

Produto de matrizes

Cálculo do produto de uma sequência de matrizes (*Matrix-chain multiplication*)

Problema

Dada uma sequência de matrizes a multiplicar

$$A_1 A_2 \dots A_n, \quad n > 0$$

com dimensões

$$p_0 \times p_1 \quad p_1 \times p_2 \quad \dots \quad p_{n-1} \times p_n$$

por que ordem efectuar os produtos de modo a minimizar o número de multiplicações entre elementos das matrizes?

(NOTA: A matriz A_i tem dimensão $p_{i-1} \times p_i$)

(NOTA: O produto de matrizes é uma operação associativa.)

Produto de matrizes

Cálculo do produto de duas matrizes (1)

$$A (p \times q) \quad \times \quad B (q \times r) \quad = \quad C (p \times r)$$

$$\begin{array}{c} i \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{iq}} \end{array} \times \begin{array}{c} j \\ \boxed{b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{qj}} \end{array} = \begin{array}{c} j \\ \boxed{c_{ij}} \end{array}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{iq}b_{qj} = \sum_{k=1}^q a_{ik}b_{kj}$$

No cálculo de cada elemento de C , são efectuadas q multiplicações (escalares)

Produto de matrizes

Cálculo do produto de duas matrizes (2)

MATRIX-MULTIPLY(A[1..p, 1..q], B[1..q, 1..r])

```
1 let C[1..p, 1..r] be a new matrix
2 for i <- 1 to p do
3   for j <- 1 to r do
4     C[i, j] <- 0
5     for k <- 1 to q do
6       C[i, j] <- C[i, j] + A[i, k] * B[k, j]
7 return C
```

Número de multiplicações

Se A e B são matrizes com dimensões $p \times q$ e $q \times r$, respectivamente, no cálculo de $C = AB$, o número de multiplicações efectuadas entre elementos das matrizes é

$$p \times q \times r$$

(C tem $p \times r$ elementos e são efectuadas q multiplicações para o cálculo de cada um)

Produto de uma sequência de matrizes

Exemplo

Sejam A_1 , A_2 e A_3 matrizes com dimensões

$$10 \times 100, 100 \times 5 \text{ e } 5 \times 50$$

Ordens de avaliação possíveis para o produto $A_1A_2A_3$

$$(A_1A_2)A_3$$

$$A_1(A_2A_3)$$

Número de multiplicações

$$(A_1A_2)A_3$$

$$10 \times 100 \times 5 + 10 \times 5 \times 50 = 5000 + 2500 = 7500$$

$$A_1(A_2A_3)$$

$$100 \times 5 \times 50 + 10 \times 100 \times 50 = 25000 + 50000 = 75000$$

Produto de uma sequência de matrizes

Colocação de parêntesis

Formulação alternativa

Como colocar parêntesis no produto $A_1 A_2 \dots A_n$ de modo a realizar o menor número de multiplicações possível?

Número de colocações de parêntesis distintas

$$\Omega\left(\frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Produto de uma sequência de matrizes

Caracterização de uma solução óptima (1)

O produto $A_1 A_2 \dots A_n$ será calculado de uma das formas

$$\begin{aligned} & A_1 (A_2 \dots A_n) \\ & (A_1 A_2) (A_3 \dots A_n) \\ & (A_1 \dots A_3) (A_4 \dots A_n) \\ & \vdots \\ & (A_1 \dots A_{n-2}) (A_{n-1} A_n) \\ & (A_1 \dots A_{n-1}) A_n \end{aligned}$$

O número **n-mult** de multiplicações a efectuar para o cálculo de

$$(A_1 \dots A_k) (A_{k+1} \dots A_n)$$

para qualquer $1 \leq k < n$, será

$$\mathbf{n-mult}(A_1 \dots A_k) + \mathbf{n-mult}(A_{k+1} \dots A_n) + p_0 p_k p_n$$

Produto de uma sequência de matrizes

Caracterização de uma solução óptima (2)

Procura-se o valor **mínimo** de

$$\text{n-mult}(A_1 \dots A_n)$$

que depende do valor mínimo de

$$\text{n-mult}(A_1 \dots A_k) \quad \text{e de} \quad \text{n-mult}(A_{k+1} \dots A_n)$$

para algum valor de k

O número **mínimo** m de multiplicações a efectuar será obtido para o valor de k que minimiza

$$m(A_1 \dots A_k) + m(A_{k+1} \dots A_n) + p_0 p_k p_n$$

Produto de uma sequência de matrizes

Função recursiva

Sequência de matrizes a multiplicar

$$A_1 A_2 \dots A_n, \quad n > 0$$

Dimensões das matrizes: $P = (p_0 p_1 \dots p_n)$

$m_P[1..n, 1..n]$: $m_P[i, j]$ é o menor número de multiplicações a fazer para o cálculo do produto $A_i \dots A_j$

$$m_P[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ \min_{i \leq k < j} \{m_P[i, k] + m_P[k + 1, j] + p_{i-1}p_kp_j\} & \text{se } i < j \end{cases}$$

Número mínimo de multiplicações (chamada inicial): $m_P[1, n]$

Produto de uma sequência de matrizes

Cálculo de $m[i, j]$

	m				
	1	2	3	4	5
1	0	m_{12}	m_{13}	m_{14}	m_{15}
2		0	m_{23}	m_{24}	m_{25}
3			0	m_{34}	m_{35}
4				0	m_{45}
5					0

Ordem de cálculo

- 1 Sequências de comprimento 1: $m_{11}, m_{22}, m_{33}, m_{44}, m_{55}$
(Caso base)
- 2 Sequências de comprimento 2: $m_{12}, m_{23}, m_{34}, m_{45}$
- 3 Sequências de comprimento 3: m_{13}, m_{24}, m_{35}
- 4 Sequências de comprimento 4: m_{14}, m_{25}
- 5 Sequências de comprimento 5: m_{15}

Produto de uma sequência de matrizes

Cálculo iterativo de $m[1, n]$

MATRIX-CHAIN-ORDER(p)

```
1 n <- |p| - 1 // p[0..n]
2 let m[1..n,1..n] be a new table
3 for i <- 1 to n do
4     m[i, i] <- 0
5 for l <- 2 to n do // l is the chain length
6     for i <- 1 to n - l + 1 do
7         j <- i + l - 1
8         m[i, j] <- +∞
9         for k <- i to j - 1 do
10             q <- m[i, k] + m[k + 1, j] +
                  p[i - 1] * p[k] * p[j]
11             if q < m[i, j] then
12                 m[i, j] <- q
13 return m[1, n]
```

Produto de uma sequência de matrizes

Complexidade de MATRIX-CHAIN-ORDER($p_0 \ p_1 \ \dots \ p_n$)

Ciclo 3–4 é executado n vezes

Ciclo 5–12 é executado $n - 1$ vezes (variável l)

Ciclo 6–12 é executado $n - l + 1$ vezes (variável i)

Ciclo 9–12 é executado $l - 1$ vezes (variável k)

$$\sum_{l=2}^n \sum_{i=1}^{n-l+1} \sum_{k=i}^{i+l-2} 1 = \sum_{l=2}^n \sum_{i=1}^{n-l+1} l-1 = \sum_{l=2}^n (n-(l-1))(l-1) = \sum_{l=1}^{n-1} (n-l)l =$$

$$n \sum_{l=1}^{n-1} l - \sum_{l=1}^{n-1} l^2 = n \frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{n^3 - n}{6} = \Theta(n^3)$$

Complexidade temporal $\Theta(n^3)$

Complexidade espacial $\Theta(n^2)$

Produto de uma sequência de matrizes

Construção da solução

MATRIX-CHAIN-ORDER(p)

```
1 n <- |p| - 1 // p[0..n]
2 let m[1..n,1..n] and s[1..n-1,2..n] be new tables
3 for i <- 1 to n do
4     m[i, i] <- 0
5 for l <- 2 to n do // l is the chain length
6     for i <- 1 to n - l + 1 do
7         j <- i + l - 1
8         m[i, j] <- +∞
9         for k <- i to j - 1 do
10             q <- m[i, k] + m[k + 1, j] +
                  p[i - 1] * p[k] * p[j]
11             if q < m[i, j] then
12                 m[i, j] <- q
13                 s[i, j] <- k // break at matrix k
14 return m and s
```

Produto de uma sequência de matrizes

Solução calculada

$$p = 10 \quad 100 \quad 5 \quad 50 \quad 3$$

Matriz m (multiplicações)

	1	2	3	4
1	0	5000	7500	5250
2		0	25000	2250
3			0	750
4				0

Matriz s (separação)

	2	3	4
1	1	2	1
2		2	2
3			3

Número mínimo de multiplicações
para calcular ...

$$A_1 A_2 = 5000$$

$$A_2 A_3 = 25000$$

$$A_1 A_2 A_3 = 7500$$

$$A_2 A_3 A_4 = 2250$$

$$A_1 A_2 A_3 A_4 = 5250$$

Separação dos produtos

$$A_1 \dots A_2 = (A_1)(A_2)$$

$$A_1 \dots A_3 = (A_1 A_2)(A_3)$$

$$A_2 \dots A_4 = (A_2)(A_3 A_4)$$

$$\begin{aligned} A_1 \dots A_4 &= (A_1)(A_2 \dots A_4) \\ &= (A_1)(A_2(A_3 A_4)) \end{aligned}$$

Produto de uma sequência de matrizes

Melhor colocação de parêntesis

$s[1..n-1, 2..n]$: $s[i, j]$ é a posição onde a sequência $A_i \dots A_j$ é dividida: $(A_i \dots A_{s[i, j]})(A_{s[i, j]+1} \dots A_j)$

PRINT-OPTIMAL-PARENS(s, i, j)

```
1 if i = j then
2   print "A"i
3 else
4   print "("
5   PRINT-OPTIMAL-PARENS(s, i, s[i, j])
6   PRINT-OPTIMAL-PARENS(s, s[i, j] + 1, j)
7   print ")"
```

Sequências e subsequências

Seja x a sequência

$$x_1 x_2 \dots x_m, \quad m \geq 0$$

A sequência $z = z_1 z_2 \dots z_k$ é uma **subsequência** de x se

$$z_j = x_{i_j}, \quad j = 1, \dots, k \quad \text{e} \quad i_j < i_{j+1}$$

Exemplo

$$x = A \ B \ C \ B \ D \ A \ B$$

São subsequências:

A	A B C	B B B	C B A
B C B A	A B C B D A B		

Não são subsequências:

A A A D C E

Subsequências comuns

Sejam x e y as sequências

$$x_1 x_2 \dots x_m \text{ e } y_1 y_2 \dots y_n, \quad m, n \geq 0$$

A sequência z é uma **subsequência comum** a x e y se

- ▶ z é uma subsequência de x e
- ▶ z é uma subsequência de y

Exemplo

$$\begin{aligned} x &= A B C B D A B \\ y &= B D C A B A \end{aligned}$$

Subsequências comuns a x e a y

A A B C B A ...

Maiores subsequências comuns a x e a y

B C A B B C B A B D A B

Maior subsequência comum

Longest common subsequence

Problema

Dadas duas sequências x e y

$$x_1 x_2 \dots x_m \text{ e } y_1 y_2 \dots y_n, \quad m, n \geq 0$$

determinar uma maior subsequência comum a x e a y

Número de subsequências de uma sequência de comprimento m

$$2^m$$

Maior subsequência comum

Caracterização de uma solução ótima

$$x = x_1 x_2 \dots x_m \text{ e } y = y_1 y_2 \dots y_n, \quad m, n > 0$$

- $x_m = y_n$

Uma maior subsequência comum a x e y será uma maior subsequência comum a

$$x_1 x_2 \dots x_{m-1} \text{ e } y_1 y_2 \dots y_{n-1}$$

acrescida de x_m

- $x_m \neq y_n$

Uma maior subsequência comum a x e y será **uma maior** de entre as maiores subsequências comuns a

$$x_1 x_2 \dots x_m \text{ e } y_1 y_2 \dots y_{n-1}$$

e as maiores subsequências comuns a

$$x_1 x_2 \dots x_{m-1} \text{ e } y_1 y_2 \dots y_n$$

Maior subsequência comum

Função recursiva

Comprimento de uma maior subsequência comum às sequências

$$x = x_1 x_2 \dots x_m \text{ e } y = y_1 y_2 \dots y_n, \quad m, n > 0$$

$c_{xy}[0..m, 0..n]$: $c_{xy}[i, j]$ é o comprimento das maiores subsequências comuns a $x_1 \dots x_i$ e $y_1 \dots y_j$

$$c_{xy}[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \vee j = 0 \\ 1 + c_{xy}[i - 1, j - 1] & \text{se } i, j > 0 \wedge x_i = y_j \\ \max \{c_{xy}[i - 1, j], c_{xy}[i, j - 1]\} & \text{se } i, j > 0 \wedge x_i \neq y_j \end{cases}$$

Comprimento de uma maior subsequência comum a x e y : $c_{xy}[m, n]$