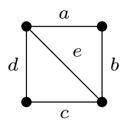
9. Árvores geradoras. Caminhos de Euler e de Hamilton

Consideremos o grafo $G = (V, A)$. Dizemos que um subgrafo H de G é uma *árvore geradora* de G se H for uma árvore com todos os vértices de G.

Proposição 1. *Um grafo G é conexo se e só se tem, pelo menos, uma árvore geradora.*

Um grafo conexo tem, em geral, mais de uma árvore geradora,... mas quantas? Para obter uma árvore geradora do grafo a seguir temos de tirar duas arestas, mas não duas quaisquer. Por exemplo, se tirássemos as arestas a e b, ficaríamos com um grafo não conexo.



Seguem-se dois algoritmos de procura de árvores geradoras em grafos.

Breadth-First Search. Escolher um vértice v_1 para raiz; etiquetar os seus vértices vizinhos $v_2, \ldots, v_k$ e construir na árvore as arestas $v_1v_2, \ldots, v_1v_k$; etiquetar os vértices vizinhos de v_2 que ainda não tenham sido considerados e construir as respectivas arestas na árvore, depois os de v_3 e assim sucessivamente até não se poder etiquetar mais. Se todos os vértices estão etiquetados no fim, o grafo é conexo e construímos uma árvore geradora; caso contrário, o grafo é desconexo.

Depth-First Search. Escolher um vértice v_1 para raiz; etiquetar um dos seus vértices vizinhos denotando-o com v_2 e construir na árvore a aresta v_1v_2; etiquetar um dos vértices vizinhos de v_2 que ainda não tenha sido considerado denotando-o com v_3 e construir na árvore a aresta v_2v_3, e assim sucessivamente até não se poder etiquetar mais; se o último vértice etiquetado é v_k, verificar se v_{k-1} tem vizinhos por etiquetar e seguir o algoritmo como antes; se não, verificar para v_{k-2} e assim sucessivamente. Se todos os vértices estão etiquetados no fim, o grafo é conexo e construímos uma árvore geradora; caso contrário, o grafo é desconexo.

Caminhos de Euler e de Hamilton.

Seja G um grafo conexo. Chamamos *caminho de Euler* ou *caminho euleriano* de G a um caminho que contenha todas as arestas de G sem repetir nenhuma. Chamamos *ciclo de Euler* ou *ciclo euleriano* de G a um caminho fechado que contenha todas as arestas de G sem repetir nenhuma. Chamamos *caminho de Hamilton* ou *caminho hamiltoniano* de G a um caminho simples que contenha todos os vértices de G. Chamamos *ciclo de Hamilton* ou *ciclo hamiltoniano* de G a um ciclo simples que contenha todos os vértices de G. Um grafo que admite um ciclo de Hamilton chama-se *hamiltoniano*.

Proposição 2. *Um grafo conexo admite um caminho de Euler se e só se o número de vértices de grau ímpar for dois ou zero. Um grafo conexo admite um ciclo de Euler se e só se todos os seus vértices têm grau par.*

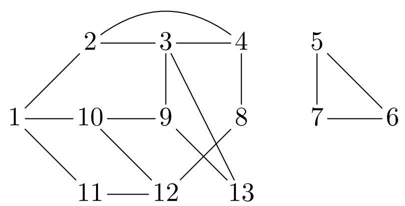
O algoritmo seguinte pode ser utilizado para encontrar um caminho de Euler num grafo conexo:

Algoritmo de Fleury. Esta descrição do algoritmo está pensada para papel e lápis, mas pode ser facilmente adaptada a um computador. Fazer uma cópia do grafo original, e escolher um vértice de grau ímpar para começar (caso não exista, começar em qualquer vértice); em cada passo do algotimo, se designarmos por v o último vértice que considerámos, escolhemos, das arestas que incidem em v, uma tal que se a apagarmos, o grafo não deixa de ser conexo; se não for possível, escolher uma aresta qualquer; seja vw a aresta escolhida; apagamos vw e repetimos o passo anterior com w no papel de v; o algoritmo termina quando apagarmos todas as arestas.

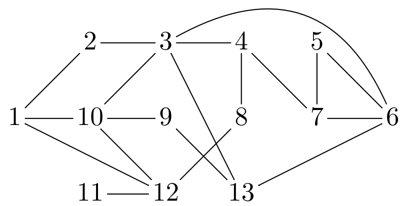
Exercícios e problemas

1. Aplique os algoritmos *Breadth-First Search* e *Depth-First Search* aos grafos seguintes, duas vezes para cada algoritmo: uma começando pelo vértice 1 e outra começando pelo vértice 6:

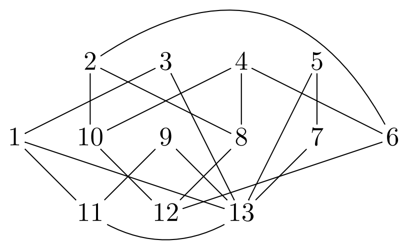
(a)



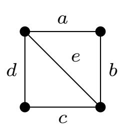
(b)



(c)

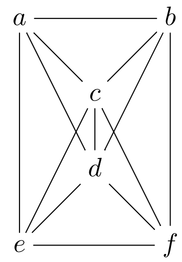


2. Comprove que o seguinte grafo tem oito árvores geradoras diferentes e desenhe-as.

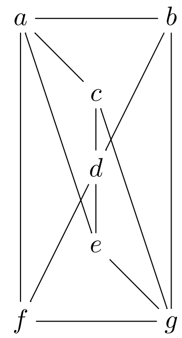


3. Conte o número de árvores geradoras das seguintes famílias de grafos: grafos circulares com n vértices C_n, grafos lineares com n vértices L_n, e grafos completos com n vértices K_n.

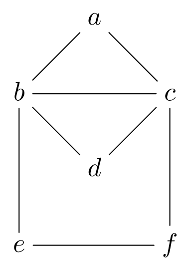
4. Considere os seguintes grafos G, H e I:



G



H



I

A respeito de cada um dos grafos, responda às seguintes questões:

(a) Admite um caminho de Euler? Se sim, apresente um; caso contrário explique porquê.

(b) Admite um ciclo de Euler? Se sim, apresente um; caso contrário explique porquê.

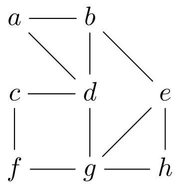
(c) É hamiltoniano?

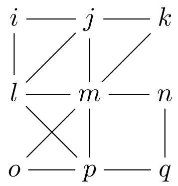
(d) É completo?

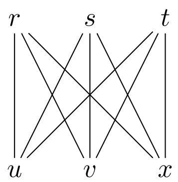
(e) É bipartido?

(f) É bipartido completo?

5. Para os seguintes grafos apresente um caminho de Euler, ou um ciclo de Euler, caso existam. Caso contrário, explique porquê. Aplique o algoritmo de Fleury.







6. (a) Quantos ciclos de Hamilton tem o grafo $K_{n,n}$, para $n \geq 2$?

   (b) Quantos caminhos de Hamilton tem o grafo $K_{n,n-1}$, para $n \geq 2$?

   (c) Para que valores de n tem K_n um ciclo de Euler?

   (d) Para que valores de m e n, tem o grafo $K_{m,n}$ um caminho de Euler?

7. Construa o grafo G cujo conjunto de vértices é $\{0,1\}^3$ e dois vértices estão unidos por uma aresta se e só sé têm exactamente duas coordenadas distintas. Construa o grafo H com os mesmos vértices de G, mas tal que dois vértices estão unidos por uma aresta se e só sé têm pelo menos duas coordenadas distintas. Em relação a estes dois grafos, responda às seguintes questões:

   (a) Quantas componentes conexas têm os grafos?

   (b) Quantos vértices há de cada grau?

   (c) Os grafos são regulares?

   (d) Os grafos admitem um ciclo de Euler?

8. Construa o grafo I cujo conjunto de vértices é $\{0,1,2\}^2$ e dois vértices estão unidos por uma aresta se e só sé têm exactamente coordenada distinta.

   (a) Quantas componentes conexas tem o grafo?

   (b) Quantos vértices há de cada grau?

   (c) O grafo é regular?

   (d) O grafo admite um ciclo de Euler?