2. Noções elementares de conjuntos (continuação)

Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função e seja C um conjunto qualquer. A *imagem de C por f* é o conjunto

$$f(C) = \{y : \exists x \in C : f(x) = y\}.$$

A *imagem recíproca de C por f* é o conjunto

$$f^{\leftarrow}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}.$$

Dados dois números inteiros n e k, chamamos *combinações de n, k a k*, ao número

$$\tbinom{n}{k} = \tfrac{n!}{k!(n-k)!},$$

convencionando que $\binom{n}{k} = 0$ caso algum dos números n, k, ou $n-k$ seja negativo.

Exercícios e problemas

1. Considere as funções

   $$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g, h, j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

   definidas por

   $$f(x) = \tfrac{1}{x}, \qquad g(x) = -x,$$
   $$h(x) = 3x - 2, \qquad j(x) = x^2.$$

   Calcule

   (a) $(f \circ h)\big(\tfrac{1}{3}\big)$;
   (b) $(h \circ f)\big(\tfrac{1}{3}\big)$;
   (c) $(j \circ h \circ f \circ g)(4)$;
   (d) $(j \circ j \circ j)(2)$;
   (e) $(h \circ h \circ j \circ f)(3)$.

2. Sejam f, g, h e j as funções definidas na pergunta anterior. Calcule as expressões gerais de

   (a) $f \circ g$;
   (b) $g \circ f$;
   (c) $h \circ j$;
   (d) $j \circ h$;
   (e) $f \circ g \circ h$;
   (f) $f \circ f$;
   (g) $g \circ g$;
   (h) $h \circ h$;
   (i) $j \circ j$.

3. Encontre uma expressão geral para a função inversa de cada uma das seguintes funções reais de variável real.

   (a) $k(x) = 2x + 3$;
   (b) $l(x) = x^3 - 2$;
   (c) $m(x) = (x-2)^3$;
   (d) $n(x) = \sqrt[3]{x} + 7$.

4. Considere a função $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $p(x) = (x-3)^2 - 1$. Calcule os seguintes conjuntos (faça um esboço do gráfico se ajudar):

   (a) $p\big(\{2, 3, 4, 5\}\big)$;
   (b) $p\big([5, 7[\big)$;
   (c) $p\big([-1, 4[\big)$;
   (d) $p^{\leftarrow}\big(\{3, 15\}\big)$;
   (e) $p^{\leftarrow}\big(\{-2, -1, 0\}\big)$;
   (f) $p^{\leftarrow}\big([0, 8[\big)$;
   (g) $p^{\leftarrow}\big([-5, 3[\big)$;
   (h) $p^{\leftarrow}\big([-7, -2[\big)$.

5. Seja $f : S \longrightarrow T$.

   (a) Mostre que $f\big(f^{\leftarrow}(B)\big) \subseteq B$, para qualquer $B \subseteq T$.
   (b) Mostre que $A \subseteq f^{\leftarrow}\big(f(A)\big)$, para qualquer $A \subseteq S$.
   (c) Mostre que

   $$f^{\leftarrow}(B_1 \cap B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cap f^{\leftarrow}(B_2)),$$

   para quaisquer $B_1, B_2 \subseteq T$.
   (d) Em que condições se dá a igualdade na alínea (5a)?
   (e) Em que condições se dá a igualdade na alínea (5b)?

6. Seja $f: S \longrightarrow T$. Das seguintes afirmações, diga quais são verdadeiras. Para estas, apresente uma demonstração. Para as falsas, apresente um contraexemplo.
   (a) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, para quaisquer $A_1, A_2 \subseteq S$.
   (b) $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$, para quaisquer $A_1, A_2 \subseteq S$.
   (c) Se $f(A_1) = f(A_2)$, então $A_1 = A_2$.

7. Considere a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = \frac{n-1}{n+1}$.
   (a) Calcule os seis primeiros termos da sucessão.
   (b) Calcule $a_{n+1} - a_n$, para $0 \leq n \leq 4$.
   (c) Mostre que $a_{n+1} - a_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

8. Construa as primeiras 11 linhas do triângulo de Pascal e assinale os números ímpares. Construíndo mais linhas se necessário, tente encontrar um padrão conhecido.

9. Calcule:
   (a) $\frac{7!}{5!}$;
   (b) $\frac{10!}{6!4!}$;
   (c) $\frac{9!}{9!0!}$;
   (d) $\frac{8!}{4!}$;
   (e) $\frac{1111!}{1110!}$;
   (f) $\sum_{s=0}^{5} s!$;
   (g) $\sum_{i=1}^{10} (-1)^i$;
   (h) $\sum_{i=7}^{101} (-1)^i$;
   (i) $\sum_{l=0}^{3} (l^2 + 1)$;
   (j) $\left(\sum_{l=0}^{3} l^2\right) + 1$;
   (k) $\prod_{r=1}^{n} (r-3)$, para $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ e $n = 77$;
   (l) $\prod_{m=1}^{n} \frac{m+1}{m}$, para $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ e $n = 77$;
   (m) $\prod_{t=6}^{6} t$.
   (n) $\binom{7}{6}$.
   (o) $\binom{7}{1}$.
   (p) $\binom{444}{443}$.
   (q) $\binom{444}{120} - \binom{444}{324}$.

10. Simplifique:
   (a) $\frac{n!}{(n-1)!}$;
   (b) $\frac{(n!)^2}{(n-1)!(n+1)!}$.

11. Mostre que para quaisquer naturais a, b,
$$\binom{a}{b} + \binom{a}{b+1} = \binom{a+1}{b+1}.$$

12. Considere as sucessões $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por
$$s_n = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}; \quad t_n = \frac{s_{n+1}}{s_n}; \quad r_n = \frac{t_{n+1}}{t_n}.$$
   (a) Calcule a expressão geral das sucessões $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Calcule $\lim_{n\to+\infty} r_n$.