

# Análise Matemática I

Feliz Minhós



# Conteúdo

<b>Objectivos Gerais</b>	<b>1</b>
<b>Programa</b>	<b>3</b>
<b>1 Sucessões</b>	<b>5</b>
1.1 Definição . . . . .	5
1.2 Subs sucessão . . . . .	6
1.3 Sucessões monótonas . . . . .	6
1.4 Sucessões limitadas . . . . .	7
1.5 Indução Matemática . . . . .	8
1.6 Noção de vizinhança . . . . .	9
1.7 Sucessões convergentes. Propriedades . . . . .	10
1.8 Operações algébricas com sucessões . . . . .	13
1.9 Propriedades algébricas dos limites . . . . .	15
1.10 Sucessão de Cauchy . . . . .	19
1.11 A recta acabada. Infinitamente grandes . . . . .	21
1.12 Operações com limites em $\mathbb{R}$ . Indeterminações . . . . .	22
1.13 Sucessão exponencial . . . . .	25
1.14 Sucessão do tipo potência-exponencial . . . . .	25
<b>2 Séries de Números Reais</b>	<b>29</b>
2.1 Definição e generalidades . . . . .	30
2.2 Série geométrica . . . . .	31
2.3 Série de Mengoli . . . . .	31
2.4 Propriedades algébricas das séries . . . . .	34
2.5 Séries de termos não negativos . . . . .	35
2.6 Séries alternadas . . . . .	40
2.7 Critérios de convergência para séries de termos não negativos	42
2.8 Resto de uma série . . . . .	49

<b>3</b>	<b>Funções reais de variável real</b>	<b>53</b>
3.1	Limite de uma função . . . . .	53
3.2	Limites em $\mathbb{R}$ . . . . .	57
3.3	Limites laterais . . . . .	58
3.4	Funções contínuas . . . . .	59
3.5	Continuidade lateral . . . . .	59
3.6	Continuidade num intervalo . . . . .	61
3.7	Descontinuidades . . . . .	61
3.8	Teoremas fundamentais sobre continuidade . . . . .	62
3.9	Assíntotas . . . . .	65
3.10	Função inversa . . . . .	67
3.11	Função exponencial . . . . .	69
3.12	Função logarítmica . . . . .	72
3.13	Funções trigonométricas inversas . . . . .	77
3.13.1	Arco-seno . . . . .	77
3.13.2	Arco-cosseno . . . . .	78
3.13.3	Arco-tangente . . . . .	79
3.13.4	Arco co-tangente . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Cálculo Diferencial em <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>83</b>
4.1	Derivada de uma função num ponto . . . . .	83
4.2	Interpretação geométrica da derivada . . . . .	83
4.3	Derivadas laterais . . . . .	84
4.4	Derivadas infinitas . . . . .	85
4.5	Derivabilidade e continuidade . . . . .	86
4.6	Função derivada . . . . .	86
4.7	Regras de derivação . . . . .	87
4.8	Derivada da função composta . . . . .	88
4.9	Derivada da função inversa . . . . .	88
4.10	Derivadas de funções trigonométricas . . . . .	89
4.10.1	Derivada da função $f(x) = \text{sen } x$ . . . . .	89
4.10.2	Derivada da função $\cos x$ . . . . .	89
4.10.3	Derivada das funções $\text{tg } x$ e $\text{cot } g x$ . . . . .	89
4.10.4	Derivada das funções trigonométricas inversas . . . . .	90
4.11	Derivadas das funções exponencial e logarítmica . . . . .	91
4.12	Teoremas fundamentais do cálculo diferencial . . . . .	92
4.13	Derivadas de ordem superior . . . . .	98
4.14	Aplicações da fórmula de Taylor à determinação de extremos, convexidade e inflexões . . . . .	100
4.15	Séries de funções . . . . .	102

4.16	Séries de potências . . . . .	103
4.17	Série de Taylor para funções reais de variável real . . . . .	104
<b>5</b>	<b>Cálculo Integral em <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>107</b>
5.1	Primitivas . . . . .	107
5.2	Primitivas imediatas e quase imediatas . . . . .	108
5.2.1	Primitiva de uma constante . . . . .	108
5.2.2	Primitiva de uma potência de expoente real . . . . .	108
5.2.3	Primitiva de funções exponenciais . . . . .	109
5.2.4	Primitiva de funções trigonométricas . . . . .	110
5.3	Métodos de primitivação . . . . .	110
5.3.1	Primitivação por decomposição . . . . .	111
5.3.2	Primitivação por partes . . . . .	111
5.3.3	Primitivação por substituição . . . . .	112
5.3.4	Primitivação de funções racionais . . . . .	113
5.4	Integral de Riemann . . . . .	116
5.4.1	Somas integrais de uma função . . . . .	116
5.4.2	Definição de integral de Riemann . . . . .	118
5.4.3	Interpretação geométrica do conceito de integral . . . . .	121
5.5	Propriedades dos integrais . . . . .	121
5.6	Integral indefinido . . . . .	127
5.7	Métodos de integração . . . . .	129
5.7.1	Integração por decomposição . . . . .	129
5.7.2	Integração por partes . . . . .	130
5.7.3	Integração por substituição . . . . .	130
5.8	Extensão da noção de integral . . . . .	130
5.8.1	Integral impróprio de 1 <sup>a</sup> espécie . . . . .	130
5.8.2	Integral impróprio de 2 <sup>a</sup> espécie . . . . .	132
5.8.3	Integral impróprio de 3 <sup>a</sup> espécie ou mistos . . . . .	133
5.9	Critérios de convergência para integrais impróprios . . . . .	133
5.10	Aplicações dos integrais . . . . .	135
5.10.1	Áreas planas . . . . .	135
5.10.2	Comprimento de curvas planas . . . . .	135
5.10.3	Volumes de sólidos de revolução . . . . .	136
5.10.4	Áreas laterais de sólidos de revolução . . . . .	136



# Objectivos Gerais

Considerando esta unidade curricular no âmbito da formação pessoal e científica, em geral, e da formação matemática em particular, o aluno deverá:

- Desenvolver capacidades de abstracção, dedução lógica e análise.
- Adquirir métodos e técnicas estruturantes do raciocínio científico e matemático que proporcione um espírito crítico.
- Dominar conteúdos matemáticos associados à Análise Real, nomeadamente sucessões, funções, séries, Cálculo Diferencial e Integral em  $\mathbb{R}$ , ao nível de conceitos e aplicações.
- Utilizar conhecimentos matemáticos na resolução de problemas e interpretação da realidade.
- Adquirir competências matemáticas que possam vir a ser desenvolvidas e aplicadas em contexto profissional empresarial, de investigação ou de ensino.





# Introdução

O que é a Análise Matemática ou simplesmente Análise?

É o ramo da Matemática que se ocupa dos números e das relações entre eles, expressos por meio de igualdades, desigualdades e operações.

As operações fundamentais da Análise são: adição, subtracção, multiplicação, divisão, radiciação e passagem ao limite.

A Análise diz-se Análise Algébrica ou Álgebra quando não emprega a passagem ao limite.

Diz-se Análise Infinitesimal se usar a noção de limite, e portanto de infinito, quer directa quer indirectamente (séries, derivadas, integrais,...)



# Capítulo 1

## Sucessões

### 1.1 Definição

As sucessões são funções reais de variável natural.

**Definição 1.1.1** *Dado um conjunto  $A \neq \emptyset$ , chama-se sucessão de termos em  $A$  a qualquer aplicação de  $\mathbb{N}$  em  $A$ .*

**Exemplo 1.1.2** *As aplicações*

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 3n - 4 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} g: \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{Q} \\ n & \mapsto & \frac{5n+2}{n+1} \end{array}$$

*são exemplos de sucessões.*

Se o conjunto de chegada for  $\mathbb{R}$  então diz-se uma sucessão de números reais.

Designa-se por  $u_n$ .

Aos valores imagens da sucessão chamam-se termos da sucessão e designam-se por  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ , isto é, 1º termo, 2º termo, ..., enésimo-termo ou termo de ordem  $n$ .

À expressão  $u_n$  chama-se termo geral da sucessão.

Ao contradomínio da aplicação chama-se conjunto de todos os termos da sucessão.

Modos de definir uma sucessão:

1. Dado o termo geral

Dada a "lei" que permite obter as imagens a aplicação fica definida, já que o seu domínio é sempre  $\mathbb{N}$ .

**Exercício 1.1.3** *Considere a sucessão  $u_n = \frac{2n-5}{n+3}$ .*

*a) Calcule o 2º e o 10º termos.*

*b) Determine  $u_{p+2}$ .*

2. Por recorrência

Os termos da sucessão são calculados a partir dos termos anteriores.

**Exemplo 1.1.4** a) 
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 4, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 3 \\ v_{n+2} = v_n + v_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

**Exercício 1.1.5** Calcule os quatro primeiros termos de cada uma das sucessões anteriores e represente-os graficamente.

**Exercício 1.1.6** Considere a sucessão

$$w_n = \frac{3n + 4}{5n + 2}.$$

Verifique se  $\frac{7}{11}$  e  $\frac{5}{7}$  são termos da sucessão e, em caso afirmativo, indique a sua ordem.

## 1.2 Subsucessão

**Definição 1.2.1** Designa-se por subsucessão de  $u_n$  qualquer sucessão que resulte da supressão de alguns termos de  $u_n$ .

**Exercício 1.2.2** (i) Dada a sucessão  $u_n = (-1)^n (n + 3)$ , calcule:

a) A subsucessão de  $u_n$  dos termos de ordem par.

b) A subsucessão de  $u_n$  dos termos de ordem ímpar.

c) A subsucessão de  $u_n$  dos termos cuja ordem é múltipla de 5.

(ii) Represente graficamente os três primeiros termos de cada subsucessão.

## 1.3 Sucessões monótonas

**Definição 1.3.1** Seja  $u_n$  uma sucessão.

(i)  $u_n$  diz-se crescente se  $u_{n+1} \geq u_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , isto é, se  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

(ii)  $u_n$  é estritamente crescente se  $u_{n+1} > u_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , isto é, se  $u_{n+1} - u_n > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

(iii)  $u_n$  diz-se decrescente se  $u_{n+1} \leq u_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , isto é, se  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

(iv)  $u_n$  é estritamente decrescente se  $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , isto é, se  $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Definição 1.3.2** Uma sucessão crescente ou decrescente, em sentido lato ou estrito, é uma sucessão monótona.

**Exercício 1.3.3** Estude e classifique quanto à monotonia as sucessões:

a)  $a_n = \frac{3n}{n+2}$

b)  $b_n = \frac{1-4n}{n+1}$

c)  $c_n = \cos(n\pi)$

d)  $d_n = -3n$

**Observação 1.3.4** Uma sucessão crescente é limitada inferiormente, isto é, minorada. Pode ser, ou não, limitada superiormente (majorada). Analogamente, qualquer sucessão decrescente é majorada, podendo ser, ou não, minorada.

## 1.4 Sucessões limitadas

**Definição 1.4.1** Uma sucessão  $u_n$  diz-se limitada se o conjunto dos seus termos for um conjunto limitado. Isto é, se existirem números reais  $A$  e  $B$  tais que

$$A \leq u_n \leq B, \forall n \in \mathbb{N}.$$

De modo análogo pode definir-se sucessão limitada se

$$\exists L > 0 : |u_n| \leq L, \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Exercício 1.4.2** Das sucessões seguintes indique as que são limitadas, referindo neste caso um majorante e um minorante para o conjunto dos seus termos:

a)  $a_n = \frac{3n}{n+2}$

b)  $d_n = -3n$

c)  $c_n = \cos(n\pi)$

**Exercício 1.4.3** Prove que a sucessão  $d_n = -3n$  não é limitada.

## 1.5 Indução Matemática

O método de Indução Matemática permite provar propriedades no conjunto dos números naturais.

Baseia-se no Princípio de Indução Matemática:

Suponhamos que se pretende provar que uma condição  $C(n)$  se transforma numa proposição verdadeira sempre que se substitua  $n$  por um número natural.

Basta assegurar que se verificam as duas condições seguintes:

1.  $C(1)$  é verdadeira
2.  $C(n)$  é uma condição hereditária, isto é, se  $C(p)$  é verdadeira então  $C(p+1)$  também é verdadeira

Algumas propriedades importantes provam-se com recurso a este método:

**Proposição 1.5.1** (*Desigualdade de Bernoulli*) Se  $x \in \mathbb{R}$  verifica  $1+x \geq 0$  então

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Dem.** Para  $n=1$ , tem-se uma igualdade trivial :  $1+x = 1+x$ .

Por hipótese, admitinda-se que a proposição é verdadeira para  $n=p$ , isto é,

$$(1+x)^p \geq 1+px.$$

Verifica-se então se a tese é verdadeira, ou seja, se a proposição é verdadeira para  $n=p+1$  :

$$(1+x)^{p+1} \geq 1+(p+1)x.$$

Ora

$$\begin{aligned} (1+x)^{p+1} &= (1+x)^p (1+x) \geq (1+px)(1+x) \\ &= 1+x+px+px^2 = 1+(p+1)x+px^2 \\ &\geq 1+(p+1)x. \end{aligned}$$

Então, pelo método de indução matemática

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

**Exercício 1.5.2** Utilizando o método de indução matemática prove que:

a)  $8^n : 2^n = 4^n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

b)  $\sum_{k=1}^n (2k) = n(n+1), \forall n \in \mathbb{N}$ .

## 1.6 Noção de vizinhança

Quando se toma um valor aproximado de um número real  $a$ , considerando um valor aproximado de  $a$  comete-se um certo erro  $\delta > 0$ .

Isto é, considera-se um valor na vizinhança de  $a$ , ou seja em  $]a - \delta, a + \delta[$ .

**Definição 1.6.1** Seja  $a \in \mathbb{R}$ . Chama-se vizinhança de  $a$  de raio  $\delta > 0$ , e nota-se por  $V_\delta(a)$  ao conjunto

$$\begin{aligned} V_\delta(a) &= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\} \\ &= ]a - \delta, a + \delta[. \end{aligned}$$

Ou seja, é o conjunto de todos os valores aproximados de  $a$  com erro inferior a  $\delta$ .

**Exercício 1.6.2** Represente na forma de intervalo de números reais:

a)  $V_{0.2}(4)$

b)  $V_{0.02}(-2, 3)$

**Exercício 1.6.3** Defina como uma vizinhança os conjuntos:

a)  $]2, 32; 2, 48[$

b)  $\{x \in \mathbb{R} : |x + 3| < 0,001\}$

**Exercício 1.6.4** Considere a sucessão  $u_n = \frac{2+3n}{2n+3}$ . Prove que a partir de  $u_{11}$  (exclusive) todos os termos verificam

$$u_n \in V_{0,1}\left(\frac{3}{2}\right).$$

Interprete graficamente.

## 1.7 Sucessões convergentes. Propriedades

**Definição 1.7.1** A sucessão  $u_n$  converge para um valor  $a \in \mathbb{R}$  se, para qualquer valor positivo  $\delta$ , existe uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão pertencem a  $V_\delta(a)$ .

Simbolicamente

$$\lim u_n = a \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists p \in \mathbb{N}: n > p \Rightarrow |u_n - a| < \delta.$$

**Exercício 1.7.2** Provar por definição que

$$\lim \frac{2+3n}{2n+3} = \frac{3}{2}.$$

**Definição 1.7.3** (i) As sucessões que têm por limite um número finito dizem-se convergentes.

(ii) As sucessões que não são convergentes dizem-se divergentes.

(iii) Uma sucessão convergente para 0 diz-se um infinitésimo.

**Definição 1.7.4** (i) Um elemento  $a \in \mathbb{R}$  diz-se um ponto de acumulação do conjunto  $A \subset \mathbb{R}$ , não vazio, se em qualquer vizinhança de  $a$  existe pelo menos um elemento de  $A$  diferente de  $a$ .

Simbolicamente

$a$  é um ponto de acumulação do conjunto  $A$  se  $\forall \delta > 0, (V_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$ .

(ii) Um ponto  $a \in A$  que não seja ponto de acumulação chama-se um ponto isolado.

Isto é,  $a$  é um ponto isolado se  $\exists \delta > 0 : V_\delta(a) \cap A = \{a\}$ .

**Exercício 1.7.5** Indique o conjunto de todos os pontos de acumulação dos conjuntos:

a)  $M = \{-1, 5\} \cup [0, 2]$

b)  $N = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}.$

**Exercício 1.7.6** Prove que um conjunto finito não tem pontos de acumulação.

**Proposição 1.7.7** O elemento  $a \in \mathbb{R}$  é ponto de acumulação de  $A \subset \mathbb{R}$  se, e só se, é limite de uma sucessão de pontos de  $A$  distintos de  $a$ .

**Dem.** ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $a \in \mathbb{R}$  é ponto de acumulação de  $A \subset \mathbb{R}$ .

Então, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existem pontos  $u_n \in V_{\frac{1}{n}}(a) \cap (A \setminus \{a\})$ , ou seja,  $|u_n - a| < \frac{1}{n}$  e  $u_n \rightarrow a$ .



( $\Leftarrow$ ) Seja  $u_n \in A$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , com  $u_n \neq a$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , tal que  $u_n \rightarrow a$ .

Então  $|u_n - a| < \delta$ ,  $\forall \delta > 0$ . Assim  $u_n \in V_\delta(a)$ ,  $\forall \delta > 0$ , pelo que  $a \in \mathbb{R}$  é ponto de acumulação de  $A$ . ■

**Teorema 1.7.8** (*Teorema de Bolzano-Weierstrass*) *Todo o conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  infinito e limitado admite, pelo menos, um ponto de acumulação.*

**Corolário 1.7.9** *Toda a sucessão limitada em  $\mathbb{R}$  admite, pelo menos, uma subsucessão convergente.*

**Dem.** Seja  $U$  o conjunto de termos da sucessão limitada  $u_n$ .

Se  $U$  é finito então existe  $a \in U$  que se repete infinitas vezes e, por consequência, é limite de uma subsucessão constante igual a  $a$ , pelo que é convergente para  $a$ .

Se  $U$  é um conjunto infinito, como é limitado, pelo Teorema 1.7.8, tem pelo menos um ponto de acumulação.

Então, pela Proposição 1.7.7,  $a$  é limite de uma sucessão de pontos de  $U$ . ■

Vejamos algumas propriedades das sucessões convergentes e as suas relações com as sucessões limitadas.

**Teorema 1.7.10** (*Unicidade do limite*) *O limite de uma sucessão convergente, quando existe, é único.*

**Dem.** Suponha-se, com vista a um absurdo, que existe uma sucessão  $u_n$  tal que  $u_n \rightarrow a$  e  $u_n \rightarrow b$  com  $a \neq b$ .

Dado  $\delta > 0$  arbitrário,

$$\begin{aligned} \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 &\implies |u_n - a| < \frac{\delta}{2}, \\ \exists n_1 \in \mathbb{N} : n > n_1 &\implies |u_n - b| < \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Tomando  $p := \max\{n_0, n_1\}$  tem-se que para  $n > p$  são válidas as duas desigualdades anteriores e

$$|a - b| = |a - u_n + u_n - b| \leq |a - u_n| + |u_n - b| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

O que está em contradição com a hipótese de  $a \neq b$ .

Logo  $a = b$ . ■

**Teorema 1.7.11** *Se  $u_n$  é uma sucessão convergente então qualquer das suas subsucessões é convergente para o mesmo limite.*

**Dem.** Seja  $u_n$  uma sucessão tal que  $u_n \rightarrow a$  e  $v_n$  uma subsucessão de  $u_n$ .

Assim os termos de  $v_n$  também são termos de  $u_n$ , pelo que também verificam a proposição

$$\forall \delta > 0 \exists p \in \mathbb{N}: n > p \implies |v_n - a| < \delta,$$

ou seja  $v_n \rightarrow a$ . ■

**Teorema 1.7.12** *Toda a sucessão convergente é limitada.*

**Dem.** Suponhamos  $u_n \rightarrow a$  e fixe-se um valor real  $\delta > 0$ . Então para  $n > p$  tem-se que  $u_n \in ]a - \delta, a + \delta[$ , isto é,  $a - \delta < u_n < a + \delta$ .

Então fora deste intervalo estão um número finito de termos. Concretamente  $u_1, \dots, u_p$

Considere-se

$$M := \max \{|u_1|, \dots, |u_p|, |a - \delta|, |a + \delta|\}.$$

Então

$$-M \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N},$$

pelo que  $u_n$  é limitada. ■

**Teorema 1.7.13** *Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.*

**Dem.** Seja  $u_n$  uma sucessão monótona e limitada. Como o conjunto dos termos da sucessão é majorado (e minorado) então existe supremo desse conjunto. Designe-se  $c := \sup \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

Pela definição de supremo,  $c$  é o menor dos majorantes, pelo que, para cada  $\delta > 0$ ,  $c - \delta$  não é majorante. logo existe pelo menos uma ordem  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $c - \delta < u_p$ .

Sendo  $u_n$  uma sucessão monótona ela poderá ser crescente ou decrescente.

Suponhamos que  $u_n$  é crescente.

Assim teremos

$$c - \delta < u_p \leq u_n \text{ para } n \geq p.$$

Como  $c$  é supremo, é maior que todos os termos de  $u_n$  e então

$$c - \delta < u_n < c < c + \delta.$$

Ou seja

$$\forall \delta > 0 \exists p \in \mathbb{N}: n > p \implies c - \delta < u_n < c + \delta,$$

isto é,  $u_n \rightarrow c$ . Então  $u_n$  é uma sucessão convergente (para o supremo do conjunto dos termos da sucessão).

Se  $u_n$  é uma sucessão decrescente a demonstração é semelhante mas utilizando

$$d := \inf \{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

■

## 1.8 Operações algébricas com sucessões

As operações consideradas em  $\mathbb{R}$  estendem-se naturalmente às sucessões reais.

Considerem-se duas sucessões  $u_n$  e  $v_n$ .

Define-se soma de  $u_n$  e  $v_n$  à sucessão que se obtém adicionando os termos da mesma ordem das duas sucessões e cujo termo geral se obtém como  $(u + v)_n$ .

Isto é,  $(u + v)_n = u_n + v_n$

De modo análogo se define a diferença, o produto e o cociente de  $u_n$  e  $v_n$ , admitindo-se este último apenas na condição de  $v_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Em resumo,

$$\begin{aligned} (u - v)_n &= u_n - v_n \\ (u \times v)_n &= u_n \times v_n \\ \left(\frac{u}{v}\right)_n &= \frac{u_n}{v_n}, \quad v_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

As definições de soma e produto estendem-se de forma óbvia a casos em que se adicione ou multiplique um número finito de sucessões.

Os próximos teoremas jogam com a noção de limite e a relação de ordem no conjunto dos reais.

**Teorema 1.8.1** (*Passagem ao limite numa desigualdade*) *Sejam  $u_n$  e  $v_n$  duas sucessões convergentes.*

*Se a partir de certa ordem se verifica  $u_n \leq v_n$  então*

$$\lim u_n \leq \lim v_n.$$

**Dem.** Considerem-se duas sucessões convergentes  $u_n$  e  $v_n$  tais que  $u_n \rightarrow a$  e  $v_n \rightarrow b$ . Assim

$$\begin{aligned}\forall \delta > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: n > n_0 \implies |u_n - a| < \delta, \\ \forall \delta > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N}: n > n_1 \implies |v_n - b| < \delta\end{aligned}$$

e seja  $n_1$  a ordem a partir da qual se verifica  $u_n \leq v_n$ .

Suponha-se, com vista a uma contradição, que  $a > b$  e considere-se  $\delta := \frac{a-b}{2}$  ( $> 0$  porque  $a > b$ ).

Seja  $p := \max\{n_0, n_1, n_2\}$ . Então para  $n \geq p$  tem-se

$$v_n - b < \delta = \frac{a-b}{2}, \quad -\delta < u_n - a$$

e

$$v_n < b + \frac{a-b}{2} = a - \frac{a-b}{2} < u_n.$$

Ora esta desigualdade contradiz o facto de a partir da ordem  $p$  se tem  $u_n \leq v_n$ .

Logo  $a \leq b$ , isto é,  $\lim u_n \leq \lim v_n$ . ■

**Corolário 1.8.2** *Se a partir de certa ordem a sucessão convergente  $v_n$  verifica  $v_n \geq 0$ , então*

$$\lim v_n \geq 0.$$

**Dem.** Basta fazer na demonstração anterior  $u_n \equiv 0$ . ■

**Teorema 1.8.3** *O produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo.*

*Isto é, se  $u_n$  é uma sucessão limitada e  $v_n$  um infinitésimo, então*

$$\lim (u_n \times v_n) = 0.$$

**Dem.** Seja  $u_n$  uma sucessão limitada e  $v_n$  um infinitésimo.

Então

$$\exists L > 0 : |u_n| \leq L, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e como  $v_n \rightarrow 0$  então

$$\forall \delta > 0 \exists p \in \mathbb{N}: n > p \implies |v_n| < \frac{\delta}{L}.$$

Assim, para  $n > p$ ,

$$|v_n \times u_n - 0| = |v_n| \times |u_n| \leq |v_n| \times L \leq \frac{\delta}{L} \times L = \delta.$$

Então  $(v_n \times u_n) \rightarrow 0$ , isto é,  $(v_n \times u_n)$  é um infinitésimo. ■

## 1.9 Propriedades algébricas dos limites

Os teoremas que se seguem relacionam as propriedades algébricas fundamentais com as noções de convergência e limite.

**Teorema 1.9.1** *Sejam  $u_n$  e  $v_n$  duas sucessões convergentes.*

1.  $(u + v)_n$  é uma sucessão convergente e  $\lim (u + v)_n = \lim u_n + \lim v_n$ .
2.  $(u \times v)_n$  é uma sucessão convergente e  $\lim (u \times v)_n = \lim u_n \times \lim v_n$ .
3.  $(k \times u)_n$  é uma sucessão convergente e  $\lim (k \times u)_n = k \times \lim u_n$ .
4.  $\left(\frac{u}{v}\right)_n$  é uma sucessão convergente desde que  $v_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , e  $\lim \left(\frac{u}{v}\right)_n = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$ , se  $\lim v_n \neq 0$ .
5.  $(u_n)^p, p \in \mathbb{Z}$ , é uma sucessão convergente (com  $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , se  $p < 0$ ) e  $\lim (u_n)^p = (\lim u_n)^p$ .
6.  $\sqrt[p]{u_n}$  é uma sucessão convergente, se  $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , e  $\lim \sqrt[p]{u_n} = \sqrt[p]{\lim u_n}$ .

Se  $p$  for ímpar e  $u_n < 0$  a propriedade permanece válida.

**Dem.** Sejam  $u_n$  e  $v_n$  duas sucessões convergentes tais que  $u_n \rightarrow a$  e  $v_n \rightarrow b$ . Ou seja

$$\begin{aligned} \forall \delta > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: n > n_0 \implies |u_n - a| < \frac{\delta}{2}, \\ \forall \delta > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N}: n > n_1 \implies |v_n - b| < \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

1. Considerando  $p := \max\{n_0, n_1\}$ , tem-se que para  $n \geq p$  são válidas as duas proposições e

$$\begin{aligned} |(u_n + v_n) - (a + b)| &= |(u_n - a) + (v_n - b)| \\ &\leq |u_n - a| + |v_n - b| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned}$$

Então  $\lim (u_n + v_n) = a + b = \lim u_n + \lim v_n$ .

2. Note-se que

$$\begin{aligned} (u_n \times v_n) - (a \times b) &= u_n v_n - u_n b + u_n b - ab \\ &= u_n (v_n - b) + (u_n - a) b, \end{aligned}$$

$u_n$  é uma sucessão limitada (pois é convergente),  $v_n - b$  e  $u_n - a$  são infinitésimos.

Então

$$\lim (u_n v_n - ab) = \lim [u_n (v_n - b)] + \lim [(u_n - a) b] = 0.$$

**3.** É um caso particular de 2. com  $v_n \equiv k$  ( $k \in \mathbb{R}$ ).

**4.** Como  $v_n \rightarrow b \neq 0$ , por 2., tem-se que  $v_n b \rightarrow b^2 > 0$ , ou seja  $-\delta < v_n b - b^2 < \delta$ .

Escolha-se  $\delta > 0$  suficientemente pequeno tal que existe  $p \in \mathbb{N}$  em que para  $n \geq p$  se tem  $v_n b > b^2 - \delta > 0$ .

Assim, considerando apenas os termos cuja ordem é maior que  $p$  (os que não forem são em número finito), obtem-se

$$0 < \frac{1}{v_n b} < \frac{1}{b^2 - \delta},$$

pelo que a sucessão (ou subsucessão se for necessário)  $\frac{1}{v_n b}$  é limitada.

Note-se que se tem:

$$\cdot \frac{u_n}{v_n} - \frac{a}{b} = \frac{u_n b - a v_n}{v_n b} = (u_n b - a v_n) \frac{1}{v_n b}.$$

$$\cdot \lim (u_n b - a v_n) = \lim (u_n b) + \lim (-a v_n) = ab - ab = 0.$$

Então

$$\lim \left( \frac{u_n}{v_n} - \frac{a}{b} \right) = \lim (u_n b - a v_n) \frac{1}{v_n b} = 0,$$

pelo que  $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$ .

**5.** Se  $p = 0$ ,  $(u_n)^p \equiv 1$  e  $\lim (u_n)^p = \lim 1 = 1 = (\lim u_n)^p$ .

Se  $p \in \mathbb{N}$ , demonstra-se por indução.

Para  $p = 1$  a proposição é verdade.

Para provar a tese,

$$\begin{aligned} \lim (u_n)^{k+1} &= \lim \left[ (u_n)^k u_n \right] = \lim \left[ (u_n)^k \right] \lim u_n \\ &= (\lim u_n)^k \lim u_n = (\lim u_n)^{k+1}. \end{aligned}$$

Se  $p \in \mathbb{Z}^-$  coloca-se  $p = -k$ , com  $k \in \mathbb{N}$  e para  $u_n \neq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$\lim (u_n)^{-k} = \lim \left( \frac{1}{(u_n)^k} \right) = \frac{1}{\lim (u_n)^k} = \frac{1}{(\lim u_n)^k} = (\lim u_n)^{-k}.$$

**6.** Provar primeiro por indução em  $p$ , que a relação

$$u^p - v^p = (u - v) (u^{p-1} + u^{p-2}v + u^{p-3}v^2 + \dots + uv^{p-2} + v^{p-1})$$

é válida para quaisquer  $u, v \in \mathbb{R}$ .

Para  $n = 1$ ,  $u - v = u - v$ , verdade.

Para  $p = k + 1$ ,

$$\begin{aligned} u^{k+1} - v^{k+1} &= (u^{k+1} - uv^k) + (uv^k - v^{k+1}) = u(u^k - v^k) + v^k(u - v) \\ &= u(u - v)(u^{k-1} + u^{k-2}v + u^{k-3}v^2 + \dots + uv^{p-2} + v^{p-1}) + v^k(u - v) \\ &= (u - v)(u^k + u^{k-1}v + u^{k-2}v^2 + \dots + u^2v^{p-2} + uv^{p-1} + v^k). \end{aligned}$$

Considere-se  $a > 0$ . Substituindo na igualdade anterior  $u = \sqrt[p]{u_n}$  e  $v = \sqrt[p]{a}$ , obtem-se

$$(\sqrt[p]{u_n})^p - (\sqrt[p]{a})^p = (\sqrt[p]{u_n} - \sqrt[p]{a}) \left[ (\sqrt[p]{u_n})^{p-1} + \dots + (\sqrt[p]{u_n})(\sqrt[p]{a})^{p-2} + (\sqrt[p]{a})^{p-1} \right]$$

e

$$\sqrt[p]{u_n} - \sqrt[p]{a} = \frac{u_n - a}{(\sqrt[p]{u_n})^{p-1} + \dots + (\sqrt[p]{u_n})(\sqrt[p]{a})^{p-2} + (\sqrt[p]{a})^{p-1}}.$$

Assim

$$|\sqrt[p]{u_n} - \sqrt[p]{a}| = \frac{|u_n - a|}{|(\sqrt[p]{u_n})^{p-1} + \dots + (\sqrt[p]{u_n})(\sqrt[p]{a})^{p-2} + (\sqrt[p]{a})^{p-1}|} \leq \frac{|u_n - a|}{(\sqrt[p]{a})^{p-1}},$$

pois as parcelas do denominador da fracção do 2º membro são todas positivas e então

$$(\sqrt[p]{u_n})^{p-1} + \dots + (\sqrt[p]{a})^{p-1} \geq (\sqrt[p]{a})^{p-1}.$$

Como  $u_n \rightarrow a$ , tem-se

$$\forall \delta > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: n > n_0 \implies |u_n - a| < \delta (\sqrt[p]{a})^{p-1}$$

e obtem-se

$$|\sqrt[p]{u_n} - \sqrt[p]{a}| \leq \frac{|u_n - a|}{(\sqrt[p]{a})^{p-1}} < \frac{\delta (\sqrt[p]{a})^{p-1}}{(\sqrt[p]{a})^{p-1}} = \delta.$$

Se  $a = 0$  então  $\lim u_n = 0$  e neste caso considera-se, na definição de limite  $|u_n| < \delta^p$  e  $u_n < \delta^p$ , pois  $u_n \geq 0$ .

Então obtem-se

$$|\sqrt[p]{u_n} - \sqrt[p]{a}| = |\sqrt[p]{u_n}| = \sqrt[p]{u_n} \leq \sqrt[p]{\delta^p} = \delta.$$

■

**Teorema 1.9.2** *Se  $u_n$  é uma sucessão convergente então*

$$\lim |u_n| = |\lim u_n|.$$

**Dem.** Seja  $u_n \rightarrow a$ , isto é,

$$\forall \delta > 0 \exists p \in \mathbb{N}: n > p \implies |u_n - a| < \delta.$$

Como  $||u_n| - |a|| \leq |u_n - a| < \delta$  o que é equivalente a  $|u_n| \rightarrow |a|$ , isto é,  $\lim |u_n| = |\lim u_n|$ . ■

O próximo teorema é útil para o cálculo de limites de sucessões cujos termos gerais incluam somatórios ou frações com razões trigonométricas, entre outras situações.

**Teorema 1.9.3** *(Teorema das sucessões encastradas) Sejam  $u_n$ ,  $v_n$  e  $w_n$  sucessões convergentes tais que:*

a)  $\lim u_n = \lim v_n = a$  ( $a \in \mathbb{R}$ )

b) a partir de uma certa ordem se tem  $u_n \leq w_n \leq v_n$ .

Então  $\lim w_n = a$ .

**Dem.** Considerem-se duas sucessões  $u_n$  e  $v_n$  convergentes para  $a \in \mathbb{R}$ . Então

$$\forall \delta > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: n > n_0 \implies a - \delta < u_n < \delta + a$$

e

$$\forall \delta > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N}: n > n_1 \implies a - \delta < v_n < \delta + a.$$

Seja  $n_2$  a ordem a partir da qual se tem  $u_n \leq w_n \leq v_n$  e defina-se  $p := \max \{n_0, n_1, n_2\}$ . Então para  $n > p$  obtem-se

$$a - \delta < u_n \leq w_n \leq v_n < \delta + a,$$

ou seja  $a - \delta < w_n < \delta + a$ , pelo que  $\lim w_n = a$ . ■

**Exercício 1.9.4** *Calcule o limite de cada uma das sucessões:*

a)  $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{2n + \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{1 + 3n^2}$

b)  $w_n = \sum_{k=0}^n \frac{n}{2k + n^2}$



## 1.10 Sucessão de Cauchy

Com o objectivo de obter um critério de convergência, introduz-se a noção de sucessão de Cauchy.

Intuitivamente, se  $u_n \rightarrow a$ , desde que  $n$  seja suficientemente grande, todos os termos de  $u_n$  estarão arbitrariamente próximos de  $a$  e, portanto próximos uns dos outros.

**Definição 1.10.1** *Uma sucessão  $u_n$  em  $\mathbb{R}$  diz-se uma sucessão de Cauchy se para cada  $\delta > 0$  existe uma prdem  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $|u_m - u_n| < \delta$ , para quaisquer  $m, n \geq p$ .*

**Observação 1.10.2** *Considerando em particular  $m = n + k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , pode obter-se uma definição equivalente:  
 $u_n$  é uma sucessão de Cauchy se*

$$\forall \delta > 0 \exists p \in \mathbb{N}: n \geq p \implies |u_{n+k} - u_n| < \delta, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Desta última definição resulta:

**Proposição 1.10.3** *Se  $u_n$  é uma sucessão de Cauchy em  $\mathbb{R}$ , então para qualquer  $k \in \mathbb{N}$  tem-se*

$$u_{n+k} - u_n \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

A condição recíproca não é válida, como se pode ver no exercício seguinte:

**Exercício 1.10.4** *(Contra-exemplo) Prove que para cada  $k \in \mathbb{N}$  a sucessão*

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

*verifica*

$$S_{n+k} - S_n \rightarrow 0$$

*e no entanto  $S_n$  não é uma sucessão de Cauchy.*

O próximo resultado fornece um critério de convergência para sucessões de que não se conhece o limite:

**Teorema 1.10.5** *(Princípio de Cauchy-Bolzano) A condição necessária e suficiente para que uma sucessão  $u_n$  em  $\mathbb{R}$  seja convergente é que  $u_n$  seja uma sucessão de Cauchy.*

*Simbolicamente, em  $\mathbb{R}$ ,  $u_n$  é convergente se e só se*

$$\forall \delta > 0 \exists p \in \mathbb{N}: \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq p \implies |u_{n+k} - u_n| < \delta.$$

**Dem.** ( $\implies$ ) Suponhamos que a sucessão  $u_n$  é convergente para  $a \in \mathbb{R}$ . Então

$$\forall \delta > 0 \exists p \in \mathbb{N}: n > p \implies |u_n - a| < \frac{\delta}{2}.$$

Assim, para  $\forall m \geq p, \forall n \geq p$ ,

$$|u_m - u_n| = |u_m - a + a - u_n| \leq |u_m - a| + |a - u_n| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Logo  $u_n$  é uma sucessão de Cauchy.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $u_n$  uma sucessão de Cauchy.

Passo1: Provar que toda a sucessão de Cauchy em  $\mathbb{R}$  é limitada.

Considere-se na definição  $\delta = 1$ . Assim, em particular, existe  $p \in \mathbb{N}$ , tal que  $|u_m - u_n| < 1$ , para quaisquer  $m, n \geq p$

Então, em particular, a desigualdade é válida para  $m = p$ , isto é,

$$|u_n - u_p| < 1 \iff u_n \in ]u_p - 1, u_p + 1[, \text{ para } n \geq p$$

Portanto, fora deste intervalo, estão um número finito de termos da sucessão e o conjunto desses termos é limitado.

Logo a sucessão de Cauchy  $u_n$  é limitada.

Passo2: Provar que se  $u_n$  é uma sucessão de Cauchy e  $u_n$  tem uma subsucessão convergente, então  $u_n$  é convergente em  $\mathbb{R}$ .

Seja  $u_k$  uma subsucessão de  $u_n$  convergente para  $a \in \mathbb{R}$ .

Fixando  $\delta > 0$ ,  $\exists q \in \mathbb{N}$ :  $|u_k - a| < \frac{\delta}{2}$  para  $k \geq q$ .

Como  $u_n$  é uma sucessão de Cauchy,

$$\exists p \in \mathbb{N}: |u_m - u_k| < \frac{\delta}{2}, \forall m, k \geq p.$$

Defina-se  $r := \max\{q, p\}$ . Então para  $k \geq r$  verificam-se simultaneamente as desigualdades

$$|u_k - a| < \frac{\delta}{2} \text{ e } |u_m - u_k| < \frac{\delta}{2}, \text{ para } m \geq r.$$

Assim, para  $m \geq r$ ,

$$|u_m - a| = |u_m - u_k + u_k - a| \leq |u_m - u_k| + |u_k - a| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Ou seja,  $u_m \rightarrow a$ , quando  $m \rightarrow +\infty$ .

Então, pelo Passo1,  $u_n$  é uma sucessão limitada e pelo Corolário 1.7.9,  $u_n$  possui uma subsucessão convergente. Logo, pelo Passo 2,  $u_n$  é convergente.

■

## 1.11 A recta acabada. Infinitamente grandes

Se à recta real juntarmos "dois novos elementos",  $+\infty$  e  $-\infty$ , obtem-se a recta acabada, que se representa por  $\overline{\mathbb{R}}$  ou  $[-\infty, +\infty]$ .

$\overline{\mathbb{R}}$  pode considerar-se como um conjunto limitado superiormente por  $+\infty$  e inferiormente por  $-\infty$ . Assim qualquer subconjunto de  $\overline{\mathbb{R}}$  é limitado.

Como estender a noção de limite a  $\overline{\mathbb{R}}$  ?

**Definição 1.11.1** *Uma sucessão  $u_n$  diz-se um infinitamente grande positivo e escreve-se*

$$u_n \rightarrow +\infty \quad \text{ou} \quad \lim u_n = +\infty,$$

*se, a partir de uma certa ordem,  $u_n$  for superior a qualquer número positivo previamente fixo.*

*Simbolicamente*

$$u_n \rightarrow +\infty \iff \forall L > 0 \exists p \in \mathbb{N}: n > p \implies u_n > L.$$

**Exercício 1.11.2** *Prove que a sucessão  $u_n = 5n + 1$  é um infinitamente grande positivo.*

**Definição 1.11.3** *a) A sucessão  $u_n$  é um infinitamente grande negativo, isto é,*

$$u_n \rightarrow -\infty \quad \text{ou} \quad \lim u_n = -\infty,$$

*se, a partir de uma certa ordem,  $u_n$  for inferior a qualquer número negativo fixado.*

*Simbolicamente*

$$u_n \rightarrow -\infty \iff \forall L > 0 \exists p \in \mathbb{N}: n > p \implies u_n < -L.$$

*b)  $u_n$  é um infinitamente grande em módulo quando*

$$|u_n| \rightarrow +\infty.$$

A unicidade do limite permanece válida para sucessões na recta acabada.

Contudo uma sucessão  $u_n$  pode não ter limite em  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Exercício 1.11.4** *Mostre que  $u_n = (-1)^n (n + 2)$  não tem limite em  $\overline{\mathbb{R}}$  mas é um infinitamente grande em módulo.*

Classificação das sucessões quanto à existência e natureza do limite:

$$\begin{array}{l} \text{convergentes (têm limite em } \mathbb{R}) \\ \\ \text{divergentes} \\ \text{(não convergentes)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{propriamente divergentes} \\ \text{(limite } \pm \infty) \\ \\ \text{oscilantes} \\ \text{(não têm limite em } \overline{\mathbb{R}}) \end{array} \right.$$

## 1.12 Operações com limites em $\overline{\mathbb{R}}$ . Indeterminações

Algumas operações algébricas com limites permanecem válidas em  $\overline{\mathbb{R}}$ . Outras há que levantam dificuldades.

O próximo teorema reúne as principais propriedades utilizadas com limites infinitos.

**Teorema 1.12.1** *Sejam  $u_n$  e  $v_n$  duas sucessões reais.*

1) *Se  $u_n$  é um infinitamente grande positivo ou negativo então é um infinitamente grande em módulo. Isto é,*

$$\text{se } u_n \rightarrow \pm\infty \text{ então } |u_n| \rightarrow +\infty.$$

2) *O inverso de um infinitésimo é um infinitamente grande, i.e.,*

$$\text{se } u_n \rightarrow 0 \text{ então } \frac{1}{u_n} \rightarrow \infty.$$

3) *O inverso de um infinitamente grande é um infinitésimo, i.e.,*

$$\text{se } u_n \rightarrow \infty \text{ então } \frac{1}{u_n} \rightarrow 0.$$

4) *Se  $u_n$  é um infinitamente grande positivo e, a partir de uma certa ordem,  $u_n \leq v_n$  então  $v_n$  também é um infinitamente grande positivo, i.e.,*

$$\text{se } u_n \rightarrow +\infty \text{ e } u_n \leq v_n \text{ para } n \geq p, \text{ então } v_n \rightarrow +\infty.$$

- 5) Se  $u_n \rightarrow +\infty$  e  $v_n$  é limitada inferiormente então  $u_n + v_n \rightarrow +\infty$ .  
 6) Se  $u_n \rightarrow -\infty$  e  $v_n$  é limitada superiormente então  $u_n + v_n \rightarrow -\infty$ .  
 7) Se  $u_n \rightarrow \pm\infty$  e  $v_n$  é limitada então  $u_n + v_n \rightarrow \pm\infty$ .  
 8) Se  $u_n \rightarrow \infty$  e existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que o conjunto  $\{v_n \in \mathbb{R} : n \geq p\}$  tem um minorante positivo ou um majorante negativo então  $u_n \times v_n \rightarrow \infty$ .

**Dem.** 1) Se  $u_n \rightarrow +\infty$  então  $u_n > L$ ,  $n \geq p$ ,  $\forall L > 0$  e  $|u_n| \geq u_n > L$ , isto é,  $|u_n| \rightarrow +\infty$ .

Se  $u_n \rightarrow -\infty$  então  $-u_n \rightarrow +\infty$  e, pelo passo anterior,  $|-u_n| = |u_n| \rightarrow +\infty$ .

2) Se  $u_n \rightarrow 0$  então

$$\forall L > 0 \exists p \in \mathbb{N}: n > p \implies |u_n| < \frac{1}{L}.$$

Assim  $\frac{1}{|u_n|} > L$ , para  $n > p$ , pelo que, por definição,  $\frac{1}{|u_n|} \rightarrow +\infty$  e  $\frac{1}{u_n} \rightarrow \infty$ .

3) Se  $u_n \rightarrow \infty$ ,  $|u_n| \rightarrow +\infty$  e

$$\forall \delta > 0 \exists p \in \mathbb{N}: n > p \implies |u_n| > \frac{1}{\delta}.$$

Então  $\frac{1}{|u_n|} = \left| \frac{1}{u_n} \right| < \delta$ , para  $n > p$ , pelo que, por definição,  $\frac{1}{u_n} \rightarrow 0$ .

4) Se  $u_n \rightarrow +\infty$  então

$$u_n > L, \text{ para } L > 0 \text{ e } n \geq p.$$

Se para  $n \geq p$  se tem  $v_n \geq u_n$  então

$$v_n \geq u_n > L.$$

Por definição,  $v_n \rightarrow +\infty$ .

5) Como  $v_n$  é limitada inferiormente, para qualquer  $L > 0$  existe  $k$  tal que  $k \leq v_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , e  $k < L$ .

De  $u_n \rightarrow +\infty$  tem-se que  $u_n > L$ ,  $\forall L > 0$ , pelo que  $u_n > L - k$ , para  $n \geq p$ . Então

$$u_n + v_n > L - k + k = L$$

e, por definição,  $u_n + v_n \rightarrow +\infty$ .

6) Análogo à alínea anterior.

7) Se  $v_n$  é limitada então existe  $K > 0$  tal que  $|v_n| \leq K$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .  
Como  $u_n \rightarrow \infty$  então  $|u_n| \rightarrow +\infty$  e, por definição,

$$\forall L > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: n > n_0 \implies |u_n| > L - K.$$

Assim, a partir de uma certa ordem  $n_1$ ,

$$|u_n + v_n| = |u_n - (-v_n)| \geq ||u_n| - |v_n|| = |u_n| - |v_n|.$$

Definindo  $p := \max \{n_0, n_1\}$  tem-se que

$$|u_n + v_n| \geq |u_n| - |v_n| \geq L - K + K = L$$

é válido para  $n \geq p$ ,  $\forall L > 0$ .

Isto significa que  $|u_n + v_n| \rightarrow +\infty$ , ou seja,  $u_n + v_n \rightarrow \infty$ .

8) Suponhamos que  $v_n$  tem um minorante positivo a partir de uma certa ordem  $n_0$ . Ou seja,

$$\exists k > 0 : v_n \geq k, \text{ para } n \geq n_0.$$

Como  $u_n \rightarrow \infty$ , isto é,  $|u_n| \rightarrow +\infty$ , então  $|u_n| > \frac{L}{k}$ , para  $n \geq n_1$ .

Assim

$$|u_n \times v_n| = |u_n| \times |v_n| > \frac{L}{k} \cdot k = L, \text{ para } n \geq p := \max \{n_0, n_1\}.$$

Se supusermos que  $v_n$  tem um majorante negativo, então

$$\exists k > 0 : v_n \leq -k < 0, \text{ a partir de uma certa ordem,}$$

ou seja,  $|v_n| \geq k > 0$  e o processo segue de modo análogo. ■

O teorema anterior contorna algumas dificuldades que surgem nas operações algébricas dos limites em  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Por exemplo:

- 2) não dá informação sobre o valor de  $\frac{0}{0}$ .
- 3) não dá informação sobre o valor de  $\frac{\infty}{\infty}$ .
- 5),6) e 7) não dão informação sobre o valor de  $+\infty - \infty$ .
- 8) não dá informação sobre o valor de  $\infty \times 0$ .

Nas sucessões em cujas operações surjam estes casos de indeterminação, para os quais não há teoremas gerais que garantam à partida o seu resultado, é necessário fazer um estudo caso a caso, de modo a conseguir levantar a indeterminação.

**Exercício 1.12.2** *Calcule, caso existam:*

a)  $\lim \frac{3n^2+1-2n}{1-n^3}$

b)  $\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

c)  $\lim (3 + 2n^2 + 5n^4)$

## 1.13 Sucessão exponencial

O comportamento, a existência e a natureza do limite da sucessão exponencial  $a^n$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) depende do valor da base.

Casos possíveis:

- Se  $a = 0$  ou  $a = 1$  a sucessão é constante. Logo é convergente para 0 ou para 1, respectivamente.
- Se  $a > 1$  a sucessão é monótona crescente.  
Escrevendo  $a = 1 + h$ ,  $h > 0$ , resulta pela Prop. 1.5.1 que

$$a^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como a sucessão  $1 + nh \rightarrow +\infty$ , então, pelo Teorema 1.12.1,  $a^n \rightarrow +\infty$ .

- Se  $0 < a < 1$  a sucessão é monótona decrescente e  $a^n \rightarrow 0$ . (Provar)
- Se  $-1 < a < 0$  a sucessão não é monótona e  $a^n \rightarrow 0$ . (Provar)
- Se  $a \leq -1$  a sucessão toma alternadamente termos positivos e negativos pelo que não é monótona e  $a^n$  não tem limite

**Exercício 1.13.1** *Calcular:*

a)  $\lim \frac{2^{n+1} + 3^n}{2^n + 3^{n+1}};$       b)  $\lim \frac{2^{n+1} + 3^n}{2^n + 5^{n+1}}.$

## 1.14 Sucessão do tipo potência-exponencial

O limite da sucessão de termo geral  $(1 + \frac{1}{n})^n$  tem um papel importante na Análise Matemática.

**Exercício 1.14.1** *Prove que a sucessão*

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- a) *É monótona crescente*  
 b) *É limitada*  
 c) *É convergente.*

Pelo exercício anterior prova-se que o seu limite será um número entre 2 e 3.

Convencionou-se que

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \simeq 2,71828\dots$$

**Teorema 1.14.2** *Se a sucessão  $u_n \rightarrow \infty$  então*

$$\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{u_n} \rightarrow e.$$

**Dem.** Suponhamos que  $u_n \rightarrow +\infty$ . Então existe uma ordem  $p$  tal que  $u_n > L$ ,  $\forall L > 0$ .

Represente-se por  $k_n$  o menor número inteiro que verifique

$$k_n \leq u_n < k_n + 1, \text{ para } n > p. \quad (1.14.1)$$

Então

$$\frac{1}{k_n + 1} < \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{k_n}$$

e

$$1 + \frac{1}{k_n + 1} < 1 + \frac{1}{u_n} \leq 1 + \frac{1}{k_n}.$$

Por (1.14.1) e como as bases são maiores que 1, a sucessão fica crescente, e

$$\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} < \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{u_n} \leq \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n + 1}.$$

Como

$$\lim \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} = \lim \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n + 1} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{-1} = e \cdot 1 = e$$

e

$$\lim \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n + 1} = \lim \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right) = e$$



então pelo Teorema 1.9.3, quando  $u_n \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{u_n} = e.$$

Suponha-se agora que  $u_n \rightarrow -\infty$ . Então, definindo  $v_n = -u_n$ , tem-se  $v_n \rightarrow +\infty$  e

$$\begin{aligned} \lim \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{u_n} &= \lim \left(1 - \frac{1}{v_n}\right)^{-v_n} = \lim \left(\frac{v_n - 1}{v_n}\right)^{-v_n} \\ &= \lim \left(\frac{v_n}{v_n - 1}\right)^{v_n} = \lim \left(1 + \frac{1}{v_n - 1}\right)^{v_n} \\ &= \lim \left(1 + \frac{1}{v_n - 1}\right)^{v_n - 1} \left(1 + \frac{1}{v_n - 1}\right) = e \cdot 1 = e, \end{aligned}$$

porque  $v_n - 1 \rightarrow +\infty$ . ■

**Teorema 1.14.3** Para  $x \in \mathbb{R}$  e  $u_n \rightarrow +\infty$  tem-se que

$$\lim \left(1 + \frac{x}{u_n}\right)^{u_n} \rightarrow e^x.$$

**Dem.** Se  $x = 0$ ,  $\lim \left(1 + \frac{0}{u_n}\right)^{u_n} = \lim 1^{u_n} = \lim 1 = 1 = e^0$ .

Se  $x \neq 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} \lim \left(1 + \frac{x}{u_n}\right)^{u_n} &= \lim \left(1 + \frac{1}{\frac{u_n}{x}}\right)^{u_n} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{u_n}{x}}\right)^{\frac{u_n}{x} n}\right]^x \\ &= \left[\lim \left(1 + \frac{1}{\frac{u_n}{x}}\right)^{\frac{u_n}{x} n}\right]^x = (e^1)^x = e^x, \end{aligned}$$

quer se tenha  $\frac{u_n}{x} \rightarrow +\infty$  ou  $\frac{u_n}{x} \rightarrow -\infty$ , pelo Teorema 1.14.2. ■

Os principais resultados para sucessões do tipo potência-exponencial (isto é da forma  $u_n^{v_n}$ ) nos casos em que quer a base quer o expoente sejam sucessões com limite em  $\overline{\mathbb{R}}$ , podem ser resumidos no seguinte teorema:

**Teorema 1.14.4** Sejam  $u_n > 0$  e  $v_n$  duas sucessões com limite em  $\overline{\mathbb{R}}$ . Supondo que não se verificam as hipóteses:

- (i)  $\lim u_n = \lim v_n = 0$ ;
- (ii)  $\lim u_n = +\infty$  e  $\lim v_n = 0$ ;
- (iii)  $\lim u_n = 1$  e  $\lim v_n = +\infty$ ;

(iv)  $\lim u_n = 1$  e  $\lim v_n = -\infty$ ;

então

$$\lim (u_n)^{v_n} = (\lim u_n)^{v_n}.$$

**Exercício 1.14.5** *Calcular:*

$$a) \lim \sqrt[n]{\frac{n^2 + n - 1}{n^2 + 3}}; \quad b) \lim \left( \frac{n^2 + 3n - 1}{n^2 + 3} \right)^{n-1}.$$

## Capítulo 2

# Séries de Números Reais

No Capítulo anterior a adição ficou perfeitamente definida para um número finito de parcelas.

Pretende-se generalizar o conceito de adição por forma a dar significado à adição de infinitas parcelas e de modo a conservar tanto quanto possível as principais propriedades da adição.

Seria lógico esperar que a soma de infinitas parcelas positivas não desse um número finito. Mas tal facto contradiz alguns fenómenos observáveis no quotidiano. Exemplo:

Paradoxo de Zenão: Um corredor desloca-se do ponto A para a meta B a uma velocidade constante.

Seja  $A_1$  o ponto médio de  $[AB]$ ,  $A_2$  o ponto médio de  $[A_1B]$ , e assim sucessivamente, designado por  $A_{n+1}$  o ponto médio de  $[A_nB]$ .

Se o tempo gasto para percorrer  $\overline{AA_1}$  for designado por  $t$ , será  $\frac{t}{2}$  o tempo gasto de  $A_1$  a  $A_2$ ,  $\frac{t}{2^2}$  de  $A_2$  a  $A_3$ , ...

O tempo total  $T$ , necessário para completar a corrida será a "soma" de uma infinidade de tempos parciais todos positivos:

$$T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{2^2} + \dots + \frac{t}{2^n} + \dots$$

Se pela "lógica" o tempo total fosse infinito o corredor nunca chegaria à meta. Tal estava em contradição com o "observável" e com a "dedução" de o tempo total  $T$  ser o dobro do que o corredor gastava na primeira metade.

Só passado cerca de 2000 anos este facto foi explicado com recurso à teoria das séries.

## 2.1 Definição e generalidades

Seja  $a_n$  uma sucessão de números reais.

A esta sucessão pode associar-se uma outra sucessão

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

a que chamamos sucessão das somas parciais de  $a_n$ .

**Definição 2.1.1** (i) Chama-se série ao par ordenado  $(a_n, S_n)$  e representa-se por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Aos números  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  chamam-se termos da série e à expressão  $a_n$  o termo geral da série.

(ii) A série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  diz-se convergente se existir em  $\mathbb{R}$  (for finito)  $\lim S_n = S$  e escreve-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S.$$

Ao número real  $S$  chama-se soma da série.

(iii) Se não existir em  $\mathbb{R}$   $\lim S_n$ , série diz-se divergente

**Observação 2.1.2** Por vezes é conveniente utilizar séries do tipo

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n \text{ com } p \in \mathbb{Z},$$

mantendo-se o mesmo tipo de definição.

**Exercício 2.1.3** Estude a natureza das séries:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} n \quad ; \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \quad ; \quad c) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t}{2^n}, \text{ com } t \in \mathbb{R}^+.$$

O estudo das séries é composto por duas vertentes:

- a) determinar a natureza da série (convergente ou divergente);
- b) no caso de convergência, calcular a soma da série.

Esta última questão apresenta bastantes dificuldades, podendo mesmo ser impossível o cálculo exacto da soma das séries (recorrendo à aproximação numérica).

Vejam-se dois exemplos de séries para as quais se torna possível calcular o valor da sua soma, caso sejam convergentes.

## 2.2 Série geométrica

**Definição 2.2.1** Chama-se série geométrica à série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  em que  $a_n$  é uma progressão geométrica.

Como é conhecido a sucessão das somas parciais correspondente é

$$S_n = a_0 \frac{1 - r^n}{1 - r}, \text{ com } r \neq 1.$$

Como

$$\lim S_n = \frac{a_0}{1 - r} \lim (1 - r^n) = \frac{a_0}{1 - r}, \text{ se } |r| < 1,$$

tem-se que:

**Proposição 2.2.2** A série geométrica converge se e só se  $|r| < 1$ . Neste caso

$$S = \frac{a_0}{1 - r}.$$

## 2.3 Série de Mengoli

**Definição 2.3.1** Um série é de Mengoli (também designada por decomponível ou telescópica) se o termo geral  $a_n$  for decomponível numa diferença do tipo

$$a_n = u_n - u_{n+k}.$$

Veja-se a natureza destas séries:

1. Caso de  $k = 1$  :  $a_n = u_n - u_{n+1}$

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 = u_1 - u_2 \\ S_2 &= a_1 + a_2 = u_1 - u_3 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = u_1 - u_4 \\ &\vdots \\ S_n &= u_1 - u_{n+1}. \end{aligned}$$

Assim

$$\lim S_n = \lim (u_1 - u_{n+1}) = u_1 - \lim u_n.$$

**Proposição 2.3.2** A série de Mengoli é convergente se e só seu  $u_n$  é convergente. Em caso afirmativo

$$S = u_1 - \lim u_n.$$

2. Caso de  $k = 2$  :  $a_n = u_n - u_{n+2}$

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 = u_1 - u_3 \\ S_2 &= a_1 + a_2 = u_1 - u_3 + u_2 - u_4 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = u_1 + u_2 - u_4 - u_5 \\ &\vdots \\ S_n &= u_1 + u_2 - u_{n+1} - u_{n+2}. \end{aligned}$$

Logo

$$\lim S_n = \lim (u_1 + u_2 - u_{n+1} - u_{n+2}) = u_1 + u_2 - 2 \lim u_n.$$

**Proposição 2.3.3** *A série de Mengoli é convergente se e só se  $u_n$  é convergente. Em caso afirmativo*

$$S = u_1 + u_2 - 2 \lim u_n.$$

3. Caso geral:  $a_n = u_n - u_{n+k}$

**Proposição 2.3.4** *A série de Mengoli é convergente se e só se  $u_n$  é convergente. Neste caso*

$$S = u_1 + \dots + u_k - k \lim u_n.$$

**Exercício 2.3.5** *Estude a natureza da série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n^2 + 5n + 4}$$

*e calcule a sua soma, se possível.*

O estudo da natureza da série pode ser feito sem recurso à construção explícita da sucessão das somas parciais, recorrendo a testes ou critérios de convergência.

**Teorema 2.3.6** (Condição de convergência de Anastácio da Cunha) *A série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente se e só se a sucessão das somas parciais é uma sucessão de Cauchy, isto é, simbolicamente,*

$$\forall \delta > 0 \exists p \in \mathbb{N}: \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq p \implies |S_{n+k} - S_n| < \delta.$$

**Dem.** A demonstração é uma consequência imediata do Teorema 1.10.5.

■

**Observação 2.3.7** *Depreende-se deste teorema que:*

1. *A natureza de uma série não se altera se lhe suprimirmos um número finito de termos.*
2. *A natureza da série não depende do valor dos seus  $n$  primeiros termos.*

**Corolário 2.3.8** (Condição necessária de convergência) *Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é uma série convergente então  $\lim a_n = 0$ .*

**Dem.** Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  uma série convergente com  $\lim S_n = l$ .

A sucessão das somas parciais é dada por  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  e  $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ , para  $n > 1$ .

Então  $S_n - S_{n-1} = a_n$  e como  $\lim S_n = \lim S_{n-1}$  obtem-se

$$0 = \lim (S_n - S_{n-1}) = \lim a_n.$$

■

**Observação 2.3.9** *A condição  $\lim a_n = 0$  é necessária mas não é suficiente.*

*Um exemplo clássico para este facto é a série harmónica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

*Apesar de  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  a série harmónica é divergente, pois a sucessão das somas parciais  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$  não é uma sucessão de Cauchy (logo não é uma sucessão convergente) uma vez que*

$$\begin{aligned} |S_{2n} - S_n| &= \left| \left( 1 + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right) - \left( 1 + \dots + \frac{1}{n} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \\ &> \frac{1}{n+n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

**Exercício 2.3.10** Prove que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

é divergente.

## 2.4 Propriedades algébricas das séries

Alguns resultados que permitem avaliar a natureza das séries resultam das suas operações algébricas.

**Proposição 2.4.1** (i) Sejam  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  duas séries convergentes de somas  $A$  e  $B$ , respectivamente. Então a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$  é convergente e a soma é  $A + B$ .

(ii) Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é uma série convergente de soma  $A$ , para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ , a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda a_n)$  é convergente para  $\lambda A$ .

**Dem.** (i) Represente-se por  $S'_n$  e  $S''_n$  as sucessões das somas parciais das séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ , respectivamente. Então

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n) = S'_n + S''_n \rightarrow A + B. \end{aligned}$$

Pelo que  $S_n$  é convergente para  $A+B$  e, portanto,  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$  é convergente e tem por soma  $A + B$ .

(ii) Seja  $S_n^*$  a sucessão das somas parciais da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n$  e  $S_n$  a de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$



Então

$$S_n^* = \lambda a_1 + \cdots + \lambda a_n = \lambda(a_1 + \cdots + a_n) = \lambda S_n \rightarrow \lambda A.$$

■

**Observação 2.4.2** Caso ambas as séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  sejam divergentes,

a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$  pode ser convergente ou divergente.

Exemplos:

1. As séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}$  são ambas divergentes e contudo  $\sum_{n=1}^{+\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}] \equiv 0$  é convergente.

2. As séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} 2n$  são ambas divergentes e  $\sum_{n=1}^{+\infty} [n + 2n] = \sum_{n=1}^{+\infty} 3n$  é divergente.

**Observação 2.4.3** Poder-se-ia esperar que sendo  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  conver-

gentes, a série "produto"  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \times b_n)$  também fosse convergente. Contudo tal não se verifica.

Os próximos resultados darão alguma informação sobre os casos em que é possível *a priori* estabelecer a natureza da série "produto".

## 2.5 Séries de termos não negativos

Uma série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  diz-se de termos não negativos se  $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Tendo-se apenas  $a_n \geq 0$ , para  $n \geq p$ , esta série é da mesma natureza que uma série de termos não negativos, pois a natureza da série não depende dos primeiros  $p$  termos.

Neste tipo de séries o estudo da convergência ou divergência torna-se mais simples, uma vez que permite estabelecer vários critérios de convergência.

**Proposição 2.5.1** *Uma série de termos positivos  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente se e só se a sucessão das somas parciais é majorada.*

**Dem.** Observe-se que sendo  $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , então a sucessão das somas parciais  $S_n = a_1 + \dots + a_n$  é crescente.

Portanto  $S_n$  será convergente se e só se for majorada. ■

**Teorema 2.5.2** *(Critério de comparação) Sejam  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  séries de termos não negativos e tais que  $a_n \leq b_n$  para  $n \geq p$ . Então:*

- a) Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é convergente então  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente.
- b) Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente então  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é divergente.

**Dem.** Podemos supor  $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , que não há perda de generalidade (pois a natureza da série não depende dos primeiros  $p$  termos).

Considere-se

$$A_n = a_1 + \dots + a_n \text{ e } B_n = b_1 + \dots + b_n$$

as respectivas sucessões das somas parciais. Então  $A_n \leq B_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

a) Pela Proposição 2.5.1,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ é convergente} \Leftrightarrow B_n \text{ é majorada} \Leftrightarrow B_n \leq B \text{ } (B \in \mathbb{R}^+).$$

Assim, como  $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , então  $A_n \leq B_n \leq B$  e  $A_n$  é majorada  $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente.

b) Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente então  $A_n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow A_n \geq A \text{ } (\forall A \in \mathbb{R})$ .

Então  $A \leq A_n \leq B_n$  e  $B_n \rightarrow +\infty$  porque  $B_n \geq A \text{ } (\forall A \in \mathbb{R})$ , pelo que

$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é divergente. ■

**Exemplo 2.5.3** 1. (*Séries de Dirichlet*) Se  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \leq 1$  então a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ é divergente.}$$

Como a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  é divergente, pelo critério de comparação (b),  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  é divergente para  $\alpha \leq 1$ .

2. A série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  é convergente, porque  $n^2 \geq n^2 - 1$ ,  $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2 - 1}$  ( $n > 1$ ).

Como a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$  é uma série de Mengoli convergente, então pelo critério de comparação (a),  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  é convergente.

3. Para  $\alpha \geq 2$  a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  é convergente, pois  $n^\alpha \geq n^2$ ,  $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$ .

Como  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  é convergente, então pelo critério de comparação (a),  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  é convergente para  $\alpha \geq 2$ .

Considere-se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{2^n}$ .

Aqui não é possível aplicar o critério de comparação pois os termos da série não são não negativos.

É necessário o conceito de convergência absoluta.

**Definição 2.5.4** Uma série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  diz-se absolutamente convergente se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \text{ é convergente.}$$

A relação entre estes dois tipos de convergência pode ser expressa no seguinte resultado:

**Teorema 2.5.5** Toda a série absolutamente convergente é convergente.

**Dem.** Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  uma série absolutamente convergente, isto é,  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  é convergente.

Além disso  $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ , porque  $|a_1 + \dots + a_n| \leq |a_1| + \dots + |a_n|$  e passando ao limite em ambos os membros da desigualdade.

Como  $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$  e a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} 2|a_n|$  é convergente, pela Proposição 2.4.1, então pelo Teorema 2.5.2, a), a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$  é convergente.

Assim  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  é convergente. ■

**Observação 2.5.6** Uma série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  pode ser convergente sem contudo ser absolutamente convergente. Nestes casos a série diz-se simplesmente convergente.

**Exemplo 2.5.7** Na série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sen } n}{2^n}$  tem-se que

$$\left| \frac{\text{sen } n}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$  é uma série geométrica convergente (razão  $\frac{1}{2}$ ), então pelo critério de comparação (a) a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\text{sen } n}{2^n} \right|$  é convergente e  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sen } n}{2^n}$  é absolutamente convergente. Finalmente pelo Teorema 2.5.5,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sen } n}{2^n}$  é convergente.

Os dois resultados seguintes referem-se à natureza de séries cujo termo geral é o produto de duas sucessões:

**Teorema 2.5.8** (Teorema de Dirichlet) Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é uma série (não necessariamente convergente) com a sucessão das somas parciais limitada e  $b_n$  é uma sucessão decrescente que tende para zero então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \times b_n) \text{ é convergente.}$$

**Dem.** 1º Passo: Provar por indução que, para  $S_n = a_1 + \dots + a_n$  se tem

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = S_1 (b_1 - b_2) + S_2 (b_2 - b_3) + \dots + S_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + S_n b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para  $n = 1$ ,  $a_1 b_1 = S_1 b_1$  é verdade.

Admitindo a igualdade verdadeira para  $n = p$  verificar para  $n = p + 1$  :

$$\begin{aligned} & a_1 b_1 + \dots + a_p b_p + a_{p+1} b_{p+1} = \\ & [S_1 (b_1 - b_2) + \dots + S_{p-1} (b_{p-1} - b_p) + S_p b_p] + \\ & a_{p+1} b_{p+1} + (S_p b_{p+1} - S_p b_{p+1}) \\ = & S_1 (b_1 - b_2) + \dots + S_{p-1} (b_{p-1} - b_p) + S_p (b_p - b_{p+1}) + (a_{p+1} + S_p) b_{p+1} \\ = & S_1 (b_1 - b_2) + \dots + S_p (b_p - b_{p+1}) + S_{p+1} b_{p+1}. \end{aligned}$$

2º Passo: Passando ao limite

$$\lim (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) = \lim \sum_{i=2}^n S_{i-1} (b_{i-1} - b_i) + \lim S_n b_n.$$

Os dois limites do segundo membro existem porque:

- $S_n b_n \rightarrow 0$ , pelo Teorema 1.8.3;
- a série  $\sum_{i=2}^{+\infty} S_{i-1} (b_{i-1} - b_i)$  é convergente.pois

$$|S_{i-1} (b_{i-1} - b_i)| = |S_{i-1}| (b_{i-1} - b_i) \leq M (b_{i-1} - b_i)$$

e  $\sum_{i=2}^{+\infty} (b_{i-1} - b_i)$  é convergente.pois é uma série de Mengoli com  $b_n$  convergente.

Então a série  $\sum_{i=2}^{+\infty} S_{i-1} (b_{i-1} - b_i)$  é absolutamente convergente. Logo

$\lim (a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)$  é finito pelo que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n b_n)$  é convergente.

■

Fortalecendo a hipótese sobre  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e enfraquecendo a condição sobre  $b_n$ , obtem-se:

**Teorema 2.5.9** (*Teorema de Abel*) Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é uma série convergente e  $b_n \geq 0$  é uma sucessão decrescente (não necessariamente com limite zero) então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \times b_n) \text{ é convergente.}$$

**Dem.** Como  $b_n$  é monótona e limitada ( $0 \leq b_n \leq b_1, \forall n \in \mathbb{N}$ ) então é convergente, isto é, tem limite. Seja  $b$  esse limite.

A sucessão  $(b_n - b)$  é decrescente e  $(b_n - b) \rightarrow 0$ .

Como a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente, a respectiva sucessão das somas parciais é limitada, pelo que se pode aplicar o Teorema 2.5.8 e garantir que  $\sum_{n=1}^{+\infty} [a_n (b_n - b)]$  é convergente.

Como  $a_n b_n = a_n (b_n - b) + b a_n$  então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n (b_n - b) + b a_n] \text{ é convergente.}$$

■

## 2.6 Séries alternadas

Se os termos da série não têm sinal fixo, isto é, vão alternando o sinal, a série será do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n b_n, \quad (b_n \geq 0),$$

a série diz-se alternada.

O estudo da natureza deste tipo de séries faz-se com recurso à convergência absoluta ou se se pretender apenas a convergência simples ao critério de Leibniz:

**Teorema 2.6.1** (*Critério de Leibniz*) *Se  $b_n \geq 0$  é uma sucessão decrescente com limite zero então*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n b_n \text{ é convergente.}$$

**Dem.** A sucessão das somas parciais da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$  é limitada (embora não convergente). Como  $b_n$  é uma sucessão decrescente com  $\lim b_n = 0$ , então fazendo no Teorema 2.5.8  $a_n = (-1)^n$  obtem-se o resultado pretendido. ■

**Observação 2.6.2** *A condição de  $b_n$  ser decrescente para zero não pode ser retirada.*

*Sem a monotonia de  $b_n$  a série pode divergir.*

**Exercício 2.6.3** *Prove que a sucessão  $b_n = \frac{1}{n} [2 + (-1)^n]$  tende para 0 mas não é monótona e a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n} [2 + (-1)^n]$$

*é divergente.*

Resolução: Suponha-se, com vista um absurdo, que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n} [2 + (-1)^n]$  é convergente.

Então a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{2}{n} (-1)^n + \frac{1}{n} \right]$$

seria convergente pela Proposição 2.4.1. Ora isto é absurdo porque a série harmónica é divergente.

**Exercício 2.6.4** *Estude a natureza da série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Resolução: A série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  não é absolutamente convergente pois

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Pelo Critério de Leibniz a série é convergente.

Logo a série é simplesmente convergente.

**Observação 2.6.5** *Este exercício prova que a recíproca do Teorema 2.5.5 não é verdadeira, isto é, existem séries convergentes que não são absolutamente convergentes.*

## 2.7 Critérios de convergência para séries de termos não negativos

Além dos critérios já apresentados, indicam-se de seguida uma colecção de critérios para séries de termos não negativos.

**Teorema 2.7.1** *(Corolário do critério de comparação) Se  $a_n \geq 0$ ,  $b_n \geq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  e*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = l, \quad (0 < l < +\infty)$$

*então as séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  são da mesma natureza.*

**Dem.** Aplicando a definição de limite à sucessão  $\frac{a_n}{b_n}$ , obtem-se

$$\forall \delta > 0 \exists p \in \mathbb{N}: n > p \implies l - \delta < \frac{a_n}{b_n} < l + \delta.$$

Fixando  $\delta$  tal que  $0 < \delta < l$  tem-se, para  $n > p$ ,

$$b_n (l - \delta) < a_n < b_n (l + \delta).$$



## 2.7. CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA PARA SÉRIES DE TERMOS NÃO NEGATIVOS 43

Pelo Teorema 2.5.2, se  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é divergente então  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente, e se  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é convergente então  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente. ■

**Exemplo 2.7.2** *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \left( \frac{1}{n} \right)$$

*é divergente porque*

$$\lim_{\frac{1}{n}} \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

e  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  é divergente.

**Observação 2.7.3** *A aplicação do teorema anterior exige que a natureza de uma das séries seja previamente conhecida. Para tal vejam-se os dois resultados seguintes:*

**Teorema 2.7.4** *(Critério da condensação de Cauchy) Sejam  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$ . Então  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge se e só se*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots \text{ for convergente.}$$

**Dem.** Sejam  $S_n$  e  $T_k$  as somas parciais das duas séries, isto é,

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + \dots + a_n \\ T_k &= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^k a_{2^k}. \end{aligned}$$

Para  $n \leq 2^{k+1} - 1$ , tem-se

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \\ &\quad \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^k a_{2^k} = T_k. \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Assim se  $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$  é convergente então, pela Proposição 2.5.1  $T_k$  é majorada.

Como para qualquer  $n$  existe  $k \in \mathbb{N}_0$  tal que  $n \leq 2^{k+1} - 1$ , tem-se que  $S_n \leq T_k$ , pelo que  $S_n$  é majorada e, pela Proposição 2.5.1, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente.

( $\Rightarrow$ ) Suponha-se que  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente. Para  $n \geq 2^k$ , tem-se

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + \cdots + a_n \\ &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \\ &\quad \cdots + (a_{2^{k+1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} = \frac{1}{2}T_k, \end{aligned}$$

pelo que  $T_k \leq 2S_n$ . Como  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente então  $S_n$  é majorada pelo

que  $T_k$  também é majorada. Pela Proposição 2.5.1, a série  $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$  é convergente. ■

**Corolário 2.7.5** A série de Dirichlet  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  é convergente se e só se  $\alpha > 1$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ).

**Dem.** Para  $\alpha \leq 0$ ,  $\frac{1}{n^\alpha}$  não é um infinitésimo, logo pelo Corolário 2.3.8, a série é divergente.

Para  $\alpha > 0$  a sucessão  $\frac{1}{n^\alpha}$  está nas condições do teorema anterior. Assim para  $b_n = 2^n a_{2^n} = 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = 2^{(1-\alpha)n}$  a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(1-\alpha)n}$  é uma série geométrica de razão  $2^{1-\alpha}$ , que converge se, e só se,  $1 - \alpha < 0$ , isto é,  $\alpha > 1$ . ■

Em situações em que o limite apresente algumas dificuldades ou não exista, pode optar-se pela comparação das razões entre dois termos consecutivos.

**Teorema 2.7.6** (Critério da comparação das razões) Sejam  $a_n, b_n > 0$  e, a partir de uma certa ordem  $p$ ,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Então:

- a) Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é convergente então  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente.
- b) Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente então  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  é divergente.

**Dem.** A desigualdade da hipótese é equivalente a

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}.$$

o que prova que a sucessão  $\frac{a_n}{b_n}$  é decrescente, a partir de uma certa ordem  $p$ , pelo que é majorada por  $\frac{a_p}{b_p}$ , para  $n \geq p$ . Ou seja,  $\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_p}{b_p}$  e  $a_n \leq b_n \frac{a_p}{b_p}$ , para  $n \geq p$ .

Aplicando o Teorema 2.5.2 obtém-se a conclusão pretendida. ■

**Exercício 2.7.7** Estudar a natureza das séries

- a).  $\frac{1}{2} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}$
- b).  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2}.$

**Teorema 2.7.8** (Critério da razão) Seja  $a_n > 0$ .

- a) Se existe um número  $r$  tal que  $0 < r < 1$  e  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$ , a partir de uma certa ordem, então  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente.
- b) Se a partir de uma certa ordem,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$  então  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente.

**Dem.** a) Aplicando a alínea a) do teorema anterior às séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$ , em que a segunda é convergente porque é uma série geométrica com  $|r| < 1$ , pois

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{r^{n+1}}{r^n} = r.$$

b) Aplicando a alínea b) do Teorema 2.7.6 às séries  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ , sendo esta divergente. Como  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$  então  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente. ■

**Teorema 2.7.9** (*Crítério de D'Alembert*) Se  $a_n > 0$  e  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ , finito ou  $+\infty$ , então

a) Se  $l < 1$ , então  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente.

b) Se  $l > 1$  então  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente.

**Dem.** a) Pela definição de limite,

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \delta, \text{ para } n \geq p.$$

Como  $l < 1$ , escolha-se  $\delta$  suficientemente pequeno de modo que  $l + \delta < 1$ . Aplicando o Teorema 2.7.8 com  $r = l + \delta < 1$  conclui-se que  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente.

b) Pela definição de limite,

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : l - \delta < \frac{a_{n+1}}{a_n}, \text{ para } n \geq p.$$

Como  $l > 1$ , escolha-se  $\delta > 0$  de modo que  $l - \delta > 1$ . Assim  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \delta > 1$  e pelo Teorema 2.7.8 a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente. ■

## 2.7. CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA PARA SÉRIES DE TERMOS NÃO NEGATIVOS 47

**Observação 2.7.10** Se  $l = 1$  este critério não é conclusivo, contudo se

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1^+$$

decorre do teorema anterior que a série é divergente.

**Exercício 2.7.11** (i) Prove que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$  é convergente.

(ii). Discuta a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n n!}{n^n}$$

em função do parâmetro  $\lambda$ .

**Teorema 2.7.12** (Critério da raiz) Seja  $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Então

a) Se  $\sqrt[n]{a_n} \leq r$ , com  $r < 1$ , a partir de uma certa ordem, então  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente.

b) Se  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ , para uma infinidade de valores de  $n$ , então  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente.

**Dem.** a) Como  $\sqrt[n]{a_n} \leq r$  então  $a_n \leq r^n$ , para  $n \geq p$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$  é conver-

gente, porque  $r < 1$ , então, pelo Teorema 2.5.2,  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente.

b) Se  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$  para uma infinidade de valores de  $n$  então  $\lim a_n \neq 0$ .

Logo  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente. ■

**Teorema 2.7.13** (Critério da raiz de Cauchy) Seja  $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  e suponhamos que  $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$ , finito ou  $+\infty$ . Então

a) Se  $l < 1$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente.

b) Se  $l > 1$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é divergente.

**Observação 2.7.14** Se  $l = 1$  este critério não é conclusivo.

**Dem.** a) Pela definição de limite,

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a_n} < l + \delta, \text{ para } n \geq p.$$

Como  $l < 1$ , escolhe-se  $\delta > 0$  suficientemente pequeno tal que  $l + \delta < 1$  e em seguida escolhe-se tal que  $r = l + \delta < 1$ .

Assim  $\sqrt[n]{a_n} < r$  e, pelo Teorema 2.7.12, a série é convergente.

b) Pela definição de limite,

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : l - \delta < \sqrt[n]{a_n}, \text{ para } n \geq p.$$

Como  $l > 1$ , escolhe-se  $\delta > 0$  tal que  $l - \delta > 1$  e, assim  $\sqrt[n]{a_n} > 1$ . Pelo Teorema 2.7.12, a série é divergente.

Se  $l = +\infty$ , pela definição de limite,

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \implies \sqrt[n]{a_n} > l.$$

Em particular para  $\delta = 1$ ,  $\sqrt[n]{a_n} > 1$ . ■

**Exemplo 2.7.15** (i) A série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}$  é convergente porque, pelo critério da raiz de Cauchy

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0.$$

(ii). Para a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[3 + (-1)^n]^{2n}}$$

não é possível calcular

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{[3 + (-1)^n]^{2n}}} = \lim \frac{1}{[3 + (-1)^n]^2}$$

porque o limite não existe. Contudo decompondo a série e pode calcular-se os dois sub-limites:

$$\begin{aligned} n \text{ par}, \quad \lim \frac{1}{[3 + (-1)^n]^2} &= \frac{1}{16}, \\ n \text{ ímpar}, \quad \lim \frac{1}{[3 + (-1)^n]^2} &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Como ambos são menores que 1, então a série convergente.

## 2.8 Resto de uma série

Ao aproximarmos a soma de uma série pela soma de alguns termos, comete-se um erro.

**Definição 2.8.1** Dada uma série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ , chama-se resto de ordem  $p$  à série

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n = a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots = R_p.$$

Como

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_p) + R_p$$

observa-se que o erro cometido ao tomar para valor da soma da série, a soma dos primeiros  $p$  termos é  $R_p$ .

No cálculo aproximado interessa conhecer majorantes dos erros cometidos nas aproximações feitas.

Nas séries de termos positivos existem alguns resultados que majoram o resto:

**Teorema 2.8.2** Se  $p \in \mathbb{N}$ ,  $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , e existir um número  $k_p$  tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k_p < 1, \text{ para } n \geq p+1,$$

então

$$R_p \leq \frac{a_{p+1}}{1 - k_p}.$$

**Dem.** Pelo Teorema 2.7.8, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente. Por outro lado

$$\begin{aligned} R_p &= a_{p+1} + a_{p+2} + a_{p+3} + \cdots \\ &= a_{p+1} \left( 1 + \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} + \frac{a_{p+3}}{a_{p+1}} + \cdots \right). \end{aligned}$$

Por hipótese

$$\frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} \leq k_p \text{ e } \frac{a_{p+3}}{a_{p+1}} = \frac{a_{p+3}}{a_{p+2}} \cdot \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} \leq (k_p)^2.$$

Analogamente  $\frac{a_{p+4}}{a_{p+1}} \leq (k_p)^3$  e assim sucessivamente.

Então

$$R_p \leq a_{p+1} \left( 1 + k_p + (k_p)^2 + (k_p)^3 + \cdots \right) = a_{p+1} \frac{1}{1 - k_p}.$$

■

Outro resultado para séries de termos não negativos:

**Teorema 2.8.3** *Se  $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ , e existir um número  $k_p$  tal que  $\sqrt[p]{a_n} \leq k_p < 1$ , para  $n \geq p + 1$ , então*

$$R_p \leq \frac{k_p^{p+1}}{1 - k_p}.$$

**Dem.** A série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente pelo Teorema 2.7.12. O erro

$$\begin{aligned} R_p &= a_{p+1} + a_{p+2} + a_{p+3} + \cdots \\ &\leq (k_p)^{p+1} \left( 1 + k_p + (k_p)^2 + (k_p)^3 + \cdots \right) = \frac{k_p^{p+1}}{1 - k_p}. \end{aligned}$$

■

Para séries alternadas, tem-se o seguinte resultado:

**Teorema 2.8.4** *Seja  $a_n \geq 0$  uma sucessão decrescente com limite zero e  $R_p$  o resto de ordem  $p$  da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ . Então*

$$R_p \leq a_{p+1}.$$

**Dem.** Pelo Teorema 2.6.1, a série é convergente e

$$R_p = (-1)^{p+1} a_{p+1} + (-1)^{p+2} a_{p+2} + \cdots$$

Multiplicando por  $(-1)^{p+1}$  tem-se

$$(-1)^{p+1} R_p = (a_{p+1} - a_{p+2}) + (a_{p+3} - a_{p+4}) + \cdots$$

e como  $a_n$  é uma sucessão decrescente então cada diferença é não negativa e

$$(-1)^{p+1} R_p \geq 0. \quad (2.8.1)$$



Por outro lado

$$- \left[ (-1)^{p+1} R_p - a_{p+1} \right] = (a_{p+2} - a_{p+3}) + (a_{p+4} - a_{p+5}) + \cdots \geq 0.$$

Ou seja,

$$(-1)^{p+1} R_p \leq a_{p+1},$$

e, por (2.8.1),

$$0 \leq (-1)^{p+1} R_p \leq a_{p+1},$$

pelo que  $|R_p| \leq a_{p+1}$ . ■

**Exemplo 2.8.5** Se para soma da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  tomarmos o número

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4},$$

comete-se um erro  $R_n$  tal que  $|R_n| \leq \frac{1}{5}$ .



## Capítulo 3

# Funções reais de variável real

### 3.1 Limite de uma função

Recordando a definição de limite de uma função num ponto:

**Definição 3.1.1** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real definida em  $X$  e  $a$  um ponto de acumulação de  $X$ . Diz-se que  $b \in \mathbb{R}$  é o limite de  $f(x)$  no ponto  $a$  e escreve-se  $f(x) \rightarrow b$  quando  $x \rightarrow a$  ou*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

quando

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0: \forall x \in X, |x - a| < \varepsilon \implies |f(x) - b| < \delta.$$

Intuitivamente  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ :

- significa que  $f(x)$  está arbitrariamente próximo de  $b$  quando  $x$  está suficientemente perto de  $a$ .
- não dá informação sobre o valor de  $f(x)$  no ponto  $a$ , isto é, sobre  $f(a)$ .

**Exercício 3.1.2** *Prove por definição que*

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + 4) = a^2 + 4.$$

Também é possível formular a noção de limite de uma função recorrendo a sucessões:

**Teorema 3.1.3** (Heine) *Sejam  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  um ponto de acumulação de  $X$  e  $b \in \mathbb{R}$ . Então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  é equivalente a dizer que  $\lim f(x_n) = b$  para todas as sucessões  $x_n \in X \setminus \{a\}$  tais que  $x_n \rightarrow a$ .*

**Dem.** ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ .

Seja  $x_n$  uma sucessão tal que  $x_n \rightarrow a$ . Então, a partir de uma certa ordem  $n \geq p$ ,  $|x_n - a| < \varepsilon$ . Pela Definição 3.1.1,

$$|f(x_n) - b| < \delta, \text{ para } n \geq p \text{ e } \delta > 0 \text{ fixo,}$$

o que prova que  $\lim f(x_n) = b$ .

( $\Leftarrow$ ) Considere-se que  $\lim f(x_n) = b$  para todas as sucessões  $x_n \in X \setminus \{a\}$  tais que  $x_n \rightarrow a$ .

Suponhamos, por contradição, que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq b$ . Então

$$\exists \delta > 0 : \forall \varepsilon > 0, |x - a| < \varepsilon \text{ e } |f(x) - b| \geq \delta,$$

para um certo  $x \in X$  que depende de  $\varepsilon$ .

Então se para cada  $n \in \mathbb{N}$  fizermos  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  e designarmos o correspondente  $x$  por  $x_n$ , obtem-se uma sucessão  $x_n$  tal que

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - b| \geq \delta,$$

isto é,

$$x_n \rightarrow a, x_n \neq a \text{ e } \lim f(x_n) \neq b,$$

o que contradiz a hipótese. ■

**Exercício 3.1.4** *Verifique se existe*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right).$$

Resolução: Para todos os pontos da forma  $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se  $\operatorname{sen}(x) = 1$ .

Considerando a sucessão

$$\frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

tem-se

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \text{ e } x_n \rightarrow 0.$$

Para  $f(x) = 2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}$  obtem-se

$$f(x_n) = 2 + \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = 3.$$

Analogamente, definindo  $\frac{1}{y_n} = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$  temos

$$y_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi} \rightarrow 0 \text{ e } f(y_n) = 2 + \operatorname{sen} \left( \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \right) = 1.$$

Assim pelo teorema anterior há uma contradição, pois  $x_n \rightarrow 0$  e  $y_n \rightarrow 0$  e contudo as suas imagens tendem para valores distintos.

Algumas propriedades dos limites das funções reais de variável real estão resumidas na próxima proposição:

**Proposição 3.1.5** *Sejam  $f, g, h : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a$  um ponto de acumulação de  $X$ .*

1. (*Unicidade do limite*) *Se existir  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  então é único.*
2. *Se  $f(x) = g(x)$ ,  $\forall x \in V_\varepsilon(a) \cap X$  e existem  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  então*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

3. *Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  então existe  $\varepsilon > 0$  tal que*

$$f(x) < g(x), \forall x \in V_\varepsilon(a).$$

4. *Se  $f(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x \in V_\varepsilon(a) \cap X$  então*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

*caso existam os respectivos limites.*

5. *Se  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x \in V_\varepsilon(a) \cap X$  e se  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe e*

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

**Dem.** 1. Suponhamos que existem dois valores para  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Isto é,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b'.$$

Então para cada  $\delta > 0$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$|f(x) - b| < \frac{\delta}{2} \text{ e } |f(x) - b'| < \frac{\delta}{2},$$

desde que  $x \in X$  e  $|x - a| < \varepsilon$ .

Escolhendo um valor de  $x$  nestas condições tem-se

$$\begin{aligned} |b - b'| &= |b - f(x) + f(x) - b'| \leq |b - f(x)| + |f(x) - b'| \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

para  $\forall \delta > 0$ , o que implica  $b = b'$ .

2. Tomando  $x$  tal que  $|x - a| < \varepsilon$ , tem-se

$$|f(x) - b| = |g(x) - b| < \delta,$$

para qualquer  $\delta > 0$ . Logo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

3. Seja  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b < \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$  e escolha-se  $\delta > 0$  tal que  $0 < \delta < \frac{c-b}{2}$ , ou seja tal que  $b + \delta < c - \delta$ .

Então, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $x \in V_\varepsilon(a) \cap X$  e

$$b - \delta < f(x) < b + \delta \text{ e } c - \delta < g(x) < c + \delta.$$

Em particular

$$f(x) < b + \delta < c - \delta < g(x), \quad \forall x \in V_\varepsilon(a) \cap X.$$

4. Resulta directamente das alíneas 2. e 3.

5. Aplicar argumentos semelhantes à demonstração do Teorema 1.9.3.

■

### 3.2 Limites em $\overline{\mathbb{R}}$

A noção de limite pode estender-se ao caso em que  $a = \pm\infty$  e a situações em que o valor do limite é  $\pm\infty$ .

**Definição 3.2.1** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a$  um ponto de acumulação de  $X$ .*

(i) *Diz-se que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  quando para qualquer  $L > 0$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que para  $x \in ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ \cap (X \setminus \{a\})$  se tem  $f(x) > L$ . Simbolicamente quando*

$$\forall L > 0 \exists \varepsilon > 0: \forall x \in X, 0 < |x - a| < \varepsilon \implies f(x) > L.$$

(ii) *Analogamente*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall L > 0 \exists \varepsilon > 0: \forall x \in X, 0 < |x - a| < \varepsilon \implies f(x) < -L.$$

**Exercício 3.2.2** *Prove por definição que*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{2}{x^2 - x} \right| = +\infty.$$

**Definição 3.2.3** *Seja  $X \subset \mathbb{R}$ .*

(i) *Se  $X$  é uma parte não majorada de  $\mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}$ , diz-se que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  se*

$$\forall \delta > 0 \exists x_0 \in \mathbb{R}: \forall x \in X, x > x_0 \implies |f(x) - b| < \delta.$$

(ii) *Se  $b = +\infty$  então  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  se*

$$\forall L > 0 \exists x_0 \in \mathbb{R}: \forall x \in X, x > x_0 \implies f(x) > L.$$

(iii) *Se  $X$  é uma parte não minorada de  $\mathbb{R}$ , define-se de modo análogo  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .*

**Exercício 3.2.4** *Mostre, por definição, que*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 8x + 3}{x^2 - 4} = 1.$$

Note-se que quando  $X = \mathbb{N}$  a função  $f$  é uma sucessão real e esta definição é equivalente à definição de limite de uma sucessão.

Assim as propriedades algébricas enunciadas para os limites de sucessões permanecem válidas para funções.

**Proposição 3.2.5** (*Propriedade algébricas dos limites*) Admitindo que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ , tem-se que:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = b + c$ ;
2.  $\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = b \times c$ ;
3.  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |b|$
4.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$ , se  $c \neq 0$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow a} |h(x)| = 0 \iff \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$

**Dem.** As demonstrações são análogas às utilizadas no Teorema 1.9.1.

■

**Exercício 3.2.6** Considere a função  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = x \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right).$$

Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

### 3.3 Limites laterais

Os limites laterais reforçam a informação sobre o comportamento da função quando os objectos se aproximam de um certo ponto.

**Definição 3.3.1** (i) Seja  $a$  um ponto de acumulação de  $X$  para valores maiores que  $a$ . Chama-se limite lateral de  $f$  à direita de  $a$ , notando-se  $f(a^+)$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$ , se

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 : x \in X, a < x < a + \varepsilon \implies |f(x) - b| < \delta.$$

(ii) Analogamente, chama-se limite lateral de  $f$  à esquerda de  $a$ , notando-se  $f(a^-)$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$ , se

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 : x \in X, a - \varepsilon < x < a \implies |f(x) - b| < \delta.$$



**Observação 3.3.2** Se  $a$  um ponto de acumulação de  $X$  então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b.$$

**Exercício 3.3.3** Calcule, se existir,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  sendo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{3}{2} & \text{se } x \geq 1 \\ 1 - x^2 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

### 3.4 Funções contínuas

Geometricamente, uma função é contínua num ponto se, nesse ponto, não houver saltos.

**Definição 3.4.1** Considere-se  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in X$ .

A função  $f$  é contínua em  $a$  quando  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , isto é,

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in X, |x - a| < \varepsilon \implies |f(x) - f(a)| < \delta.$$

**Observação 3.4.2** Se  $a$  é um ponto isolado, a função  $f$  é necessariamente contínua em  $a$ , uma vez que, tomando  $\varepsilon > 0$  tal que  $V_\varepsilon(a) \cap X = \{a\}$  a condição  $|x - a| < \varepsilon \implies x = a$  e obviamente se verifica

$$|f(x) - f(a)| = 0 < \delta, \forall \delta > 0.$$

**Exercício 3.4.3** Considere a função real de variável real definida por

$$m(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} & \text{se } x \neq 2 \\ 3k + 2 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

Determine o valor do parâmetro  $k$  de modo a que a função seja contínua em  $\mathbb{R}$ .

### 3.5 Continuidade lateral

**Definição 3.5.1** Seja  $a$  um ponto de acumulação de  $X$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

(i)  $f(x)$  diz-se contínua à direita de  $a$  se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

(ii)  $f(x)$  é contínua à esquerda de  $a$  se

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a).$$

**Observação 3.5.2** Se  $f(x)$  é contínua em  $a$  então  $f(x)$  é contínua à esquerda e à direita de  $a$ .

As propriedades algébricas das funções contínuas num ponto podem sintetizar no próximo resultado:

**Proposição 3.5.3** Sejam  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções contínuas num ponto de acumulação  $a$  de  $X$ . Então:

- (i)  $(f + g)$ ,  $(f \times g)$ ,  $|f|$  e  $(-f)$  são funções contínuas em  $a$ ;
- (ii)  $\frac{f}{g}$  é contínua em  $a$  se  $g(a) \neq 0$ .

**Dem.** Resulta directamente das propriedades algébricas dos limites. ■

**Proposição 3.5.4** (Continuidade da função composta) Considere-se  $\varphi : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções tais que  $\varphi(D) \subset E$ . Se  $\varphi$  é contínua em  $a \in D$  e  $f$  é contínua em  $\varphi(a) \in E$  então  $(f \circ \varphi)$  é contínua em  $a$ .

**Dem.** Pretende-se provar que  $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ \varphi)(x) = (f \circ \varphi)(a)$ .

Seja  $x_n \in D$  uma sucessão tal que  $x_n \rightarrow a$ , por valores diferentes de  $a$ .

A sucessão correspondente  $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(a)$  porque  $\varphi$  é contínua em  $a$ . Por sua vez a função  $f$  transforma a sucessão  $\varphi(x_n)$  na sucessão  $f[\varphi(x_n)]$  que converge para  $f[\varphi(a)]$  visto que  $f$  é contínua em  $f[\varphi(a)]$ .

Então qualquer que seja a sucessão  $x_n \rightarrow a$ , temos que

$$(f \circ \varphi)(x_n) = f[\varphi(x_n)] \rightarrow f[\varphi(a)],$$

isto é,  $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ \varphi)(x) = (f \circ \varphi)(a)$ . ■

**Observação 3.5.5** Da proposição anterior resulta a possibilidade de permutar a passagem ao limite com a função, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow a} f[\varphi(x)] = f\left[\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)\right].$$

É esta propriedade que permite o cálculo

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

### 3.6 Continuidade num intervalo

**Definição 3.6.1** (a) A função  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se contínua no intervalo  $]a, b[ \subset D$  se e só se for contínua em todos os pontos desse intervalo.

(b) A função  $f$  é contínua no intervalo  $[a, b] \subset D$  se:

- $f$  é contínua à direita de  $a$ ;
- $f$  é contínua em  $]a, b[$ ;
- $f$  é contínua à esquerda de  $b$ .

**Exercício 3.6.2** Determine  $\lambda$  e  $\mu$  de modo a que a função

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \lambda & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 3} & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 - 3\mu & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

seja contínua no intervalo  $[0, 1]$ .

### 3.7 Descontinuidades

**Definição 3.7.1** Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- O ponto  $a \in D$  é um ponto de descontinuidade se  $f(x)$  não é contínua em  $a$ .
- A função  $f$  tem uma descontinuidade de 1ª espécie em  $a$  se  $f(x)$  não é contínua em  $a$  e admite limites laterais finitos.
- Um ponto de descontinuidade diz-se de 2ª espécie se pelo menos um dos limites laterais em  $a$  é infinito.

Por vezes é conveniente definir o salto de  $f$  :

**Definição 3.7.2** Chama-se salto de  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  num ponto  $a \in D$ , que admite limites laterais  $f(a^+)$  e  $f(a^-)$  a:

- $\sigma(a) = \max \{|f(a^+) - f(a)|, |f(a^-) - f(a)|\}$ , caso existam ambos os limites laterais;
- $\sigma(a) = |f(a^+) - f(a)|$  ou  $\sigma(a) = |f(a^-) - f(a)|$  se existirem apenas  $f(a^+)$  ou  $f(a^-)$ , respectivamente;

- $\sigma(a) = 0$ , se  $a$  é um ponto isolado.

**Exercício 3.7.3** Determine e classifique os pontos de descontinuidade de

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x > 2 \\ -x^2 + 2x & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{x} & , \quad x < 0. \end{cases}$$

Em cada ponto de descontinuidade calcule o salto de  $f$ .

### 3.8 Teoremas fundamentais sobre continuidade

**Teorema 3.8.1** (de Bolzano ou do valor intermédio) Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua em  $[a, b]$  e  $k$  é um valor compreendido entre  $f(a)$  e  $f(b)$  então existe pelo menos um valor  $c \in ]a, b[$  tal que  $f(c) = k$ .

**Dem.** Suponhamos que  $f(a) \leq f(b)$  e  $f(a) \leq k \leq f(b)$ .

Divida-se o intervalo  $[a, b]$  ao meio. Dos dois intervalos obtidos seja  $[a_1, b_1]$  o que verifica  $f(a_1) \leq k \leq f(b_1)$ .

Se verificarem os dois subintervalos escolhe-se arbitrariamente um deles para  $[a_1, b_1]$ .

Por nova divisão ao meio do intervalo  $[a_1, b_1]$  obtêm-se dois intervalos. Seja  $[a_2, b_2]$  o intervalo que verifica  $f(a_2) \leq k \leq f(b_2)$ . Prosseguindo indefinidamente desta forma obtêm-se uma sucessão de intervalos

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

que verifica  $f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$ . Seja  $c$  o número real comum a todos estes intervalos  $\left( c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \right)$ . Assim,  $a_n \rightarrow c$  e  $b_n \rightarrow c$  e, passando ao limite nas últimas desigualdades, tem-se, pela continuidade de  $f$ ,  $f(c) \leq k \leq f(c)$ , pelo que  $f(c) = k$ .

Se se supuser  $f(b) \leq f(a)$  e  $f(b) \leq k \leq f(a)$  a demonstração é análoga.

■

Numa versão mais simplificada pode enunciar-se assim:

"Se  $f$  é uma função contínua então não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios."

Um importante corolário deste teorema para  $k = 0$  diz o seguinte:

**Corolário 3.8.2** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua em  $[a, b]$  com  $f(a) \times f(b) < 0$  então  $f$  tem pelo menos um zero em  $]a, b[$ , isto é,

$$\exists c \in ]a, b[: f(c) = 0.$$

**Exercício 3.8.3** Provar que a equação

$$x^3 = 3x^2 - 1$$

tem pelo menos uma raiz real.

**Teorema 3.8.4** Se  $f$  é uma função contínua num conjunto  $D \subset \mathbb{R}$  limitado e fechado, então  $f(D)$  é limitado e fechado.

**Dem.** a) Provar que  $f(D)$  é limitado.

Suponhamos, por contradição, que  $f(D)$  não é limitado. Então existe uma sucessão  $y_n \in f(D)$  tal que  $y_n \rightarrow \infty$ .

Pelo Teorema 3.8.1, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $x_n \in D$  tal que  $f(x_n) = y_n$  e como  $D$  é um conjunto limitado então  $x_n$  é uma sucessão limitada, logo admite uma subsucessão convergente (pelo Corolário 1.7.9) que se designa por  $x_{\alpha_n} \rightarrow c$ .

Como  $D$  é um conjunto limitado,  $c \in D$ . Assim  $f(x_{\alpha_n}) = y_{\alpha_n} \rightarrow f(c)$ , porque  $f$  é contínua, o que contradiz o facto de  $y_n \rightarrow \infty$ .

b) Provar que  $f(D)$  é fechado, ou seja as sucessões convergentes em  $f(D)$  têm limites em  $f(D)$ .

Seja  $y_n \in f(D)$  tal que  $y_n \rightarrow c$ .

Como para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $x_n \in D$  tal que  $f(x_n) = y_n$  e  $D$  é um conjunto limitado, pode extrair-se uma subsucessão  $x_{\alpha_n} \rightarrow x$ .

Como  $D$  é fechado então  $x \in D$ . Assim  $f(x_{\alpha_n}) = y_{\alpha_n}$  e passando ao limite quando  $n \rightarrow +\infty$ , tem-se

$$f(x) = \lim f(x_{\alpha_n}) = \lim y_{\alpha_n} = c.$$

Como  $x \in D$  logo  $c = f(x) \in f(D)$ . ■

**Teorema 3.8.5** (Teorema de Weierstrass) Toda a função contínua num conjunto não vazio, limitado e fechado tem máximo e mínimo nesse conjunto.

**Dem.** Seja  $f$  uma função contínua em  $D \neq \emptyset$ , limitado e fechado. Pelo Teorema 3.8.4,  $f(D)$  é limitado. Como  $f(D) \neq \emptyset$  então existe  $s = \sup f(D)$ .

Pela definição de supremo (o menor dos majorantes), para qualquer  $\delta > 0$  existem pontos de  $f(D)$  que pertencem ao intervalo  $]s - \delta, s[$ . Então

$$s \in \overline{f(D)} = f(D), \text{ porque } f(D) \text{ é fechado.}$$

Como  $s \in f(D)$  e  $s = \sup f(D)$  então  $s$  é o máximo de  $f(D)$ .

A demonstração é análoga para a existência de mínimo de  $f(D)$ . ■

**Proposição 3.8.6** *Seja  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua num intervalo  $I$ . Então  $f(I)$  é um intervalo.*

**Dem.** Considere-se  $y_1, y_2 \in f(I)$  tais que  $y_1 < y_2$  e  $y_1 = f(x_1)$  e  $y_2 = f(x_2)$ .

Como  $f$  é uma função contínua no intervalo  $[x_1, x_2]$  (ou  $[x_2, x_1]$  se for  $x_2 < x_1$ ) resulta pelo Teorema 3.8.1 que  $[y_1, y_2] \subset f(I)$ , pelo que  $f(I)$  é um intervalo. ■

**Observação 3.8.7** *Este teorema não refere a natureza do intervalo  $f(I)$ , o qual terá necessariamente como extremos  $\inf_{x \in I} f(x)$  e  $\sup_{x \in I} f(x)$ , que poderão, ou não, pertencer a  $f(I)$ . Isto é, o intervalo pode ser aberto, fechado ou semi-aberto.*

**Proposição 3.8.8** *Seja  $I$  um intervalo e  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e injectiva. Então  $f$  é estritamente monótona.*

**Dem.** Se  $I = \{x_0\}$  o resultado é trivial ( $f(x_0)$  é um único ponto).

Considerem-se então  $x_0, y_0 \in I$  dois elementos quaisquer tais que  $x_0 < y_0$ . Como, pela injectividade  $f(x_0) \neq f(y_0)$  ter-se-á

$$f(x_0) < f(y_0) \quad \text{ou} \quad f(y_0) < f(x_0).$$

No primeiro caso prova-se que  $f$  é estritamente crescente e no segundo caso estritamente decrescente.

Suponha-se que  $f(x_0) < f(y_0)$  (no 2º caso a demonstração é análoga) e prove-se que para  $x_0 < x < y_0$  se tem  $f(x_0) < f(x) < f(y_0)$ .

Com efeito, se assim não fosse, tinha-se: (i)  $f(x) < f(x_0) < f(y_0)$  ou (ii)  $f(x_0) < f(y_0) < f(x)$ .

No caso (i), o Teorema 3.8.1 garante que existe  $\xi \in ]x, y_0[$  tal que  $f(\xi) = f(x_0)$  o que contraria a injectividade de  $f$ .

Finalmente, para provar a monotonia, se  $x_0 < x < y < y_0$ , pela 1ª parte da demonstração, tem-se que

$$f(x_0) < f(y) < f(y_0).$$

Como  $x_0 < x < y$  e  $f(x_0) < f(y)$ , tem-se pela parte anterior que

$$f(x_0) < f(x) < f(y).$$

Assim provou-se que no intervalo  $[x_0, y_0]$  a função  $f$  é estritamente crescente. Como  $x_0$  e  $y_0$  são pontos arbitrários em  $I$  então  $f$  é estritamente crescente em  $I$ . ■

**Proposição 3.8.9** *Seja  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona num intervalo  $I$ . Se  $f(I)$  é um intervalo então  $f$  é contínua.*

**Dem.** Suponhamos que  $f$  é crescente e seja  $x_0 \in I$  (no caso de  $f$  ser decrescente o raciocínio é semelhante).

Designa-se por

$$f(x_0^-) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ e } f(x_0^+) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Como  $f$  é monótona então os limites anteriores são finitos e

$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+).$$

Se fosse  $f(x_0^-) < f(x_0^+)$  então  $f(I)$  não podia ser um intervalo, mas sim uma reunião de intervalos, pois qualquer elemento  $y \in ]f(x_0^-), f(x_0^+)[$  com  $y \neq f(x_0)$  não pertence a  $f(I)$ .

Logo os limites laterais têm de ser iguais, isto é,  $f$  tem de ser contínua.

■

### 3.9 Assímtotas

**Definição 3.9.1** (i) *Sejam  $f$  e  $h$  duas funções reais definidas para  $x > x_0$ . Diz-se que a linha de equação  $y = h(x)$  é assímtota ao gráfico de  $f(x)$  para a direita (ou quando  $x \rightarrow +\infty$ ) se e só se*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)] = 0.$$

*Geometricamente, significa que o gráfico de  $f(x)$  não difere muito do gráfico de  $h(x)$  quando  $x$  é grande e positivo.*

(ii) *Analogamente, se  $f$  e  $h$  duas funções reais definidas para  $x < x_0$ , a linha de equação  $y = h(x)$  é assímtota ao gráfico de  $f(x)$  para a esquerda (ou quando  $x \rightarrow -\infty$ ) se e só se*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - h(x)] = 0.$$

**Exemplo 3.9.2** *A função  $h(x) = x^2$  é uma assímtota ao gráfico de  $f(x) = \frac{x^5-1}{x^3}$  para a direita, porque*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^5-1}{x^3} - x^2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = 0.$$

Se em particular as assíntotas  $h(x)$  são rectas então pode considerar-se dois casos: rectas verticais e não verticais.

**Definição 3.9.3** *Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a$  um ponto de acumulação de  $D$ . A recta  $x = a$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f(x)$  se se verificar pelo menos uma das quatro igualdades*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty.$$

**Proposição 3.9.4** *A recta  $y = mx + b$  é uma assíntota não vertical ao gráfico de  $f(x)$ , definida para  $x > x_0$ , se e só se*

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad e \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$$

*existirem e forem finitos.*

*De modo análogo se define a assíntota para a esquerda.*

**Dem.** ( $\Rightarrow$ ) Suponha-se que a recta  $y = mx + b$  é uma assíntota ao gráfico de  $f(x)$ .

Considere-se a definição de assíntota com  $h(x) = mx + b$  ( $m, b \in \mathbb{R}$ ).

Então, para o caso de assíntota para a direita de  $f$ , tem-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx - b] = 0$$

donde

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} [f(x) - mx - b] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(x)}{x} - m \right], \end{aligned}$$

pelo que

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Então  $m$  e  $b$  têm os respectivos limites finitos.

A demonstração para o caso da assíntota para a esquerda é análogo.

( $\Leftarrow$ ) Se existirem e forem finitos os dois limites então

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx - b] = 0,$$

pelo que  $y = mx + b$  é uma assíntota ao gráfico de  $f(x)$  para a direita. ■



**Exercício 3.9.5** *Determine a equação de todas as rectas que são assíptotas ao gráfico de*

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$$

### 3.10 Função inversa

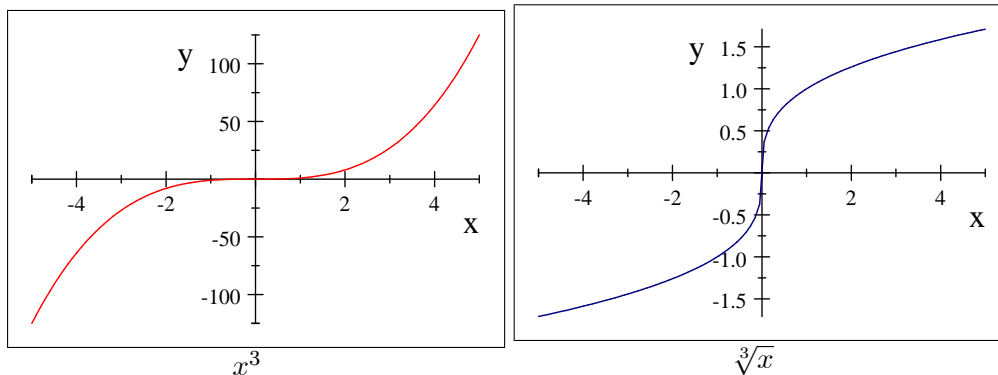
**Definição 3.10.1** *Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função injectiva. Diz-se que a função  $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$  é a função inversa de  $f$  se  $g[f(x)] = x, \forall x \in D$ .*

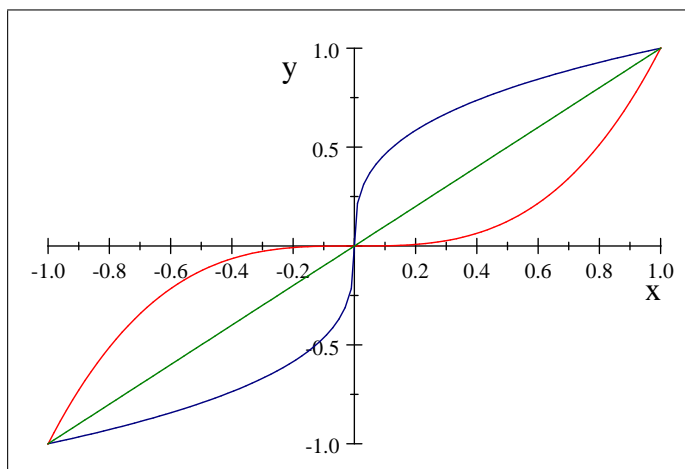
**Observação 3.10.2 (i)** *Só as funções injectivas admitem função inversa e neste caso as equações*

$$y = f(x) \quad \text{e} \quad x = g(y)$$

*são equivalentes.*

**(ii)** *Sendo  $g$  a função inversa de  $f$ , para obter o gráfico da equação  $y = g(x)$  basta efectuar sobre o o gráfico de  $y = f(x)$  uma simetria em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.*





Os gráficos são simétricos relativamente a  $y = x$

- (iii) Se  $f$  é monótona (sendo injectiva é estritamente monótona) e crescente (decrescente) então a sua inversa é também estritamente monótona crescente (decrescente).

Com efeito, para  $x_1, x_2 \in Df$  com  $x_1 < x_2$  então  $f(x_1) < f(x_2)$ , se  $f$  for crescente. Notando por  $g$  a função inversa de  $f$ , tem-se

$$g[f(x_1)] = x_1 < x_2 = g[f(x_2)],$$

pelo que  $g$  é crescente.

- (iv) Não confundir  $f^{-1}(x)$  com  $\frac{1}{f(x)}$ . Repare-se que para  $f(x) = x^3$  se tem  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$  mas  $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^3}$ .

Para uma função contínua e injectiva, a função inversa ainda é contínua?

**Teorema 3.10.3** (Continuidade da função inversa) Seja  $f$  uma função contínua e injectiva, definida num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Então  $f^{-1}$  é contínua.

**Dem.** Pela Proposição 3.8.8,  $f$  é estritamente monótona e, portanto,  $f^{-1}$  também é estritamente monótona.

Mas  $f^{-1}$  está definida no intervalo  $f(I)$ , sendo o seu contradomínio  $I$  um intervalo. Então, pela Proposição 3.8.9,  $f^{-1}$  é contínua. ■

### 3.11 Função exponencial

À aplicação  $x \mapsto a^x$  dá-se o nome de função exponencial de base  $a$ .

As principais propriedades resumem-se no seguinte resultado:

**Teorema 3.11.1** *A função exponencial  $a^x$  ( $a > 0$ ) é contínua e satisfaz as propriedades:*

1.  $a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2.  $a^{x+y} = a^x \times a^y$  ;  $(a^x)^y = a^{xy}, \forall x, y \in \mathbb{R}$
3. Se  $a > 1$ ,  $a^x$  é estritamente crescente,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ .
4. Se  $a < 1$ ,  $a^x$  é estritamente decrescente,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ .
5. Se  $a = 1$ ,  $a^x \equiv 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Dem.** A demonstração do teorema é consequência das propriedades algébricas dos limites e da sucessão exponencial.

A título de exemplo prove-se a alínea 3.

Sejam  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $x_1 < x_2$  e fixem-se racionais  $r_1$  e  $r_2$  tais que  $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$ .

Tomando as sucessões  $r_n, s_n \in \mathbb{Q}$  com  $r_n \rightarrow x_1$  e  $s_n \rightarrow x_2$  tem-se, a partir de uma certa ordem  $n_0$ ,

$$r_n < r_1 < r_2 < s_n$$

e, por consequência,

$$a^{x_1} = \lim a^{r_n} < a^{r_1} < a^{r_2} < \lim a^{s_n} = a^{x_2}.$$

■

No estudo que se segue fixa-se uma determinada base :  $e$  (número de Neper)

**Proposição 3.11.2** *Tem-se*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

**Dem.** Calculando o limite para  $x \rightarrow +\infty$ :

Seja  $x > 1$  e designe-se por  $I(x)$  o maior inteiro menor ou igual a  $x$ . Assim tem-se  $I(x) \leq x < I(x) + 1$  e

$$1 + \frac{1}{I(x)} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{I(x) + 1}$$

e, pelo Teorema 3.11.1 (3),

$$\left(1 + \frac{1}{I(x)}\right)^{I(x)+1} \geq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{I(x) + 1}\right)^{I(x)}.$$

Passando ao limite e fazendo no primeiro membro  $n = I(x)$  tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{I(x)}\right)^{I(x)+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e. \end{aligned}$$

Para o último membro procede-se de modo análogo com  $n = I(x) + 1$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{I(x) + 1}\right)^{I(x)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = e. \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.1.5 (5), obtem-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Para o limite quando  $x \rightarrow -\infty$  faz-se a mudança de variável  $x = -(1+y)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{-(1+y)}\right)^{-(1+y)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{-y-1+1}{-1-y}\right)^{-(1+y)} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{1+y}\right)^{-(1+y)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{1+y} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \left(1 + \frac{1}{y}\right) = e. \end{aligned}$$

■

**Proposição 3.11.3** *Tem-se*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0.$$

**Dem.** Fazendo  $e = 1 + h$  ( $h > 0$ ) tem-se pelo binómio de Newton

$$\begin{aligned} \frac{e^n}{n} &= \frac{(1+h)^n}{n} = \frac{1 + nh + \binom{n}{2}h^2 + \dots + h^n}{n} \\ &> \frac{1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2}{n} = \frac{1}{n} + h + \frac{n-1}{2}h^2. \end{aligned}$$

Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n} > \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + h + \frac{n-1}{2}h^2 \right) = +\infty,$$

pelo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$ . Fazendo  $n = I(x)$  tem-se  $n \leq x < n+1$  e portanto

$$\frac{e^x}{x} > \frac{e^n}{n+1} \geq \frac{e^n}{n+1} = \frac{1}{e} \frac{e^{n+1}}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \geq +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

No outro caso,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} -y e^{-y} = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}} = - \frac{1}{\infty} = 0.$$

■

**Corolário 3.11.4** *Para  $k \in \mathbb{R}$  tem-se*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^k e^x = 0.$$

*Isto é, « $e^x$  é um infinito superior a todas as potências de  $x$ ».*

**Dem.** No caso do limite para  $+\infty$ :

Se  $k \leq 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-k} e^x = +\infty.$$

Para  $k > 0$ , observando que

$$\frac{e^x}{x^k} = \left( \frac{e^{\frac{x}{k}}}{x} \right)^k$$

tem-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{ku} = \frac{1}{k} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty.$$

Para  $x \rightarrow -\infty$  aplica-se o resultado anterior com a mudança de variável  $x = -y$ . ■

**Exercício 3.11.5** 1. Indique o domínio e o contradomínio de cada um das expressões:

a)  $f(x) = 2 - 5^{1-3x}$

b)  $g(x) = \frac{8}{3^{1-3x}+7}$

2. Resolva em  $\mathbb{R}$  cada uma das condições:

a)  $2^{x^2-5x} = \frac{1}{16}$

b)  $0,25^{x^2} \geq \left(\frac{1}{16}\right)^{2x}$

3. Calcular:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x^4}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\frac{x^3}{2}}$

### 3.12 Função logarítmica

Como a aplicação  $f : x \mapsto a^x$  para  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  é uma bijecção de  $\mathbb{R}$  sobre  $\mathbb{R}^+$ , então admite uma aplicação inversa  $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , que se designa por função logaritmo de base  $a$  e se representa por

$$\log_a : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \log_a x, \text{ com } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$

Como  $a^x$  é estritamente monótona e contínua, a sua inversa,  $\log_a x$  também o será. Além disso o seu gráfico será simétrico ao da exponencial, em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Recorde-se as propriedades mais comuns em função da base do logaritmo. Se  $a > 1$  tem-se que:

- $\log_a x$  é estritamente crescente;

- $\log_a x > 0 \iff x > 1$ ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$ .

Se  $0 < a < 1$  obtém-se que:

- $\log_a x$  é estritamente decrescente;
- $\log_a x > 0 \iff 0 < x < 1$ ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$ .

Do conceito de função inversa resultam directamente várias consequências:

- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a (a^x) = x$
- $\log_a x = y \iff x = a^y$ .

**Exercício 3.12.1** 1. Calcular:

- a)  $\log_{\sqrt{2}} 64$
- b)  $\log_{0,1} 1000$

2. Determinar o domínio das funções:

- a)  $f(x) = \log_2 (4 - 3x)$
- b)  $g(x) = 3 + \log_{\frac{1}{3}} (9 - x^2)$

3. Resolva em  $\mathbb{R}$  as condições:

- a)  $\log_{\frac{1}{e}} (2x^2 - x) \geq \log_{\frac{1}{e}} x$
- b)  $\log_3 (x^2 - 7) < 2$

4. Caracterize a função inversa de:

- a)  $f(x) = -1 + 2 \ln (1 - 5x)$
- b)  $g(x) = 4 + 3^{2x-1}$

5. Determine em  $\mathbb{R}$  o conjunto solução das condições::

a)  $4\ln^2(x) - 7 - 3\ln x \geq 0$

b)  $e^x + 6e^{-x} = 7$

**Teorema 3.12.2** (*Propriedades operatórias dos logaritmos*) *Sejam  $x$  e  $y$  números positivos e  $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ . Então são válidas as seguintes propriedades:*

1.  $\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2.  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3.  $\log_a(x^p) = p \times \log_a(x)$ ,  $\forall p \in \mathbb{R}$
4.  $\log_b(x) = \log_a(x) \times \log_b(a)$  (*mudança de base do logaritmo*)

**Dem.** 1. Note-se que

$$x = a^{\log_a(x)}, y = a^{\log_a(y)} \text{ e } xy = a^{\log_a(x) + \log_a(y)}.$$

Então

$$\log_a(x \times y) = \log_a\left(a^{\log_a(x) + \log_a(y)}\right) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

2. Como  $\frac{x}{y} = a^{\log_a(x) - \log_a(y)}$  então

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(a^{\log_a(x) - \log_a(y)}\right) = \log_a(x) - \log_a(y).$$

3. Como  $x^p = (a^{\log_a(x)})^p = a^{p \log_a(x)}$ , então

$$\log_a(x^p) = \log_a\left(a^{p \log_a(x)}\right) = p \times \log_a(x).$$

4. Escrevendo  $x = a^{\log_a(x)}$  então

$$\log_b(x) = \log_b\left(a^{\log_a(x)}\right) = \log_a(x) \times \log_b(a).$$

■

**Proposição 3.12.3** *Para todo o  $k > 0$ , tem-se*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x^k} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^k \log(x) = 0.$$



Intuitivamente a proposição significa que:  $\log(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  mais lentamente que qualquer potência arbitrariamente pequena de  $x$ .

**Dem.** Fazendo a mudança de variável  $y = k \log x$  tem-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x^k} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\frac{y}{k}}{e^y} = \frac{1}{k} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0.$$

Com a mudança de variável  $x = \frac{1}{y}$  obtem-se

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^k \log(x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^k \log\left(\frac{1}{y}\right) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^k \log(y) \\ &= - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^k \frac{\log(y)}{y^k} = 0. \end{aligned}$$

■

**Proposição 3.12.4** *Tem-se*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

**Dem.** Pela Proposição 3.11.2 tem-se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  e, pela mudança de variável  $y = \frac{1}{x}$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$ .

Pela continuidade da função logaritmo, tem-se

$$\begin{aligned} \log \left[ \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} \right] &= \log e \iff \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \log (1+y)^{\frac{1}{y}} \right] = 1 \\ &\iff \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1. \end{aligned}$$

No segundo limite faz-se a mudança de variável  $y = e^x - 1$  e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1.$$

■

**Corolário 3.12.5** *(Aplicação do Teorema 1.14.4) Para todo o  $x_n \in \mathbb{R}$ , se  $x_n \rightarrow a$  e  $u_n \rightarrow +\infty$  então*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x_n}{u_n}\right)^{u_n} = e^a.$$

**Dem.** Observe-se que

$$\begin{aligned}\log\left(1 + \frac{x_n}{u_n}\right)^{u_n} &= u_n \log\left(1 + \frac{x_n}{u_n}\right) = \frac{\log\left(1 + \frac{x_n}{u_n}\right)}{\frac{1}{u_n}} \\ &= x_n \frac{\log\left(1 + \frac{x_n}{u_n}\right)}{\frac{x_n}{u_n}}.\end{aligned}$$

Passando ao limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \log\left(1 + \frac{x_n}{u_n}\right)^{u_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ x_n \frac{\log\left(1 + \frac{x_n}{u_n}\right)}{\frac{x_n}{u_n}} \right] = a,$$

uma vez que  $\frac{x_n}{u_n} \rightarrow \frac{a}{+\infty} = 0$ , pelo que se pode aplicar a Proposição 3.12.4.

Pela continuidade da função exponencial, tem-se

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \log\left(1 + \frac{x_n}{u_n}\right)^{u_n} \right) &= e^a \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\left(\log\left(1 + \frac{x_n}{u_n}\right)^{u_n}\right)} = e^a \\ &\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{x_n}{u_n} \right)^{u_n} = e^a.\end{aligned}$$

■

**Exercício 3.12.6** 1. Calcular o valor dos limites::

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{3 \log(2-x)}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x)^{\frac{x+1}{x^2}}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{4}x + 1\right)^{\frac{1}{3x}}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5+x^4) - \ln 5}{x^4}$

2. Determine os valores reais que verificam as condições:

a)  $\log_{\frac{1}{2}}(2x) < 2 - \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2-x}{x}\right)$

b)  $\log(x+3) > \log(x-1) - \log(2+x)$

### 3.13 Funções trigonométricas inversas

As funções trigonométricas  $\operatorname{sen} x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$  e  $\operatorname{cot} g x$  não são injectivas nos respectivos domínios. Assim essas funções não seriam invertíveis.

Para garantir a invertibilidade consideram-se restrições dessas funções a intervalos contidos no seu domínio.

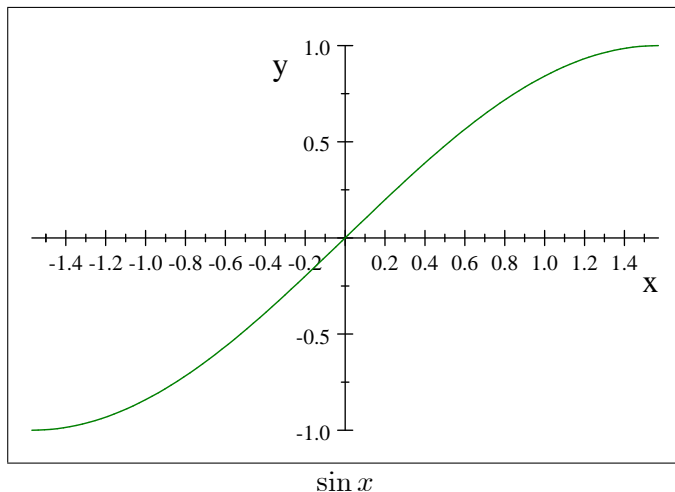
Das infinitas restrições considerar-se-á uma restrição principal de modo a que o contradomínio seja igual ao da função inicial.

#### 3.13.1 Arco-seno

Para a função  $f(x) = \operatorname{sen} x$ , qualquer restrição de  $f$  a intervalos do tipo  $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , é invertível.

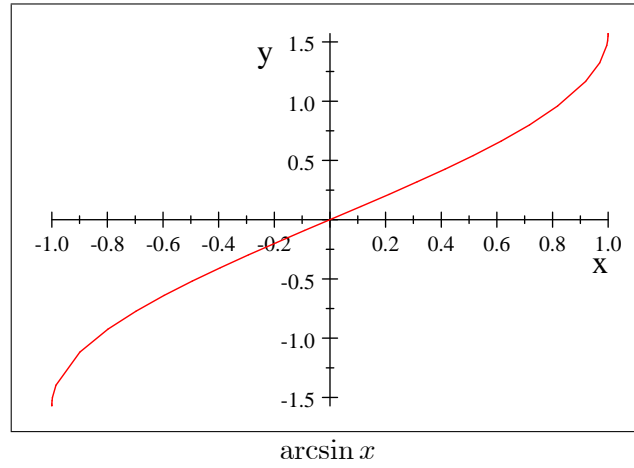
Considera-se a restrição principal para  $k = 0$ ,  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Isto é

$$\begin{aligned} f &: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto \operatorname{sen} x \end{aligned}$$



admita a função inversa

$$\begin{aligned} f^{-1} &: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\mapsto \operatorname{arcsen} x \end{aligned}$$

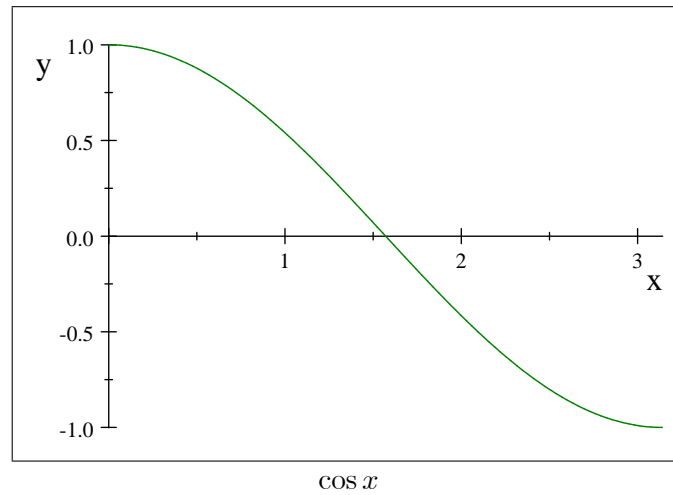


### 3.13.2 Arco-cosseno

Dada a função  $g(x) = \cos x$ , qualquer restrição de  $g$  a um dos intervalos  $[k\pi, \pi + k\pi]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , é invertível.

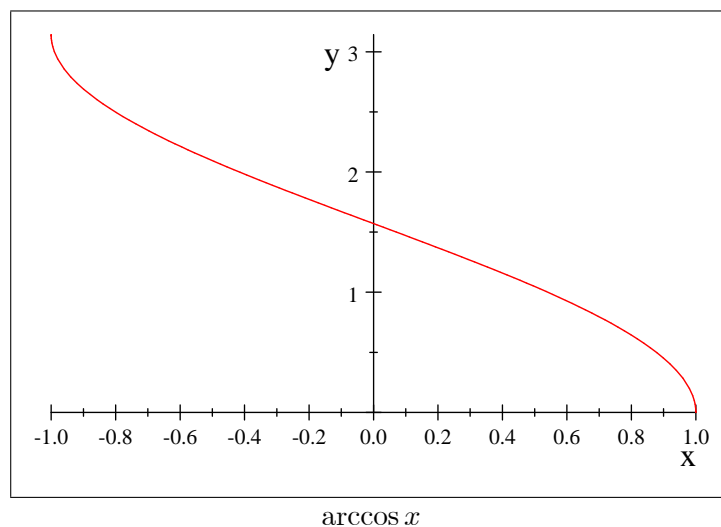
A restrição principal para  $k = 0$ ,  $[0, \pi]$ . Assim

$$\begin{aligned} g &: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto \cos x \end{aligned}$$



admita a função inversa

$$\begin{aligned} f^{-1} &: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \\ x &\longmapsto \arccos x \end{aligned}$$



### 3.13.3 Arco-tangente

A função  $h(x) = \operatorname{tg} x$  de domínio

$$D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

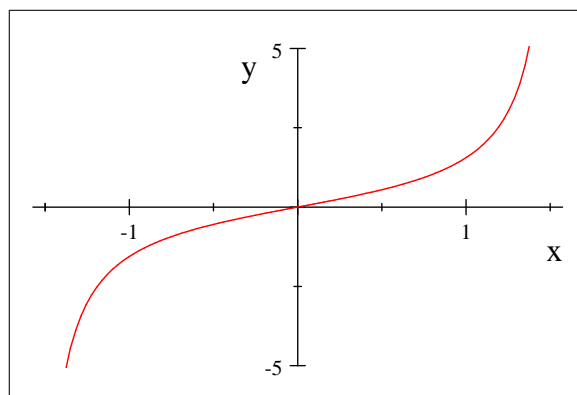
e contradomínio  $\mathbb{R}$  tem como restrições invertíveis as que tenham por domínios intervalos do tipo

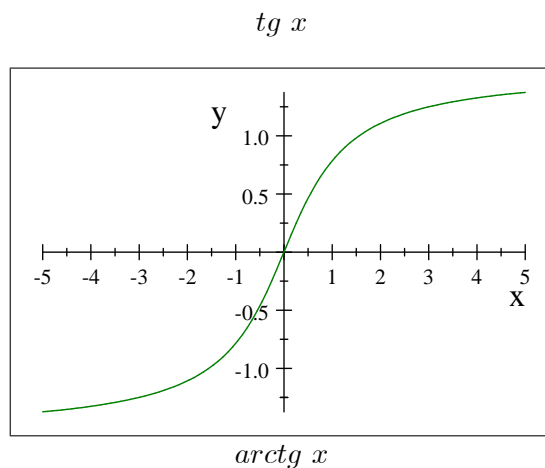
$$\left] k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right[, k \in \mathbb{Z}.$$

Para  $k = 0$ , obtém-se a restrição principal. Isto é,

$$h : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \\ x \mapsto \operatorname{tg} x \quad \quad \quad x \mapsto \operatorname{arctg} x.$$

Graficamente





### 3.13.4 Arco co-tangente

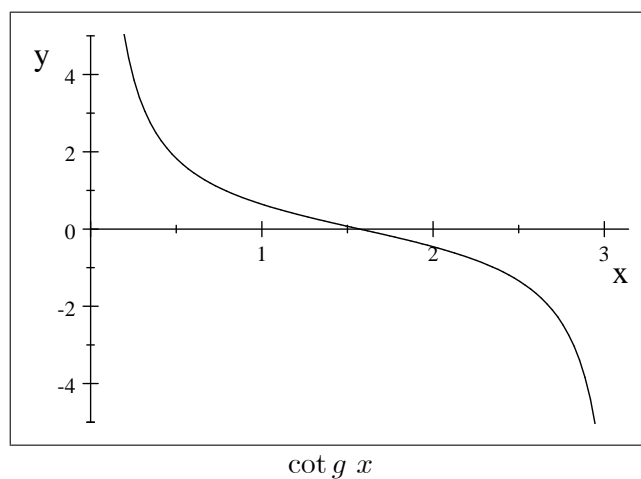
Para a função  $j(x) = \cot g\ x$  de domínio

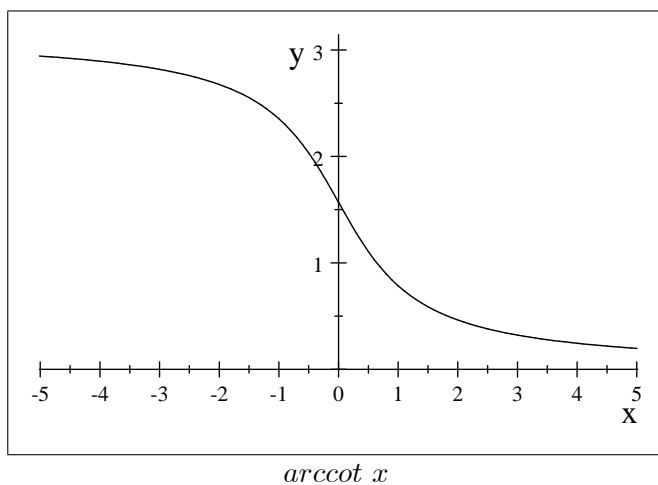
$$D_j = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$$

e contradomínio  $\mathbb{R}$  a sua restrição a intervalos do tipo  $]k\pi, k\pi + \pi[, \ k \in \mathbb{Z}$ , definem funções invertíveis. A restrição principal obtem-se para  $k = 0$ . Então,

$$j : \ ]0, \pi[ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad j^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \ ]0, \pi[ \\ x \mapsto \cot g\ x \quad \text{e} \quad x \mapsto \text{arc cot } g\ x \ .$$

Graficamente





**Exercício 3.13.1** 1. Dada a função  $h(x) = 2 + \arcsen(2x + 1)$  determine:

- a) Domínio de  $h$
- b)  $h(0)$  e  $h(-\frac{1}{6})$
- c) Contradomínio de  $h$
- d) As soluções da equação  $h(x) = 2 + \frac{\pi}{3}$
- e)  $h^{-1}$  e caracterize-a.

2. Calcular:

- a)  $\cos(\arcsen(\frac{4}{5}))$
- b)  $tg(\text{arccot}(\frac{3}{4}))$





## Capítulo 4

# Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}$

### 4.1 Derivada de uma função num ponto

Fermat foi um dos primeiros matemáticos a definir o conceito de derivada ao interessar-se em determinar o máximo e o mínimo de uma função.

Deve-se a Cauchy a formulação clássica da noção de derivada por volta de 1823:

**Definição 4.1.1** *Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real de variável real e  $a \in D$  um ponto de acumulação de  $D$ .*

*Chama-se derivada de  $f$  no ponto  $a$ , e apresenta-se  $f'(a)$ , a*

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou} \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Se o limite existir e for finito então a função  $f$  diz-se derivável ou diferenciável no ponto  $a$ .

**Exercício 4.1.2** *Utilizando a definição calcular a derivada de  $g(x) = \frac{x-2}{x+2}$  em  $x_0 = 1$ .*

### 4.2 Interpretação geométrica da derivada

A interpretação geométrica do conceito de derivada permite, em particular, definir rigorosamente tangente a uma curva cujo gráfico é definido por  $y = f(x)$ .

Não é possível definir a recta tangente a uma curva como sendo a recta que tem apenas um ponto comum com a curva. É preciso um conceito mais forte.

Considere-se uma recta secante ao gráfico de  $f(x)$ , intersectando-a nos pontos  $P_1$  e  $P_2$ .

O declive da recta  $t$  tangente a  $f(x)$  no ponto  $P_1$  vai ser o limite dos declives das rectas secantes quando  $P_2$  se aproxima de  $P_1$ , ou seja, quando  $x \rightarrow x_1$ .

Então

$$m = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1).$$

Assim, de um ponto de vista geométrico, a derivada de uma função  $f(x)$  em  $x = a$  é o declive da recta tangente ao gráfico de  $f(x)$  no ponto de abcissa  $x = a$ .

A sua equação é então dada por

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

ou

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

**Exercício 4.2.1** 1. Escreva uma equação da recta tangente à curva  $y = \frac{2}{x-4}$  no ponto de abcissa 2.

2. Determine as coordenadas dos pontos da curva  $y = x^3 - 4x$  em que a tangente nesses pontos é uma recta horizontal.

### 4.3 Derivadas laterais

Uma função  $f(x)$  pode não ter derivada num ponto  $a$  (não existir recta tangente ao gráfico de  $f(x)$ ), mas existirem semi-tangentes nesses pontos, isto é, tangente à esquerda e/ou à direita de  $a$ .

Considere-se a função

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 7 & \text{se } x < 2 \\ x + 1 & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Para estudar a existência de  $f'(2)$  é necessário recorrer ao conceito de derivadas laterais.

**Definição 4.3.1** Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in D$  um ponto de acumulação de  $D$ .

(i)  $f$  é derivável à esquerda de  $a$  se existe e é finito.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

que se representa por  $f'(a^-)$ .

(ii)  $f$  é derivável à direita de  $a$  se existe e é finito.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

que se nota por  $f'(a^+)$ .

**Observação 4.3.2** 1. Da definição anterior resulta que  $f$  é derivável em  $a$  se e só se  $f$  é derivável à esquerda e à direita de  $a$ . Neste caso  $f'(a) = f'(a^-) = f'(a^+)$ .

2. Geometricamente  $f'(a^-)$  representa o declive da semi-recta tangente à esquerda de  $a$ , enquanto  $f'(a^+)$  será o declive da semi-recta tangente à direita de  $a$ .

3. A existência de derivada de uma função num ponto pode depender apenas da existência de uma derivada lateral. Por exemplo, para  $f(x) = \sqrt{x-3}$ ,  $D_f = [3, +\infty[$  e

$$f'(3) = f'(3^+) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{x-3} = +\infty.$$

4. As funções não têm derivada nos pontos angulosos dos seus gráficos, já que as semi-tangentes nesse ponto não estão no prolongamento uma da outra.

## 4.4 Derivadas infinitas

Diz-se que a derivada de  $f$  em  $a$  é  $+\infty$  (respectivamente  $-\infty$ ) se

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \quad (-\infty).$$

As derivadas infinitas à esquerda e à direita de  $a$  definem-se de modo análogo.

Geometricamente, se  $f$  derivada infinita em  $a$ , o gráfico de  $f(x)$  admite tangente em  $(a, f(a))$ , paralela ao eixo das ordenadas.

## 4.5 Derivabilidade e continuidade

**Proposição 4.5.1** *Se  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função derivável em  $a \in D$ , então  $f$  é contínua nesse ponto.*

**Dem.** Se  $f$  é uma função derivável em  $a \in D$ , então admite derivada finita nesse ponto, isto é,

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ é finito.}$$

Escrevendo

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a)$$

e passando ao limite em ambos os membros, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0.$$

Então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , ou seja  $f(x)$  é contínua em  $x = a$ . ■

**Observação 4.5.2** 1. *A existência de derivada infinita,  $f'(a) = \pm\infty$ , não garante a continuidade de  $f$  em  $a$ .  
Por exemplo, a função sinal*

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

*tem  $f'(0) = +\infty$  e é descontínua no ponto 0.*

2. *A recíproca da Proposição 4.5.1 não é verdadeira.*

*Por exemplo, a função  $f(x) = |x|$  é contínua em  $x = 0$  e não tem  $f'(0)$ .*

## 4.6 Função derivada

Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . A função derivada ou simplesmente derivada de uma função  $f$ ,  $x \mapsto f'(x)$ , é uma nova função:

- cujo domínio é o conjunto de todos os pontos em que  $f$  tem derivada finita;

- a cada ponto do seu domínio faz corresponder a derivada da função nesse ponto.

Se  $f$  derivável em todos os pontos de  $D$ , diz-se que  $f$  é derivável (diferenciável) em  $D$  ou apenas que  $f$  é derivável (diferenciável)

**Exercício 4.6.1** *Caracterize a função derivada de cada uma das funções seguintes:*

a)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b)  $g(x) = |x - x^2|$

## 4.7 Regras de derivação

Para evitar o recurso constante à definição de derivada, utilizam-se as regras de derivação:

**Proposição 4.7.1** *Sejam  $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções deriváveis em  $a \in D$  e  $k \in \mathbb{R}$ . Então:*

1.  $(kf)(x)$  é derivável em  $a$  e  $(kf)'(a) = kf'(a)$
2.  $(f+g)(x)$  é derivável em  $a$  e  $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
3.  $(f \times g)(x)$  é derivável em  $a$  e  $(f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a)$   
Em particular,  $f^n(x)$  é derivável em  $a$  e  $(f^n)'(a) = n f^{n-1}(a) f'(a)$ , para  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Se  $g(a) \neq 0$  então  $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$  é derivável em  $a$  e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

**Dem.** 1.  $(kf)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(kf)(x) - (kf)(a)}{x - a} = k \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = kf'(a).$

2.  $(f+g)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = f'(a) + g'(a).$

3.  $(f \times g)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \times g)(x) - (f \times g)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a}$   
 $= \lim_{x \rightarrow a} \left( g(x) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a).$

$$\begin{aligned}
4. \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)g(a) - g(x)f(a)}{(x-a)g(x)g(a)}}{\frac{f(x)g(a) - g(x)f(a)}{(x-a)g(x)g(a)}} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)g(a)} \frac{g(a)[f(x) - f(a)] - f(a)[g(x) - g(a)]}{(x-a)} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)g(a)} \left[ g(a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] \\
&= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

## 4.8 Derivada da função composta

**Teorema 4.8.1** *Consideremos as funções  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\varphi : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\varphi(E) \subset D$ . Se  $\varphi$  é derivável em  $a \in E$  e  $f$  é derivável em  $b = \varphi(a) \in D$ , então  $(f \circ \varphi) : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $a$  e tem-se*

$$(f \circ \varphi)'(a) = f'(b) \varphi'(a) = f'(\varphi(a)) \varphi'(a).$$

$$\begin{aligned}
\text{Dem. } (f \circ \varphi)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \circ \varphi)(x) - (f \circ \varphi)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f[\varphi(x)] - f[\varphi(a)]}{x - a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f[\varphi(x)] - f[\varphi(a)]}{\varphi(x) - \varphi(a)} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} \right) \\
&= \lim_{\varphi(x) \rightarrow \varphi(a)} \frac{f[\varphi(x)] - f[\varphi(a)]}{\varphi(x) - \varphi(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = f'(\varphi(a)) \varphi'(a). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

## 4.9 Derivada da função inversa

**Teorema 4.9.1** *Seja  $f$  uma função diferenciável e injectiva num intervalo  $D \subset \mathbb{R}$  e  $a \in D$  tal que  $f'(a) \neq 0$ . Então  $f^{-1}$  é diferenciável em  $b = f(a)$  e*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

**Dem.** Represente-se  $y = f(x)$  e observe-se que se  $y \neq b$  então  $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b) = a$ .

Então pode escrever-se

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(b) &= \lim_{y \rightarrow b} \frac{(f^{-1})(y) - (f^{-1})(b)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\frac{y - b}{(f^{-1})(y) - (f^{-1})(b)}} \\
&= \frac{1}{\lim_{y \rightarrow b} \frac{f[f^{-1}(y)] - f(a)}{(f^{-1})(y) - a}} = \frac{1}{\lim_{f^{-1}(y) \rightarrow a} \frac{f[f^{-1}(y)] - f(a)}{(f^{-1})(y) - a}} = \frac{1}{f'(a)}.
\end{aligned}$$

■

**Observação 4.9.2** A hipótese  $f'(a) \neq 0$  é fundamental pois, caso contrário, o resultado não é necessariamente verdadeiro. Tome-se como exemplo a função bijectiva  $f(x) = x^3$ . A sua inversa,  $\sqrt[3]{x}$ , não é derivável na origem.

## 4.10 Derivadas de funções trigonométricas

### 4.10.1 Derivada da função $f(x) = \operatorname{sen} x$

Provemos que a função  $f(x) = \operatorname{sen} x$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e determinemos a sua expressão:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \operatorname{sen} \left( \frac{x-a}{2} \right) \cos \left( \frac{x+a}{2} \right)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{x-a}{2} \right)}{\frac{x-a}{2}} \cos \left( \frac{x+a}{2} \right) = \cos a. \end{aligned}$$

Então  $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$ .

### 4.10.2 Derivada da função $\cos x$

A função  $\cos x = \operatorname{sen} \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$  pode ser considerada como a composição da função  $\operatorname{sen} x$  com a função  $x + \frac{\pi}{2}$ .

Então, pelo Teorema 4.8.1, é diferenciável em todos os pontos, sendo a sua derivada

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \left[ \operatorname{sen} \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \right]' = \cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \left( x + \frac{\pi}{2} \right)' \\ &= -\operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

### 4.10.3 Derivada das funções $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{cot} g x$

A derivabilidade da função  $\operatorname{tg} : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  resulta directamente das regras de derivação

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left( \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)' \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x. \end{aligned}$$

Para a função  $\operatorname{cot} g : ]0, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  tem-se

$$\begin{aligned} (\operatorname{cot} g x)' &= \left( \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right)' \\ &= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x = -(1 + \operatorname{cot}^2 g x). \end{aligned}$$

**Exercício 4.10.1** Calcular a derivada das funções

a)  $f(x) = tg\left(\frac{1}{x+3}\right)$

b)  $g(x) = \cot g^2(x^2)$

#### 4.10.4 Derivada das funções trigonométricas inversas

A função  $x \mapsto \arcsen x$  é a função inversa de  $y \mapsto \sen y$ , isto é, designando por  $x = f(y) = \sen y$  então  $y = f^{-1}(x) = \arcsen x$ .

Pelo Teorema 4.9.1, obtem-se

$$\begin{aligned} (\arcsen x)' &= (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{(\sen y)'} \\ &= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sen^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

Então a função  $y = \arcsen x$  é diferenciável em todo o seu domínio e

$$(\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Da relação  $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$  tem-se

$$\begin{aligned} (\arccos x)' &= (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{(\cos y)'} \\ &= -\frac{1}{\sen y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \end{aligned}$$

pelo que

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

A partir da relação  $y = \arctg x \Leftrightarrow x = tg y$  obtem-se

$$(\arctg x)' = \frac{1}{(tg y)'} = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

As fórmulas anteriores permanecem válidas se se substituir  $x$  por uma função  $u(x)$ , diferenciável nos respectivos domínios e se aplicar o teorema da derivada da função composta. Assim

$$\begin{aligned} (\arcsen u)' &= \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}, \\ (\arctg u)' &= \frac{u'}{1 + u^2}. \end{aligned}$$



## 4.11 Derivadas das funções exponencial e logarítmica

A função exponencial é derivável em  $\mathbb{R}$  e

$$(e^x)' = e^x$$

pois, considerando  $f(x) = e^x$  tem-se

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = e^a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^h - 1)}{h} = e^a.$$

Seja  $u : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável, a função composta  $e^{u(x)}$  é ainda diferenciável em  $\mathbb{R}$  e

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) e^{u(x)}, \forall x \in D.$$

A função  $x \mapsto a^x$ , com  $a > 0$ , é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e

$$(a^x)' = a^x \log a,$$

pois  $a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a}$  e aplicando a regra anterior obtém-se

$$\begin{aligned} (a^x)' &= \left(e^{x \log a}\right)' = e^{x \log a} (x \log a)' \\ &= a^x \log a. \end{aligned}$$

Analogamente para  $u(x)$  uma função diferenciável,

$$\left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)} \log a u'(x).$$

A função  $f(x) = \log x$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^+$  e, para  $a > 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(a+h) - \log a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{a+h}{a}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{a}\right)}{h} = \frac{1}{a} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{a}\right)}{\frac{h}{a}} = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Então

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

e, para  $u : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável tal que  $u(x) > 0, \forall x \in D$ , a função composta  $\log(u(x))$  é diferenciável e

$$(\log(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}, \quad \forall x \in D.$$

A função  $f(x) = \log_a x$ , com  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ , é diferenciável em  $\mathbb{R}^+$  e notando que

$$\log_a x = \log x \log_a e$$

obtem-se

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \log a},$$

pois

$$1 = \log_e e = \log_a e \log_e a = \log_a e \log a,$$

pelo que

$$\log_a e = \frac{1}{\log a}.$$

Sendo  $u(x)$  uma função diferenciável com  $u(x) > 0, \forall x \in D$ , então a derivada de  $y = \log_a(u(x))$  é

$$(\log_a(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x) \log a}.$$

**Exercício 4.11.1** Calcular as derivadas de

a)  $y = \log_5(\operatorname{arctg} x)$

b)  $y = e^{\sqrt{3}x} + 5^{\cos x}.$

## 4.12 Teoremas fundamentais do cálculo diferencial

A possibilidade de aproximar localmente as funções diferenciáveis por funções "muito simples" (geometricamente corresponde a aproximar curvas por retas tangentes no ponto de contacto), permite simplificar o estudo de funções reais de variável real e constitui o interesse fundamental do conceito de derivada.

Outra utilidade baseia-se na busca de máximos e mínimos de funções diferenciáveis.

**Definição 4.12.1** Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in D$ .

- (i) Diz-se que  $f$  tem um máximo local (ou relativo) em  $a$  (ou que  $f(a)$  é um um máximo local ou relativo de  $f$ ) se e só se existir  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x) \leq f(a)$ ,  $\forall x \in V_\varepsilon(a) \cap D$ .
- (ii) Analogamente,  $f$  tem um mínimo local (ou relativo) em  $a$  (ou que  $f(a)$  é um um mínimo local ou relativo de  $f$ ) se e só se existir  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(a) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in V_\varepsilon(a) \cap D$ .
- (iii) Se as desigualdades anteriores forem estritas, isto é,  $f(x) < f(a)$  (ou  $f(a) < f(x)$ ),  $\forall x \in V_\varepsilon(a) \cap (D \setminus \{a\})$  então diz-se que  $f(a)$  é um um máximo local (mínimo local) estrito.
- (iv) Se se falar, indistintamente, de máximos ou mínimos diz-se extremo local (ou relativo).
- (v) Se se verificar  $f(x) \leq f(a)$ ,  $\forall x \in D$ , então diz-se que  $f(a)$  é um máximo absoluto de  $f$  em  $D$ .  
Analogamente, se  $f(a) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in D$ ,  $f(a)$  é um mínimo absoluto de  $f$  em  $D$ .

Um resultado importante para a pesquisa de extremos locais de uma função é o seguinte:

**Proposição 4.12.2** *Seja  $D$  um intervalo de  $\mathbb{R}$  com mais do que um ponto e  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável no ponto interior  $a \in D$ .*

*Se  $f$  tem um extremo local em  $a$  então  $f'(a) = 0$ , isto é,  $a$  é um ponto crítico de  $f$ .*

**Dem.** Suponhamos que  $f$  tem um máximo local em  $a$ . Então

$$\exists \varepsilon > 0 : f(x) \leq f(a) \text{ em } ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[,$$

pelo facto de  $a$  ser um ponto interior a  $D$ .

Para  $x \in ]a - \varepsilon, a[$ ,  $f(x) \leq f(a)$  e  $x < a$ . Como  $f$  é diferenciável em  $a$  então existe e é finito

$$f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

Analogamente para  $x \in ]a, a + \varepsilon[$ ,  $f(x) \leq f(a)$ ,  $x > a$  e

$$f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

Como  $f$  é diferenciável em  $x = a$  então

$$0 \leq f'(a^-) = f'(a) = f'(a^+) \leq 0,$$

pelo que  $f'(a) = 0$ .

Se supusermos que  $f(a)$  é um mínimo local, a demonstração é semelhante. ■

**Observação 4.12.3** *O recíproco desta proposição não é verdadeira, isto é, existem funções com derivada nula num ponto que, contudo, não é extremo local.*

A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^3$  é estritamente crescente não tendo portanto nenhum extremo local. Todavia  $f'(0) = 0$ .

**Teorema 4.12.4** (Teorema de Rolle) *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua no intervalo  $[a, b]$  e com derivada (finita ou infinita) em todos os pontos de  $]a, b[$ .*

*Se  $f(a) = f(b)$  então existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $f'(c) = 0$ .*

**Dem.** Como  $f$  é contínua no conjunto limitado e fechado  $[a, b]$ , pelo Teorema 3.8.5  $f$  tem máximo e mínimo (absolutos) relativos em  $[a, b]$ .

Se o máximo e o mínimo são atingidos nas extremidades, como  $f(a) = f(b)$  então  $f(x) \equiv k$  e, portanto,  $f'(c) = 0$ ,  $\forall c \in ]a, b[$ .

Caso contrário o máximo é atingido num ponto interior  $c \in ]a, b[$  e, pela Proposição 4.12.2,  $f'(c) = 0$ . ■

**Corolário 4.12.5** *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua em  $[a, b]$  e tem derivada (finita ou infinita) em todos os pontos de  $]a, b[$  então entre dois zeros consecutivos de  $f'$  não pode haver mais que um zero de  $f$ .*

**Dem.** Sejam  $x_1$  e  $x_2$  dois zeros consecutivos de  $f'$ .

Suponha-se, com visto à obtenção de um absurdo, que existem  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $x_1 < \alpha < \beta < x_2$  e  $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ . Então, pelo Teorema 4.12.4, existe  $d \in ]\alpha, \beta[$  tal que  $f'(d) = 0$ . Isto é absurdo porque assim  $x_1$  e  $x_2$  não podem ser dois zeros consecutivos de  $f'(x)$ .

Portanto entre dois zeros consecutivos de  $f'$  não pode haver mais que um zero de  $f(x)$  (note-se que pode até não haver nenhum). ■

**Corolário 4.12.6** *Seja  $f$  uma função que satisfaz as condições do Teorema de Rolle.*

*Então entre dois zeros de  $f$  há pelo menos um zero de  $f'$ .*

**Dem.** Sejam  $x_1$  e  $x_2$  dois zeros consecutivos de  $f$ , isto é,  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ . Então pelo Teorema 4.12.4, existe  $c \in ]x_1, x_2[$  tal que  $f'(c) = 0$ .

■

**Exercício 4.12.7** Considere a função  $f : [-2\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - x$ . Prove que  $f(x)$  admite um único zero no intervalo  $]-\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}[$ .

**Teorema 4.12.8** (*Teorema do valor médio de Lagrange ou Teorema dos acréscimos finitos*) Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua em  $[a, b]$  e com derivada (finita ou infinita) em  $]a, b[$ . Então existe pelo menos um ponto  $c \in ]a, b[$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Dem.** Considere-se uma função auxiliar

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x.$$

Esta nova função verifica as hipóteses do Teorema 4.12.4 em  $[a, b]$ , pois:

- $h(x)$  é contínua em  $[a, b]$
- $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  tem derivada em  $]a, b[$ , pois  $f$  também tem.
- $h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a = \frac{(b - a)f(a) - [f(b) - f(a)]a}{b - a} = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = h(b)$ .

Então

$$\exists c \in ]a, b[: h'(c) = 0.$$

Isto é,

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

**Interpretação geométrica:**

A existência de  $c \in ]a, b[$  tal que  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  significa que existe um ponto  $c \in ]a, b[$  no qual a tangente ao gráfico de  $f(x)$  tem um declive igual ao declive da recta secante definida pelos pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ .

**Interpretação física:**

Se  $f$  verificar as condições do Teorema de Lagrange, se  $a$  e  $b$  forem instantes distintos no tempo e  $f(t)$  for a posição em cada instante  $t$  de

um ponto que se move no eixo real, então existe um instante  $c$  onde a velocidade instantânea  $f'(c)$  é igual à velocidade média  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  entre os referidos instantes. (Daí o nome de teorema do valor médio aplicado ao Teorema de Lagrange)

Uma importante extensão do Teorema de Lagrange constitui o resultado seguinte:

**Teorema 4.12.9** (Teorema de Cauchy). Se  $f$  e  $g$  são duas funções contínuas em  $[a, b]$ , diferenciáveis em  $]a, b[$  e se para  $x \in ]a, b[$ ,  $g'(x) \neq 0$  então existe um ponto  $c \in ]a, b[$  tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

**Dem.** Considere-se a função

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a)).$$

A função  $F(x)$  é contínua em  $[a, b]$ , porque  $f$  e  $g$  também o são, e diferenciável em  $]a, b[$ ,

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x).$$

Por outro lado, como

$$F(a) = 0 \text{ e } F(b) = 0,$$

o Teorema de Rolle garante a existência de  $c \in ]a, b[$  tal que  $F'(c) = 0$ , ou seja

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0.$$

Como  $g'(c) \neq 0$  tem-se

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

■

Uma das aplicações mais importantes deste teorema é a utilização de uma regra para levantar indeterminações.

**Teorema 4.12.10** (Regra de Cauchy) Sejam  $f$  e  $g$  duas funções diferenciáveis em  $]a, b[$  tais que:

a)  $g'(x) \neq 0$  para cada  $x \in ]a, b[$ ;

- b)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  ou então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ ;  
 c) existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  em  $\mathbb{R}$ ;

Então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

**Dem.** Se

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \text{ (finito)}$$

então existe  $\beta \in ]a, b[$  tal que para  $x \in ]a, \beta[$  e para  $\delta > 0$  arbitrário se tem

$$l - \delta < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \delta.$$

Sejam  $x$  e  $y$  dois pontos distintos de  $]a, \beta[$ . Então pelo Teorema de Cauchy existe  $\xi$  situado entre eles tal que

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Portanto para quaisquer pontos nestas condições obtem-se

$$l - \delta < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < l + \delta. \quad (4.12.1)$$

No caso de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , fixemos arbitrariamente  $x \in ]a, \beta[$  e fazendo  $y \rightarrow a$  conclui-se que as desigualdades

$$l - \delta < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \delta$$

têm que ser verificadas para  $\forall x \in ]a, \beta[$ , o que prova que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

No caso em que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ , fixa-se  $y \in ]a, \beta[$  e determina-se  $\gamma$  tal que, para  $x \in ]a, \gamma[$  se tenha

$$g(x) > 0 \text{ e } g(x) > g(\gamma).$$

Das desigualdades (4.12.1) resulta que, para  $x \in ]a, \gamma[$ , se tem

$$\frac{f(y)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)(l - \delta) < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{f(y)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)(l + \delta).$$

Quando  $x \rightarrow a$  o primeiro membro tende para  $l - \delta$  e o segundo membro para  $l + \delta$ , pelo que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$  o processo é análogo.

Se  $l = \pm\infty$  então obrigatoriamente existe um intervalo  $]a, d[$  ( $d > a$ ) onde  $f'(x) \neq 0$ , pois caso contrário, como  $g'(x) \neq 0$  em  $]a, b[$ , isso seria incompatível com o facto de

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty.$$

Assim trocando no enunciado do Teorema  $f$  por  $g$  e  $g$  por  $f$  fica-se com o caso de  $l = 0$ , que já foi considerado na primeira parte da demonstração. ■

### 4.13 Derivadas de ordem superior

Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $a \in D$ . No caso de  $f'$  ser por sua vez também diferenciável num ponto  $a$  interior do seu domínio  $D'$ , então diz-se que  $f$  é duas vezes diferenciável em  $a$ , e representa-se por  $f''(a)$ .

Em geral, a derivada de ordem  $n$  da função  $f$ , representa-se por  $f^{(n)}$  ou  $\frac{d^n f}{dx^n}$ .

A função  $f$  diz-se  $n$  vezes diferenciável no ponto  $a$  do respectivo domínio  $D^{(n)}$  se existir e for finita a derivada  $f^{(n)}(a)$ .

A função  $f$  é indefinidamente diferenciável no ponto  $a$  se for  $n$  vezes diferenciável em  $a$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .

Exemplo: A função  $f(x) = e^x$  é indefinidamente diferenciável em  $\mathbb{R}$ , tendo-se para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{d^n}{dx^n} (e^x) = e^x.$$

A derivada de 1ª ordem, como já foi referido anteriormente, pode ser entendida como o "contacto" da função com a recta tangente ao gráfico nesse ponto.



Para as derivadas de ordem  $n$  de  $f$  podem-se admitir "contactos" de ordem  $n$ , o que permite aproximar uma função diferenciável qualquer por um polinómio cujos termos serão constituídos pelos vários "contactos".

**Definição 4.13.1** *Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $n$  vezes diferenciável em  $a \in D$ . Chama-se polinómio de Taylor de ordem  $n$  de  $f$  no ponto  $a$ ,*

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

*Se  $a = 0$  o polinómio de Taylor é designado por polinómio de MacLaurin e assume uma forma mais simplificada*

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

**Teorema 4.13.2** *Se  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $n$  vezes diferenciável em  $a \in D$  então para qualquer  $x \in D$  é válida a fórmula de Taylor*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

*verificando o resto  $R_n(x)$  a condição*

$$\lim_{x \rightarrow a} R_n(x) = 0.$$

*No caso particular de  $a = 0$ , a fórmula de Taylor é também chamada fórmula de Mac-Laurin:*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

O interesse da fórmula de Taylor será acrescido se for possível explicitar o termo complementar  $R_n(x)$  possibilitando uma estimação do seu valor, isto é, uma aproximação do erro cometido quando se substitui a função pelo correspondente polinómio de Taylor.

**Teorema 4.13.3** *(Fórmula do resto de Lagrange) Seja  $f$  uma função  $(n+1)$  vezes diferenciável num intervalo aberto  $I$  e  $a \in I$ . Então para cada  $x \in I \setminus \{a\}$  existe  $\xi$  tal que  $a < \xi < x$ , tem que o termo complementar (resto) da sua fórmula de Taylor de ordem  $n$  no mesmo ponto,  $R_n(x)$ , é dado por*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

**Exercício 4.13.4** Para a função  $f(x) = \sin x$  determine o polinómio de Mac-Laurin de ordem 6 associado e indique uma majoração para o erro cometido.

#### 4.14 Aplicações da fórmula de Taylor à determinação de extremos, convexidade e inflexões

Anteriormente viu-se que, para uma função  $f$ , diferenciável num ponto  $a$ , tenha um extremo local neste ponto, é necessário, embora não suficiente, que  $f'(a) = 0$ .

Chamam-se pontos críticos ou estacionários de uma função  $f$  aos zeros da sua função derivada. Para decidir se um ponto crítico é ou não um ponto de máximo ou de mínimo, pode recorrer-se ao sinal da 1ª derivada.

Nos casos em que não seja possível estudar o sinal de  $f'(x)$  em pontos próximos de  $a$  o recurso à fórmula de Taylor dá um método alternativo, que pode ser útil se forem conhecidos os valores assumidos no ponto  $a$  por algumas das derivadas de ordem superior à primeira.

Exemplo: Se  $f$  é duas vezes diferenciável em  $a$ ,  $f'(a) = 0$  e  $f''(a) \neq 0$  então a fórmula de Taylor com resto de Lagrange será

$$f(x) = f(a) + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2} + R_2(x)$$

com  $\lim_{x \rightarrow a} R_2(x) = 0$ . Então existe  $\epsilon > 0$  tal que para  $x \in V_\epsilon(a)$  se tem que  $|R_2(x)| < |f''(a)|$ . Assim o sinal da soma  $f''(a) \frac{(x-a)^2}{2} + R_2(x)$ , em  $V_\epsilon(a)$ , será o sinal do primeiro termo.

Se  $f''(a) > 0$  tem-se

$$f(x) - f(a) = f''(a) \frac{(x-a)^2}{2} + R_2(x) \geq 0,$$

isto é,  $f(x) > f(a)$  para  $x \in V_\epsilon(a)$ . Se for  $f''(a) < 0$  tem-se  $f(x) < f(a)$  para  $x \in V_\epsilon(a)$ . No primeiro caso tem-se um mínimo local estrito e no segundo caso um máximo local também estrito.

Se  $f''(a) = 0$  o processo não era aplicável e ter-se-ia que realizar o mesmo processo para a primeira ordem da derivada que não se anulasse em  $a$ . Assim:

**Teorema 4.14.1** *Seja  $f$  uma função  $n$  vezes diferenciável em  $a$ , com  $n \geq 2$ , e suponha-se  $f^{(n)}(x)$  é a primeira derivada que não se anula em  $a$ . Então:*

1. se  $n$  é ímpar,  $f$  não tem qualquer extremo no ponto  $a$ ;

#### 4.14. APLICAÇÕES DA FÓRMULA DE TAYLOR À DETERMINAÇÃO DE EXTREMOS, CONVEXIDADE

2. se  $n$  é par,  $f(a)$  é um máximo ou um mínimo local (estrito) de  $f$ , conforme  $f^{(n)}(a) < 0$  ou  $f^{(n)}(a) > 0$ .

**Dem.** Como  $f$  é uma função  $n$  vezes diferenciável em  $a$  então, numa vizinhança de  $a$ ,  $V_\epsilon(a)$ , pode ser representada pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

para  $x \in V_\epsilon(a)$ .

Como  $f^{(n)}(x)$  é a primeira derivada que não se anula em  $a$  então

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\ &= \frac{(x-a)^n}{n!} \left[ f^{(n)}(a) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}(x-a) \right]. \end{aligned}$$

Como  $(x-a)$  pode ser arbitrariamente pequeno então o sinal dominante do último factor será o sinal de  $f^{(n)}(a)$ .

Se  $n$  é ímpar, o primeiro membro  $f(x) - f(a)$  toma sinais contrários quando  $x$  toma valores à esquerda ou à direita de  $a$ , mas suficientemente próximos. Logo  $f(a)$  não é um extremo.

Se  $n$  é par, o sinal de  $f(x) - f(a)$  é o mesmo que o sinal de  $f^{(n)}(a)$ .

Assim se  $f^{(n)}(a) < 0$  então  $f(x) < f(a)$  para  $x \in V_\epsilon(a)$ , pelo que  $f(a)$  é um máximo. Se  $f^{(n)}(a) > 0$  então  $f(a)$  é um mínimo local ■

**Exemplo 4.14.2** A função  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$  tem unicamente dois pontos estacionários: 0 e 1. Como  $f''(1) = 12 > 0$  então  $f(1) = 1$  é um mínimo de  $f$ . No ponto 0,  $f''(0) = 0$ ,  $f'''(0) = -24$  pelo que  $f(0)$  não é um ponto de extremo.

Outra aplicação da fórmula de Taylor está relacionada com a noção de convexidade, isto é, com a posição do gráfico da função  $f$ , diferenciável em  $a$ , em relação à respectiva tangente no ponto  $(a, f(a))$ :

Se existe  $\epsilon > 0$  tal que em  $V_\epsilon(a)$  o gráfico de  $f$  está acima do da função  $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$  diz-se que a função  $f$  é convexa em  $a$  ou que tem a concavidade voltada para cima nesse ponto.

Se o gráfico de  $g$  está acima do de  $f$  diz-se que a função  $f$  é côncava em  $a$  ou que tem a concavidade voltada para baixo nesse ponto.

Pode acontecer que exista um intervalo à esquerda de  $a$  e outro à direita de  $a$  em que o gráfico de  $f$  esteja acima do de  $g$  num deles e abaixo noutro. Neste caso diz-se que  $a$  é um ponto de inflexão de  $f$ .

**Teorema 4.14.3** *Seja  $f$  uma função  $n$  vezes diferenciável em  $a$ , ( $n \geq 2$ ), e suponha-se que são nulas em  $a$  todas as derivadas de  $f$  de ordem superior à primeira e inferior a  $n$ , isto é,*

$$f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Então:

1. se  $n$  é ímpar,  $a$  é um ponto de inflexão de  $f$  ;
2. se  $n$  é par,  $f$  é convexa ou côncava no ponto  $a$  conforme  $f^{(n)}(a) > 0$  ou  $f^{(n)}(a) < 0$ , respectivamente.

**Dem.** A demonstração é semelhante à do Teorema 4.14.1, considerando a agora a Fórmula de Taylor de ordem  $n$  com resto de Lagrange na forma

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

e então

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = \frac{(x-a)^n}{n!} \left[ f^{(n)}(a) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}(x-a) \right].$$

■

**Exemplo 4.14.4** Para  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  tem-se para  $x \neq 0$ ,  $f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$ . O gráfico tem a concavidade voltada para baixo se  $x > 0$  e para cima se  $x < 0$ . O ponto 0 é um ponto de continuidade de  $f$  e  $f'(0) = +\infty$ , pelo que se trata de um ponto de inflexão.

## 4.15 Séries de funções

O conceito de soma infinita de números reais, que se estudou no capítulo das séries numéricas, pode agora ser generalizado à soma infinita de funções. Este aspecto coloca novos desafios, por exemplo permite que a "mesma série função" possa ser simultaneamente convergente ou divergente, dependendo da concretização da variável.

Começemos por definir o que se considera por série de funções:

**Definição 4.15.1** Chama-se *série de funções* a uma expressão do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

isto é,  $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$ , em que  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  funções definidas num certo domínio  $D \subset \mathbb{R}$ .

A série é convergente num ponto  $x_0 \in D$  se for convergente a série numérica

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + \dots + f_n(x_0) + \dots$$

Neste caso

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x),$$

designando-se  $f(x)$  por função soma.

O domínio da função soma é o conjunto onde a série converge.

**Definição 4.15.2** O conjunto de valores de  $x$  para os quais a série de funções é convergente chama-se *intervalo de convergência*.

**Exercício 4.15.3** Estudar a convergência das séries:

**Exemplo 4.15.4** a)  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$

## 4.16 Séries de potências

Um caso particular de séries de funções são as séries de potências de  $x$ ,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n.$$

Para determinar os pontos onde esta série é convergente pode começar-se por determinar o raio  $r$  de convergência (absoluta)

$$r = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

e depois determinar o intervalo de convergência, isto é o conjunto  $x \in ]-r, r[$ .

Em alternativa, pode aplicar-se directamente o critério de D' Alembert

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} = |x| \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

por este processo a série é convergente para os valores que verifiquem a inequação

$$|x| \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1.$$

Nos pontos  $x = -r$  ou  $x = r$ , substitui-se  $x$  por  $r$  e estuda-se a série directamente utilizando os critérios das séries numéricas.

No intervalo de convergência uma série de potências de  $x$  define uma função contínua.

**Exercício 4.16.1** *Estudar quanto à convergência a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

Séries de potências de  $(x - a)$  são séries do tipo

$$a_0 + a_1 (x - a) + a_2 (x - a)^2 + \cdots + a_n (x - a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - a)^n.$$

Sendo  $r$  o raio de convergência da série, nestes casos o intervalo de convergência será  $]a - r, a + r[$ .

## 4.17 Série de Taylor para funções reais de variável real

**Definição 4.17.1** *Se a função real de variável real  $f$  for indefinidamente diferenciável no ponto  $a$  obtém-se a fórmula*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a) \frac{(x - a)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(a) \frac{(x - a)^n}{n!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

que se designa por série de Taylor.

#### 4.17. SÉRIE DE TAYLOR PARA FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL 105

Se a série de Taylor representar  $f(x)$  numa vizinhança de  $a$  diz-se que  $f(x)$  é analítica em  $a$ .

No caso de  $a = 0$ , a série de Taylor designa-se por série de Mac-Laurin:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

**Exercício 4.17.2** *Determine a série de Mac-Laurin das funções:*

a)  $f(x) = e^x$

b)  $g(x) = \operatorname{sen} x$

**Exercício 4.17.3** *Desenvolva em série de potências de  $x$  a função*

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}.$$





## Capítulo 5

# Cálculo Integral em $\mathbb{R}$

### 5.1 Primitivas

**Definição 5.1.1**  $F(x)$  é uma primitiva de  $f(x)$ , num certo intervalo  $I$ , se

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Isto é  $Pf(x) = F(x) \implies F'(x) = f(x), \forall x \in I$ .

Resulta imediatamente desta definição que a operação de primitivação é a operação inversa da derivação.

Como  $[F(x) + c]' = F'(x)$  para qualquer valor de  $c \in \mathbb{R}$ , então existe uma infinidade de primitivas de uma certa função.

Assim designa-se por expressão geral das primitivas de  $f(x)$  a

$$Pf(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Proposição 5.1.2** Duas primitivas de uma mesma função, num certo intervalo  $I$ , diferem sempre de uma constante.

**Dem.** Sejam  $F(x)$  e  $G(x)$  duas primitivas de uma mesma função  $f(x)$ . Então  $F'(x) = f(x)$ ,  $G'(x) = f(x)$  e

$$[F(x) - G(x)]' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

■

A hipótese de se considerar um intervalo  $I$  é fundamental, porque a função pode não ser primitivável para todo o conjunto  $\mathbb{R}$ .

Veja-se, por exemplo, a função definida em  $\mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Suponhamos que existe uma primitiva de  $f(x)$ ,  $F(x)$ , em  $\mathbb{R}$ .  
Então, pelo Teorema de Lagrange, existe  $c \in ]x, 0[$  tal que

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = F'(c) = f(c) = -1, \text{ porque } c < 0.$$

Pela definição de derivada lateral

$$F'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} F'(c) = -1.$$

Contudo não é possível ter uma situação de

$$F'(0) = F'(0^-) = F'(0^+) = -1 = f(0)$$

porque  $f(0) = 1$ .

Então  $f(x)$  não é primitivável em  $\mathbb{R}$ , embora o seja em  $]0, +\infty[$  ou  $]-\infty, 0[$ .

## 5.2 Primitivas imediatas e quase imediatas

Estas primitivas obtêm-se utilizando apenas as regras de derivação, eventualmente com operações preliminares.

Seja  $f(x)$  uma função primitivável num certo intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ .

### 5.2.1 Primitiva de uma constante

Como  $(kx)' = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , então

$$Pk = kx + c, \quad k, c \in \mathbb{R}.$$

Generalizando, como  $(kPf(x))' = k(Pf(x))' = kf(x)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , então

$$P(kf(x)) = k(Pf(x)).$$

### 5.2.2 Primitiva de uma potência de expoente real

Para  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , tem-se  $\left(\frac{f^{m+1}}{m+1}\right)' = f^m f'$ , pelo que

$$Pf^m(x) f'(x) = \frac{f^{m+1}(x)}{m+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad m \neq -1.$$

**Exercício 5.2.1** *Calcular:*

$$1. P\sqrt{2x+1}$$

$$2. P\frac{\log x}{x}$$

$$3. P\frac{4}{(1+5x)^3}$$

No caso de  $m = -1$  tem-se que  $\frac{f'}{f} = (\log f)'$ , e assim

$$P\frac{f'(x)}{f(x)} = (\log f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Exercício 5.2.2** *Calcular:*

$$1. P\frac{x^3}{x^4+a^2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

$$2. P\operatorname{tg} x.$$

Se se substituir  $x$  por uma função  $f(x)$  diferenciável, tem-se

$$P\operatorname{tg}(f(x)) f'(x) = -\log |\cos(f(x))| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

### 5.2.3 Primitiva de funções exponenciais

Como  $(e^f)' = e^f f'$  então

$$P(e^{f(x)} f'(x)) = e^{f(x)} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P(a^{f(x)} f'(x)) &= P(e^{f(x) \log a} f'(x)) = \frac{e^{f(x) \log a}}{\log a} \\ &= \frac{a^{f(x)}}{\log a} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Exercício 5.2.3** *Calcular:*

$$1. P(xe^{-x^2}).$$

$$2. P\frac{3^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

### 5.2.4 Primitiva de funções trigonométricas

Como  $(-\cos(f))' = f' \operatorname{sen}(f)$  tem-se

$$P[f'(x) \operatorname{sen}(f(x))] = -\cos(f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

e, analogamente,

$$P[f'(x) \cos(f(x))] = \operatorname{sen}(f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Pelo mesmo processo  $(\operatorname{tg}(f))' = f' \sec^2(f)$  e

$$P[f'(x) \sec^2(f(x))] = \operatorname{tg}(f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Partindo novamente das derivadas  $(\operatorname{arcsen}(f))' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$ , pelo que

$$P \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} = \operatorname{arcsen}(f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

e

$$P \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} = \operatorname{arctg}(f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

**Exercício 5.2.4** *Calcular:*

1.  $P(\operatorname{sen}(2x))$ .
2.  $P \sec^2(3x)$ .
3.  $P \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}$ .
4.  $P \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ .
5.  $P \frac{x}{1+x^6}$ .

## 5.3 Métodos de primitivação

Se uma função não pode ser primitivada só por aplicação das regras de derivação (primitivas imediatas) ou após alguns artifícios (primitivas quase imediatas) recorre-se a um ou mais métodos de primitivação.

### 5.3.1 Primitivação por decomposição

Baseia-se na linearidade da primitiva:

**Teorema 5.3.1** *Sejam  $f_i$  funções primitiváveis num domínio  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , e  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ . Então*

$$P(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n) = \alpha_1 P f_1 + \alpha_2 P f_2 + \dots + \alpha_n P f_n.$$

Alguns casos particulares merecem atenção:

- Para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(\sin x)^{2n+1} = P(\sin^2 x)^n \sin x = P(1 - \cos^2 x)^n \sin x$ .

Desenvolvendo  $(1 - \cos^2 x)^n$  obtêm-se potências de  $\cos x$  multiplicadas por  $\sin x$  e a cada uma delas pode aplicar-se a relação

$$P(\cos^k x \sin x) = -\frac{\cos^{k+1} x}{k+1}, \quad k = 0, 2, \dots, 2n.$$

- Para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $Ptg^n(x) = Ptg^{n-2}(x) tg^2(x) = Ptg^{n-2}(x) (\sec^2 x - 1) = Ptg^{n-2}(x) (\sec^2 x - 1) = Ptg^{n-2}(x) \sec^2 x - Ptg^{n-2}(x)$ .  
Desta forma obtém-se a fórmula por recorrência

$$Ptg^n(x) = \frac{tg^{n-1}(x)}{n-1} - Ptg^{n-2}(x).$$

- Para fracções racionais com aplicação do método dos coeficientes indeterminados pode decompor-se a fracção inicial em fracções "mais simples":

Exemplo:

$$P \frac{2x^5}{x^2 + 1} = 2P \left( x^3 - x + \frac{x}{x^2 + 1} \right).$$

### 5.3.2 Primitivação por partes

Este método baseia-se na fórmula para a derivada do produto de funções

$$(uv)' = u'v + uv' \Leftrightarrow u'v = (uv)' - uv'$$

pelo que:

**Teorema 5.3.2** *Sejam  $u$  e  $v$  duas funções reais definidas e diferenciáveis num intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Se o produto  $u'v$  for primitivável então*

$$P[u'(x)v(x)] = u(x)v(x) - P[u(x)v'(x)].$$

Como indicação geral, será conveniente escolher o factor correspondente à função  $v$  aquele que se simplificar mais por derivação. Contudo há algumas excepções, como se verifica no próximo exercício:

**Exercício 5.3.3** *Calcular:*

1.  $P(x^2 \operatorname{sen}(x))$ .
2.  $Px \operatorname{arctg}(x)$ .
3.  $Px^3 \log x$ .
4.  $P \log x$ .
5.  $P \cos x e^x$

### 5.3.3 Primitivação por substituição

O método de substituição baseia-se na regra de derivação das funções compostas.

**Teorema 5.3.4** *Sejam  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função primitivável,  $J \subseteq Df$  e  $\varphi : I \rightarrow J$  uma aplicação bijectiva e diferenciável em  $I$ . Então  $(f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)$  é primitivável e, designando por  $\Phi(t)$  uma sua primitiva, isto é,  $\Phi(t) = P[(f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)]$ , obtem-se que  $\Phi(\varphi^{-1}(x))$  é uma primitiva de  $f(x)$ . Em resumo*

$$Pf(x) = P[(f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)], \quad \text{sendo } t = \varphi^{-1}(x).$$

**Dem.** Aplicando a derivada da função composta e a derivada da função inversa tem-se

$$\begin{aligned} (\Phi(\varphi^{-1}(x)))' &= \Phi'(\varphi^{-1}(x)) (\varphi^{-1}(x))' = \\ &= f(\varphi(t)) \varphi'(t) \frac{1}{\varphi'(t)} = f(x) \end{aligned}$$

■

**Exercício 5.3.5** *Calcule em  $I = ]0, +\infty[$ ,*

$$P\left(\frac{1}{e^x - 1}\right),$$

*utilizando a substituição  $x = \varphi(t) = \log t$ .*

### 5.3.4 Primitivação de funções racionais

**Definição 5.3.6 i)** *Função racional é uma função do tipo  $\frac{p(x)}{q(x)}$ , onde  $p(x)$  e  $q(x)$  são polinómios em  $x$ , não sendo  $q(x)$  identicamente nulo.*

**ii)** *Uma fracção racional diz-se própria se o grau de  $p(x)$  é menor que o grau de  $q(x)$*

Para efeitos de primitivação basta considerar fracções próprias, pois caso a fracção seja imprópria, por uma divisão inteira é sempre possível decompô-la na soma de uma parte inteira com uma fracção própria. Isto é, se  $\text{gr } p(x) \geq \text{gr } q(x)$  então existem polinómios  $a(x)$  e  $r(x)$  tais que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = a(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Condideremos então vários casos na primitivação de fracções racionais que estão directamente relacionados com o número de zeros do denominador e com a sua natureza, ilustrados com exemplos:

1º caso: As raízes de  $q(x)$  são reais de multiplicidade 1:

A fracção racional decompõe-se em "fracções mais simples" e calcula-se a sua primitiva por decomposição.

**Exemplo 5.3.7**  $P \frac{4x^2+x+1}{x^3-x} = P \frac{4x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)} = P \frac{-1}{x} + P \frac{3}{x-1} + P \frac{2}{x+1} = \log \left| \frac{1}{x} \right| + \log |x-1|^3 + \log (x+1)^2 + c = \log \left| \frac{(x-1)^3(x+1)^2}{x} \right| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

2º caso: As raízes de  $q(x)$  são reais e algumas com multiplicidade superior a 1:

O processo é análogo ao anterior.

**Exemplo 5.3.8**  $P \frac{2x^3+1}{x^2(x+1)^3} = P \frac{-3}{x} + P \frac{1}{x^2} + P \frac{3}{x+1} + P \frac{4}{(x+1)^2} - P \frac{1}{(x+1)^3} = -3 \log |x| - \frac{1}{x} + 3 \log |x+1| - \frac{4}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

3º caso: Algumas raízes de  $q(x)$  são complexas de multiplicidade 1:

Na decomposição as fracções cujo denominador têm raízes complexas possuem uma função afim como numerador.

**Exemplo 5.3.9**  $P \frac{x+2}{x^3-1} = P \frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = P \frac{1}{x-1} - P \frac{x+1}{x^2+x+1} = \log |x-1| - \frac{1}{2} \log (x^2+x+1) - \frac{4\sqrt{3}}{3} \arctg \left( \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

4º caso: Algumas raízes de  $q(x)$  são complexas com multiplicidade superior a 1:

**Exemplo 5.3.10**  $P \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x^2+2)^2} = P \frac{1}{x-1} - P \frac{x+1}{x^2+2} - P \frac{2x}{(x^2+2)^2} = \log|x-1| - \frac{1}{2} \log(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{x^2+2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Nalguns casos é possível e recomendável combinar os métodos de substituição com o das fracções racionais. Vejam-se alguns exemplos:

**Exemplo 5.3.11** *Numa função racional com argumentos do tipo  $e^x$ , simbolicamente,*

$$FR(e^x),$$

*deve tentar-se a substituição*

$$x = \log t \quad \text{ou} \quad e^x = t.$$

*Assim*

$$\begin{aligned} P \left( \frac{1 - e^{3x}}{e^{2x} - 4} \right) &= P \left( \frac{1 - t^3}{t^2 - 4} \times \frac{1}{t} \right) = P \left( -1 + \frac{1 - 4t}{t^3 - 4t} \right) \\ &= -e^x - \frac{x}{4} - \frac{7}{8} \log|e^x - 2| + \frac{9}{8} \log|e^x + 2| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Exemplo 5.3.12** *Numa função racional do tipo*

$$FR(\log x) \times \frac{1}{x}$$

*deve tentar-se a substituição*

$$\log x = t \quad \text{ou} \quad x = e^t.$$

*Por exemplo:*

$$\begin{aligned} P \left( \frac{\log(2x)}{x \log^3 x} \right) &= P \left( \frac{\log 2 + \log x}{\log^3 x} \times \frac{1}{x} \right) = P \left( \frac{\log 2 + t}{t^3} \right) \\ &= \frac{\log 2}{2} \frac{1}{\log^2 x} - \frac{1}{\log x} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Exemplo 5.3.13** *Para uma função do tipo*

$$FR(\operatorname{sen} x) \times \cos x$$

*recomenda-se a substituição*

$$\operatorname{sen} x = t \quad \text{ou} \quad x = \operatorname{arcsen} t.$$



Analogamente para

$$FR(\cos x) \times \operatorname{sen} x$$

aplica-se

$$\cos x = t \quad \text{ou} \quad x = \arccos t.$$

Assim

$$\begin{aligned} P \frac{\cos^3 x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x + 2 \cos x + 1} &= P \frac{t^3 \sqrt{1-t^2}}{t^2 + 2t + 1} \times \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= P \left( -t + 2 - \frac{8}{(t+1)^2} \right) \\ &= -\frac{\cos^2 x}{2} + 2 \cos x + \frac{8}{\cos x + 1} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Exemplo 5.3.14** Para

$$FR(\operatorname{sen} x, \cos x)$$

aplica-se a substituição

$$tg\left(\frac{x}{2}\right) = t \quad \text{ou} \quad x = 2 \operatorname{arctg} t,$$

e, pelas fórmulas trigonométricas dos ângulos duplos,

$$\operatorname{sen} x = 2 \frac{tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Como exemplo:

$$\begin{aligned} P \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x} &= P \left( \frac{1-t^2}{t^2+2t-1} \times \frac{2}{1+t^2} \right) \\ &= 2P \left[ \frac{1-t^2}{(t+1-\sqrt{2})(t+1+\sqrt{2})(1+t^2)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \log \left| tg^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2tg\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \right| - \frac{1}{2} \log(\sec^2 x) - \frac{x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Exemplo 5.3.15** No caso de

$$FR \left[ x, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{p_n}{q_n}} \right]$$

a substituição indicada será

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^q, \quad \text{sendo } q = m.m.c.(q_1, \dots, q_n).$$

Ilustre-se com o exemplo:

$$P \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}-1} = P \left( \frac{t^2}{t^3-1} \times 6t^5 \right) = 6P \left( t^4 + t + \frac{t}{t^3-1} \right).$$

## 5.4 Integral de Riemann

O conceito base no cálculo diferencial é a noção de derivada. No cálculo integral esse papel é desempenhado pela noção de integral.

O método mais intuitivo para abordar este conceito é considerá-lo como uma área.

### 5.4.1 Somas integrais de uma função

Seja  $f$  uma função real de variável real definida em  $[a, b]$ .

Considere-se este intervalo decomposto em  $n$  intervalos pelos pontos  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ , tais que

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Ao conjunto  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  chama-se uma decomposição ou partição de  $[a, b]$ .

Desta forma  $[a, b]$  fica decomposto em subintervalos  $I_1 = [x_0, x_1], I_2 = [x_1, x_2], \dots, I_n = [x_{n-1}, x_n]$ , de diâmetros

$$\text{diam } I_1 = x_1 - x_0, \text{ diam } I_2 = x_2 - x_1, \text{ diam } I_n = x_n - x_{n-1}.$$

Ao maior destes diâmetros chama-se diâmetro da decomposição e nota-se por  $|P|$ .

**Definição 5.4.1** Chama-se soma integral ou soma de Riemann de uma função  $f$  relativamente à decomposição  $P$  de  $[a, b]$  e ao conjunto

$$U = \{u_i : u_i \in [x_i, x_{i+1}[ , i = 1, \dots, n-1\},$$

designando-se por  $S(f, P, U)$  ou abreviadamente por  $S_P$ , a

$$\begin{aligned} S(f, P, U) &= \sum_{i=1}^n f(u_i) (x_i - x_{i-1}) \\ &= f(u_1) (x_1 - x_0) + f(u_2) (x_2 - x_1) + \dots + f(u_n) (x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

**Definição 5.4.2** Se substituirmos na soma anterior a imagem de um ponto intermédio pelo supremo (ínfimo) da função  $f(x)$  em cada um dos subintervalos obtém-se a soma superior de Darboux,  $\bar{S}$ , ou a soma inferior de Darboux,  $\underline{S}$ .

**Exercício 5.4.3** Para  $f(x) = x^2$  definida em  $[0, 1]$  decomposto por  $P = \{0, 0.4, 0.5, 0.7, 1\}$ , calcular:

1. A soma de Riemann  $S_P$  relativamente a  $U = \{0.1, 0.45, 0.6, 0.8\}$ .
2. As somas superior e inferior de Darboux.

**Proposição 5.4.4** Seja  $f$  uma função limitada em  $[a, b]$ . As somas superior e inferior de Darboux,  $\bar{S}$  e  $\underline{S}$ , são, respectivamente, o supremo e o ínfimo das somas de Riemann, no conjunto de todas as partições possíveis de  $[a, b]$ .

**Dem.** Para uma mesma partição  $P$  de  $[a, b]$  tem-se

$$\underline{S} < S_P < \bar{S}. \quad (5.4.1)$$

Defina-se

$$M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

e escolha-se  $\alpha > 0$  de modo a que para os pontos intermédios  $u_i$  em cada um dos subintervalos se tenha

$$f(u_i) > M_i - \alpha, \quad i = 1, \dots, n.$$

A soma de Riemann será

$$\begin{aligned} S_P &= \sum_{i=1}^n f(u_i) (x_i - x_{i-1}) > \sum_{i=1}^n (M_i - \alpha) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \alpha (x_i - x_{i-1}) = \bar{S} - \alpha (b - a). \end{aligned}$$

Pelo mesmo processo, definindo

$$m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

se pode provar que

$$S_P < \underline{S} + \alpha (b - a),$$

pelo que  $\bar{S}$  e  $\underline{S}$  são, respectivamente, o supremo e o ínfimo das somas de Riemann. ■

Note-se que as somas anteriores, de um ponto de vista geométrico, corresponde a vários modos de obter a soma da área de vários rectângulos com alturas diferentes mas bases iguais em cada um dos casos.

### 5.4.2 Definição de integral de Riemann

**Definição 5.4.5** Uma função  $f(x)$  diz-se integrável à Riemann em  $[a, b]$  se for finito

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} S_P(x) = S = \int_a^b f(x) dx,$$

em que  $S_P(x)$  designa a soma de Riemann de  $f$  relativamente à decomposição  $P$ ,  $|P|$  o diâmetro da decomposição,  $f(x)$  a função integranda,  $x$  a variável de integração e  $[a, b]$  o intervalo de integração

**Observação 5.4.6** O valor do integral depende da função  $f$  e do intervalo  $[a, b]$ , mas é independente da variável de integração. Isto é,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(t) dt.$$

**Proposição 5.4.7** (Condição necessária de integrabilidade) Se  $f(x)$  é integrável em  $[a, b]$  então  $f(x)$  é limitada em  $[a, b]$

**Dem.** Pela definição de limite tem-se

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} S_P(x) = S \iff \forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0: \forall P, |P| < \varepsilon \implies |S_P(x) - S| < \delta.$$

Assim quando o diâmetro da partição for suficientemente pequeno tem-se, para  $\delta > 0$ ,

$$S - \delta < S_P < S + \delta.$$

Como  $S_P = \sum_{i=1}^n f(u_i) |x_i - x_{i-1}|$  com  $u_i$  pontos arbitrários em cada um dos subintervalos. Separando a primeira parcela,

$$S_P = f(u_1) |x_1 - a| + \sum_{i=2}^n f(u_i) (x_i - x_{i-1}).$$

Considerando fixos os pontos  $u_i, i = 2, \dots, n$ , o somatório terá uma certa soma  $k$ . Assim

$$S_P = f(u_1) |x_1 - a| + k$$

e

$$S - \delta < f(u_1) |x_1 - a| + k < S + \delta$$

ou seja

$$\frac{S - \delta - k}{|x_1 - a|} < f(u_1) < \frac{\delta + S - k}{|x_1 - a|}.$$

Como  $u_1$  é um ponto arbitrário em  $[a, x_1]$  a função  $f(x)$  é limitada em  $[a, x_1]$ .

Pelo mesmo processo é possível provar que  $f(x)$  é limitada em qualquer dos subintervalos  $[x_i, x_{i+1}]$ . Logo  $f(x)$  é limitada em  $[a, b]$ . ■

Igualmente útil é a sua recíproca.

Se  $f(x)$  não é limitada em  $[a, b]$  então  $f(x)$  não é integrável em  $[a, b]$ .

**Proposição 5.4.8** (*Condição necessária e suficiente de integrabilidade*) A função  $f(x)$  é integrável em  $[a, b]$  se e só se as somas de Darboux têm o mesmo limite finito.

**Dem.** ( $\implies$ ) Se  $f(x)$  é integrável no sentido de Riemann em  $[a, b]$  então  $\lim_{|P| \rightarrow 0} S_P(x) = S$ , ou seja para um certo  $\varepsilon > 0$  tal que  $|P| < \varepsilon$  se tem  $|S_P(x) - S| < \frac{\delta}{2}$ , ou seja,

$$S - \frac{\delta}{2} < S_P < S + \frac{\delta}{2}.$$

Como

$$\underline{S} - \overline{S} \leq 0 < \delta,$$

então, para  $|P| < \varepsilon$ ,  $|\overline{S} - \underline{S}| \leq \delta$ , pelo que

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} (\overline{S} - \underline{S}) = 0,$$

isto é,

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \overline{S} = \lim_{|P| \rightarrow 0} \underline{S}.$$

Além disso, pelo enquadramento (5.4.1), tem-se

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \overline{S} = \lim_{|P| \rightarrow 0} \underline{S} = \lim_{|P| \rightarrow 0} S_P = S = \int_a^b f(x) dx.$$

( $\impliedby$ ) Se as somas de Darboux  $\overline{S}$  e  $\underline{S}$  têm o mesmo limite finito, pelo enquadramento (5.4.1), tem-se

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \overline{S} = \lim_{|P| \rightarrow 0} \underline{S} = \lim_{|P| \rightarrow 0} S_P = S = \int_a^b f(x) dx,$$

pelo que  $f(x)$  é integrável em  $[a, b]$ . ■

Alguns resultados ajudam a formar ideias sobre classes de funções integráveis:

**Proposição 5.4.9** *Toda a função contínua em  $[a, b]$  é integrável à Riemann nesse intervalo.*

**Dem.** Pelo Teorema de Heine-Cantor, toda a função contínua num intervalo limitado e fechado  $[a, b]$  é uniformemente contínua, isto é,

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0: \forall v, w \in [a, b], |v - w| < \varepsilon \implies |f(v) - f(w)| < \delta.$$

Para  $\varepsilon > 0$  seja  $P$  uma partição de  $[a, b]$  tal que  $|P| < \varepsilon$ .

Se  $f(x)$  é contínua em  $[a, b]$  então  $f(x)$  é contínua em cada um dos subintervalos  $[x_i, x_{i+1}]$ .

Pelo Teorema de Weierstrass existem os números  $M_i$  e  $m_i$ , respectivamente, máximos e mínimos de  $f(x)$  em  $[x_i, x_{i+1}]$ . Designe-se  $M_i := f(u_i)$  e  $m_i := f(v_i)$  com  $u_i, v_i \in [x_i, x_{i+1}]$ .

Considere-se  $\delta > 0$  tal que

$$M_i - m_i = f(u_i) - f(v_i) < \frac{\delta}{b - a}.$$

Então, recorrendo às somas de Darboux

$$\begin{aligned} \overline{S} - \underline{S} &= \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) (x_i - x_{i-1}) < \frac{\delta}{b - a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\delta}{b - a} (b - a) = \delta. \end{aligned}$$

Portanto  $\overline{S} - \underline{S} < \delta$ , com  $|P| < \varepsilon$ , pelo que

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} (\overline{S} - \underline{S}) = 0.$$

■

**Proposição 5.4.10** *Toda a função monótona e limitada é integrável à Riemann.*

**Dem.** Para  $\varepsilon > 0$  seja  $P$  uma partição de  $[a, b]$  tal que  $|P| < \varepsilon$ , isto é,

$$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n.$$

Suponhamos que  $f(x)$  é crescente. Assim, para cada  $[x_{i-1}, x_i]$  defina-se

$$M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{e} \quad m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Então

$$\begin{aligned}\overline{S} - \underline{S} &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) (x_i - x_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \varepsilon \\ &= \varepsilon [f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(x_n) - f(x_{n-1})] \\ &= \varepsilon [f(x_n) - f(x_0)] = \varepsilon [f(b) - f(a)].\end{aligned}$$

Considerando  $\delta = \varepsilon [f(b) - f(a)]$  obtém-se que  $\overline{S} - \underline{S} < \delta$  desde que  $|P| < \varepsilon = \frac{\delta}{f(b) - f(a)}$ . Então, pela condição necessária e suficiente de integrabilidade,  $f(x)$  é integrável em  $[a, b]$ .

Se  $f(x)$  é decrescente, o processo é semelhante. ■

### 5.4.3 Interpretação geométrica do conceito de integral

Vimos anteriormente que as somas superior e inferior de Darboux,  $\overline{S}$  e  $\underline{S}$ , são aproximações por excesso e por defeito, respectivamente, da área do trapezóide limitado pelo gráfico de  $f(x)$  e pelas rectas verticais  $x = a$  e  $x = b$ .

Se se diminuir o diâmetro da partição obtêm-se aproximações com um erro menor, da área do trapezóide referido.

Ao considerar partições mais finas,  $\overline{S}$  e  $\underline{S}$  serão valores tão próximos quanto de queira, por excesso e por defeito, do valor dessa área.

Assim se  $f(x)$  é contínua em  $[a, b]$  e  $f(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ , então  $\int_a^b f(x) dx$  representa a área da região limitada pelo gráfico de  $f(x)$  e pelas rectas verticais  $x = a$  e  $x = b$ .

## 5.5 Propriedades dos integrais

A maior parte das propriedades que se seguem podem ser demonstradas por aplicação directa da definição de integral.

**Proposição 5.5.1** *Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  funções integráveis em  $[a, b]$ .*

1.  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

2. Se  $f(x)$  é uma função par então

$$\int_{-a}^{-b} f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

3. Se  $f(x)$  é uma função ímpar então

$$\int_{-a}^{-b} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

4. Para  $k \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_a^b k dx = k(b-a).$$

5. Para  $k \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

6. Se  $f(x) \geq 0$  então

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

7. Se  $f(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

8.

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

9. Se  $f(x)$  é uma função limitada em  $[a, b]$  tal que  $|f(x)| \leq M$ , com  $M > 0$ , então

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b-a).$$

10. (Aditividade do integral relativamente ao intervalo de integração)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

11. (Aditividade do integral relativamente à função integranda)

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$



**Dem.** Seja  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  uma decomposição de  $[a, b]$  e  $U = \{u_i : u_i \in ]x_i, x_{i+1}[ , i = 1, \dots, n-1\}$  um conjunto de pontos arbitrários em cada um dos subintervalos.

1.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^n f(u_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= - \sum_{i=1}^n f(u_i)(x_{i-1} - x_i) = - \int_b^a f(x)dx. \end{aligned}$$

2. Uma decomposição de  $[-a, -b]$  será  $P^* = \{-x_0, -x_1, -x_2, \dots, -x_{n-1}, -x_n\}$  e um conjunto de pontos respectivos pode ser  $U^* = \{-u_i\}$ . Então

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{-b} f(x)dx &= \sum_{i=1}^n f(-u_i)(-x_i + x_{i-1}) \\ &= - \sum_{i=1}^n f(u_i)(x_i - x_{i-1}) = - \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{-b} f(x)dx &= \sum_{i=1}^n f(-u_i)(-x_i + x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(u_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

4.

$$\int_a^b k dx = \sum_{i=1}^n k(x_i - x_{i-1}) = k(b - a).$$

5.

$$\begin{aligned} \int_a^b k f(x)dx &= \sum_{i=1}^n k f(u_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= k \sum_{i=1}^n f(u_i)(x_i - x_{i-1}) = k \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

6.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n f(u_i)(x_i - x_{i-1}) \geq 0.$$

7.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^n f(u_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n g(u_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \int_a^b g(x)dx. \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^n f(u_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |f(u_i)(x_i - x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n |f(u_i)|(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b |f(x)|dx \end{aligned}$$

9.

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b Mdx = M(b-a).$$

10. (Interpretar geometricamente como adição de áreas)

11.

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)]dx &= \sum_{i=1}^n [f(u_i) + g(u_i)](x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(u_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n g(u_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \end{aligned}$$

■

**Teorema 5.5.2** (Teorema da média do cálculo integral) Se  $f(x)$  é integrável num intervalo  $I := [a, b]$  então existe  $\lambda \in [m, M]$ , com  $m := \inf_{x \in I} f(x)$  e  $M := \sup_{x \in I} f(x)$ , tal que

$$\int_a^b f(x)dx = \lambda(b-a).$$

**Dem.** Suponhamos que  $b > a$ . Como  $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in I$ , então

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx,$$

pela Proposição anterior (7),

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

e, como  $b-a > 0$ ,

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M.$$

Definindo

$$\lambda := \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

obtem-se o resultado pretendido.

Se  $b < a$  tem-se

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

e aplica-se a primeira parte da demonstração. ■

**Observação 5.5.3 i)** Se  $f(x)$  é uma função contínua em  $I$  então existe  $c \in I$  tal que  $f(c) = \lambda$ , pelo que se obtem

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

**ii)** Se  $f(x) \geq 0, \forall x \in I$  então  $\int_a^b f(x) dx$  dá o valor da área de um trapezóide, pelo que  $f(c)$  é a altura de um rectângulo de comprimento  $b-a$ , com área igual à do trapezóide.

**Proposição 5.5.4** (Desigualdade de Schwarz) Se  $f(x)$  e  $g(x)$  são funções integráveis em  $[a, b]$  então

$$\left( \int_a^b f(x) \times g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \times \int_a^b g^2(x) dx.$$

**Dem.** Comece-se por calcular

$$\int_a^b [\alpha f(x) + g(x)]^2 dx = \underbrace{\alpha^2 \int_a^b f^2(x) dx}_A + 2\alpha \underbrace{\int_a^b f(x) \times g(x) dx}_B + \underbrace{\int_a^b g^2(x) dx}_C.$$

Como  $[\alpha f(x) + g(x)]^2 \geq 0$  então

$$\int_a^b [\alpha f(x) + g(x)]^2 dx \geq 0$$

e, simplificando a notação,

$$\alpha^2 A + 2\alpha B + C \geq 0$$

apenas acontece para qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$  não nulo se  $A > 0$  e  $(2B)^2 - 4AC \leq 0$ , isto é,

$$B^2 \leq AC.$$

Voltando à notação inicial

$$\left( \int_a^b f(x) \times g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \times \int_a^b g^2(x) dx.$$

■

**Exercício 5.5.5** *Determine o sinal dos integrais, sem os calcular:*

a)  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$

b)  $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}(x) dx$

**Exercício 5.5.6** *Obtenha um majorante e um minorante para os integrais, sem os calcular:*

a)  $\int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{x}{1+x^2} dx$

b)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}(x) dx$

## 5.6 Integral indefinido

**Definição 5.6.1** *Seja  $f(x)$  uma função integrável em  $I$  e  $\alpha \in I$ . Chama-se integral indefinido com origem em  $\alpha$  à função*

$$\Phi(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt, \quad \forall x \in I.$$

**Proposição 5.6.2** 1. *Integrais indefinidos de origens diferentes diferem de uma constante.*

2. *O integral indefinido é uma função contínua.*

**Dem.** Considerem-se

$$\Phi(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt \quad \text{e} \quad \Psi(x) = \int_b^x f(t)dt.$$

1. Então

$$\Phi(x) - \Psi(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt = \int_{\alpha}^b f(t)dt \in \mathbb{R}.$$

2. Começemos por provar que  $\Phi(x)$  é uma função contínua em  $x = \alpha$ , isto é que

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \Phi(x) = \Phi(\alpha).$$

Note-se que o limite, a existir, terá que ser 0 e que, pela condição necessária de integrabilidade, (Proposição 5.4.7)  $f(x)$  é limitada em  $[a, b]$ , digamos por uma constante  $M > 0$ . Assim

$$|\Phi(x) - 0| \leq \int_{\alpha}^x |f(t)| dt \leq \int_{\alpha}^x M dt = M(x - \alpha)$$

e como  $\lim_{x \rightarrow \alpha} M(x - \alpha) = 0$ , então  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \Phi(x) = \Phi(\alpha) = 0$ .

Prove-se agora que  $\Phi(x)$  é contínua em  $x = c \neq \alpha$ .

Então

$$\begin{aligned} |\Phi(x) - \Phi(c)| &= \left| \int_{\alpha}^x f(t)dt - \int_{\alpha}^c f(t)dt \right| \\ &= \left| \int_{\alpha}^x f(t)dt + \int_c^{\alpha} f(t)dt \right| = \left| \int_c^x f(t)dt \right| \\ &\leq \int_c^x |f(t)| dt \leq \int_c^x M dt = M(x - c) \leq M|x - c| \end{aligned}$$

e conclui-se como na primeira parte da prova. ■

**Teorema 5.6.3** (*Teorema fundamental do Cálculo Integral*) O integral indefinido tem por derivada a função integranda nos pontos em que esta seja contínua, isto é,

$$\Phi'(c) = f(c), \text{ se } f \text{ for contínua em } c.$$

**Dem.** Viu-se anteriormente que

$$\Phi(x) - \Phi(c) = \int_c^x f(t)dt = \lambda(x - c),$$

com  $\lambda$  compreendido entre  $f(x)$  e  $f(c)$ .

Por definição de derivada

$$\Phi'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\Phi(x) - \Phi(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\lambda(x - c)}{x - c} = \lambda = f(c).$$

■

**Corolário 5.6.4** Sejam  $\alpha, x \in I$  e  $f$  uma função contínua em  $I$ . Então

$$\Phi'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

**Observação 5.6.5 i)** Sendo  $\Phi[u(x)] = \int_{\alpha}^{u(x)} f(t)dt$ , pela derivada da função composta obtém-se

$$\Phi'[u(x)] = f[u(x)] \times u'(x), \quad \forall x \in I.$$

**ii)** Se  $\Phi(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt$  então

$$\Phi'(x) = f[u(x)] \times u'(x) - f[v(x)] \times v'(x).$$

**Exercício 5.6.6** Estude quanto aos extremos e intervalos de monotonia a função

$$\Phi(x) = \int_2^x (t^2 - 6t + 8)dt.$$

**Exercício 5.6.7** Sendo  $f(x) = \int_0^{\log x} (x e^{t^2})dt$  prove que  $f''(1) = 1$ .

**Exercício 5.6.8** Para  $f(x) = \int_{x^2}^{k \log x} (e^{-t^2})dt$ , calcule  $k$  tal que  $f'(1) = 0$ .

**Exercício 5.6.9** *Recorrendo à desigualdade de Schwarz encontre um majorante para*

$$\int_0^1 e^{5x} \sqrt{\arctg(x)} dx.$$

**Teorema 5.6.10** (*Fórmula de Barrow*) *Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$  e  $F$  uma primitiva qualquer de  $f$  em  $[a, b]$ . Então*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Dem.** A fórmula geral das primitivas de  $f(x)$  é dada por

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Assim

$$F(b) = \int_{\alpha}^b f(t) dt + k \quad \text{e} \quad F(a) = k.$$

Então

$$F(b) - F(a) = \int_{\alpha}^b f(t) dt.$$

■

**Exercício 5.6.11** *Calcule o valor dos integrais:*

$$1. \int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{7+3x}}$$

$$2. \int_2^3 \frac{x}{x^2-25} dx$$

## 5.7 Métodos de integração

Os métodos de integração são análogos aos métodos de primitivação.

### 5.7.1 Integração por decomposição

Sejam  $f_i$  funções integráveis em  $[a, b]$ . Então

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \cdots + \int_a^b f_n(x) dx.$$

### 5.7.2 Integração por partes

Sejam  $u$  e  $v$  duas funções integráveis num intervalo  $[a, b]$ . Se o produto  $u'v$  for integrável então

$$\int_a^b [u'(x)v(x)] dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b [u(x)v'(x)] dx.$$

### 5.7.3 Integração por substituição

Considere-se:  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$  e  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  uma função bijectiva e diferenciável com  $\varphi(\alpha) = a$  e  $\varphi(\beta) = b$ . Então é válida a igualdade

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \times \varphi'(t) dt.$$

**Exercício 5.7.1** Calcular o valor dos integrais:

1.  $\int_2^4 \frac{x^3}{x-1} dx$
2.  $\int_1^2 x^{-3} \log x dx$
3.  $\int_0^1 x \arctg(x) dx$
4.  $\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$
5.  $\int_0^{\log 5} \sqrt{e^x - 1} dx$
6.  $\int_0^{63} \frac{\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+1}} dx$

## 5.8 Extensão da noção de integral

Nos casos em que o intervalo de integração não é limitado ou a função integranda não é limitada no intervalo de integração, a teoria naterior não se aplica e é necessário um novo conceito de integral: o integral impróprio.

### 5.8.1 Integral impróprio de 1ª espécie

**Definição 5.8.1** Seja um intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Designa-se por integral impróprio de 1ª espécie de  $f$  em  $I$  a qualquer das seguintes situações:

- a) Se  $I = [a, +\infty[$ ,  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$



b) Se  $I = ] - \infty, b[$ ,  $\int_{-\infty}^b f(x)dx$

c) Se  $I = ] - \infty, +\infty[$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ .

Pode perguntar-se se neste caso, em que a região não está completamente limitada, o integral ainda representa o valor da área dessa região ilimitada.

A resposta é afirmativa caso o integral impróprio de 1ª espécie tenha um valor finito.

Assim é necessário estudar a natureza do integral.

**Definição 5.8.2 i)** O integral  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  é convergente se existir e for finito

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt.$$

Nesse caso

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$$

representa o valor da área pretendida.

ii) Análogamente,  $\int_{-\infty}^b f(x)dx$  é convergente se

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$$

existir e for finito.

iii) Do mesmo modo  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  é convergente se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x f(t)dt$$

existir e for finito.

iv) Se algum dos limites anteriores não existir ou for infinito, então o respectivo integral diz-se divergente.

**Exercício 5.8.3** Estude a natureza dos integrais e calcule o seu valor, se possível:

1.  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$

2.  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$

3.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$

**Exercício 5.8.4** Estude a natureza do integral

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx, \quad (a > 0)$$

discutindo-a em função de  $\alpha$ .

### 5.8.2 Integral impróprio de 2ª espécie

Nestes casos consideram-se as situações em que a função integranda não é limitada em pelo menos um ponto do intervalo de integração.

**Definição 5.8.5** Seja  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  um intervalo e  $f$  uma função integrável em subintervalos de  $[a, c[ \cup ]c, b]$ , sendo  $c$  um ponto em que  $f$  não é limitada. Designa-se por integral impróprio de 2ª espécie o integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

em que existe pelo menos um  $c \in [a, b]$  em que  $f(c)$  não é limitada

**Definição 5.8.6** O integral integral impróprio de 2ª espécie diz-se convergente se existirem e forem finitos

$$\lim_{x \rightarrow c^-} \int_a^x f(t) dt \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} \int_x^b f(t) dt$$

Nesse caso

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow c^-} \int_a^x f(t) dt + \lim_{x \rightarrow c^+} \int_x^b f(t) dt.$$

Se pelo menos um dos limites anteriores não existir ou for infinito, então o integral diz-se divergente.

**Observação 5.8.7** Se em  $[a, b]$  existirem  $n$  pontos  $c_1, \dots, c_n$  onde a função não é limitada então deve decompor-se o integral de forma a isolar esses pontos apenas num dos extremos de integração.

**Exercício 5.8.8** Estudar a natureza dos integrais:

a)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

b)  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ , discutindo-a em função de  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

c)  $\int_{-10}^{10} \frac{x}{x^2-1} dx$

### 5.8.3 Integral impróprio de 3ª espécie ou mistos

Neste caso estão os integrais que são simultaneamente de 1ª e 2ª espécie, isto é, integrais em que pelo menos um dos extremos de integração é infinito e existe pelo menos um ponto onde a função não é limitada.

Tal como na secção anterior deve decompor-se o integral misto na soma de integrais que sejam apenas de 1ª ou 2ª espécie.

O integral é convergente se forem convergentes todos os integrais em que se decompõe. Caso contrário o integral diz-se divergente.

**Exercício 5.8.9** *Estude a natureza dos integrais:*

a)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x-1} dx$

b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$

## 5.9 Critérios de convergência para integrais impróprios

Na prática torna-se útil analisar a natureza dos integrais impróprios sem ter de os calcular.

Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  funções localmente integráveis.

**Proposição 5.9.1** *Se*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^\alpha f(x) \text{ é finito e não nulo}$$

*então:*

- $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  é convergente se  $\alpha > 1$ ;
- $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  é divergente se  $\alpha \leq 1$ .

**Exemplo 5.9.2** *O integral  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$  é divergente pois*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \frac{x}{x^2+1} = 1 \text{ para } \alpha = 1.$$

**Proposição 5.9.3** *(Critério de comparação) Se  $f(x)$  e  $g(x)$  são duas funções tais que existe  $k \in \mathbb{R}$  de modo que  $f(x) \leq g(x)$ , para  $x \geq k$ , então:*

- a) *Se  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  é divergente então  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  é divergente;*

b) Se  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  é convergente então  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  é convergente.

**Exemplo 5.9.4** Para analisar a natureza do integral  $\int_1^{+\infty} \frac{1+\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx$  pode começar-se por estabelecer as relações

$$\begin{aligned} 1 &\leq 1 + \sin^2 x \\ \frac{1}{\sqrt{x}} &\leq \frac{1 + \sin^2 x}{\sqrt{x}}, \text{ para } x \geq 1. \end{aligned}$$

Como  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  é divergente então  $\int_1^{+\infty} \frac{1+\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx$  é também divergente.

**Proposição 5.9.5** (Critério da existência do limite) Se  $f(x)$  e  $g(x)$  são duas funções tais que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ é finito e não nulo}$$

então os integrais  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  e  $\int_c^{+\infty} g(x)dx$  têm a mesma natureza.

**Exemplo 5.9.6** Para estudar a natureza do integral  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$  pode ver-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^\alpha}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^3}}{x^\alpha} = 1 \text{ se } \alpha = \frac{3}{2}.$$

Como  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$  é convergente então  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$  é da mesma natureza, isto é, é convergente.

**Proposição 5.9.7** (Critério do integral) Seja  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função decrescente e, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $a_n = f(n)$ . Então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e o integral  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  são da mesma natureza (ambos convergentes ou ambos divergentes).

**Proposição 5.9.8** Seja  $\int_a^b f(x)dx$  um integral impróprio de  $2^\alpha$  espécie em que  $f(c)$  não é limitada. Se

$$\lim_{x \rightarrow c} (x - c)^\alpha f(x) \text{ é finito e não nulo}$$

então:

a)  $\int_a^b f(x)dx$  é convergente se  $\alpha < 1$ ;

b)  $\int_a^b f(x)dx$  é divergente se  $\alpha \geq 1$ .

**Exemplo 5.9.9** O integral  $\int_3^4 \frac{2}{(x-3)^2} dx$  é divergente pois

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^\alpha \frac{2}{(x-3)^2} = 2 \text{ para } \alpha = 2.$$

## 5.10 Aplicações dos integrais

### 5.10.1 Áreas planas

Se  $f(x)$  é uma função contínua não negativa, a área da região limitada pelo seu gráfico, pelo eixo das abcissas e pelas rectas verticais  $x = a$  e  $x = b$  é dada por

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

**Exercício 5.10.1** Calcular a área:

1. De um círculo de centro na origem e raio  $r$ ;
2. Da região definida pelo conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq (x+1)e^{x+1}\};$$

3. Da região limitada pela parábola  $y = x^2$  e a recta  $y = 3 - 2x$ .
4. Da região definida por

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 5, 0 < y \leq \frac{1}{\sqrt{|x|}} \right\}.$$

### 5.10.2 Comprimento de curvas planas

O comprimento de um arco  $P_0P_1$  numa curva representada pela aplicação  $y = f(x)$ , tendo por coordenadas cartesianas  $P_0 = (x_0, f(x_0))$  e  $P_1 = (x_1, f(x_1))$  é dado por

$$C = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

**Exercício 5.10.2** Determine os comprimentos dos arcos das curvas definidas por:

1.  $y = \cosh(x)$  entre  $A = (0, 1)$  e  $B = \left(1, \frac{e^2+1}{e}\right)$
2.  $y = 2 \log x$  entre  $A = (1, 0)$  e  $B = (\sqrt{3}, 2 \log \sqrt{3})$

### 5.10.3 Volumes de sólidos de revolução

O volume do sólido que se obtém pela rotação da região limitada pelo gráfico de  $y = f(x)$  e pelas rectas verticais  $x = a$  e  $x = b$ , em torno do:

a) eixo das abcissas é dado por

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

b) eixo horizontal  $y = k$  é dado por

$$V = \pi \int_a^b [f(x) - k]^2 dx.$$

**Exercício 5.10.3** Calcular o volume de um cone de revolução de altura  $h$  e raio da base  $r$ .

### 5.10.4 Áreas laterais de sólidos de revolução

A área lateral de um sólido gerado pela rotação da região limitada pelo eixo das abcissas, pelo gráfico de  $f(x)$  e pelas rectas verticais  $x = a$  e  $x = b$ , é dada por

$$A_L = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

**Exercício 5.10.4** Calcular a área lateral de um cone de revolução de altura  $h$  e raio da base  $r$ . *Integral de Riemann*

O conceito base no cálculo diferencial é a noção de derivada. No cálculo integral esse papel é desempenhado pela noção de integral.

O método mais intuitivo para abordar este conceito é considerá-lo como uma área.