2. SUCESSÕES

2.1. Indique quais são majoradas, minoradas e limitadas, de entre as sucessões cujos termos de ordem n são:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$; *b)* $(-1)^n n^3$; *c)* $\dfrac{2+2(-1)^n}{2n}$; *d)* $n^{(-1)^n}$; *e)* $\dfrac{(-1)^n n}{3n+1}$.

2.2. Estude a monotonia das sucessões cujo termo geral se indica a seguir.

a) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$; *b)* $x_n = 1 - \dfrac{n+1}{2n}$; *c)* $x_n = n^{(-1)^n}$;

d) $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$; *e)* $x_n = \dfrac{2+2(-1)^n}{2n}$; *f)* $x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \dfrac{2x_n+1}{3}$.

2.3. Prove, usando a definição, que:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{-3}{n} = 0$; *b)* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$; *c)* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$;

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+10}{2n-1} = \frac{1}{2}$; *e)* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2+(-1)^n}{n} = 0$; *f)* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\alpha)}{n} = 0$;

g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$; *h)* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (5-2n) = -\infty$; *i)* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^n n = \infty$.

2.4. Prove que toda a sucessão convergente é limitada.

2.5. Prove que se $(x_n)_n$ converge para a e $(y_n)_n$ converge para b, então:

a) $x_n + y_n \to a + b$, quando $n \to +\infty$;

b) $x_n y_n \to ab$, quando $n \to +\infty$;

c) $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$, quando $n \to +\infty$, se $b \neq 0$ e y_n não se anula.

2.6. Prove que :

a) Se $(x_n)_n$ tende para $+\infty$, $(-\infty)$ e (y_n) é limitada, então $(x_n + y_n)_n$ tende para $+\infty$, ($-\infty$, respectivamente);

b) Se $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ tendem ambas para $+\infty\,(-\infty)$, então $(x_n + y_n)_n$ tende para $+\infty$ ($-\infty$ respectivamente);

c) Se $(x_n)_n$ tende para ∞, então $\left(\frac{1}{x_n}\right)_n$, que está definida para n suficientemente elevado, tende para 0;

d) Se $(x_n)_n$ tende para 0 e $x_n \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, então $\left(\frac{1}{x_n}\right)_n$ tende para ∞.

2.7- Estude o comportamento, quando $n \to +\infty$, das seguintes sucessões:

a) $x_n = \dfrac{3-5n^3+2n}{7n^3-1}$; *b)* $x_n = \dfrac{3n^4-5n^2-7}{n^3+n^2-1}$; *c)* $x_n = \dfrac{2n-5n^2}{7-2n^3}$;

d) $x_n = 10 + \dfrac{(-1)^n}{n}$; *e)* $x_n = \dfrac{10}{n} + (-1)^n$; *f)* $x_n = 10 + (-1)^n n$;

g) $x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$; *h)* $x_n = \dfrac{4^n+8^n}{5^n+1}$; *i)* $x_n = \dfrac{2^{n+1}+3^n}{2^n+3^{n+1}}$;

j) $x_n = \cos^2 n \ \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$; *k)* $x_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$; *l)* $x_n = \sqrt{n(n+1)} - 2n$;

m) $x_n = \cos\dfrac{\pi}{n}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n}$; *n)* $x_n = \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$; *o)* $x_n = \left(\dfrac{4n-3}{4n+1}\right)^n$.

2.8. Determine $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{y_n}{x_n}$, sendo:

a) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$ e $y_n = \dfrac{1}{n}$;

b) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ e $y_n = \dfrac{1}{n}$.

2.9. Considere a sucessão definida por

$$x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}.$$

a) Calcule os termos x_1, x_2 e x_3;

b) Mostre que $x_n \to 0$. (Sugestão: use o teorema das sucessões enquadradas.)

2.10. Prove que se $(x_n)_n$ tende para 0 e $|y_n| < |x_n|$ depois de alguma ordem, então também $(y_n)_n$ tende para 0.

2.11. Prove que a sucessão $(x_n)_n$ converge para a se e só se $(x_n - a)_n$ tende para 0.

2.12. Considere a sucessão $u_n = 1 + (-1)^n$. Verifique que a propriedade recíproca de "Toda a sucessão convergente é limitada" não é verdadeira.

2.13. Considere a sucessão de termo geral $w_n = u_n v_n$, onde $(u_n)_n$ é uma sucessão limitada e $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Prove que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

2.14. Diga, justificando a resposta, se a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}\operatorname{sen} n$ é convergente.

2.15. Considerem-se as sucessões de termo geral

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{2n} \quad \text{e} \quad y_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad \text{com } n \in \mathbb{N}.$$

a) Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$;

b) Sabendo que $y_n < 3 - \dfrac{1}{n!}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, justifique que $(x_n + y_n)$ é convergente.

2.16. Utilize o teorema das sucessões enquadradas para calcular o limite das seguintes sucessões, cujo termo de ordem n é dado por:

a) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$;

b) $y_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

2.17. Prove que:

a) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = b$ (isto é, se uma sucessão converge para b, então a média aritmética dos seus n primeiros termos converge também para b);

b) Se $x_n > 0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = b$ (isto é, se uma sucessão converge para b, então a média geométrica dos seus n primeiros termos converge também para b);

c) Se $x_n > 0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = b$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = b$.

2.18. Estude o comportamento, quando $n \to +\infty$, das sucessões seguintes:

a) $x_n = \left(\dfrac{n-3}{n+1}\right)^n$;

b) $x_n = \left(\dfrac{4n-3}{4n+1}\right)^n + \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$;

c) $x_n = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{-2n}$;

d) $x_n = \left(\dfrac{3n-2}{2n+5}\right)^{n-1}$;

e) $x_n = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{27} + \cdots + \dfrac{2}{3^{n+1}}$;

f) $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$;

g) $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^3-1}{4n^3+2}}$;

h) $x_n = \sqrt[n]{(n+1)! - n!}$;

i) $x_n = \sqrt[n]{\ln n}$.

2.19. Estude a natureza das seguintes sucessões e diga se são ou não limitadas. Calcule, caso existam, o limite superior e inferior.

a) $x_n = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)$;

b) $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n n}{2n+1}$;

c) $x_n = 10 + (-1)^n n$;

d) $x_n = n^{(-1)^n}$.

2.20. Dê exemplos de sucessões cujo conjunto dos sublimites seja o conjunto:

a) $\{x : x \in \mathbb{Z} \wedge x < 0\}$;

b) $\{2, 3\}$.

2.21. Considere a seguinte sucessão definida por recorrência

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{2}. \end{cases}$$

a) Mostre, por indução, que $x_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que $(x_n)_n$ é uma sucessão crescente.

c) Mostre que $(x_n)_n$ é convergente e calcule o seu limite.

2.22. Considere a seguinte sucessão definida por recorrência

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{n+1}. \end{cases}$$

a) Encontre um minorante para o conjunto dos termos.

b) Mostre que $(x_n)_n$ é decrescente.

c) Mostre que $(x_n)_n$ é convergente.

d) Calcule o limite da sucessão $(x_n)_n$

2.23. Considere a sucessão cujos termos são $\sqrt{3}$, $\sqrt{3+\sqrt{3}}$, $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}$, ...

a) Mostre que é crescente.

b) Mostre que é limitada superiormente.

c) Mostre que é convergente e determine o limite.

2.24. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) A sucessão $(u_n)_n$, cujo termo geral é definido por:

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{2n}{n+1} & \text{se } n \leq 10, \\ \\ 3 & \text{se } n > 10, \end{cases} \qquad \text{é divergente.}$$

b) A sucessão $(v_n)_n$, cujo termo geral é definido por:

$$v_n = \begin{cases} \dfrac{n}{n-1} & \text{se } n \text{ é par}, \\ \\ 2 & \text{se } n \text{ é ímpar}, \end{cases} \qquad \text{é divergente.}$$

c) Se $(x_n)_n$ é uma sucessão decrescente de termos positivos, então $(x_n)_n$ é convergente.

d) Uma sucessão decrescente de termos positivos tende para zero.