Sistemas de Numeração

Sistemas Digitais 2016/2017

Pedro Salgueiro
pds@di.uevora.pt

Sumário

- Sistemas de numeração posicionais
  - Sistema decimal
  - Sistema de numeração posicional
  - Sistema binário
  - Outras bases
- Conversão entre bases
  - Número inteiro
  - Número fraccionário
- Exercícios

Sistema decimal

- O número 253
  - O que representa?
    - Duzentos e cinquenta e três
  - Como é decomposto?
    - Duas centenas, cinco dezenas e três unidades
    - $2 \times 100 + 5 \times 10 + 3$
  - Isto no **Sistema Decimal...**

Sistemas de numeração posicionais

Sistema decimal

- Quantos algarismos distintos (dígitos) existem?
  - Dez: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- Quanto vale cada algarismo no número?
  - Sempre uma potência de 10
  - Depende da sua posição no número
- 253
  - 2 tem peso 10^2
  - 5 tem peso 10^1
  - 3 tem peso 10^0
- Sistema de numeração posicional de base 10

Sistema de numeração posicional

- Sistema de numeração onde:
  - Um número é formado por uma sequência de **algarismos** (dígitos)
  - Cada algarismo possui um **peso** de acordo com a posição que ocupa na sequência
  - O peso depende da **base** em que o número está representado
- Base *b*
  - Quantos dígitos?
    - **b** dígitos: 0, 1, 2, . . . b – 1
  - Que quantidade representa?
    - $d_2 d_1 d_{0\ (b)} = d_2 * b^2 + d_1 * b^1 + d_0 * b^0$

Sistemas de numeração posicionais

Sistema de numeração posicional

- Capacidade da base
  - O que é?
    - É o nº de valores inteiros que é possível representar numa base
    - Na base ***b***, com ***n*** algarismos, podem representar-se b^n valores distintos
  - Exemplo: 3 algarismos
    - Sistema decimal (base 10)
      - Capacidade: $\mathbf{10^3 = 1000}$
      - Valores possíveis: 0, . . . , $10^3 - 1$
        - 0, 1, . . . 9, 10, . . . , 99, 100, . . . ,999
    - Base *b*
      - Capacidade: $\mathbf{b^3}$
      - Valores possíveis: 0 . . . $b^3 - 1$
        - 0, 1, . . ., $b - 1$, b^1, . . . , $b^2 - 1$, b^2, . . . , $b^3 - 1$

Sistema binário

- Sistema de numeração binário
  - Que base?
    - ***b*** = 2
  - Quantos dígitos?
    - **Dois:** 0, 1
  - Qual a capacidade com 4 dígitos?
    - $2^4 = 16$
    - Conseguem-se representar 16 valores: 0,1, . . ., 15
      - 0, 1, …, $2^4 - 1$
  - $\mathbf{1101_{(2)}}$ que quantidade representa?
    - $1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 13$

Sistema binário

- Definições
  - bit
    - 1 dígito binário
    - ***bi****nary digi****t***
  - *byte*
    - É um conjunto de 8 bits
  - bit mais significativo
    - bit com maior peso (bit mais à esquerda)
    - **MSB**, *most significant bit*
    - **1**101
  - bit menos significativo
    - bit com maior peso (bit mais à direita)
    - **LSB**, *least significant bit*
    - 110**1**

Sistema binário

- Exemplo
  - Número com 10 bits
    - Capacidade
      - $2^{10} = 1024$
    - Peso **MSB**, *most significant bit*
      - $1 * 2^{9} = 512$
    - Valor de $\mathbf{1100110001}_{(2)}$

$= 1 * 2^{9} + 1 * 2^{8} + 0 * 2^{7} + 0 * 2^{6} + 1 * 2^{5} + 1 * 2^{4} + 0 * 2^{3} + 0 * 2^{2} + 0 * 2^{1} + 1 * 2^{0}$
$= 1 * 2^{9} + 1 * 2^{8} + 1 * 2^{5} + 1 * 2^{4} + 1 * 2^{0Z}$
$= 2^{9} + 2^{8} + 2^{5} + 2^{4} + 2^{0}$
$= 817$

Sistema binário

- Potências de 2
  - Designações conhecidas
    - K: *kilo*
      - $2^{10} = 1024$
      - Potência de 2 que mais se aproxima de 1000
    - M: *mega*
      - $2^{20} = 2^{10} * 2^{10} = 1024 * 1K = 1M$
    - G: *giga*
      - $2^{30} = 2^{20} * 2^{10} = 1024 * 1M = 1G$
    - T: *giga*
      - $2^{40} = 2^{30} * 2^{10} = 1024 * 1G = 1T$
    - P: *peta*
      - $2^{50} = 2^{40} * 2^{10} = 1024 * 1T = 1P$

n	2^n
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024

Outras bases

- Sistema hexadecimal
- Sistema octal

Sistema hexadecimal

- Que base?
  - *B = 16*
- *Quantos dígitos?*
  - *Dezasseis: 0, 1, …, 9, A, B, C, D, E, F*
    - $A_{(16)} = 10_{(10)}$
    - …
    - $F_{(16)} = 15_{(10)}$
- *Qual a capacidade com 4 dígitos?*
    - $16^4 = 65536 \rightarrow 0 \ldots 65535$
- **$1AC4_{(16)}$** que quantidade representa?
  - $1 * 16^3 + 10 * 16^2 + 12 * 16^1 + 4 * 16^0 = 4096 + 2560 + 192 + 4 = 6852$

Sistema octal

- Que base?
  - *$b = 8$*
- *Quantos dígitos?*
  - *Dezasseis: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7*
- *Qual a capacidade com 4 dígitos?*
  - $8^4 = 4096 \rightarrow 0 \ldots 4095$
- **$1274_{(8)}$** que quantidade representa?
  - $1 * 8^3 + 2 * 8^2 + 7 * 8^1 + 4 * 8^0 = 512 + 128 + 56 + 4 = 700$

Conversão entre bases

- Número inteiro
- Número fraccionário

Conversão entre bases

Número inteiro

- Valor de um número inteiro
  - Indica a **quantidade** representada
  - A que **valor** corresponde a representação $d_3d_2d_1d_0\ _{(b)}$?
    - Converte-se da base ***b*** para decimal
    - $d_3d_2d_1d_0\ _{(b)} = d_3 * b^3 + d_2 * b^2 + d_1 * b^1 + d_0 * b^0$
  - Exemplo
    - $\mathbf{1036_{(7)}} = 1 * 7^3 + 0 * 7^2 + 3 * 7^1 + 6 * 7^0$
      $= 343 + 0 + 21 + 6$
      $= 370$

Conversão entre bases

Número inteiro

- Representação de um número inteiro
  - Representa uma determinada quantidade
  - A representação depende da **base**
  - Qual a **representação** do número $d_3d_2d_1d_0$ na base ***b***?
    - Converte-se do sistema decimal para a base *b*
    - Utiliza-se o método das divisões sucessivas

Número inteiro

- Método das divisões sucessivas
  - Retêm-se os **restos** das sucessivas divisões inteiras e dos quocientes entretanto obtidos por ***b***, até obter quociente nulo
  - Peso dos algarismos
    - O **menos** significativo é aquele resultante da primeira divisão efectuada
    - O **mais** significativo é aquele resultante da última divisão efectuada

Número inteiro

- Método das divisões sucessivas - **Exemplo**
  - Qual a representação de $136_{(10)}$ na base 2?
    - fazem-se **divisões inteiras** sucessivas por **dois,** retendo o resto

quociente	resto	
136	**0**	← **LSB**
68	0	
34	0	
17	1	
8	0	
4	0	
2	0	
1	**1**	← **MSB**
0		

$136_{(10)} = 10001000_{(2)}$

Número inteiro

- E na base 16?
  - *Fazem-se divisões inteiras sucessivas por **dezasseis**, retendo o resto*

quociente	resto
136	8
8	8
0	

$136_{(10)} = 88_{(16)}$

- E na base 6?
  - *Fazem-se divisões inteiras sucessivas por **seis**, retendo o resto*

quociente	resto
136	4
22	4
3	3
0	

$136_{(10)} = 344_{(6)}$

Número inteiro

- Conversão entre bases **b1** e **b2** (diferentes da base 10)
  - Utiliza-se a **base 10** como base intermédia:
    1. Encontra-se o **valor** do número representado por $\boldsymbol{b_1}$
       - $b_1 \rightarrow 10$
         - $d_3d_2d_1d_{0\ (b1)} = d_3 * b_1^2 + d_2 * b_1^2 + d_1 * b_1^1 + d_0 * b_1^0$
    2. Encontra-se a sua **representação** na base $\boldsymbol{b_2}$
       - $10 \rightarrow b_2$
         - *método das divisões sucessivas por* b_2

Número inteiro

- Conversão directa entre bases
  - Entre as bases binária e hexadecimal
    - Não é necessário usar a base intermédia
      - 16 é a quarta potência de 2 ($16 = 2^4$), cada dígito hexadecimal corresponde a 4 dígitos binários
    - Binária para hexadecimal
      - A partir do bit menos significativo, **formar grupos de 4 bits** e escrever um dígito hexadecimal por cada grupo
    - Hexadecimal para binária
      - Cada dígito hexadecimal é convertido em **4 bits**
    - Exemplo
      - $\underline{110}\ \underline{1100}\ \underline{0010}_{(2)} = 6C2_{(16)}$
      - $A05_{(16)} = 1010\ 0000\ 0101_{(2)}$

Número inteiro

- Conversão directa entre bases
  - Entre as bases binária e octal
    - 8 é a **terceira potência** de 2 ($8 = 2^3$), cada dígito octal corresponde a 3 dígitos binários
    - Exemplo
      - $\underline{11}\ \underline{011}\ \underline{000}\ \underline{010}_{(2)} = 3302_{(8)}$
      - $705_{(8)} = 111\ 000\ 101_{(2)}$
  - E entre as bases 3 e 9?

Número fracionário

- Se o número tem parte fracionária
  - Conversão $b_1 \rightarrow 10$
    - As potências são negativas para a parte fracionária
      - $d_0.d_1d_2d_3\ _{(b)} = d_0 * b^0 + d_1 * b^{-1} + d_2 * b^{-2} + d_3 * b^{-3}$
  - Conversão $10 \rightarrow b_1$
    - Separa-se a parte inteira da parte fracionária
      - inteira → método das divisões sucessivas
      - fracionária → método das multiplicações sucessivas

Conversão entre bases

Número fraccionário

- Método das multiplicações sucessivas
  - Retêm-se as **partes inteiras** da multiplicação por ***b*** das sucessivas partes fraccionárias, até que seja atingida a parte fraccionária nula (ou a precisão pretendida)
  - Peso dos algarismos
    - O **mais** significativo é aquele resultante da **primeira** multiplicação efetuada
    - O **menos** significativo é aquele resultante da **última** multiplicação efetuada

Número fraccionário

- Exemplo
  - Qual a representação de $0.375_{(10)}$ na base 2?

número	parte inteira	
0.375	0	← MSB
0.75	1	
0.5	1	← LSB
0		

$0.375_{(10)} = 0.011_{(2)}$

Número fraccionário

- Precisão da conversão

  - E se a parte fracionária nula não é atingida?
    - A capacidade na nova base ***b₂*** deve ser pelo menos igual à capacidade original ***b₁***
    - $b_2^{n2} \geq b_1^{n1}$

      $n_2 \geq (n_1 \log b_1) / \log b_2$

  - Exemplos
    - $201.1_{(3)} = 20.3_{(10)}$
      - $n_2 \geq (1 \log 3) / \log 10 = 0.4771 \Rightarrow n_2 = 1$
    - $0.48_{(10)} = 0.0111101_{(2)}$
      - $n_2 \geq (2 \log 10) / \log 2 = 6.6439 \Rightarrow n_2 = 7$

Exercícios

- Converta para base 10:
  1. $1010101_{(2)}$
  2. $A2D.9B_{(16)}$
  3. $0.46_{(7)}$
- Converta para base 2:
  1. $EA2.F5_{(16)}$
  2. $432.56_{(8)}$
  3. $2031.123_{(4)}$
- Converta para as bases 2 e 16:
  1. $25_{(10)}$
  2. $712.5_{(10)}$
- Converta para as bases 8 e 16:
  1. $1101101.1001101_{(2)}$
  2. $101110.0000111_{(2)}$