

Mestrado em Engenharia Eletrotécnica e De Computadores

Linear State Feedback Control of an Inverted Pendulum

Projeto de Laboratório

Controlo Em Espaço de Estados

2016/2017



Grupo 2 (Turno B, 5^a-Feira)

Rúben Tadeia – 75268

Miguel Silva – 75859

João Ribafeita – 75987

Sebastião Quintas – 78206

Contents

1. Introdução	3
2. Respostas às Questões	4
2.1. Eigenvalues.....	4
2.2. Controlabilidade.....	4
2.3. Observabilidade.....	4
2.4. Diagrama de Bode	5
2.5. – 2.6.....	5
Estas questões estão resolvidas no código de MATLAB, com considerações anotadas nas regiões necessárias.	5
2.9. & 2.10. & 2.11.	5
3. Análise de Resultados	18
4. Conclusão	20
5. Pergunta Opcional.....	21

1. Introdução

Neste trabalho laboratorial foi pedido o controlo e modulação de um pêndulo invertido. Para tal recorreremos ao MATLAB e SIMULINK para executar as simulações respetivas, fazendo a ligação direta ao pêndulo em si. Todas as funções pedidas e utilizadas podem ser encontradas em scripts MATLAB publicados em HTML. Estes scripts encontram-se na raíz da pasta.

Neste projeto é utilizado um controlador proporcional integral e derivativo (PID), que é uma técnica que une os 3 processos. Fazendo assim com que o sinal de erro seja minimizado pela parte proporcional, anulado pela parte integral e obtido com uma velocidade obtida pela parte derivativa. Fazendo uma análise ao nível da frequência, sabe-se que para baixas frequências nem a parte integrativa nem a parte derivativa se fazem notar. Para as médias frequências prima a parte integrativa e finalmente para altas frequências prima a parte derivativa do controlador.

De seguida seguem-se as respostas às questões propostas bem como a justificação das mesmas através tanto de gráficos como de scripts de MATLAB justificativos.

2. Respostas às Questões

2.1. Eigenvalues

Nesta primeira questão é proposta uma caracterização do sistema. Para tal tivemos de carregar o sistema para o MATLAB com vista a determinar os eigenvalues. Os valores obtidos são os seguintes:

0
-737.3184
-19.3673
-5.7612
6.9974

Temos um pólo na origem, três no SPCE e um no SPCD. Por causa do último pólo, e por estar localizado no semi-plano complexo direito concluímos que o sistema é instável em malha aberta.

2.2. Controlabilidade

Nesta questão é proposto o estudo da controlabilidade do sistema implementado. Para tal recorremos à função `ctrb()` para determinar a matriz de controlabilidade e à função `rank()`, que nos dá o número de filas ou colunas linearmente independentes. Destas funções obtivemos a dimensão da matriz de controlabilidade do sistema, que por sua vez era igual à dimensão do estado (5), com isto podemos concluir que o sistema é controlável.

2.3. Observabilidade

Caracterização do sistema em cadeia aberta em termos de observabilidade. De seguida apresenta-se a matriz C caso a única saída do sistema seja o ângulo do pêndulo x_3 . Recorreu-se à função `obsv()` para calcular a matriz de observabilidade, tendo esta função como input a matriz A e C.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De seguida calculou-se a matriz de observabilidade através do comando `obsv(A,C)`, fazendo a sua respetiva dimensão. Neste caso a dimensão obtida pelo MatLab foi de 4, pelo que concluímos que com esta configuração de matriz C o sistema não é observável.

De seguida repetimos o estudo, mas para o caso em que medimos x_1 e x_3 , apresentamos de seguida a nova matriz C.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Procedeu-se de igual forma no cálculo da matriz de observabilidade. Ao contrário do estudo prévio, tivemos uma dimensão de 5, obtida pelo `rank` do MATLAB. Neste caso é seguro afirmar que o sistema com a matriz C nas configurações indicadas é observável.

2.4. Diagrama de Bode

De seguida segue-se o diagrama de Bode com escala ajustada pedido nesta alínea.

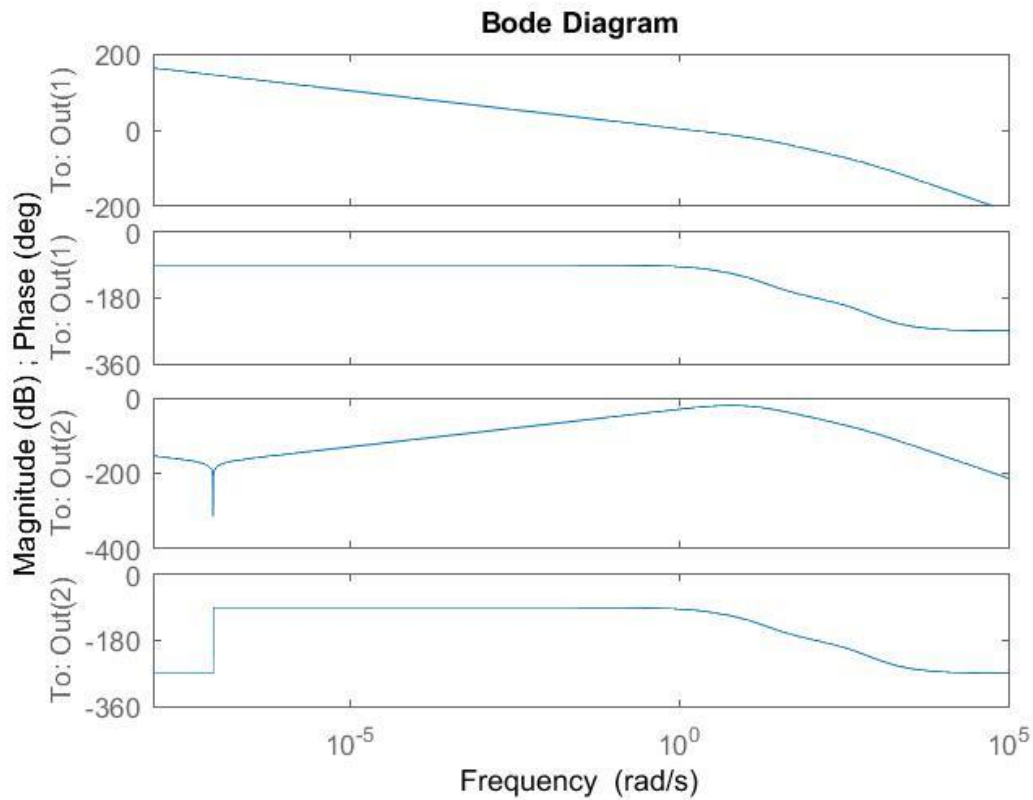


Figura 1 - Diagrama de Bode

No primeiro temos o Diagrama do Ganho α . Como podemos evidenciar, temos um pólo na origem e outro a cerca de 100 rad/s. Mais abaixo temos o Diagrama do Ganho β , onde contamos com um zero na origem e um pólo duplo perto de 100 rad/s.

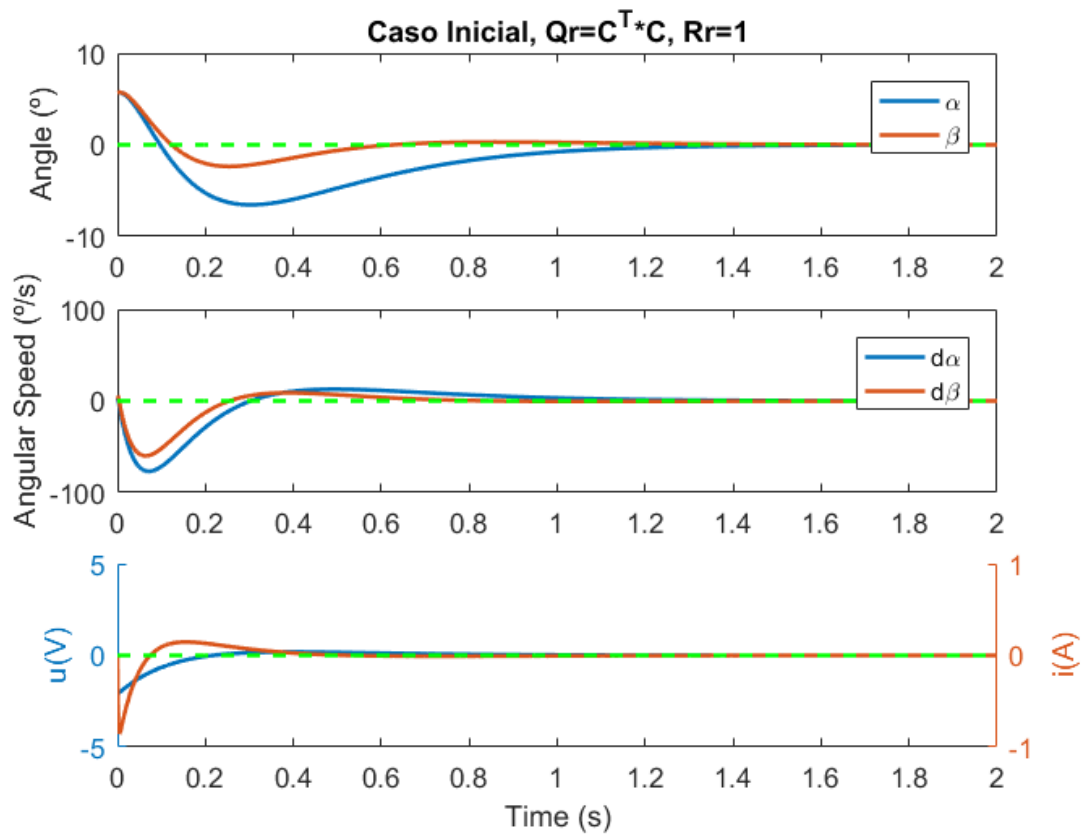
2.5. – 2.6

Estas questões estão resolvidas no código de MATLAB, com considerações anotadas nas regiões necessárias.

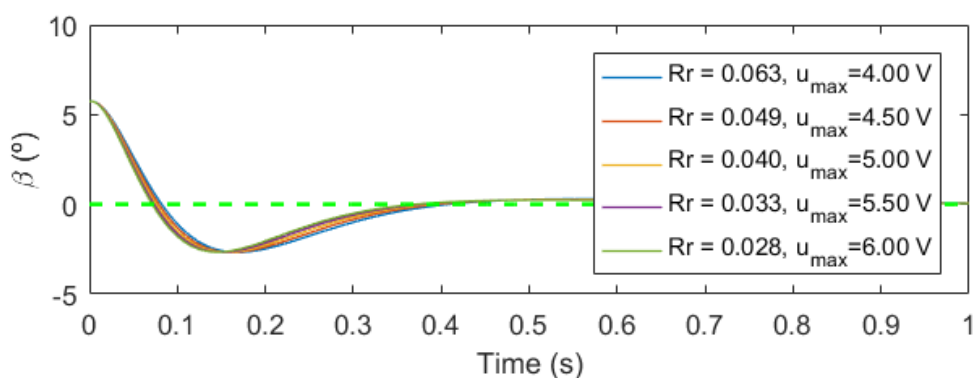
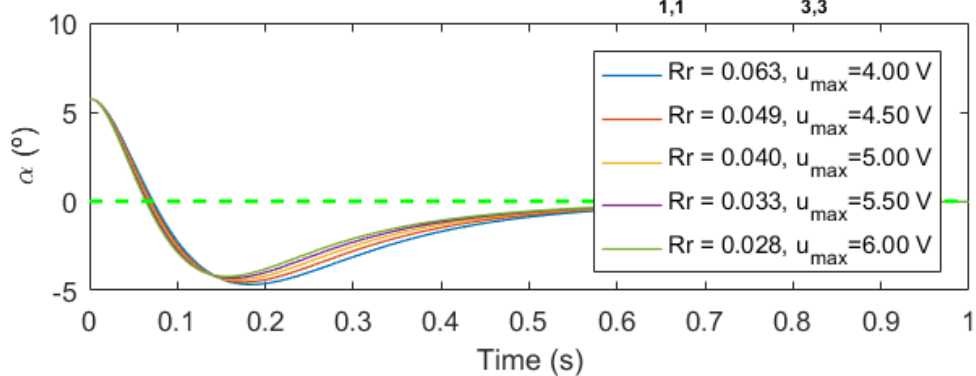
2.9. & 2.10. & 2.11.

Apresenta-se aqui em detalhe o resultado das 3 sessões de laboratório.

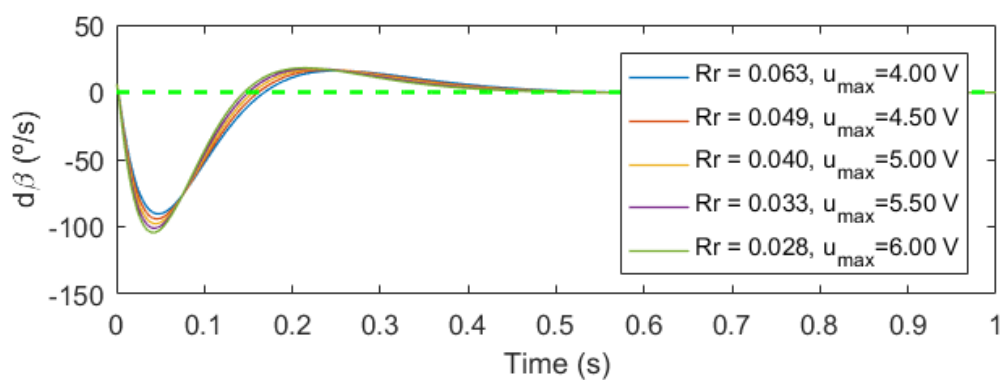
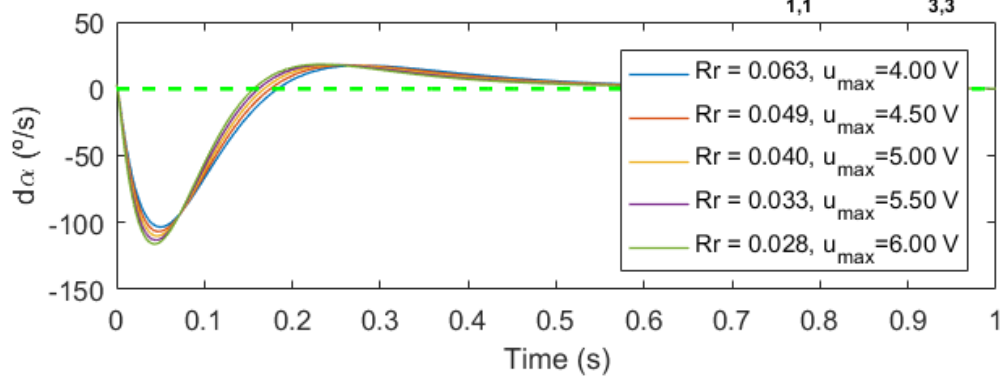
Todos os nossos gráficos de teste encontram-se aqui legendados. Para facilitar a análise encontram-se todos seguidos e por ordem de execução. Havendo uma análise no fim de todos a explicar todo o processo envolvido na aquisição destes valores.



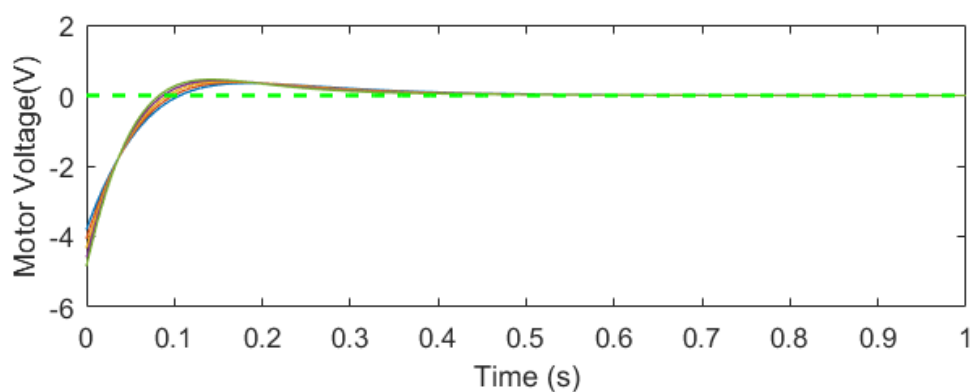
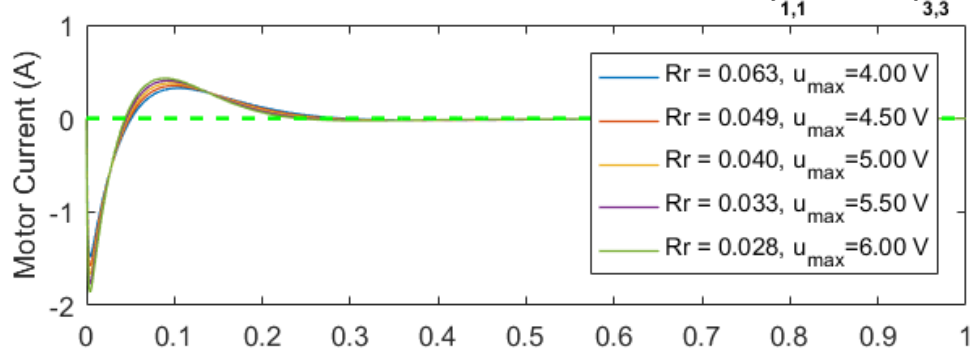
Efeito de R_r nos ângulos, com $Q_{r,1,1}=10$ e $Q_{r,3,3}=1$



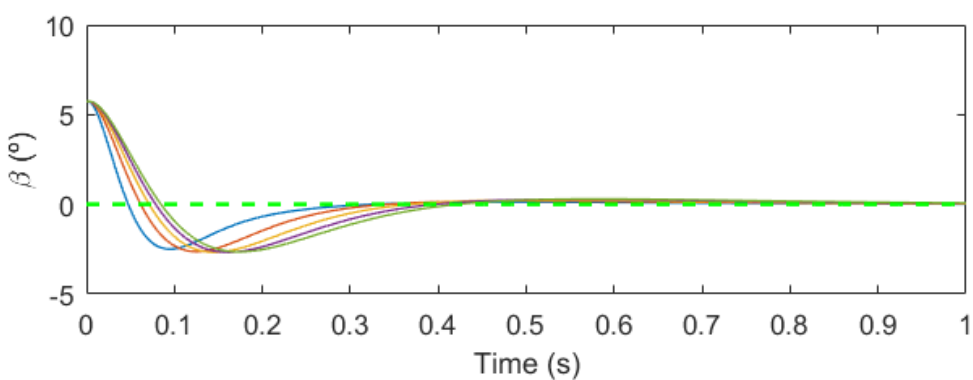
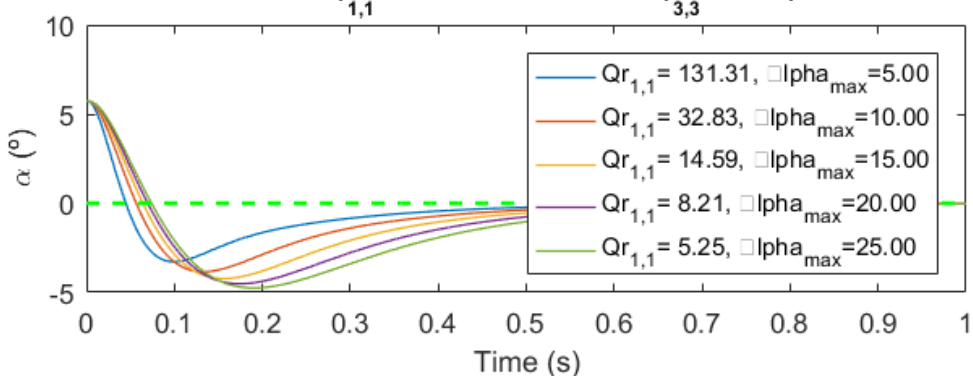
Efeito de R_r nas velocidades angulares, com $Q_{r,1,1}=10$ e $Q_{r,3,3}=1$



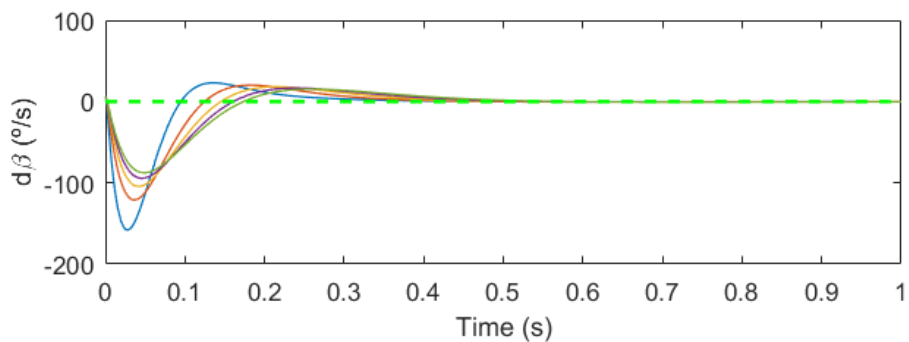
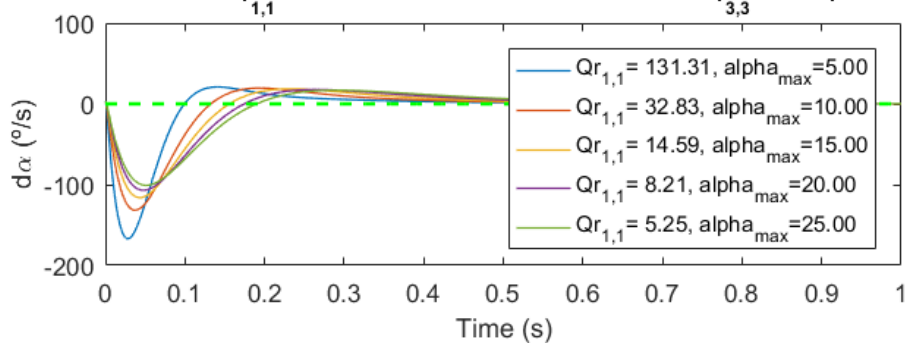
Efeito de R_r na corrente e tensão do motor, com $Q_{r,1,1}=10$ e $Q_{r,3,3}=1$



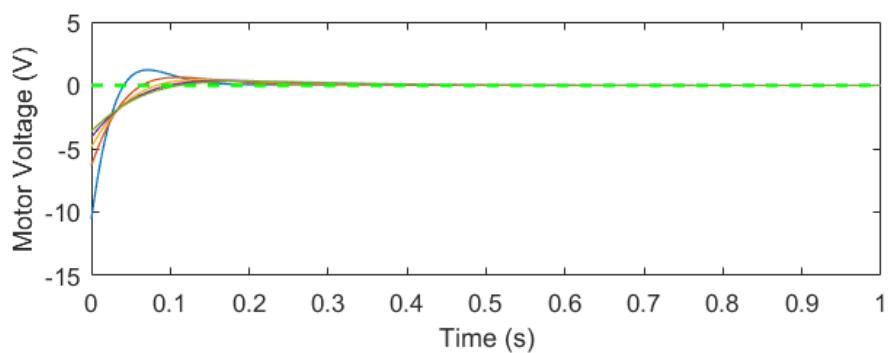
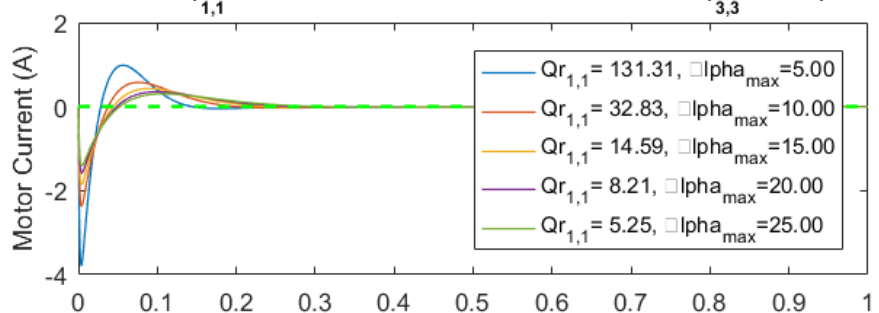
Efeito de $Q_{r,1,1}$ nos ângulos, com $Q_{r,3,3}=1$ e $R_r=1/25$



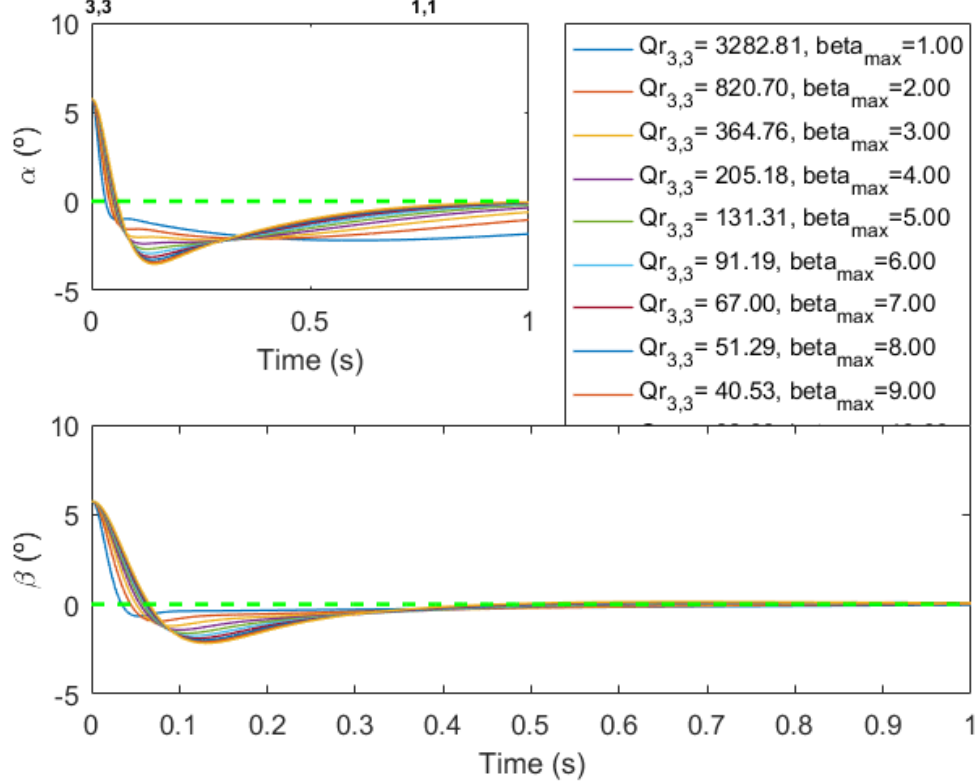
Efeito de $Q_{r_{1,1}}$ nas velocidades angulares, com $Q_{r_{3,3}}=1$ e $R_r=1/25$



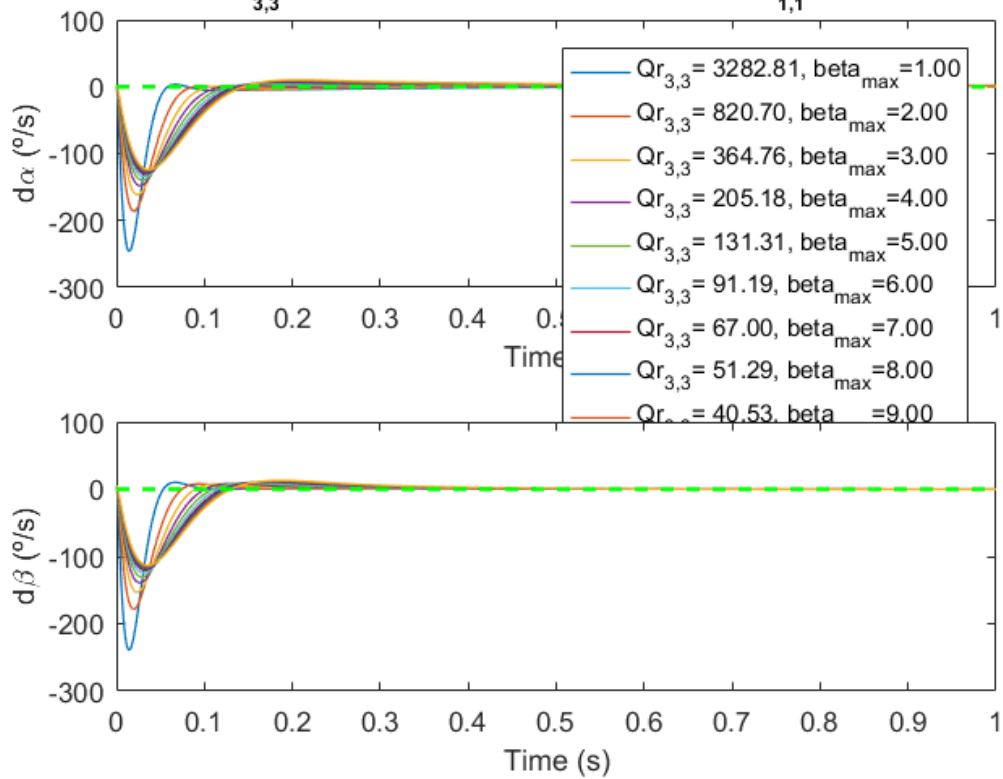
Efeito de $Q_{r_{1,1}}$ na corrente e tensão do motor, com $Q_{r_{3,3}}=1$ e $R_r=1/25$



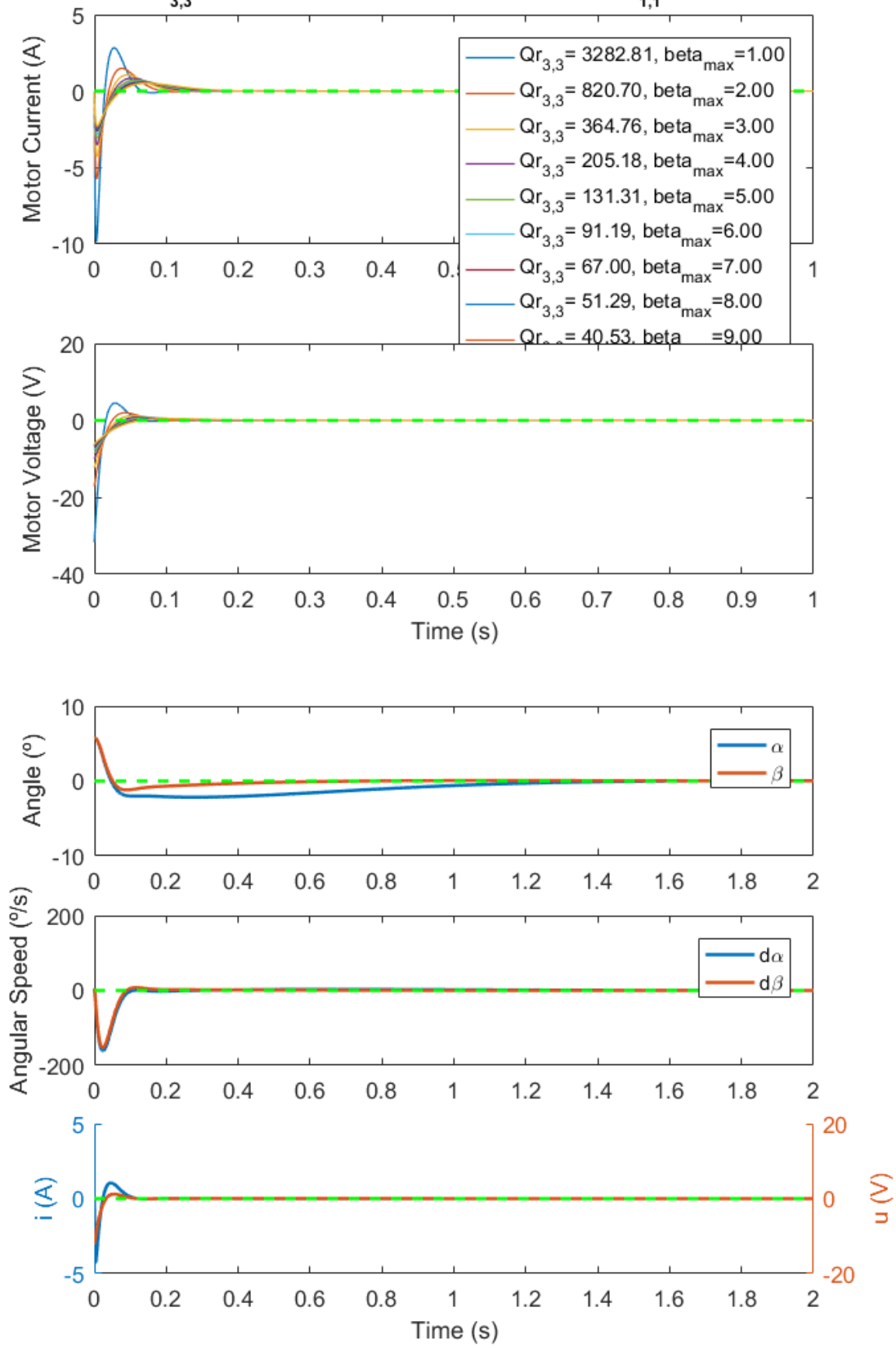
feito de $Q_{r_{3,3}}$ nos ângulos, com $Q_{r_{1,1}}=14.5903$ e $R_r=1/25$

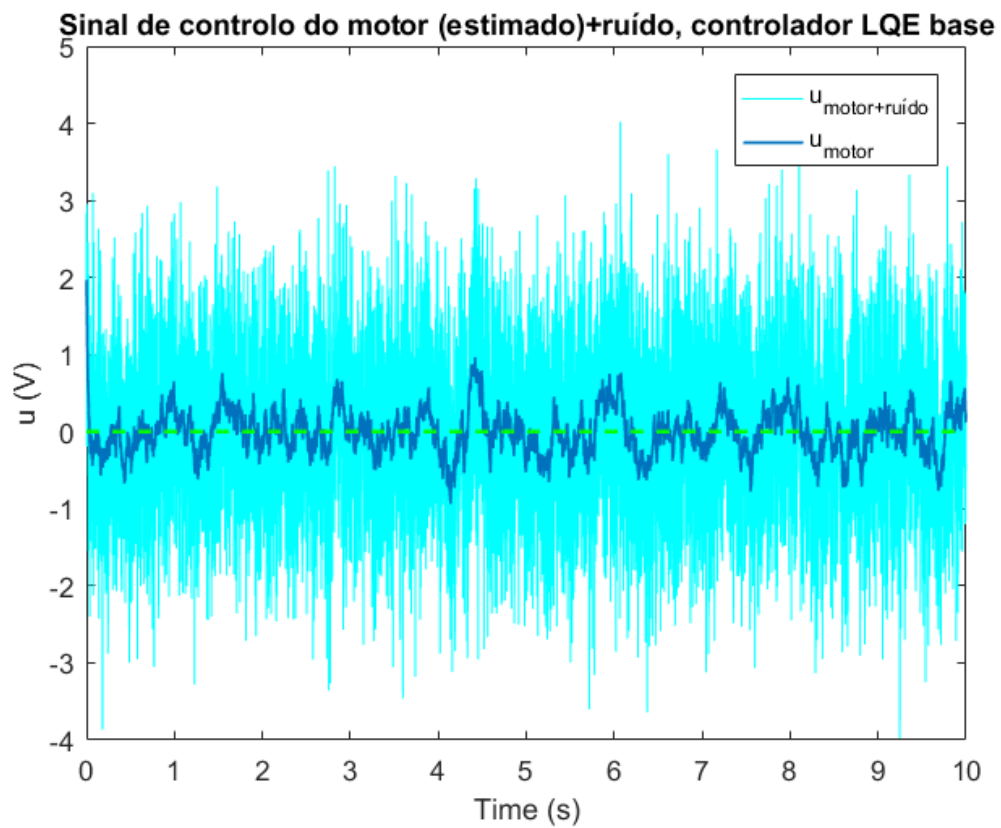
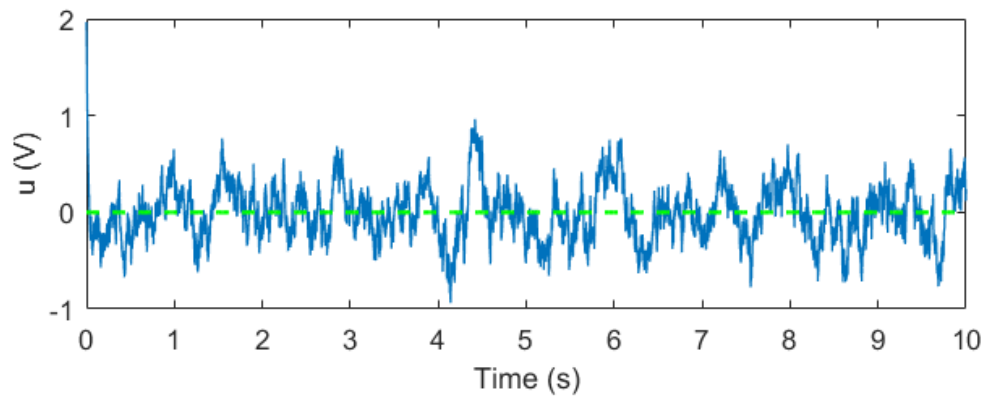
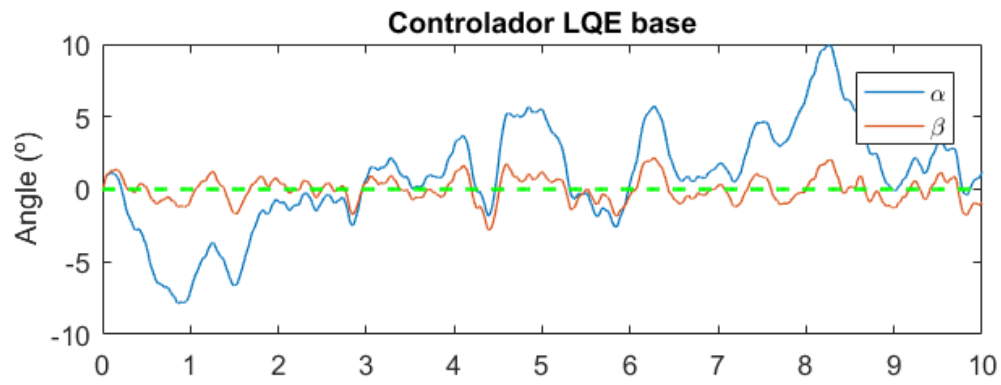


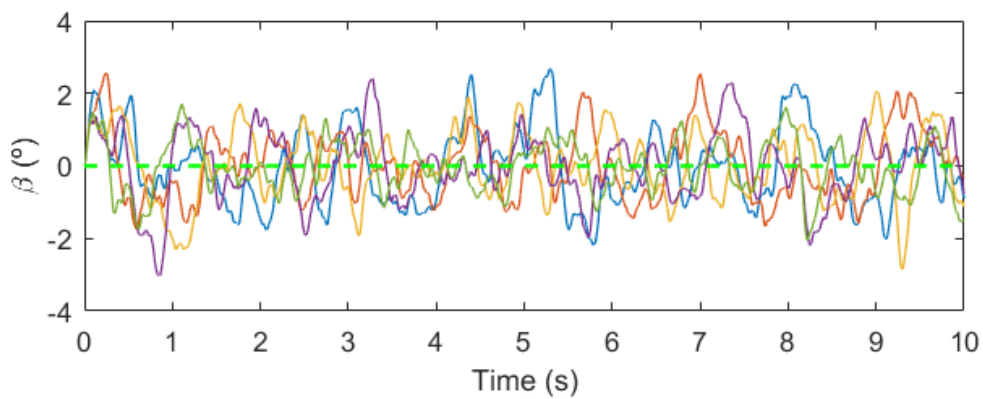
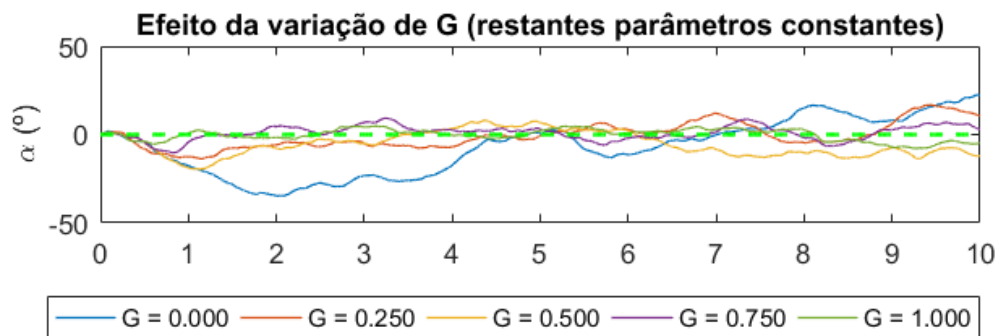
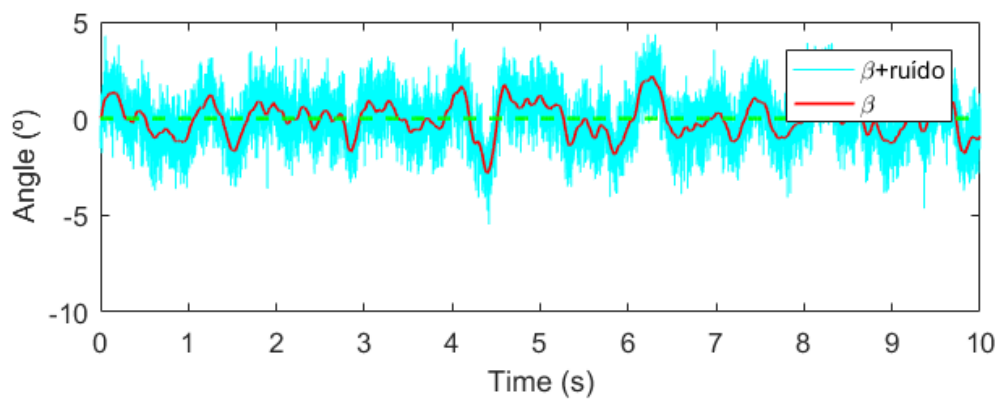
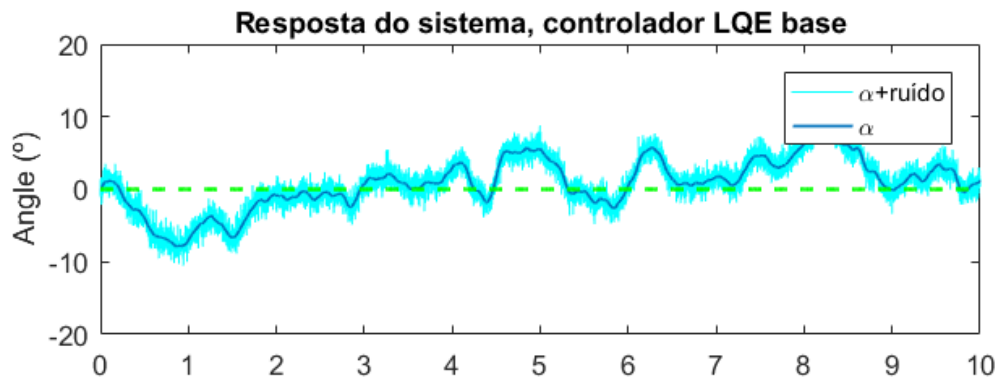
Efeito de $Q_{r_{3,3}}$ nas velocidades angulares, com $Q_{r_{1,1}}=14.5903$ e $R_r=1$

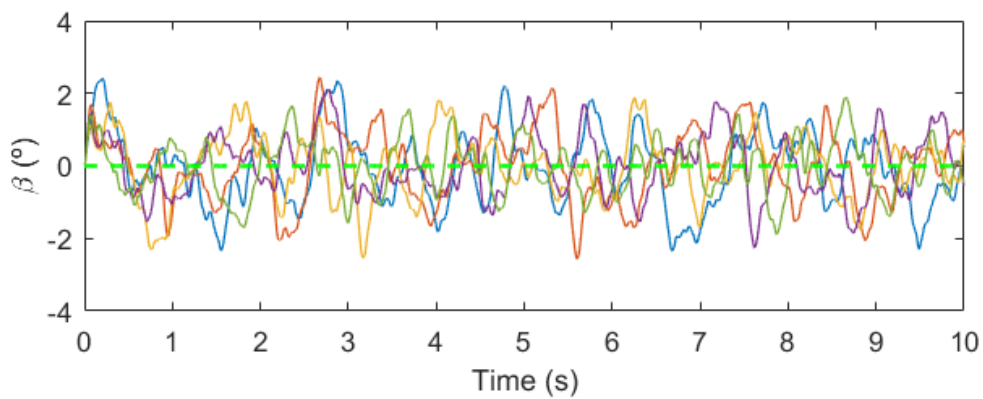
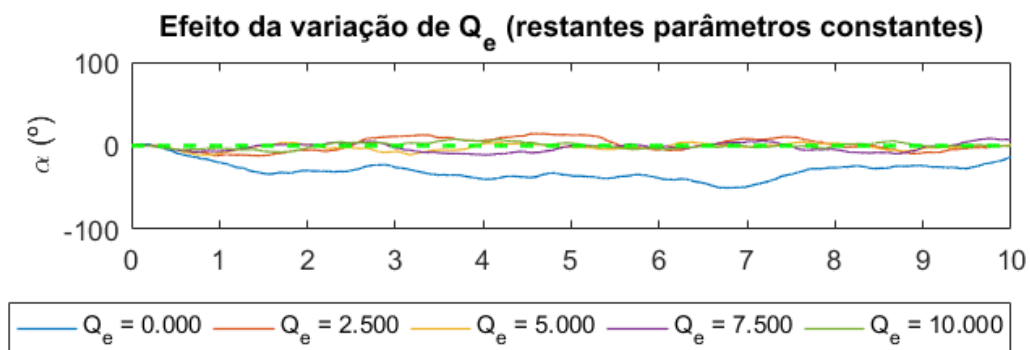
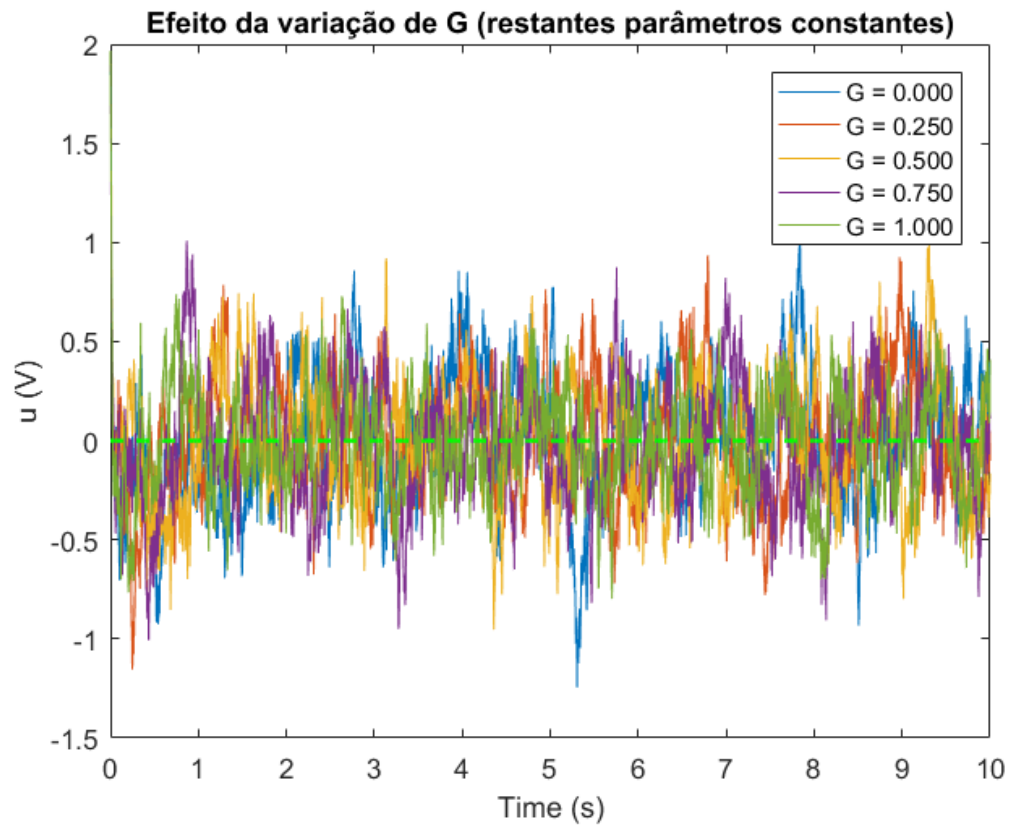


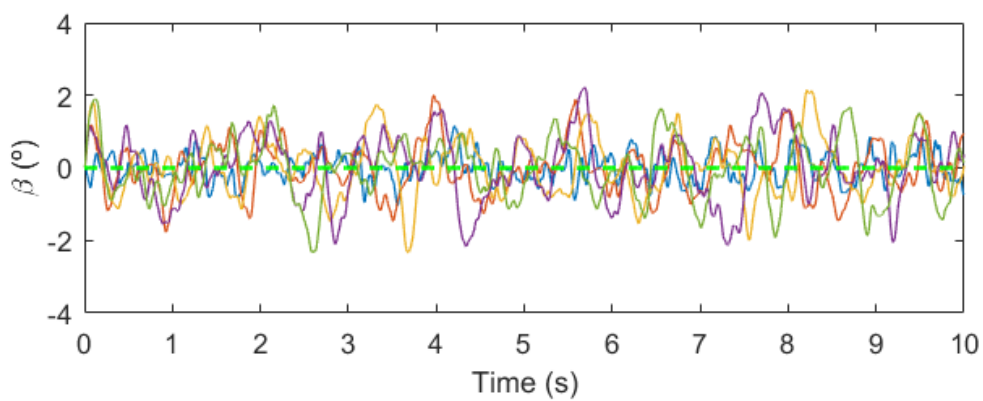
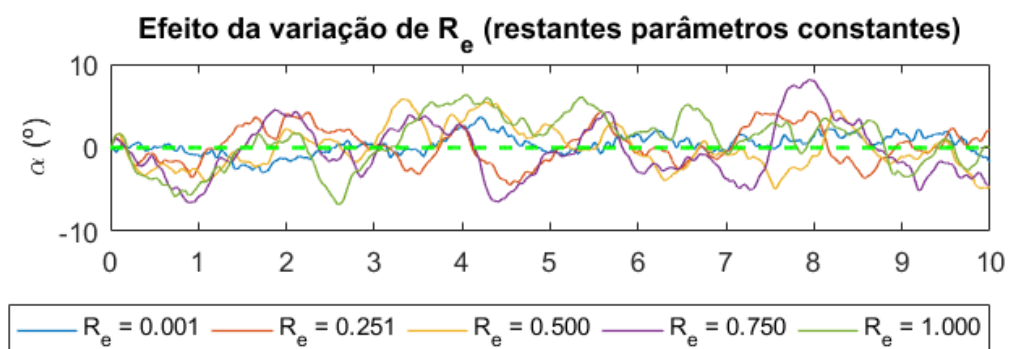
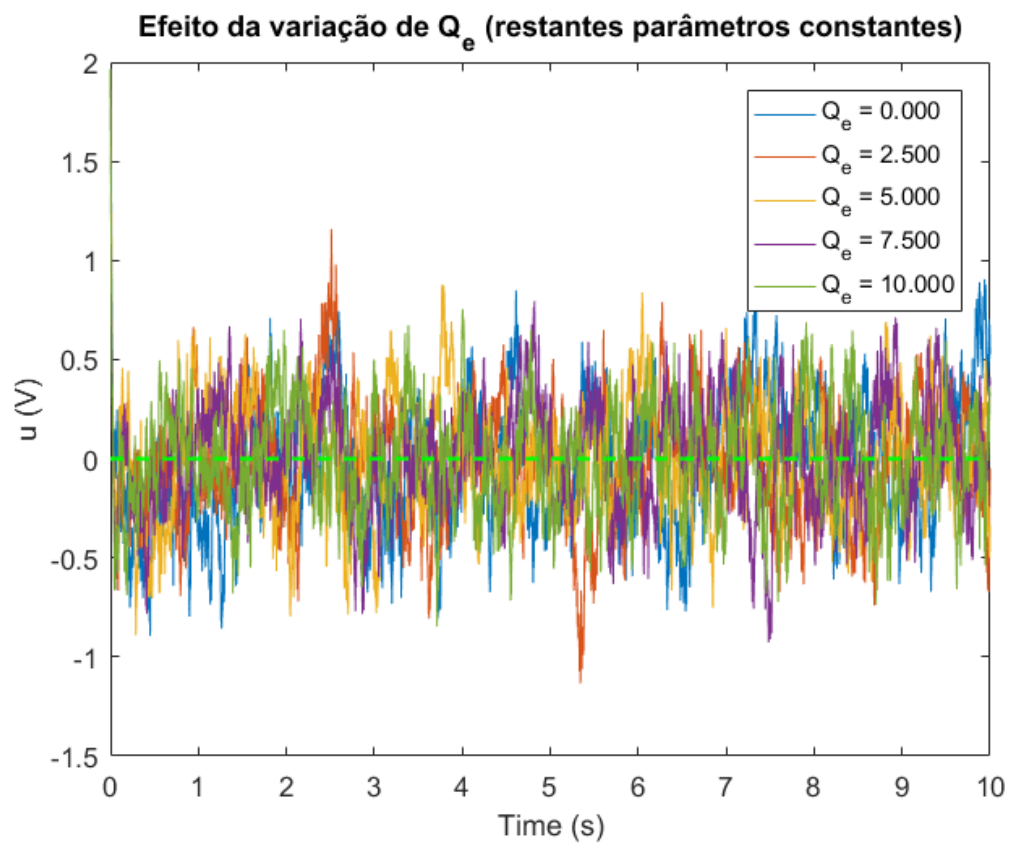
Efeito de $Q_{r_{3,3}}$ na corrente e tensão do motor, com $Q_{r_{1,1}}=14.5903$ e $R_r=1/25$

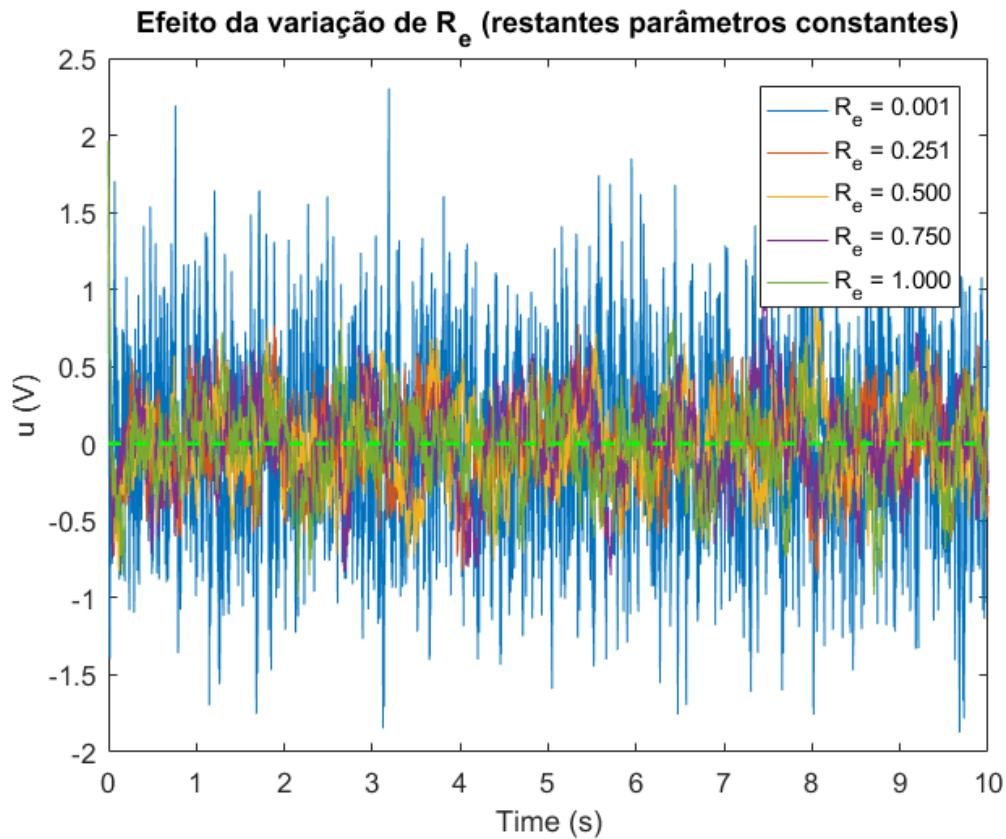












Para a primeira sessão de laboratório testamos com os seguintes valores:

- TESTE 1_1 --> $Q_r(i,i)=10 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0$ $R_r=1$ LQE base caso base
- TESTE 1_2 --> $Q_r(i,i)=10 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0$ $R_r=0.8$ LQE base
- TESTE 1_3 --> $Q_r(i,i)=1 \ 0 \ 100 \ 0 \ 0$ $R_r=1$ LQE base
- TESTE 1_4 --> $Q_r(i,i)=100 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0$ $R_r=1$ LQE base
- TESTE 1_5 --> $Q_r(i,i)=50 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0$ $R_r=1$ LQE base
- TESTE 1_6 --> $Q_r(i,i)=50 \ 0 \ 20 \ 0 \ 0$ $R_r=1$ LQE base

Para a segunda sessão de laboratório testamos com os seguintes valores:

- TESTE 1 --> $Q_r(i,i)=10 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0$ $R_r=1$
- TESTE 2 --> $Q_r(i,i)=100 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0$ $R_r=1$
- TESTE 3 --> $Q_r(i,i)=100 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0$ $R_r=1$ - teste mais estável
- TESTE 4 --> $Q_r(i,i)=80 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0$ $R_r=1$
- TESTE 5 --> $Q_r(i,i)=40 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0$ $R_r=1$
- TESTE 6 --> $Q_r(i,i)=100 \ 0 \ 20 \ 0 \ 0$ $R_r=1$

- TESTE 7 --> $Qr(i,i)=100 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0$ $Rr=0.8$ - 2º teste mais "estável"
- TESTE 8 --> $Qr(i,i)=100 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0$ $Rr=1.5$
- TESTE 9 --> $Qr(i,i)=120 \ 0 \ 20 \ 0 \ 0$ $Rr=0.8$ - bom, mas convergência de alfa para 0 é lenta
- TESTE 10 --> $Qr(i,i)=140 \ 0 \ 20 \ 0 \ 0$ $Rr=?$
- TESTE 11 --> $Qr(i,i)=500 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0$ $Rr=0.5$
- TESTE 12 --> $Qr(i,i)=500 \ 10 \ 10 \ 10 \ 0$ $Rr=0.5$

3. Análise de Resultados

Neste laboratório, tínhamos como objetivo desenhar (e otimizar) um controlador para um pêndulo de Furuta. O controlador deveria manter o pêndulo na posição vertical, em torno de $\beta=0^\circ$, e também convergir para o "zero" horizontal, correspondente $\alpha=0^\circ$.

Foi utilizado um modelo do sistema linearizado (e consequentemente simplificado), em torno da posição vertical ($\beta=0^\circ$).

Um bom controlador deveria manter o pêndulo na vertical, sem oscilações verticais (ou com oscilações muito pequenas) e convergindo para a posição horizontal inicial, mesmo quando o pêndulo sofresse perturbações (empurrões, toques, ...). Um bom controlador deveria ainda, dentro do possível, tender para uma estratégia de "cheap control", de modo a reduzir o esforço de controlo e o desgaste dos componentes. Deveria ainda assegurar uma boa rejeição do ruído (introduzido pelos componentes de alimentação do motor, pelo potenciômetro, pelo rotary encoder, ...), sem reduzir de forma significativa a sua velocidade de resposta.

Inicialmente, foram usados os parâmetros fornecidos no enunciado do laboratório, de modo a estabelecer uma referência, um "caso base", a que os outros pudessem ser comparados.

Seguidamente, analisou-se a influência isolada de cada parâmetro do LQR e do LQE no comportamento do sistema.

Para determinar um ponto de partida na escolha dos valores de Q_r e R_r a usar, usámos a Regra de Bryson, uma regra que relaciona os valores dos coeficientes com os erros máximos admissíveis e com o sinal de controlo e, a partir daí, testámos os vários compromissos entre os desvios admissíveis para α e β .

À medida que efetuámos simulações, verificámos que a convergência para a referência de β era mais rápida que a de α . Através do aumento da penalização de α , através do coeficiente Q_r correspondente, foi possível aumentar a rapidez da convergência.

No entanto, no sistema real, a convergência de α é consideravelmente mais lenta.

A partir das simulações efetuadas e dos testes efetuados ao pêndulo, acabámos por escolher os coeficientes Q_r e o valor de R_r (um valor baixo, portanto, a tender para "expensive control").

Após fixar os parâmetros do controlador LQR, de modo a determinar o vetor de ganhos, foi necessário projetar o controlador LQE.

Visto que o sistema real tem ruído e erros de medição, é imperativo, de modo a aumentar a eficiência e robustez do controlo, de um estimador.

De modo a simular o sistema de uma forma mais real, efetuámos alterações no esquema do SIMULINK, para introduzir ruído gaussiano (com opção de "não repetição") nos sinais relevantes, bem como a opção de replicar perturbações correspondentes às efetuadas no laboratório (toques e, com pequenas alterações, empurrões).

Foi seguida a mesma estratégia do LQR, em que foi testada a influência de cada parâmetro. Apenas se apresentam, em média, cinco valores de cada parâmetro testados de modo a facilitar a visualização dos gráficos; foram, no entanto, testados bastantes mais valores.

Após efetuar as modificações nos parâmetros do LQR e do LQE, o controlo do sistema tornou-se bastante mais eficaz, o que é visível nos gráficos obtidos com os dados dos laboratórios: o pêndulo deixou de cair a meio da simulação (ou apenas caía com perturbações grandes), aumentou a resistência ao ruído e às perturbações externas (com o trade-off de uma resposta mais lenta às perturbações rápidas) e diminuiu o erro quadrático médio, por via da melhoria da convergência de α e de β (através da redução da oscilação vertical).

Analisando os resultados, o controlador que obtivemos está longe de ser o ideal e o mais robusto. No entanto, é uma grande melhoria face ao controlador original.

Quanto ao modelo do sistema, verifica-se que, no geral, o modelo linearizado usado descreve bem o sistema, mas tem imprecisões, verificadas quando os ângulos verticais aumentam, bem como imprecisões na determinação do sinal de controlo do motor.

Para futuras otimizações, seria possível/desejável calcular numericamente os melhores valores para o controlador LQR, seguindo em direção a uma estratégia de "cheap control", calculando para cada uma das hipóteses o erro quadrático médio e achando os valores que o minimizam.

De forma análoga, o mesmo pode ser feito (e encontram-se parcialmente feito para os parâmetros do LQE no script) para que, após fixados os parâmetros do LQR, se determinem os parâmetros do LQE que têm melhor desempenho.

No entanto, tais valores têm sempre de ser verificados e comprovados no sistema real, devido às não-linearidades do mesmo.

4. Conclusão

Este trabalho laboratorial permitiu realizar uma análise mais pormenorizada relativamente à aplicação de sistemas de controlo em espaço de estados, onde para se obter melhores resultados é necessário utilizar-se um controlador e um observador.

Foi possível confirmar os valores obtidos ao nível da simulação com os valores reais (esperados), tendo em consideração o ruído branco gaussiano.

Para testarmos quais os “melhores” valores possíveis, foram realizadas várias iterações de simulação que permitiram aproximar o nosso modelo para um modelo mais “real”.

Esta atividade experimental serviu também como ponte um pouco por todas as aplicações de controladores no mundo real. No contexto da indústria, por exemplo, existe a necessidade da presença de filtros nos sistemas de forma a eliminar o ruído e as variações bruscas nos sinais de saída. É o caso de uma linha de montagem, num elevador ou mesmo num Segway, onde são necessários movimentos exatos e precisos que não prejudiquem a qualidade do produto final, seja ele qual for. É possível obter assim resultados mais suaves, como pudemos verificar nas experiências realizadas neste laboratório quando se ativavam os filtros do sistema.

5. Pergunta Opcional

- Comparação das simulações lineares com o sistema não linear. Tendo em atenção que algumas simulações poderiam não ter um resultado realista

Esta foi uma questão proposta pelo professor durante a primeira e última sessão do laboratório. Como é óbvio fazendo a comparação das simulações lineares com o sistema não linear são obtidos resultados diferentes. Quando o sistema é linear o resultado das simulações aproxima-se mais ao esperado, tal sucede porque caso a resposta do sensor sofra uma transformação afim (linear), onde $y = ax + b$, e para valores de $a \neq 0$ e $b \neq 0$, a saída do sistema vai variar de acordo com os valores de a e b . No entanto, esta transformação não é assim tão crítica para o resultado final, pois apenas afeta ligeiramente a oscilação do pêndulo.