4. FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

4.1. Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$; *b)* $f(x) = \sqrt{-2x} + \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$; *c)* $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$;

d) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$; *e)* $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$; *f)* $f(x) = \ln(1 - e^x)$;

g) $f(x) = \ln \ln x$; *h)* $f(x) = \ln(1 - arcsen\ x)$; *i)* $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

4.2. Das funções que se seguem indique quais são pares e quais são ímpares:

a) $f(x) = x$; *b)* $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$; *c)* $f(x) = \sqrt{x^2}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$; *e)* $f(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$; *f)* $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{2+x^2}\right)$.

4.3. Determine a função inversa de cada uma das seguintes funções e indique qual o seu domínio:

a) $f(x) = 2x + 3$; *b)* $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$; *c)* $f(x) = arctg\,(3x)$.

4.4. Dada a função real de variável real, definida por

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - 3arcsen(2x).$$

Considerando a restrição principal do seno, determine:

a) o domínio, o contradomínio e os zeros de f;

b) uma expressão para f^{-1};

c) $\left\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \dfrac{\pi}{4}\right\}$.

4.5. Dada a função real de variável real, definida por

$$f(x) = \frac{3e^x - 2}{e^x + 5}.$$

Calcule $f(0)$ e determine x tal que $f(x) \geq 0$.

4.6. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = 2 + e^{\frac{2}{x-1}}$.

a) Determine o domínio e o contradomínio de f;

b) Determine x tal que $f^{-1}(x) = 0$.

4.7. Demonstre, utilizando a definição de limite, que:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = 5$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right) = 0$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x^2+2\right) = +\infty$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = -\infty$;

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x sen\ x = 0$.

4.8. Determine, caso exista, cada um dos seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2-3x-6}{\sqrt{x^4+1}}$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}, a \in \mathbb{R}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+5}}$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a},\ n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^3-1}$,

f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$;

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\left(\sqrt{x^4+1}-x\right)$;

h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$;

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x+1}$;

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{sen(sen\ x)}{x}$;

l) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2-1}{2x^2}\right)^{x^2}$;

m) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-3x^2+2}$;

n) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2sen\ x}-e^{sen\ x}}{sen(2x)}$;

o) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+sen\ x)^{\frac{1}{x}}$;

p) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

q) $\displaystyle\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$.

4.9. Calcule, nos pontos indicados, os limites laterais e os limites das seguintes funções, caso existam:

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1 & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$ em $x = 0$;

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0, \\ x & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$ em $x = 0$.

4.10. Prove que, se os limites laterais $f(a^-)$ e $f(a^+)$ são finitos e iguais, então $\displaystyle\lim_{x\to a, x\neq a} f(x) = f(a^{\pm})$. Porém, pode não existir $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$.

4.11. Mostre a não existência de limite em $x = 0$, para as seguintes funções:

a) $f(x) = sen\frac{1}{x}$; *b)* $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1 & \text{se } x \geq 0; \end{cases}$ *c)* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0, \\ x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

4.12. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x}$; *b)* $\lim_{x\to 0} \frac{sen\,(kx)}{x},\ k \in \mathbb{R}$; *c)* $\lim_{x\to 0} \frac{sen\sqrt{x}}{x}$;

d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{senx}{x}$; *e)* $\lim_{x\to 0} \frac{1 - sen^3 x}{\cos^2 x}$; *f)* $\lim_{x\to 0} \frac{arcsen\ x}{x}$;

g) $\lim_{x\to 0} \frac{arctg\,(2x)}{sen\,(3x)}$; *h)* $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(\sqrt{1+tgx} - \sqrt{tgx}\right)$; *i)* $\lim_{x\to 0} \frac{x - sen\,(2x)}{x + sen\,(3x)}$.

4.13. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua em a, com $a \in X$.

a) Se $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$). Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) em $]a-\varepsilon,\ a+\varepsilon[\, \cap X$.

b) Seja $k \in \mathbb{R}$ e $f(a) > k$. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > k$ em $]a-\varepsilon,\ a+\varepsilon[\, \cap X$.

c) Se $f(a) \neq 0$. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \neq 0$ em $]a-\varepsilon,\ a+\varepsilon[\, \cap X$.

4.14. Estude, quanto à continuidade, as seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{x+1}{x^3+x}$; *b)* $f(x) = |x|\, e^{-|x|}$;

c) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x^2+x}$; *d)* $f(x) = x\ln(sen^2 x)$;

e) $i(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$; *f)* $f(x) = \left|\frac{x-1}{x^2+1}\right|$;

g) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4}, & x \neq 4, \\ 1, & x = 4; \end{cases}$ *h)* $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-a}{1-x}, & x \in \left]-\infty, 0\right], \\ \frac{x-a}{1+x}, & x \in \left]0, +\infty\right[; \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) - 2x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

4.15. Analise a existência de um prolongamento por continuidade à origem

$a)$ para a função da alínea $e)$ do exercício anterior;

$b)$ para a função $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2}{x^4 + 3x}$.

4.16. Sejam f e g duas funções reais de variável real contínuas em $a \in \mathbb{R}$. Prove que a função $\max(f, g)$ é contínua em a.

Sugestão: Mostre primeiro que $\max(f,g) = \dfrac{1}{2}(f+g) + \dfrac{1}{2}|f-g|$.

4.17. Considere a função real de variável real f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2+x}-2}{x-2} & \text{se } x \neq 2, \\ m, & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

Determine m de forma que a função seja contínua em $x = 2$.

4.18. Determine os valores de a e b para os quais a seguinte função é contínua em $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } 1 < x < 3, \\ x^2 + ax + b & \text{se } |x-2| \geq 1. \end{cases}$$

4.19. Para cada par de valores reais atribuídos a m e k, a expressão seguinte define uma função real de variável real:

$$f(x) = \begin{cases} m & \text{se } x \leq 0, \\ \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 3} & \text{se } 0 < x < 1, \\ k & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Determine m e t de forma que a função seja contínua no intervalo $[0, 1]$.

4.20. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em $x = 1$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -1, \\ arcsen\ x & \text{se } -1 < x < 1, \\ r sen\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

a) Determine r.

b) Estude a continuidade de f.

c) Indique o contradomínio de f e diga se a função tem supremo, ínfimo, máximo e/ou mínimo.

d) Calcule, caso existam, os seguintes limites: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4.21. Considere as funções reais de variável real definidas, em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, por

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{e} \quad g(x) = x sen\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

a) Estude, quanto à continuidade, as duas funções em cada ponto do seu domínio;

b) Indique, justificando, se cada uma das funções é prolongável por continuidade ou descontínua em $x = 0$;

c) Mostre que f e g são funções limitadas.

4.22. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}.$$

a) Indique, sob a forma de uma reunião de intervalos disjuntos, o domínio de f;

b) Calcule os seguintes limites

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to1^-} f(x), \qquad \lim_{x\to1^+} f(x).$$

c) Indique, justificando abreviadamente, o contradomínio de f;

d) Dê exemplos de sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ de termos no domínio de f tais que $(u_n)_n$ e $(f(u_n))_n$ sejam convergentes e $(v_n)_n$ e $(f(v_n))_n$ sejam divergentes.

4.23. Considere a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \ln|x+2| + arctg\left(\dfrac{1}{x}\right) - \ln 2 & \text{se } x < 0, \\ tg\left(\dfrac{\pi}{4}x\right) - \dfrac{\pi}{2} & \text{se } 0 < x < 1, \\ e^{x-1} + \dfrac{\pi}{4} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Estude f quanto à continuidade e ao prolongamento por continuidade.

4.24. Mostre que a equação $sen^3 x + \cos^3 x = 0$ tem, pelo menos, uma raiz no intervalo $]0, \pi[$.

4.25. Mostre que a equação $x - \ln x = 2$ tem, pelo menos, duas raízes.

4.26. Considere a função polinomial

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \; n \geq 1.$$

a) Mostre que se n é ímpar, então f tem pelo menos uma raiz real.

b) Sendo n par e supondo que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) < 0$, mostre que f tem, pelo menos, duas raízes reais.

4.27. Considere a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + b\,\dfrac{sen\,(x-1)}{x-1} & \text{se } \; 0 \leq x < 1, \\ a & \text{se } \; x = 1, \\ \dfrac{x+5}{3} & \text{se } \; 1 < x \leq 4. \end{cases}$$

a) Determine os valores de a e b de modo que f seja contínua em todo o seu domínio.

b) Aplicando o teorema de Bolzano, mostre que existe $c \in (2,4)$ tal que $f(c) = c$.

4.28. Considere a função real de variável real definida por:

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{se} \quad x \leq 2, \\ \\ x & \text{se} \quad x > 2. \end{cases}$$

a) Determine $g(0)$ e $g(3)$.

b) Indique qual o valor lógico da seguinte proposição:

$$\exists c \in (0,3) : g(c) = \frac{3}{2}.$$

c) O resultado anterior contraria o teorema de Bolzano? Justifique a sua resposta.

b) Prove que a restrição de g ao intervalo $[0,2]$ tem, nesse intervalo, um máximo e um mínimo.

4.29. *a*) Seja $f : [a,b] \to [a,b]$ uma função contínua. Mostre que f tem um *ponto fixo* (isto é,

$$\exists x \in [a,b] : f(x) = x).$$

b) Dê um exemplo de uma função contínua $f : [0,1[\to [0,1[$ que não admita um ponto fixo.

4.30. Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Existe uma função contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f([0,1]) = (0,1)$.

b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $|f|$ é uma função contínua.

c) Seja $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad 0 \leq x < 2, \\ \\ x+2 & \text{se} \quad 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$. Então, f toma todos os valores entre $f(0)$ e $f(4)$.

d) Se $\lim\limits_{x \to a} |f(x)|$ existir, então também existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.