

# Case Dynamica 2014

Pieter Van Damme

Wouter Van Gansbeke  
Ruben Verhulst

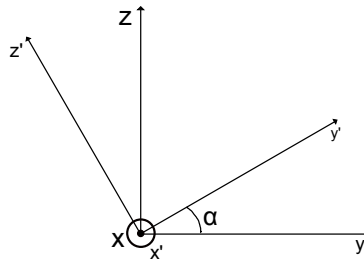
Lennert Vanmunster

27 november 2014

## 1 Transformatiematrices

### 1.1 Van het $x'y'z'$ -assenstelsel naar het $xyz$ -assenstelsel

Het  $x'y'z'$  assenstelsel wordt bekomen door het  $xyz$ -assenstelsel te roteren met een hoek  $\alpha$  rond de x-as. De omgekeerde transformatie draait dus met een negatieve hoek  $\alpha$  rond de x-as. Het  $x''y''z''$ -assenstelsel heeft dezelfde oriëntatie als het  $x'y'z'$ -assenstelsel. Hun transformatiematrices zijn daarom hetzelfde.



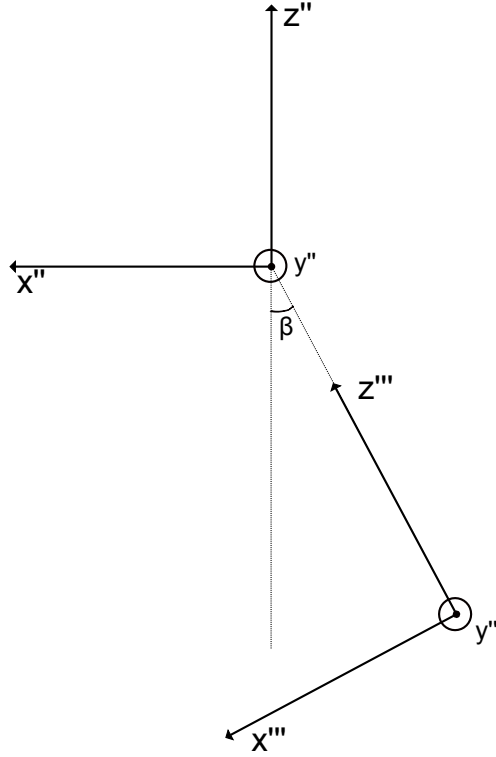
Figuur 1: Het  $x'y'z'$ -assenstelsel

$$R^{x'y'z' \rightarrow xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

### 1.2 Van het $x'''y'''z'''$ -assenstelsel naar het $x''y''z''$ -assenstelsel

Het  $x'''y'''z'''$ -assenstelsel wordt bekomen door het  $x''y''z''$ -assenstelsel te roteren met een hoek  $\beta$  rond de  $y''$ -as. De transformatiematrix draait dus met een negatieve hoek  $\beta$  rond de  $y'''$ -as. Deze transformatiematrix kan ook gebruikt worden om coördinaten naar het  $x'y'z'$ -assenstelsel te converteren. De oriëntatie van het  $x'y'z'$ -assenstelsel en van het  $x''y''z''$ -assenstelsel is immers hetzelfde.

$$R^{x'''y'''z''' \rightarrow x''y''z''} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$



Figuur 2: Het  $x'''y'''z'''$ -assenstelsel

Voor de omgekeerde transformatie wordt deze matrix geïnverteerd.

$$R^{x''y''z'' \rightarrow x'''y'''z'''} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

### 1.3 Van het $x'''y'''z'''$ -assenstelsel naar het $xyz$ -assenstelsel

Om van het  $x'''y'''z'''$ -assenstelsel naar het  $xyz$ -assenstelsel te gaan, worden de vorige twee berekende transformatiematrices met elkaar vermenigvuldigd. Eerst worden de  $x'''y'''z'''$ -coördinaten getransformeerd naar het  $x''y''z''$ -assenstelsel. Vervolgens worden ze omgezet naar het  $xyz$ -assenstelsel.

$$\begin{aligned} R^{x'''y'''z''' \rightarrow xyz} &= R^{x'''y'''z''' \rightarrow x''y''z''} R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \cos(\beta) \\ -\cos(\alpha) \sin(\beta) & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 2 Kinematica

### 2.1 Vraag 1

#### 2.1.1 Ogenblikkelijke totale rotatiesnelheidsvector

Om de ogenblikkelijke totale rotatiesnelheidsvector  $\vec{\omega}_w$  te bepalen worden de drie afzonderlijke rotatiesnelheidsvectoren uitgedrukt in het wereldassenstelsel en vervolgens opgeteld.

$$\vec{\omega}_{tot} = \vec{\omega}_g + \vec{\omega}_i + \vec{\omega}_w$$

Deze termen worden nu afzonderlijk bepaald.

$$\vec{\omega}_g = R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \vec{\omega}'_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\alpha) \omega_g \\ \cos(\alpha) \omega_g \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_i = R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \vec{\omega}'_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \omega_i \\ \sin(\alpha) \omega_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_w &= R^{x'''y'''z''' \rightarrow xyz} \vec{\omega}'''_w = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \cos(\beta) \\ -\cos(\alpha) \sin(\beta) & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\cos(\beta) \omega_w \\ -\sin(\alpha) \sin(\beta) \omega_w \\ \cos(\alpha) \sin(\beta) \omega_w \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De ogenblikkelijke rotatievector wordt dus weergegeven door de volgende vergelijking.

$$\vec{\omega}_{tot} = \begin{bmatrix} -\cos(\beta) \omega_w \\ \cos(\alpha) \omega_i - \sin(\alpha)(\omega_g + \sin(\beta) \omega_w) \\ \sin(\alpha) \omega_i + \cos(\alpha)(\omega_g + \sin(\beta) \omega_w) \end{bmatrix}$$

#### 2.1.2 Ogenblikkelijke totale rotatieversnellingsvector

De totale rotatieversnellingsvector is de afgeleide van de rotatiesnelheidsvector naar de tijd. Hierbij moeten er termen geïntroduceerd worden die de rotatie van de snelheidsvectoren weergeven.

$$\vec{\alpha}_{tot} = \frac{d\vec{\omega}_{tot}}{dt} = \vec{\alpha}_g + \vec{\alpha}_w + \vec{\alpha}_i + \vec{\omega}_g \times \vec{\omega}_i + \vec{\omega}_g \times \vec{\omega}_w + \vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_w$$

Al deze termen worden nu afzonderlijk bepaald.

$$\vec{\alpha}_g = R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\alpha) \alpha_g \\ \cos(\alpha) \alpha_g \end{bmatrix}$$

$$\vec{\alpha}_i = R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\alpha)\alpha_i \\ \sin(\alpha)\alpha_i \end{bmatrix}$$

$$\vec{\alpha}_w = R^{x'''y'''z''' \rightarrow xyz} \begin{bmatrix} \alpha_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta)\alpha_w \\ \sin(\alpha)\sin(\beta)\alpha_w \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta)\alpha_w \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_g \times \vec{\omega}_i = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_i\omega_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_g \times \vec{\omega}_w = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ \omega_{wx} & \omega_{wy} & \omega_{wz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos(\alpha)\cos(\beta)\omega_g\omega_w \\ -\sin(\alpha)\cos(\beta)\omega_g\omega_w \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_w = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \\ \omega_{wx} & \omega_{wy} & \omega_{wz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\beta)\omega_i\omega_w \\ -\sin(\alpha)\cos(\beta)\omega_i\omega_w \\ \cos(\beta)\cos(\beta)\omega_i\omega_w \end{bmatrix}$$

De totale ogenblikkelijke rotatieversnellingsvector wordt dus door de volgende formule gegeven.

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_{tot} &= \frac{d\vec{\omega}_{tot}}{dt} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\beta)\alpha_w - \omega_g\omega_i + \sin(\beta)\omega_i\omega_w \\ -\sin(\alpha)\alpha_g + \cos(\alpha)\alpha_i + \sin(\alpha)\sin(\beta)\alpha_w - \cos(\alpha)\cos(\beta)\omega_g\omega_w - \sin(\alpha)\sin(\beta)\omega_i\omega_w \\ \cos(\alpha)\alpha_g + \sin(\alpha)\alpha_i - \cos(\alpha)\sin(\beta)\alpha_w - \sin(\alpha)\cos(\beta)\omega_g\omega_w + \cos(\alpha)\cos(\beta)\omega_i\omega_w \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 2.2 Vraag 2

### 2.2.1 De ogenblikkelijke snelheid

De snelheid van C kan beschouwd worden als de som van de relatieve snelheid van het punt C in het  $x'y'z'$ -assenstelsel en de snelheid van dat assenstelsel. In dit assenstelsel kan de beweging van C beschouwd worden als een som van rotaties, nl. een rotatie rond het punt A door  $\vec{\omega}_g$  en een rotatie rond het punt B door  $\vec{\omega}_i$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_g \times (\vec{r}_C - \vec{r}_A) + \vec{\omega}_i \times (\vec{r}_C - \vec{r}_B)$$

Deze termen worden afzonderlijk bepaald.

$$\vec{v}_A = R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \begin{bmatrix} 0 \\ v_v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_v \cos(\alpha) \\ v_v \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_C - \vec{r}_A = \begin{bmatrix} r_{CAx} \\ r_{CAy} \\ r_{CAz} \end{bmatrix} = R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \begin{bmatrix} l_1 - l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) \\ 0 \\ l_2 - l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 - l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) \\ -\sin(\alpha)(l_2 - l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ \cos(\alpha)(l_2 - l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_g \times (\vec{r}_C - \vec{r}_A) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ r_{CAx} & r_{CAy} & r_{CAz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_g \cos(\alpha)(l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) \\ -\omega_g \sin(\alpha)(l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_C - \vec{r}_B = \begin{bmatrix} r_{CBx} \\ r_{CBy} \\ r_{CBz} \end{bmatrix} = R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \begin{bmatrix} -l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) \\ 0 \\ -l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) \\ -\sin(\alpha)(-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ \cos(\alpha)(-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_i \times (\vec{r}_C - \vec{r}_B) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \\ r_{CBx} & r_{CBy} & r_{CBz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_i (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ -\omega_i \sin(\alpha)(l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \\ \omega_i \cos(\alpha)(l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

De totale snelheid wordt dus gegeven door de volgende gelijkheid.

$$\vec{v}_C = \begin{bmatrix} \omega_i (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ \cos(\alpha) v_v - \omega_g \cos(\alpha)(l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) - \omega_i \sin(\alpha)(l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \\ \sin(\alpha) v_v - \omega_g \sin(\alpha)(l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) + \omega_i \cos(\alpha)(l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

### 2.2.2 De ogenblikkelijke versnelling

De ogenblikkelijke versnelling is de afgeleide van de ogenblikkelijke snelheid. Hierbij moet er zeker rekening gehouden worden met het afzonderlijk afleiden van de leden van de kruisproducten.

$$\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}_g}{dt} \times (\vec{r}_C - \vec{r}_A) + \vec{\omega}_g \times (\vec{v}_C - \vec{v}_A) + \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} \times (\vec{r}_C - \vec{r}_B) + \vec{\omega}_i \times (\vec{v}_C - \vec{v}_B)$$

Al deze termen worden opnieuw apart berekend.

$$\vec{a}_A = R^{x'y'z' \rightarrow xyz} \begin{bmatrix} 0 \\ a_v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_v \cos(\alpha) \\ a_v \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\vec{\omega}_g}{dt} = \alpha_g = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\alpha)\alpha_g \\ \cos(\alpha)\alpha_g \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\vec{\omega}_g}{dt} \times (\vec{r}_C - \vec{r}_A) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{d\vec{\omega}_g}{dt} x & \frac{d\vec{\omega}_g}{dt} y & \frac{d\vec{\omega}_g}{dt} z \\ r_{CAx} & r_{CAy} & r_{CAz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\alpha)\alpha_g(-l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) + l_1) \\ \sin(\alpha)\alpha_g(-l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) + l_1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_C - \vec{v}_A &= \begin{bmatrix} v_{CAx} \\ v_{CAy} \\ v_{CAz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega_i (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ -\omega_g \cos(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) - \omega_i \sin(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \\ -\omega_g \sin(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) + \omega_i \cos(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\vec{\omega}_g \times (\vec{v}_C - \vec{v}_A) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ v_{CAx} & v_{CAy} & v_{CAz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_g^2 (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) \\ \omega_g \omega_i \cos(\alpha) (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ \omega_g \omega_i \sin(\alpha) (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\vec{\omega}_i}{dt} = \vec{\alpha}_i + \vec{\omega}_g \times \vec{\omega}_i = \begin{bmatrix} -\omega_g \omega_i \\ \cos(\alpha) \alpha_i \\ \sin(\alpha) \alpha_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\omega}_i}{dt} \times (\vec{r}_C - \vec{r}_B) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} x & \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} y & \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} z \\ r_{CBx} & r_{CB y} & r_{CBz} \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_i (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ \sin(\beta) \cos(\alpha) l_4 \omega_g \omega_i - \cos(\beta) \cos(\alpha) l_3 \omega_g \omega_i \cdots \\ \cdots - \sin(\beta) \sin(\alpha) l_3 \alpha_i - \cos(\beta) \sin(\alpha) l_4 \alpha_i \\ \sin(\beta) \sin(\alpha) l_4 \omega_g \omega_i - \cos(\beta) \sin(\alpha) l_3 \omega_g \omega_i \cdots \\ \cdots + \sin(\beta) \cos(\alpha) l_3 \alpha_i + \cos(\beta) \cos(\alpha) l_4 \alpha_i \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_g \times (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) v_v + \cos(\alpha) \omega_g l_1 \\ \sin(\alpha) v_v + \sin(\alpha) \omega_g l_1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_C - \vec{v}_B = \begin{bmatrix} \omega_i (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ -\omega_g \cos(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) - \omega_i \sin(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) - \cos(\alpha) \omega_g l_1 \\ -\omega_g \sin(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) + \omega_i \cos(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) - \sin(\alpha) \omega_g l_1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_i \times (\vec{v}_C - \vec{v}_B) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \\ v_{CBx} & v_{CB y} & v_{CBz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_i^2 (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \\ \sin(\alpha) \omega_i^2 (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ -\cos(\alpha) \omega_i^2 (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

Dit wordt nu allemaal opgeteld.

$$\vec{a}_C = \begin{bmatrix} \omega_g^2 (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) + \alpha_i (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \cdots \\ \cdots + \omega_i^2 (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \\ a_v \cos(\alpha) + \cos(\alpha) \alpha_g (-l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) + l_1) + \omega_g \omega_i \cos(\alpha) (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \cdots \\ \cdots + \sin(\beta) \cos(\alpha) l_4 \omega_g \omega_i - \cos(\beta) \cos(\alpha) l_3 \omega_g \omega_i - \sin(\beta) \sin(\alpha) l_3 \alpha_i - \cos(\beta) \sin(\alpha) l_4 \alpha_i \cdots \\ \cdots + \sin(\alpha) \omega_i^2 (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ a_v \sin(\alpha) + \sin(\alpha) \alpha_g (-l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) + l_1) + \omega_g \omega_i \sin(\alpha) (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \cdots \\ \cdots + \sin(\beta) \sin(\alpha) l_4 \omega_g \omega_i - \cos(\beta) \sin(\alpha) l_3 \omega_g \omega_i + \sin(\beta) \cos(\alpha) l_3 \alpha_i + \cos(\beta) \cos(\alpha) l_4 \alpha_i \cdots \\ \cdots - \cos(\alpha) \omega_i^2 (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

### 2.3 Vraag 3

Om de bijdrage van de coriolisversnelling te bepalen kan de volgende formule gebruikt worden.

$$\overrightarrow{a_{coriolis}} = -2(\vec{\omega} \times \vec{v_{rel}})$$

Om de versnelling van het voorwerp te beschrijven, wordt  $\omega$  gelijkgesteld aan  $\omega_i$ . De relatieve snelheid in dit assenstelsel is de rotatiesnelheid van C rond B.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_i$$

$$\vec{v_{rel}} = \vec{\omega}_i \times (\vec{r_C} - \vec{r_B}) = \begin{bmatrix} -\omega_i (l_3 \cos(\beta) - l_4 \sin(\beta)) \\ -\omega_i \sin(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \\ \omega_i \cos(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{a_{coriolis}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \cos(\alpha) \omega_g \omega_i (l_3 \cos(\beta) - l_4 \sin(\beta)) \\ 2 \sin(\alpha) \omega_g \omega_i (l_3 \cos(\beta) - l_4 \sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

### 2.4 Vraag 4

#### 2.4.1 Ogenblikkelijke snelheid

Voor het berekenen van de snelheid van D wordt een gelijkaardige methode gebruikt als voor de snelheid van C. Aangezien D zich niet op het wiel bevindt, heeft de rotatie van het wiel nog steeds geen invloed op de snelheid.

$$\vec{v_D} = \vec{v_A} + \vec{\omega_g} \times (\vec{r_D} - \vec{r_A}) + \vec{\omega_i} \times (\vec{r_D} - \vec{r_B})$$

$$\begin{aligned} \vec{r_D} - \vec{r_A} &= (\vec{r_D} - \vec{r_C}) + (\vec{r_C} - \vec{r_A}) \\ &= R^{x'''y'''z''' \rightarrow xyz} \begin{bmatrix} \frac{3}{4}l_4 \\ 0 \\ \frac{1}{4}l_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{CAx} \\ r_{CAy} \\ r_{CAz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1/4 l_4 \cos(\beta) - 3/4 l_3 \sin(\beta) + l_1 \\ 3/4 \sin(\beta) \sin(\alpha) l_4 - 1/4 \cos(\beta) \sin(\alpha) l_3 - \sin(\alpha) (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta) + l_2) \\ -3/4 \sin(\beta) \cos(\alpha) l_4 + 1/4 \cos(\beta) \cos(\alpha) l_3 + \cos(\alpha) (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta) + l_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{\omega_g} \times (\vec{r_D} - \vec{r_A}) = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ v_{DAx} & v_{DAy} & v_{DAz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/4 \omega_g \cos(\alpha) (3 l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - 4 l_1) \\ -1/4 \omega_g \sin(\alpha) (3 l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - 4 l_1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{r_D} - \vec{r_B} &= (\vec{r_D} - \vec{r_C}) + (\vec{r_C} - \vec{r_B}) \\ &= \begin{bmatrix} -1/4 l_4 \cos(\beta) - 3/4 l_3 \sin(\beta) \\ 3/4 \sin(\beta) \sin(\alpha) l_4 - 1/4 \cos(\beta) \sin(\alpha) l_3 - \sin(\alpha) (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ -3/4 \sin(\beta) \cos(\alpha) l_4 + 1/4 \cos(\beta) \cos(\alpha) l_3 + \cos(\alpha) (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{\omega}_i \times (\vec{r}_D - \vec{r}_B) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \\ v_{DBx} & v_{DBy} & v_{DBz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 \omega_i (3 l_3 \cos(\beta) - l_4 \sin(\beta)) \\ 1/4 \omega_i \sin(\alpha) (3 l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \\ 1/4 \omega_i \cos(\alpha) (3 l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

De totale snelheid van D wordt dus door de volgende gelijkheid gegeven.

$$\vec{v}_D = \begin{bmatrix} -1/4 \omega_i (3 l_3 \cos(\beta) - l_4 \sin(\beta)) \\ \cos(\alpha) v_v - 1/4 \omega_g \cos(\alpha) (3 l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - 4 l_1) - 1/4 \omega_i \sin(\alpha) (3 l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \\ \sin(\alpha) v_v - 1/4 \omega_g \sin(\alpha) (3 l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - 4 l_1) + 1/4 \omega_i \cos(\alpha) (3 l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

### 2.4.2 Ogenblikkelijke versnelling

Ook voor de ogenblikkelijke versnelling van D wordt een gelijkaardige methode gebruikt als voor C.

$$\vec{a}_D = \frac{d\vec{v}_D}{dt} = \vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}_g}{dt} \times (\vec{r}_D - \vec{r}_A) + \vec{\omega}_g \times (\vec{v}_D - \vec{v}_A) + \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} \times (\vec{r}_D - \vec{r}_B) + \vec{\omega}_i \times (\vec{v}_D - \vec{v}_B)$$

Opnieuw worden al deze termen afzonderlijk uitgerekend.

$$\vec{a}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ a_v \cos(\alpha) \\ a_v \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\vec{\omega}_g}{dt} \times (\vec{r}_D - \vec{r}_A) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{d\vec{\omega}_g}{dt} x & \frac{d\vec{\omega}_g}{dt} y & \frac{d\vec{\omega}_g}{dt} z \\ r_{DAx} & r_{DAy} & r_{DAz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/4 \alpha_g \cos(\alpha) (3 l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - 4 l_1) \\ -1/4 \alpha_g \sin(\alpha) (3 l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - 4 l_1) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_g \times (\vec{v}_D - \vec{v}_A) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ v_{DAx} & v_{DAy} & v_{DAz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \omega_g^2 (3 l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - 4 l_1) \\ 1/4 \cos(\alpha) \omega_g \omega_i (l_4 \sin(\beta) - 3 l_3 \cos(\beta)) \\ 1/4 \sin(\alpha) \omega_g \omega_i (l_4 \sin(\beta) - 3 l_3 \cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} \times (\vec{r}_D - \vec{r}_B) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} x & \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} y & \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} z \\ r_{DBx} & r_{DBy} & r_{DBz} \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/4 \alpha_i (l_4 \sin(\beta) - 3 l_3 \cos(\beta)) \\ 1/4 \sin(\beta) \cos(\alpha) l_4 \omega_g \omega_i - 3/4 \cos(\beta) \cos(\alpha) l_3 \omega_g \omega_i \cdots \\ \cdots - 3/4 \sin(\beta) \sin(\alpha) l_3 \alpha_i - 1/4 \cos(\beta) \sin(\alpha) l_4 \alpha_i \\ 1/4 \sin(\beta) \sin(\alpha) l_4 \omega_g \omega_i - 3/4 \cos(\beta) \sin(\alpha) l_3 \omega_g \omega_i \cdots \\ \cdots + 3/4 \sin(\beta) \cos(\alpha) l_3 \alpha_i + 1/4 \cos(\beta) \cos(\alpha) l_4 \alpha_i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{\omega}_i \times (\vec{v}_D - \vec{v}_B) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \\ v_{DBx} & v_{DBy} & v_{DBz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \omega_i^2 (3 l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \\ 1/4 \omega_i \sin(\alpha) (\sin(\beta) l_4 \omega_i - 3 \cos(\beta) l_3 \omega_i + 4 \sin(\alpha) \omega_g l_2) \\ -1/4 \omega_i \cos(\alpha) (\sin(\beta) l_4 \omega_i - 3 \cos(\beta) l_3 \omega_i + 4 \sin(\alpha) \omega_g l_2) \end{bmatrix}$$



Dit wordt allemaal opgeteld.

$$\vec{a_D} = \begin{bmatrix} 1/4 \omega_g^2 (3 l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - 4 l_1) + 1/4 \alpha_i (l_4 \sin(\beta) - 3 l_3 \cos(\beta)) \cdots \\ \cdots + 1/4 \omega_i^2 (3 l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \\ a_v \cos(\alpha) - 1/4 \alpha_g \cos(\alpha) (3 l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - 4 l_1) \cdots \\ \cdots + 1/4 \cos(\alpha) \omega_g \omega_i (l_4 \sin(\beta) - 3 l_3 \cos(\beta)) + 1/4 \sin(\beta) \cos(\alpha) l_4 \omega_g \omega_i \cdots \\ \cdots - 3/4 \cos(\beta) \cos(\alpha) l_3 \omega_g \omega_i - 3/4 \sin(\beta) \sin(\alpha) l_3 \alpha_i \cdots \\ \cdots - 1/4 \cos(\beta) \sin(\alpha) l_4 \alpha_i + 1/4 \omega_i \sin(\alpha) (\sin(\beta) l_4 \omega_i - 3 \cos(\beta) l_3 \omega_i + 4 \sin(\alpha) \omega_g l_2) \\ a_v \sin(\alpha) - 1/4 \alpha_g \sin(\alpha) (3 l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - 4 l_1) \cdots \\ \cdots + 1/4 \sin(\alpha) \omega_g \omega_i (l_4 \sin(\beta) - 3 l_3 \cos(\beta)) + 1/4 \sin(\beta) \sin(\alpha) l_4 \omega_g \omega_i \cdots \\ \cdots - 3/4 \cos(\beta) \sin(\alpha) l_3 \omega_g \omega_i + 3/4 \sin(\beta) \cos(\alpha) l_3 \alpha_i \cdots \\ + 1/4 \cos(\beta) \cos(\alpha) l_4 \alpha_i - 1/4 \omega_i \cos(\alpha) (\sin(\beta) l_4 \omega_i - 3 \cos(\beta) l_3 \omega_i + 4 \sin(\alpha) \omega_g l_2) \end{bmatrix}$$

### 3 Dynamica

#### 3.1 Vraag 1

##### 3.1.1 Ogenblikkelijke impulsvector landingsgestel

$$\vec{p}_l = m_l \vec{v}_D = \begin{bmatrix} 1/4 m_l \omega_i (l_4 \sin(\beta) - 3 l_3 \cos(\beta)) \\ -1/4 m_l (3 \sin(\beta) \sin(\alpha) l_3 \omega_i + 3 \sin(\beta) \cos(\alpha) l_3 \omega_g + \cos(\beta) \sin(\alpha) l_4 \omega_i + \cos(\beta) \cos(\alpha) l_4 \omega_g) \\ -1/4 m_l (3 \sin(\beta) \sin(\alpha) l_3 \omega_g - 3 \sin(\beta) \cos(\alpha) l_3 \omega_i + \cos(\beta) \sin(\alpha) l_4 \omega_g - \cos(\beta) \cos(\alpha) l_4 \omega_i) \end{bmatrix}$$

##### 3.1.2 Verandering impulsvector landingsgestel

$$\frac{d\vec{p}_l}{dt} = m_l \vec{a}_D = \begin{bmatrix} 1/4 m_l (3 \sin(\beta) \omega_i^2 - 3 \sin(\beta) \cos(\alpha) l_3 \omega_g \omega_i + 3 \cos(\beta) \sin(\alpha) l_3 \omega_i^2 + 6 \cos(\beta) \cos(\alpha) l_3 \omega_g \omega_i - 3 \cos(\beta) \sin(\alpha) l_4 \omega_i^2 - 6 \cos(\beta) \cos(\alpha) l_4 \omega_g \omega_i) \\ -1/4 m_l (-\sin(\beta) \sin(\alpha) l_4 \omega_i^2 - 2 \sin(\beta) \cos(\alpha) l_4 \omega_g \omega_i + 3 \cos(\beta) \sin(\alpha) l_3 \omega_i^2 + 6 \cos(\beta) \cos(\alpha) l_3 \omega_g \omega_i - \cos(\beta) \sin(\alpha) l_4 \omega_i^2 - 6 \cos(\beta) \cos(\alpha) l_4 \omega_g \omega_i) \\ -1/4 m_l (-2 \sin(\beta) \sin(\alpha) l_4 \omega_g \omega_i + \sin(\beta) \cos(\alpha) l_4 \omega_i^2 + 6 \cos(\beta) \sin(\alpha) l_3 \omega_g \omega_i - 3 \cos(\beta) \cos(\alpha) l_3 \omega_i^2 - 6 \cos(\beta) \cos(\alpha) l_4 \omega_g \omega_i + 3 \cos(\beta) \sin(\alpha) l_4 \omega_i^2) \end{bmatrix}$$

##### 3.1.3 Ogenblikkelijke impulsvector wiel

$$\vec{p}_w = m_w \vec{v}_C = \begin{bmatrix} m_w \omega_i (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ m_w (-\sin(\beta) \sin(\alpha) l_3 \omega_i - \sin(\beta) \cos(\alpha) l_3 \omega_g - \cos(\beta) \sin(\alpha) l_4 \omega_i - \cos(\beta) \cos(\alpha) l_4 \omega_g) \\ m_w (-\sin(\beta) \sin(\alpha) l_3 \omega_g + \sin(\beta) \cos(\alpha) l_3 \omega_i - \cos(\beta) \sin(\alpha) l_4 \omega_g + \cos(\beta) \cos(\alpha) l_4 \omega_i) \end{bmatrix}$$

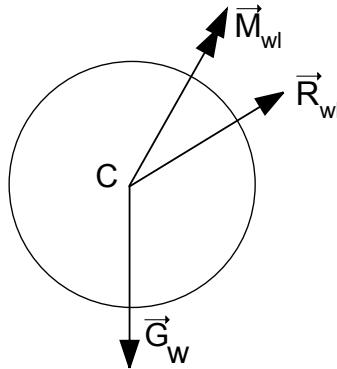
##### 3.1.4 Verandering impulsvector wiel

$$\frac{d\vec{p}_w}{dt} = m_w \vec{a}_C = \begin{bmatrix} m_w (\sin(\beta) l_3 \omega_g^2 + \sin(\beta) \cos(\alpha) l_3 \omega_i^2 - 2 \sin(\beta) \cos(\alpha) l_3 \omega_g \omega_i - \cos(\beta) \sin(\alpha) l_4 \omega_i^2 - 2 \cos(\beta) \cos(\alpha) l_4 \omega_g \omega_i + \cos(\beta) \sin(\alpha) l_4 \omega_i^2) \\ m_w (\sin(\beta) \sin(\alpha) l_4 \omega_i^2 + 2 \sin(\beta) \cos(\alpha) l_4 \omega_g \omega_i - \cos(\beta) \sin(\alpha) l_3 \omega_i^2 - 2 \cos(\beta) \cos(\alpha) l_3 \omega_g \omega_i + \cos(\beta) \sin(\alpha) l_4 \omega_i^2) \\ m_w (2 \sin(\beta) \sin(\alpha) l_4 \omega_g \omega_i - \sin(\beta) \cos(\alpha) l_4 \omega_i^2 - 2 \cos(\beta) \sin(\alpha) l_3 \omega_g \omega_i + \cos(\beta) \cos(\alpha) l_3 \omega_i^2 + 2 \cos(\beta) \cos(\alpha) l_4 \omega_g \omega_i - \cos(\beta) \sin(\alpha) l_4 \omega_i^2) \end{bmatrix}$$

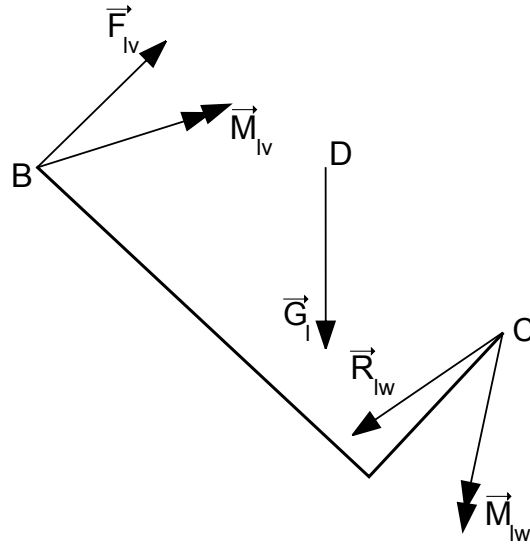
#### 3.2 Vraag 2

##### 3.2.1 Ogenblikkelijke impulsmomentvector landingsgestel rond massacentrum

Vrijlichaamsdiagrammen wiel en landingsgestel



Figuur 3: Het vrijlichaamsdiagram van het wiel



Figuur 4: Het vrijlichaamsdiagram van het landingsgestel

### 3.3 Vraag 3

Om de kracht op de vleugel door het landingsgestel te berekenen is het door een gebrek aan gegevens niet mogelijk om meteen de vleugel vrij te maken. Daar spelen te veel onbekende krachten op in. Het is wel mogelijk om de kracht van de vleugel op het landingsgestel te berekenen. Wegens de 3<sup>de</sup> wet van Newton is deze gelijk aan de omgekeerde kracht van het landingsgestel op de vleugel. Het krachtenevenwicht van het landingsgestel is volledig bepaald als de kracht van het wiel op het landingsgestel bekend is. Het wiel wordt dus als eerste volledig vrijgemaakt.

#### 3.3.1 Het wiel

OP het wiel werken twee krachten in, namelijk het gewicht en de kracht van het landingsgestel op het wiel. De som van deze twee krachten is gelijk aan de verandering van de impuls van het wiel.

$$\vec{G}_w + \vec{R}_{wl} = \frac{d\vec{p}_w}{dt}$$

In een vorige opgave is de verandering van het impuls al eens berekend. Het gewicht wordt gegeven door de volgende formule.

$$\vec{G}_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -gm_w \end{bmatrix}$$

De kracht  $\vec{R}_{wl}$  wordt nu berekend en omgekeerd om de gewenste kracht  $\vec{R}_{lw}$  te bekomen.

#### 3.3.2 Het landingsgestel

Op het landingsgestel werken er drie krachten. De eerste kracht is natuurlijk het gewicht van het landingsgestel zelf. Vervolgens is er nog de kracht omwille van het wiel die in het vorige deel

werd berekend en de kracht door de vleugel. Deze laatste kracht wordt berekend en omgedraaid om de gevraagde kracht te bekomen.

$$\vec{G}_l + \vec{R}_{lw} + \vec{F}_{lv} = \frac{d\vec{p}_l}{dt}$$

Van deze termen is er maar één onbekend, namelijk de kracht door de vleugel. De vergelijking wordt dus opgelost naar deze term en de oplossing wordt omgedraaid. Dit is de gevraagde kracht van het landingsgestel op de vleugel.

### **3.4 Vraag 4**

### **3.5 Vraag 5**