Departamento de
Matemática

Capítulo 1

Estatística descritiva

1.1 Uma escola avalia o seu curso através de um questionário com 50 perguntas sobre diversos aspectos de interesse. Cada pergunta tem uma resposta numa escala de 1 a 5, onde a maior nota significa melhor desempenho. Para cada aluno é então encontrada a nota média. Na última avaliação recorreu-se a uma amostra de 42 alunos, e os resultados estão em baixo.

4.2	2.7	4.6	2.5	3.3	4.7
4.0	2.4	3.9	1.2	4.1	4.0
3.1	2.4	3.8	3.8	1.8	4.5
2.7	2.2	3.7	2.2	4.4	2.8
2.3	1.9	3.6	3.9	2.3	3.4
3.3	1.8	3.5	4.1	2.2	3.0
4.1	3.4	3.2	2.2	3.0	2.8

(a) Proceda à organização dos dados construindo um quadro de frequências onde figurem as frequências absolutas, absolutas acumuladas e relativas acumuladas.

(b) Desenhe o respectivo histograma.

(c) Identifique as classes modal e mediana.

(d) Calcule a média e o desvio padrão usando os dados agrupados e também usando os dados não agrupados. Compare os resultados.

(e) Calcule a mediana e os 1º e 3º quartis.

1.2 As notas finais obtidas em 3 turmas na disciplina de Probabilidades e Estatística foram as seguintes:

Turma	1	2	3
nº alunos	30	35	40
média	13	10	9
desvio padrão	2	2.2	2.1

(a) Calcule a média e o desvio padrão das notas obtidas no conjunto de todos os alunos.

(b) No final o professor entendeu alterar linearmente as notas de forma que a média e o desvio padrão das notas de todos os alunos fossem 12 e 2 respectivamente. Sabendo que um aluno da turma 1 obteve 10 valores, calcule a sua nota na nova escala adoptada pelo professor.

1.3 O departamento de pessoal de uma certa firma fez um levantamento dos salários dos 120 funcionários do sector administrativo, tendo obtido os seguintes resultados.

Faixa salarial	Frequência Relativa
$[0, 2]$	0.25
$]2, 4]$	0.40
$]4, 6]$	0.20
$]6, 10]$	0.15

(a) Esboçe o histograma correspondente.

(b) Calcule aproximadamente a média, a variância e o desvio padrão dos salários.

(c) Se for concedido um aumento de 100% a todos os funcionários, haverá alteração na média dos salários? E na variância dos salários? Justifique.

(d) Responda à questão anterior para o caso de ser concedido um aumento de 2 unidades a todos os funcionários.

Capítulo 2

Noções de probabilidade

2.1 Uma colecção de 100 programas de computador foi examinada para detectar erros de "sintaxe", "input/output" e de "outro tipo" diferente dos anteriores. Desses 100 programas, 20 tinham erros de "sintaxe", 10 tinham erros de "input/output" e 5 tinham erros de "outro tipo", 6 tinham erros de "sintaxe" e de "input/output", 3 tinham erros de "sintaxe"e de "outro tipo", 3 tinham erros de "input/output"e de "outro tipo"e 2 tinham os três tipos de erros considerados. Um programa é seleccionado ao acaso desta colecção. Determine a probabilidade de que o programa seleccionado tenha:

(a) Exclusivamente erros de "sintaxe".

(b) Pelo menos um dos três tipos de erros.

2.2 Considere um dado equipamento que é constituído por 10 transístores dos quais dois são defeituosos. Suponha que dois transístores são seleccionados ao acaso, com reposição.

(a) Escreva o espaço de resultados correspondente a esta experiência aleatória e calcule as respectivas probabilidades.

(b) Calcule as probabilidades dos seguintes acontecimentos:

A_1 – Sair um transístor defeituoso na 1ª tiragem.
A_2 – Sair um transístor defeituoso na 2ª tiragem.
A_3 – Sair pelo menos um transístor defeituoso.
A_4 – Sair exactamente um transístor defeituoso.

(c) Responda às mesmas questões de (a) e (b) mas agora considerando que não houve reposição.

2.3 Para um certo tipo de cancro a taxa de prevalência (proporção de doentes na população em geral) é 0.005. Um teste diagnóstico para esta doença é tal que:

- a probabilidade do teste resultar positivo quando aplicado a um indivíduo com cancro (sensibilidade do teste) é 0.99;
- a probabilidade do teste resultar negativo quando o indivíduo não tem cancro (especificidade do teste) é 0.95.

(a) Calcule o valor preditivo do teste, isto é, a probabilidade de um indivíduo ter cancro sabendo que o teste resultou positivo.

(b) Supondo que o teste foi aplicado duas vezes consecutivas ao mesmo doente e que das duas vezes o resultado foi positivo, calcule a probabilidade do doente ter cancro (admita que, dado o estado do indivíduo, os resultados do teste em sucessivas aplicações, em qualquer indivíduo, são independentes). O que pode concluir quanto ao valor preditivo da aplicação do teste duas vezes consecutivas?

Capítulo 4

Variáveis aleatórias e distribuições contínuas

4.1 Seja $Y = 100\ X$ a variavel aleatória que representa a percentagem de álcool num certo composto, onde X é uma variável aleatória com a seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} 20\, x^3\, (1-x) & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Determine a função de distribuição de X e esboce o seu gráfico.

(b) Calcule a probabilidade de X ser inferior a $2/3$.

(c) Suponha que o preço de venda do composto depende do conteúdo em álcool: se $1/3 < X < 2/3$ o preço é de C_1 euros por litro; caso contrário o preço é de $C_2 < C_1$ euros por litro. Supondo o custo de produção igual a C_3 euros por litro:

i) Calcule a função de distribuição do lucro líquido por litro.

ii) Determine o valor esperado do lucro líquido por litro.

4.2 Uma empresa vende pe¸cas cuja duração em centenas de horas é uma variável aleatória contínua com a seguinte função de distribuição:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

A empresa dispõe de um stock de peças dos tipos A e B. Ao tipo A está associado um parâmetro $\lambda = 1/2$ e ao tipo B um parâmetro $\lambda = 1$. De um lote formado por 100 peças do tipo A e 50 peças do tipo B, retirou-se ao acaso uma peça, cuja duração foi ensaiada. Em relação ao resultado desse ensaio sabe-se apenas que a duração da peça foi inferior a 90h. Calcule a probabilidade de que a peça escolhida seja do tipo B.

4.3 O tempo de vida de um laser tem distribuição normal com média igual a 7000 horas e desvio padrão igual a 600 horas.

(a) Qual é a probabilidade de um desses lasers falhar até 5300 horas?

(b) Qual é a duração que 90% desses lasers excede?

(c) Um produto inclui três lasers e falha se algum deles falhar. Se os tempos de vida dos três lasers forem independentes, qual é a probabilidade desse produto durar mais do que 7000 horas?

Capítulo 5

Distribuições conjuntas de probabilidade e complementos

5.1 Uma loja de electrodomésticos vende televisores da marca X e da marca Y. A função de probabilidade conjunta do número de televisores vendidos diariamente é a seguinte:

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

(a) Calcule as funções de probabilidade marginais de X e de Y.

(b) Calcule a função de distribuição marginal de X.

(c) Calcule a probabilidade de que num dia a marca Y seja mais vendida do que a marca X.

(d) Determine o valor esperado e a variância do número total de televisores vendidos diariamente.

5.2 Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas com função de probabilidade conjunta dada por:

$Y \backslash X$	1	2	3
1	1/9	0	1/18
2	0	1/3	1/9
3	1/9	1/6	1/9

(a) Determine:

i) A função de probabilidade marginal de X.

ii) A função de distribuição marginal de Y.

iii) $P(X + Y \leq 4)$.

iv) As funções de probabilidade de X condicionais a $Y = 1$ e $Y = 3$.

v) $E(X|Y = 1)$.

(b) Defina $E(X|Y)$.

(c) Diga, justificando, se X e Y são variáveis aleatórias independentes.

(d) Calcule a $V(X + Y)$.

5.3 Para ser admitido num certo curso um aluno tem que realizar duas provas, A e B, independentes. A classificação em cada uma das provas será de insuficiente (0), suficiente (1) ou bom (2). A probabilidade do aluno obter 0, 1 ou 2 nas provas A e B é apresentada em seguida:

Classificação	Prova A	Prova B
0	0.2	0.2
1	0.5	0.6
2	0.3	0.2

Considere o par aleatório (X, Y) onde:

X = "diferença (em módulo) das classificações nas provas A e B";
Y = "soma das classificações das provas A e B".

(a) Determine:

i) A função de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y).

ii) As funções de probabilidade marginais de X e de Y.

iii) A função de distribuição marginal de X.

iv) A função de probabilidade de X condicional a $Y = 2$.

(b) Diga, justificando, se X e Y são independentes.

(c) Calcule:

i) Todas as funções de probabilidade de Y condicionais a X.

ii) $E(Y|X = 2)$ e $V(Y|X = 2)$.

iii) $F_{Y|X=0}(y)$.

iv) $P(Y = 2|X.Y = 0)$.

v) $P(X + Y$ ser ímpar$)$.

5.4 Sejam X e Y variáveis aleatórias com função de probabilidade conjunta dada por:

$X\backslash Y$	-1	0	1
-1	0	1/4	0
0	1/4	0	1/4
1	0	1/4	0

Mostre que $Cov(X, Y) = 0$ mas que X e Y não são independentes.