7 CÁLCULO INTEGRAL

7.1. Seja $f(x) = x^2$ em $[0, 1]$ e $P = \{0; 0,4; 0,5; 0,7; 1\}$ uma partição de $[0, 1]$. Calcule s_P e S_P.

7.2. Seja $f(x)$ definida em $[-1, 2]$ por

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{se } -1 \leq x < 0, \\ x^2+1 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 3 & \text{se } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

e $P = \left\{-1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2\right\}$ uma partição de $[-1, 2]$. Calcule s_P.

7.3. Seja $f(x) = (x-4)^2$ em $[0, 4]$ e $P = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ uma partição de $[0, 4]$.

a) Represente graficamente $f(x)$;

b) Calcule s_P e S_P.

7.4. Interprete geometricamente os seguintes integrais e determine o seu valor:

a) $\int_a^b c\,dx$, com $0 < a < b$;

b) $\int_a^b x\,dx$, com $0 < a < b$;

c) $\int_a^b kx\,dx$, com $0 < a < b$ e $k > 0$;

7.5. Calcule, usando a definição, o integral $\int_0^1 x^2 dx$, decompondo o intervalo em n partes iguais.

7.6. Calcule, usando a definição, o integral $\int_0^1 e^x dx$, decompondo o intervalo em n partes iguais.

7.7. Estabeleça uma relação de ordem entre os seguintes integrais:

a) $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ e $\int_0^1 x^3 dx$;

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ e $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen x dx$.

7.8. Mostre que:

a) $\displaystyle 0 \leq \int_0^{\pi} sen x dx \leq 4$, *b)* $\displaystyle -2 \leq \int_{-1}^{1} x^3 dx \leq 2$.

7.9. Seja f uma função contínua em $[1, +\infty[$ e $\displaystyle\int_1^x f(t)dt = e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)$.

a) Determine, justificando, $f(x)$;

b) Sem calcular o integral, mostre que $\displaystyle\int_4^9 f(t)dt = 2e^3 - e^2$.

7.10. Determine as funções derivadas das seguintes funções:

a) $\displaystyle F(x) = \int_1^x \frac{e^t + \ln t}{t^2} dt$; *b)* $\displaystyle G(x) = \int_1^{3x^2} \ln t dt$; *c)* $\displaystyle H(x) = \int_{1/x}^{e^x} \cos t^2 dt$.

7.11. Calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x sen t^3 dt}{x^4}$; *b)* $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x sen t^5 dt}{\int_0^x sen t^2 dt}$; *c)* $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^x sen t dt}{(x-1)^2}$.

7.12. Sendo $f(x)$ uma função contínua no intervalo I e sendo c um ponto interior de I, calcule

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{x}{x-c} \int_c^x f(t)\, dt \right), \text{ com } x \in I.$$

7.13. Determine o domínio, os intervalos de monotonia e os extremos locais das funções:

a) $\displaystyle F(x) = \int_1^x \left(t^2 - 6t + 8\right) dt$; *b)* $\displaystyle G(x) = \int_x^0 \sqrt{1 + t^4} dt$; *c)* $\displaystyle H(x) = \int_2^{e^x} \frac{1}{\ln t} dt$;

7.14. Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx;$ *b*) $\displaystyle\int_{-1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{7+3x}};$

c) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{arctgx}{1+x^2}dx;$ *d*) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\cos x dx;$

e) $\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{1}{x^3+x}dx;$ *f*) $\displaystyle\int_{1}^{e}\ln x dx,$

g) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}sen^3 x dx;$ *h*) $\displaystyle\int_{2}^{4}\frac{x^3}{x-1}dx;$

i) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{2}{x-3}dx;$ *j*) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{tgx}{\cos^2 x}dx.$

7.15. Considere a função $f(x)=\dfrac{A}{\sqrt{x(1-x)}}$. Sabendo que $1\leq A\leq 2$, calcule um majorante e um minorante para

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}f(x)dx.$$

7.16. Sendo f uma função contínua em $[0,1]$ e admitindo-se que $0\leq f(x)\leq 1$. Prove que:

$$\int_{0}^{1}\frac{f(x)}{1+x^2}dx\leq\frac{\pi}{4}.$$

7.17. Calcule, usando o método de integração por partes ou por substituição, os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_{1}^{e}x^{-3}\ln x dx;$ *b*) $\displaystyle\int^{\pi}e^x\cos^2 x dx;$

c) $\displaystyle\int_{0}^{1}\arccos x dx;$ *d*) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1}{3+\cos x}dx;$

e) $\displaystyle\int_{1}^{9}x\sqrt[3]{1-x}dx;$ *f*) $\displaystyle\int_{0}^{2}e^{x^2}x dx,$

$g)$ $\displaystyle\int_0^{\pi} x sen x dx;$

$h)$ $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx;$

$i)$ $\displaystyle\int_1^{e} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx;$

$j)$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen(2x)}{1+sen^4 x} dx.$

7.18. Seja $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(sen x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx.$

7.19. Seja f uma função contínua em $[-a, a]$. Prove que:

$a)$ Se f é uma função par, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^{a} f(x)dx;$

$b)$ Se f é uma função ímpar, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

7.20. Se $f(x)$ é uma função par e $g(x)$ é uma função ímpar, determine o valor dos seguintes integrais:

$a)$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx;$ $b)$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} [g(x)]^2 dx;$ $c)$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} [g(x)]^3 dx;$ $d)$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(0)g(x)dx.$

7.21. Mostre que $\displaystyle\int_1^{x} \frac{e^t}{t} dt = \int_e^{e^x} \frac{1}{\ln s} ds$, para qualquer $x > 0$.