10. Congruência módulo n

Seja n um natural positivo. Dizemos que dois números inteiros a e b são *congruentes módulo n* se os restos das divisões inteiras de a e b por n forem iguais. De forma equivalente, dois inteiros a e b são congruentes módulo n se $a - b$ é múltiplo de n. Denotamos esta relação por

$$a = b \mod n$$

ou

$$a \equiv_n b.$$

1. Averigue se são verdadeiras:
   (a) $75 = 12 \mod 9$.
   (b) $75 = 12 \mod 3$.
   (c) $88 = 11 \mod 5$.
   (d) $88 = 11 \mod 11$.
   (e) $1234 = 5678 \mod 1111$.
   (f) $17 = 23 \mod 2$.
   (g) $3m + 1 = m - 1 \mod 2$, para qualquer inteiro m.
   (h) $4m + 5 = m - 1 \mod 2$, para qualquer inteiro m.
   (i) $4m + 7 = 6n - 3 \mod 2$, para quaisquer inteiros m e n.

2. Seja n um natural positivo e sejam a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 e c inteiros. Mostre as seguintes afirmações:
   (a) Se $a = b \mod n$, então $a + c = b + c \mod n$.
   (b) Se $a_1 = b_1 \mod n$ e $a_2 = b_2 \mod n$, então $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \mod n$.
   (c) Se $a = b \mod n$, então $ac = bc \mod n$.
   (d) Se $a_1 = b_1 \mod n$ e $a_2 = b_2 \mod n$, então $a_1a_2 = b_1b_2 \mod n$.

3. Dê cinco exemplos de inteiros que sejam congruentes módulo n com a para cada um dos seguintes pares de valores de a e n:
   (a) $a = 2$, $n = 6$;
   (b) $a = 7$, $n = 3$;
   (c) $a = -7$, $n = 3$;
   (d) $a = 3$, $n = 11$;
   (e) $a = 0$, $n = 5$;
   (f) $a = 111$, $n = 1111$.

4. Para os seguintes valores de a e n, indique o único natural r tal que $0 \leq r < n$ e $a = r \mod n$.
   (a) $a = 10$, $n = 6$;
   (b) $a = 17$, $n = 3$;
   (c) $a = -17$, $n = 3$;
   (d) $a = 55$, $n = 11$;
   (e) $a = 2$, $n = 5$;
   (f) $a = 11111$, $n = 1111$.

5. **Relações.**

   Reflexividade. Uma relação R é *reflexiva* num conjunto A se para quaiquer $a \in A$,
   $$aRa.$$
   Anti-reflexividade. Uma relação R é *anti-reflexiva* num conjunto A se para quaiquer $a \in A$,
   $$\neg aRa.$$
   Simetria. Uma relação R é *simétrica* se para quaisquer a, b,
   $$aRb \Rightarrow bRa.$$
   Anti-simetria. Uma relação R é *anti-simétrica* se para quaisquer a, b,
   $$aRb \Rightarrow \neg bRa.$$
   Transitividade. Uma relação R é *transitiva* se para quaisquer a, b, c,
   $$(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc.$$
   Equivalência. Uma relação R é de *equivalência* num conjunto A se é reflexiva em A, simétrica e transitiva.

   Diga de quais destas propriedades goza a relação de congruência módulo n em $\mathbb{Z}$.