## 5. CÁLCULO DIFERENCIAL EM $\mathbb{R}$

**5.1.** Calcule, usando a definição, a função derivada das seguintes funções:

*a*) $f(x) = x^n, n \in \mathbb{R}$; *b*) $f(x) = \sqrt{x}$; *c*) $f(x) = e^x$;

*d*) $f(x) = senx$; *e*) $f(x) = \cos x$; *f*) $f(x) = \ln x$.

**5.2.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 6$.

*a*) Determine os pontos do plano onde a tangente ao gráfico de $f$ é horizontal;

*b*) Determine os pontos do plano onde a tangente ao gráfico de $f$ tem declive 6;

*c*) Mostre que a recta $y = 12x - 17$ é tangente ao gráfico de $f$ e determine o ponto de tangência.

**5.3.** Considere a função $g : \mathbb{R}\backslash \{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

*a*) Calcule $g'(2)$, aplicando a definição;

*b*) Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abcissa 2.

**5.4.** Calcule a inclinação da recta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^3 - x^2$ no ponto de abcissa 1.

**5.5.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + ax + b$. Determine os valores de $a$ e $b$ tais que a recta $y = 2x$ seja tangente à curva $f$ no ponto $(2, 4)$.

**5.6.** Determine os valores das constantes $a, b$ e $c$ para os quais os gráficos dos dois polinómios $p(x) = x^2 + ax + b$ e $q(x) = x^3 - c$ se intersectem no ponto $(1, 2)$ e admitam a mesma tangente naquele ponto.

**5.7.** Estude a diferenciabilidade de cada uma das seguintes funções nos pontos indicados:

*a*) $f(x) = |x|$, no ponto $x = 0$;

*b)* $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x < 2, \\ 2x+1 & \text{se } x \geq 2, \end{cases}$ no ponto $x = 2$.

*c)* $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, no ponto $x = 1$.

**5.8.** Determine as derivadas das seguintes funções indicando o domínio de derivação:

*a)* $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$;

*b)* $f(x) = x^3 - x^2$;

*c)* $f(x) = 2x^{-1} + 6x^{\frac{1}{3}}$;

*d)* $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$;

*e)* $f(x) = (x-4)^2\left(\dfrac{x^3}{3} + \sqrt[5]{x}\right)$;

*f)* $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{2-3x}\right)^{-3}$;

*g)* $f(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x+\sqrt{x}}$;

*h)* $f(x) = \cos^3 x$;

*i)* $f(x) = e^{x^2+1}$;

*j)* $f(x) = \ln(3x)$;

*k)* $f(x) = x\,(\ln x)^{\frac{1}{2}}$;

*l)* $f(x) = \dfrac{1}{sen^2 x}$;

*m)* $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln(x^2+1)$;

*n)* $f(x) = tg(e^x)$;

*o)* $f(x) = e^{\ln 2x}$;

*p)* $f(x) = tg(x^2-1)$;

*q)* $f(x) = \dfrac{\ln(2x)}{sen\ x}$;

*r)* $f(x) = xe^{\cos^2 x}$;

*s)* $f(x) = \dfrac{sen(3x+5)}{2x+1}$;

*t)* $f(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{\cos(2x+1)}$;

*u)* $f(x) = \dfrac{e^{(x-1)^2}}{(x-1)}$;

*v)* $f(x) = x^2 arctg\ x$;

*x)* $f(x) = \ln(\ln x)$;

*z)* $f(x) = \cos(arcsen\ x)$.

**5.9.** Seja $f$ uma função real definida em $\mathbb{R}$ tal que:

i) $f(a+b) = f(a)f(b), \forall a, b \in \mathbb{R}$;

ii) $f(0) = 1$;

iii) $f$ é diferenciável em $x = 0$.

Prove que $f$ é diferenciável para todo o $x \in \mathbb{R}$ e tem-se $f'(x) = f'(0).f(x)$.

**5.10.** Calcule $a$ e $b$ de modo que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 2, \\ ax+b & \text{se } x \geq 2, \end{cases}$$

seja diferenciável e determine, para esses valores de $a$ e $b$, a função derivada.

**5.11.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Calcule a derivada de $f$ em cada $x \in \mathbb{R}$.

**5.12.** Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções definidas por $g(x) = |x|$ e $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$
Mostre que $f$ e $g$ não são diferenciáveis no ponto zero, mas que a função composta $f \circ g$ é.

**5.13.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com derivada $f'$. Determine a derivada de:

*a)* $f(-x)$;

*b)* $f(e^x)$;

*c)* $f(\ln(x^2+1))$;

*d)* $f\,[f(x)]$.

**5.14.** Como se sabe, a restrição da função $f(x) = tgx$ ao intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ é uma bijecção diferenciável deste intervalo sobre $\mathbb{R}$. Utilizando o teorema da derivação da função inversa, mostre que a função inversa de $f$, $arctg\ x$, é diferenciável em $\mathbb{R}$ e se tem $(arctg\ x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
Demonstre resultados análogos para as restantes funções trigonométricas.

**5.15.** Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Calcule $[arctg\,(f(x)) + f\,(arctg\ x)]'$.

**5.16.** Mostre que as seguintes funções têm um máximo ou um mínimo local nos pontos indicados, não sendo todavia diferenciáveis nesses pontos:

*a)* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x > 0, \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$ no ponto $x = 0$;

*b)* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2}$ no ponto $x = 3$.

**5.17.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 + 4x - 1$. Mostre que $f$ tem um único zero em $\mathbb{R}$.
**Sug.:** *a)* Prove primeiro, utilizando o Teorema de Bolzano, que $f$ tem pelo menos um zero em $\mathbb{R}$;
*b)* Prove em seguida, utilizando o Teorema de Rolle, que $f$ não pode ter mais do que um zero em $\mathbb{R}$.

**5.18.** Mostre que a função $f(x) = 1 - x^2$ satisfaz as condições do Teorema de Rolle no intervalo $[-1, 1]$. Determine um ponto $c$ onde $f\,'(c) = 0$.

**5.19.** Seja $f(x) = e^x - x - 1$. Mostre, utilizando o Teorema de Rolle, que $f$ não tem outra raíz para além de $x = 0$.

**5.20.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ três vezes diferenciável com $f(a) = f\,'(a) = f(b) = f\,'(b) = 0$. Prove que $f'''(c) = 0$, para algum $c \in (a, b)$.

**5.21.** Mostre, utilizando o Teorema de Lagrange, que:

*a)* $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1 + x) < x$, para $x > 0$;

*b)* $-x \leq sen\ x \leq x$, para $x > 0$.

*c)* $|sen\ b - sen\ a| \leq |b - a|$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

**5.22.** Aplique o Teorema de Lagrange para determinar um valor aproximado de $\sqrt{105}$.

**5.23.** Determine, sempre que existam, os seguintes limites:

*a)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{sen\ x}{x}$; *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$; *c)* $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{5 + x} - 3}{\log(5 - x)}$;

*d)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x} - 1}{3x}$; *e)* $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{sen\ (3x)}{1 - 2\cos x}$; *f)* $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{sen^2\,(x - 2)}{e^{x^2-4} - 1}$;

*g)* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{2x + 1}$; *h)* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$, com $\alpha > 0$; *i)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{xe^x - x}$;

*j)* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1 + 2x)}{\ln(1 + 5x)}$; *k)* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$; *l)* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \ln(3x)$;

*m)* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$; *n)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{sen(3x + 5)}{2x + 1}$; *o)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{xe^x - x}$;

*p)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{sen\ x}\right)$; *q)* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (1 + x)^{\frac{1}{x^2}}$; *r)* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^3}$.

**5.24.** Estude a monotonia e o sentido da concavidade da função $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3$.

**5.25.** Determine a derivada de ordem $n$ das seguintes funções:

*a)* $f(x) = sen\ x$; *b)* $f(x) = \cos(2x)$; *c)* $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$;

*d)* $f(x) = \ln(1+x)$; *e)* $f(x) = xe^{-x}$; *f)* $f(x) = x^3 + 5x^2 + 4x - 9$.

**5.26.** Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = sen\ x$. Determine o polinómio de Taylor de ordem 6 no ponto $x = \dfrac{\pi}{2}$.

**5.27.** Determine o polinómio de Taylor de ordem $n$ (polinómio de MacLaurin de ordem $n$), no ponto $x = 0$, das seguintes funções:

*a)* $f(x) = x^3 - 1$; *b)* $f(x) = e^x$; *c)* $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$;

*d)* $f(x) = \ln(1+x)$; *e)* $f(x) = e^{5x-1}$; *f)* $f(x) = sen(2x+3)$.

**5.28.** Determine o polinómio de Taylor de ordem $n$, nos pontos indicados, das seguintes funções:

*a)* $f(x) = \dfrac{1}{x}$, em $x = 2$; *b)* $g(x) = \sqrt{x}$, em $x = 1$.

**5.29.** Determine os máximo e os mínimos das seguintes funções:

*a)* $f(x) = x^2 + 4x + 6$; *b)* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$;

*c)* $f(x) = x^2(x-12)^2$; *d)* $f(x) = x \ln x$;

**5.30.** Determine um polinómio de 2.º grau que tem como uma das suas raízes $x = -1$, que toma para $x = 0$ o valor 1 e tal que é máximo para $x = 0$.

**5.31.** De entre todos os rectângulos que se podem inscrever numa circunferência de raio $r$, determine aquele cuja área é máxima.

**5.32.** Estude e represente graficamente as seguintes funções reais de variável real:

*a)* $f(x) = \dfrac{3x^3}{x^2-4}$; *b)* $g(x) = (e^x - 1)^2$; *c)* $h(x) = \dfrac{\ln|x|}{x}$; *d)* $j(x) = x\ln|x|$.

**5.33.** Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} arctg\left(\dfrac{1+x}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

*a)* Estude $f$ quanto à continuidade e à existência de limites quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

*b)* Estude a função $f$ quanto à monotonia e extremos.

*c)* Determine o sentido da concavidade e as inflexões do gráfico de $f$.

*d)* Esboce o gráfico de $f$.

**5.34.** Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{se } x \geq 0, \\ arctg\,(ax) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

*a)* Determine $a$.

*b)* Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

*c)* Estude $f$ quanto à diferenciabilidade e determine a sua função derivada.

*d)* Determine, caso existam, os intervalos de monotonia e os extremos locais de $f$.

**5.35.** Seja $f : ]0,1[ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que:

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Diga, justificando, se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa:

*a)* Para qualquer $n \geq 2$, a função $f$ tem necessariamente máximo no intervalo $\left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right]$.

*b)* A função $f$ é necessariamente limitada.

*c)* A função $f'$ tem necessariamente infinitos zeros.