Exame, época normal

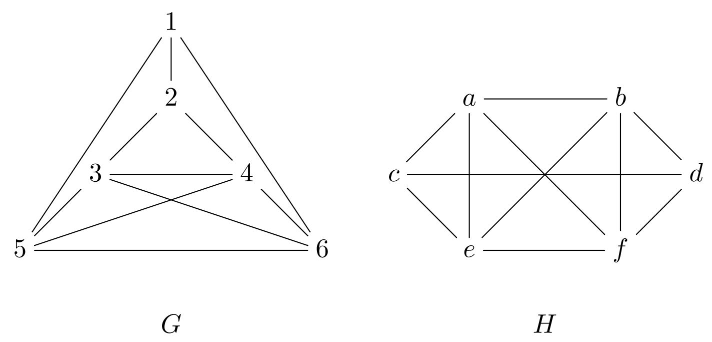
Justifique todas as respostas.

1. Considere a sucessão $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada recursivamente por $s_0 = 7$ e, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = 2s_n + 3$. Mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = 2^n \cdot 7 + (2^n - 1) \cdot 3.$$

2. De um conjunto de doze geólogos, sete biólogos e cinco arqueólogos, queremos formar um grupo de trabalho com três geólogos, três biólogos e três arqueólogos.
   (a) Quantos grupos diferentes podem ser formados? (Não é necessário calcular o resultado final, basta apresentar a expressão e justificá-la.)
   (b) Se quiséssemos formar um grupo com três geólogos, quatro biólogos e dois arqueólogos, o resultado da alínea anterior seria maior, menor ou igual?

3. (a) Diga, justificando, se os seguintes grafos são isomorfos:



   (b) Encontre um caminho de Euler no grafo G.
   (c) Quantos subgrafos de H com 6 vértices e 4 arestas existem?
   (d) Dê um exemplo duma árvore geradora do grafo H.

4. (a) Aplicando o algoritmo de Euclides, encontre o máximo divisor comum d entre 3 e 91 e encontre inteiros s e t tais que $d = 91s + 3t$.
   (b) Aplique o teorema chinês do resto para encontrar todas as soluções em $\mathbb{Z}$ do sistema

$$\begin{cases} x = 2 \mod 3 \\ x = 3 \mod 7 \\ x = 4 \mod 13 \end{cases}.$$

   (Nota: pode usar as seguintes igualdades: $2 \cdot 39 - 11 \cdot 7 = 1$ e $5 \cdot 21 - 8 \cdot 13 = 1$.)
   (c) Mostre que $\overline{7}$ é divisor de zero em $\mathbb{Z}_{21}$.

5. Seja $f : S \longrightarrow T$. Mostre que $f\big(f^{\leftarrow}(B)\big) \subseteq B$, para qualquer $B \subseteq T$.