Funções binárias

Sistemas Digitais 2016/2017

Pedro Salgueiro
`pds@di.uevora.pt`

Sumário

- Álgebra de Boole binária
  - Álgebra de Boole
  - Álgebra de Boole binária
  - Tabelas de verdade
  - Propriedades e Teoremas
- Representação de funções
  - Representação Algébrica
  - Logigrama
  - Tabela de verdade
- Formas canónicas
  - Soma de Mintermos
  - Produto de Maxtermos
- Conjunto Universal de funções
- Exercícios

Algebra de Boole

- Definide por George Boole em 1854
- Conceitos básicos
  - Variável com 2 valores possíveis
    - VERDADE (TRUE)
    - FALSO (FALSE)
- 3 operadores
  - E (AND)
  - OU (OR)
  - NÃO (NOT)

Variáveis e funções booleanas

- Variável booleana
  - Toma valores do conjunto {*V*, *F* }
  - Exemplos: x, A, z_5, w
- Função booleana de *n* variáveis
  - Aplicação do conjunto $\{ V, F \}^n$ *no conjunto* $\{ V, F \}$
  - exemplo: $f(x_1,x_2, \ldots, x_n\}$

Algebra de Boole binária

- É a adaptação da álgebra de Boole aos circuitos digitais
  - Proposta por Claude Shannon em 1938
- Como um circuito digital tem dois estados possíveis
  - LOW: 0
  - HIGH: 1
- Foi proposto o seguinte mapeamento
  - FALSO → 0
  - VERDADEIRO → 1

Conceitos básicos

- Variável binária
  - Toma valores do conjunto {0,1}
  - Exemplos: *A, B, C, …*
- Função binária de *n* variáveis
  - A aplicação do conjunto $\{0,1\}^n$ no conjunto {0,1}
  - Exemplo: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- Operadores
  - Complemento: ~, $\overline{}$
  - Soma lógica: +
  - Produto lógico: ·

Funções de 1 variável

- Funções constantes
  - $f(x) = 1$
  - $f(x) = 0$
- Função identidade
  - $f(x) = x$
- Função complemento (negação, NÃO, NOT)
  - $f(x) = \overline{x}$
    - Se $x=1 \rightarrow f(x) = 0$
    - Se $x=0 \rightarrow f(x) = 1$

Funções de 2 variáveis

- Funções constantes
  - $f(x,y) = 1$
  - $f(x,y) = 0$
- Função identidade
  - $f(x,y) = x$
  - $f(x,y) = y$
- Função complemento (negação, NÃO, NOT)
  - $f(x,y) = \overline{x}$
  - $f(x,y) = \overline{y}$
- Soma lógica (OU, OR)
  - $f(x,y) = x + y$
    - $f(x,y) = 1$
      - quando x=1 **ou** y=1, quando **pelo menos** uma variável é **1**
- Produto lógico (E, AND)
  - $f(x,y) = x \cdot y$
    - $f(x,y) = 1$
      - quando x=1 **e** y=1, quando **ambas** as variável são **1**

Funções de 2 variáveis

- NOR (Negated OR)
  - $f(x,y) = \overline{x + y}$
    - É o complemento da função OR
- NAND (Negated AND)
  - $f(x,y) = \overline{x \cdot y}$
    - É o complemento da função AND
- XOR (eXclusive OR)
  $f(x,y) = x \oplus y$
  - $f(x,y) = 1$
    - quando $x \neq y$
- EQ (Equivalence)
  - Também conhecida como XNOR (Negated XOR)
  - $f(x,y) = x \cdot y$
    - $f(x,y) = 1$
      - quando $x = y$
      - é o complemento da função XOR

Funções com mais de 2 variáveis

- AND
  - $f(k, l, \ldots, z) = k \cdot l \cdot \ldots \cdot z$
    - É 1 quando **todas** as variáveis são 1
- OR
  - $f(k, l, \ldots, z) = k + l + \ldots + z$
    - É 1 quando **pelo menos uma** variável é 1
- XOR
  - $f(k, l, \ldots, z) = k \oplus l \oplus \ldots \oplus z$
    - É 1 quando **um número impar de variáveis** é 1
- NAND
  - $f(k, l, \ldots, z) = \overline{k \cdot l \cdot \ldots \cdot z}$
- NOR
  - $f(k, l, \ldots, z) = \overline{k + l + \ldots + z}$
- XNOR
  - $f(k, l, \ldots, z) = \overline{k \oplus l \oplus \ldots \oplus z}$

Tabela de verdade

- É uma representação em **extensão**
  - Indica o valor da função para cada valor possível da variável

- Funções de 1 variável
  - Função constante 0

x	$f(x) = 0$
0	0
1	0

  - Função constante 1

x	$f(x) = 1$
0	1
1	1

  - Função identidade

x	$f(x) = x$
0	0
1	1

  - Função complemento

x	$f(x) = \overline{x}$
0	1
1	0

Funções de 2 variáveis

- Existem 16 funções diferentes

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

- $f_0(x,y) = 0$
- $f_{15}(x,y) = 1$
- $f_{15}(x,y) = x$
- $f_{10}(x,y) = y$
- $f_3(x,y) = \overline{x}$ NOT x
- $f_5(x,y) = \overline{y}$ NOT y

- $f_8(x,y) = x \cdot y$ AND
- $f_{14}(x,y) = x + y$ OR
- $f_1(x,y) = \overline{x + y}$ NOR
- $f_7(x,y) = \overline{x \cdot y}$ NAND
- $f_6(x,y) = x \oplus y$ XOR
- $f_5(x,y) = \overline{x \oplus y}$ NOT

Nº de funções distintas

- 1 variável
  - 4 funções
    - 1 variável → 2 valores possíveis (2^1)
    - $4 = 2^{2^1}$
- 2 variáveis
  - 16 funções
    - 2 variáveis → 4 valores possíveis (2^2)
    - $16 = 2^{2^2}$
- …
- *n* variáveis
    - 2^{2^n} funções (n variáveis → 2^n valores possíveis)

Convenções

- Precedência
  - produto lógico > soma lógica
  - $A + B \cdot C = A + (B \cdot C)$
- Omissão do operador lógico
  - $AB = A \cdot B$
- Um literal é uma variável ou o seu complemento

Propriedades das Funções

- Comutativa
  - $A \cdot B = B \cdot A$
  - $A + B = B + A$
- Associativa
  - $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
  - $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Distributiva
  - $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
  - $A + B \cdot C = (A + B) . (A + C)$

- Elemento neutro
  - $A \cdot 1 = A$
  - $A + 0 = A$
- Elemento absorvente
  - $A \cdot 0 = 0$
  - $A + 1 = 1$
- Complemento
  - $A \cdot \overline{A} = 0$
  - $A + \overline{A} = 1$

Teoremas principais

- Idempotência
  - $A \cdot A = A$
  - $A + A = A$

- Dupla negação
  - $\overline{\overline{A}} = A$

- Leis de DeMorgan
  - $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$
  - $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Outros teoremas

- Absorção
  - $A + A \cdot B = A$
  - $A \cdot (A + B) = A$
- Redundância
  - $A + \overline{A} \cdot B = A + B$
  - $A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$
- Adjacência
  - $A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$
  - $(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$

Propriedades do XOR – OU-exclusivo

- Comutativa
  - $A \oplus B = B \oplus A$
- *Associativa*
  - $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$
- Outra
  - $A \oplus 0 = A$
  - $A \oplus 1 = \overline{A}$
  - $A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$
  - $\overline{A \oplus B} = \overline{A} \oplus B = A \oplus \overline{B}$

Representação algébrica

- Utiliza expressões booleanas
- **Várias** expressões podem representar a **mesma** função
  - Passa-se de uma para as outras através de manipulações algébricas
- Exemplo
  - $F(A, B, C) = A\,B + A\,\overline{C} = A\,(\,B + \overline{C}\,)$
  - A 2ª expressão é obtida utilizando a distributividade do produto em relação à soma

Formas de representação

- Forma normal disjuntiva ou soma de produtos
  - $F = A\,B + A\,\overline{C}$
- Forma normal conjuntiva ou produto de somas
  - $F = A\,(B + \overline{C})$
- Forma mista
  - $G = A\,B + \overline{A}\,B\,C\,(X + Y)$
- Nota
  - É sempre possível obter as formas normais!

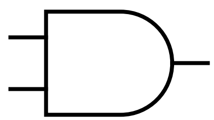
Representação através de Logigrama

- Representação através de **simbologia gráfica**
  - Conjunto de entradas, uma saída e componentes
- Conjunto de entradas
  - Variáveis da função
- Saída
  - Valor da função
- Componentes
  - Circuitos lógicos
  - Ligações

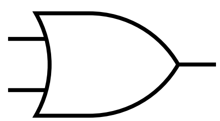
Representação de funções
Logigrama

Porta lógica

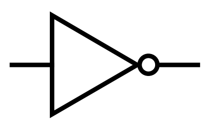
- Representação gráfica de cada função lógica básica
  - AND



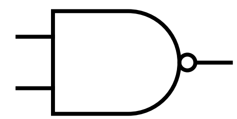
  - OR



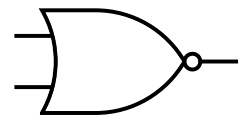
  - NOT



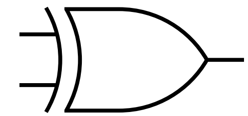
  - NAND



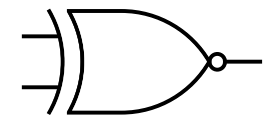
  - NOR



  - XOR



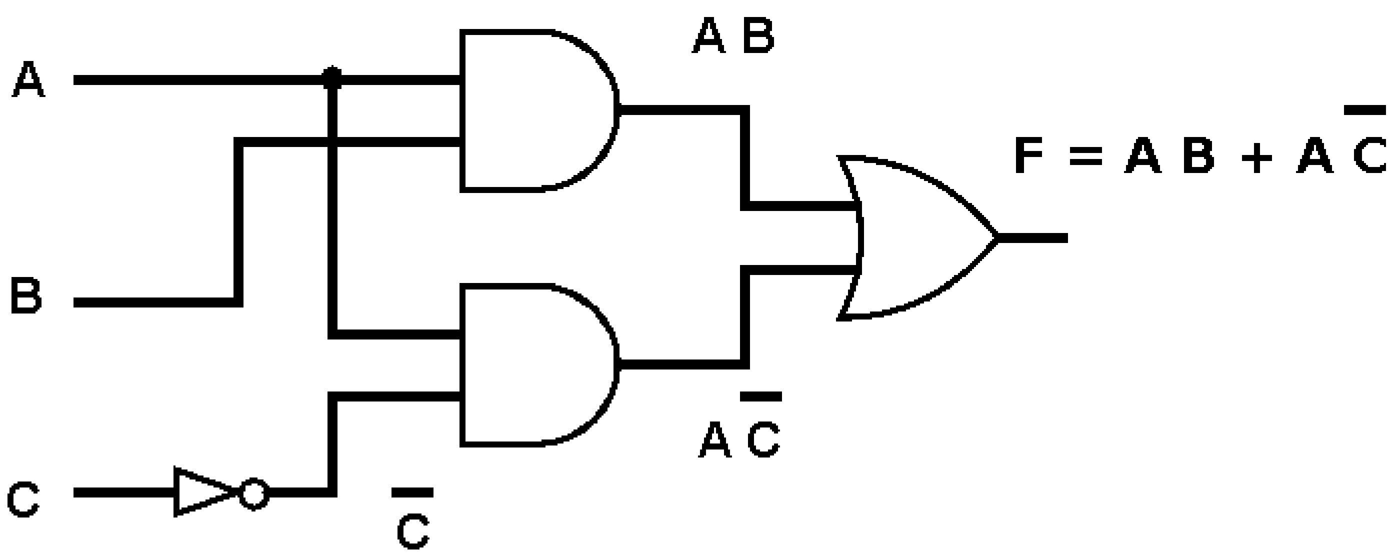
  - XNOR



- O nº de entradas pode ser estendido para um número de $n \geq 2$, excepto o NOT que apenas tem uma entrada

Circuito lógico

- Um circuito lógico é construído ligando as saídas das portas lógicas à entrada de outras conforme a função a implementar
- $F(A,B,C) = A\,B + A\,\overline{C}$



Representação através de Tabela de verdade

- É **única** para cada função
- Estrutura
  - $n + 1$ colunas
    - n para as variáveis booleanas
    - 1 para o resultado da função
  - 2^n linhas
    - 1 para cada combinação possível de valores das variáveis

- Exemplo
  - $F(A,B,C) = A\,B + A\,\overline{C}$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Construção das linhas da tabela de verdade

- N variáveis → 2^n linhas
- Começa-se por preencher a variável mais à esquerda
  - as primeiras $2^n/2$ linhas têm valor 0
  - as ultimas têm valor 1
- Preenche-se depois a variável à direita
  - as primeiras 2^n / 4 linhas têm valor 0
  - as seguintes 2^n / 4 linhas têm valor 0
  - repete-se o procedimento para as restantes 2^n / 2 linhas
- Vai-se repetindo o procedimento. A última variável tem, alternadamente os valores 0 e 1 em cada linha

Exemplo: 3 variáveis

- 3 variáveis → 8 linhas

A	B	C
0		
0		
0		
0		
1		
1		
1		
1		

A	B	C
0	0	
0	0	
0	1	
0	1	
1	0	
1	0	
1	1	
1	1	

A	B	C
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Leitura da tabela de verdade

- Cada linha corresponde a um produto lógico de todos os literais
  - F é 1 quando
    - *(A,B,C) = (1,0,0)*, ou seja $A\,\overline{B}\,\overline{C} = 1$
    - *(A,B,C) = (1,0,0)*, ou seja $A\,B\,\overline{C} = 1$
    - *(A,B,C) = (1,0,0)*, ou seja $A\,B\,C = 1$
  - Ou seja
    - $F = A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C$
  - *Por manipulação algébrica*

$$
\begin{aligned}
F &= A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C \\
&= A\,\overline{C}\,(\,\overline{B} + B\,) + A\,B\,C \\
&= A\,\overline{C} + A\,B\,C \\
&= A\,(\,\overline{C} + B\,C\,) \\
&= A\,(\,\overline{C} + B\,) \\
&= A\overline{C} + A\,B
\end{aligned}
$$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Escrita da tabela de verdade

- Analisar os casos em que a função é 1
- $G(A,B,C) = \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C} + \overline{A}\ B + A$
- G é 1 quando
  - $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C} = 1$, ou seja, $(A,B,C) = (0,0,0)$
  - $\overline{A}\ B = 1$, ou seja, $(A,B,C) = (0,1,0)$
    $(A,B,C) = (0,1,1)$
  - $A = 1$, ou seja, $(A,B,C) = (1,0,0)$
    $(A,B,C) = (1,0,1)$
    $(A,B,C) = (1,1,0)$
    $(A,B,C) = (1,1,1)$

A	B	C	G
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Escrita da tabela de verdade

- Para funções mais complexas, pode-se gerar as tabelas de funções parciais para construir a função final
- $G(A,B,C) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B + A$

A	B	C	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,B$	A	G
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1

Soma de mintermos

- Mintermo ou termo minimal
  - Produto que envolve todos os literais
  - Corresponde a uma linha da tabela de verdade
- Soma de mintermos
  - Soma de produtos onde todos os factores são mintermos
  - Cada mintermo está associado a um 1 da tabela
- Também conhecida como
  - 1ª Forma canónica
  - Forma canónica disjuntiva
  - Forma canónica AND-OR
- **Cada função tem uma única forma canónica disjuntiva!**

Representação decimal

- Ao numerar as linhas, cada mintermo pode ser referido através das respectiva linha linha da tabela de verdade

  - Soma de mintermos
    - $F = A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C$
  - Representação decimal
    - $F = m_4 + m_6 + m_7$
    - $F = \sum m(4,6,7)$

	A	B	C	F	
0	0	0	0	0	m_0
1	0	0	1	0	m_1
2	0	1	0	0	m_2
3	0	1	1	0	m_3
4	1	0	0	1	m_4
5	1	0	1	0	m_5
6	1	1	0	1	m_6
7	1	1	1	1	m_7

Produto de Maxtermos

- Maxtermo ou termo maximal
  - Soma que envolve todos os literais
  - Corresponde a uma linha da tabela de verdade
- Produto de maxtermos
  - Produto das somas onde todas as parcelas são maxtermos
  - Cada maxtermo está associado a um 0 da tabela
- Também conhecida como:
  - Segunda forma canónica
  - Forma canónica conjuntiva
  - Forma canónica OR-AND
- **Cada função tem uma forma canónica única!**

Representação decimal

- Cada maxtermo é construído utilizando uma função
  - É 0 para uma linha da tabela em que a função é zero
  - É 1 para as restantes linhas

- Produto de maxtermos
  - *F = G1 · G2 · G3 · G4 · G5*
    - $G1 = A + B + C$
    - $G2 = A + B + \overline{C}$
    - $G3 = A + \overline{B} + C$
    - $G4 = A + \overline{B} + \overline{C}$
    - $G5 = \overline{A} + B + \overline{C}$
  - Representação decimal
    - $F = M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_5$
    - $F = \prod M(0, 1, 2, 3, 5)$

A	B	C	F	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	
0	0	0	0	0	1	1	1	1	M_0
0	0	1	0	1	0	1	1	1	M_1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	M_2
0	1	1	0	1	1	1	0	1	M_3
1	0	0	1	1	1	1	1	1	M_4
1	0	1	0	1	1	1	1	0	M_5
1	1	0	1	1	1	1	1	1	M_6
1	1	1	1	1	1	1	1	1	M_7

Mintermos e Maxtermos

- Para qualquer função booleana de n variáveis
  - $m_i = \overline{M_i}$
  - $M_i = \overline{m_i}$, com $0 \leq i \geq 2^{n-1}$
- *No entanto,*
  - *se a função possui m_i*, na primeira forma canónica, não pode conter M_i
- Exemplo
  - $F(A,B,C) = A\,B + A\,\overline{C}$
  - $F = m_4 + m_6 + m_7 = A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C$
  - $F = M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_5$
    $= (A + B + C)\,(A + B + \overline{C})\,(A + \overline{B} + C)\,(A + \overline{B} + \overline{C})\,(\overline{A} + B + \overline{C})$

Conjunto universal de funções

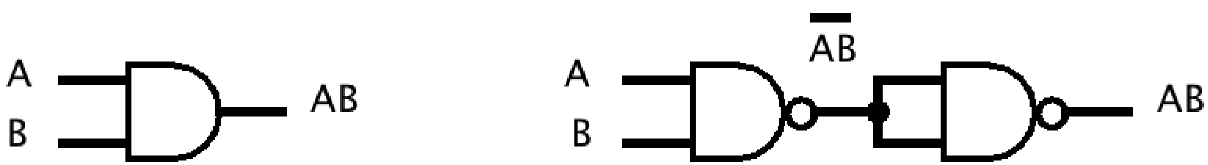
- Conjunto Universal ou Completo
  - É um conjunto de funções booleanas (básicas) que permite representar qualquer função booleana simples
- {AND, OR, NOT}
  - 1ª e 2ª formas canónicas
- {NAND}
- {NOR}

Conjunto universal de funções

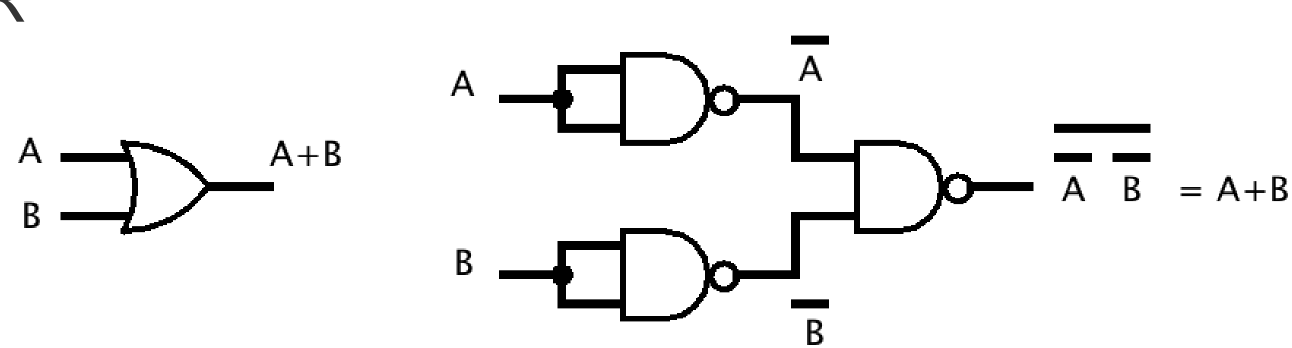
Conjunto universal {NAND}

- NOT

- AND



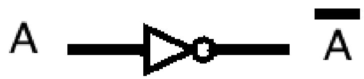
- OR

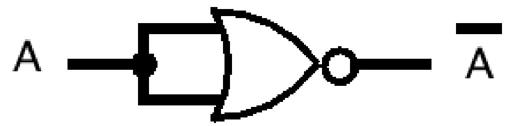


Conjunto universal de funções

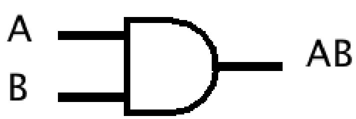
Conjunto universal {NOR}

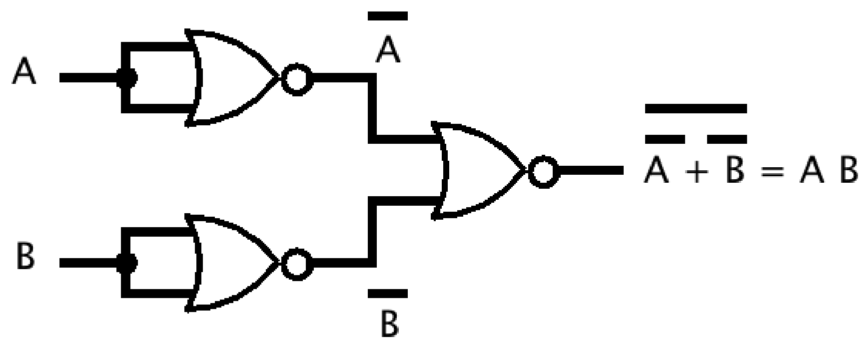
- NOT



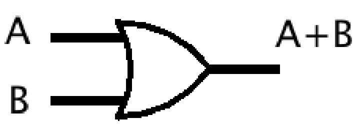


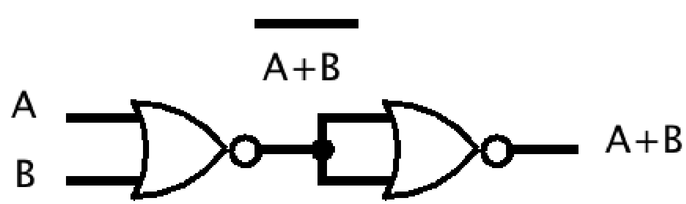
- AND



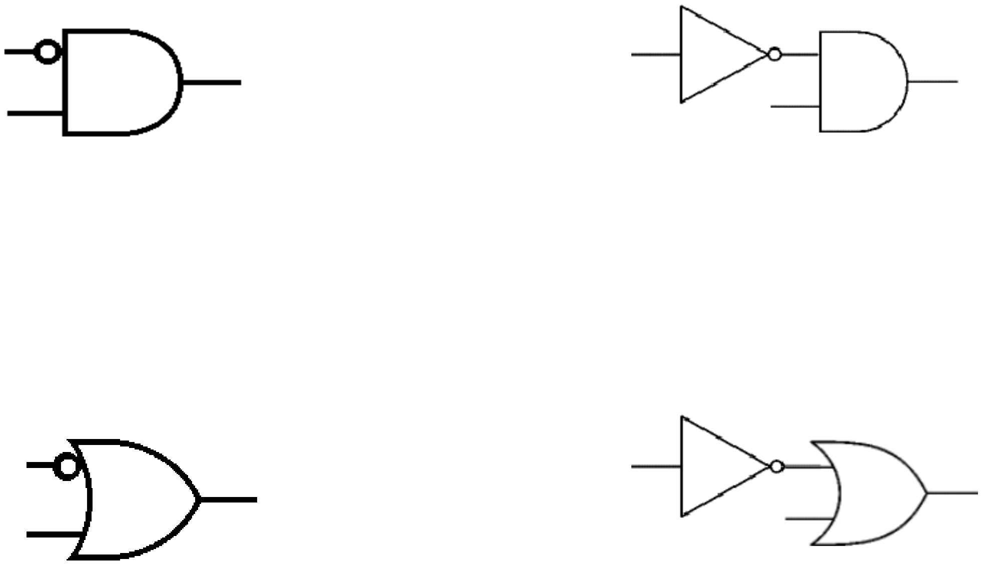


- OR





Outra simbologia usada



Exercícios

1. Determine a expressão mais simples na forma normal disjuntiva da função

   a) $f(A, B, C) = (\overline{A} + B)(A + C)(B + C)$

2. Desenhe a tabela de verdade e logigrama das funções seguintes e identifique as correspondentes formas canónicas

   a) $f(A, B, C) = A\,(\overline{B} + \overline{C}(\overline{B} + D))$

   b) $g(A, B, C) = \overline{AC} + BC$

3. *Numere os seguintes mintermos e maxtermos*

   a) $A + B$

   b) $A\,B\,\overline{C}$

   c) $A\overline{B}C\overline{D}$

4. *Desenhe o logigrama da função* $f(A, B, C) = (A \oplus C)\,B + \overline{B}C + AC$ utilizando apenas

   a) AND, OR e NOT

   b) NANDs

   c) NORs