6. Sucessões de Fibonacci e de Lucas e número de ouro

Fibonacci (1170–1250) Leonardo Pisano, conhecido entre nós pela alcunha Fibonacci, nasceu em Itália, mas foi educado no Norte de África, onde o pai era diplomata, representante dos mercadores da República de Pisa. No livro *Liber abaci*, apresentou um problema sobre repodução de coelhos que deu origem aos números de Fibonacci.
Adaptado a partir de
`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/`.

A sucessão de Fibonacci é definida por recorrência da seguinte maneira:

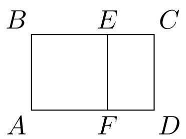
$$\begin{cases} F_0 = 0; \\ F_1 = 1; \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ para } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

François Édouard Anatole Lucas (1842–1891) Formado pela École Normale em Amiens, trabalhou no Observatório de Paris e mais tarde tornou-se professor de matemática no Lycée Saint Louis, depois da Guerra Franco-Prussiana (1870–1871). Estudou a sucessão de Fibonacci e, entre outras coisas, inventou o jogo das Torres de Hanoi.
Adaptado a partir de
`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/`.

A sucessão de Lucas é também definida por recorrência, da seguinte maneira:

$$\begin{cases} L_0 = 2; \\ L_1 = 1; \\ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \text{ para } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Considere um rectângulo $ABCD$ e suponhamos que o lado AB é menor que o lado BC. Considere pontos E e F sobre os segmentos BC e AD respectivamente tais que $ABEF$ é um quadrado. Dizemos que $ABCD$ é um rectângulo de ouro se o rectângulo $FCDE$ é semelhante a $ABCD$.



O *número de ouro* é definido como a razão entre o comprimento e a largura de um rectângulo de ouro. É habitualmente denotado por Φ.

1. Calcule os dez primeiros termos das sucessões de Lucas e Fibonacci.

2. (a) De quantas maneiras se pode subir uma escada de n degraus, se se sobem um ou dois degraus de cada vez?

   (b) De quantas maneiras se pode subir uma escada de n degraus, se se sobem um, dois ou três degraus de cada vez?

3. (a) Calcule as somas dos números de cada um dos três caminhos assinalados no triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&2&&1&&&&& \\
&&&&1&&3&&3&&1&&&& \\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&& \\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&& \\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1& \\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1
\end{array}$$

   (b) Mostre por indução que para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots$$

   Note que $\binom{a}{b} = 0$, quando $a < b$.

4. Calcule o número de ouro.

5. Mostre que o número de ouro satisfaz as seguintes propriedades:

   (a) $\Phi^2 = \Phi + 1$;

   (b) $(1 - \Phi)^2 = (1 - \Phi) + 1$;

   (c) $\Phi^{-1} = \Phi - 1$.

6. **Fórmulas de Binet.** Mostre por indução que para todo o $n \in \mathbb{N}$,

   (a)
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\Phi^n - (1 - \Phi)^n \right];$$

(b)

$$L_n = \Phi^n + (1-\Phi)^n.$$

7. Mostre, por indução ou utilizando as fórmulas de Binet, que para quaisquer $m, n > 0$,

(a)

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1;$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = L_{n+2} - 3;$$

(c)

$$F_{n+1}F_{n-1} - {F_n}^2 = (-1)^n;$$

(d)

$$L_{n+1}L_{n-1} - {L_n}^2 = 5(-1)^{n+1};$$

(e)

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1};$$

(f)

$$F_{2n+1} = {F_{n+1}}^2 + {F_n}^2;$$

(g)

$$F_{2n} = {F_{n+1}}^2 - {F_{n-1}}^2;$$

(h)

$$F_{2n} = F_n L_n;$$

(i)

$$F_{n+m+1} = F_{n+1}F_{m+1} + F_n F_m;$$

(j)

$$\sum_{k=1}^{n} {F_k}^2 = F_n F_{n+1}.$$