

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Homología Singular y Celular

Rubén Izquierdo López

Dirigido por Manuel Alonso Morón

Curso académico 2022-23

RESUMEN

La Homología es una de las herramientas más importantes para el estudio de espacios topológicos. Este texto pretende ser una introducción autocontenida a esta teoría para alumnos de Matemáticas interesados que no hayan podido atender a un curso donde se trate debidamente. Asumimos un conocimiento básico de Topología General, así como cierta familiaridad con conceptos fundamentales en Topología Algebraica, como la suma wedge o teoría de espacios recubridores (sólo en el **Capítulo 3**). No es necesario conocer la teoría del grupo fundamental ni de los grupos de homotopía, aunque sí haremos referencia a ellos para justificar algunas definiciones. En el **Capítulo 1** estudiamos la Homología Singular en espacios topológicos arbitrarios y se demuestran los resultados más importantes que permiten el cálculo de estos grupos. En el **Capítulo 2** estudiamos la Homología Celular, una descripción más concreta a una clase de espacios más restringida (los *CW*-complejos) y demostramos que los grupos celulares son isomorfos a los grupos singulares. En el **Capítulo 3** presentamos una selección de aplicaciones fundamentales de la teoría a las Matemáticas.

Homology is a fundamental tool for the study of topological spaces. This text intends to be a self contained introduction to the theory for the interested Mathematics student that was not able to attend a course on the subject. We assume basic knowledge on General Topology and familiarity with some fundamental concepts in Algebraic Topology, such as wedge sum or covering spaces theory (only in **Chapter 3**). Background on fundamental group and general homotopy groups is not needed, although we will mention them to justify some definitions. In **Chapter 1** we study Singular Homology in arbitrary topological spaces and prove the most important results that allow the calculation of these groups. **Chapter 2** is dedicated to the study of Cellular Homology, a more specific description of the theory restricted to a smaller class of spaces (*CW*-complex) and we give the canonical isomorphism between both theories. In **Chapter 3** we present a selection of fundamental applications of the theory to Mathematics.

AGRADECIMIENTOS

El desarrollo de este TFG ha sido una larga y extensa tarea. De haber sido estudiado y escrito exclusivamente por mí, no tendría la forma actual. Así, agradezco a todos aquellos que de manera activa o pasiva han ayudado a la finalización de este texto. En primer lugar, a mis padres, Miguel y Lilia y a mi pareja, Silvia por su apoyo incondicional a lo largo del grado y durante la escritura de este texto. A mi tutor, Manuel, por su guía al adentrarme en esta teoría tan extensa y por su consejo en cómo abordar las Matemáticas en general. A mis compañeros y amigos de la carrera, Lucía, Bruno, Carlos, Dani, Elvira, Elvira, Guillermo, Iñaki, y en especial a Jesús, por su exhaustiva revisión del formato y código de \LaTeX . A mis amigos de Torrejón de Ardoz, Javi, Javi, Christian, Dani, Iván, Fer, Sergio y Mateusz. Y, finalmente, a todas aquellas personas que no haya mencionado pero hayan ayudado a la finalización del grado y de este TFG.

INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

Para poder justificar de forma razonada la introducción de los grupos de Homología Singular es recomendable comprender el trayecto histórico de la teoría y los intereses principales de los matemáticos que la empezaron a desarrollar.

El comienzo de la teoría se da en 1857 por Bernhard Riemann (1826–1866) cuando trataba de estudiar condiciones suficientes para que una integral de línea de una forma cerrada fuese nula a lo largo de cierta curva cerrada simple C en una superficie S . En su publicación “Theorie der Abel’schen Funktionen” se da cuenta de que es suficiente pedir que C sea el borde de una región para que

$$\int_C Xdx + Ydy = 0.$$

Hoy en día esto es una consecuencia inmediata del Teorema de Stokes. Este tipo de ideas le llevan a considerar familias maximales de curvas donde ninguna subfamilia conforma el borde de una región de S . Demostró que el número de curvas en una de estas familias maximales no dependen de la familia maximal escogida y definió el **número de conexión** como $n + 1$ donde n es el cardinal de una de las familias.

En un viaje a Italia, Riemann transmitió sus ideas a Enrico Betti (1823-1892) y trataron de generalizar estos resultados a dimensiones arbitrarias lo que les llevó a definir de forma completamente análoga el i -ésimo **número de conexión** de una variedad M . En vez de curvas, considerarían i -complejos sin borde y en vez de regiones, $i + 1$ -complejos. Es importante saber que estos estudios se realizaron antes de que Möbius introdujese el ejemplo de una superficie no orientable (1848) y antes de que Peano estudiase curvas patológicas (1890). Es por esto que matemáticos posteriores intentaron realizar esta teoría de una forma más correcta.

El primero fue Henri Poincaré (1854-1912). Inspirado por el trabajo previo de Riemann y Betti, Poincaré refinó los conceptos introducidos en su trabajo “Analysis Situs”. Restringió el estudio a variedades lineales a trozos e introdujo las multiplicidades. Considerando combinaciones lineales formales de n -subvariedades definió

$$\sum_i n_i V_i \sim 0$$

si y sólo existe una $n + 1$ -subvariedad cuyo borde pasa n_i veces por V_i para cada i . Llamó a esta relación como **homología**. Introdujo el n -ésimo número de Betti como $b_n + 1$ siendo b_n el cardinal de una familia maximal de n -subvariedades linealmente independientes (bajo la relación de homología). Bajo este marco propuso una demostración de su célebre Teorema de Dualidad: $b_i = b_{m-i}$ siendo m la dimensión de V . Sin embargo, esta demostración tenía un fallo. En 1899, publicó un nuevo artículo con una demostración correcta, pero tuvo que reducir las sumas formales a símplexes V_i de una triangulación de V , este es el comienzo de la Homología Simplicial. A priori, estos nuevos números de Betti podían ser diferentes a los anteriores.

Otra de las contribuciones más importantes en “Analysis Situs” fue su generalización de la característica de Euler a poliedros de mayor dimensión. En concreto, definió

$$\chi(V) := \sum_i (-1)^i \alpha_i$$

siendo α_i el número de n -símplices dimensionales de V . Hoy en día este número se conoce como la **característica de Euler-Poincaré**. Probó que coincide con la suma alternada de los números de Betti (este resultado lo probaremos para CW -complejos).

En una publicación posterior de 1900 (“Second complement a l’Analysis Situs”), introdujo el concepto de **coeficientes de torsión** de la siguiente forma. Primero consideraba matrices T_n representando los bordes de cada uno de los símplexes de la triangulación, es decir, la matriz de la aplicación borde entre los n -símplexes y los $n-1$ -símplexes contando orientaciones y multiplicidades. Estas matrices cumplen $T_n \circ T_{n+1} = 0$. Posteriormente, mediante operaciones elementales de filas y columnas las reduce de forma única a una matriz con la siguiente estructura:

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots \\ 0 & K & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \text{ con } K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & k_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & k_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

y los k_j cumpliendo $1 < k_1, k_1|k_2, k_2|k_3, \dots$. En estas condiciones, b_n sería la diferencia entre las columnas nulas de T_n y las filas nulas en T_{n+1} . Definió los n -ésimos coeficientes de torsión como los k_j de la matriz T_{n+1} . Nosotros comprobaremos que los números que definió Poincaré se traducen en que el n -ésimo grupo de Homología $H_n(V)$ sea isomorfo a $\mathbb{Z}^{b_n} \oplus \mathbb{Z}/k_1\mathbb{Z} \oplus \dots$.

Por supuesto, toda la teoría desarrollada por Poincaré era dependiente de las triangulaciones escogidas y no fue hasta 1913 cuando James Waddell Alexander (1888-1971) probó que todos estos números eran invariantes topológicos.

Hasta entonces, la Homología se trataba de calcular estos números y encontrar diversas conexiones entre ellos. Pero todas estas percepciones cambiaron cuando en 1925 Emmy Noether puntualizó que la Homología no son números, ¡son grupos! A raíz de esta observación se desarrollaron diversas teorías de Homología. Nosotros tratamos la Homología más general de todas, la Homología Singular.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1	Homología Singular	1
1.1	Grupos de Homología Singular	1
1.2	Invariancia por Homotopía	7
1.3	Homología Relativa	10
1.4	Teorema de Excisión	14
1.5	Homología Reducida	21
1.6	La secuencia de Mayer-Vietoris	24
1.7	Homología con coeficientes	26
2	Homología Celular	28
2.1	CW-complejos	28
2.2	Los grupos de Homología Celular	30
2.3	Introducción a la Teoría del grado	31
2.4	Cálculo del Borde Celular	34
2.5	El isomorfismo entre la Homología Celular y Singular	36
3	Aplicaciones	40
3.1	La Característica de Euler-Poincaré	40
3.2	Teoremas clásicos	41
3.3	Orientación de variedades topológicas	46

§ CAPÍTULO 1: HOMOLOGÍA SINGULAR

En este capítulo se definirán y estudiarán los grupos de Homología Singular de un espacio topológico arbitrario X .

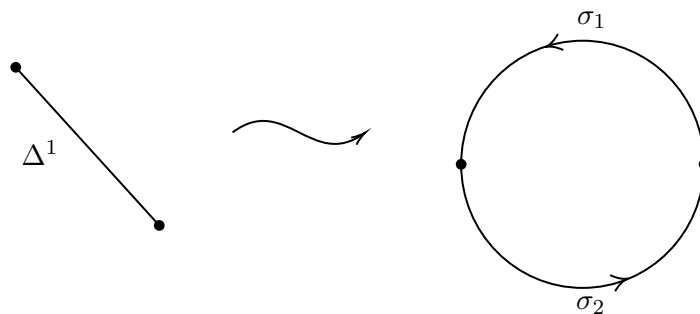
La **Sección 1.1** está dedicada a la motivación y definición de estos grupos y a estudiar los homomorfismos inducidos en la Homología de dos espacios por aplicaciones continuas. En la **Sección 1.2** se demuestra que estos homomorfismos son invariantes por homotopía. La **Sección 1.3** introduce los grupos de Homología Relativa y presentamos la secuencia exacta larga asociada. Durante la **Sección 1.4** se demuestra el Teorema de Excisión y sus consecuencias inmediatas. La **Sección 1.5** está dedicada al estudio de los grupos de Homología Reducida y sus principales aplicaciones, con particular atención al cálculo de los grupos de Homología de las esferas. En la **Sección 1.6**, introducimos la secuencia exacta de Mayer-Vietoris y con ella calculamos la Homología Singular del Toro y de la Botella de Klein. El capítulo finaliza con la **Sección 1.7**, donde se introducen los grupos de Homología Singular con coeficientes en grupos abelianos arbitrarios.

1.1 GRUPOS DE HOMOLOGÍA SINGULAR

Como hemos comentado, la Homología que primero se definió fue la Homología Simplicial. Para facilitar la comprensión sobre la teoría de los grupos de Homología Singular, presentamos una breve introducción a la teoría simplicial.

El objeto de esta teoría es, en término sencillos, encontrar agujeros n -dimensionales en espacios triangulados (de ahí la palabra Simplicial). La idea fundamental es la siguiente. Encontraremos agujeros n -dimensionales buscando combinaciones de n -símplices con borde nulo y que “no rellenen el hueco”. Donde, por “no rellenen el hueco”, entendemos que no sean el borde de una combinación lineal formal de $(n+1)$ -símplices. Motivamos esta idea con un ejemplo sencillo, S^1 . Supongamos que tenemos S^1 triangulada como en la **Figura 1.1.1**. Detectaríamos el agujero 1-dimensional (donde la dimensión se asocia a los símplices con los que lo rodeamos) mediante la suma formal $\sigma_1 + \sigma_2$. Este elemento tiene claramente borde nulo pero no es el borde de ningún 2-símplice, pues no hay ninguno. Esto nos daría el agujero 1-dimensional que tiene la circunferencia.

Figura 1.1.1: El agujero de S^1 .



La Homología Singular es una generalización de esta idea a espacios topológicos arbitrarios. En consecuencia, no tenemos n -símplices especiales con los que trabajar. Esto nos induce a considerar todos los posibles. Es decir, los n -símplices con los que trataremos serán n -símplices singulares,

correspondientes a aplicaciones continuas partiendo desde puntos, rectas, triángulos, tetraedros y análogos n -dimensionales. Consecuentemente, para desarrollar la teoría formalmente, es conveniente definir estos “análogos n -dimensionales”.

Definición 1.1.1. Denotaremos por \mathbb{R}^* al conjunto de todas las sucesiones $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ con soporte finito. Equiparemos a este espacio con la topología inducida por la métrica:

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} (x_i - y_i)^2}.$$

Una sucesión x será habitualmente descrita como (x_n) . A la función e_i definida por $e_i(j) = \delta_{ij}$ (la delta de Kronecker) la llamaremos **i -ésimo vector canónico**.

Definición 1.1.2 (n -símplice canónico). Definimos el **n -símplice canónico**, Δ^n , como la envoltura convexa de $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$. Esto es,

$$\Delta^n = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i e_i \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}.$$

Nótese que, con la definición que hemos dado, $\Delta^n \subseteq \Delta^{n+k}$ para cualquier $k \geq 0$.

A partir de ahora, X será un espacio topológico arbitrario.

Definición 1.1.3 (n -símplice singular). Un **n -símplice singular** será cualquier aplicación continua $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$.

Como en el caso Simplicial, estudiaremos las combinaciones lineales de n -símplices. Esta información la almacenamos sin problema en los grupos de Cadenas Singulares.

Definición 1.1.4 (El grupo de Cadenas Singulares). Fijado $n \geq 0$, el **grupo de Cadenas Singulares**, $\mathcal{C}_n(X)$, es el grupo libre abeliano generado por todos los n -símplices singulares. A un elemento de $\mathcal{C}_n(X)$ se le llamará **n -cadena singular** o simplemente cadena. Definimos por conveniencia $\mathcal{C}_{-1}(X) = \{0\}$.

Prácticamente disponemos de todos los ingredientes necesarios para comenzar la teoría y definir los grupos de Homología Singular. El elemento que nos falta, por supuesto, es el concepto de borde de una cadena singular, el concepto fundamental. Antes de dar la definición en n -símplices singulares vamos a centrarnos en cómo podemos definir de forma algebraica el borde de Δ^n , nuestro espacio base. Desde luego, su borde debe estar compuesto por su frontera topológica. Esta frontera está compuesta por todas sus caras $(n-1)$ -dimensionales que, en vez de considerarlas como subconjuntos de Δ^n , las consideraremos como aplicaciones desde Δ^{n-1} .

Definición 1.1.5 (i -ésima cara de Δ^n). La **i -ésima cara** de Δ^n , $i = 0, \dots, n$ es la aplicación continua $\epsilon_i^n : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ dada por:

$$\epsilon_i^n(x_0, \dots, x_{n-1}, 0, \dots) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1}, 0, \dots).$$

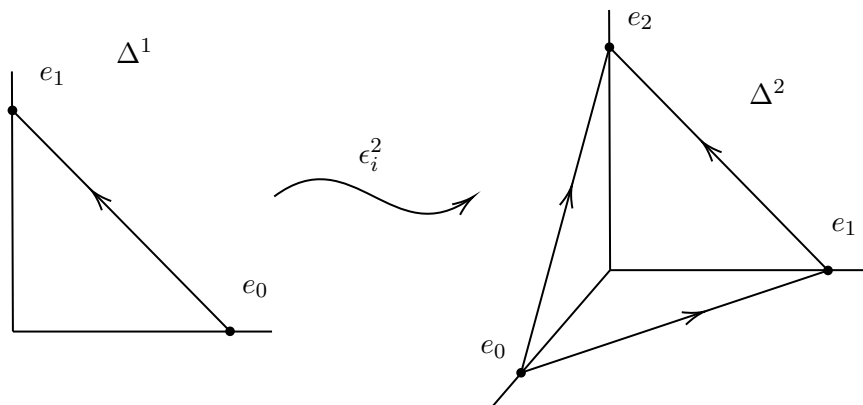
Nos paramos a estudiar el borde de Δ^2 en detalle para justificar la definición general. Un estudio rápido de las aplicaciones ϵ_i^2 nos da el esquema de la **Figura 1.1.2**. Esto no se corresponde a nuestra idea intuitiva de borde, pues lo esperable de una definición de borde es que mantenga las orientaciones adecuadas. Para arreglar esto, podemos definir el borde de Δ^2 (si queremos ser más rigurosos, sería el borde de la aplicación identidad $1_2 : \Delta^2 \rightarrow \Delta^2$) como la 1-cadena $\epsilon_0^2 - \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2$,

donde el signo negativo de ϵ_1^2 nos indicaría que la orientación de este símple es la contraria. Esta definición se generaliza sin problema a cualquier símple canónico estableciendo

$$\partial_n \mathbb{1}_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \epsilon_i^n,$$

siendo $\mathbb{1}_n : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ la identidad.

Figura 1.1.2: Borde de Δ^2 .



Por consiguiente, es natural considerar la siguiente definición:

Definición 1.1.6 (n -ésimo operador borde). Si $n \geq 1$, el n -ésimo operador borde, ∂_n , es el homomorfismo $\partial_n : \mathcal{C}_n(X) \rightarrow \mathcal{C}_{n-1}(X)$ definido en cada n -símple singular σ como:

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \epsilon_i^n.$$

En el caso $n = 0$, definimos $\partial_0 = 0$.

Tenemos la siguiente secuencia:

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathcal{C}_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0(X) \longrightarrow 0$$

Es un buen momento para comprobar si esta definición formal de borde satisface las propiedades que satisface el borde intuitivamente. La más importante de ellas, de hecho, la que da lugar a la definición de los grupos de Homología, es que el borde del borde de un n -símple sea vacío o, con la definición de homomorfismo que hemos dado, nulo.

Lema 1.1.1. Si $0 \leq j < i \leq n+1$, entonces $\epsilon_i^{n+1} \epsilon_j^n = \epsilon_j^{n+1} \epsilon_{i-1}^n$.

Demostración. Es un cálculo directo. Tomamos $x = (x_0, \dots, x_{n-1}, \dots)$ en Δ^{n-1} . Tenemos

$$\epsilon_i^{n+1} \epsilon_j^n x = (x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{i-2}, 0, x_{i-1}, \dots, x_{n-1}, \dots) = \epsilon_j^{n+1} \epsilon_{i-1}^n x. \quad \square$$

Proposición 1.1.1. $\partial_n \partial_{n+1} = 0$.

Demostración. Lo comprobaremos para los generadores de $\mathcal{C}_{n+1}(X)$, los $(n+1)$ -símple singulares. Sea σ un $(n+1)$ -símple singular. Entonces:

$$\partial_{n+1} \sigma = \sum_i (-1)^i \sigma \epsilon_i^{n+1}.$$

Aplicando ∂_n y usando que es homomorfismo, tenemos:

$$\begin{aligned}\partial_n \partial_{n+1} \sigma &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_n \sigma \epsilon_i^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma \epsilon_i^{n+1} \epsilon_j^n = \sum_i \sum_j (-1)^{i+j} \sigma \epsilon_i^{n+1} \epsilon_j^n \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \sigma \epsilon_i^{n+1} \epsilon_j^n + \sum_{j \geq i} (-1)^{i+j} \sigma \epsilon_i^{n+1} \epsilon_j^n \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \sigma \epsilon_j^{n+1} \epsilon_{i-1}^n + \sum_{j \geq i} (-1)^{i+j} \sigma \epsilon_i^{n+1} \epsilon_j^n.\end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado el **Lema 1.1.1**. Los sumandos de cada uno de los sumatorios se cancelan entre sí. Para verlo, efectuamos el cambio de variable $i' = i - 1$ en el primero:

$$\partial_n \partial_{n+1} \sigma = \sum_{j \leq i'} (-1)^{i'+j-1} \sigma \epsilon_j^{n+1} \epsilon_{i'}^n + \sum_{j \geq i} (-1)^{i+j} \sigma \epsilon_i^{n+1} \epsilon_j^n.$$

Ahora, intercambiando los papeles de j, i' , es claro que ambos sumatorios son opuestos. Concluimos que $\partial_n \partial_{n+1} \sigma = 0$, como queríamos demostrar. \square

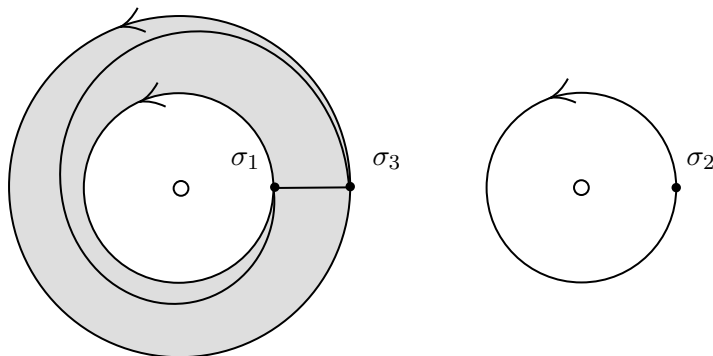
Definición 1.1.7 (Ciclos, bordes). $\sigma \in \mathcal{C}_n(X)$ se llamará **ciclo** si $\partial_n \sigma = 0$ y se llamará **borde** si existe $\alpha \in \mathcal{C}_{n+1}(X)$ tal que $\partial_{n+1} \alpha = \sigma$. Observamos que todo borde es ciclo, gracias a la **Proposición 1.1.1** anterior.

Como motivábamos en la introducción, encontraremos agujeros n -dimensionales cuando exista una n -cadena $\sigma \in \mathcal{C}_n(X)$ sin borde, es decir, $\partial_n \sigma = 0$, y que además no sea el borde de ninguna $(n+1)$ -cadena. O, en la terminología anterior, cuando exista algún ciclo que no sea borde. Sería conveniente establecer cuando dos ciclos cumpliendo lo anterior determinan o no el mismo agujero. Esto lo encapsulamos en la siguiente definición:

Definición 1.1.8 (Ciclos homólogos). Dos n -ciclos α, β se llamarán **homólogos** si difieren por una frontera. Esto es, si existe una $(n+1)$ -cadena γ tal que $\alpha - \beta = \partial_{n+1} \gamma$. Es trivial comprobar que esta es una relación de equivalencia.

Ejemplo 1.1.1. Para enlazar que efectivamente esta definición representa bien el concepto que buscamos, tomamos como X el plano menos dos puntos. Intuitivamente este espacio debe tener dos agujeros 1-dimensionales y los detectaríamos mediante los ciclos σ_1, σ_2 como viene en la **Figura 1.1.3**. Parece razonable pensar que $\sigma_1 - \sigma_2$ no va a formar el borde de ninguna 2-cadena, es decir, σ_1 no es homólogo a σ_2 . Esto nos diría que detectan agujeros diferentes. Ahora sea σ_3 otro 1-ciclo rodeando el mismo agujero que σ_1 . La suma de los 2-símplices coloreados tiene como borde $\sigma_1 - \sigma_3$ y tendríamos que ambos ciclos son homólogos, es decir, detectan el mismo agujero.

Figura 1.1.3: El plano sin dos puntos.



Al conjunto de los n -ciclos cocientado con la relación de homología se le puede dotar de estructura de grupo abeliano operando en los representantes. Este es el **n -ésimo grupo de Homología Singular** de X . La definición siguiente es exactamente igual a la anterior y tiene la ventaja de ser puramente algebraica.

Definición 1.1.9 (n -ésimo grupo de Homología Singular).

$$H_n(X) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}.$$

Nótese que este cociente está bien definido gracias a la **Proposición 1.1.2** y que un elemento de $H_n(X)$ es una clase de equivalencia de ciclos homólogos. Los elementos no triviales de $H_n(X)$ estarán representados por aquellos ciclos que no sean borde, como motivábamos en el ejemplo de la circunferencia.

Es claro, a raíz de la definición, que los grupos de Homología Singular son invariantes topológicos. Además, como veremos en la **Sección 1.2**, son invariantes por el tipo de Homotopía. Por tanto, es de particular interés calcular la Homología de los espacios unipuntuales pues esta nos dará la Homología de todos los espacios contráctiles. Resulta que este cálculo es muy sencillo y se puede realizar partiendo de la definición.

Proposición 1.1.2. Si $X = \{p\}$, entonces $H_n(X) = 0$ si $n \geq 1$ y $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Demostración. Como el espacio es unipuntual, $\mathcal{C}_n(X)$ está generado por σ_n , la única aplicación $\sigma_n : \Delta^n \rightarrow \{p\}$. Calculamos su borde:

$$\partial \sigma_n = \sum_i (-1)^i \sigma_n \epsilon_i^n = \sum_i (-1)^i \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \sigma_{n-1} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

puesto que hay $n + 1$ sumandos. Tenemos la siguiente secuencia:

$$\dots \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_{2n+1}(X) \xrightarrow{0} \mathcal{C}_{2n}(X) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_1(X) \xrightarrow{0} \mathcal{C}_0(X) \xrightarrow{0} 0$$

Si $n \geq 1$, o bien el conjunto de ciclos es nulo (caso par) o bien el conjunto de bordes es el total (caso impar), en cualquier caso, $H_n(X) = 0$.

En $n = 0$, el conjunto de ciclos es el total y el conjunto de bordes es nulo. Por lo tanto, $H_0(X)$ está generado por la clase no nula de σ_0 . Es decir, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. \square

Puede parecer sorprendente que $H_0(\{p\}) \cong \mathbb{Z}$ pero resulta que esto se generaliza a espacios topológicos arbitrarios. La idea intuitiva es que los agujeros 0-dimensionales coinciden exactamente con las componentes conexas por caminos de un espacio:

Proposición 1.1.3. Sea $X = \sqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ un espacio topológico descompuesto en sus componentes conexas por caminos. Entonces

$$H_0(X) \cong \bigoplus_{\alpha} \mathbb{Z}_{\alpha}.$$

Demostración. Sea x_{α} un punto en cada X_{α} y $\sigma_{\alpha} : \Delta^0 \rightarrow X$ la aplicación constante con valor x_{α} . Vamos a demostrar que el homomorfismo

$$\varphi : \bigoplus_{\alpha} \mathbb{Z}_{\alpha} \rightarrow H_0(X)$$

definido como $\varphi((n_\alpha)) = \sum_\alpha n_\alpha [\sigma_\alpha]$ es un isomorfismo.

Para ver que es suprayectiva basta comprobarlo en los generadores. Sea σ un 0-ciclo. Definimos $q = \sigma(e_0)$. q está en alguna componente conexa por caminos, X_β . Sea $\gamma : \Delta^1 \rightarrow X_\beta$ un camino (identificando $\Delta^1 \cong I$) tal que $\gamma(e_0) = q$ y $\gamma(e_1) = x_\beta$. Entonces $\partial_1 \gamma = \sigma_\beta - \sigma$. Concluimos que σ_β y σ son homólogos y, por tanto, $\varphi((n_\alpha)) = [\sigma_\beta] = [\sigma]$ tomando $n_\alpha = 0$ si $\alpha \neq \beta$ y $n_\beta = 1$.

Veamos que es también inyectiva comprobando que su núcleo es trivial. Supongamos que $\sum_\alpha n_\alpha [\sigma_\alpha] = 0$. Entonces existe una 1-cadena ζ con $\partial \zeta = \sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha$. Dividiendo ζ en los sumandos que caen en cada componente conexa podemos asumir que $\zeta = \sum_i \gamma_i$ y $\partial \zeta = n_\beta \sigma_\beta$ con $\gamma_i : \Delta^1 \rightarrow X_\beta$. Como $\partial \sum_i \gamma_i = \sum_i \partial \gamma_i = \sum_i (\gamma_i(e_1) - \gamma_i(e_0)) = n_\beta \sigma_\beta$, necesariamente tenemos $n_\beta = 0$ pues todos los coeficientes del sumatorio de la izquierda suman 0. \square

De forma más general, la homología de un espacio se puede expresar en términos de la homología de sus componentes conexas por caminos:

Proposición 1.1.4. *Sea $X = \sqcup_\alpha X_\alpha$ un espacio descompuesto en sus componentes conexas por caminos. Entonces para cada $n \geq 0$ se tiene*

$$H_n(X) \cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha).$$

Demostración. Si $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ es un n -símplice singular, como Δ^n es conexo por caminos, $\sigma : \Delta^n \rightarrow X_\beta$ para un único β . Es inmediato comprobar que esta correspondencia induce el isomorfismo deseado. \square

Una de las mayores ventajas de considerar $H_n(X)$ como un grupo es el carácter functorial. Partiendo de una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$, tendremos una aplicación inducida en cada grupo de Homología Singular $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$.

Definición 1.1.10 (Homomorfismo inducido en las cadenas). Sea $f : X \rightarrow Y$ aplicación continua entre dos espacios topológicos. $f_\# : \mathcal{C}_n(X) \rightarrow \mathcal{C}_n(Y)$ definido para $n = -1$ como el homomorfismo trivial y para $n \geq 0$ en los generadores como

$$f_\# \sigma = f \circ \sigma = f \sigma$$

se llamará **homomorfismo de cadenas inducido** por f . Nótese que si σ es un n -símplice singular, $f_\# \sigma$ también lo es por ser f continua.

El homomorfismo inducido en la Homología vendrá definido representante a representante mediante $f_\#$. Para que esta definición tenga sentido, debemos asegurar que ciclos van a ciclos y que bordes van a bordes. Esto se desprende de la naturalidad del operador borde:

Proposición 1.1.5. *Si $n \geq 0$, $\partial_n f_\# = f_\# \partial_n$ donde el operador borde está actuando en $\mathcal{C}_n(Y)$, $\mathcal{C}_n(X)$, respectivamente.*

Demostración. Es una comprobación inmediata. Si $n = 0$, es trivial. Ahora, si $n > 0$, lo comprobamos en los generadores de $\mathcal{C}_n(X)$. Sea σ un n -símplice singular. Entonces:

$$\partial_n f_\# \sigma = \sum_i (-1)^i (f \sigma) \epsilon_i^n = \sum_i (-1)^i f(\sigma \epsilon_i^n) = f_\# \partial_n \sigma \quad \square$$

Como comentábamos, esto nos permite dar la siguiente definición:

Definición 1.1.11 (Homomorfismo inducido en la Homología). Sea $f : X \rightarrow Y$ aplicación continua entre dos espacios topológicos. Definimos $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$, el **homomorfismo inducido en la Homología**, en los generadores como:

$$f_*[\sigma] = [f_{\#}\sigma].$$

Como decíamos, esta definición induce a los grupos de Homología de una carácter functorial.

Proposición 1.1.6. Sean X, Y, Z espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ dos aplicaciones continuas. Entonces:

$$i) (fg)_* = f_*g_*$$

$$ii) 1_* = 1$$

Demostración. Es una comprobación inmediata. \square

Corolario 1.1.1. Si $\varphi : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, $\varphi_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ es un isomorfismo para cada n .

Demostración. Se sigue del carácter functorial de H_n . \square

1.2 INVARIANCIA POR HOMOTOPÍA

El objetivo de esta sección es demostrar que si dos aplicaciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ son homótopas, entonces sus homomorfismos inducidos en la Homología coinciden, es decir, $f_* = g_*$. La demostración se basa en encontrar cierto homomorfismo $P_n : \mathcal{C}_n(X) \rightarrow \mathcal{C}_{n+1}(Y)$ para cada $n \geq -1$, llamado **operador prisma**, cumpliendo la siguiente igualdad:

$$P_{n-1}\partial_n + \partial_{n+1}P_n = g_{\#} - f_{\#}.$$

Si tuviéramos este homomorfismo construido, dado un ciclo $\alpha \in \mathcal{C}_n(X)$, tendríamos que

$$P_{n-1}\partial_n\alpha + \partial_{n+1}P_n\alpha = \partial_{n+1}P_n\alpha = g_{\#}\alpha - f_{\#}\alpha,$$

es decir, $f_{\#}\alpha$ y $g_{\#}\alpha$ son homólogos. Concluiríamos $f_* = g_*$.

El lector se habrá dado cuenta de lo complicado que es seguir la notación anterior con todos los subíndices. Es por esto que, a partir de ahora, no trataremos con subíndices ni en los operadores borde ni en el operador prisma $P : \mathcal{C}_n(X) \rightarrow \mathcal{C}_{n+1}(Y)$, por simplificar significativamente las explicaciones. En esta nueva notación, la ecuación anterior se expresaría

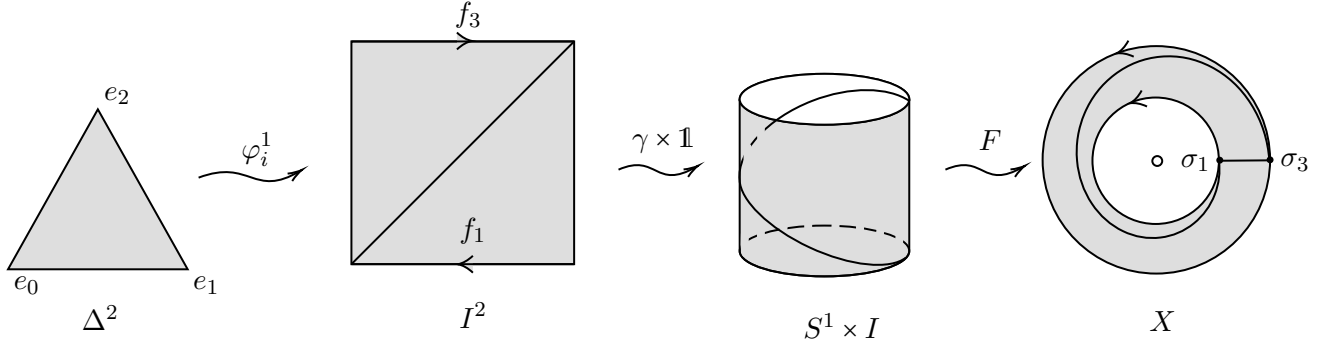
$$P\partial + \partial P = g_{\#} - f_{\#}.$$

Este tipo de aplicación se llama **homotopía de cadenas**. Esta en concreto será una homotopía de cadenas entre $f_{\#}$ y $g_{\#}$. Cuando estemos en esta situación, diremos que $f_{\#}$ y $g_{\#}$ son **homótopas**.

Teorema 1.2.1. Si f, g son homótopas, entonces $f_{\#}, g_{\#}$ son homótopas.

La demostración de este Teorema tiene una buena interpretación geométrica que proporcionamos a continuación. La motivamos a raíz de la **Figura 1.1.3**, con el ejemplo del plano sin dos puntos.

Lo primero que uno puede observar es que podemos interpretar σ_1 y σ_3 como imágenes de dos inmersiones $f_1, f_3 : S^1 \rightarrow X$. En concreto, $\sigma_1 = f_{1\#}\gamma$, $\sigma_3 = f_{3\#}\gamma$ siendo γ un ciclo (camino cerrado)

Figura 1.2.1: La invariancia por homotopía en dimensión 1.

en S^1 . Existe una homotopía $F : S^1 \times I \rightarrow X$ que asumiremos radial de tal forma que $F(\cdot, 0) = f_1$ y $F(\cdot, 1) = f_3$. Dividimos $\Delta^1 \times I \cong I^2$ como viene en la **Figura 1.2.1** y consideramos dos inmersiones $\varphi_i^1 : \Delta^2 \rightarrow \Delta^1 \times I$ con $i = 0, 1$ que cubran el triángulo superior e inferior, respectivamente.

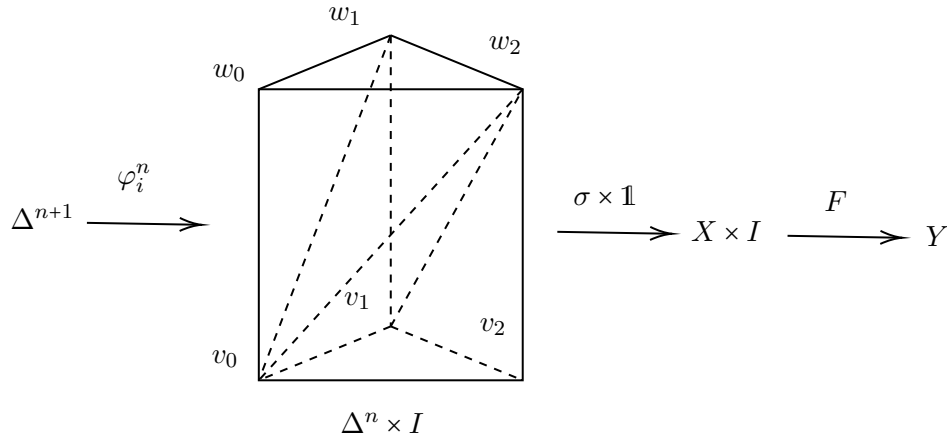
Es fácil comprobar que $F \circ (\gamma \times 1) \circ \varphi_0^1 - F \circ (\gamma \times 1) \circ \varphi_1^1$ es una 2-cadena con borde exactamente $f_3 \# \gamma - f_1 \# \gamma = \sigma_3 - \sigma_1$ y que coincide exactamente con los 2-símplices presentados en la **Figura 1.1.3**. La demostración se trata de generalizar esta estrategia a dimensiones superiores y espacios topológicos arbitrarios:

Demostración (del **Teorema 1.2.1**). Definimos $v_i = (e_i, 0)$ y $w_i = (e_i, 1)$. Sea $\varphi_i^n : \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n \times I$ la aplicación afín que toma valores en los e_j como v_j si $j \leq i$ y como w_{j-1} si $j > i$. Estos serán los $(n+1)$ -símplices que usaremos para establecer la homotopía de cadenas (ver **Figura 1.2.1**). Sea $F : X \times I \rightarrow Y$ la homotopía entre f y g . Esto es, $F(\cdot, 0) = f$ y $F(\cdot, 1) = g$. Definimos

$$P : \mathcal{C}_n(X) \longrightarrow \mathcal{C}_{n+1}(Y)$$

en los generadores $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ como

$$P\sigma = \sum_i (-1)^i F \circ (\sigma \times 1) \circ \varphi_i^n.$$

Figura 1.2.2: La invariancia por homotopía en dimensión arbitraria.

Tomando bordes:

$$\begin{aligned}\partial P\sigma &= \sum_{i,j} (-1)^{i+j} F \circ (\sigma \times \mathbb{1}) \varphi_i^n \epsilon_j^{n+1} \\ &= \sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} F \circ (\sigma \times \mathbb{1}) \varphi_i^n \epsilon_j^{n+1} + \sum_{j > i} (-1)^{i+j} F \circ (\sigma \times \mathbb{1}) \varphi_i^n \epsilon_j^{n+1}.\end{aligned}$$

Como $\varphi_{i+1}^n \epsilon_{i+1}^{n+1} = \varphi_i^n \epsilon_{i+1}^{n+1}$ si $i = 0, \dots, n-1$, concluimos que los sumandos correspondientes a $j = i$, $j = i+1$ se van cancelando (nótese que aparecen con signo contrario) salvo los correspondientes a $i = j = 0$ e $i = n, j = n+1$ que serían

$$\begin{aligned}F \circ (\sigma \times \mathbb{1}) \varphi_0^n \epsilon_0^{n+1} &= F \circ (\sigma \times \{1\}) = g\sigma = g_{\#}\sigma, \\ -F \circ (\sigma \times \mathbb{1}) \varphi_n^n \epsilon_{n+1}^{n+1} &= F \circ (\sigma \times \{0\}) = -f\sigma = -f_{\#}\sigma.\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos:

$$\partial P\sigma = g_{\#}\sigma - f_{\#}\sigma + \sum_{j < i} (-1)^{i+j} F \circ (\sigma \times \mathbb{1}) \varphi_i^n \epsilon_j^{n+1} + \sum_{j > i+1} (-1)^{i+j} F \circ (\sigma \times \mathbb{1}) \varphi_i^n \epsilon_j^{n+1}.$$

Falta demostrar que los últimos sumandos son $-P\partial\sigma$. Si $j \leq i$, mediante un cálculo directo, tenemos que

$$(\sigma \epsilon_j^n \times \mathbb{1}) \varphi_i^{n-1} = (\sigma \times \mathbb{1}) \varphi_{i+1}^n \epsilon_j^{n+1}.$$

En el caso que $j > i$, obtenemos

$$(\sigma \epsilon_j^n \times \mathbb{1}) \varphi_i^{n-1} = (\sigma \times \mathbb{1}) \varphi_i^n \epsilon_{j+1}^{n+1}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}P\partial\sigma &= \sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} F \circ (\sigma \epsilon_j^n \times \mathbb{1}) \varphi_i^{n-1} + \sum_{j > i} (-1)^{i+j} F \circ (\sigma \epsilon_j^n \times \mathbb{1}) \varphi_i^{n-1} \\ &= \sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} F \circ (\sigma \times \mathbb{1}) \varphi_{i+1}^n \epsilon_j^{n+1} + \sum_{j > i} (-1)^{i+j} F \circ (\sigma \times \mathbb{1}) \varphi_i^n \epsilon_{j+1}^{n+1},\end{aligned}$$

donde es claro que es el opuesto a los sumatorios anteriores. Concluimos que

$$\partial P\sigma = g_{\#} - f_{\#} - P\partial\sigma,$$

es decir,

$$\partial P + P\partial = g_{\#} - f_{\#}.$$

□

Como comentábamos, esto nos da el siguiente resultado:

Teorema 1.2.2 (Invariancia por Homotopía). *Sean $f, g : X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas homótopas. Entonces $f_{\#} = g_{\#}$.*

Corolario 1.2.1. *Si $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia de homotopía, $f_{\#} : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ es un isomorfismo para cada n . En particular, si A es un retracto por deformación de X , la aplicación inducida por la inclusión, $i_{\#}$, es un isomorfismo en la homología.*

Demostración. Sea $g : Y \rightarrow X$ la inversa de homotopía de f . Entonces $fg \sim \mathbb{1}, gf \sim \mathbb{1}$. Por el teorema anterior, $f_{\#}g_{\#} = \mathbb{1}, g_{\#}f_{\#} = \mathbb{1}$. Concluimos que $f_{\#}$ es un isomorfismo en cada grupo. □

Hacemos notar que podemos suponer que el retracto por deformación sea débil en el sentido de que no proviene de ningún retracto $r : X \rightarrow A$.

1.3 HOMOLOGÍA RELATIVA

Durante esta sección relajaremos el concepto de ciclo para dar lugar a los grupos de Homología Relativa. Consideraremos como ciclos relativos a los n -símplices $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ con borde completamente contenido en algún subespacio fijo A . Por supuesto, si σ tiene su imagen completamente contenida en A , será un ciclo relativo. Es por esto por lo que vamos a ignorar los n -símplices con imagen en A introduciendo la siguiente definición:

Definición 1.3.1 (Cadenas Relativas). Sea X un espacio topológico y A un subespacio suyo. El n -ésimo grupo de las Cadenas de X Relativas a A es el grupo definido por

$$\mathcal{C}_n(X, A) = \mathcal{C}_n(X) / \mathcal{C}_n(A).$$

Observamos que este grupo es libre abeliano generado por las clases de equivalencia de aquellos n -símplices cuya imagen no cae completamente en A .

Queremos definir la Homología Relativa que, como es natural, se obtendrá empleando una definición similar a la dada en la **Sección 1.1**. La definición vendrá inducida por cierta cadena de homomorfismos cumpliendo las propiedades descritas sobre la Homología Singular. La cadena de homomorfismos que tomaremos serán los cocientes de los operadores borde

$$\partial : \mathcal{C}_n(X) \rightarrow \mathcal{C}_{n-1}(X).$$

Hacemos notar que si un n -símplice toma valores en A , todos los sumandos de su borde también toman valores en A . Concluimos que

$$\begin{aligned} [\partial_n] : \mathcal{C}_n(X, A) &\rightarrow \mathcal{C}_{n-1}(X, A) \\ [\sigma] &\mapsto [\partial_n \sigma], \end{aligned}$$

el **operador borde relativo**, es un homomorfismo perfectamente definido. Además, como $\partial^2 = 0$ en las cadenas, al pasar al cociente seguimos teniendo la misma igualdad. Esto nos permite definir los grupos de Homología Relativa de una manera similar a la anterior:

Definición 1.3.2 (Homología Relativa). El n -ésimo grupo de Homología Relativa de X con respecto a A es el grupo

$$H_n(X, A) := \text{Ker}[\partial_n] / \text{Im}[\partial_{n+1}].$$

Para no complicar la notación, escribimos como $[\partial]$ el homomorfismo borde relativo. Observamos que $[\sigma_1] = [\sigma_2]$ en $H_n(X, A)$ si y sólo si

$$\sigma_1 = \sigma_2 + \partial\gamma + \beta$$

con $\gamma \in \mathcal{C}_{n+1}(X)$ y $\beta \in \mathcal{C}_n(A)$. Es decir, dos cadenas son homólogas en los grupos relativos si distan por un borde salvo una cadena en A . Nótese que $H_n(X, X) = 0$ pues todos los grupos de las cadenas relativas son triviales.

Como veremos al final de la sección, los grupos de Homología Relativa miden la diferencia entre los grupos $H_n(X)$, $H_n(A)$. Antes de presentar este resultado, necesitamos definir lo que son las aplicaciones inducidas en la Homología Relativa. Estas definiciones se harán de manera completamente análoga a como se hicieron en los grupos de Homología Singular, pero debemos tener cuidado con que las aplicaciones continuas respeten las parejas de espacios topológicos.

Definición 1.3.3. Escribiremos $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua y $f(A) \subseteq B$.

Definición 1.3.4 (Homomorfismo inducido en las Cadenas Relativas). Si $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, el **homomorfismo inducido en las cadenas relativas**,

$$[f_{\#}] : \mathcal{C}_n(X, A) \longrightarrow \mathcal{C}_n(Y, B),$$

es el cociente del homomorfismo $f_{\#} : \mathcal{C}_n(X) \longrightarrow \mathcal{C}_n(Y)$. Nótese que, como $f(A) \subseteq B$, $f_{\#}(\mathcal{C}_n(A)) \subseteq \mathcal{C}_n(B)$ y podemos pasar al cociente.

Proposición 1.3.1. $[\partial][f_{\#}] = [f_{\#}][\partial]$.

Demostración. Se desprende de que la identidad se tiene en las cadenas. □

El resultado anterior nos permite, al igual que en la Homología Singular, definir homomorfismos entre grupos de Homología Relativa.

Definición 1.3.5 (Homomorfismo inducido en la Homología Relativa). Si $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$, definimos el **homomorfismo inducido en la Homología Relativa**,

$$[f_*] : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B),$$

como el cociente de $[f_{\#}]$.

Los grupos de Homología Relativa mantienen el carácter functorial:

Proposición 1.3.2. Si $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ y $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$, tenemos que:

$$i) [(fg)_*] = [f_*][g_*]$$

$$ii) [\mathbb{1}_*] = \mathbb{1}$$

Demostración. Se desprende de la **Proposición 1.1.6**. □

La invariancia por Homotopía también la tenemos en la Homología Relativa pero, por supuesto, hay que pedir que la homotopía en cuestión respete las parejas de espacios topológicos:

Teorema 1.3.1. Si $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ son homótopas a través de una homotopía $F : X \times I \rightarrow Y$ que respeta las parejas $(X, A), (Y, B)$ ($F(t, A) \subseteq B$ para cada $t \in I$), se tiene $[f_*] = [g_*]$.

Demostración. Por el **Teorema 1.2.1**, existe una homotopía de cadenas $P : \mathcal{C}_n(X) \longrightarrow \mathcal{C}_{n+1}(Y)$ tal que

$$P\partial + \partial P = g_{\#} - f_{\#}.$$

Suponiendo que P está definida igual que en la demostración del teorema, tenemos que P envía $\mathcal{C}_n(A)$ a $\mathcal{C}_{n+1}(B)$ puesto que $F(t, a) \in B$ para cada $a \in A$ y para cada $t \in I$. Concluimos que podemos pasar al cociente:

$$[P] : \mathcal{C}_n(X, A) \longrightarrow \mathcal{C}_{n+1}(Y, B).$$

Además, se tiene la igualdad

$$[\partial][P] + [P][\partial] = [g_{\#}] - [f_{\#}].$$

Con un razonamiento completamente análogo, concluimos que $[f_*] = [g_*]$. □

Nótese que podemos definir homomorfismos entre grupos de Homología Singular y grupos de Homología Relativa dado cualquier homomorfismo entre las cadenas que conmute con los operadores borde. En particular, tomando la proyección

$$j : \mathcal{C}_n(X) \longrightarrow \mathcal{C}_n(X, A),$$

tenemos que $j\partial = [\partial]j$ y, por consiguiente, podemos definir el homomorfismo

$$j_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A).$$

A partir de ahora, realizando abuso de notación, escribimos $f_\#$, f_* como los homomorfismos inducidos en las cadenas relativas y en la Homología Relativa confiando que, en cada situación, sea clara la distinción con sus análogos singulares.

Proposición 1.3.3. *La aplicación*

$$\begin{aligned} \partial_* : H_n(X, A) &\rightarrow H_{n-1}(A) \\ [\sigma] &\mapsto [\partial\sigma] \end{aligned}$$

está bien definida y es un homomorfismo.

Demostración. Claramente $[\partial\sigma] \in H_{n-1}(A)$ pues $\partial\sigma$ es un ciclo. Ahora, supongamos que $[\sigma_1] = [\sigma_2]$. Por la observación realizada en la **Definición 1.3.2**, tenemos que $\sigma_1 = \sigma_2 + \partial\gamma + \beta$ con $\gamma \in \mathcal{C}_{n+1}(X)$ y $\beta \in \mathcal{C}_n(A)$. Tomando bordes, $\sigma_1 = \sigma_2 + \partial\beta$, es decir, $[\sigma_1] = [\sigma_2]$ en $H_n(A)$. Comprobar que es un homomorfismo es trivial. \square

Los grupos de Homología Relativa nos darán información sobre los grupos de Homología Singular a través de cierta secuencia exacta involucrando a $H_n(X)$, $H_n(A)$, $H_n(X, A)$ y los homomorfismos previamente definidos. Esto enfatiza que $H_n(X, A)$ mide la diferencia entre $H_n(X)$ y $H_n(A)$. Recordamos que una **secuencia exacta** es una secuencia de grupos y de homomorfismos

$$\dots \xrightarrow{f_{n+1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots$$

posiblemente infinita de tal forma que $\text{Ker } f_n = \text{Im } f_{n-1}$. Una secuencia se denominará **secuencia exacta corta** si es de la forma

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

y **secuencia exacta larga** en otro caso. Nótese que dada una secuencia exacta corta, por el Primer Teorema de Isomorfía tenemos que $C \cong B/f(A)$.

Teorema 1.3.2 (Secuencia exacta larga de los grupos de Homología Relativa). *Sea X un espacio topológico arbitrario y A un subespacio suyo. Los homomorfismos previamente definidos encajan*

en una secuencia exacta larga:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \partial_* & \swarrow & \dots \\
 & & & & & \swarrow & \\
 H_n(A) & \xleftarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) & & \\
 & & & & \partial_* & \swarrow & \\
 H_{n-1}(A) & \xleftarrow{i_*} & H_{n-1}(X) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-1}(X, A) & & \\
 & & & & \partial_* & \swarrow & \\
 & & & & \partial_* & \swarrow & \\
 & & & & \partial_* & \swarrow & \\
 H_1(A) & \xleftarrow{i_*} & H_1(X) & \xrightarrow{j_*} & H_1(X, A) & & \\
 & & & & \partial_* & \swarrow & \\
 H_0(A) & \xleftarrow{i_*} & H_0(X) & \xrightarrow{j_*} & H_0(X, A) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

donde $i_* : H_n(A) \rightarrow H_n(X)$ es el homomorfismo inducido por la inclusión $i : A \hookrightarrow X$.

Este resultado es la particularización de un resultado puramente algebraico mucho más general involucrando secuencias exactas cortas de complejos de cadenas. Esto es lo que da pie al desarrollo del Álgebra Homológica. Como en secciones posteriores nos será útil disponer de diversas secuencias exactas, introducimos este resultado:

Definición 1.3.6. (Complejo de cadenas) Un **complejo de cadena** A es una secuencia (en \mathbb{Z}) de grupos abelianos y de morfismos

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} A_n \xrightarrow{\partial_n} A_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

cumpliendo $\partial_{n+1}\partial_n = 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.3.7. (Grupos de Homología) Dado un complejo de cadena A , definimos el **n -ésimo grupo de Homología de A** como $H_n(A) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$.

Definición 1.3.8. (Morfismo de cadenas) Un **morfismo de cadenas** entre dos cadenas $f : A \rightarrow B$ es una secuencia de morfismos $f_n : A_n \rightarrow B_n$ que conmuta con los operadores borde, $\partial_n f_n = f_n \partial_n$ para cada n .

Definición 1.3.9. (Homomorfismo inducido en la Homología) Si $f : A \rightarrow B$ es un morfismo de cadenas, $f_* : H_n(A) \rightarrow H_n(B)$ definido como $f_*([a]) = [f(a)]$ es el **homomorfismo inducido en la Homología**. Nótese que el homomorfismo está bien definido ya que f conmuta con los operadores borde.

A partir de ahora escribimos los operadores borde como ∂ (eliminando el índice).

Proposición 1.3.4. Sea $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$ una secuencia exacta corta de cadenas. Es decir, $0 \rightarrow A_n \xrightarrow{i_n} B_n \xrightarrow{j_n} C_n \rightarrow 0$ es una secuencia exacta corta para cada $n \in \mathbb{Z}$. Entonces los grupos de

Homología encajan en una secuencia exacta larga:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \partial_* & \nearrow & \dots \\
 & & & & & & \\
 H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(B) & \xrightarrow{j_*} & H_n(C) & & \\
 & & & & \partial_* & \nearrow & \\
 H_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(B) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-1}(C) & & \\
 & & & & \partial_* & \nearrow & \\
 \dots & & & & & &
 \end{array}$$

siendo i_*, j_* los morfismos inducidos en la Homología por i y j y ∂_* un homomorfismo por definir.

Demostración. Empezamos definiendo el homomorfismo $\partial_* : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$. Sea $[c] \in H_n(C)$. Como j_n es sobreyectiva, existe un $b \in B_n$ con $j_n(b) = c$. Además, tenemos que $\partial b \in \text{Im } i_{n-1} = \text{Ker } j_{n-1}$ puesto que $j_{n-1}(\partial b) = \partial j_n(b) = \partial c = 0$. Esto implica que existe un único $a \in A_{n-1}$ (único por la inyectividad) tal que $i_{n-1}(a) = \partial b$. Nótese que a es un ciclo. Definimos $\partial_*[c] := [a]$. Tenemos que comprobar que está bien definido, es decir, que no depende ni de la elección de b ni de la elección de c .

Supongamos \tilde{b} con $j_n(b) = j_n(\tilde{b}) = c$. Sean a, \tilde{a} tal que $i_{n-1}(a) = \partial b$, $i_{n-1}(\tilde{a}) = \partial \tilde{b}$. Como la secuencia es exacta, tenemos que $b - \tilde{b} = i_n(\hat{a})$ para un $\hat{a} \in A_n$. Concluimos que $i_{n-1}(a) - i_{n-1}(\tilde{a}) = i_{n-1}(\partial \hat{a})$. Por la inyectividad, tenemos $a - \tilde{a} = \partial \hat{a}$, es decir, a y \tilde{a} son homólogos.

Ahora supongamos c, \tilde{c} homólogos. Esto es $\tilde{c} - c = \partial \hat{c}$. Entonces tomando b, \hat{b} con $j_n(b) = c$, $j_{n+1}(\hat{b}) = \hat{c}$, podemos definir $\tilde{b} := b + \partial \hat{b}$ y satisface $j_n(\tilde{b}) = \tilde{c}$. Como $\partial b = \partial \tilde{b}$, tenemos $a = \tilde{a}$, lo que comprueba que ∂_* está perfectamente definida.

A partir de ahora eliminaremos también los índices de las aplicaciones i, j . Nos falta comprobar que se dan las igualdades:

- i) $\text{Im } \partial_* = \text{Ker } i_*$. Veamos el primer contenido: si $[a] \in \text{Im } \partial_*$, por construcción tenemos $i_*[a] = [i(a)] = [\partial b] = 0$. Ahora, sea $[a] \in \text{Ker } i_*$. Entonces $i(a) = \partial b$. Es suficiente definir $c = j(b)$ y observar que en esta situación $\partial_*[c] = [a]$ por construcción.
- ii) $\text{Im } i_* = \text{Ker } j_*$. El primer contenido se desprende de que $j_* i_* = 0$ ya que $ji = 0$ en las cadenas. Ahora sea $[b] \in \text{Ker } j_*$. Entonces $j(b) = \partial c$ para un $c \in C_{n+1}$. Como j es sobreyectiva se tiene $c = j(\tilde{b})$ para algún $\tilde{b} \in B_{n+1}$. Concluimos que $j(b - \partial \tilde{b}) = 0$. Como la secuencia original es exacta, $b - \partial \tilde{b} = i(a)$. En particular, $i(a)$ y b son homólogos. Es decir $i_*[a] = [b]$.
- iii) $\text{Im } j_* = \text{Ker } \partial_*$. Si $[j(b)] \in \text{Im } j_*$, tenemos que $\partial_*[j(b)] = [a]$ con $i(a) = \partial b = 0$ (por ser b ciclo). Como i es inyectiva, $a = 0$ y concluimos $\partial_* j_* = 0$. Para el segundo contenido tomamos $[c] \in \text{Ker } \partial_*$. Esto quiere decir que $c = j(b)$ con $\partial b = i(\partial a) = \partial i(a)$ para ciertos $a \in A_n$, $b \in B_n$. Entonces $b - i(a)$ es un ciclo cumpliendo $j(b - i(a)) = c - ji(a) = c$. \square

Hacemos notar que el **Teorema 1.3.2** se desprende de esta proposición extendiendo las cadenas por 0 (grupo trivial junto a homomorfismos triviales) y que el morfismo ∂_* construido en general no es más que el morfismo de la **Proposición 1.3.3**.

1.4 TEOREMA DE EXCISIÓN

En esta sección demostraremos el Teorema de Excisión, fundamental para el cálculo de los grupos de Homología Relativa, como veremos al final. Comenzamos por unas definiciones preliminares:

Definición 1.4.1. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ una familia de conjuntos cuyos interiores forman un recubrimiento abierto de X . Denotamos por $\mathcal{C}_n^\mathcal{U}(X)$ al subgrupo de $\mathcal{C}_n(X)$ generado por aquellos n -símplices tal que sus imágenes están contenidas completamente en algún U_α . Tenemos $\partial(\mathcal{C}_n^\mathcal{U}(X)) \subseteq \mathcal{C}_{n-1}^\mathcal{U}(X)$. Denotamos por $\partial_\mathcal{U}$ la restricción de ∂ a $\mathcal{C}_n^\mathcal{U}(X)$ y definimos

$$H_n^\mathcal{U}(X) = \text{Ker } \partial_\mathcal{U} / \text{Im } \partial_\mathcal{U}.$$

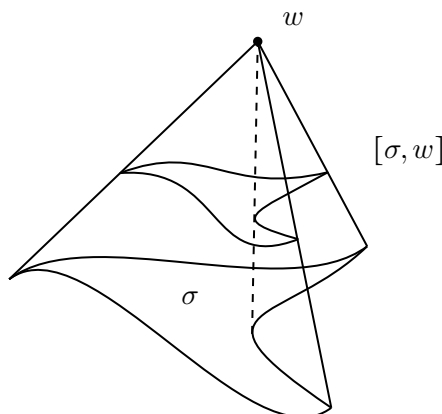
Como $i : \mathcal{C}_n^\mathcal{U}(X) \hookrightarrow \mathcal{C}_n(X)$ conmuta con los operadores borde, $i\partial_\mathcal{U} = \partial i$, existe el homomorfismo inducido

$$i_* : H_n^\mathcal{U} \longrightarrow H_n(X).$$

Nuestro objetivo es demostrar que i_* es un isomorfismo. Intuitivamente, este resultado nos dice que para determinar la Homología de un espacio podemos pedir que los símplices singulares sean tan pequeños como nosotros queramos.

La demostración de este resultado proporciona una gran intuición acerca del mismo pues tiene una fundación geométrica. La estrategia será ir dividiendo los n -símplices singulares iterativamente de tal forma que en una cantidad finita de pasos cada una de las componentes caigan en $\mathcal{C}_n^\mathcal{U}(X)$. Esta subdivisión se denomina subdivisión baricéntrica y la realizaremos en cada Δ^n para posteriormente ir a X mediante el n -símplice singular en cuestión.

Figura 1.4.1: El homomorfismo corchete.



Definición 1.4.2 (Homomorfismo corchete). Sea $X \subseteq \mathbb{R}^*$ un subespacio estrellado con respecto a w . Definimos el **homomorfismo corchete** con respecto a w

$$[\cdot, w] : \mathcal{C}_n(X) \longrightarrow \mathcal{C}_{n+1}(X)$$

en los generadores $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ como

$$[\sigma, w](x_0, \dots, x_n, x_{n+1}, 0, \dots) := (1 - x_{n+1})\sigma\left(\frac{x_0}{x_0 + \dots + x_n}, \dots, \frac{x_n}{x_0 + \dots + x_n}, 0, \dots\right) + x_{n+1}w.$$

Naturalmente, esta expresión no tiene sentido cuando $x_0 = x_1 = \dots = x_n = 0$ y $x_{n+1} = 1$. Pero extendiéndola como w en este punto la hacemos continua (ver **Figura 1.4.1**).

Lema 1.4.1. $\partial[\cdot, w] = [\cdot, w]\partial + (-1)^{n+1}\mathbb{1}$.

Demostración. Sea $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ un n -símplice singular. Tenemos que

$$\begin{aligned} \partial[\sigma, w] &= \sum_i (-1)^i [\sigma, w] \epsilon_i^{n+1} = \sum_{i \leq n} (-1)^i [\sigma, w] \epsilon_i^{n+1} + (-1)^{n+1} [\sigma, w] \epsilon_{n+1}^{n+1} \\ &= \sum_{i \leq n} (-1)^i [\sigma \epsilon_i^n, w] + (-1)^{n+1} \sigma = [\partial\sigma, w] + (-1)^{n+1} \sigma \end{aligned}$$

de donde se desprende el resultado. \square

Definición 1.4.3 (Subdivisión baricéntrica). Denotamos por $\mathbb{1}_n$ la aplicación identidad en Δ^n . Definimos $S : \mathcal{C}_n(X) \longrightarrow \mathcal{C}_n(X)$, el homomorfismo **subdivisión baricéntrica**, recursivamente. En $n = 0$ lo definimos como la identidad y en el paso recursivo lo definimos primero con $X = \Delta^n$ para la identidad (ver **Figura 1.4.2**):

$$S\mathbb{1}_n = (-1)^n [S\partial\mathbb{1}_n, b]$$

siendo $b \in \Delta^n$ el baricentro, es decir,

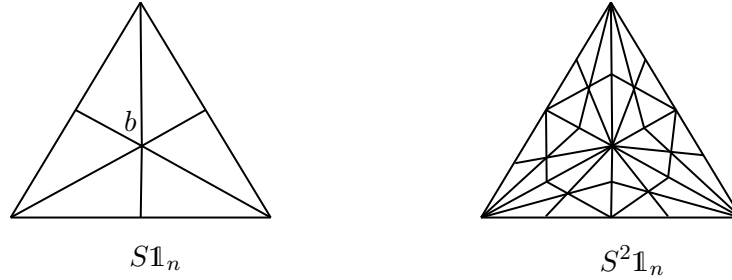
$$b = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n e_i.$$

Ahora extendemos la definición de S a todo espacio topológico X definiéndolo en los generadores como

$$S\sigma = \sigma_{\#} S\mathbb{1}_n.$$

Nótese que, con la definición que hemos dado, tenemos $f_{\#} S = S f_{\#}$ para cualquier aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ puesto que $f_{\#} S\sigma = f_{\#} \sigma_{\#} S\mathbb{1}_n = (f\sigma)_{\#} S\mathbb{1}_n = S f_{\#} \sigma$. Además, como puede comprobar el lector fácilmente, para cualquier $m \geq 0$ se tiene $S^m \sigma = \sigma_{\#} S^m \mathbb{1}_n$.

Figura 1.4.2: Subdivisión baricéntrica de $\mathbb{1}_n$.



Lema 1.4.2. $S\partial = \partial S$.

Demostración. Lo demostramos en los generadores $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ por inducción. En efecto, el caso $n = 0$ es trivial por ser la identidad. En el paso de inducción:

$$\begin{aligned} \partial S\sigma &= \partial \sigma_{\#} S\mathbb{1}_n = \sigma_{\#} \partial S\mathbb{1}_n = (-1)^n \sigma_{\#} \partial [S\partial\mathbb{1}_n, b] \\ &= (-1)^n \sigma_{\#} [\partial S\partial\mathbb{1}_n, b] + (-1)^{2n} \sigma_{\#} S\partial\mathbb{1}_n = \sigma_{\#} S\partial\mathbb{1}_n = S\sigma_{\#} \partial\mathbb{1}_n = S\partial\sigma \end{aligned}$$

puesto que $[\partial S\partial\mathbb{1}_n, b] = [S\partial^2\mathbb{1}_n, b] = 0$ por la hipótesis de inducción. \square

Vamos a estudiar más en detalle la subdivisión baricéntrica de $\mathbb{1}_n$. Nos damos cuenta de que si σ es afín, entonces los sumandos de $S\sigma$ son también aplicaciones afines puesto que las de $S\mathbb{1}_n$ lo son y estamos componiendo con σ .

Lema 1.4.3. *El diámetro de las imágenes de cada uno de los sumandos de $S\mathbb{1}_n$ es menor o igual que $\frac{n}{n+1} \text{diam}(\Delta^n)$.*

Demostración. Lo demostramos por inducción. En $n = 0$ el resultado es claro puesto que $\text{diam}(\Delta^0) = 0$. Ahora supongamos cierto el resultado para dimensión menor que n . Si σ es uno de los sumandos de $S\mathbb{1}_n$, σ aparece en $[S\epsilon_i^n, b]$ para algún i , podemos asumir $i = n$. Concluimos que σ es un n -símplice singular afín que toma valores $[v_1, \dots, v_n, b]$ con v_j en la imagen de algún sumando de $S\epsilon_n^n = S\mathbb{1}_{n-1}$. Como la distancia máxima de $[v_1, \dots, v_n, b]$ se alcanza en los vértices, es suficiente comprobar que

$$\begin{aligned}\|v_i - v_j\| &\leq \frac{n}{n+1} \text{diam}(\Delta^n) \\ \|v_i - b\| &\leq \frac{n}{n+1} \text{diam}(\Delta^n).\end{aligned}$$

La primera desigualdad la obtenemos por la hipótesis de inducción puesto que

$$\|v_i - v_j\| \leq \frac{n-1}{n} \text{diam}(\Delta^{n-1}) \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}(\Delta^n).$$

Para la segunda desigualdad, es suficiente comprobarlo si $v_i = e_j$ para algún j , puesto que la distancia máxima se alcanza en los vértices. Tenemos que

$$\|b - e_j\| = \left\| \sum_i \frac{e_i}{n+1} - e_j \right\| = \left\| \sum_{i \neq j} \frac{e_i}{n+1} - \frac{ne_j}{n+1} \right\| = \frac{n}{n+1} \left\| \sum_{i \neq j} \frac{e_i}{n} - e_j \right\| \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}(\Delta^n)$$

ya que $\sum_{i \neq j} \frac{e_i}{n}, e_j$ son elementos de Δ^n . \square

Observamos que los sumandos de $S^m \mathbb{1}_n$ tendrán imagen con diámetro menor o igual que $\left(\frac{n}{n+1}\right)^m \text{diam}(\Delta^n)$ y, como $\frac{n}{n+1} < 1$, podremos hacerlos arbitrariamente pequeños iterando la subdivisión baricéntrica.

Lema 1.4.4. *S es homótopa a la identidad en $\mathcal{C}_n(X)$, es decir, existe un homomorfismo*

$$D_1 : \mathcal{C}_n(X) \longrightarrow \mathcal{C}_{n+1}(X)$$

tal que $D_1 \partial + \partial D_1 = \mathbb{1} - S$.

Demostración. Definimos D_1 con una estrategia similar a la definición de S , por inducción. En $n = 0$ tomamos

$$D_1 : \mathcal{C}_0(X) \longrightarrow \mathcal{C}_1(X)$$

como el homomorfismo nulo. Ahora, en el paso inductivo, primero lo definimos en $\mathbb{1}_n$ con $X = \Delta^n$. Queremos que se cumpla la fórmula

$$\partial D_1 \mathbb{1}_n + D_1 \partial \mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n - S \mathbb{1}_n,$$

es decir,

$$\partial D_1 \mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n - S \mathbb{1}_n - D_1 \partial \mathbb{1}_n.$$

Este elemento es un ciclo ya que

$$\partial \mathbb{1}_n - \partial S \mathbb{1}_n - \partial D_1 \partial \mathbb{1}_n = \partial \mathbb{1}_n - S \partial \mathbb{1}_n - (-D_1 \partial^2 \mathbb{1}_n + \partial \mathbb{1}_n - S \partial \mathbb{1}_n) = 0.$$

Como Δ^n es contráctil, por la invariancia por homotopía, tenemos que $H_n(\Delta^n) = 0$ o, equivalentemente, todo ciclo es borde. Concluimos que existe $d_n \in \mathcal{C}_{n+1}(\Delta^n)$ tal que ∂d_n es la expresión anterior. Definimos $D_1 \mathbb{1}_n = d_n$ y extendemos la definición a todo espacio topológico definiendo

$$D_1 \sigma = \sigma_{\#} D_1 \mathbb{1}_n.$$

Tenemos que $f_{\#} D_1 = D_1 f_{\#}$ para cualquier aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ puesto que $f_{\#} D_1 \sigma = f_{\#} \sigma_{\#} D_1 \mathbb{1}_n = D_1 f_{\#} \sigma$. Aplicando $\sigma_{\#}$ a la fórmula con $\mathbb{1}_n$ obtenemos el resultado. \square

Podemos definir una homotopía entre S^m y $\mathbb{1}$, D_m , de la siguiente manera:

$$D_m = \sum_{0 \leq i \leq m-1} D_1 S^i.$$

Tomando bordes y aplicando que D_1 es una homotopía entre $\mathbb{1}$ y S nos queda

$$\partial D_m = \sum_{0 \leq i \leq m-1} (S^i - S^{i+1} - D_1 \partial S^i) = \mathbb{1} - S^m - D_m \partial.$$

Antes de dar la definición de la inversa por homotopía de i , necesitamos un resultado clásico sobre espacios métricos compactos (como es el caso de Δ^n).

Teorema 1.4.1 (Teorema del número ρ de Lebesgue). *Sea X un espacio métrico compacto. Para cada recubrimiento abierto \mathcal{U} de X existe un $\rho > 0$ tal que si $A \subseteq X$ con $\text{diam } A \leq \rho$, se tiene $A \subseteq U$ para algún $U \in \mathcal{U}$.*

Demostración. Como X es compacto, admite un subrecubrimiento finito, U_1, \dots, U_n . Si alguno de estos abiertos es el total, hemos acabado pues cualquier ρ es válido. En otro caso, definimos $A_i := X \setminus U_i$ y tomamos la función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{dist}(x, A_i).$$

Nótese que $f(x) > 0$ para cada x pues $x \notin A_i$ para algún i .

Ahora, por ser X compacto, f alcanza un mínimo que, por la observación anterior, es positivo. Definimos ρ como este ínfimo. En efecto, sea $A \subseteq X$ con $\text{diam } A \leq \rho$. Entonces, $A \subseteq B_\rho(x)$ para algún x . Veamos que $B_\rho(x)$ está contenido en alguno de los U_i . Como $f(x) \geq \rho$, debe existir un i tal que $\text{dist}(x, A_i) \geq \rho$, esto es, $B_\rho(x) \subseteq U_i$. \square

Finalmente, estamos en condiciones de definir la inversa de homotopía de i ,

$$\lambda : \mathcal{C}_n^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow \mathcal{C}_n(X).$$

Dado $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$, tenemos que la colección de los $\sigma^{-1}(U)$ con $U \in \mathcal{U}$ es una familia cuyos interiores forman un recubrimiento abierto de Δ^n . Como Δ^n es métrico y compacto, por el Teorema del número ρ de Lebesgue, existe un ρ tal que si $A \subseteq \Delta^n$ con $\text{diam } A \leq \rho$, $\sigma(A)$ cae en alguno de los conjuntos de \mathcal{U} . En particular, en virtud del **Lema 2.4.3**, existe un m tal que todos los sumandos de $S^m \mathbb{1}$ están contenidos en alguno de los $\sigma^{-1}(U)$. Como $S^m \sigma = \sigma_{\#} S^m \mathbb{1}_n$, tenemos que existe un m tal que todos los sumandos de $S^m \sigma$ están contenidos en algún abierto de \mathcal{U} . Tomamos $m(\sigma)$ como el mínimo de estos números y definimos

$$\begin{aligned} D : \mathcal{C}_n(X) &\longrightarrow \mathcal{C}_{n+1}(X) \\ \sigma &\longmapsto D_{m(\sigma)} \sigma. \end{aligned}$$

Esta será la homotopía entre $\mathbb{1}$ y su inversa en la homología, λ . Por supuesto, falta determinar λ . Tenemos que

$$\partial D\sigma + D_{m(\sigma)} \partial \sigma = \sigma - S^{m(\sigma)} \sigma.$$

Manipulando esta expresión obtenemos

$$\partial D\sigma + D\partial \sigma = \sigma - (S^{m(\sigma)} \sigma + D_{m(\sigma)} \partial \sigma - D\partial \sigma).$$

Como resulta natural, definimos

$$\begin{aligned}\lambda : \mathcal{C}_n(X) &\longrightarrow \mathcal{C}_n^{\mathcal{U}}(X) \\ \sigma &\longmapsto S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma.\end{aligned}$$

Nótese que este homomorfismo está bien definido y que toma valores en $\mathcal{C}_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Proposición 1.4.1. λ_* es la inversa de i_* en la Homología.

Demostración. Es suficiente comprobar que λ conmuta con el operador borde (para comprobar que induce un homomorfismo en la Homología) y que λi , $i\lambda$ son homótopas a la identidad. Que conmuta con el operador borde es trivial pues tenemos la expresión

$$\partial D + D\partial = \mathbb{1} - i\lambda.$$

Componiendo con ∂ por la izquierda y por la derecha obtenemos

$$\begin{cases} \partial D\partial = \partial - \partial i\lambda = \partial - i\partial_{\mathcal{U}}\lambda \\ \partial D\partial = \partial - i\lambda\partial \end{cases}.$$

Restando ambas expresiones, $i\partial_{\mathcal{U}}\lambda = i\lambda\partial$ y, como i es inyectiva, $\partial_{\mathcal{U}}\lambda = \lambda\partial$. Es claro que $i\lambda$ es homótopa a la identidad por la propia definición de D . Además, $\lambda i = \mathbb{1}$ ya que si $\sigma \in \mathcal{C}_n^{\mathcal{U}}(X)$, tenemos $m(\sigma) = 0$ y, por consiguiente, $\lambda\sigma = S^0\sigma + D_0\partial\sigma - D\partial\sigma = \sigma + 0 - 0 = \sigma$. Concluimos que λ_* es la inversa de i_* . \square

Teorema 1.4.2 (Teorema de Excisión). Sean $A, B \subseteq X$ subespacios cuyos interiores recubren X . Entonces

$$j_* : H_n(B, A \cap B) \longrightarrow H_n(X, A)$$

es un isomorfismo donde $j : (B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ es la inclusión.

Demostración. Tomamos el recubrimiento $\mathcal{U} = \{A, B\}$. Tenemos, mateniendo la notación de la demostración anterior,

$$\partial D + D\partial = \mathbb{1} - i\lambda, \quad \lambda i = \mathbb{1}.$$

Todas estas aplicaciones llevan $\mathcal{C}_n(A)$ en $\mathcal{C}_n(A)$ (como uno puede comprobar fácilmente observando las definiciones). Concluimos que la igualdad se mantiene pasando al cociente en los grupos

$$\mathcal{C}_n^{\mathcal{U}}(X)/\mathcal{C}_n(A), \quad \mathcal{C}_n(X)/\mathcal{C}_n(A).$$

Además, la aplicación

$$\varphi : \mathcal{C}_n(B)/\mathcal{C}_n(A \cap B) \rightarrow \mathcal{C}_n^{\mathcal{U}}(X)/\mathcal{C}_n(A); \quad [\sigma] \mapsto [\sigma]$$

define un isomorfismo, pues ambos grupos están generados libremente por los símlices con imagen no contenida completamente en A . Como $j_{\#} = i\varphi$, definiendo $\mu = \varphi^{-1}\lambda$, tenemos las igualdades

$$\partial D + D\partial = \mathbb{1} - j\mu, \quad \mu j = \mathbb{1}.$$

Esto es, la inclusión

$$j : (B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$$

define un isomorfismo en la Homología Relativa. \square

Habitualmente usaremos la siguiente reformulación del Teorema de Excisión:

Proposición 1.4.2. *La inclusión $i : (X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$ define un isomorfismo en la Homología cuando $Z \subseteq A$ tiene la clausura completamente contenida en el interior de A .*

Demostración. Basta aplicar el Teorema de Excisión a los conjuntos A y $B = X \setminus Z$ que están en las hipótesis puesto que $\hat{A}, \hat{B} = X \setminus \bar{Z}$ recubren X . \square

Gracias al Teorema de Excisión, en las hipótesis adecuadas, podemos expresar la Homología Relativa con respecto a A en términos del espacio cociente obtenido al colapsar A a un punto:

Corolario 1.4.1. *Sea $A \subseteq X$ un subespacio cerrado que es retracto por deformación de un entorno V suyo. Entonces $q_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A)$ es un isomorfismo para cada $n \geq 0$, donde $q : X \rightarrow X/A$ es la aplicación cociente.*

Demostración. Consideramos el siguiente diagrama conmutativo de parejas de espacios topológicos donde i_k son las inclusiones y q_j son las restricciones de la aplicación cociente:

$$\begin{array}{ccccc} (X, A) & \xleftarrow{i_1} & (X, V) & \xleftarrow{i_2} & (X - A, V - A) \\ \downarrow q & & \downarrow q_1 & & \downarrow q_2 \\ (X/A, A/A) & \xleftarrow{i_3} & (X/A, V/A) & \xleftarrow{i_4} & (X/A - A/A, V/A - A/A) \end{array}$$

Este induce un diagrama conmutativo en la Homología:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{i_{1*}} & H_n(X, V) & \xleftarrow{i_{2*}} & H_n(X - A, V - A) \\ \downarrow q_* & & \downarrow q_{1*} & & \downarrow q_{2*} \\ H_n(X/A, A/A) & \xrightarrow{i_{3*}} & H_n(X/A, V/A) & \xleftarrow{i_{4*}} & H_n(X/A - A/A, V/A - A/A) \end{array}$$

Demostraremos que q_* es un isomorfismo comprobando que el resto de homomorfismos del diagrama (salvo q_{1*}) lo son. El Teorema de Excisión nos da que i_{2*}, i_{4*} son isomorfismos (nótese que A/A es cerrado en X/A). Como q_2 es biyectiva y todo abierto en $X - A$ es saturado, q_2 es homeomorfismo y, por consiguiente, q_{2*} es isomorfismo. Finalmente, para comprobar que i_{1*} e i_{3*} son isomorfismos, tomamos las sucesiones exactas cortas en las cadenas

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{C}_n(V, A) &\xrightarrow{j_{1\#}} \mathcal{C}_n(X, A) \xrightarrow{i_{1\#}} \mathcal{C}_n(X, V) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \mathcal{C}_n(V/A, A/A) &\xrightarrow{j_{3\#}} \mathcal{C}_n(X/A, A/A) \xrightarrow{i_{3\#}} \mathcal{C}_n(X/A, V/A) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

con $j_{k\#}$ los homomorfismos inducidos por las inclusiones. Por la **Proposición 1.3.5**, obtenemos un par de cadenas exactas largas

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{\partial_*} H_n(V, A) \xrightarrow{j_{1*}} H_n(X, A) \xrightarrow{i_{1*}} H_n(X, V) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(V, A) \xrightarrow{j_{1*}} \dots \\ \dots &\xrightarrow{\partial_*} H_n(V/A, A/A) \xrightarrow{j_{3*}} H_n(X/A, A/A) \xrightarrow{i_{3*}} H_n(X/A, V/A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(V/A, A/A) \xrightarrow{j_{3*}} \dots \end{aligned}$$

Como V se retracts por deformación a A , la invariancia por homotopía resulta en $H_n(V, A) \cong H_n(A, A) = 0$, lo que nos da que i_{1*} es un isomorfismo. Análogamente, este retracto por deformación induce otro de V/A a A/A . Con la misma línea de razonamiento obtenemos que i_{3*} es un isomorfismo. Por la conmutatividad del diagrama, q_* es un isomorfismo. \square

1.5 HOMOLOGÍA REDUCIDA

Por razones técnicas que entenderemos una vez finalizada la sección (los grupos de homología de espacios unipuntuales no son nulos), es conveniente introducir los grupos de **Homología Reducida**. Estos grupos se construyen de la manera original cambiando el grupo de las cadenas $\mathcal{C}_{-1}(X)$ por una copia de \mathbb{Z} y añadiendo el homomorfismo

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathcal{C}_0(X) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \sum_{p \in X} n_p \sigma_p &\mapsto \sum_{p \in X} n_p, \end{aligned}$$

siendo σ_p el 0-símplice singular con valor p . Es trivial comprobar que $\varepsilon(\partial\gamma) = 0$ con $\gamma : \Delta^1 \rightarrow X$ un ciclo (un camino cerrado). Esto, con la defición habitual, induce los grupos de Homología reducida

$$\tilde{H}_n(X).$$

Estos grupos nos permitirán calcular la Homología de espacios menos triviales de los estudiados en la **Sección 1.1**.

Proposición 1.5.1. *Los grupos de Homología reducida coinciden con los de Homología Singular en $n \geq 1$ y en $n = 0$ se tiene la igualdad*

$$\tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z} \cong H_0(X).$$

Demostración. La primera parte de la demostración es obvia puesto que la cadena de la Homología reducida es la cadena de la Homología Singular en $n \geq 1$. La segunda parte se desprende de que el homomorfismo

$$[\varepsilon] : \mathcal{C}_0(X)/\text{Im } \partial_1 \rightarrow \mathbb{Z}$$

es sobreyectivo con núcleo $\tilde{H}_0(X)$. □

Corolario 1.5.1. *Sea X un espacio contráctil. Entonces $\tilde{H}_n(X) = 0$ para cada $n \geq 0$.*

Demostración. Para $n \geq 1$ ya lo sabíamos por la invariancia por Homotopía. Ahora, para $n = 0$, tenemos $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. Por la **Proposición 1.5.1**, $\tilde{H}_0(X) = 0$. □

La secuencia exacta asociada a los grupos de Homología Singular se desplaza sin ningún inconveniente a una secuencia exacta larga en los grupos de Homología reducida:

Proposición 1.5.2. *Sea $A \subseteq X$ un subespacio. Entonces los grupos de Homología reducidos encajan en una secuencia exacta larga*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \partial_* & \nearrow & \dots \\ & & & & \swarrow & & \\ \tilde{H}_n(A) & \xleftarrow{i_*} & \tilde{H}_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) & & \\ & & & & \swarrow & \nearrow & \\ & & & & \partial_* & & \\ \tilde{H}_{n-1}(A) & \xleftarrow{i_*} & \tilde{H}_{n-1}(X) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-1}(X, A) & & \\ & & & & \swarrow & \nearrow & \\ & & & & \partial_* & & \\ & & & & \swarrow & & \\ \dots & & & & \partial_* & & \end{array}$$

Demostración. Tomamos, para $n \geq 0$ la secuencia exacta corta

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_n(A) \xrightarrow{i} \mathcal{C}_n(X) \xrightarrow{j} \mathcal{C}_n(X, A) \rightarrow 0$$

y la extendemos en el nivel $n = -1$ como $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow 0$. Como todas las aplicaciones conmutan con los operadores borde ∂ y con ε , estamos en las hipótesis de la **Proposición 1.3.5**, de donde se desprende el resultado. \square

Corolario 1.5.2. Sea $p \in X$. Entonces $j_* : \tilde{H}_n(X) \rightarrow H_n(X, p)$ es un isomorfismo para cada $n \geq 0$.

Demostración. Es suficiente darse cuenta de que cada tercer grupo de la secuencia exacta larga asociada es 0 y, por consiguiente, los morfismos intermedios son isomorfismos. \square

Corolario 1.5.3. Si A es un subespacio cerrado de X que es un retracto por deformación de un entorno suyo V , los grupos de Homología reducida encajan en una secuencia exacta larga

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \partial_* & \nearrow & \dots \\ & & & & & & \\ \tilde{H}_n(A) & \xleftarrow{i_*} & \tilde{H}_n(X) & \xrightarrow{q_*} & \tilde{H}_n(X/A) & & \\ & & & & \partial_* & \nearrow & \\ \tilde{H}_{n-1}(A) & \xleftarrow{i_*} & \tilde{H}_{n-1}(X) & \xrightarrow{q_*} & \tilde{H}_{n-1}(X/A) & & \\ & & & & \partial_* & \nearrow & \\ \dots & \xleftarrow{i_*} & \dots & & \dots & & \end{array}$$

Demostración. Recordamos que tanto $q_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A)$ como $j_* : \tilde{H}_n(X/A) \rightarrow H_n(X/A, A/A)$ son isomorfismos. Además, $q_* : \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(X/A)$ es la composición de

$$\tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{q_*} H_n(X/A, A/A) \xrightarrow{j_*^{-1}} \tilde{H}_n(X/A).$$

Por tanto, redefiniendo ∂_* como $\partial_* q_*^{-1} j_*$ en la secuencia exacta larga de la **Proposición 1.5.2**, tenemos el resultado. \square

Teorema 1.5.1. Sea S^n la esfera unidad en \mathbb{R}^{n+1} . Entonces $\tilde{H}_i(S^n) = 0$ si $i \neq n$ y $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.

Demostración. Lo demostramos por inducción sobre n .

$S^0 = \{-1, 1\}$. Esto nos da $H_i(S^0) \cong H_i(-1) \oplus H_i(1)$ que es 0 cuando $i \neq 0$ y $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ en $i = 0$. Es decir, $\tilde{H}_i(S^0)$ es 0 cuando $i \neq 0$ e isomorfo a \mathbb{Z} cuando $i = 0$.

Suponamos cierto el resultado en dimensión menor que n . Sea B^n la bola unidad n -dimensional e $i : S^{n-1} \hookrightarrow B^n$ la inclusión. Por el **Corolario 1.5.3**, tenemos una secuencia exacta larga:

$$\tilde{H}_i(B^n) \xrightarrow{q_*} \tilde{H}_i(B^n/S^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{i-1}(B^n).$$

Como B^n es contráctil, $\tilde{H}_i(B^n) = 0$ para cada i y, por tanto, ∂_* es un isomorfismo en cada i . Además, como B^n/S^{n-1} es homeomorfo a S^n , $\tilde{H}_i(S^n) \cong \tilde{H}_i(B^n/S^{n-1}) \cong \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$ lo que nos da el resultado. \square

Nos será útil más adelante disponer de generadores explícitos de los grupos $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$. Antes de darlos necesitamos una secuencia exacta larga asociada a ternas de espacios topológicos (X, B, A) , es decir, $A \subseteq B \subseteq X$. Se puede comprobar fácilmente que tenemos secuencia exacta corta

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_n(B, A) \xrightarrow{i_\#} \mathcal{C}_n(X, A) \xrightarrow{j} \mathcal{C}_n(X, B) \rightarrow 0,$$

donde $i_{\#}$ es el homomorfismo inducido por la inclusión y j es la proyección. Por la **Proposición 1.3.4**, tenemos una secuencia exacta larga entre los grupos de Homología Relativa

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \partial_* & \nearrow & \dots \\
 & & & & & & \\
 H_n(B, A) & \xleftarrow{i_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, B) & & \\
 & & & & \partial_* & \nearrow & \\
 H_{n-1}(B, A) & \xleftarrow{i_*} & H_{n-1}(X, A) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-1}(X, B) & & \\
 & & & & \partial_* & \nearrow & \\
 \dots & \xleftarrow{} & & & & &
 \end{array}$$

Además, ∂_* no es más que el homomorfismo $[\sigma] \mapsto [\partial\sigma]$.

Proposición 1.5.3. $[\mathbb{1}_n]$ genera el grupo cíclico infinito $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$.

Demostración. Procedemos por inducción (el caso base en $n = 0$ es trivial). Tomamos la terna de espacios $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda)$, donde Λ es la unión de todas salvo una cara, Δ^{n-1} . Nótese que $H_i(\Delta^n, \Lambda) = 0$ para cada i , pues Δ^n se retracts por deformación a Λ y $H_i(\Lambda, \Lambda) = 0$. Usando la secuencia exacta larga de la terna $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda)$, concluimos que ∂_* induce un isomorfismo

$$\partial_* : H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \longrightarrow H_n(\partial\Delta^n, \Lambda).$$

Además, el **Corolario 1.5.3** nos da que el homomorfismo inducido por la inclusión $i : (\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \hookrightarrow (\partial\Delta^n, \Lambda)$ induce un isomorfismo entre los grupos de Homología Relativa pues su aplicación cociente define un homeomorfismo

$$\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1} \cong \partial\Delta^n/\Lambda.$$

Concluimos que $\mathbb{1}_n$ genera $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ si y sólo si $[\partial\mathbb{1}_n] = [\mathbb{1}_{n-1}]$ en $H_n(\partial\Delta^n, \Lambda)$, pero esto se tiene trivialmente pues todas las ϵ_i^n toman valores en Λ salvo ϵ_n^n , que es la inclusión $\Delta^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n$. \square

Otro resultado que usaremos posteriormente es el cálculo de la Homología de la suma wedge de espacios topológicos:

Proposición 1.5.4. Sean $(X_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ espacios topológicos punteados tal que cada \mathbf{x}_α es cerrado y tiene un entorno que se retracts por deformación a él. Entonces existe un isomorfismo natural

$$\tilde{H}_n(\bigvee_\alpha X_\alpha) \cong \bigoplus_\alpha \tilde{H}_n(X_\alpha),$$

donde la suma wedge se está tomando con respecto a los \mathbf{x}_α .

Demostración. Nótese que $\bigsqcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha$ es un cerrado que es retracto por deformación de cierto entorno en $\bigsqcup X_\alpha$. Entonces, por el **Corolario 1.4.1** y **Corolario 1.5.2**, tenemos una cadena de isomorfismos naturales

$$\bigoplus_\alpha \tilde{H}_n(X_\alpha) \cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha, \mathbf{x}_\alpha) \cong H_n(\bigsqcup_\alpha X_\alpha, \bigsqcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha) \cong \tilde{H}_n(\bigsqcup_\alpha X_\alpha / \bigsqcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha) = \tilde{H}_n(\bigvee_\alpha X_\alpha).$$

\square

1.6 LA SECUENCIA DE MAYER-VIETORIS

Toda buena introducción a la Homología Singular debe introducir la secuencia exacta de Mayer-Vietoris, que nos permite calcular los grupos de Homología Singular de un espacio en función de dos subespacios con Homología ya conocida.

Teorema 1.6.1 (secuencia de Mayer-Vietoris). *Supongamos que X es la unión de los interiores de dos subespacios suyos, A y B . Entonces los grupos de Homología Singular encajan en la siguiente sucesión exacta larga:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \partial_* & \nearrow & \dots \\
 & & & & & & \\
 H_n(A \cap B) & \xrightarrow{\Phi_*} & H_n(A) \oplus H_n(B) & \xrightarrow{\Psi_*} & H_n(X) & & \\
 & & & & \partial_* & \nearrow & \\
 H_{n-1}(A \cap B) & \xrightarrow{\Phi_*} & H_{n-1}(A) \oplus H_{n-1}(B) & \xrightarrow{\Psi_*} & H_{n-1}(X) & & \\
 & & & & \partial_* & \nearrow & \\
 \dots & \leftarrow & & & & &
 \end{array}$$

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{A, B\}$. Definiremos la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_n(A \cap B) \xrightarrow{\Phi} \mathcal{C}_n(A) \oplus \mathcal{C}_n(B) \xrightarrow{\Psi} \mathcal{C}_n^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow 0$$

con $\Psi(x) = (x, -x)$ y $\Psi(x, y) = x + y$. Es inmediato comprobar que estos morfismos conmutan con los operadores frontera. Ahora, como los grupos de Homología del complejo de cadenas

$$\dots \xrightarrow{\partial \oplus \partial} \mathcal{C}_n(A) \oplus \mathcal{C}_n(B) \xrightarrow{\partial \oplus \partial} \mathcal{C}_{n-1}(A) \oplus \mathcal{C}_{n-1}(B) \xrightarrow{\partial \oplus \partial} \dots$$

son isomorfos a $H_n(A) \oplus H_n(B)$, por la **Proposición 1.3.4**, obtenemos una sucesión exacta larga

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \partial_* & \nearrow & \dots \\
 & & & & & & \\
 H_n(A \cap B) & \xrightarrow{\Phi_*} & H_n(A) \oplus H_n(B) & \xrightarrow{\Psi_*} & H_n^{\mathcal{U}}(X) & & \\
 & & & & \partial_* & \nearrow & \\
 H_{n-1}(A \cap B) & \xrightarrow{\Phi_*} & H_{n-1}(A) \oplus H_{n-1}(B) & \xrightarrow{\Psi_*} & H_{n-1}^{\mathcal{U}}(X) & & \\
 & & & & \partial_* & \nearrow & \\
 \dots & \leftarrow & & & & &
 \end{array}$$

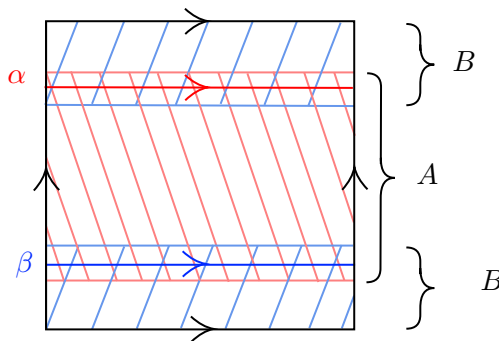
Gracias a la **Proposición 1.4.1**, $H_n^{\mathcal{U}}(X) \cong H_n(X)$, lo que concluye la demostración. \square

Es inmediato comprobar que la sucesión de Mayer-Vietoris también es cierta en el caso reducido.

Ejemplo 1.6.1. Como una aplicación directa de este resultado vamos a calcular la Homología del toro de revolución $S^1 \times S^1$.

Viendo el toro como el cociente del cuadrado $I \times I$, definimos A como la imagen por la aplicación cociente del rectángulo $[0, 1] \times (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ y B como la imagen de $[0, 1] \times ([0, \frac{1}{3}] \cup (\frac{2}{3}, 1])$ (ver **Figura 1.6.1**). Es sencillo comprobar que (una copia de) S^1 es un retracto por deformación tanto de A como de B y, por consiguiente, la invariancia por Homotopía nos da

$$\tilde{H}_i(A) = \tilde{H}_i(B) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } i = 1 \end{cases}.$$

Figura 1.6.1: Descomposición en abiertos de $S^1 \times S^1$.

Como $A \cap B$ tiene dos componentes conexas por caminos, ambas que se retractan por deformación a una circunferencia, tenemos $\tilde{H}_0(A \cap B) = \mathbb{Z}$ y $\tilde{H}_1(A \cap B) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Concluimos que la secuencia exacta de Mayer-Vietoris adopta la forma

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_2(S^1 \times S^1) \xrightarrow{\partial_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\Phi_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\Psi_*} \tilde{H}_1(S^1 \times S^1) \xrightarrow{\partial_*} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

en dimensión 1 y 2. Por ser una secuencia exacta, $\partial_* : \tilde{H}_2(X) \rightarrow \tilde{H}_1(A \cap B)$ es inyectiva y, por consiguiente, define un isomorfismo con su imagen, $\text{Ker } \Phi_*$. Tomamos dos generadores α, β de $H_1(A)$, $H_1(B)$ definidos como viene en la imagen. Entonces α, β son generadores de $H_1(A \cap B)$ y tenemos $\Phi_*\alpha = (\alpha, \beta)$, $\Phi_*\beta = (\alpha, \beta)$. Por tanto, $\text{Ker } \Phi_* = \langle \alpha - \beta \rangle = \mathbb{Z} \cong H_2(X)$.

Es un ejercicio sencillo comprobar que tenemos una secuencia exacta inducida

$$0 \longrightarrow \text{Coker } \Phi_* \xrightarrow{\Psi_*} \tilde{H}_1(S^1 \times S^1) \xrightarrow{\partial_*} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Como $\text{Coker } \Phi_* = \mathbb{Z}$ (como bien podemos comprobar a raíz de la definición), tenemos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\Psi_*} \tilde{H}_1(S^1 \times S^1) \xrightarrow{\partial_*} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

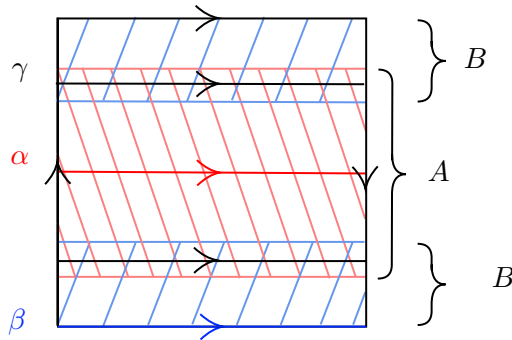
es decir, $\tilde{H}_1(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Como el toro es conexo, $\tilde{H}_0(S^1 \times S^1) = 0$ y como el resto de la sucesión exacta de Mayer-Vietoris nos da isomorfismos y el resto de grupos son nulos, $\tilde{H}_n(S^1 \times S^1) = 0$ para $n \geq 3$. Concluimos que

$$\tilde{H}_n(S^1 \times S^1) = \begin{cases} 0 & \text{en } n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{en } n = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{en } n = 2 \\ 0 & \text{en } n \geq 3 \end{cases}$$

Ejemplo 1.6.2. Ahora calculamos la Homología de la botella de Klein, K . Viendo K como el cociente de $I \times I$, definimos A, B el cociente de los mismos rectángulos usados en el ejemplo del Toro (ver **Figura 1.6.2**). En este caso A y B son homeomorfos a una banda de Möbius y, por consiguiente, tienen el mismo tipo de homotopía que S^1 . Tenemos

$$\tilde{H}_i(A) = \tilde{H}_i(B) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } i = 1 \end{cases}.$$

Figura 1.6.2: Descomposición en abiertos de K .

Una comprobación inmediata nos da que $A \cap B$ es homeomorfo a un cilindro y, por tanto,

$$\tilde{H}_i(A \cap B) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } i = 1 \end{cases}.$$

En consecuencia, la secuencia exacta de Mayer-Vietoris adopta la forma

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_2(K) \xrightarrow{\partial_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{\Phi_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\Psi_*} \tilde{H}_1(K) \longrightarrow 0$$

Tomamos α, β generadores de $\tilde{H}_1(A)$, $\tilde{H}_1(B)$ y γ un generador de $\tilde{H}_1(A \cap B)$ como vienen en la imagen. Como $\Phi_*\gamma = (2\alpha, 2\beta)$, $\text{Ker } \Phi_* = 0$ y tenemos $\tilde{H}_2(K) = 0$. Ahora, por la exactitud de la secuencia, $\tilde{H}_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \text{Im } \Phi_* \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, como se puede comprobar fácilmente. Como K es conexo, concluimos que

$$\tilde{H}_i(K) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \geq 2 \end{cases}.$$

1.7 HOMOLOGÍA CON COEFICIENTES

Si bien toda esta teoría es lo suficientemente general, aún se puede generalizar más cambiando el grupo en el que pueden estar los coeficientes del grupo de cadenas singulares. Durante esta sección, vamos a fijar un grupo abeliano G y un espacio topológico X .

Definición 1.7.1 (Grupo de Cadenas Singulares con coeficientes). El **grupo de n -cadenas singulares con coeficientes en G** , $\mathcal{C}_n(X; G)$, es el conjunto de las aplicaciones $\alpha : S_n(X) \rightarrow G$ con soporte finito donde $S_n(X)$ es el conjunto de n -símplices singulares. Por supuesto, $\mathcal{C}_n(X; G)$ admite estructura de grupo abeliano con la suma punto a punto.

Una n -cadena singular $\alpha \in \mathcal{C}_n(X; G)$ se escribe como

$$\alpha = \sum_i n_i \sigma_i$$

con $n_i \in G$ y $\sigma_i : \Delta^n \rightarrow X$ continuas, donde estamos denotando $n\sigma$ a la aplicación

$$n\sigma(\tilde{\sigma}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \neq \tilde{\sigma} \\ n & \text{si } \sigma = \tilde{\sigma} \end{cases}$$

Nótese que con $G = \mathbb{Z}$ el grupo de cadenas singulares con coeficientes en G es simplemente el grupo de cadenas singulares definido en la **Sección 1.1**.

De manera análoga se define el operador borde en los generadores como

$$\partial n\sigma = \sum_i (-1)^i n\sigma \epsilon_i^n.$$

Es trivial (esencialmente la misma demostración que en la **Proposición 1.1.1**) ver que $\partial^2 = 0$ y, por consiguiente, se definen los grupos de Homología con coeficientes en G de X de la manera natural

$$H_n(X; G) := \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}.$$

La Homología Relativa y Reducida se definen de la misma manera.

Una observación importante es que todos los Teoremas fundamentales de las anteriores secciones tienen su análogo con coeficientes en G . Las demostraciones son exactamente las mismas, salvo quizás las definiciones hechas en los generadores, que en este caso son de la forma $n\sigma$.

Cabe mencionar, aunque no lo demostraremos en este texto, que la Homología con coeficientes está completamente determinada por la Homología Singular (con coeficientes en \mathbb{Z}) y G :

Teorema 1.7.1 (Teorema de los coeficientes universales en la Homología). *Sea G un grupo abeliano y X un espacio topológico. Los grupos de Homología Singular y de Homología con coeficientes encajan en una secuencia exacta corta*

$$0 \longrightarrow H_n(X) \otimes G \longrightarrow H_n(X; G) \longrightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(X), G) \longrightarrow 0$$

que además hace split, donde $\text{Tor}(H, G)$ es un grupo abeliano [1]. Este resultado también se tiene en Homología Relativa con coeficientes.

§ CAPÍTULO 2: HOMOLOGÍA CELULAR

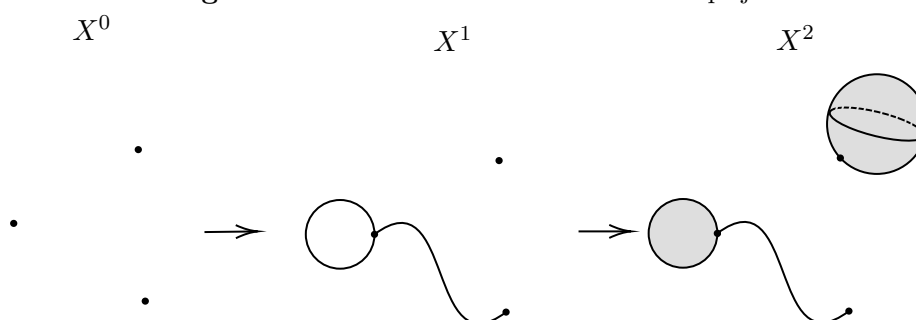
Calcular la Homología singular de un espacio arbitrario es desde luego una tarea complicada. Las únicas herramientas que tenemos son las sucesiones de la Homología Relativa y Mayer-Vietoris, y si no podemos dar una descomposición satisfactoria del espacio en subespacios más familiares, no podemos usarlas. Sin embargo, restringiendo la clase de espacios con la que trabajar podemos convertir esta tarea en una prácticamente computacional. Esta descripción de la Homología se conoce como **Homología Celular** y es un paso intermedio entre la Homología Simplicial y la Homología Singular. Se trata de estudiar la Homología de ciertos espacios (los *CW*-complejos) en los que hay ciertos simplices singulares $\Phi : \Delta^n \rightarrow X$ canónicos.

La **Sección 2.1** está dedicada a definir los espacios a estudiar, los *CW*-complejos, junto a presentar las propiedades básicas de este tipo de espacios. En la **Sección 2.2** definimos los grupos de Homología Celular. La **Sección 2.3** introduce el grado topológico entre esferas. En la **Sección 2.4** presentamos una manera prácticamente computacional de determinar el borde celular para el cálculo de estos grupos y en la **Sección 2.5** damos el isomorfismo entre la Homología Singular y la Celular.

2.1 CW-COMPLEJOS

Un *CW*-complejo es un espacio topológico X obtenido iterativamente de la siguiente forma: partimos de un conjunto de 0-células (puntos) X^0 , pegamos un conjunto de 1-células (espacios homeomorfos a B^1) por sus fronteras para obtener X^1 , pegamos un conjunto de 2-células (espacios homeomorfos a B^2) por sus fronteras para obtener X^2 , etc (ver **Figura 2.1.1**). Numerosos espacios topológicos admiten este tipo de estructura, por ejemplo, toda variedad diferenciable. En esta sección estudiamos los aspectos topológicos que necesitaremos de los *CW*-complejos.

Figura 2.1.1: Construcción de un *CW*-complejo.



Definición 2.1.1 (CW-complejo). Un **CW-complejo** es un espacio topológico X Hausdorff junto a una familia de aplicaciones continuas $\Phi_\alpha : \Delta_\alpha^n \rightarrow X$ llamadas **aplicaciones características** cumpliendo:

- i) Φ_α es un homeomorfismo cuando lo restringimos a $\mathring{\Delta}_\alpha^n$ (esto es equivalente a la inyectividad por ser X Hausdorff y Δ_α^n compacto). Una **célula abierta de dimensión n** es un subespacio de la forma $e_\alpha^n = \Phi(\mathring{\Delta}_\alpha^n)$.

- ii) $\Phi_\alpha(\partial\Delta_\alpha^n)$ está contenido en una cantidad finita de células abiertas de dimensión estrictamente menor que n .
- iii) Las células abiertas e_α recubren X y su topología es coherente con la de X , esto es, F es cerrado en X si y sólo si $F \cap \bar{e}_\alpha$ es cerrado para cada α .

Las restricciones $\varphi_\alpha = \Phi_\alpha|_{\partial\Delta_\alpha^n} : \partial\Delta_\alpha^n \rightarrow X^{n-1}$ se denominan **aplicaciones de pegado**.

Esta definición de CW -complejo es exactamente igual a la definición que hemos presentado en la introducción, pero tiene la ventaja de que el espacio ya está dado y sólo tenemos que identificar las células correspondientes. Cabe mencionar que la definición clásica de CW -complejo se toma con bolas y esferas, en vez de símlices y sus bordes. Como estos espacios son homeomorfos, las definiciones son equivalentes. Nosotros escogemos la definición con símlices pues simplifica y hacen más intuitivas muchas demostraciones relacionadas con la Homología Celular.

Observamos que dado un CW -complejo, se tiene $\bar{e}_\alpha = \Phi_\alpha(\Delta_\alpha^n)$ para cada n -célula abierta. El contenido $\Phi_\alpha(\Delta_\alpha^n) \subseteq \bar{e}_\alpha$ es trivial por la continuidad de Φ_α . Ahora, como $\Phi_\alpha(\Delta_\alpha^n)$ es cerrado y contiene a e_α , tenemos la igualdad. Denotaremos por \dot{e}_α la frontera topológica de e_α . Observamos que $\dot{e}_\alpha = \Phi_\alpha(\partial\Delta_\alpha^n)$.

Definición 2.1.2 (n -esqueleto). El **n -esqueleto** X^n de un CW -complejo X es la unión de todas las células de dimensión menor o igual que n . Nótese que $X = \bigcup_n X^n$.

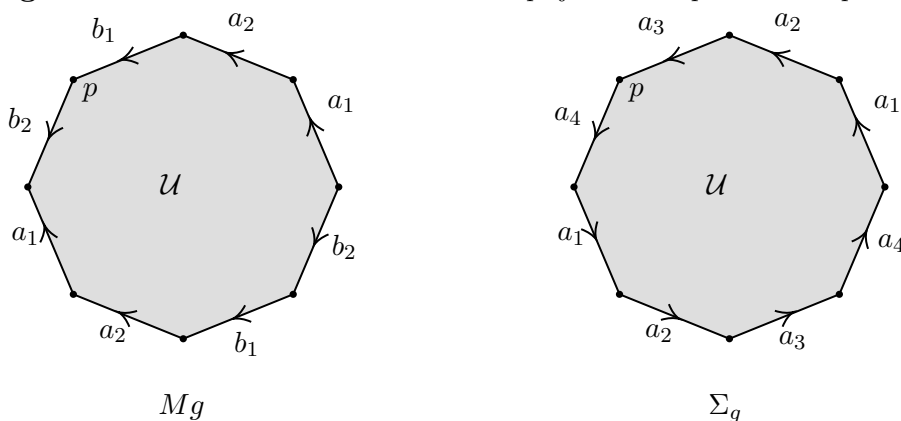
Hay una caracterización de los subespacios compactos de un CW -complejo que nos va a resultar muy útil en numerosas situaciones:

Proposición 2.1.1. *Sea X un CW -complejo. Un subespacio $K \subset X$ es compacto si y sólo si es cerrado y está contenido en una cantidad finita de células.*

Demostración. Si es cerrado y está contenido en finitas células, entonces es claro que es compacto pues la unión de estas células lo sería. Ahora sea K compacto. Como X es un espacio Hausdorff, es cerrado. Si no estuviera contenido en una cantidad finita de células, existiría una sucesión de puntos $p_n \in K$ con cada p_n en una célula diferente. El conjunto $\{p_n\}$ es cerrado pues su intersección con cada célula consiste de a lo sumo un punto que, por ser X Hausdorff, es cerrado. Como K es compacto y $\{p_n\}$ es un subespacio cerrado suyo concluimos que $\{p_n\}$ es compacto. Pero, con un razonamiento similar, tenemos que cualquier subespacio de $\{p_n\}$ es cerrado. Esto nos da que $\{p_n\}$ es discreto y compacto y, por consiguiente, finito. Lo que es una contradicción. \square

Ejemplo 2.1.1. Dotaremos a las superficies compactas de estructura de CW -complejo (que usaremos posteriormente para calcular su homología).

Comenzamos por la superficie orientable de género g , M_g . Vemos M_g como el cociente de un polígono de $4g$ lados $P \xrightarrow{\pi} M_g$ con las aristas identificadas como viene en la **Figura 2.1.2**. La estructura que le daremos consistirá de una 0-célula, $2g$ 1-células y una 2-célula. Definimos $\Phi_p : \Delta^0 \rightarrow M_g$ como la aplicación que toma como único valor la imagen por π de cualquiera de los vértices (pues todos están identificados). Tomamos $\Phi_{a_i} : \Delta^1 \rightarrow M_g$ (o Φ_{b_i}) como la composición de π con la inmersión de $\Delta^1 \cong I$ en P (de tal forma con que mantenga la orientación mostrada en la imagen). Finalmente, tomamos $\Phi_U : \Delta^2 \rightarrow M_g$ como la composición de π con algún homeomorfismo entre Δ^2 y P que mantenga la orientación habitual. Es una comprobación rutinaria ver que estas aplicaciones satisfacen las dos primeras condiciones de la definición de CW -complejo. La última se

Figura 2.1.2: La estructura como CW -complejo de las superficies compactas.

tiene trivialmente por ser una descomposición en células finitas.

La descomposición celular de la superficie no orientable de género g , Σ_g se realiza de forma completamente análoga, tomando las identificaciones de $\Delta^1 \cong I$ como vienen en la **Figura 2.1.2**.

A continuación incluimos unos resultados de carácter técnico que usaremos para tratar la Homología Celular en las próximas secciones. No nos paramos a demostrarlos, pues no es el objetivo de este texto. Sin embargo, los resultados se pueden encontrar demostrados en [1].

Proposición 2.1.2. *Los CW -complejos son espacios normales, localmente contractibles y todo sub-complejo admite un entorno que se retracts por deformación a este.*

2.2 LOS GRUPOS DE HOMOLOGÍA CELULAR

Los grupos de Homología Celular se obtienen con la misma estrategia que los otros grupos de Homología: partiremos de cierta cadena

$$\dots \xrightarrow{d_{n+1}} \mathcal{C}_n^{CW}(X) \xrightarrow{d_n} \mathcal{C}_{n-1}^{CW}(X) \xrightarrow{d_{n-1}} \dots$$

satisfaciendo $d^2 = 0$ y definiremos $H_n^{CW}(X) := \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1}$. Estos grupos de **Cadenas Celulares** serán los grupos libres abelianos generados por todas las n -células de X :

Definición 2.2.1 (Cadenas Celulares). Sea X un CW -complejo. Definimos $\mathcal{C}_n^{CW}(X) := H_n(X^n, X^{n-1})$.

Proposición 2.2.1. $\mathcal{C}_n^{CW}(X)$ es libre abeliano generado por cada una de las n -células (donde, por una n -célula, entendemos la aplicación Φ_α).

Demostración. Primero observamos que, en $n = 0$,

$$\mathcal{C}_0^{CW}(X) = H_0(X^0, \emptyset) = H_0(X^0).$$

Como X^0 tiene tantas componentes conexas como 0-células (basta darse cuenta que las 0-células forman un subespacio discreto), el resultado sigue. Ahora, en dimensión $n \geq 1$, tenemos los isomorfismos:

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{q_*} H_n(X^n/X^{n-1}, X^{n-1}/X^{n-1}) \xleftarrow{j_*} \tilde{H}_n(X^n/X^{n-1})$$

Para concluir la demostración es suficiente comprobar que X^n/X^{n-1} es una suma wedge de tantas esferas como células y usar la **Proposición 1.5.4**. En efecto, dado una n -célula abierta e_α , el cociente $\bar{e}_\alpha/\dot{e}_\alpha$ es homeomorfo a S^n con homeomorfismo la aplicación inducida en el cociente

$$\Phi_\alpha : \Delta_\alpha^n / \partial \Delta_\alpha^n \rightarrow \bar{e}_\alpha / \dot{e}_\alpha.$$

Además, X^n/X^{n-1} es (homeomorfo a) la suma wedge de los $\bar{e}_\alpha/\dot{e}_\alpha$. Para comprobar que la familia $[\Phi_\alpha]$ genera $H_n(X^n, X^{n-1})$, demostramos que cada $[\Phi_\alpha]$ genera $H_n(\bar{e}_\alpha, \dot{e}_\alpha)$. En efecto, basta seguir la imagen de $[1_n]$ en la cadena de isomorfismos:

$$H_n(\Delta^n, \partial \Delta^n) \xrightarrow{\Phi_{\alpha*}} H_n(\bar{e}_\alpha, \dot{e}_\alpha) \xrightarrow{q_*} H_n(\bar{e}_\alpha / \dot{e}_\alpha)$$

□

Una vez definidas las Cadenas, tenemos que definir los operadores frontera $d : H_n(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$. Para ello, haremos uso de las secuencias obtenidas en el **Capítulo 1**:

Definición 2.2.2 (Operador frontera). El **operador frontera celular** d es la composición de los homomorfismos

$$\mathcal{C}_n^{cw}(X) = H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) = \mathcal{C}_{n-1}^{cw}(X)$$

Proposición 2.2.2. $d^2 = 0$

Demostración. Es suficiente darse cuenta que en la factorización de d^2 ,

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-2}(X^{n-2}) \xrightarrow{j_*} H_{n-2}(X^{n-2}, X^{n-3})$$

hay dos homomorfismos provenientes de la misma sucesión exacta. □

Finalmente podemos definir los Grupos de Homología Celular:

Definición 2.2.3 (Grupos de Homología Celular). Sea X un CW-complejo. Definimos

$$H_n^{cw}(X) = \text{Ker } d / \text{Im } d.$$

2.3 INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DEL GRADO

Antes de explicar como determinar los bordes celulares, necesitamos presentar de forma breve la teoría del grado topológico de Brouwer entre esferas.

Definición 2.3.1 (Grado topológico). Sea $f : S^n \rightarrow S^n$ una aplicación continua. Tenemos el endomorfismo inducido $f_* : \tilde{H}_n(S^n) \rightarrow \tilde{H}_n(S^n)$. Como este grupo es cíclico, f_* es la multiplicación por algún entero m . Definimos el **grado topológico** de f como $\deg f = m$.

Intuitivamente, este entero representa la cantidad de veces que la esfera se recorre a sí misma, siendo positivo si preserva la orientación y negativo si la invierte.

Para poder calcular el grado de las aplicaciones más sencillas, necesitamos tener unos generadores específicos de $\tilde{H}_n(S^n)$ que damos a continuación. Para cada n fijamos un homeomorfismo $\varphi_n : \Delta^n \rightarrow B^n$.

Definición 2.3.2. Definimos $\Delta_+^n, \Delta_-^n : \Delta^n \rightarrow S^n$ la composición del homeomorfismo φ_n con la proyección al hemisferio norte y sur, respectivamente.

Proposición 2.3.1. $\Delta_+^n - \Delta_-^n$ es un ciclo y genera $\tilde{H}_n(S^n)$.

Demostración. Que es ciclo es claro pues ambas aplicaciones coinciden en $\partial\Delta^n$. Ahora tomamos la siguiente cadena de isomorfismos de grupos

$$\tilde{H}_n(S^n) \xrightarrow{\psi_*^{-1}} \tilde{H}_n(\Delta^n/\partial\Delta^n) \xrightarrow{(q_*)^{-1} \circ j_*} H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$$

donde $\psi : \Delta^n/\partial\Delta^n \rightarrow S^n$ es un homeomorfismo arbitrario (posteriormente fijaremos uno). Para comprobar que $[\Delta_+^n - \Delta_-^n]$ genera $\tilde{H}_n(S^n)$ es suficiente comprobar que su imagen bajo esta cadena de isomorfismos es $[\mathbb{1}_n]$ que, por la **Proposición 1.5.3**, sabemos que es un generador de $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$.

Sea $F : S^n \times I \rightarrow S^n$ una homotopía entre la identidad $\mathbb{1}_{S^n}$ y f , la aplicación que colapsa todo el hemisferio sur al polo sur (ver **Figura 2.3.1**). Más concretamente,

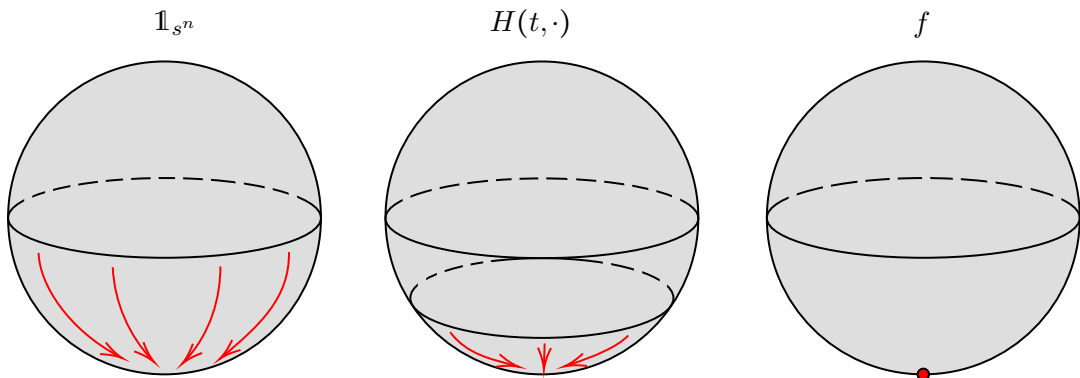
$$f(x_0, \dots, x_n) = \begin{cases} (0, \dots, -1) & \text{si } x_n \leq 0, \\ \left(2\sqrt{\frac{x_n}{1+x_n}}x_0, \dots, 2\sqrt{\frac{x_n}{1+x_n}}x_{n-1}, 2x_n - 1\right) & \text{si } x_n \geq 0. \end{cases}$$

Por la invariancia por homotopía, $f_* = \mathbb{1}$ en $\tilde{H}_n(S^n)$ y, por consiguiente,

$$[\Delta_+^n - \Delta_-^n] = f_*[\Delta_+^n - \Delta_-^n] = [f \circ \Delta_+^n - f \circ \Delta_-^n] = [f \circ \Delta_+^n - p]$$

con p la aplicación constante con valor $(0, \dots, 0, -1)$. Por tanto, la imagen por el primer isomorfismo es $[\psi^{-1} \circ f \circ \Delta_+^n - \psi^{-1}(p)]$.

Figura 2.3.1: La homotopía entre $\mathbb{1}_{S^n}$ y f .



Vamos a fijar ψ . Sea $\hat{\psi} : B^n \rightarrow S^n$ la aplicación continua definida por $\hat{\psi} := f \circ p_+$, siendo p_+ la proyección al hemisferio norte. Ahora definimos $\psi : \Delta^n \rightarrow S^n$ como $\hat{\psi} \circ \varphi_n$. Como esta aplicación manda todo $\partial\Delta^n$ al polo sur, induce una aplicación en el cociente $\psi : \Delta^n/\partial\Delta^n \rightarrow S^n$ que, por ser biyectiva entre espacios compactos y Hausdorff, es homeomorfismo. Una comprobación inmediata nos da que la aplicación $\psi^{-1} \circ f \circ \Delta_+^n$ es exactamente la aplicación cociente $q : \Delta^n \rightarrow \Delta^n/\partial\Delta^n$. Esto resulta en que la imagen de $[\psi^{-1} \circ f \circ \Delta_+^n - \psi^{-1}(p)]$ por el segundo isomorfismo sea $[\mathbb{1}_n]$, lo que acaba la demostración. \square

Ahora estamos en condiciones de demostrar las propiedades más importantes del grado topológico:

Proposición 2.3.2. Sean $f, g : S^n \rightarrow S^n$ un par de aplicaciones continuas. Tenemos

- i) $\deg f \circ g = \deg f \cdot \deg g$
- ii) Si $f \sim g$, tenemos $\deg f = \deg g$.
- iii) Si f es una reflexión, $\deg f = -1$.
- iv) Si f es la antipodal, $\deg f = (-1)^{n+1}$.

Demostración. i) En efecto, si $n = \deg f$, $m = \deg g$, tomamos α un generador de $\tilde{H}_n(S^n)$, y tenemos $f_*g_*\alpha = f_*(m\alpha) = (n \cdot m)\alpha$.

ii) Es inmediato por el Teorema de la invariancia por Homotopía.

iii) Como todas las reflexiones son homótopas a la reflexión habitual

$$f(x_0, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_0, \dots, x_{n-1}, -x_n),$$

por el apartado anterior, es suficiente con demostrar que $\deg f = -1$. Pero esto es inmediato viendo la imagen del generador $\alpha := [\Delta_+^n - \Delta_-^n]$. En efecto, $f_*\alpha = f_*[\Delta_+^n - \Delta_-^n] = [f \circ \Delta_+^n - f \circ \Delta_-^n] = [\Delta_-^n - \Delta_+^n] = -\alpha$.

iv) Se desprende de que la antipodal es la composición de $n + 1$ reflexiones. \square

Un resultado que se usa numerosas veces a la hora de calcular la homología de un espacio es el conocido como la fórmula de los grados locales que, como el nombre indica, nos permitirá calcular en grado de cierta aplicación estudiando su comportamiento local:

Sea $f : S^n \rightarrow S^n$ una aplicación continua y supongamos $y \in S^n$ con preimagen finita, $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$. Tomamos un entorno V de y y entornos disjuntos U_i de x_i cumpliendo $f(U_i) \subseteq V$ para cada i . El Teorema de Excisión nos da isomorfismos inducidos por las inclusiones

$$H_n(U_i, U_i \setminus x_i) \xrightarrow{l_i} H_n(S^n, S^n \setminus x_i)$$

en cada i . Además, la secuencia exacta de la Homología relativa nos dice que existe un isomorfismo (inducido por la proyección)

$$H_n(S^n, S^n \setminus x_i) \xleftarrow{j_i} \tilde{H}_n(S^n).$$

En conclusión, $H_n(U_i, U_i \setminus x_i) \cong H_n(V, V \setminus y) \cong \mathbb{Z}$ y $f_* : H_n(U_i, U_i \setminus x_i) \rightarrow H_n(V, V \setminus y)$ será el resultado de multiplicar por cierta constante m_i (donde estamos escogiendo como generadores canónicos los obtenidos por los anteriores isomorfismos). Definimos **el grado local de f en x_i** como $\deg f|_{x_i} := m_i$.

Teorema 2.3.1 (Fórmula de los grados locales). En la situación anterior tenemos

$$\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}.$$

Demostración. Estudiamos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 H_n(U_i, U_i \setminus x_i) & \xrightarrow{f_*} & H_n(V, V \setminus y) & & \\
 \swarrow l_i & \downarrow \tilde{l}_i & \downarrow l & & \\
 H_n(S^n, S^n \setminus x_i) & \xleftarrow{p_i} & H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y)) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n, S^n \setminus y) \\
 \swarrow j_i & \uparrow \tilde{j} & \uparrow j & & \\
 & \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & \tilde{H}_n(S^n) &
 \end{array}$$

donde $p_i, \tilde{j}_i, \tilde{l}_i$ son los morfismos inducidos por la inclusión, \tilde{j} es el morfismo inducido por la proyección y el resto son los isomorfismos previamente definidos. Por el Teorema de Excisión, la inclusión induce un isomorfismo

$$\bigoplus_i H_n(U_i, U_i \setminus x_i) \cong H_i\left(\bigsqcup_i U_i, \bigsqcup_i (U_i \setminus x_i)\right) \rightarrow H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y)).$$

Es sencillo comprobar que p_i nos da la proyección en el factor i -ésimo (identificando $H_n(S^n, S^n \setminus x_i)$ con $H_n(U_i, U_i \setminus x_i)$ mediante l_i) usando la conmutatividad del diagrama y observando que \tilde{l}_i es la inclusión natural al factor i -ésimo.

Sea $[\alpha] \in H_n(S^n)$ un generador. Por la observación anterior, tenemos

$$\tilde{j}[\alpha] = \sum_i \tilde{l}_i \circ l_i^{-1} \circ p_i \circ \tilde{j}[\alpha] = \sum_i \tilde{l}_i \circ l_i^{-1} \circ j_i[\alpha].$$

Denotamos por $[\alpha_i] := l_i^{-1} \circ j_i[\alpha]$ (generador de $H_n(U_i, U_i \setminus x_i)$) y $[\beta] := l^{-1} \circ j[\alpha]$ (generador de $H_n(V, V \setminus y)$). Aplicando f_* y usando la conmutatividad del diagrama obtenemos

$$\deg f \cdot j[\alpha] = f_* \tilde{j}[\alpha] = \sum_i f_* \circ \tilde{l}_i \circ l_i \circ j_i[\alpha] = \sum_i l \circ f_*[\alpha_i] = \sum_i \deg f|_{x_i} l[\beta] = \sum_i m_i \cdot j[\alpha],$$

de donde obtenemos el resultado. \square

Normalmente haremos uso de este resultado escogiendo un punto $y \in S^n$ tal que f defina un homeomorfismo local en cada $x_i \in f^{-1}(y)$. En este caso, los grados locales serán ± 1 (pues f_* define un isomorfismo) dependiendo de si f preserva o invierte la orientación en este punto.

2.4 CÁLCULO DEL BORDE CELULAR

Como veremos, existe un isomorfismo natural entre la Homología Celular y la Homología singular. A priori uno preferiría calcular la Homología Celular de un espacio pues hay que determinar el borde de una cantidad bastante más reducida de cadenas. En particular, es suficiente determinar el borde de los generadores de $\mathcal{C}_n^{cw}(X)$, las funciones características. Sea $\Phi_\alpha : \Delta_\alpha^n \rightarrow X$ una aplicación característica. Por definición,

$$d[\Phi_\alpha] = [\partial\Phi_\alpha],$$

con la clase tomada en $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$. Como este grupo está generado por las aplicaciones características $(n-1)$ -dimensionales, tenemos que

$$d[\Phi_\alpha] = n_1[\Phi_{\beta_1}] + \cdots + n_k[\Phi_{\beta_k}]$$

para ciertos enteros n_j . Nuestro objetivo es determinar estos coeficientes n_j .

Definición 2.4.1. Definimos $n_{\alpha\beta}$ como el coeficiente de $d[\Phi_\alpha]$ en el generador $[\Phi_\beta]$. Nótese que estos coeficientes son únicos ya que $\mathcal{C}_n^{cw}(X)$ es libre abeliano.

Es conveniente definir proyecciones desde $\mathcal{C}_n^{cw}(X)$ que nos den el coeficiente de las cadenas en cierto generador fijo $[\Phi_\beta]$. Resulta que estas proyecciones pueden ser interpretadas como aplicaciones inducidas en la Homología.

Definición 2.4.2. Sea \bar{e}_β una célula n -dimensional. Definimos

$$q_\beta : X^n \longrightarrow \bar{e}_\beta / \dot{e}_\beta$$

como la aplicación que es la identidad en el interior de \bar{e}_β y colapsa el resto del n -esqueleto a un punto (la clase de \dot{e}_β). Es una comprobación rutinaria que esta aplicación define una aplicación continua.

A continuación denotamos por $\pi : \bar{e}_\beta \rightarrow \bar{e}_\beta/\dot{e}_\beta$ la aplicación cociente.

Proposición 2.4.1. $q_{\beta*} : H_n(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_n(\bar{e}_\beta/\dot{e}_\beta, \dot{e}_\beta/\dot{e}_\beta)$ es la proyección al factor en $[\Phi_\beta]$ (donde estamos identificando $[\Phi_\beta]$ con la aplicación inducida en el cociente $\pi \circ \Phi_\beta$).

Demostración. Es suficiente ver las imágenes de cada uno de los generadores. Como Φ_α tiene imagen disjunta con e_β si $\beta \neq \alpha$, tenemos que Φ_α tiene imagen contenida en $X^n \setminus e_\alpha$ y, por consiguiente, $q_{\beta*}[\Phi_\alpha] = 0$. Es sencillo comprobar que $q_\beta \circ \Phi_\beta = \pi \circ \Phi_\beta$ y, por tanto, el homomorfismo $q_{\beta*}$ nos da el sumando de cualquier elemento en el generador $[\Phi_\beta]$. \square

A continuación describimos la estrategia general para calcular los enteros $n_{\alpha\beta}$. Primero, presentamos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 H_n(\Delta_\alpha^n, \partial\Delta_\alpha^n) & \xrightarrow{\Phi_{\alpha*}} & H_n(X^n, X^{n-1}) & & \tilde{H}_{n-1}(\Delta_\beta^{n-1}/\partial\Delta_\beta^{n-1}) \\
 \downarrow \partial_* & & \downarrow \partial_* & & \downarrow \Phi_{\beta*} \\
 \tilde{H}_{n-1}(\partial\Delta_\alpha^n) & \xrightarrow{\varphi_{\alpha*}} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{q_{\beta*}} & \tilde{H}_{n-1}(\bar{e}_\beta/\dot{e}_\beta) \\
 & & \downarrow j_* & & \downarrow \sim \\
 & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \xrightarrow{q_{\beta*}} & H_{n-1}(\bar{e}_\beta/\dot{e}_\beta, \dot{e}_\beta/\dot{e}_\beta)
 \end{array}$$

Por la proposición anterior, $n_{\alpha\beta}$ será el coeficiente de $[q_{\beta\#}\partial\Phi_\alpha]$ en el grupo $H_{n-1}(\bar{e}_\beta/\dot{e}_\beta, \dot{e}_\beta/\dot{e}_\beta)$. Más, concretamente, $[q_{\beta\#}\partial\Phi_\alpha] = n_{\alpha\beta}[\Phi_\beta]$. Como ya sabemos, existe un isomorfismo entre el grupo anterior y $\tilde{H}_n(\bar{e}_\beta/\dot{e}_\beta)$ (el isomorfismo no es más que tomar clases en otro grupo), por tanto, esta igualdad se mantiene en el grupo de Homología reducida.

Como Φ_β define un homeomorfismo en el cociente, se tiene $[\Phi_\beta^{-1}\#q_{\beta\#}\partial\Phi_\alpha] = n_{\alpha\beta}[\mathbb{1}_{n-1}]$. De la conmutatividad del diagrama deducimos que $\partial_*\Phi_{\alpha*} = \varphi_{\alpha*}\partial_*$ y, por tanto, $[\Phi_\beta^{-1}\#q_{\beta\#}\varphi_{\alpha\#}\partial\mathbb{1}_n] = n_{\alpha\beta}[\mathbb{1}_{n-1}]$. Finalmente, como $\partial_* : H_n(\Delta_\alpha^n, \partial\Delta_\alpha^n) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(\partial\Delta_\alpha^n)$ define un isomorfismo,

$$(\Phi_\beta^{-1} \circ q_\beta \circ \varphi_\alpha)_*[\partial\mathbb{1}_n] = n_{\alpha\beta}[\mathbb{1}_{n-1}].$$

Ahora tomamos dos homeomorfismos $\psi_1 : \partial\Delta_\alpha^n \rightarrow S^{n-1}$, $\psi_2 : \Delta_\beta^{n-1}/\partial\Delta_\beta^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ de tal forma que $\psi_{1*}[\partial\mathbb{1}_n] = \psi_{2*}[\mathbb{1}_{n-1}]$. Definiendo $\Delta_{\alpha\beta} := \psi_2 \circ \Phi_\beta^{-1} \circ q_\beta \circ \varphi_\alpha \circ \psi_1^{-1}$ obtenemos una familia de aplicaciones

$$\Delta_{\alpha\beta} : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$$

cumpliendo

$$n_{\alpha\beta} = \deg \Delta_{\alpha\beta}.$$

Resumiendo todo lo que hemos visto hasta ahora,

$$d[\Phi_\alpha] = \sum_{\beta} \deg \Delta_{\alpha\beta}[\Phi_\beta],$$

donde $\Delta_{\alpha\beta}$ es la aplicación continua que cierra el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 S^{n-1} & \xrightarrow{\psi_1^{-1}} & \partial\Delta_\alpha^n & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & X^{n-1} \\
 \downarrow \Delta_{\alpha\beta} & & & & \downarrow q_\beta \\
 S^{n-1} & \xleftarrow{\psi_2} & \Delta_\beta^{n-1}/\partial\Delta_\beta^{n-1} & \xleftarrow{\Phi_\beta^{-1}} & \bar{e}_\beta/\dot{e}_\beta
 \end{array}$$

siendo ψ_1, ψ_2 homeomorfismos que preservan las orientaciones.

2.5 EL ISOMORFISMO ENTRE LA HOMOLOGÍA CELULAR Y SINGULAR

Esta sección está dedicada a encontrar el isomorfismo natural $\lambda: H_n^{cw}(X) \rightarrow H_n(X)$. La construcción de este isomorfismo está basada en diversas propiedades de los grupos de homología de un CW -complejo:

Lema 2.5.1. *Sea X un CW -complejo. Entonces se tiene*

- i) $H_k(X^n, X^{n-1}) = 0$ si $k \neq n$.
- ii) $H_k(X^n) = 0$ si $k > n$.
- iii) $i_*: H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$ (el homomorfismo inducido por la inclusión) es un isomorfismo para $k < n$.

Demostración. i) Ya lo hemos demostrado en la **Proposición 2.2.1**, cuando demostramos que X^n/X^{n-1} es una suma wedge de esferas.

ii) Sea $k > n$. Entonces, observando la secuencia exacta asociada a (X^n, X^{n-1}) , y usando i), tenemos que

$$H_k(X^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_k(X^n)$$

define un isomorfismo. Como $H_k(X^0) = 0$, pues $k > 0$ y X^0 es un espacio discreto, un argumento inductivo nos da $H_k(X^n) = 0$. Nótese que de hecho hemos comprobado que $i_*: H_k(X^n) \rightarrow H_k(X^{n+1})$ es un isomorfismo para $n > k$.

iii) Demostramos que $i_*: H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$ es isomorfismo. Veamos que es inyectiva. Si un k -ciclo en X^n es borde de una cadena en X , como la imagen de esta cadena es compacta, caerá en un X^m , $m > n$. Ahora, como $i_*: H_k(X^n) \rightarrow H_k(X^m)$ define un isomorfismo, dicho k -ciclo será borde de cierta cadena en X^n homóloga a la que caía en X^m . Ahora para ver que es epimorfismo, tomamos un k -ciclo en X , el mismo argumento nos da que de hecho es un k -ciclo en un X^m para $m > n$. Como i_* es un isomorfismo, será homólogo a un k -ciclo en X^n . \square

Estamos en condiciones de definir el isomorfismo λ . Prestamos atención a los brodes celulares y los factorizamos por definición. Posteriormente, añadimos algunos términos adicionales de las secuencias exactas involucradas y aplicando el **Lema 2.5.1** obtenemos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & H_n(X^{n+1}, X^n) \cong 0 & & \\
 & & & & \nearrow j_* & & \\
 & & H_n(X^{n+1}) \cong H_n(X) & & & & \\
 & \nearrow i_* & & \nearrow i_* & & & \\
 H_n(X^{n-1}) \cong 0 & \xrightarrow{i_*} & H_n(X^n) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{d} & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \\
 \nearrow \partial_* & & \nearrow \partial_* & & \nearrow \partial_* & & \nearrow j_* \\
 H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \xrightarrow{d} & H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{d} & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \xrightarrow{d} & H_{n-2}(X^{n-2}, X^{n-3}) \\
 & & \nearrow \partial_* & & \nearrow \partial_* & & \nearrow \partial_* \\
 & & H_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-2}(X^{n-2}, X^{n-3}) & \xrightarrow{d} & H_{n-3}(X^{n-3}, X^{n-4}) \\
 & & \nearrow i_* & & \nearrow i_* & & \nearrow i_* \\
 & & H_{n-1}(X^{n-2}) \cong 0 & & H_{n-1}(X) \cong 0 & &
 \end{array}$$

Estudiamos los ciclos celulares, que se corresponden a $\text{Ker } d = \text{Ker } j_* \partial_*$ (en la parte derecha del diagrama). Por ser j_* inyectiva, tenemos que $\text{Ker } d = \text{Ker } \partial_*$. Ahora, como j_* (parte izquierda del

diagrama) es inyectiva, define un isomorfismo con su imagen que, por la exactitud de la secuencia, es $\text{Ker } \partial_*$, los ciclos celulares. Concluimos que $\text{Ker } d \cong H_n(X^n)$.

Ahora, los grupos de Homología Celular son

$$H_n^{CW}(X) = \text{Ker } d / \text{Im } d = \text{Ker } \partial_* / \text{Im } d \cong H_n(X^n) / \text{Im } \partial_* \cong H_n(X^{n+1}) \cong H_n(X).$$

El primer isomorfismo viene de que j_* define un isomorfismo entre $\text{Ker } \partial_*$ y $H_n(X)$ que manda $\text{Im } \partial_*$ justo a $\text{Im } d$ por la conmutatividad del diagrama. El segundo isomorfismo viene de aplicar el Primer Teorema de Isomorfía a la cadena exacta corta

$$H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{\partial_*} H_n(X^n) \xrightarrow{i_*} H_n(X^{n+1}) \xrightarrow{j_*} 0.$$

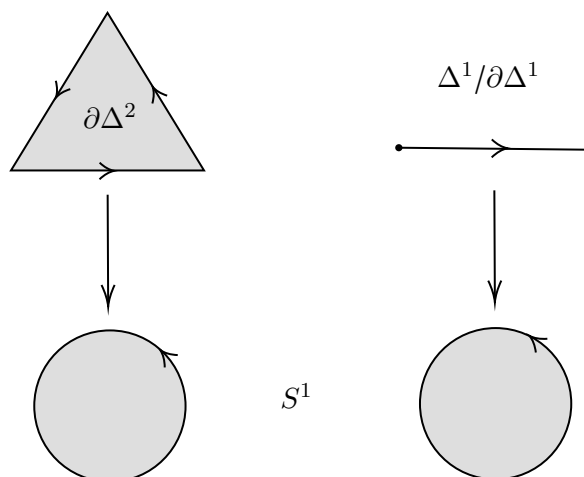
Un poco de atención a este isomorfismo nos otorga la capacidad de encontrar generadores explícitos de los grupos de Homología Singular a partir de generadores de los grupos de Homología Celular. El isomorfismo $H_n^{CW}(X) \rightarrow H_n(X)$ toma una clase de ciclos celulares generada por, digamos, $n_1[\Phi_{\alpha_1}] + \cdots + n_k[\Phi_{\alpha_k}]$ y le asigna la clase de cierto ciclo σ con imagen contenida en X^n cumpliendo $j_*[\sigma] = n_1[\Phi_{\alpha_1}] + \cdots + n_k[\Phi_{\alpha_k}]$. En particular, cuando $n_1[\Phi_{\alpha_1}] + \cdots + n_k[\Phi_{\alpha_k}]$ es un ciclo singular, su imagen por el isomorfismo es $[n_1\Phi_{\alpha_1} + \cdots + n_k\Phi_{\alpha_k}]$ (con la clase tomada en $H_n(X)$).

Corolario 2.5.1. *Los grupos de Homología (singular) de un CW-complejo compacto son finitamente generados.*

Demostración. En efecto, si un CW-complejo es compacto, tiene finitas células y, por consiguiente, sus grupos de Homología Celular son finitamente generados (pues las Cadenas Celulares lo son). A raíz del isomorfismo definido, obtenemos el resultado. \square

Ejemplo 2.5.1. Mostramos como determinar los grupos de Homología Singular de todas las superficies compactas haciendo una descripción celular.

Figura 2.5.1: Identificaciones con S^1 .



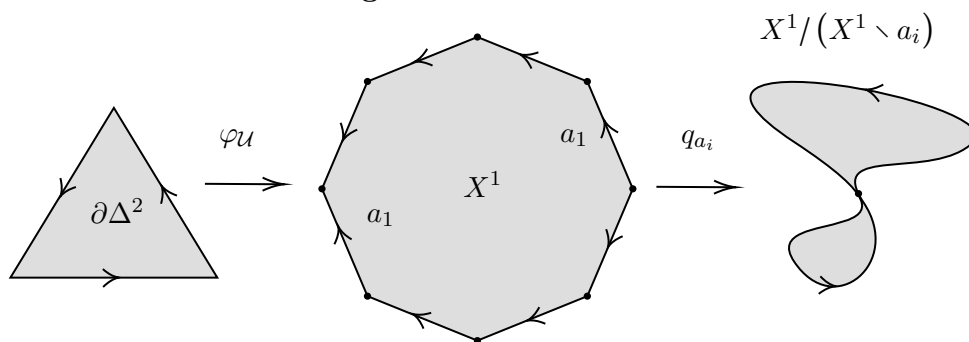
Sea M_g la superficie compacta orientable de género g y la dotamos de la estructura de CW-complejo definida en el **Ejemplo 2.1.1**. Entonces los grupos de Cadenas Celulares adoptan la forma

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Determinemos primero el borde celular d_2 . Atendiendo a la fórmula demostrada en la **Sección 2.4**, es suficiente determinar los grados de las aplicaciones $\Delta_{\mathcal{U},a_i}$ y $\Delta_{\mathcal{U},b_i} : S^1 \rightarrow S^1$, correspondientes a los grados de las aplicaciones consistentes en identificar S^1 con $\partial\Delta^2$, aplicar $\varphi_{\mathcal{U}}$, colapsar todo lo que no es el segmento en concreto a un punto e identificar el espacio resultante con S^1 de nuevo. La única consideración que hay que tener es que en ambas identificaciones se *respete la orientación*, es decir, $\psi_{1*}[\partial\mathbb{1}_2] = \psi_{2*}[\mathbb{1}_1]$. Basta pues considerar las identificaciones mostradas en la **Figura 2.5.1**.

Calculemos $\deg \Delta_{\mathcal{U},a_i}$. Antes de identificar con S^1 , las aplicaciones involucradas transforman $\partial\Delta^1$ como viene en la **Figura 2.5.2**. Con las identificaciones definidas, la aplicación $\Delta_{\mathcal{U},a_i}$ recorre una vez S^1 en sentido antihorario (correspondiente al primer a_i), es constante un periodo, la recorre otra vez en sentido horario (correspondiente al segundo a_i) y vuelve a ser constante hasta el final. Atendiendo a la fórmula de los grados locales tenemos $\Delta_{\mathcal{U},a_i} = +1 - 1 = 0$. Obtenemos exactamente lo mismo para b_i con un razonamiento análogo y concluimos que $d_2 \mathcal{U} = 0$.

Figura 2.5.2: Cálculo de d_2 .



Ahora determinamos d_1 . No es difícil demostrar que $d_1 a_i = d_1 b_i = 0$ (aplicando la misma estrategia). Entonces todas las fronteras celulares son nulas y concluimos que los grupos de Homología son exactamente las Cadenas Celulares, es decir,

$$H_i(M_g) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{si } i = 1, \\ \mathbb{Z} & \text{si } i = 2, \\ 0 & \text{si } i \geq 3. \end{cases}$$

Estudiamos la Homología de Σ_g , la superficie no orientable de género g , dotándola de la estructura de CW -complejo definida en el **Ejemplo 2.1.1**. Las Cadenas Celulares son

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^g \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Con exactamente las mismas consideraciones y razonamientos, tenemos que $\deg \Delta_{\mathcal{U},a_i}$ es el grado de la aplicación $S^1 \rightarrow S^1$ que recorre la circunferencia en sentido antihorario (correspondiente al primer a_i), es constante un tiempo, recorre de nuevo la circunferencia en sentido antihorario (correspondiente al segundo a_i) y vuelve a ser constante. Volviendo a aplicar la fórmula de los grados locales obtenemos $\deg \Delta_{\mathcal{U},a_i} = +1 + 1 = 2$, es decir,

$$d_2 \mathcal{U} = 2a_1 + \cdots + 2a_g.$$

Además, análogamente obtenemos $d_1 a_i = 0$ para cada i . Por tanto,

$$H_2(\Sigma_g) = \text{Ker } d_2 = 0$$

y

$$H_1(\Sigma_g) = \frac{\text{Ker } d_1}{\text{Im } d_2} = \frac{\mathbb{Z}^g}{\text{Im } d_2} = \frac{\langle a_1, \dots, a_g \rangle}{\langle 2a_1 + \dots + 2a_g \rangle} \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Concluimos que

$$H_i(\Sigma_g) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, \\ \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{si } i \geq 2. \end{cases}$$

Nótese que también hemos obtenido generadores explícitos de los grupos de Homología singular de todas las superficies compactas pues en este caso todas las aplicaciones características son ciclos excepto quizás, Φ_U en el caso de M_g , pero siempre podemos escoger un homeomorfismo $\varphi : \Delta^2 \rightarrow P$ cumpliendo $\partial\pi \circ \varphi = 0$.

Una observación importante es que en la práctica uno no tiene cuidado con escoger bien los homeomorfismos $\partial\Delta^n \cong S^{n-1} \cong \Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1}$ pues, en caso de habernos equivocado, los bordes celulares serían incorrectos por ciertos signos, lo que no cambia quienes son los ciclos y quienes son los bordes, siempre y cuando la elección sea uniforme.

§ CAPÍTULO 3: APLICACIONES

En este capítulo mostraremos las aplicaciones que tiene la Homología dentro de las Matemáticas.

La **Sección 3.1** presenta el invariante algebraico más antiguo, la característica de Euler-Poincaré y se demuestra que es un invariante por el Tipo de Homotopía entre CW -complejos. En la **Sección 3.2** demostramos algunos Teoremas clásicos resueltos desde la Topología Algebraica, como el Teorema del punto fijo de Brouwer, el Teorema de la curva de Jordan, la Invariancia de la dimensión, la caracterización de cuando admite S^n campos tangentes nunca nulos, y el Teorema de Borsuk-Ulam. En la **Sección 3.3** presentamos el uso de la Homología para definir orientabilidad en variedades topológicas.

3.1 LA CARACTERÍSTICA DE EULER-POINCARÉ

Comenzamos por uno de los invariantes topológicos más importantes, la característica de Euler-Poincaré de un CW -complejo. Tomamos X un CW -complejo compacto, es decir, con una cantidad finita de células. Definimos su **característica de Euler-Poincaré** como

$$\mathcal{X}(X) = \sum_n (-1)^n \alpha_n$$

siendo α_n el número de n -células de X . Unos de los resultados más importantes de la Topología Algebraica es que $\mathcal{X}(X)$ se puede obtener a partir de los **números de Betti**, $\beta_n := \text{ran}(H_n(X))$. Tomando coeficientes en \mathbb{R} , $H_n(X; \mathbb{R})$ admite estructura de \mathbb{R} -espacio vectorial y se puede comprobar que $\beta_n = \dim(H_n(X; \mathbb{R}))$.

Proposición 3.1.1. *Si X es un CW complejo compacto se tiene*

$$\mathcal{X}(X) = \sum_n (-1)^n \beta_n$$

con $\beta_n := \text{ran}(H_n(X))$.

Demostración. Sea $m := \dim X < \infty$. El complejo de cadena celular es

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_m^{CW}(X) \xrightarrow{d_m} \mathcal{C}_{m-1}^{CW}(X) \xrightarrow{d_{m-1}} \dots \xrightarrow{d_2} \mathcal{C}_1^{CW}(X) \xrightarrow{d_1} \mathcal{C}_0^{CW}(X) \rightarrow 0.$$

Tenemos que

$$\beta_n = \text{ran Ker } d_n - \text{ran Im } d_{n+1}, \quad \alpha_n = \text{ran } \mathcal{C}_n^{CW}(X) = \text{ran Im } d_n + \text{ran Ker } d_n.$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(X) &= \sum_{n=0}^m (-1)^n \alpha_n = \sum_{n=0}^m (-1)^n \text{ran Im } d_n + \sum_{n=0}^m (-1)^n \text{ran Ker } d_n \\ &= (-1)^m \text{ran Ker } d_m + \text{ran Im } d_0 + \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n (\text{ran Ker } d_n - \text{ran Im } d_{n+1}) \\ &= \beta_m + \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n \beta_n = \sum_{n=0}^m (-1)^n \beta_n. \end{aligned} \quad \square$$

Como corolario inmediato, concluimos que la Característica de Euler-Poincaré es un invariante topológico (de hecho, del Tipo de Homotopía entre CW -complejos).

3.2 TEOREMAS CLÁSICOS

En esta sección usamos la teoría desarrollada hasta ahora para probar algunos Teoremas clásicos en Topología.

Comenzamos por el Teorema del punto fijo de Brouwer, probado en 1911.

Teorema 3.2.1 (Punto fijo de Brouwer). *Toda aplicación continua $f : B^n \rightarrow B^n$ tiene un punto fijo.*

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos no hubiera un punto fijo, es decir, $f(x) \neq x$ para cada $x \in B^n$. Definimos la aplicación

$$r : B^n \rightarrow S^{n-1}$$

siendo $r(x)$ el punto de corte de la recta $sx + (1-s)f(x)$ con $\partial B^n = S^{n-1}$ en $s > 0$. Esta es una aplicación continua que, además, es un retracto pues si denotamos por

$$i : S^{n-1} \rightarrow B^n$$

a la inclusión, se tiene

$$ri = \text{id}_{S^{n-1}}.$$

Concluimos que el homomorfismo inducido

$$r_* : H_{n-1}(B^n) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1})$$

es un epimorfismo, lo que es una contradicción, puesto que

$$H_{n-1}(B^n) = 0, \quad H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}.$$

□

Ahora mostramos una demostración del Teorema de la curva de Jordan. Primero debemos recordar que una **inmersión topológica** $h : A \rightarrow B$ es una aplicación continua que define un homeomorfismo con su imagen.

Teorema 3.2.2 (Teorema de la curva de Jordan generalizado). *Sean $n, k \geq 0$, $k < n$. Entonces*

i) cualquier inmersión topológica $h : B^k \rightarrow S^n$ cumple $\tilde{H}_i(S^n \setminus h(B^k)) = 0$ para cada i .

ii) cualquier inmersión topológica $h : S^k \rightarrow S^n$ cumple

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus h(S^k)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = n - k - 1, \\ 0 & \text{si } i \neq n - k - 1. \end{cases}$$

Demostración. i) Lo demostramos por inducción. El caso $k = 0$ es claro pues $S^n \setminus p \cong \mathbb{R}^n$ y tenemos $\tilde{H}_i(\mathbb{R}^n) = 0$ para cada i . Ahora en el paso inductivo, lo probamos para $I^k = [0, 1]^k$ sin pérdida de generalidad (pues I^k es homeomorfo a B^k). Definimos los abiertos

$$A := S^n \setminus h\left(I^{k-1} \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right), \quad B := S^n \setminus h\left(I^{k-1} \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right).$$

Es claro que recubren a S^n . Por tanto, como

$$\tilde{H}_i(A \cup B) = \tilde{H}_i\left(S^n \setminus h\left(I^{k-1} \times \left\{\frac{1}{2}\right\}\right)\right) = 0$$

por hipótesis de inducción, aplicando la sucesión de Mayer-Vietoris tenemos que

$$\Phi_* : \tilde{H}_i(S^n \setminus h(I^k)) \rightarrow \tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B)$$

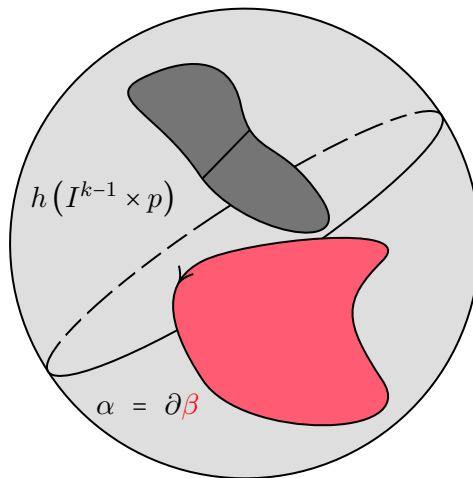
define un isomorfismo. Además, podemos pedir que el isomorfismo esté inducido por las inclusiones $A \cap B \hookrightarrow A, B$ (simplemente cambiando uno de los signos de la definición).

Ahora procedemos por reducción al absurdo. Sea $[\alpha]$ un elemento no nulo en $\tilde{H}_i(S^n \setminus h(I^k))$. Como la suma directa de las inclusiones a A, B es isomorfismo, α será un ciclo que no es borde en A o B . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que es A . Dividiendo A en $A_1 = I^{k-1} \times [0, \frac{1}{4}]$, $B_1 = I^{k-1} \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ y repitiendo el razonamiento, tenemos que α es un ciclo que no es borde en uno de estos dos subrectángulos. Iterando el procedimiento, obtenemos una sucesión de intervalos $I_{j+1} \subseteq I_j \subseteq \mathbb{R}$ cumpliendo que α es un ciclo que no es borde en

$$S^n \setminus h(I^{k-1} \times I_j)$$

para cada j . Como la longitud de esta sucesión de intervalos encajados tiende a 0, tienden a cierto punto $p \in I$. Por hipótesis de inducción, α es borde en $S^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\})$, pongamos $\alpha = \partial\beta$ con β una $i+1$ -cadena en $S^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\})$ (ver **Figura 3.2.1**).

Figura 3.2.1: La construcción de β



Es claro que β está contenido en un compacto de $S^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\})$ y, por tanto, estará contenido en una colección finita de los $S^n \setminus h(I^{k-1} \times I_j)$, pues

$$S^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\}) = \bigcup_j S^n \setminus h(I^{k-1} \times I_j).$$

En particular, β será una cadena perfectamente definida en uno de estos abiertos y, por tanto, $[\alpha] = 0$ en algún $\tilde{H}_i(S^n \setminus h(I^{k-1} \times I_{j_0}))$, lo que nos da la contradicción.

- ii) De nuevo procedemos por inducción. En el caso $k = 0$, tenemos $S^n \setminus S^0 \cong \mathbb{R} \setminus 0 \cong S^{n-1} \times \mathbb{R} \sim S^{n-1}$ que tiene Homología reducida trivial salvo en $i = n - 1 = n - k - 1$. Ahora tomamos D_+ , D_- como los hemisferios norte, sur de S^k , respectivamente y ponemos

$$A := S^n \setminus h(D_+), \quad B := S^n \setminus h(D_-).$$

El apartado anterior nos da que tanto A como B tienen Homología reducida trivial y, por tanto, la sucesión de Mayer-Vietoris nos dice que

$$\tilde{H}_i(A \cap B) = \tilde{H}_i(S^n \setminus h(S^k)) \cong \tilde{H}_{i+1}(S^n \setminus h(S^{k-1})),$$

lo que demuestra, por hipótesis de inducción, que $\tilde{H}_i(S^n \setminus h(S^k))$ es nulo salvo en $i = n - k - 1$, donde es cíclico infinito. \square

Como Corolario obtenemos la versión clásica de este teorema:

Corolario 3.2.1 (Teorema de la curva de Jordan). *Sea $h : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una inmersión topológica. Entonces $\mathbb{R}^n \setminus h(S^{n-1})$ tiene dos componentes conexas, una acotada y otra no acotada.*

Demostración. Es claro que tenemos una inmersión $h : S^{n-1} \rightarrow S^n$. Por el Teorema anterior, $\tilde{H}_0(S^{n-1} \setminus S^n) \cong \mathbb{Z}$, es decir, tiene dos componentes conexas por caminos (que son las componentes conexas al tratarse de un localmente conexo). El resultado sigue trivialmente volviendo al caso $h : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. \square

Otros de los resultados más importantes en Topología es el Teorema de la Invariancia de la Dimensión, que esencialmente nos dice que la dimensión de una variedad topológica es un concepto bien definido:

Teorema 3.2.3 (Invariancia del Dominio). *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. Entonces la imagen de cualquier inmersión topológica $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un abierto.*

Demostración. Sea $p \in U$ y tomamos una bola cerrada B centrada en p tal que $B \subseteq U$. Vamos a demostrar que $h(\mathring{B})$ es abierto, lo que prueba el Teorema. Por el Teorema de la curva de Jordan, tenemos que $\mathbb{R}^n \setminus h(\partial B)$ tiene dos componentes conexas y, por supuesto, ambas abiertas. Necesariamente $h(\mathring{B})$ es una de estas componentes pues

$$\mathbb{R}^n = h(\mathring{B}) \sqcup \mathbb{R}^n \setminus h(B)$$

y ambos conjuntos son conexos (el primero por continuidad y el segundo por el Teorema de la Curva de Jordan generalizado). Esto prueba que $h(\mathring{B})$ es abierto y por tanto, $h(U)$. \square

Corolario 3.2.2 (Invariancia de la dimensión). *Sea U un abierto de \mathbb{R}^n . Entonces si $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una inmersión, necesariamente $n \leq m$.*

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que $n > m$. Entonces definimos la inmersión canónica $i : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^m \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ y concluimos que $i \circ h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una inmersión y, por el Teorema de la Invariancia del Dominio, $i(h(U))$ es abierto en \mathbb{R}^n . Sin embargo $i(h(U))$ está contenido en $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ que no contiene a abiertos de \mathbb{R}^n (salvo al vacío), lo que nos da la contradicción. \square

Observamos que si dos abiertos de dos espacios euclídeos \mathbb{R}^n , \mathbb{R}^m son homeomorfos, entonces $n = m$, es decir, la dimensión de variedades topológicas está bien definida.

Otro de los Teoremas más sorprendentes es la caracterización de cuándo la esfera admite campos tangentes nunca nulos. Un **campo tangente** en la esfera es una aplicación continua $X : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ cumpliendo $X(x) \perp x$ para cada $x \in S^n$ (donde la perpendicularidad está tomada con el producto escalar euclídeo). Nótese que esta es exactamente la definición de campo tangente viendo a S^n como una variedad diferenciable.

Teorema 3.2.4. S^n tiene un campo tangente nunca nulo si y sólomente si n es impar.

Demostración. Que admite un campo tangente nunca nulo cuando n es impar es claro definiendo

$$X(x_1, \dots, x_{2k}) := (x_1, -x_2, \dots, x_{2k-1}, -x_{2k}).$$

Ahora tomamos $X : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ un campo tangente nunca nulo. Normalizando, obtenemos una aplicación $f : S^n \rightarrow S^n$ cumpliendo $f(x) \perp x$ para cada $x \in S^n$. Definimos la homotopía

$$H : I \times S^n \rightarrow S^n; \quad H(t, x) := \frac{tx + (1-t)f(x)}{\|tx + (1-t)f(x)\|} = \frac{tx + (1-t)f(x)}{\sqrt{t^2\|x\|^2 + (1-t)^2\|f(x)\|^2}},$$

que está perfectamente definida pues x y $f(x)$ son ortogonales. Concluimos que $f \sim \mathbb{1}_{S^n}$. De manera similar, obtenemos una homotopía $f \sim -\mathbb{1}_{S^n}$, es decir

$$\mathbb{1}_{S^n} \sim -\mathbb{1}_{S^n}.$$

Tomando grados concluimos que $(-1)^{n+1} = 1$, que sólo ocurre si n es impar. \square

El próximo Teorema justifica la introducción de la Homología con coeficientes en la **Sección 1.7**. En concreto, haremos uso de la homología con coeficientes en $G = \mathbb{Z}_2$. Antes de nada, necesitamos estudiar las aplicaciones inducidas $f_* : H_n(S^n; G) \rightarrow H_n(S^n; G)$ en función del grado.

Lema 3.2.1. Sea G un grupo abeliano. Entonces $\tilde{H}_n(S^n; G) \cong G$ y, además, $f_* : \tilde{H}_n(S^n, G) \rightarrow \tilde{H}_n(S^n, G)$ es la multiplicación por $\deg f$.

Demostración. Que $\tilde{H}_n(S^n; G) \cong G$ se obtiene de un razonamiento completamente análogo al usado en el **Teorema 1.5.1**. Ahora veamos que f_* es simplemente la multiplicación por $\deg f$. Sea $n \in G$. La multiplicación por n induce un morfismo de cadenas

$$g_n : \mathcal{C}(S^n) \rightarrow \mathcal{C}(S^n; G); \quad \sigma \mapsto n\sigma.$$

Además, hace el siguiente diagrama de cadenas conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_n(S^n) & \xrightarrow{f\#} & \mathcal{C}_n(S^n) \\ g_{n_i\#} \downarrow & & \downarrow g_{n_i\#} \\ \mathcal{C}_n(S^n; G) & \xrightarrow{f\#} & \mathcal{C}_n(S^n; G) \end{array}$$

como se comprueba fácilmente a raíz de la definición. Este induce un diagrama conmutativo en la Homología

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & \tilde{H}_n(S^n) \\ g_{n_i*} \downarrow & & \downarrow g_{n_i*} \\ \tilde{H}_n(S^n; G) & \xrightarrow{f_*} & \tilde{H}_n(S^n; G) \end{array}$$

Tomando $[\alpha] \in \tilde{H}_n(S^n; G)$, tenemos que se escribirá

$$\alpha = \sum_i [n_i \sigma_i] = \sum_i g_{n_i*} [\sigma_i].$$

Concluimos que

$$f_* \alpha = \sum_i f_* g_{n_i*} [\sigma_i] = \sum_i g_{n_i*} f_* [\sigma_i] = \sum_i \deg f \cdot g_{n_i*} [\sigma_i] = \deg f \cdot \alpha,$$

lo que prueba que f_* es la multiplicación por $\deg f$. \square

En lo próximo haremos uso de teoría elemental de espacios recubridores. En particular usaremos que dado un recubridor $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$, cierta aplicación $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ desde un espacio conexo por caminos y localmente conexo por caminos admite elevación \tilde{f} con $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ si y sólo si $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

Teorema 3.2.5 (Borsuk-Ulam). *Una aplicación impar $f : S^n \rightarrow S^n$ ($f(-x) = -f(x)$) necesariamente tiene grado impar.*

Demostración. Sea $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ la proyección canónica (viendo el espacio proyectivo como cociente de S^n). Tenemos que el homomorfismo inducido en las cadenas

$$p_{\#} : C_i(S^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow C_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$$

es epimorfismo pues todo símplice singular $\sigma : \Delta^i \rightarrow \mathbb{R}P^n$ admite elevación al ser Δ^i simplemente conexo. Además, como admite exactamente dos elevaciones (según el punto base escogido), al estar escogiendo coeficientes en \mathbb{Z}_2 , $\text{Ker } p_{\#}$ está generado por las cadenas de la forma

$$\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2.$$

Definiendo el morfismo

$$\tau : C_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow C_i(S^n; \mathbb{Z}_2); \quad \alpha \mapsto \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2,$$

concluimos que los grupos de las cadenas encajan en una secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow C_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau} C_i(S^n; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_{\#}} C_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0$$

que nos da, usando la **Proposición 1.3.4**, la siguiente sucesión exacta larga

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{H}_n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau_*} & \tilde{H}_n(S^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{p_*} & \tilde{H}_n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \\ & & \swarrow \partial_* & & \swarrow \partial_* & & \swarrow \partial_* \\ & & \dots & & \dots & & \dots \\ & & \swarrow \partial_* & & \swarrow \partial_* & & \swarrow \partial_* \\ \tilde{H}_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau_*} & 0 & \xrightarrow{p_*} & \tilde{H}_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) & & \\ & & \swarrow \partial_* & & \swarrow \partial_* & & \swarrow \partial_* \\ & & \dots & & \dots & & \dots \\ \tilde{H}_0(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau_*} & 0 & \xrightarrow{p_*} & \tilde{H}_0(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\partial_*} & 0 \end{array}$$

Tenemos que $p_* = 0$. En efecto, tomando el generador definido en la **Proposición 2.3.1** $\alpha = [\Delta_+ - \Delta_-]$, como $p \circ \Delta_+ = p \circ r \circ \Delta_-$ (siendo r la antipodal), tenemos

$$p_* \alpha = [p \circ \Delta_+ - (-1)^{n+1} p \circ \Delta_-] = 2 \cdot [p \circ \Delta_+] = 0$$

(pues estamos tomando coeficientes en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Esto implica, por la exactitud de la secuencia, que τ_* define un isomorfismo en dimensión n . Además, usando de nuevo que $p_* = 0$, es claro que ∂_* define un isomorfismo entre dimensiones n y $n-1$. Esto se tiene también en el resto de la sucesión, salvo quizás en dimensión 0, donde también es cierto pues $\tilde{H}_0(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = 0$.

Como $f : S^n \rightarrow S^n$ es impar, induce una aplicación $g : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ (pasando al cociente y proyectando) que hace conmutativo los diagramas:

$$\begin{array}{ccccc} C_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau} & C_i(S^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{p_{\#}} & C_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \\ \downarrow g_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow g_{\#} \\ C_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau} & C_i(S^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{p_{\#}} & C_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

donde la conmutatividad del diagrama derecho sigue de que $g \circ p = p \circ f$ y la conmutatividad del diagrama izquierdo sigue de que si $\tilde{\sigma}_1$ es una elevación de σ , $f \circ \tilde{\sigma}_1$ es una elevación de $g \circ \sigma$ pues

$$p \circ f \circ \tilde{\sigma}_1 = g \circ p \circ \tilde{\sigma}_1 = g \circ \sigma_1.$$

Ahora demostramos por inducción que f_* , g_* inducen isomorfismos en todas las dimensiones. En dimensión 0 es claro pues ambos espacios son conexos por caminos. Para demostrarlo en el resto de dimensiones, nos damos cuenta de que por la conmutatividad del diagrama inducido por f, g en las cadenas, tenemos una transformación de la sucesión exacta larga en sí misma. Es claro que f_* define un isomorfismo en dimensiones diferentes a n , pues todos los grupos son nulos. Entonces es suficiente comprobar el paso inductivo para g , pero esto se tiene trivialmente de los cuadrados conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_{i+1}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\partial_*} & \tilde{H}_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \\ \downarrow g_* & & \downarrow g_* \\ \tilde{H}_{i+1}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\partial_*} & \tilde{H}_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

pues como ∂_* y g_* en dimensión i definen isomorfismos, también lo hace g_* en dimensión $i+1$. Un argumento similar con el primer cuadrado conmutativo nos da que

$$f_* : H_n(S^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(S^n; \mathbb{Z}_2)$$

define un isomorfismo. En particular, usando el **Lema 3.2.1** y que $H_n(S^n; \mathbb{Z}_2)$ es no nulo, $\deg f$ es necesariamente impar pues en otro caso sería una multiplicación por 0 (y no podría ser un isomorfismo). \square

Corolario 3.2.3. *Para cualquier aplicación continua $g : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existe un punto $x \in S^n$ tal que $g(x) = g(-x)$.*

Demostración. Procedamos por reducción al absurdo y supongamos que no existen tales puntos. Entonces la aplicación

$$f(x) := \frac{g(x) - g(-x)}{\|g(x) - g(-x)\|}$$

define una transformación continua $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ impar. Por el Teorema de Borsuk-Ulam, esto implica que la restricción a S^{n-1} tiene grado impar y, en particular

$$\deg f|_{S^{n-1}} \neq 0.$$

Sin embargo, podemos homotopar $f|_{S^{n-1}}$ hasta una aplicación constante simplemente transformando S^{n-1} en el polo norte continuamente. Esto implica que $\deg f|_{S^{n-1}} = 0$, lo que contradice lo anterior. \square

3.3 ORIENTACIÓN DE VARIEDADES TOPOLÓGICAS

El objetivo de esta sección es finalizar el texto presentando brevemente la aplicación de la Homología en la orientación de variedades.

No debería ser sorprendente que una teoría basada intuitivamente en las orientaciones de símlices tenga aplicaciones para definir formalmente la orientación de variedades topológicas. Recordamos que una **variedad topológica de dimensión n** es un espacio topológico M Hausdorff, cumpliendo el segundo axioma de numerabilidad y localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n . En este caso decimos que

$\dim M = n$. Nótese que por el Teorema de la Invariancia de la dimensión (**Corolario 3.2.2**), la dimensión de una variedad topológica está perfectamente determinada.

De Álgebra Lineal, sabemos que una orientación de \mathbb{R}^n (como espacio vectorial) es simplemente una elección de una base ordenada $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$. Podemos conectar esta elección de base con un generador del grupo de Homología $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R} \setminus 0) \cong \mathbb{Z}$ como sigue:

Vamos a considerar las 2^n bases formadas por las elecciones de signo de cada uno de los vectores anteriores $(\pm u_1, \dots, \pm u_n)$. Esto lo resumimos de la denotando por $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ un vector de signos cualquiera y definiendo

$$\mathcal{B}_\delta = (\delta_1 u_1, \dots, \delta_n u_n).$$

Tomamos

$$\sigma_\delta : \Delta^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus 0; [e_0, \dots, e_n] \mapsto [\delta_1 u_1, \dots, \delta_n u_n]$$

y definimos

$$\sigma_{\mathcal{B}} := \sum_{\delta} |\delta| \cdot \sigma_\delta,$$

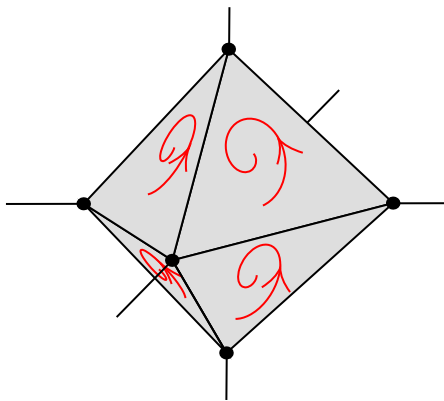
donde $|\delta| := \delta_1 \cdots \delta_n$. Esta $(n-1)$ -cadena es un ciclo. Esto se ve fácilmente observando que los sumandos de $\partial \sigma_{\mathcal{B}}$ se van cancelando 2 a 2 en las parejas

$$\delta = (\delta_1, \dots, \delta_i, \dots, \delta_n), \quad \delta' = (\delta_1, \dots, -\delta_i, \dots, \delta_n)$$

pues $\sigma_\delta \circ \epsilon_i^{n-1} = \sigma_{\delta'} \circ \epsilon_i^{n-1}$ y $|\delta| = -|\delta'|$.

Además, su clase de homología genera $\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R} \setminus 0)$ (ver **Figura 3.3.1**).

Figura 3.3.1: Orientación de \mathbb{R}^n .



En efecto, el poliedro

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}} := \bigcup_{\delta} \sigma_\delta(\Delta^{n-1})$$

admite una estructura de CW -complejo inducida por todas las σ_δ y las correspondientes composiciones con todas las caras de dimensión menor. El borde celular es exactamente el borde singular, pues $\partial \sigma_\delta$ está compuesto por aplicaciones características. Tenemos que calcular el núcleo del homomorfismo

$$\mathbb{Z}^{2^n} \xrightarrow{d_{n-1}} \mathbb{Z}^\alpha; \quad \sigma_\delta \mapsto \sum_i (-1)^i \sigma_\delta \circ \epsilon_i^{n-1},$$

con α el número de $n - 2$ -celdas. Es fácil ver que este núcleo está generado por $\sigma_{\mathcal{B}}$ usando que $\sigma_{\delta} \circ \epsilon_i^{n-1} = \sigma_{\delta'} \circ \epsilon_{i'}^{n-1}$ si y sólomente si $i = i'$ y δ, δ' o son iguales, o toman la forma anterior. Concluimos que $\sigma_{\mathcal{B}}$ genera el grupo de Homología Celular. Como en este caso $\sigma_{\mathcal{B}}$ es un ciclo singular, prestando atención al isomorfismo entre la Homología Celular y Singular, tenemos que genera $\tilde{H}_{n-1}(\mathcal{P}_{\mathcal{B}})$. Además, este último es isomorfo a $\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R} \setminus 0)$ mediante la aplicación inducida por la inclusión (pues define una equivalencia de homotopía), lo que nos da que $[\sigma_{\mathcal{B}}]$ genera $\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R} \setminus 0)$.

No es complicado comprobar que orientaciones equivalentes de \mathbb{R}^n como espacio vectorial inducen el mismo generador de $\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R} \setminus 0)$, simplemente habría que coprobar que el la aplicación inducida por el cambio de base en la homología resulta multiplicar por el signo del determinante.

Hemos conseguido interpretar una orientación de \mathbb{R}^n como dar un generador de $\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R} \setminus 0)$. Como \mathbb{R}^n es contrátil, este último grupo es isomorfo a $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$, lo que nos dice que dar una orientación de \mathbb{R}^n es escoger un generador de $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$. Realmente, esto es lo que se conoce como una orientación de \mathbb{R}^n en 0:

Definición 3.3.1 (Orientación local). Sea M un variedad topológica con $\dim M = n$. Una **orientación de M en $x \in M$** es una elección de un generador $\nu_x \in H_n(M, M \setminus x)$. Nótese que este último grupo es cíclico infinito pues x admite un entorno U homeomorfo a \mathbb{R}^n y, por el Teorema de Excisión, la inclusión define un isomorfismo

$$H_n(U, U \setminus x) \cong H_n(M, M \setminus x),$$

y ya sabemos que el primero de estos es isomorfo a \mathbb{Z} .

Para definir lo que es una orientación de una variedad M , necesitamos definir lo que entendemos por “continuidad” de una elección de orientación en cada punto. Para definirlo, observamos que fijada una base de \mathbb{R}^n , \mathbb{R}^n tiene una orientación canónica en cada $y \in \mathbb{R}^n$ inducida por el homeomorfismo traslación $x \mapsto y$. Esta elección de generador se puede hacer en términos más topológicos tomando una bola B que incluya al 0, y y considerando los isomorfismo inducidos por la inclusión (son isomorfismos pues la inclusión define una equivalencia de homotopía):

$$\begin{array}{ccc} & & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus y) \\ & \nearrow & \\ H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) & \longrightarrow & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \end{array}.$$

Esto induce la siguiente definición:

Definición 3.3.2 (Orientación). Una **orientación** de una variedad M es una asignación $x \mapsto \nu_x$ cumpliendo la siguiente condición de continuidad. Todo $x \in M$ tiene un entorno U homeomorfo a \mathbb{R}^n tal que para toda (imagen de una) bola B y para todo $y \in B$, se tiene que ν_y es el generador obtenido mediante el siguiente diagrama isomorfismos inducidos por las inclusiones:

$$\begin{array}{ccc} & & H_n(U, U \setminus y) \longrightarrow H_n(M, M \setminus y) \\ & \nearrow & \\ H_n(U, U \setminus B) & \longrightarrow & H_n(U, U \setminus x) \longrightarrow H_n(M, M \setminus x) \end{array}.$$

Una variedad M es **orientable** si existe una orientación en M .

Una de las primeras propiedades que se pueden demostrar es que dada una variedad M conexa, si M es orientable, admite sólo dos orientaciones y quedan perfectamente determinadas por su orientación en un punto. Esto se hace sencillamente mediante un argumento típico de conexión.

Las variedades compactas orientables quedan determinadas por el siguiente Teorema:

Teorema 3.3.1. *Una variedad compacta M de dimensión n es orientable si y sólo si $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$. En otro caso, $H_n(M) \cong 0$.*

Además, las variedades compactas orientables cumplen una propiedad de dualidad, demostrada primero por Poincaré:

Teorema 3.3.2 (Dualidad de Poincaré). *Sea M una variedad compacta y orientable. Entonces existen isomorfismos naturales*

$$H^i(M) \cong H_{n-i}(M),$$

donde $H^i(M)$ son los grupos de Cohomología Singular (obtenidos tras una dualización de la cadena de Cadenas Singulares).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, 2005.
- [2] John W Keesee, *An introduction to algebraic topology*, Brooks/Cole Publishing Company, 1970.
- [3] William S Massey, *Algebraic topology: an introduction*, Vol. 56, Springer, 1967.
- [4] James Munkres, *Topology james munkres second edition*.
- [5] James R Munkres, *Elements of algebraic topology*, CRC press, 2018.
- [6] Joseph J Rotman and Joseph J Rotman, *An introduction to homological algebra*, Vol. 2, Springer, 2009.
- [7] Stephen Willard, *General topology*, Courier Corporation, 2012.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1.1	El agujero de S^1 .	1
Figura 1.1.2	Borde de Δ^2 .	3
Figura 1.1.3	El plano sin dos puntos.	4
Figura 1.2.1	La invariancia por homotopía en dimensión 1.	8
Figura 1.2.2	La invariancia por homotopía en dimensión arbitraria.	8
Figura 1.4.1	El homomorfismo corchete.	15
Figura 1.4.2	Subdivisión baricéntrica de $\mathbb{1}_n$.	16
Figura 1.6.1	Descomposición en abiertos de $S^1 \times S^1$.	25
Figura 1.6.2	Descomposición en abiertos de K .	26
Figura 2.1.1	Construcción de un CW -complejo.	28
Figura 2.1.2	La estructura como CW -complejo de las superficies compactas.	30
Figura 2.3.1	La homotopía entre $\mathbb{1}_{S^n}$ y f .	32
Figura 2.5.1	Identificaciones con S^1 .	37
Figura 2.5.2	Cálculo de d_2 .	38
Figura 3.2.1	La construcción de β	42
Figura 3.3.1	Orientación de \mathbb{R}^n .	47