Case Dynamica 2014

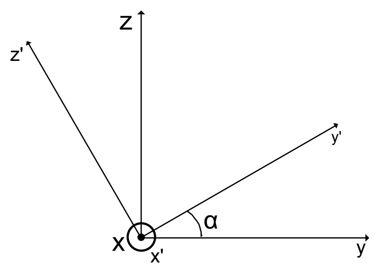
Pieter Van Damme Wouter Van Gansbeke Lennert Vanmunster
Ruben Verhulst

27 november 2014

1 Transformatiematrices

1.1 Van het $x'y'z'$-assenstelstel naar het xyz-assenstelsel

Het $x'y'z'$ assenstelsel wordt bekomen door het xyz-assenstelsel te roteren met een hoek α rond de x-as. De omgekeerde transformatie draait dus met een negatieve hoek α rond de x-as. Het $x''y''z''$-assenstelsel heeft dezelfde oriëntatie als het $x'y'z'$-assenstelsel. Hun transformatiematrices zijn daarom hetzelfde.



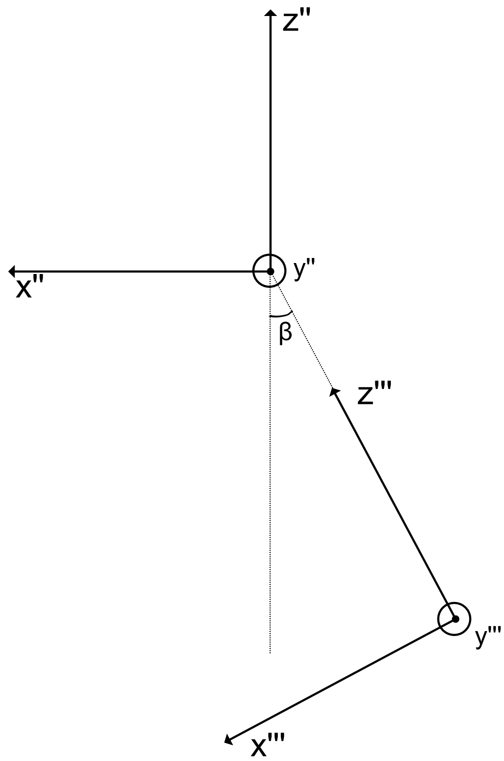
Figuur 1: Het $x'y'z'$-assenstelsel

$$R^{x'y'z' \to xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

1.2 Van het $x'''y'''z'''$-assenstelsel naar het $x''y''z''$-assenstelsel

Het $x'''y'''z'''$-assenstelsel wordt bekomen door het $x''y''z''$-assenstelsel te roteren met een hoek β rond de y''-as. De transformatiematrix draait dus met een negatieve hoek β rond de y'''-as. Deze transformatiematrix kan ook gebruikt worden om cordinaten naar het $x'y'z'$-assenstelsel te converteren. De oriëntatie van het $x'y'z'$-assentstelsel en van het $x''y''z''$-assenstelsel is immers hetzelfde.

$$R^{x'''y'''z''' \to x''y''z''} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$



Figuur 2: Het $x'''y'''z'''$-assenstelsel

Voor de omgekeerde transformatie wordt deze matrix geïnverteerd.

$$R^{x''y''z''\rightarrow x'''y'''z'''} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

1.3 Van het $x'''y'''z'''$-assenstelsel naar het xyz-assenstelsel

Om van het $x'''y'''z'''$-assenstelsel naar het xyz-assenstelsel te gaan, worden de vorige twee berekende transformatiematrices met alkaar vermenigvuldigd. Eerst worden de $x'''y'''z'''$-coördinaten getransformeerd naar het $x''y''z''$-assenstelsel. Vervolgens worden ze omgezet naar het xyz-assenstelsel.

$$\begin{aligned} R^{x'''y'''z'''\rightarrow xyz} &= R^{x'''y'''z'''\rightarrow x''y''z''} R^{x'y'z'\rightarrow xyz} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\beta) \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2 Kinematica

2.1 Vraag 1

2.1.1 Ogenblikkelijke totale rotatiesnelheidsvector

Om de ogenblikkelijke totale rotatiesnelheidsvector $\overrightarrow{\omega}_w$ te bepalen worden de drie afzonderlijke rotatiesnelheidsvectoren uitgedrukt in het wereldassenstelsel en vervolgens opgeteld.

$$\overrightarrow{\omega_{tot}} = \overrightarrow{\omega_g} + \overrightarrow{\omega_i} + \overrightarrow{\omega_w}$$

Deze termen worden nu afzonderlijk bepaald.

$$\overrightarrow{\omega_g} = R^{x'y'z' \to xyz} \, \overrightarrow{\omega}'_g \quad = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\alpha \, \omega_g \\ \cos(\alpha) \, \omega_g \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_i} = R^{x'y'z' \to xyz} \, \overrightarrow{\omega_i}' \quad = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\alpha \, \omega_i \\ \sin(\alpha) \, \omega_i \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_w} = R^{x'''y'''z''' \to xyz} \, \overrightarrow{\omega_w}''' \quad = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\beta) \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos(\beta) \, \omega_w \\ -\sin(\alpha)\sin(\beta) \, \omega_w \\ \cos(\alpha)\sin(\beta) \, \omega_w \end{bmatrix}$$

De ogenblikkelijke rotatievector wordt dus weergegeven door de volgende vergelijking.

$$\overrightarrow{\omega_{tot}} = \begin{bmatrix} -\cos(\beta) \, \omega_w \\ \cos(\alpha) \, \omega_i - \sin(\alpha)(\omega_g + \sin\beta \, \omega_w) \\ \sin(\alpha) \, \omega_i + \cos(\alpha)(\omega_g + \sin\beta \, \omega_w) \end{bmatrix}$$

2.1.2 Ogenblikkelijke totale rotatieversnellingsvector

De totale rotatieversnellingsvector is de afgeleide van de rotatiesnelheidsvector naar de tijd. Hierbij moeten er termen geïntroduceerd worden die de rotatie van de snelheidsvectoren weergeven.

$$\overrightarrow{\alpha_{tot}} = \frac{d\overrightarrow{\omega_{tot}}}{dt} = \overrightarrow{\alpha_g} + \overrightarrow{\alpha_w} + \overrightarrow{\alpha_i} + \overrightarrow{\omega_g} \times \overrightarrow{\omega_i} + \overrightarrow{\omega_g} \times \overrightarrow{\omega_w} + \overrightarrow{\omega_i} \times \overrightarrow{\omega_w}$$

Al deze termen worden nu afzonderlijk bepaald.

$$\overrightarrow{\alpha_g} = R^{x'y'z' \to xyz} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_g \end{bmatrix} \quad = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\alpha)\alpha_g \\ \cos(\alpha)\alpha_g \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\alpha_i} = R^{x'y'z' \to xyz} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\alpha)\alpha_i \\ \sin(\alpha)\alpha_i \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\alpha_w} = R^{x'''y'''z''' \to xyz} \begin{bmatrix} \alpha_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta)\alpha_w \\ \sin(\alpha)\sin(\beta)\alpha_w \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta)\alpha_w \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_g} \times \overrightarrow{\omega_i} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_i\omega_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_g} \times \overrightarrow{\omega_w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ \omega_{wx} & \omega_{wy} & \omega_{wz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos(\alpha)\cos(\beta)\omega_g\omega_w \\ -\sin(\alpha)\cos(\beta)\omega_g\omega_w \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_i} \times \overrightarrow{\omega_w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \\ \omega_{wx} & \omega_{wy} & \omega_{wz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\beta)\omega_i\omega_w \\ -\sin(\alpha)\cos(\beta)\omega_i\omega_w \\ \cos(\beta)\cos(\beta)\omega_i\omega_w \end{bmatrix}$$

De totale ogenblikkelijke rotatieversnellingsvector wordt dus door de volgende formule gegeven.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\alpha_{tot}} &= \frac{d\overrightarrow{\omega_{tot}}}{dt} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\beta)\alpha_w - \omega_g\omega_i + \sin(\beta)\omega_i\omega_w \\ -\sin(\alpha)\alpha_g + \cos(\alpha)\alpha_i + \sin(\alpha)\sin(\beta)\alpha_w - \cos(\alpha)\cos(\beta)\omega_g\omega_w - \sin(\alpha)\sin(\beta)\omega_i\omega_w \\ \cos(\alpha)\alpha_g + \sin(\alpha)\alpha_i - \cos(\alpha)\sin(\beta)\alpha_w - \sin(\alpha)\cos(\beta)\omega_g\omega_w + \cos(\alpha)\cos(\beta)\omega_i\omega_w \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.2 Vraag 2

2.2.1 De ogenblikkelijke snelheid

De snelheid van C kan beschouwd worden als de som van de relatieve snelheid van het punt C in het $x'y'z'$-assenstelsel en de snelheid van dat assenstelsel. In dit assenstelsel kan de beweging van C beschouwd worden als een som van rotaties, nl. een rotatie rond het punt A door $\overrightarrow{\omega_g}$ en een rotatie rond het punt B door $\overrightarrow{\omega_i}$

$$\overrightarrow{v_C} = \overrightarrow{v_A} + \overrightarrow{\omega_g} \times (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A}) + \overrightarrow{\omega_i} \times (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B})$$

Deze termen worden afzonderlijk bepaald.

$$\overrightarrow{v_A} = R^{x'y'z' \to xyz} \begin{bmatrix} 0 \\ v_v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_v\cos(\alpha) \\ v_v\sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A} = \begin{bmatrix} r_{CAx} \\ r_{CAy} \\ r_{CAz} \end{bmatrix} = R^{x'y'z' \to xyz} \begin{bmatrix} l_1 - l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) \\ 0 \\ l_2 - l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 - l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) \\ -\sin(\alpha)(l_2 - l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ \cos(\alpha)(l_2 - l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_g} \times (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ r_{CAx} & r_{CAy} & r_{CAz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_g \cos(\alpha)(l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) \\ -\omega_g \sin(\alpha)(l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B} = \begin{bmatrix} r_{CBx} \\ r_{CBy} \\ r_{CBz} \end{bmatrix} = R^{x'y'z' \to xyz} \begin{bmatrix} -l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) \\ 0 \\ -l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) \\ -\sin(\alpha)(-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ \cos(\alpha)(-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_i} \times (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \\ r_{CBx} & r_{CBy} & r_{CBz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_i (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ -\omega_i \sin(\alpha)(l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \\ \omega_i \cos(\alpha)(l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

De totale snelheid wordt dus gegeven door de volgende gelijkheid.

$$\overrightarrow{v_C} = \begin{bmatrix} \omega_i (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ \cos(\alpha) v_v - \omega_g \cos(\alpha)(l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) - \omega_i \sin(\alpha)(l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \\ \sin(\alpha) v_v - \omega_g \sin(\alpha)(l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) + \omega_i \cos(\alpha)(l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

2.2.2 De ogenblikkelijke versnelling

De ogenblikkelijke versnelling is de afgeleide van de ogenblikkelijke snelheid. Hierbij moet er zeker rekening gehouden worden met het afzonderlijk afleiden van de leden van de kruisproducten.

$$\overrightarrow{a_C} = \frac{d\overrightarrow{v_c}}{dt} = \overrightarrow{a_A} + \frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt} \times (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A}) + \overrightarrow{\omega_g} \times (\overrightarrow{v_C} - \overrightarrow{v_A}) + \frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt} \times (\overrightarrow{r_c} - \overrightarrow{r_B}) + \overrightarrow{\omega_i} \times (\overrightarrow{v_C} - \overrightarrow{v_B})$$

Al deze termen worden opnieuw apart berekend.

$$\overrightarrow{a_A} = R^{x'y'z' \to xyz} \begin{bmatrix} 0 \\ a_v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_v \cos(\alpha) \\ a_v \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt} = \alpha_g = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\alpha)\alpha_g \\ \cos(\alpha)\alpha_g \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt} \times (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt}_x & \frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt}_y & \frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt}_z \\ r_{CAx} & r_{CAy} & r_{CAz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\alpha)\alpha_g(-l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) + l_1) \\ \sin(\alpha)\alpha_g(-l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) + l_1) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_C} - \overrightarrow{v_A} = \begin{bmatrix} v_{CAx} \\ v_{CAy} \\ v_{CAz} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \omega_i \, (-l_3 \, \cos(\beta) + l_4 \, \sin(\beta)) \\ -\omega_g \, \cos(\alpha) \, (l_3 \, \sin(\beta) + l_4 \, \cos(\beta) - l_1) - \omega_i \, \sin(\alpha) \, (l_3 \, \sin(\beta) + l_4 \, \cos(\beta)) \\ -\omega_g \, \sin(\alpha) \, (l_3 \, \sin(\beta) + l_4 \, \cos(\beta) - l_1) + \omega_i \, \cos(\alpha) \, (l_3 \, \sin(\beta) + l_4 \, \cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_g} \times (\overrightarrow{v_C} - \overrightarrow{v_A}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ v_{CAx} & v_{CAy} & v_{CAz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} {\omega_g}^2 \, (l_3 \, \sin(\beta) + l_4 \, \cos(\beta) - l_1) \\ \omega_g \, \omega_i \, \cos(\alpha) \, (-l_3 \, \cos(\beta) + l_4 \, \sin(\beta)) \\ \omega_g \, \omega_i \, \sin(\alpha) \, (-l_3 \, \cos(\beta) + l_4 \, \sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt} = \overrightarrow{\alpha_i} + \overrightarrow{\omega_g} \times \overrightarrow{\omega_i} \quad = \begin{bmatrix} -\omega_g \, \omega_i \\ \cos(\alpha) \, \alpha_i \\ \sin(\alpha) \, \alpha_i \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt} \times (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt}_x & \frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt}_y & \frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt}_z \\ r_{CBx} & r_{CBy} & r_{CBz} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_i \, (-l_3 \, \cos(\beta) + l_4 \, \sin(\beta)) \\ \sin(\beta) \cos(\alpha) \, l_4 \, \omega_g \, \omega_i - \cos(\beta) \cos(\alpha) \, l_3 \, \omega_g \, \omega_i \cdots \\ \cdots - \sin(\beta) \sin(\alpha) \, l_3 \, \alpha_i - \cos(\beta) \sin(\alpha) \, l_4 \, \alpha_i \\ \sin(\beta) \sin(\alpha) \, l_4 \, \omega_g \, \omega_i - \cos(\beta) \sin(\alpha) \, l_3 \, \omega_g \, \omega_i \cdots \\ \cdots + \sin(\beta) \cos(\alpha) \, l_3 \, \alpha_i + \cos(\beta) \cos(\alpha) \, l_4 \, \alpha_i \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_A} + \overrightarrow{\omega_g} \times (\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \, v_v + \cos(\alpha) \, \omega_g \, l_1 \\ \sin(\alpha) \, v_v + \sin(\alpha) \, \omega_g \, l_1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_C} - \overrightarrow{v_B} = \begin{bmatrix} \omega_i \, (-l_3 \, \cos(\beta) + l_4 \, \sin(\beta)) \\ -\omega_g \, \cos(\alpha) \, (l_3 \, \sin(\beta) + l_4 \, \cos(\beta) - l_1) - \omega_i \, \sin(\alpha) \, (l_3 \, \sin(\beta) + l_4 \, \cos(\beta)) - \cos(\alpha) \, \omega_g \, l_1 \\ -\omega_g \, \sin(\alpha) \, (l_3 \, \sin(\beta) + l_4 \, \cos(\beta) - l_1) + \omega_i \, \cos(\alpha) \, (l_3 \, \sin(\beta) + l_4 \, \cos(\beta)) - \sin(\alpha) \, \omega_g \, l_1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_i} \times (\overrightarrow{v_C} - \overrightarrow{v_B}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \\ v_{CBx} & v_{CBy} & v_{CBz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} {\omega_i}^2 \, (l_3 \, \sin(\beta) + l_4 \, \cos(\beta)) \\ \sin(\alpha) \, {\omega_i}^2 \, (-l_3 \, \cos(\beta) + l_4 \, \sin(\beta)) \\ -\cos(\alpha) \, {\omega_i}^2 \, (-l_3 \, \cos(\beta) + l_4 \, \sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

Dit wordt nu allemaal opgeteld.

$$\overrightarrow{a_C} = \begin{bmatrix} {\omega_g}^2 \, (l_3 \, \sin(\beta) + l_4 \, \cos(\beta) - l_1) + \alpha_i \, (-l_3 \, \cos(\beta) + l_4 \, \sin(\beta)) \cdots \\ \cdots + {\omega_i}^2 \, (l_3 \, \sin(\beta) + l_4 \, \cos(\beta)) \\ a_v \, \cos(\alpha) + \cos(\alpha) \, \alpha_g \, (-l_3 \, \sin(\beta) - l_4 \, \cos(\beta) + l_1) + \omega_g \, \omega_i \, \cos(\alpha) \, (-l_3 \, \cos(\beta) + l_4 \, \sin(\beta)) \cdots \\ \cdots + \sin(\beta) \cos(\alpha) \, l_4 \, \omega_g \, \omega_i - \cos(\beta) \cos(\alpha) \, l_3 \, \omega_g \, \omega_i - \sin(\beta) \sin(\alpha) \, l_3 \, \alpha_i - \cos(\beta) \sin(\alpha) \, l_4 \, \alpha_i \cdots \\ \cdots + \sin(\alpha) \, {\omega_i}^2 \, (-l_3 \, \cos(\beta) + l_4 \, \sin(\beta)) \\ a_v \, \sin(\alpha) + \sin(\alpha) \, \alpha_g \, (-l_3 \, \sin(\beta) - l_4 \, \cos(\beta) + l_1) + \omega_g \, \omega_i \, \sin(\alpha) \, (-l_3 \, \cos(\beta) + l_4 \, \sin(\beta)) \cdots \\ \cdots + \sin(\beta) \sin(\alpha) \, l_4 \, \omega_g \, \omega_i - \cos(\beta) \sin(\alpha) \, l_3 \, \omega_g \, \omega_i + \sin(\beta) \cos(\alpha) \, l_3 \, \alpha_i + \cos(\beta) \cos(\alpha) \, l_4 \, \alpha_i \cdots \\ \cdots - \cos(\alpha) \, {\omega_i}^2 \, (-l_3 \, \cos(\beta) + l_4 \, \sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

2.3 Vraag 3

Om de bijdrage van de corriolisversnelling te bepalen kan de volgende formule gebruikt worden.

$$\overrightarrow{a_{corriolis}} = -2(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v_{rel}})$$

Om de versnelling van het voorwerp te beschrijven, wordt ω gelijkgesteld aan ω_i. De relatieve snelheid in dit assenstelsel is de rotatiesnelheid van C rond B.

$$\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\omega_i}$$

$$\overrightarrow{v_{rel}} = \overrightarrow{\omega_i} \times (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B}) \quad = \begin{bmatrix} -\omega_i \; (l_3 \cos(\beta) - l_4 \sin(\beta)) \\ -\omega_i \sin(\alpha)\,(l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \\ \omega_i \cos(\alpha)\,(l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{a_{corriolis}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \cos(\alpha)\,\omega_g\,\omega_i \; (l_3 \cos(\beta) - l_4 \sin(\beta)) \\ 2 \sin(\alpha)\,\omega_g\,\omega_i \; (l_3 \cos(\beta) - l_4 \sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

2.4 Vraag 4

2.4.1 Ogenblikkelijke snelheid

Voor het berekenen van de snelheid van D wordt een gelijkaardige methode gebruikt als voor de snelheid van C. Aangezien D zich niet op het wiel bevindt, heeft de rotatie van het wiel nog steeds geen invloed op de snelheid.

$$\overrightarrow{v_D} = \overrightarrow{v_A} + \overrightarrow{\omega_g} \times (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_A}) + \overrightarrow{\omega_i} \times (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_B})$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_A} &= (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_C}) + (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A}) \\ &= R^{x'''y'''z''' \rightarrow xyz} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} l_4 \\ 0 \\ \frac{1}{4} l_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{CAx} \\ r_{CAy} \\ r_{CAz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1/4\, l_4 \cos(\beta) - 3/4\, l_3 \sin(\beta) + l_1 \\ 3/4 \sin(\beta) \sin(\alpha)\, l_4 - 1/4 \cos(\beta) \sin(\alpha)\, l_3 - \sin(\alpha)\,(-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta) + l_2) \\ -3/4 \sin(\beta) \cos(\alpha)\, l_4 + 1/4 \cos(\beta) \cos(\alpha)\, l_3 + \cos(\alpha)\,(-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta) + l_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\omega_g} \times (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_A}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ v_{DAx} & v_{DAy} & v_{DAz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/4\,\omega_g \cos(\alpha)\,(3\, l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - 4\, l_1) \\ -1/4\,\omega_g \sin(\alpha)\,(3\, l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - 4\, l_1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_B} &= (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_C}) + (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B}) \\ &= \begin{bmatrix} -1/4\, l_4 \cos(\beta) - 3/4\, l_3 \sin(\beta) \\ 3/4 \sin(\beta) \sin(\alpha)\, l_4 - 1/4 \cos(\beta) \sin(\alpha)\, l_3 - \sin(\alpha)\,(-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ -3/4 \sin(\beta) \cos(\alpha)\, l_4 + 1/4 \cos(\beta) \cos(\alpha)\, l_3 + \cos(\alpha)\,(-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\omega_i} \times (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_B}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \\ v_{DBx} & v_{DBy} & v_{DBz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4\,\omega_i\,(3\,l_3\,\cos(\beta) - l_4\,\sin(\beta)) \\ 1/4\,\omega_i\,\sin(\alpha)\,(3\,l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta)) \\ 1/4\,\omega_i\,\cos(\alpha)\,(3\,l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

De totale snelheid van D wordt dus door de volgende gelijkheid gegeven.

$$\overrightarrow{v_D} = \begin{bmatrix} -1/4\,\omega_i\,(3\,l_3\,\cos(\beta) - l_4\,\sin(\beta)) \\ \cos(\alpha)\,v_v - 1/4\,\omega_g\,\cos(\alpha)\,(3\,l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta) - 4\,l_1) - 1/4\,\omega_i\,\sin(\alpha)\,(3\,l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta)) \\ \sin(\alpha)\,v_v - 1/4\,\omega_g\,\sin(\alpha)\,(3\,l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta) - 4\,l_1) + 1/4\,\omega_i\,\cos(\alpha)\,(3\,l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

2.4.2 Ogenblikkelijke versnelling

Ook voor de ogenblikkelijke versnelling van D wordt een gelijkaardige methode gebruikt als voor C.

$$\overrightarrow{a_D} = \frac{d\overrightarrow{v_D}}{dt} = \overrightarrow{a_A} + \frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt} \times (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_A}) + \overrightarrow{\omega_g} \times (\overrightarrow{v_D} - \overrightarrow{v_A}) + \frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt} \times (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_B}) + \overrightarrow{\omega_i} \times (\overrightarrow{v_D} - \overrightarrow{v_B})$$

Opnieuw worden al deze termen afzonderlijk uitgerekend.

$$\overrightarrow{a_A} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_v\cos(\alpha) \\ a_v\sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt} \times (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_A}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt}_x & \frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt}_y & \frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt}_z \\ r_{DAx} & r_{DAy} & r_{DAz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/4\,\alpha_g\,\cos(\alpha)\,(3\,l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta) - 4\,l_1) \\ -1/4\,\alpha_g\,\sin(\alpha)\,(3\,l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta) - 4\,l_1) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_g} \times (\overrightarrow{v_D} - \overrightarrow{v_A}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ v_{DAx} & v_{DAy} & v_{DAz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4\,{\omega_g}^2\,(3\,l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta) - 4\,l_1) \\ 1/4\,\cos(\alpha)\,\omega_g\,\omega_i\,(l_4\,\sin(\beta) - 3\,l_3\,\cos(\beta)) \\ 1/4\,\sin(\alpha)\,\omega_g\,\omega_i\,(l_4\,\sin(\beta) - 3\,l_3\,\cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt} \times (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_B}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt}_x & \frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt}_y & \frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt}_z \\ r_{DBx} & r_{DBy} & r_{DBz} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1/4\,\alpha_i\,(l_4\,\sin(\beta) - 3\,l_3\,\cos(\beta)) \\ 1/4\,\sin(\beta)\cos(\alpha)\,l_4\,\omega_g\,\omega_i - 3/4\,\cos(\beta)\cos(\alpha)\,l_3\,\omega_g\,\omega_i \cdots \\ \cdots - 3/4\,\sin(\beta)\sin(\alpha)\,l_3\,\alpha_i - 1/4\,\cos(\beta)\sin(\alpha)\,l_4\,\alpha_i \\ 1/4\,\sin(\beta)\sin(\alpha)\,l_4\,\omega_g\,\omega_i - 3/4\,\cos(\beta)\sin(\alpha)\,l_3\,\omega_g\,\omega_i \cdots \\ \cdots + 3/4\,\sin(\beta)\cos(\alpha)\,l_3\,\alpha_i + 1/4\,\cos(\beta)\cos(\alpha)\,l_4\,\alpha_i \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_i} \times (\overrightarrow{v_D} - \overrightarrow{v_B}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \\ v_{DBx} & v_{DBy} & v_{DBz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4\,{\omega_i}^2\,(3\,l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta)) \\ 1/4\,\omega_i\,\sin(\alpha)\,(\sin(\beta)\,l_4\,\omega_i - 3\,\cos(\beta)\,l_3\,\omega_i + 4\,\sin(\alpha)\,\omega_g\,l_2) \\ -1/4\,\omega_i\,\cos(\alpha)\,(\sin(\beta)\,l_4\,\omega_i - 3\,\cos(\beta)\,l_3\,\omega_i + 4\,\sin(\alpha)\,\omega_g\,l_2) \end{bmatrix}$$

Dit wordt allemaal opgeteld.

$$\overrightarrow{a_D} = \left[\begin{array}{c} 1/4\,{\omega_g}^2\,(3\,l_3\,\sin(\beta)+l_4\,\cos(\beta)-4\,l_1)+1/4\,\alpha_i\,(l_4\,\sin(\beta)-3\,l_3\,\cos(\beta))\cdots \\ \cdots+1/4\,{\omega_i}^2\,(3\,l_3\,\sin(\beta)+l_4\,\cos(\beta)) \\ a_v\,\cos(\alpha)-1/4\,\alpha_g\,\cos(\alpha)\,(3\,l_3\,\sin(\beta)+l_4\,\cos(\beta)-4\,l_1)\cdots \\ \cdots+1/4\,\cos(\alpha)\,\omega_g\,\omega_i\,(l_4\,\sin(\beta)-3\,l_3\,\cos(\beta))+1/4\,\sin(\beta)\cos(\alpha)\,l_4\,\omega_g\,\omega_i\cdots \\ \cdots-3/4\,\cos(\beta)\cos(\alpha)\,l_3\,\omega_g\,\omega_i-3/4\,\sin(\beta)\sin(\alpha)\,l_3\,\alpha_i\cdots \\ \cdots-1/4\,\cos(\beta)\sin(\alpha)\,l_4\,\alpha_i+1/4\,\omega_i\,\sin(\alpha)\,(\sin(\beta)\,l_4\,\omega_i-3\,\cos(\beta)\,l_3\,\omega_i+4\,\sin(\alpha)\,\omega_g\,l_2) \\ a_v\,\sin(\alpha)-1/4\,\alpha_g\,\sin(\alpha)\,(3\,l_3\,\sin(\beta)+l_4\,\cos(\beta)-4\,l_1)\cdots \\ \cdots+1/4\,\sin(\alpha)\,\omega_g\,\omega_i\,(l_4\,\sin(\beta)-3\,l_3\,\cos(\beta))+1/4\,\sin(\beta)\sin(\alpha)\,l_4\,\omega_g\,\omega_i\cdots \\ \cdots-3/4\,\cos(\beta)\sin(\alpha)\,l_3\,\omega_g\,\omega_i+3/4\,\sin(\beta)\cos(\alpha)\,l_3\,\alpha_i\cdots \\ +1/4\,\cos(\beta)\cos(\alpha)\,l_4\,\alpha_i-1/4\,\omega_i\,\cos(\alpha)\,(\sin(\beta)\,l_4\,\omega_i-3\,\cos(\beta)\,l_3\,\omega_i+4\,\sin(\alpha)\,\omega_g\,l_2) \end{array}\right]$$

3 Dynamica

3.1 Vraag 1

3.1.1 Ogenblikkelijke impulsvector landingsgestel

$$\overrightarrow{p}_l = m_l \overrightarrow{v}_D = \left[\begin{array}{c} 1/4\, m_l\, \omega_i\, (l_4 \sin(\beta) - 3\, l_3 \cos(\beta)) \\ -1/4\, m_l\, (3 \sin(\beta)\sin(\alpha)\, l_3\, \omega_i + 3 \sin(\beta)\cos(\alpha)\, l_3\, \omega_g + \cos(\beta)\sin(\alpha)\, l_4\, \omega_i + \cos(\beta)\cos(\alpha) \\ -1/4\, m_l\, (3 \sin(\beta)\sin(\alpha)\, l_3\, \omega_g - 3 \sin(\beta)\cos(\alpha)\, l_3\, \omega_i + \cos(\beta)\sin(\alpha)\, l_4\, \omega_g - \cos(\beta)\cos(\alpha) \end{array} \right.$$

3.1.2 Verandering impulsvector landingsgestel

$$\frac{d\overrightarrow{p}_l}{dt} = m_l \overrightarrow{a}_D = \left[\begin{array}{c} 1/4\, m_l\, \big(3 \sin \\ -1/4\, m_l\, \big(-\sin(\beta)\sin(\alpha)\, l_4\, {\omega_i}^2 - 2 \sin(\beta)\cos(\alpha)\, l_4\, \omega_g\, \omega_i + 3 \cos(\beta)\sin(\alpha)\, l_3\, {\omega_i}^2 + 6 \cos \\ -1/4\, m_l\, \big(-2 \sin(\beta)\sin(\alpha)\, l_4\, \omega_g\, \omega_i + \sin(\beta)\cos(\alpha)\, l_4\, {\omega_i}^2 + 6 \cos(\beta)\sin(\alpha)\, l_3\, \omega_g\, \omega_i - \end{array} \right.$$

3.1.3 Ogenblikkelijke impulsvector wiel

$$\overrightarrow{p}_w = m_w \overrightarrow{v}_C = \left[\begin{array}{c} m_w\, \omega_i\, (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ m_w\, (-\sin(\beta)\sin(\alpha)\, l_3\, \omega_i - \sin(\beta)\cos(\alpha)\, l_3\, \omega_g - \cos(\beta)\sin(\alpha)\, l_4\, \omega_i - \cos(\beta)\cos(\alpha)\, l_4\, \omega_g \\ m_w\, (-\sin(\beta)\sin(\alpha)\, l_3\, \omega_g + \sin(\beta)\cos(\alpha)\, l_3\, \omega_i - \cos(\beta)\sin(\alpha)\, l_4\, \omega_g + \cos(\beta)\cos(\alpha)\, l_4\, \omega_i \end{array} \right.$$

3.1.4 Verandering impulsvector wiel

$$\frac{d\overrightarrow{p}_w}{dt} = m_w \overrightarrow{a}_C = \left[\begin{array}{c} m_w\, \big(\sin(\beta)\, l_3\, {\omega_g}^2 \\ m_w\, \Big(\sin(\beta)\sin(\alpha)\, l_4\, {\omega_i}^2 + 2 \sin(\beta)\cos(\alpha)\, l_4\, \omega_g\, \omega_i - \cos(\beta)\sin(\alpha)\, l_3\, {\omega_i}^2 - 2 \cos(\beta)\cos \\ m_w\, \big(2 \sin(\beta)\sin(\alpha)\, l_4\, \omega_g\, \omega_i - \sin(\beta)\cos(\alpha)\, l_4\, {\omega_i}^2 - 2 \cos(\beta)\sin(\alpha)\, l_3\, \omega_g\, \omega_i + \cos(\beta) \end{array} \right.$$

3.2 Vraag 2

3.2.1 ogenblikkelijke impulsmomentvector landingsgesel rond massacentrum

3.3 Vraag 3

3.4 Vraag 4

3.5 Vraag 5