1. NOÇÕES TOPOLÓGICAS EM $\mathbb{R}$ e INDUÇÃO MATEMÁTICA (SOLUÇÕES)

1.2.

a) $int(A) = (1,5)$,

$ext(A) = (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$,

$fr(A) = \{1,5\}$,

$A' = [1,5] = \overline{A}$,

$isol\,(A) = \varnothing$;

b) $int(B) = (-3,-1) \cup (1,2)$,

$ext(B) = \mathbb{R} \backslash ([-3,-1] \cup [1,2] \cup \{0,4\})$,

$fr(B) = \{-3,-1,0,1,2,4\}$,

$B' = [-3,-1] \cup [1,2] = \overline{B}$,

$isol\,(B) = \{0,4\}$;

c) $int(C) = (-5,2) \cup (2,9)$,

$ext(C) = (-\infty,-5) \cup (9,+\infty)$,

$fr(C) = \{-5,2,9\}$,

$C' = [-5,9] = \overline{C}$,

$isol\,(C) = \varnothing$;

d) $int(D) = (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$,

$ext(D) = (-2,2)$,

$fr(D) = \{-2,2\}$,

$D' = (-\infty,-2] \cup [2,+\infty) = \overline{D}$,

$isol\,(D) = \varnothing$;

e) $int(E) = \varnothing$, $ext(E) = \mathbb{R} \backslash (E \cup \{1\})$, $fr(E) = E \cup \{1\} = \overline{E}$, $E' = \{1\}$, $isol\,(E) = E$.

1.3.

a) $int(A) = \varnothing$, $ext(A) = \mathbb{R} \backslash A$, $fr(A) = A = \{1,2,3,4,5\}$, $A' = \varnothing$, $\overline{A} = A$, $isol\,(A) = A$, A é não aberto, mas é fechado;

b) $int(B) = (-\infty,4)$, $ext(B) = (4,+\infty)$, $fr(B) = \{4\}$, $B' = B = \overline{B}$, $isol\,(B) = \varnothing$, B é não aberto, mas é fechado;

c) $int(C) = C$, $ext(C) = (-\infty,-3)$, $fr(C) = \{-3\}$, $C' = [-3,+\infty) = \overline{C}$, $isol\,(C) = \varnothing$, C é aberto, mas é não fechado;

d) $int(D) = (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$, $ext(D) = (-1,-0)$, $fr(D) = \{-1,0\}$, $D' = D = \overline{D}$, $isol\,(D) = \varnothing$, D é não aberto, mas é fechado;

e) $int(E) = \varnothing = E$, $ext(E) = \mathbb{R}$, $fr(E) = \varnothing$, $E' = \varnothing = \overline{E}$, $isol\,(E) = \varnothing$, E é aberto e fechado;

f) $int(F) = F$, $ext(F) = \mathbb{R}\backslash\left(\left[-\sqrt{3},-1\right]\cup\left[1,\sqrt{3}\right]\right)$, $fr(F) = \left\{-\sqrt{3},-1,1,\sqrt{3}\right\}$, $F' = \left[-\sqrt{3},-1\right]\cup\left[1,\sqrt{3}\right] = \overline{F}$, $isol\,(D) = \varnothing$, F é aberto, mas é não fechado.

g) $int(G) = \varnothing$, $ext(G) = \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$, $fr(G) = G$, $G' = \varnothing$, $\overline{G} = G$, $isol\,(G) = G$, G é não aberto, mas é fechado;

h) $int(H) = \varnothing$, $ext(H) = \varnothing$, $fr(H) = \mathbb{R}$, $H' = \mathbb{R} = \overline{H}$, $isol\,(H) = \varnothing$, H não é aberto nem fechado;

i) $int(I) = I$, $ext(I) = \varnothing$, $fr(I) = \varnothing$, $I' = I = \overline{I}$, $isol\,(I) = \varnothing$, I é aberto e fechado.

1.4.

a) $D_f = (-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$;

b) $int(D_f) = D_f$, $ext(D_f) = (-3,3)$, $fr(D_f) = \{-3,3\}$, $\overline{D_f} = (-\infty,-3]\cup[3,+\infty) = D_f'$;

c) D_f é aberto, porque $int(D_f) = D_f$; D_f é não fechado, porque $\overline{D_f} \neq D_f$; D_f não é limitado, pois não é majorado nem minorado.

1.5.

a) $D_g = (-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$;

b) $int(D_g) = D_g$, $ext(D_g) = (-2,0)$, $\overline{D_g} = (-\infty,-2]\cup[0,+\infty) = D_g'$;

c) D_g é aberto, mas não é fechado nem limitado.

1.6.

a) $D_h = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$;

b) $int(D_h) = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, $ext(D_h) = \varnothing$, $fr(D_h) = \{-1,1\}$, $\overline{D_h} = \mathbb{R}$ e $isol\,(D_h) = \varnothing$;

c) D_f é aberto, mas não é fechado nem limitado.

1.7.

a) Como $Maj\ A = \varnothing$ e $Min\ A = (-\infty,5]$, então A é minorado, mas não é majorado, portanto, A não é limitado; $\inf(A) = 5$, mas não existe o $\sup(A)$, o $\max(A)$ e o $\min(A)$;

b) Como $Maj\ B = [-2, +\infty)$ e $Min\ B = \varnothing$, então B é majorado, mas não é minorado, portanto, B não é limitado; $\sup(B) = \max(B) = -2$, mas não existe o $\inf(B)$ e o $\min(B)$;

c) Como $Maj\ C = [3, +\infty)$ e $Min\ C = (-\infty, -3]$, então C é majorado e minorado, logo C é limitado; $\sup(C) = \max(C) = 3$ e $\inf(C) = \min(C) = -3$;

d) Como $Maj\ D = Min\ D = \varnothing$, então D não é majorado nem minorado, portanto, D não é limitado; Além disso, não existe o $\sup(D)$, o $\max(D)$, o $\inf(D)$ e o $\min(D)$;

e) Como $Maj\ E = [10, +\infty)$ e $Min\ E = \left(-\infty, \sqrt{5}\right]$, então E é majorado e minorado, logo E é limitado; $\sup(E) = 10$ e $\inf(E) = \min(E) = \sqrt{5}$, mas não existe o $\max(E)$;

f) Como $Maj\ F = \varnothing$ e $Min\ F = (-\infty, 0]$, então F é minorado, mas não é majorado, portanto, F não é limitado; $\inf(F) = 0$, mas não existe o $\sup(F)$, o $\max(F)$ e o $\min(F)$.

1.8.

a) Verdadeira, dado que se tem sempre $int(A) \subset A$ e se também se tem $A \subset int(A)$ (por hipótese), então conclui-se que $int(A) = A$, pelo que A é aberto;

b) Falso, porque $\{-1, 0, 1\} \nsubseteq fr(A) = \{-1, 1\}$;

c) Verdadeira, porque uma vez que $\overline{A} = A \cup fr(A)$, então tem-se $A \subset \overline{A}$;

d) Falso, porque $fr(\mathbb{R} \backslash A) = fr(A)$ e $fr(A) \cap ext(A) = \varnothing$;

e) Falso, porque B não tem mínimo.