

Case Dynamica 2014

Pieter Van Damme

Wouter Van Gansbeke

Lennert Vanmunster

Ruben Verhulst

27 november 2014

1 Transformatiematrices

1.1 Van het $x'y'z'$ -assenstelsel naar het xyz -assenstelsel

Het $x'y'z'$ assenstel wordt bekomen door het xyz -assenstelsel te roteren met een hoek α rond de x-as. De omgekeerde transformatie draait dus met een negatieve hoek α rond de x-as.

$$R^{x'y'z' \rightarrow xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

1.2 Van het $x'''y'''z'''$ -assenstelsel naar het $x''y''z''$ -assenstelsel

Het $x'''y'''z'''$ -assenstelsel wordt bekomen door het $x''y''z''$ -assenstelsel te roteren met een hoek β rond de y'' -as. De transformatiematrix draait dus met een negatieve hoek β rond de y'' -as.

$$R^{x'''y'''z''' \rightarrow x''y''z''} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

Voor de omgekeerde transformatie wordt deze matrix geïnverteerd.

$$R^{x''y''z'' \rightarrow x'''y'''z'''} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

1.3 Van het $x'''y'''z'''$ -assenstelsel naar het xyz -assenstelsel

Om van het $x'''y'''z'''$ -assenstelsel naar het xyz -assenstelsel te gaan, worden de vorige twee berekende transformatiematrices met elkaar vermenigvuldigd. Eerst worden de $x'''y'''z'''$ -coördinaten getransformeerd naar het $x''y''z''$ -assenstelsel. Vervolgens worden ze omgezet naar het xyz -assenstelsel.

$$\begin{aligned} R^{x'''y'''z''' \rightarrow xyz} &= R^{x'''y'''z''' \rightarrow x''y''z''} R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \cos(\beta) \\ -\cos(\alpha) \sin(\beta) & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2 Kinematica

2.1 Vraag 1

2.1.1 Ogenblikkelijke totale rotatiesnelheidsvector

Om de ogenblikkelijke totale rotatiesnelheidsvector $\vec{\omega}_w$ te bepalen worden de drie afzonderlijke rotatiesnelheidsvectoren uitgedrukt in het wereldassenstelsel en vervolgens opgeteld.

$$\vec{\omega}_{tot} = \vec{\omega}_g + \vec{\omega}_i + \vec{\omega}_w$$

Deze termen worden nu afzonderlijk bepaald.

$$\vec{\omega}_g = R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \vec{\omega}_g' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\alpha) \omega_g \\ \cos(\alpha) \omega_g \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_i = R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \vec{\omega}_i' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \omega_i \\ \sin(\alpha) \omega_i \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_w = R^{x'''y'''z''' \rightarrow xyz} \vec{\omega}_w''' = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \cos(\beta) \\ -\cos(\alpha) \sin(\beta) & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\beta) \omega_w \\ -\sin(\alpha) \sin(\beta) \omega_w \\ \cos(\alpha) \sin(\beta) \omega_w \end{bmatrix}$$

De ogenblikkelijke rotatievector wordt dus weergegeven door de volgende vergelijking.

$$\vec{\omega}_{tot} = \begin{bmatrix} -\cos(\beta) \omega_w \\ \cos(\alpha) \omega_i - \sin(\alpha) (\omega_g + \sin(\beta) \omega_w) \\ \sin(\alpha) \omega_i + \cos(\alpha) (\omega_g + \sin(\beta) \omega_w) \end{bmatrix}$$

2.1.2 Ogenblikkelijke totale rotatieversnellingsvector

De totale rotatieversnellingsvector is de afgeleide van de rotatiesnelheidsvector naar de tijd. Hierbij moeten er termen geïntroduceerd worden die de rotatie van de snelheidsvectoren weergeven.

$$\frac{d\vec{\omega}_{tot}}{dt} = \vec{\alpha}_g + \vec{\alpha}_w + \vec{\alpha}_i + \vec{\omega}_g \times \vec{\omega}_i + \vec{\omega}_g \times \vec{\omega}_w + \vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_w$$

Al deze termen worden nu afzonderlijk bepaald.

$$\vec{\alpha}_g = R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\alpha) \alpha_g \\ \cos(\alpha) \alpha_g \end{bmatrix}$$

$$\vec{\alpha}_i = R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \alpha_i \\ \sin(\alpha) \alpha_i \end{bmatrix}$$

$$\vec{\alpha}_w = R^{x'''y'''z''' \rightarrow xyz} \begin{bmatrix} \alpha_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta)\alpha_w \\ \sin(\alpha)\sin(\beta)\alpha_w \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta)\alpha_w \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_g \times \vec{\omega}_i = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_i\omega_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_g \times \vec{\omega}_w = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ \omega_{wx} & \omega_{wy} & \omega_{wz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos(\alpha)\cos(\beta)\omega_g\omega_w \\ -\sin(\alpha)\cos(\beta)\omega_g\omega_w \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_w = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \\ \omega_{wx} & \omega_{wy} & \omega_{wz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\beta)\omega_i\omega_w \\ -\sin(\alpha)\cos(\beta)\omega_i\omega_w \\ \cos(\beta)\cos(\beta)\omega_i\omega_w \end{bmatrix}$$

De totale ogenblikkelijke rotatieversnellingsvector wordt dus door de volgende formule gegeven.

$$\vec{\alpha}_{tot} = \frac{d\vec{\omega}_{tot}}{dt} = \begin{bmatrix} \cos(\beta)\alpha_w - \omega_g\omega_i + \sin(\beta)\omega_i\omega_w \\ -\sin(\alpha)\alpha_g + \cos(\alpha)\alpha_i + \sin(\alpha)\sin(\beta)\alpha_w - \cos(\alpha)\cos(\beta)\omega_g\omega_w - \sin(\alpha)\sin(\beta)\omega_i\omega_w \\ \cos(\alpha)\alpha_g + \sin(\alpha)\alpha_i - \cos(\alpha)\sin(\beta)\alpha_w - \sin(\alpha)\cos(\beta)\omega_g\omega_w + \cos(\alpha)\cos(\beta)\omega_i\omega_w \end{bmatrix}$$

2.2 Vraag 2

2.2.1 De ogenblikkelijke snelheid

De snelheid van C kan beschouwd worden als de som van de relatieve snelheid van het punt C in het $x'y'z'$ -assenstelsel en de snelheid van dat assenstelsel. In dit assenstelsel kan de beweging van C beschouwd worden als een som van rotaties, nl. een rotatie rond het punt A door $\vec{\omega}_g$ en een rotatie rond het punt B door $\vec{\omega}_i$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_g \times (\vec{r}_C - \vec{r}_A) + \vec{\omega}_i \times (\vec{r}_C - \vec{r}_B)$$

Deze termen worden afzonderlijk bepaald.

$$\vec{v}_A = R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \begin{bmatrix} 0 \\ v_v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_v \cos(\alpha) \\ v_v \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_C - \vec{r}_A = \begin{bmatrix} r_{CAx} \\ r_{CAy} \\ r_{CAz} \end{bmatrix} = R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \begin{bmatrix} l_1 - l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) \\ 0 \\ l_2 - l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 - l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) \\ -\sin(\alpha)(l_2 - l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ \cos(\alpha)(l_2 - l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_g \times (\vec{r}_C - \vec{r}_A) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ r_{CAx} & r_{CAy} & r_{CAz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_g \cos(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) \\ -\omega_g \sin(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_C - \vec{r}_B = \begin{bmatrix} r_{CBx} \\ r_{CBy} \\ r_{CBz} \end{bmatrix} = R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \begin{bmatrix} -l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) \\ 0 \\ -l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) \\ -\sin(\alpha) (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ \cos(\alpha) (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_i \times (\vec{r}_C - \vec{r}_B) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \\ r_{CBx} & r_{CBy} & r_{CBz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_i (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ -\omega_i \sin(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \\ \omega_i \cos(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

De totale snelheid wordt dus gegeven door de volgende gelijkheid.

$$\vec{v}_C = \begin{bmatrix} \omega_i (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ \cos(\alpha) v_v - \omega_g \cos(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) - \omega_i \sin(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \\ \sin(\alpha) v_v - \omega_g \sin(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) + \omega_i \cos(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

2.2.2 De ogenblikkelijke versnelling

De ogenblikkelijke versnelling is de afgeleide van de ogenblikkelijke snelheid. Hierbij moet er zeker rekening gehouden worden met het afzonderlijk afleiden van de leden van de kruisproducten.

$$\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}_g}{dt} \times (\vec{r}_C - \vec{r}_A) + \vec{\omega}_g \times (\vec{v}_C - \vec{v}_A) + \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} \times (\vec{r}_C - \vec{r}_B) + \vec{\omega}_i \times (\vec{v}_C - \vec{v}_B)$$

Al deze termen worden opnieuw apart berekend.

$$\vec{a}_A = R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \begin{bmatrix} 0 \\ a_v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_v \cos(\alpha) \\ a_v \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\vec{\omega}_g}{dt} = \alpha g = R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\alpha) \alpha g \\ \cos(\alpha) \alpha g \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\vec{\omega}_g}{dt} \times (\vec{r}_C - \vec{r}_A) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{d\vec{\omega}_g}{dt} x & \frac{d\vec{\omega}_g}{dt} y & \frac{d\vec{\omega}_g}{dt} z \\ r_{CAx} & r_{CAy} & r_{CAz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \alpha g (-l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) + l_1) \\ \sin(\alpha) \alpha g (-l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) + l_1) \end{bmatrix}$$

2.3 Vraag 3

2.4 Vraag 4

3 Dynamica

3.1 Vraag 1

3.2 Vraag 2

3.3 Vraag 3

3.4 Vraag 4

3.5 Vraag 5