6. PRIMITIVAÇÃO

6.1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, indicando o intervalo onde é válida essa primitiva:

a) $3x+2$;

b) $x^2\left(x^3-3\right)^2$;

c) $\left(x^2-1\right)^2$;

d) $\sqrt[5]{x^2}$;

e) $x^2e^{x^3}$;

f) $x\sqrt[3]{1+2x^2}$;

g) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{2-3x}}$;

h) 5^x;

i) $\dfrac{x}{1+x^2}$;

j) $tg\ x$;

k) $\dfrac{x^2}{1+x^6}$;

l) $\dfrac{1}{\cos^2 x\,(2tgx+1)}$;

m) $\dfrac{\ln x}{x}$;

n) $\dfrac{2\cos x}{(1-senx)^2}$;

o) $\dfrac{\cos(\ln x)\,;}{x}$

p) $\dfrac{senx}{1+\cos^2 x}$;

q) $\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$;

r) $\dfrac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}$;

s) $e^{2x}\cos\left(e^{2x}\right)$;

t) $\dfrac{1}{5+x^2}$;

u) $\dfrac{arctg\left(\frac{x}{3}\right)}{9+x^2}$;

v) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$;

w) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$;

x) $\dfrac{1}{sen\ x}$;

y) tg^2x;

z) $\dfrac{x^3}{\sqrt{x^8+1}}$.

6.2. Mostre que se f é derivável num intervalo $]a,b[$ e se $f'(x)=0$, para todo $x\in\,]a,b[$, então f é constante em $]a,b[$. (Sugestão: Utilize o teorema de Lagrange.)

6.3. Mostre que se f e g são duas funções deriváveis num intervalo $]a,b[$ e se $f'(x)=g'(x)$, para todo $x\in\,]a,b[$, então existe uma constante $c\in\mathbb{R}$, tal que $f(x)=g(x)+c$ para todo $x\in\,]a,b[$. (Sugestão: Utilize o exercício anterior)

6.4. Mostrar que se F é uma primitiva qualquer de uma função ímpar f, então F é par.

6.5. Determine, utilizando o método de primitivação por partes, uma primitiva de cada uma das seguintes funções, indicando o intervalo onde é válida essa primitiva:

a) $x sen x$; *b)* $e^x \cos x$; *c)* xe^{x+2};

d) $x^2 e^x$; *e)* $\ln(2x)$; *f)* $\cos^2 x$;

g) $2x\cos(4x-1)$; *h)* $arctg\,(2x)$; *i)* $arcsen(x)$

j) $x \ln x^2$; *k)* $x \cos x sen x$; *l)* $sen^4 x$;

m) $\ln^2 x$; *n)* $\dfrac{x^5}{\sqrt{2+x^3}}$; *o)* $sen\,(\ln x)$;

p) $x arctg x$; *q)* $\arccos(x)$.

6.6. Determine, utilizando o método de substituição, a expressão geral das seguintes primitivas:

a) $\dfrac{sen\,(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$; *b)* $x\sqrt{1+3x}$; *c)* $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$;

d) $\dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$; *e)* $\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; *f)* $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-3}}$;

g) $\dfrac{\ln(2x)}{x\ln(4x)}$; *h)* $\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}$; *i)* $\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

6.7. Resolva as seguintes equações diferenciais sujeitas às condições dadas:

a) $f'(x) = 4x^3 + x^2 - 6x + 1, \;\; f(1) = \dfrac{1}{3}$;

b) $f'(x) = \dfrac{x}{1+x^2}, \;\; f(0) = 2$;

c) $f''(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \;\; f'(0) = 2, \;\; f(0) = -1$.

6.8. Se um automóvel parte do repouso, qual a aceleração constante que lhe permitirá percorrer 150 metros em 10 segundos?

6.9. Um ponto percorre o eixo dos xx com aceleração $12 - 8t$ (m/s^2) em cada instante t. Sabendo que ocupava a posição $x = 0$ no instante $t = 0$ e tinha velocidade 0 nesse instante, calcule:

a) a sua velocidade no instante $t = 2$ segundos;

b) a sua posição no instante $t = 3$ segundos.

6.10. Determine as primitivas e os respectivos intervalos de primitivação, para as seguintes funções racionais:

a) $\dfrac{1}{x+1}$; *b)* $\dfrac{x^3}{x+1}$; *c)* $\dfrac{x^2}{x^2-1}$;

d) $\dfrac{3x+1}{x^3-x}$; *e)* $\dfrac{2x}{(x+1)(x+2)^2}$; *f)* $\dfrac{1}{x^3-x^2+x+1}$;

g) $\dfrac{x^4}{(x+2)(x^2-1)}$; *h)* $\dfrac{x}{x^2+2x+3}$; *i)* $\dfrac{x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$.

6.11. Determine a expressão geral das primitivas das seguintes funções:

a) $\dfrac{1}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$; *b)* $\dfrac{x^3}{\sqrt{(x^4-1)^3}}$; *c)* $\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}$;

d) $\dfrac{sen x}{1+\cos x}$; *e)* $\dfrac{\cos x - sen x}{sen x + \cos x}$; *f)* $\dfrac{1}{2shx + chx}$;

g) $\dfrac{2\ln x - 1}{x \ln x (\ln x - 1)^2}$; *h)* $\dfrac{1}{e^x - 1}$; *i)* $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}-1}$;

k) $\dfrac{1}{e^x - e^{-x}}$; *l)* $\dfrac{1}{1 - sen x - \cos x}$; *m)* $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;

n) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$; *o)* $\dfrac{arctg^4 x}{1+x^2}$; *p)* $\dfrac{e^{3x}+3e^{2x}+6}{e^{3x}+3e^x}$;

q) $x\sqrt{x-1}$; *r)* $\dfrac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$; *s)* $\dfrac{\cos(arcsen\ x)}{\sqrt{1+x^2}}$;

t) $\dfrac{1}{x\ln(x)}$; *u)* $\dfrac{1+\ln(\ln(x))}{x}$.

6.12. Determine um intervalo I de $\mathbb{R}$ e uma função $f : I \to \mathbb{R}$ que verifique:

a) $f'(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x}$ com $f(1) = 2$;

b) $f''(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x}$ com $f'(e) = 1$ e $f(1) = 2$.

6.13. Determine uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifique as seguintes condições:

$$g''(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi}{2} \ \ e \ \lim_{x\to-\infty} g(x) = -1.$$