8 APLICAÇÕES DO CÁLCULO INTEGRAL

8.1. Determine a área dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

a) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq x\right\}$;

b) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq -x^2+2\right\}$;

c) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \quad x^2 - 2x \leq y \leq \frac{x}{2}\right\}$;

d) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 5, \quad y \geq -5x+5, \quad y \geq \ln x\right\}$.

8.2. Calcule a área do plano limitada pelo gráfico de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ e pelo eixo dos xx.

8.3. Determine a área do plano limitada pelas linhas:

a) $x=0, \ x=4, \ y=\sqrt{x}, \ y=x^2, \ y=-\frac{x}{3}+\frac{4}{3}$;

b) $y=x, \ y=\frac{3}{x^2+2}, \ y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$;

c) $x=0, \ x=\pi, \ y=sen\ x, \ y=\cos x$;

d) $x=-5, \ x=0, \ y=e^x, \ y=arctg\ x$.

8.4. Determine o comprimento dos arcos de curva definidos por:

a) $y=\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}$, entre $x=-2$ e $x=1$;

b) $y=\ln(\cos x)$, entre $x=0$ e $x=\frac{\pi}{4}$;

c) $y=\cosh x$, entre $x=0$ e $x=1$;

8.5. Considere a região A limitada pelas linhas de equação $0 \leq y \leq \ln x$ e $x < a$, com $a > 1$.

a) Calcule a área da região A;

b) Calcule o comprimento da linha (formada por um arco de curva e dois segmentos de recta) que "limita" o conjunto A.

8.6. Calcule o volume da esfera de centro na origem e raio r.

8.7. Considere a região do plano definida pelo conjunto

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq sen\ x \cos x\right\}.$$

a) Determine a área desta região;

b) Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação de A em torno do eixo das abcissas.

8.8. Calcule o volume do sólido de revolução que se obtém rodando a figura limitada pelas curvas $x = y^2$ e $x = -y^2 + 3$ em torno do eixo dos xx.

8.9. Calcule o volume do sólido de revolução que se obtém rodando a figura limitada pelas curvas $y = e^x$, $y = 1 - x^2$, $x = 0$ e $x = 1$ em torno do eixo dos yy.

8.10. Calcule a área da superfície esférica de raio r.

8.11. Determine a área da superfície obtida rodando, em torno do eixo dos xx, as seguintes linhas:

a) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ y = x^3\right\}$;

b) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ y = 5x\right\}$;

c) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi,\ y = sen\ x\right\}$;

d) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4,\ y = \sqrt{x}\right\}$