$0 = f(f^{i_1^0}, \dots, f^{i_r^0}, v_{j_1^0}, \dots, v_{j_s^0}) = \lambda_{j_1,\dots,j_s}^{i_1,\dots,i_r} \left(f^{i_1^0}(v_{i_1}) \dots f^{i_r^0}(v_{i_r}) f^{j_1}(v_{j_1^0}) \dots f^{j_s}(v_{j_s^0}) \right)$$

sabemos que un elemento de la base de V con un elemento de la base de V^* cumple que

$$\begin{cases} f^i(v_j) \overset{j \neq i}{=} 0 \\ f^i(v_i) = 1 \end{cases}$$

luego, esto es una delta de Kronecker $\delta_{i,j}$, y entonces,

$$0 = \lambda_{j_1,\dots,j_s}^{i_1,\dots,i_r} \delta_{i_1}^{i_1^0} \dots \delta_{i_r}^{i_r^0} \delta_{j_1^0}^{j_1} \dots \delta_{j_s^0}^{j_s} = \lambda_{j_1^0,\dots,j_s^0}^{i_1^0,\dots,i_r^0} \Rightarrow \lambda_{j_1^0,\dots,j_s^0}^{i_1^0,\dots,i_r^0} = 0$$

y por tanto, los elementos son linealmente independientes. ✓
Ahora tenemos que comprobar que un elemento $h \in \Omega^{r,s}(V)$ se puede escribir como combinación lineal de los elementos de la base, es decir,

$$h(g^{i_1}, \dots, g^{i_r}, w_{j_1}, \dots, w_{j_s}) = h_{j_1,\dots,j_s}^{i_1,\dots,i_r} \left(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_r} \otimes f^{j_1} \otimes \dots \otimes f^{j_s} \right) (g^{i_1}, \dots, g^{i_r}, w_{j_1}, \dots, w_{j_s})$$

Vamos a verlo:

Note 2.11. *Vamos a hacer primero una aclaración acerca de los índices. Cuando decimos que i_1 va desde 1 hasta n, estamos diciendo que tenemos la sucesión $1_1, 2_1, \dots, n_1$. Por tanto, aunque en los sumatorios pongamos $\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1}$, lo correcto sería poner $\sum_{i=1}^{n} a_{i_1}$, pero esto puede llevar a confusión o a problemas cuando, por ejemplo, i_1 no tenga los mismos elementos que i_7. Luego, para referirnos a un elemento i_k-ésimo, escribiremos $a_{i_k} = \sum_{i_k=1}^{n} \gamma_{i_k} b_{i_k}$.*

Luego, $\forall w_{j_1}, \dots, w_{j_s} \in V$ y $\forall g^{i_1}, \dots g^{i_r} \in V^*$, tal que

$$w_{j_k} = \sum_{j_k=1}^{n} \mu^{j_k} v_{j_k} = \mu^{j_k} v_{j_k}$$
$$g^{i_k}(v) = \sum_{i_k=1}^{n} \mu_{i_k} f^{i_k}(v) = \mu_{i_k} f^{i_k}(v)$$

Luego, tomando un $h \in \Omega^{r,s}(V)$, tal que

$$\begin{aligned} h(v_{j_p}) = h_{j_p}; \quad h_{j_p} \in \mathbb{R} \quad p = 1, 2, \dots, s \\ h(f^{i_q}) = h^{i_q}; \quad h^{i_q} \in \mathbb{R} \quad q = 1, 2, \dots, r \end{aligned}$$

Entonces,

$$h(g^{i_1}, \dots, g^{i_r}, w_{j_1}, \dots, w_{j_s}) = h(g^{i_1}) \dots h(g^{i_r}) h(w_{j_1}) \dots h(w_{j_s}) =$$

$$= h\left(\sum_{i_1=1}^{n} \mu^{i_1} f^{i_1} \right) \dots h\left(\sum_{i_r=1}^{n} \mu^{i_r} f^{i_r} \right) h\left(\sum_{j_1=1}^{n} \mu_{j_1} v_{j_1} \right) \dots h\left(\sum_{j_s=1}^{n} \mu_{j_s} v_{j_s} \right) =$$

$$
\begin{gathered}
= \mu^{i_1} h(f^{i_1}) \dots \mu^{i_r} h(f^{i_r}) \mu_{j_1} h(v_{j_1}) \dots \mu_{j_s} h(v_{j_s}) = \\
= \{\text{Podemos agrupar los escalares de tal forma que}\} = \\
= \mu^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} h(f^{i_1}) \dots h(f^{i_r}) h(v_{j_1}) \dots h(v_{j_s}) = \\
= \mu^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} h^{i_1} \dots h^{i_r} h_{j_1} \dots h_{j_s} = \mu^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} h^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}
\end{gathered}
$$

Usando que $\mu^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} = (v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_r} \otimes f^{j_1} \otimes f^{j_s})(g^{i_1}, \dots, g^{i_r}, w_{j_1}, \dots, w_{j_s})$, tenemos

$$
h(g^{i_1}, \dots, g^{i_r}, w_{j_1}, \dots, w_{j_s}) = h^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} (v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_r} \otimes f^{j_1} \otimes f^{j_s})(g^{i_1}, \dots, g^{i_r}, w_{j_1}, \dots, w_{j_s})
$$

Luego, $h \in \Omega^{r,s}(V)$ es combinación lineal de los elementos de la base. ✓
Por tanto, $B^{r,s} = \left\{ v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_r} \otimes f^{j_1} \otimes \dots \otimes f^{j_s} \right\}$ es base de $\Omega^{r,s}(V)$. $\square$

Note 2.12. *El producto escalar es un tensor de tipo* $(0, 2)$*, es decir,* $\langle \cdot, \cdot \rangle \in \Omega^{0,2}(V)$ *tal que*

$$
\langle \cdot, \cdot \rangle = \sum g_{ij} f^i \otimes f^j \equiv g_{ij} f^i \otimes f^j
$$

Note 2.13. *El producto escalar* $\langle \cdot, v \rangle$ *es un tensor de tipo* $(0, 1)$*, es decir,* $\langle \cdot, v \rangle \in \Omega^{0,1}(V)$ *tal que*

$$
\langle \cdot, v \rangle = g_{ij} (f^i \otimes f^j)(\cdot, v)
$$

Proposition 2.14. *Dado* $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *base de* V*, tenemos que* $\langle \cdot, v_1 \rangle, \dots, \langle \cdot, v_n \rangle$ *es base de* V^*

Proof. Tenemos que comprobar que los elementos de la base son linealmente independientes, es decir,

$$
\lambda_1 \langle \cdot, v_1 \rangle + \lambda_2 \langle \cdot, v_2 \rangle + \dots + \lambda_n \langle \cdot, v_n \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0
$$

Evaluando un $v_k \in B$, tenemos

$$
0 = \lambda_1 \langle v_k, v_1 \rangle + \dots + \lambda_k \langle v_k, v_k \rangle + \dots + \lambda_n \langle v_k, v_n \rangle
$$

Como los elementos de B son linealmente independientes, por la condición de base dual, se debe cumplir que

$$
\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}
$$

Entonces,

$$
0 = \lambda_1 \cancelto{0}{\langle v_k, v_1 \rangle} + \dots + \lambda_k \cancelto{1}{\langle v_k, v_k \rangle} + \dots + \lambda_n \cancelto{0}{\langle v_k, v_n \rangle} = \lambda_k
$$

Por tanto, $\lambda_k = 0$, luego son linealmente independientes. Además, como esta base es una base dual de V^*, tendrá la misma dimensión que V, por la Proposición 1.6 y así, el conjunto generador pasa a ser base. $\square$

Note 2.15. *Vamos a identificar el producto escalar como* $\langle \cdot, v \rangle \equiv g(\cdot, v)$ *para simplificar la notación.*

Sea $w = w^i v_i \equiv w^i$ *un vector de* V *y sea* $g(\cdot, w)$ *una* $1-$*forma métrica asociada* $g(\cdot, w) = w_j f^j \equiv w_j$*. Se tiene entonces que*

$$
w_j = g_{ij} w^i \quad \text{y} \quad w^i = g^{ij} w^i
$$

A esto lo denominamos ***subida*** *y* ***bajada*** *de índices (métrica).*

Además, usaremos la base de productos escalares, pues

$$
V \longleftrightarrow V^*
$$

$$
v \to v^* \quad \textit{depende de la base } B^*
$$

$$
v \to g(\cdot, v) \quad \textit{no depende de la base } B^*\textit{, sino de la métrica } g
$$

References

[1] Barrett O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity, 103, Volume 103 (Pure and Applied Mathematics)*. Academic Press, 1983.