7 CÁLCULO INTEGRAL

7.1. Seja $f(x) = x^2$ em [0,1] e $P = \{0, 0, 4, 0, 5, 0, 7, 1\}$ uma partição de [0,1]. Calcule s_P e S_P .

7.2. Seja
$$f(x)$$
 definida em $[-1,2]$ por
$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{se } -1 \le x < 0, \\ x^2+1 & \text{se } 0 \le x < 1, \\ 3 & \text{se } 1 \le x \le 2, \end{cases}$$
 e $P = \begin{cases} -1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2 \end{cases}$ uma partição de $[-1, 2]$. Calcule s_P .

7.3. Seja
$$f(x) = (x-4)^2$$
 em $[0,4]$ e $P = \{0;1;2;3;4\}$ uma partição de $[0,4]$.

- (a) Represente graficamente f(x);
- b) Calcule $s_P \in S_P$.

7.4. Interprete geometricamente os seguintes integrais e determine o seu valor:

$$\begin{array}{c}
 b \\
 \hline{a}) \int_{a}^{b} c dx, \text{ com } 0 < a < b;
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 b \\
 \hline{a} \\
 \hline{a}
\end{array}$$

7.5. Calcule, usando a definição, o integral
$$\int_{0}^{1} x^{2} dx$$
, decompondo o intervalo em n partes iguais.

7.6. Calcule, usando a definição, o integral
$$\int_{0}^{1} e^{x} dx$$
, decompondo o intervalo em n partes iguais.

7.7. Estabeleça uma relação de ordem entre os seguintes integrais:

(a)
$$\int_{0}^{1} \sqrt{x} dx = \int_{0}^{1} x^{3} dx;$$



7.8. Mostre que:

a)
$$0 \le \int_{0}^{\pi} senx dx \le 4$$
,

b)
$$-2 \le \int_{-1}^{1} x^3 dx \le 2$$
.

7.9. Seja
$$f$$
 uma função contínua em $[1, +\infty[$ e $\int_{1}^{x} f(t)dt = e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$.

(a) Determine, justificando, f(x);

b) Sem calcular o integral, mostre que
$$\int_{4}^{9} f(t)dt = 2e^{3} - e^{2}.$$

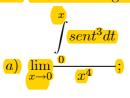
7.10. Determine as funções derivadas das seguintes funções:

(a)
$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{e^t + \ln t}{t^2} dt$$
;

$$(b) \quad G(x) = \int_{-\infty}^{3x^2} \ln t \, dt;$$

$$(c) \quad H(x) = \int_{1/x}^{e^x} \cos t^2 dt.$$

7.11. Calcule os seguintes limites:



$$\begin{array}{c}
x\\ \int sent^5 dt \\
b) \lim_{x \to 0} \frac{0}{x}; \\
sent^2 dt
\end{array}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_{sent dt}^{sent dt}}{(x-1)^2}$$

7.12. Sendo f(x) uma função contínua no intervalo I e sendo c um ponto interior de I, calcule

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{x}{x - c} \int_{c}^{x} f(t) dt \right), \quad \text{com } x \in I.$$

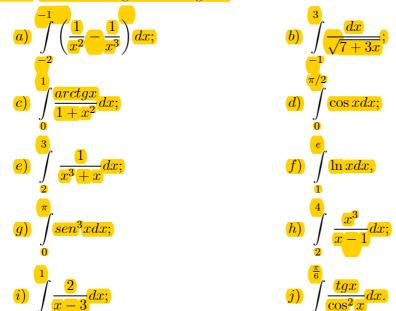
7.13. Determine o domínio, os intervalos de monotonia e os extremos locais das funções:

(a)
$$F(x) = \int_{0}^{x} (t^2 - 6t + 8) dt;$$
 (b) $G(x) = \int_{0}^{x} \sqrt{1 + t^4} dt;$ (c) $H(x) = \int_{0}^{x} (t^2 - 6t + 8) dt;$

(b)
$$G(x) = \int_{0}^{0} \sqrt{1 + t^4} dt$$
;

(c)
$$H(x) = \int_{0}^{e^x} \frac{1}{\ln t} dt$$
;

7.14. Calcule os seguintes integrais:



7.15. Considere a função
$$f(x) = \frac{A}{\sqrt{x(1-x)}}$$
. Sabendo que $1 \le A \le 2$, calcule um majorante e um minorante para
$$\frac{3}{4}$$
$$\int f(x)dx.$$

7.16. Sendo f uma função contínua em [0,1] e admitindo-se que $0 \le f(x) \le 1$. Prove que:

$$\int_{0}^{1} \frac{f(x)}{1+x^2} dx \le \frac{\pi}{4}.$$

7.17. Calcule, usando o método de integração por partes ou por substituição, os seguintes integrais:

a)
$$\int_{1}^{e} x^{-3} \ln x dx;$$
b)
$$\int_{1}^{\pi} e^{x} \cos^{2} x dx;$$
c)
$$\int_{0}^{1} \arccos x dx;$$
d)
$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{3 + \cos x} dx;$$
e)
$$\int_{0}^{9} x \sqrt[3]{1 - x} dx;$$
f)
$$\int_{0}^{2} e^{x^{2}} x dx,$$

$$g) \int_{0}^{\pi} x senx dx;$$

$$h) \int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx;$$

$$i) \int_{1}^{e} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx;$$

$$j) \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen(2x)}{1 + sen^4 x} dx.$$

7.18. Seja $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que $\int_{0}^{\pi/2} f(senx) dx = \int_{0}^{\pi/2} f(\cos x) dx.$

7.19. Seja f uma função contínua em [-a, a]. Prove que:

a) Se
$$f$$
 é uma função par, então
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx;$$

b) Se
$$f$$
 é uma função ímpar, então
$$\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=0.$$

7.20. Se f(x) é uma função par e g(x) é uma função impar, determine o valor dos seguintes integrais:

(b)
$$\int_{-1}^{1} [g(x)]^2 dx$$
;

(c)
$$\int_{-1}^{1} [g(x)]^3 dx$$
;

$$\begin{array}{c}
1 \\
d) \int_{-1}^{1} f(0)g(x)dx
\end{array}$$

7.21. Mostre que $\int_{1}^{x} \frac{e^{t}}{t} dt = \int_{1}^{e^{x}} \frac{1}{\ln s} ds$, para qualquer x > 0.