

EXERCÍCIOS PARA
ANÁLISE MATEMÁTICA I
2016/2017

DOCENTES: Ana Isabel Santos, Jorge Salazar, Luís Bicho e Vladimir Goncharov

Esta ficha de exercícios é composta por um conjunto de exercícios que os alunos da unidade curricular de Análise Matemática I, leccionada pelo Departamento de Matemática da Escola de Ciências e Tecnologia da Universidade de Évora aos cursos de Engenharia das Energias Renováveis, Engenharia Geológica, Engenharia Informática, Engenharia Mecatrónica, Matemática Aplicada e Matemática Aplicada à Economia e Gestão deverão resolver ao longo do semestre..

Esta ficha teve por base a bibliografia recomendada e o programa da unidade curricular, é composta por várias partes, as quais irão sendo acrescentadas de modo sequencial.

1. NOÇÕES TOPOLÓGICAS EM \mathbb{R} e INDUÇÃO MATEMÁTICA

1.1. Demonstre as seguintes propriedades do módulo:

a) $|x| = \max \{-x, x\};$

b) $-|x| \leq x \leq |x|;$

c) $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a;$

d) $|x - b| \leq a \iff b - a \leq x \leq b + a;$

e) $|x + y| \leq |x| + |y|;$

f) $|xy| = |x| |y|;$

g) $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|;$

1.2 Determine os pontos interiores, exteriores, fronteiros, de acumulação e isolados dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R} .

a) $A = (1, 5]$

b) $B = [-3, -1) \cup (1, 2] \cup \{0, 4\};$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - 2| \leq 7\};$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 4\};$

e) $E = \{1 + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}.$

1.3. Determine o interior, o exterior, a fronteira, o derivado, o fecho e o conjunto dos pontos isolados dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R} , indicando quais são abertos ou fechados:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 25\};$

b) $B = (-\infty, 4];$

c) $C = (-3, +\infty);$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} : |2x + 1| \geq 1\};$

e) $E = \{x \in \mathbb{Z} : |3 - x| < 1 \wedge x \leq \sqrt{3}\};$

f) $F = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| < 1\}$;

g) $G = \mathbb{N}$;

h) $H = \mathbb{Q}$;

i) $I = \mathbb{R}$.

1.4. Considere $D_f \subset \mathbb{R}$ o domínio da função definida por

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 9}}.$$

a) Determine D_f ;

b) Determine o interior, o exterior, a fronteira, o fecho e o derivado de D_f ;

c) Diga, justificando, se D_f é aberto, fechado e/ou limitado.

1.5. Seja $D_g \subset \mathbb{R}$ o domínio da função definida por

$$g(x) = \ln \left(\frac{x}{x+2} \right).$$

a) Determine D_g ;

b) Determine o interior, o exterior, a aderência e o derivado de D_g ;

c) Diga, justificando, se D_g é aberto, fechado e/ou limitado.

1.6. Considere $D_h \subset \mathbb{R}$ o domínio da função definida por

$$h(x) = \frac{e^{3x}}{x^2 - 1}.$$

a) Determine D_h ;

b) Determine o interior, o exterior, a fronteira, o fecho e o conjunto dos pontos isolados de D_h ;

c) Diga, justificando, se D_h é aberto, fechado e/ou limitado.

1.7. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são majorados, minorados ou limitados e indique, caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada um:

a) $A = (5, +\infty)$;

b) $B = (-\infty, -2]$;

- c) $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 9\};$
- d) $D = \{x \in \mathbb{R} : |x + 1| \geq 1\};$
- e) $E = \{x \in \mathbb{Z} : |5 - x| < 5 \wedge x \geq \sqrt{5}\};$
- f) $F = \{m^{(-1)^n} : m, n \in \mathbb{N}\}.$

1.8. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

- a) Seja A um subconjunto de \mathbb{R} . Se $A \subset \text{int}(A)$, então A é um conjunto aberto;
- b) Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1\}$, então $\{-1, 0, 1\} \subset \text{fr}(A)$;
- c) Se $a \in A$, então $a \in \overline{A}$;
- d) Se $a \in \text{ext}(A)$, então $a \in \text{fr}(\mathbb{R} \setminus A)$;
- e) Seja $B = (-5, 2]$, então $\inf(B) = \min(B) = -5$ e $\sup(B) = \max(B) = 2$.

1.9. Prove que, apesar de verdadeiras para os primeiros naturais, as proposições seguintes são falsas:

- a) $n^2 - 2n = n - 2, \forall n \in \mathbb{N}$;
- b) $2^{2^n} + 1$ é primo, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.10. Usando o método de indução matemática verifique que:

- a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$
- b) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2;$
- c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2;$
- d) $\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

1.11. Seja $(a_n)_n$ o termo geral de uma progressão de razão r e $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ a soma dos n primeiros termos dessa progressão. Mostre que:

- a) se a progressão é aritmética, então $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n, \forall n \in \mathbb{N}$;
- b) se a progressão é geométrica, então $S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}, \forall n \in \mathbb{N}.$