

3. Princípio de indução matemática

Uma das ferramentas mais utilizadas em demonstrações que envolvem números naturais é a indução:

Princípio de indução matemática. *Seja $\Phi(x)$ uma condição em x (possivelmente com parâmetros). Se*

1. $\Phi(0)$ e
2. $\forall n \in \mathbb{N} (\Phi(n) \Rightarrow \Phi(n+1))$

então

$$\forall n \in \mathbb{N} (\Phi(n)).$$

Uma consequência deste princípio, também útil, é a indução completa:

Princípio de indução completa. *Seja $\Phi(x)$ uma condição em x (possivelmente com parâmetros). Se*

$$\forall n \in \mathbb{N} (\forall m < n (\Phi(m) \Rightarrow \Phi(n)))$$

então

$$\forall n \in \mathbb{N} (\Phi(n)).$$

Exercícios e problemas

1. Mostre que as seguintes igualdades são válidas para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(a)

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2};$$

(b)

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1;$$

(c) Se $n \geq 3$, então

$$\sum_{l=3}^n (4l - 11) = 2n^2 - 9n + 10;$$

(d)

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

(e) Se $n \geq 1$, então

$$\sum_{m=1}^n (2m-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3};$$

(f) Se $n \geq 1$, então

$$\sum_{p=1}^n (2p-1)^3 = n^2(2n^2-1);$$

(g) Se $n \geq 1$, então

$$\sum_{j=1}^n (6j-2) = n(3n+1);$$

(h)

$$\sum_{i=0}^n i^3 = \left(\sum_{i=0}^n i \right)^2.$$

Sugestão: utilize o resultado da alínea (1a).

(i)

$$\sum_{l=0}^n r^l = \frac{r^{n+1}-1}{r-1},$$

para qualquer $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

(j)

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

2. Sejam a e b números reais. Considere a sucessão $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada recursivamente por $s_0 = a$ e, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = 2s_n + b$. Mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $s_n = 2^n a + (2^n - 1)b$.

3. Mostre que

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{m}{4m+1},$$

para qualquer natural $m \geq 1$.

4. (a) Mostre que $11^r - 4^r$ é múltiplo de 7, para qualquer natural $r \geq 1$.
 (b) Mostre que $13^t - 8^t$ é múltiplo de 5, para qualquer natural $t \geq 1$.
 (c) Sejam a , b e c inteiros tais que $a - b = c$. Mostre que $a^u - b^u$ é múltiplo de c , para qualquer natural $u \geq 1$.
5. Mostre que $p! > 2^p$, para qualquer natural $p \geq 4$.

6. Mostre que se A é um conjunto de n elementos ($n \in \mathbb{N}$), então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.
7. Mostre que $s^2 > s + 1$, para qualquer natural $s \geq 2$.
8. Considere a sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por

$$a_n = \sum_{k=0}^n (2k + 1).$$

- (a) Calcule os sete primeiros termos da sucessão.
- (b) Adivinhe uma expressão geral para a sucessão e mostre que é válida utilizando o princípio de indução matemática.
9. Adivinhe uma expressão sem envolver somatórios para

$$\sum_{j=1}^n j! \cdot j$$

e mostre-a por indução matemática.

10. Considere a proposição " $p(n) : n^2 + 5n + 1$ é par".
- (a) Mostre que $p(n) \Rightarrow p(n + 1)$.
- (b) Para que valores de n é verdadeira a proposição?

11. Mostre que

$$\sum_{k=n}^{2n-1} (2k + 1) = 3n^2,$$

para qualquer natural $n \geq 1$.

12. Mostre que $5^n - 4n - 1$ é divisível por 16, para qualquer natural $n \geq 1$.

13. Mostre que

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k},$$

para qualquer natural $n \geq 1$.

14. Mostre a fórmula de De Moivre: para qualquer natural n ,

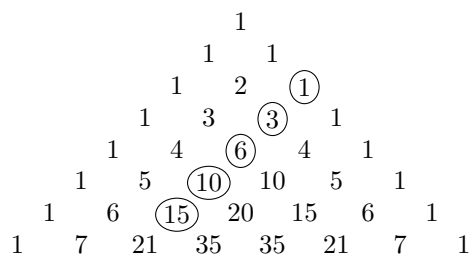
$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)$$

15. Construa o Triângulo de Pascal até à linha de ordem dez (chamando linha de ordem zero à primeira).

- (a) Calcule a soma dos quadrados dos elementos da linha de ordem 3. Qual é a linha onde este valor aparece no centro? Faça o mesmo para as linhas de ordem 4 e 5.
- (b) Mostre que o que observou na alínea anterior é verificado em todas as linhas do Triângulo de Pascal, mostrando por indução que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

- (c) Calcule a soma dos elementos indicados na figura:



Encontre o valor que calculou no Triângulo de Pascal. Dê exemplos de outras somas análogas.

- (d) Mostre que o que observou na alínea anterior é verificado em todo o Triângulo de Pascal, mostrando por indução em n que para qualquer natural k ,

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

- (e) Mostre por indução em n que para qualquer natural m ,

$$\sum_{i=0}^n \binom{m+i}{i} = \binom{m+n+1}{n}.$$

Sem recorrer à indução, mostre que esta igualdade se pode deduzir da igualdade da alínea anterior.