4. FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL (SOLUÇÕES)

4.1.

a) $D_f = \left]-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right[$; *b)* $D_f = \left]-1, 0\right]$; *c)* $D_f = \mathbb{R}$;

d) $D_f = \left]-2, 2\right[$; *e)* $D_f = \left]-2, 2\right[$; *f)* $D_f = \mathbb{R}^-$;

g) $D_f = \left]1, +\infty\right[$; *h)* $D_f = \left[-1, sen1\right[$;

i) $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{R}\right\}$.

4.2.

a) f é ímpar; *b)* f não é par nem ímpar. *c)* f é par;

d) f é par; *e)* f é ímpar; *f)* f não é par nem ímpar.

4.3.

a) $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$ e $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$; *b)* $f^{-1}(x) = 2e^x$ e $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$;

c) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3} tg\ x$ e $D_{f^{-1}} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

4.4. *a)* $D_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $D_f^{'} = \left[-\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ e $x = \frac{1}{2} sen\left(\frac{\pi}{12}\right)$;

b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} sen\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{3}\right)$; *c)* $x = 0$.

4.5. $f(0) = \frac{1}{6}$ e $x \in \left[\ln\left(\frac{2}{3}\right), +\infty\right[$.

4.6. *a)* $D_f = \mathbb{R} \backslash \{1\}$ e $D_f^{'} = \left]2, 3\right[\cup \left]3, +\infty\right[$; *b)* $x = 2 + e^{-2}$.

4.8.

a) 2; *b)* 0; *c)* 1; *d)* $na^{n-1}, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$; *e)* $\frac{4}{3}$;

f) $\frac{4}{3}$; *g)* 0; *h)* $\frac{1}{2}$; *i)* 0; *j)* $\frac{3}{2}$;

k) 1; *l)* 0; *m)* $\frac{1}{3}$; *n)* $\frac{1}{2}$; *o)* e;

p) 1; *q)* não existe.

4.9. *a)* $f(0^-) = 0$, $f(0^+) = 1$ e $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$; *b)* $g(0^-) = -\infty$, $g(0^+) = 0$ e $\nexists \lim_{x\to 0} g(x)$.

4.12.

a) 1; *b)* k; *c)* $+\infty$; *d)* 0; *e)* 1;

f) 1; *g)* $\frac{2}{3}$; *h)* 0; *i)* $\frac{-1}{4}$.

4.14.

a) contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; *b)* contínua em $\mathbb{R}$; *c)* contínua em $\mathbb{R}^+$;

d) contínua em $\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$; *e)* contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; *f)* contínua em $\mathbb{R}$;

g) contínua em $\mathbb{R}\setminus\{4\}$; *h)* contínua em $\mathbb{R}$; *i)* contínua em $\mathbb{R}$.

4.15. *a)* A função i não é prolongável;

b) $$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4+x^2}{x^4+3x} & \text{se} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}.$$

4.17. $m = \frac{1}{4}$. **4.18.** $a = -3$ e $b = 4$. **4.19.** $m = 0$ e $k = -\frac{1}{2}$.

4.20. *a)* $r = \frac{\pi}{2}$.

b) contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

c) $D'_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tem supremo e máximo igual a $\frac{\pi}{2}$ e tem ínfimo e mínimo igual a $-\frac{\pi}{2}$.

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ não existe.

4.21. *a)* contínuas nos respectivos domínios.

b) $F(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$ e g não é prolongável.

4.22. *a)* $D_f = [0,1[\,\cup\,]1,+\infty[\,.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty.$

c) $D_f' = \mathbb{R}.$

d) Por exemplo, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ e $v_n = n.$

4.23. f é continua no seu domínio e

$$F(x) = \begin{cases} \ln|x+2| + arctg\left(\dfrac{1}{x}\right) - \ln 2 & \text{se } x \leq 0, \\ tg\left(\dfrac{\pi}{4}x\right) - \dfrac{\pi}{2} & \text{se } 0 < x < 1, \\ e^{x-1} + \dfrac{\pi}{4} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

4.27. *a)* $a = 2$ e $b = 0$.

4.28. *a)* $g(0) = 0$ e $g(3) = 3$.

b) F.

c) Não.

4.29. *b)* Por exemplo, $f(x) = \dfrac{x+1}{2}$.

4.30. *a)* F; *b)* V; *c)* V; *d)* F.