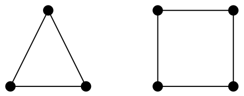
8. Famílias de grafos

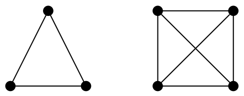
Dizemos que um grafo é um *grafo linear* com n vértices ($n \geq 2$), e denotamo-lo por L_n, se é simples e tem n vértices, dos quais dois são de grau um e os restantes, se os houver, de grau dois. Portanto, o grafo admite a seguinte representação:

Outra família de grafos muito habitual é C_n: os *grafos circulares*, que são grafos simples e conexos com n vértices, $n \geq 3$, todos de grau dois.



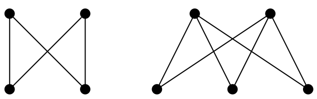
C_3 C_4

Se um grafo simples com n vértices tem todas as $\binom{n}{2}$ arestas possíveis, estamos a falar dum *grafo completo* com n vértices, K_n.



K_3 K_4

Uma família de grafos muito importante é a dos *grafos bipartidos*. Nos grafos bipartidos, os vértices podem ser divididos em duas classes, de tal forma que não há arestas entre dois vértices da mesma classe. Um caso especial é o dos *grafos bipartidos completos*, $K_{r,s}$, com $r, s \geq 1$. Um grafo bipartido completo é um grafo simples que tem $r + s$ vértices, divididos em duas classes, uma com r vértices e outra com s vértices, e inclui as $r \cdot s$ arestas que unem os vértices duma classe aos vértices da outra.



$K_{2,2}$ $K_{2,3}$

Um resultado importante e bastante útil relaciona os graus dos vértices de um grafo com o número de arestas:

Proposição 1. *Para um grafo $G = (V, A)$ qualquer, temos que*
$$\sum_{v \in V} grau(v) = 2|A|.$$

Árvores

Uma *árvore* é um grafo conexo e sem ciclos. Se distinguimos um vértice de uma árvore, chamando-lhe *raiz*, os restantes vértices são classificados em diferentes níveis, sendo que o nível de cada vértice é determinado pela sua distância à raiz. A uma árvore à qual se atribuiu uma raiz, chamamos uma *árvore com raiz*. A altura de uma árvore com raiz é o máximo das distâncias dos vértices à raiz. Se dois vértices estão unidos por uma aresta, diz-se que o que está mais próximo da raiz é o *pai* e o outro o *filho*. A um vértice de grau um de uma árvore chamamos *folha*.

Uma árvore chama-se *binária* se o máximo grau dos seus vértices é três. No caso de uma árvore com raiz, o grau da raiz é no máximo dois, e isto é o mesmo que dizer que cada vértice pai tem no máximo dois filhos. Em geral, uma árvore n-ária é uma árvore em que o máximo grau dos seus vértices é $n + 1$ (numa árvore n-ária com raiz, a raiz tem no máximo grau n). A *altura* de uma árvore n-ária com raiz é o nível máximo das suas folhas. Uma árvore n-ária com raiz diz-se *cheia* se todos os pais têm n filhos e diz-se *completa* se é cheia e todas as suas folhas têm o mesmo nível.

Proposição 2. *Um grafo G é uma árvore se e só se é conexo e $|A(G)| = |V(G)| - 1$.*

Se G é uma árvore, dado que $|A| = |V| - 1$, tem-se
$$\sum_{v \in V} \text{grau}(v) = 2|V| - 2.$$

Proposição 3. *Toda a árvore com $|V| \geq 2$ tem, pelo menos, dois vértices de grau um.*

Demonstração. Suponhamos que não há vértices de grau um, isto é, $\text{grau}(v) \geq 2$ para todo $v \in V$. Então
$$2|V| - 2 = \sum_{v \in V} \text{grau}(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2|V|,$$

mas isto não pode ser. Mas também não podemos ter só um único vértice w de grau um, porque, nesse caso,

$$\begin{aligned} 2|V| - 2 &= \sum_{v \in V} \text{grau}(v) = \text{grau}(w) + \sum_{v \neq w} \text{grau}(v) \\ &\geq 1 + 2(|V| - 1) = 2|V| - 1. \end{aligned}$$

∎

Teorema (Cayley). *O número de árvores diferentes que podem construir-se com o conjunto de vértices* $\{1, \ldots, n\}$ *é* n^{n-2}.

1. Um dado grafo tem 21 arestas e tem sete vértices de grau um, três de grau dois, sete de grau três e os restantes de grau quatro. Quantos vértices tem o grafo?

2. Existe algum grafo com 19 arestas e com seis vértices de grau um, três de grau dois, sete de grau três e os restantes de grau quatro?

3. De quantas maneiras difeentes pode um conjunto de 7 estudantes que vão de férias enviar cada um três postais a três dos restantes, e receber três postais exactamente dos três colegas a quem enviou?

4. Explique porque é que o número de pessoas de Évora que conhcem um número ímpar de pessoas de Évora é par.

5. Considere o grafo completo K_4 com quatro vértices v_1, v_2, v_3, v_4.

   (a) Faça um esboço de todos os subgrafos de K_4 que são isomorfos ao grafo completo K_3.

   (b) Faça um esboço de todos os subgrafos de K_4 que são isomorfos ao grafo completo K_2.

   (c) Quantos subgrafos de K_4 são isomorfos ao grafo circular C_4?

   (d) Quantos caminhos simples de comprimento dois há de v_1 para v_2?

   (e) Quantos caminhos simples de comprimento dois há no grafo K_4?

   (f) Quantos subgrafos de K_4 são isomorfos ao grafo linear L_3?

   (g) Quantos subgrafos de K_4 são isomorfos ao grafo linear L_4?

6. Considere o grafo completo K_8 com oito vértices $v_1, v_2, \ldots, v_8$.

   (a) Quantos subgrafos de K_8 são isomorfos ao grafo completo K_7?

   (b) Quantos subgrafos de K_8 são isomorfos ao grafo completo K_5?

   (c) Quantos caminhos simples de comprimento dois há de v_1 para v_2?

   (d) Quantos caminhos simples de comprimento menor ou igual a três há de v_1 para v_2?

   (e) Quantos caminhos simples de comprimento menor ou igual a três há no grafo K_8?

   (f) Quantos caminhos simples de comprimento quatro há de v_1 para v_2?

   (g) Quantos caminhos simples de comprimento quatro há no grafo K_8?

   (h) Quantos subgrafos de K_8 são isomorfos ao grafo circular C_3?

   (i) Quantos subgrafos de K_8 são isomorfos ao grafo circular C_4?

   (j) Quantos subgrafos de K_8 são isomorfos ao grafo circular C_7?

   (k) Quantos subgrafos de K_8 são isomorfos ao grafo linear L_2?

   (l) Quantos subgrafos de K_8 são isomorfos ao grafo linear L_5?

7. Esboce todas as possíveis árvores com seis vértices (não isomorfas entre si).

8. Graus dos vértices de uma árvore.

   (a) Qual é a soma dos graus de uma árvore de n vértices? (Mostre o resultado por indução.)

(b) Uma determinada árvore A tem dois vértices de grau quatro, um de grau três, um de grau dois e os restantes são folhas. Quantos vértices tem?

(c) Uma determinada árvore B tem dois vértices de grau cinco, três de grau três, dois de grau dois e os restantes são folhas. Quantos vértices tem?

(d) Esboce um exemplo do que poderia ser a árvore A e outro de como poderia ser a árvore B.

9. Para cada n, esboce uma árvore binária com raiz com vértices $1, 2, \dots, n$, com a mínima altura possível.

   (a) $n = 3$;

   (b) $n = 4$;

   (c) $n = 6$;

   (d) $n = 7$;

   (e) $n = 12$;

   (f) $n = 15$.

10. (a) Quantas folhas e quantos vértices tem uma árvore binária completa de altura h?

    (b) Quantas folhas e quantos vértices tem uma árvore n-ária completa de altura h?

11. Conte, sem utilizar o teorema de Cayley, o número de árvores diferentes com 2, 3, 4 e 5 vértices. Comprove o seu resultado com o valor dado pelo teorema.
    Sugestão: estude as diferentes possibilidades para as sucessões de graus e obtenha as diferentes árvores isomorfas. Etiquete depois os vértices destas e conte as diferentes possibilidades.

12. Recorde que os números de Catalan se podem definir por recorrência da seguinte forma:

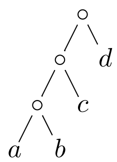
$$\begin{cases} C_0 = 1; \\ C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(a) Podemos associar os termos numa operação de várias maneiras. por exemplo, se estivermos a operar quatro termos a, b, c e d, podemos fazê-lo de cinco formas distintas:

$$\big((ab)c\big)d, \quad \big(a(bc)\big)d, \quad (ab)(cd), \quad a\big((bc)d\big), \quad a\big(b(cd)\big).$$

Expresse o número de maneiras diferentes de associar n termos numa operação utilizando números de Catalan.

(b) Podemos fazer corresponder a cada forma de associar n termos numa operação uma árvore binária cheia com n folhas. Por exemplo, podemos representar a associação $\big((ab)c\big)d$ pela árvore



Faça uma correspondência entre todas as árvores binárias cheias de 5 folhas e todas as formas de associar 5 termos numa operação. Generalizando, expresse o némero de árvores binárias cheias de n folhas em termos de núemeros de Catalan.