Case Dynamica 2014

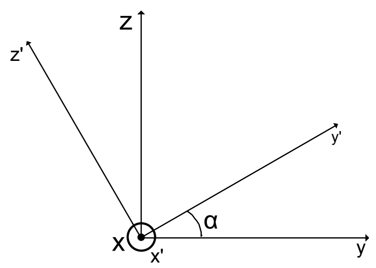
Pieter Van Damme   Wouter Van Gansbeke   Lennert Vanmunster
Ruben Verhulst

27 november 2014

1 Transformatiematrices

1.1 Van het $x'y'z'$-assenstelstel naar het xyz-assenstelsel

Het $x'y'z'$ assenstelsel wordt bekomen door het xyz-assenstelsel te roteren met een hoek α rond de x-as. De omgekeerde transformatie draait dus met een negatieve hoek α rond de x-as. Het $x''y''z''$-assenstelsel heeft dezelfde oriëntatie als het $x'y'z'$-assenstelsel. Hun transformatiematrices zijn daarom hetzelfde.



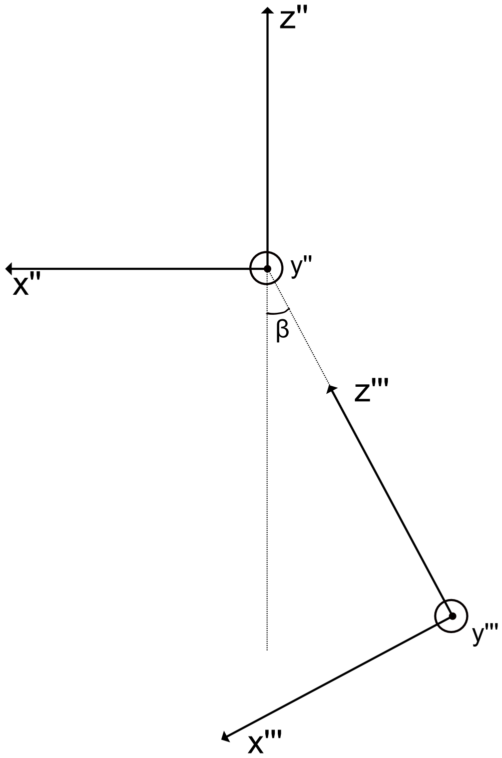
Figuur 1: Het $x'y'z'$-assenstelsel

$$R^{x'y'z'\to xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

1.2 Van het $x'''y'''z'''$-assenstelsel naar het $x''y''z''$-assenstelsel

Het $x'''y'''z'''$-assenstelsel wordt bekomen door het $x''y''z''$-assenstelsel te roteren met een hoek β rond de y''-as. De transformatiematrix draait dus met een negatieve hoek β rond de y'''-as. Deze transformatiematrix kan ook gebruikt worden om cordinaten naar het $x'y'z'$-assenstelsel te converteren. De oriëntatie van het $x'y'z'$-assentstelsel en van het $x''y''z''$-assenstelsel is immers hetzelfde.

$$R^{x'''y'''z'''\to x''y''z''} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$



Figuur 2: Het $x'''y'''z'''$-assenstelsel

Voor de omgekeerde transformatie wordt deze matrix geïnverteerd.

$$R^{x''y''z'' \to x'''y'''z'''} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

1.3 Van het $x'''y'''z'''$-assenstelsel naar het xyz-assenstelsel

Om van het $x'''y'''z'''$-assenstelsel naar het xyz-assenstelsel te gaan, worden de vorige twee berekende transformatiematrices met alkaar vermenigvuldigd. Eerst worden de $x'''y'''z'''$-coördinaten getransformeerd naar het $x''y''z''$-assenstelsel. Vervolgens worden ze omgezet naar het xyz-assenstelsel.

$$\begin{aligned} R^{x'''y'''z''' \to xyz} &= R^{x'''y'''z''' \to x''y''z''} R^{x'y'z' \to xyz} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\beta) \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2 Kinematica

2.1 Vraag 1

2.1.1 Ogenblikkelijke totale rotatiesnelheidsvector

Om de ogenblikkelijke totale rotatiesnelheidsvector $\overrightarrow{\omega}_w$ te bepalen worden de drie afzonderlijke rotatiesnelheidsvectoren uitgedrukt in het wereldassenstelsel en vervolgens opgeteld.

$$\overrightarrow{\omega_{tot}} = \overrightarrow{\omega_g} + \overrightarrow{\omega_i} + \overrightarrow{\omega_w}$$

Deze termen worden nu afzonderlijk bepaald.

$$\overrightarrow{\omega_g} = R^{x'y'z' \to xyz}\, \overrightarrow{\omega}'_g \quad = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\alpha\,\omega_g \\ \cos(\alpha)\,\omega_g \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_i} = R^{x'y'z' \to xyz}\, \overrightarrow{\omega_i}' \quad = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\alpha\,\omega_i \\ \sin(\alpha)\,\omega_i \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_w} = R^{x'''y'''z''' \to xyz}\, \overrightarrow{\omega_w}''' \quad = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\beta) \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -\cos(\beta)\,\omega_w \\ -\sin(\alpha)\sin(\beta)\,\omega_w \\ \cos(\alpha)\sin(\beta)\,\omega_w \end{bmatrix}$$

De ogenblikkelijke rotatievector wordt dus weergegeven door de volgende vergelijking.

$$\overrightarrow{\omega_{tot}} = \begin{bmatrix} -\cos(\beta)\,\omega_w \\ \cos(\alpha)\,\omega_i - \sin(\alpha)(\omega_g + \sin\beta\,\omega_w) \\ \sin(\alpha)\,\omega_i + \cos(\alpha)(\omega_g + \sin\beta\,\omega_w) \end{bmatrix}$$

2.1.2 Ogenblikkelijke totale rotatieversnellingsvector

De totale rotatieversnellingsvector is de afgeleide van de rotatiesnelheidsvector naar de tijd. Hierbij moeten er termen geïntroduceerd worden die de rotatie van de snelheidsvectoren weergeven.

$$\overrightarrow{\alpha_{tot}} = \frac{d\overrightarrow{\omega_{tot}}}{dt} = \overrightarrow{\alpha_g} + \overrightarrow{\alpha_w} + \overrightarrow{\alpha_i} + \overrightarrow{\omega_g} \times \overrightarrow{\omega_i} + \overrightarrow{\omega_g} \times \overrightarrow{\omega_w} + \overrightarrow{\omega_i} \times \overrightarrow{\omega_w}$$

Al deze termen worden nu afzonderlijk bepaald.

$$\overrightarrow{\alpha_g} = R^{x'y'z' \to xyz} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_g \end{bmatrix} \quad = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\alpha)\alpha_g \\ \cos(\alpha)\alpha_g \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\alpha_i} = R^{x'y'z' \to xyz} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\alpha)\alpha_i \\ \sin(\alpha)\alpha_i \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\alpha_w} = R^{x'''y'''z''' \to xyz} \begin{bmatrix} \alpha_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta)\alpha_w \\ \sin(\alpha)\sin(\beta)\alpha_w \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta)\alpha_w \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_g} \times \overrightarrow{\omega_i} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_i\omega_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_g} \times \overrightarrow{\omega_w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ \omega_{wx} & \omega_{wy} & \omega_{wz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos(\alpha)\cos(\beta)\omega_g\omega_w \\ -\sin(\alpha)\cos(\beta)\omega_g\omega_w \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_i} \times \overrightarrow{\omega_w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \\ \omega_{wx} & \omega_{wy} & \omega_{wz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\beta)\omega_i\omega_w \\ -\sin(\alpha)\cos(\beta)\omega_i\omega_w \\ \cos(\beta)\cos(\beta)\omega_i\omega_w \end{bmatrix}$$

De totale ogenblikkelijke rotatieversnellingsvector wordt dus door de volgende formule gegeven.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\alpha_{tot}} &= \frac{d\overrightarrow{\omega_{tot}}}{dt} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\beta)\alpha_w - \omega_g\omega_i + \sin(\beta)\omega_i\omega_w \\ -\sin(\alpha)\alpha_g + \cos(\alpha)\alpha_i + \sin(\alpha)\sin(\beta)\alpha_w - \cos(\alpha)\cos(\beta)\omega_g\omega_w - \sin(\alpha)\sin(\beta)\omega_i\omega_w \\ \cos(\alpha)\alpha_g + \sin(\alpha)\alpha_i - \cos(\alpha)\sin(\beta)\alpha_w - \sin(\alpha)\cos(\beta)\omega_g\omega_w + \cos(\alpha)\cos(\beta)\omega_i\omega_w \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.2 Vraag 2

2.2.1 De ogenblikkelijke snelheid

De snelheid van C kan beschouwd worden als de som van de relatieve snelheid van het punt C in het $x'y'z'$-assenstelsel en de snelheid van dat assenstelsel. In dit assenstelsel kan de beweging van C beschouwd worden als een som van rotaties, nl. een rotatie rond het punt A door $\overrightarrow{\omega_g}$ en een rotatie rond het punt B door $\overrightarrow{\omega_i}$

$$\overrightarrow{v_C} = \overrightarrow{v_A} + \overrightarrow{\omega_g} \times (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A}) + \overrightarrow{\omega_i} \times (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B})$$

Deze termen worden afzonderlijk bepaald.

$$\overrightarrow{v_A} = R^{x'y'z' \to xyz} \begin{bmatrix} 0 \\ v_v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_v\cos(\alpha) \\ v_v\sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A} = \begin{bmatrix} r_{CAx} \\ r_{CAy} \\ r_{CAz} \end{bmatrix} = R^{x'y'z' \to xyz} \begin{bmatrix} l_1 - l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) \\ 0 \\ l_2 - l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 - l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) \\ -\sin(\alpha)(l_2 - l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ \cos(\alpha)(l_2 - l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_g} \times (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ r_{CAx} & r_{CAy} & r_{CAz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_g \cos(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) \\ -\omega_g \sin(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B} = \begin{bmatrix} r_{CBx} \\ r_{CBy} \\ r_{CBz} \end{bmatrix} = R^{x'y'z' \to xyz} \begin{bmatrix} -l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) \\ 0 \\ -l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) \\ -\sin(\alpha) (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ \cos(\alpha) (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_i} \times (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \\ r_{CBx} & r_{CBy} & r_{CBz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_i (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ -\omega_i \sin(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \\ \omega_i \cos(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

De totale snelheid wordt dus gegeven door de volgende gelijkheid.

$$\overrightarrow{v_C} = \begin{bmatrix} \omega_i (-l_3 \cos(\beta) + l_4 \sin(\beta)) \\ \cos(\alpha) v_v - \omega_g \cos(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) - \omega_i \sin(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \\ \sin(\alpha) v_v - \omega_g \sin(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta) - l_1) + \omega_i \cos(\alpha) (l_3 \sin(\beta) + l_4 \cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

2.2.2 De ogenblikkelijke versnelling

De ogenblikkelijke versnelling is de afgeleide van de ogenblikkelijke snelheid. Hierbij moet er zeker rekening gehouden worden met het afzonderlijk afleiden van de leden van de kruisproducten.

$$\overrightarrow{a_C} = \frac{d\overrightarrow{v_c}}{dt} = \overrightarrow{a_A} + \frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt} \times (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A}) + \overrightarrow{\omega_g} \times (\overrightarrow{v_C} - \overrightarrow{v_A}) + \frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt} \times (\overrightarrow{r_c} - \overrightarrow{r_B}) + \overrightarrow{\omega_i} \times (\overrightarrow{v_C} - \overrightarrow{v_B})$$

Al deze termen worden opnieuw apart berekend.

$$\overrightarrow{a_A} = R^{x'y'z' \to xyz} \begin{bmatrix} 0 \\ a_v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_v \cos(\alpha) \\ a_v \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt} = \alpha_g = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\alpha)\alpha_g \\ \cos(\alpha)\alpha_g \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt} \times (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt}_x & \frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt}_y & \frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt}_z \\ r_{CAx} & r_{CAy} & r_{CAz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \alpha_g (-l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) + l_1) \\ \sin(\alpha) \alpha_g (-l_3 \sin(\beta) - l_4 \cos(\beta) + l_1) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_C} - \overrightarrow{v_A} = \begin{bmatrix} v_{CAx} \\ v_{CAy} \\ v_{CAz} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \omega_i\,(-l_3\,\cos(\beta) + l_4\,\sin(\beta)) \\ -\omega_g\,\cos(\alpha)\,(l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta) - l_1) - \omega_i\,\sin(\alpha)\,(l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta)) \\ -\omega_g\,\sin(\alpha)\,(l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta) - l_1) + \omega_i\,\cos(\alpha)\,(l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_g} \times (\overrightarrow{v_C} - \overrightarrow{v_A}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ v_{CAx} & v_{CAy} & v_{CAz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} {\omega_g}^2\,(l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta) - l_1) \\ \omega_g\,\omega_i\,\cos(\alpha)\,(-l_3\,\cos(\beta) + l_4\,\sin(\beta)) \\ \omega_g\,\omega_i\,\sin(\alpha)\,(-l_3\,\cos(\beta) + l_4\,\sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt} = \overrightarrow{\alpha_i} + \overrightarrow{\omega_g} \times \overrightarrow{\omega_i} = \begin{bmatrix} -\omega_g\,\omega_i \\ \cos(\alpha)\,\alpha_i \\ \sin(\alpha)\,\alpha_i \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt} \times (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt}_x & \frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt}_y & \frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt}_z \\ r_{CBx} & r_{CBy} & r_{CBz} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_i\,(-l_3\,\cos(\beta) + l_4\,\sin(\beta)) \\ \sin(\beta)\cos(\alpha)\,l_4\,\omega_g\,\omega_i - \cos(\beta)\cos(\alpha)\,l_3\,\omega_g\,\omega_i \cdots \\ \cdots - \sin(\beta)\sin(\alpha)\,l_3\,\alpha_i - \cos(\beta)\sin(\alpha)\,l_4\,\alpha_i \\ \sin(\beta)\sin(\alpha)\,l_4\,\omega_g\,\omega_i - \cos(\beta)\sin(\alpha)\,l_3\,\omega_g\,\omega_i \cdots \\ \cdots + \sin(\beta)\cos(\alpha)\,l_3\,\alpha_i + \cos(\beta)\cos(\alpha)\,l_4\,\alpha_i \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_A} + \overrightarrow{\omega_g} \times (\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\alpha)\,v_v + \cos(\alpha)\,\omega_g\,l_1 \\ \sin(\alpha)\,v_v + \sin(\alpha)\,\omega_g\,l_1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_C} - \overrightarrow{v_B} = \begin{bmatrix} \omega_i\,(-l_3\,\cos(\beta) + l_4\,\sin(\beta)) \\ -\omega_g\,\cos(\alpha)\,(l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta) - l_1) - \omega_i\,\sin(\alpha)\,(l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta)) - \cos(\alpha)\,\omega_g\,l_1 \\ -\omega_g\,\sin(\alpha)\,(l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta) - l_1) + \omega_i\,\cos(\alpha)\,(l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta)) - \sin(\alpha)\,\omega_g\,l_1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_i} \times (\overrightarrow{v_C} - \overrightarrow{v_B}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \\ v_{CBx} & v_{CBy} & v_{CBz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} {\omega_i}^2\,(l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta)) \\ \sin(\alpha)\,{\omega_i}^2\,(-l_3\,\cos(\beta) + l_4\,\sin(\beta)) \\ -\cos(\alpha)\,{\omega_i}^2\,(-l_3\,\cos(\beta) + l_4\,\sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

Dit wordt nu allemaal opgeteld.

$$\overrightarrow{a_C} = \begin{bmatrix} {\omega_g}^2\,(l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta) - l_1) + \alpha_i\,(-l_3\,\cos(\beta) + l_4\,\sin(\beta)) \cdots \\ \cdots + {\omega_i}^2\,(l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta)) \\ a_v\,\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\,\alpha_g\,(-l_3\,\sin(\beta) - l_4\,\cos(\beta) + l_1) + \omega_g\,\omega_i\,\cos(\alpha)\,(-l_3\,\cos(\beta) + l_4\,\sin(\beta)) \cdots \\ \cdots + \sin(\beta)\cos(\alpha)\,l_4\,\omega_g\,\omega_i - \cos(\beta)\cos(\alpha)\,l_3\,\omega_g\,\omega_i - \sin(\beta)\sin(\alpha)\,l_3\,\alpha_i - \cos(\beta)\sin(\alpha)\,l_4\,\alpha_i \cdots \\ \cdots + \sin(\alpha)\,{\omega_i}^2\,(-l_3\,\cos(\beta) + l_4\,\sin(\beta)) \\ a_v\,\sin(\alpha) + \sin(\alpha)\,\alpha_g\,(-l_3\,\sin(\beta) - l_4\,\cos(\beta) + l_1) + \omega_g\,\omega_i\,\sin(\alpha)\,(-l_3\,\cos(\beta) + l_4\,\sin(\beta)) \cdots \\ \cdots + \sin(\beta)\sin(\alpha)\,l_4\,\omega_g\,\omega_i - \cos(\beta)\sin(\alpha)\,l_3\,\omega_g\,\omega_i + \sin(\beta)\cos(\alpha)\,l_3\,\alpha_i + \cos(\beta)\cos(\alpha)\,l_4\,\alpha_i \cdots \\ \cdots - \cos(\alpha)\,{\omega_i}^2\,(-l_3\,\cos(\beta) + l_4\,\sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

2.3 Vraag 3

Om de bijdrage van de corriolisversnelling te bepalen kan de volgende formule gebruikt worden.

$\overrightarrow{a_{corriolis}} = -2(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v_{rel}})$

Om de versnelling van het voorwerp te beschrijven, wordt ω gelijkgesteld aan ω_i. De relatieve snelheid in dit assenstelsel is de rotatiesnelheid van C rond B.

$$\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\omega_i}$$

$$\overrightarrow{v_{rel}} = \overrightarrow{\omega_i} \times (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B}) \quad = \begin{bmatrix} -\omega_i \, (l_3 \, \cos(\beta) - l_4 \, \sin(\beta)) \\ -\omega_i \, \sin(\alpha) \, (l_3 \, \sin(\beta) + l_4 \, \cos(\beta)) \\ \omega_i \, \cos(\alpha) \, (l_3 \, \sin(\beta) + l_4 \, \cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{a_{corriolis}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \, \cos(\alpha) \, \omega_g \, \omega_i \, (l_3 \, \cos(\beta) - l_4 \, \sin(\beta)) \\ 2 \, \sin(\alpha) \, \omega_g \, \omega_i \, (l_3 \, \cos(\beta) - l_4 \, \sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

2.4 Vraag 4

2.4.1 Ogenblikkelijke snelheid

Voor het berekenen van de snelheid van D wordt een gelijkaardige methode gebruikt als voor de snelheid van C. Aangezien D zich niet op het wiel bevindt, heeft de rotatie van het wiel nog steeds geen invloed op de snelheid.

$$\overrightarrow{v_D} = \overrightarrow{v_A} + \overrightarrow{\omega_g} \times (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_A}) + \overrightarrow{\omega_i} \times (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_B})$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_A} &= (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_C}) + (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A}) \\ &= R^{x'''y'''z'''\rightarrow xyz} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} l_4 \\ 0 \\ \frac{1}{4} l_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{CAx} \\ r_{CAy} \\ r_{CAz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1/4 \, l_4 \, \cos(\beta) - 3/4 \, l_3 \, \sin(\beta) + l_1 \\ 3/4 \, \sin(\beta) \sin(\alpha) \, l_4 - 1/4 \, \cos(\beta) \sin(\alpha) \, l_3 - \sin(\alpha) \, (-l_3 \, \cos(\beta) + l_4 \, \sin(\beta) + l_2) \\ -3/4 \, \sin(\beta) \cos(\alpha) \, l_4 + 1/4 \, \cos(\beta) \cos(\alpha) \, l_3 + \cos(\alpha) \, (-l_3 \, \cos(\beta) + l_4 \, \sin(\beta) + l_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\omega_g} \times (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_A}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ v_{DAx} & v_{DAy} & v_{DAz} \end{vmatrix} \quad = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/4 \, \omega_g \, \cos(\alpha) \, (3 \, l_3 \, \sin(\beta) + l_4 \, \cos(\beta) - 4 \, l_1) \\ -1/4 \, \omega_g \, \sin(\alpha) \, (3 \, l_3 \, \sin(\beta) + l_4 \, \cos(\beta) - 4 \, l_1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_B} &= (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_C}) + (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B}) \\ &= \begin{bmatrix} -1/4 \, l_4 \, \cos(\beta) - 3/4 \, l_3 \, \sin(\beta) \\ 3/4 \, \sin(\beta) \sin(\alpha) \, l_4 - 1/4 \, \cos(\beta) \sin(\alpha) \, l_3 - \sin(\alpha) \, (-l_3 \, \cos(\beta) + l_4 \, \sin(\beta)) \\ -3/4 \, \sin(\beta) \cos(\alpha) \, l_4 + 1/4 \, \cos(\beta) \cos(\alpha) \, l_3 + \cos(\alpha) \, (-l_3 \, \cos(\beta) + l_4 \, \sin(\beta)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\omega_i} \times (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_B}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \\ v_{DBx} & v_{DBy} & v_{DBz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4\,\omega_i\ (3\,l_3\ \cos(\beta) - l_4\ \sin(\beta)) \\ 1/4\,\omega_i\ \sin(\alpha)\,(3\,l_3\ \sin(\beta) + l_4\ \cos(\beta)) \\ 1/4\,\omega_i\ \cos(\alpha)\,(3\,l_3\ \sin(\beta) + l_4\ \cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

De totale snelheid van D wordt dus door de volgende gelijkheid gegeven.

$$\overrightarrow{v_D} = \begin{bmatrix} -1/4\,\omega_i\ (3\,l_3\ \cos(\beta) - l_4\ \sin(\beta)) \\ \cos(\alpha)\,v_v - 1/4\,\omega_g\ \cos(\alpha)\,(3\,l_3\ \sin(\beta) + l_4\ \cos(\beta) - 4\,l_1) - 1/4\,\omega_i\ \sin(\alpha)\,(3\,l_3\ \sin(\beta) + l_4\ \cos(\beta)) \\ \sin(\alpha)\,v_v - 1/4\,\omega_g\ \sin(\alpha)\,(3\,l_3\ \sin(\beta) + l_4\ \cos(\beta) - 4\,l_1) + 1/4\,\omega_i\ \cos(\alpha)\,(3\,l_3\ \sin(\beta) + l_4\ \cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

2.4.2 Ogenblikkelijke versnelling

Ook voor de ogenblikkelijke versnelling van D wordt een gelijkaardige methode gebruikt als voor C.

$$\overrightarrow{a_D} = \frac{d\overrightarrow{v_D}}{dt} = \overrightarrow{a_A} + \frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt} \times (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_A}) + \overrightarrow{\omega_g} \times (\overrightarrow{v_D} - \overrightarrow{v_A}) + \frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt} \times (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_B}) + \overrightarrow{\omega_i} \times (\overrightarrow{v_D} - \overrightarrow{v_B})$$

Opnieuw worden al deze termen afzonderlijk uitgerekend.

$$\overrightarrow{a_A} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_v \cos(\alpha) \\ a_v \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt} \times (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_A}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt}_x & \frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt}_y & \frac{d\overrightarrow{\omega_g}}{dt}_z \\ r_{DAx} & r_{DAy} & r_{DAz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/4\,\alpha_g\ \cos(\alpha)\,(3\,l_3\ \sin(\beta) + l_4\ \cos(\beta) - 4\,l_1) \\ -1/4\,\alpha_g\ \sin(\alpha)\,(3\,l_3\ \sin(\beta) + l_4\ \cos(\beta) - 4\,l_1) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_g} \times (\overrightarrow{v_D} - \overrightarrow{v_A}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ v_{DAx} & v_{DAy} & v_{DAz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4\,{\omega_g}^2\,(3\,l_3\ \sin(\beta) + l_4\ \cos(\beta) - 4\,l_1) \\ 1/4\ \cos(\alpha)\,\omega_g\,\omega_i\ (l_4\ \sin(\beta) - 3\,l_3\ \cos(\beta)) \\ 1/4\ \sin(\alpha)\,\omega_g\,\omega_i\ (l_4\ \sin(\beta) - 3\,l_3\ \cos(\beta)) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt} \times (\overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_B}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt}_x & \frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt}_y & \frac{d\overrightarrow{\omega_i}}{dt}_z \\ r_{DBx} & r_{DBy} & r_{DBz} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1/4\,\alpha_i\ (l_4\ \sin(\beta) - 3\,l_3\ \cos(\beta)) \\ 1/4\ \sin(\beta)\cos(\alpha)\,l_4\,\omega_g\,\omega_i - 3/4\ \cos(\beta)\cos(\alpha)\,l_3\,\omega_g\,\omega_i \cdots \\ \cdots - 3/4\ \sin(\beta)\sin(\alpha)\,l_3\,\alpha_i - 1/4\ \cos(\beta)\sin(\alpha)\,l_4\,\alpha_i \\ 1/4\ \sin(\beta)\sin(\alpha)\,l_4\,\omega_g\,\omega_i - 3/4\ \cos(\beta)\sin(\alpha)\,l_3\,\omega_g\,\omega_i \cdots \\ \cdots + 3/4\ \sin(\beta)\cos(\alpha)\,l_3\,\alpha_i + 1/4\ \cos(\beta)\cos(\alpha)\,l_4\,\alpha_i \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_i} \times (\overrightarrow{v_D} - \overrightarrow{v_B}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \\ v_{DBx} & v_{DBy} & v_{DBz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4\,{\omega_i}^2\,(3\,l_3\ \sin(\beta) + l_4\ \cos(\beta)) \\ 1/4\,\omega_i\ \sin(\alpha)\,(\sin(\beta)\,l_4\,\omega_i - 3\ \cos(\beta)\,l_3\,\omega_i + 4\ \sin(\alpha)\,\omega_g\,l_2) \\ -1/4\,\omega_i\ \cos(\alpha)\,(\sin(\beta)\,l_4\,\omega_i - 3\ \cos(\beta)\,l_3\,\omega_i + 4\ \sin(\alpha)\,\omega_g\,l_2) \end{bmatrix}$$

Dit wordt allemaal opgeteld.

$$\overrightarrow{a_D} = \left[\begin{array}{c} 1/4\,{\omega_g}^2\,(3\,l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta) - 4\,l_1) + 1/4\,\alpha_i\,(l_4\,\sin(\beta) - 3\,l_3\,\cos(\beta)) \cdots \\ \cdots + 1/4\,{\omega_i}^2\,(3\,l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta)) \\ a_v\,\cos(\alpha) - 1/4\,\alpha_g\,\cos(\alpha)\,(3\,l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta) - 4\,l_1) \cdots \\ \cdots + 1/4\,\cos(\alpha)\,\omega_g\,\omega_i\,(l_4\,\sin(\beta) - 3\,l_3\,\cos(\beta)) + 1/4\,\sin(\beta)\cos(\alpha)\,l_4\,\omega_g\,\omega_i \cdots \\ \cdots - 3/4\,\cos(\beta)\cos(\alpha)\,l_3\,\omega_g\,\omega_i - 3/4\,\sin(\beta)\sin(\alpha)\,l_3\,\alpha_i \cdots \\ \cdots - 1/4\,\cos(\beta)\sin(\alpha)\,l_4\,\alpha_i + 1/4\,\omega_i\,\sin(\alpha)\,(\sin(\beta)\,l_4\,\omega_i - 3\,\cos(\beta)\,l_3\,\omega_i + 4\,\sin(\alpha)\,\omega_g\,l_2) \\ a_v\,\sin(\alpha) - 1/4\,\alpha_g\,\sin(\alpha)\,(3\,l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta) - 4\,l_1) \cdots \\ \cdots + 1/4\,\sin(\alpha)\,\omega_g\,\omega_i\,(l_4\,\sin(\beta) - 3\,l_3\,\cos(\beta)) + 1/4\,\sin(\beta)\sin(\alpha)\,l_4\,\omega_g\,\omega_i \cdots \\ \cdots - 3/4\,\cos(\beta)\sin(\alpha)\,l_3\,\omega_g\,\omega_i + 3/4\,\sin(\beta)\cos(\alpha)\,l_3\,\alpha_i \cdots \\ +1/4\,\cos(\beta)\cos(\alpha)\,l_4\,\alpha_i - 1/4\,\omega_i\,\cos(\alpha)\,(\sin(\beta)\,l_4\,\omega_i - 3\,\cos(\beta)\,l_3\,\omega_i + 4\,\sin(\alpha)\,\omega_g\,l_2) \end{array}\right]$$

3 Dynamica

3.1 Vraag 1

3.1.1 Ogenblikkelijke impulsvector landingsgestel

De impuls van het landingsgestel is gemakkelijk te berekenen indien de snelheidsvector van het massacentrum en de massa van het landingsgestel bepaald zijn. Deze moeten dan alleen nog met elkaar vermenigvuldigd worden.

$$\overrightarrow{p_l} = m_l\,\overrightarrow{v_D}$$

$$= \begin{bmatrix} -3/4\,\omega_i\,m_l\,\left(l_3\,\cos(\beta) - 1/3\,l_4\,\sin(\beta)\right) \\ -1/4\,m_l\,\left(\left(\cos(\beta)\,l_4\,\omega_g + 3\,\sin(\beta)\,l_3\,\omega_g - 4\,l_1\,\omega_g - 4\,v_v\right)\cos(\alpha) + \omega_i\,\sin(\alpha)\left(3\,l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta)\right)\right) \\ 1/4\,m_l\,\left(\left(-\cos(\beta)\,l_4\,\omega_g - 3\,\sin(\beta)\,l_3\,\omega_g + 4\,l_1\,\omega_g + 4\,v_v\right)\sin(\alpha) + \omega_i\,\cos(\alpha)\left(3\,l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta)\right)\right) \end{bmatrix}$$

3.1.2 Verandering impulsvector landingsgestel

De verandering van de impulsvector is gelijk aan de afgeleide van de impulsvector. Aangezien de massa van het landingsgestel niet verandert, moet alleen de snelheid in de formule uit het vorige onderdeel vervangen worden door de versnelling van het massacentrum van het landingsgestel.

$$\frac{d\overrightarrow{p_l}}{dt} = m_l\,\overrightarrow{a_D}$$

$$= \begin{bmatrix} 3/4\,\left(\left(1/3\,l_4\,{\omega_g}^2 + 1/3\,l_4\,{\omega_i}^2 - l_3\,\alpha_i\right)\cos(\beta) + \left(l_3\,{\omega_g}^2 + l_3\,{\omega_i}^2 + 1/ \right.\right. \\ \left(\left(\left(-3/2\,l_3\,\omega_g\,\omega_i - 1/4\,l_4\,\alpha_g\right)\cos(\beta) + \left(-3/4\,l_3\,\alpha_g + 1/2\,l_4\,\omega_g\,\omega_i\right)\sin(\beta) + l_1\,\alpha_g + a\_v\right)\cos(\alpha) - 3/4\,\left(\left(\right.\right.\right. \\ \left(\left(\left(-3/2\,l_3\,\omega_g\,\omega_i - 1/4\,l_4\,\alpha_g\right)\cos(\beta) + \left(-3/4\,l_3\,\alpha_g + 1/2\,l_4\,\omega_g\,\omega_i\right)\sin(\beta) + l_1\,\alpha_g + a\_v\right)\sin(\alpha) + 3/4\,\left(\left(l\right.\right.\right. \end{bmatrix}$$

3.1.3 Ogenblikkelijke impulsvector wiel

Voor het wiel volgt een zeer gelijkaardige redenering als voor het landingsgestel. De massa van het voorwerp wordt vermenigvuldigd met de snelheidsvector van het massacentrum om de impuls te bekomen.

$$\overrightarrow{p_w} = m_w\,\overrightarrow{v_C} \quad = \begin{bmatrix} m_w\,\omega_i\,\left(-l_3\,\cos(\beta) + l_4\,\sin(\beta)\right) \\ -m_w\,\left(\left(\cos(\beta)\,l_4\,\omega_g + \sin(\beta)\,l_3\,\omega_g - l_1\,\omega_g - v_v\right)\cos(\alpha) + \omega_i\,\sin(\alpha)\left(l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta)\right)\right) \\ m_w\,\left(\left(-\cos(\beta)\,l_4\,\omega_g - \sin(\beta)\,l_3\,\omega_g + l_1\,\omega_g + v_v\right)\sin(\alpha) + \omega_i\,\cos(\alpha)\left(l_3\,\sin(\beta) + l_4\,\cos(\beta)\right)\right) \end{bmatrix}$$

3.1.4 Verandering impulsvector wiel

De afgeleide van de impulsvector is ook hier gelijk aan het product van de massa van het wiel met de versnellingsvector van het massacentrum van het wiel.

$$\frac{d\overrightarrow{p_w}}{dt} = m_w\,\overrightarrow{a_C} \quad = \begin{bmatrix} m_w\,\left(\left(l_3\,{\omega_g}^2 + l_3\,{\omega_i}^2 + l_4\,\alpha_i\right)\sin(\beta) + \left(l_4\,{\omega_g}^2 + l_4\,{\omega_i}^2 - l_3\,\alpha\right.\right. \\ \left(\left(\left(-2\,l_3\,\omega_g\,\omega_i - l_4\,\alpha_g\right)\cos(\beta) + \left(2\,l_4\,\omega_g\,\omega_i - l_3\,\alpha_g\right)\sin(\beta) + l_1\,\alpha_g + a\_v\right)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\left(\left(\right.\right.\right. \\ \left(\left(\left(-2\,l_3\,\omega_g\,\omega_i - l_4\,\alpha_g\right)\cos(\beta) + \left(2\,l_4\,\omega_g\,\omega_i - l_3\,\alpha_g\right)\sin(\beta) + l_1\,\alpha_g + a\_v\right)\sin(\alpha) + \left(\left(l_3\,{\omega_i}^2 + \right.\right.\right. \end{bmatrix}$$

3.2 Vraag 2

3.2.1 Ogenblikkelijke impulsmomentvector landingsgestel

De impulsvector is gedefinieerd als het product van de inertiematrix met de rotatievector. Aangezien de inertiematrix uitgedrukt is in het $x'''y'''z'''$-assenstelsel, moet de rotatievector ook in dit assenstelsel uitgedrukt worden. Ten slotte wordt deze vector nog getransformeerd naar het wereldassenstelsel om de gevraagde impulsmomentvector te bekomen.

$$\overrightarrow{\omega}_{l,I} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_i \\ 0 \end{bmatrix} + R^{x''y''z'' \to x'''y'''z'''} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\beta)\,\omega_g \\ \omega_i \\ \cos(\beta)\,\omega_g \end{bmatrix}$$

$$L_l = I_l\,\overrightarrow{\omega}_{l,I} = \begin{bmatrix} -I\_l\_xx\,\sin(\beta)\,\omega_g \\ I\_l\_yy\,\omega_i \\ I\_l\_zz\,\cos(\beta)\,\omega_g \end{bmatrix}$$

$$L_{l,wereld} = R^{x'''y'''z''' \to xyz}\,(L_I + \overrightarrow{r_{DC}} \times (m_l\,\overrightarrow{v_C}))$$
$$= \begin{bmatrix} 3/4\,l\_3\,m_l\,(\omega_g\,\cos(\beta)\,l_4 + \omega_g\,\sin(\beta)\,l_3 - l_1\,\omega_g - v_v)\cos(\alpha) + 1/4\,(4 \\ 1/4\,\left(4\,\omega_g\,(I\_l\_xx - I\_l\_zz)\,(\cos(\beta))^2 + l\_4\,\omega_g\,\cos(\beta)\,l_4\,m_l + l\_4\,\omega_g\,\sin(\beta)\,l_3\,m_l - l\_4\,(l_1\,\omega_g + v_v)\,m_l - 4\,I \right. \\ 1/4\,\left(4\,\omega_g\,(I\_l\_zz - I\_l\_xx)\,(\cos(\beta))^2 - l\_4\,\omega_g\,\cos(\beta)\,l_4\,m_l - l\_4\,\omega_g\,\sin(\beta)\,l_3\,m_l + (l \right. \end{bmatrix}$$

3.2.2 Ogenblikkelijke impulsmomentvector wiel

Voor de berekening van de impulsmomentvector van het wiel wordt een gelijkaaridge redenering gevolgd als bij het landingsgestel. Eerst wordt alles uitgedrukt in het $x'''y'''z'''$-assenstelsel. Het product van de inertiematrix en de rotatievector wordt genomen en vervolgesn wordt dit resultaat terug naar het wereldassenstelsel geconverteerd.

$$\overrightarrow{\omega}_{w,I} = \overrightarrow{\omega}_{l,I} + \begin{bmatrix} -\omega_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\beta)\,\omega_g - \omega_w \\ \omega_i \\ \cos(\beta)\,\omega_g \end{bmatrix}$$

$$L_w = I_w\,\overrightarrow{\omega}_{w,I} = \begin{bmatrix} I\_w\_xx\,(-\sin(\beta)\,\omega_g - \omega_w) \\ I\_w\_yy\,\omega_i \\ I\_w\_zz\,\cos(\beta)\,\omega_g \end{bmatrix}$$

$$L_{w,wereld} = R^{x'''y'''z''' \to xyz}\,L_w$$
$$= \begin{bmatrix} -(\omega_g\,(I\_w\_xx - I\_w\_zz)\sin(\beta) + I\_w\_xx\,\omega_w)\cos(\beta) \\ \left(\omega_g\,(I\_w\_xx - I\_w\_zz)\,(\cos(\beta))^2 - I\_w\_xx\,(\sin(\beta)\,\omega_w + \omega_g)\right)\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\,I\_w\_yy\,\omega_i \\ \left(-\omega_g\,(I\_w\_xx - I\_w\_zz)\,(\cos(\beta))^2 + I\_w\_xx\,(\sin(\beta)\,\omega_w + \omega_g)\right)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\,I\_w\_yy\,\omega_i \end{bmatrix}$$

3.2.3 Verandering impulsmomentvector landingsgestel

$$\left(\frac{dL_l}{dt}\right)_{rel} = I_l\left(R^{x''y''z'' \to x'''y'''z'''} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_i \\ 0 \end{bmatrix} + \left(R^{x''y''z'' \to x'''y'''z'''} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_g \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_i \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} I\_l\_xx\,(-\sin(\beta)\,\alpha_g - \cos(\beta)\,\omega_g\,\omega_i) \\ I\_l\_yy\,\alpha_i \\ I\_l\_zz\,(\cos(\beta)\,\alpha_g - \sin(\beta)\,\omega_g\,\omega_i) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega}_{l,I} \times L_l = \begin{bmatrix} -\cos(\beta)\,\omega_g\,\omega_i\ (I\_l\_yy - I\_l\_zz) \\ -\sin(\beta)\cos(\beta)\,{\omega_g}^2\,(I\_l\_xx - I\_l\_zz) \\ \sin(\beta)\,\omega_g\,\omega_i\ (I\_l\_xx - I\_l\_yy) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\frac{dL_l}{dt} &= \left(\frac{dL_l}{dt}\right)_{rel} + \overrightarrow{\omega}_{l,I} \times L_l \\ &= \begin{bmatrix} -\omega_g\,\omega_i\ (I\_l\_xx + I\_l\_yy - I\_l\_zz)\cos(\beta) - I\_l\_xx\ \sin(\beta)\,\alpha_g \\ -\sin(\beta)\cos(\beta)\,{\omega_g}^2\,(I\_l\_xx - I\_l\_zz) + I\_l\_yy\,\alpha_i \\ \omega_g\,\omega_i\ (I\_l\_xx - I\_l\_yy - I\_l\_zz)\sin(\beta) + I\_l\_zz\ \cos(\beta)\,\alpha_g \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dL_{l,wereld}}{dt} &= R^{x'''y'''z'''\to xyz}\,\frac{dL_l}{dt} \\ &= \begin{bmatrix} 2\,\omega_g\,\omega_i\ (I\_l\_zz - I\_l\_xx)\,(\cos(\beta))^2 + \\ \alpha_g\ \sin(\alpha)\,(I\_l\_xx - I\_l\_zz)\,(\cos(\beta))^2 + 1/4\ \big((-8\,\omega_g\,\omega_i\ (I\_l\_xx - I\_l\_zz)\sin(\beta) + l\_4\ m_l\ (2\,l_3\,\omega_g\,\omega_i + l_4\,\alpha_g) \\ 1/4\ \Big(4\,\alpha_g\ (I\_l\_zz - I\_l\_xx)\,(\cos(\beta))^2 + (-8\,\omega_g\,\omega_i \end{bmatrix}\end{aligned}$$

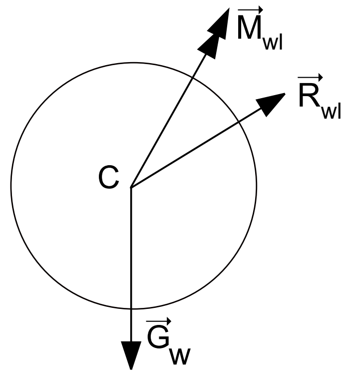
3.2.4 Verandering impulsmomentvector wiel

$$\begin{aligned}\left(\frac{dL_w}{dt}\right)_{rel} &= I_w\ \left[\left(\left(R^{x''y''z''\to x'''y'''z'''}\ \begin{bmatrix}0\\0\\\alpha_g\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\\alpha_i\\0\end{bmatrix} + \left(R^{x''y''z''\to x'''y'''z'''}\ \begin{bmatrix}0\\0\\\omega_g\end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix}0\\\omega_i\\0\end{bmatrix}\right)\right.\right. \\ &\quad \left.+ \left(R^{x''y''z''\to x'''y'''z'''}\ \begin{bmatrix}0\\0\\\omega_g\end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix}-\omega_g\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\\omega_i\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-\omega_w\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha_w\\0\\0\end{bmatrix}\right] \\ &= \begin{bmatrix} -\cos(\beta)\,\omega_g\,\omega_i\ (I\_w\_yy - I\_w\_zz) \\ -(\sin(\beta)\,\omega_g + \omega_w)\cos(\beta)\,\omega_g\ (I\_w\_xx - I\_w\_zz) \\ (\sin(\beta)\,\omega_g + \omega_w)\,\omega_i\ (-I\_w\_yy + I\_w\_xx) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

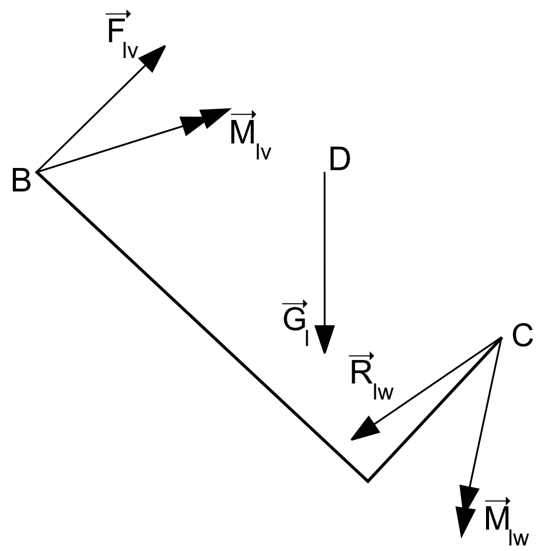
$$\overrightarrow{\omega}_{w,I} \times L_w = \begin{bmatrix} -\cos(\beta)\,\omega_g\,\omega_i\ (I\_w\_yy - I\_w\_zz) \\ -(\sin(\beta)\,\omega_g + \omega_w)\cos(\beta)\,\omega_g\ (I\_w\_xx - I\_w\_zz) \\ (\sin(\beta)\,\omega_g + \omega_w)\,\omega_i\ (-I\_w\_yy + I\_w\_xx) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\frac{dL_w}{dt} &= \left(\frac{dL_w}{dt}\right)_{rel} + \overrightarrow{\omega}_{w,I} \times L_w \\ &= \begin{bmatrix} -\omega_g\,\omega_i\ (I\_w\_xx + I\_w\_yy - I\_w\_zz)\cos(\beta) - I\_w\_xx\ (\sin(\beta)\,\alpha_g - \alpha_w) \\ -(\omega_g\ (I\_w\_xx - I\_w\_zz)\sin(\beta) + \omega_w\ (I\_w\_xx + I\_w\_yy - I\_w\_zz))\,\omega_g\ \cos(\beta) + I\_w\_yy\,\alpha_i \\ \omega_g\,\omega_i\ (I\_w\_xx - I\_w\_yy - I\_w\_zz)\sin(\beta) + I\_w\_zz\ \cos(\beta)\,\alpha_g + \omega_i\,\omega_w\ (I\_w\_xx - I\_w\_yy + I\_w\_zz) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dL_{w,wereld}}{dt} &= R^{x'''y'''z'''\to xyz}\,\frac{dL_w}{dt} \\ &= \begin{bmatrix} -2\,\omega_g\,\omega_i\ (I\_w\_xx - I\_w\_zz)\,(\cos(\beta))^2 + (-\alpha_g\ (I\_w\_xx - I\_w \\ \sin(\alpha)\,\alpha_g\ (I\_w\_xx - I\_w\_zz)\,(\cos(\beta))^2 + (-(2\,\omega_g\ (I\_w\_xx - I\_w\_zz)\sin(\beta) + \omega_w\ (I\_w\_xx - I\_w\_yy + I\_ \\ -\cos(\alpha)\,\alpha_g\ (I\_w\_xx - I\_w\_zz)\,(\cos(\beta))^2 + ((2\,\omega_g\ (I\_w\_xx - I\_w\_zz)\sin(\beta) + \omega_w\ (I\_w\_xx - I\_w\_yy + I\_ \end{bmatrix}\end{aligned}$$



Figuur 3: Het vrijlichaamsdiagram van het wiel



Figuur 4: Het vrijlichaamsdiagram van het landingsgestel

Vrijlichaamsdiagrammen wiel en landingsgestel

3.3 Vraag 3

Om de kracht op de vleugel door het landingsgestel te berekenen is het door een gebrek aan gegevens niet mogelijk om meteen de vleugel vrij te maken. Daar spelen te veel onbekende krachten op in. Het is wel mogelijk om de kracht van de vleugel op het landingsgestel te berekenen. Wegens de 3^{de} wet van Newton is deze gelijk aan de omgekeerde kracht van het landingsgestel op de vleugel. Het krachtenevenwicht van het landingsgestel is volledig bepaald als de kracht van het wiel op het landingsgestel bekend is. Het wiel wordt dus als eerste volledig vrijgemaakt.

3.3.1 Het wiel

OP het wiel werken twee krachten in, namelijk het gewicht en de kracht van het landingsgestel op het wiel. De som van deze twee krachten is gelijk aan de verandering van de impuls van het wiel.

$$\overrightarrow{G_w} + \overrightarrow{R_{wl}} = \frac{d\overrightarrow{p_w}}{dt}$$

In een vorige opgave is de verandering van het impuls al eens berekend. Het gewicht wordt gegeven door de volgende formule.

$$\overrightarrow{G_w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -gm_w \end{bmatrix}$$

De kracht $\overrightarrow{R_{wl}}$ wordt nu berekend en omgekeerd om de gewenste kracht $\overrightarrow{R_{lw}}$ te bekomen.

3.3.2 Het landingsgestel

Op het landingsgestel werken er drie krachten. De eerste kracht is natuurlijk het gewicht van het landingsgestel zelf. Vervolgens is er nog de kracht omwille van het wiel die in het vorige deel werd berekent en de kracht door de vleugel. Deze laatste kracht wordt berekend en omgedraaid om de gevraagde kracht te bekomen.

$$\overrightarrow{G_l} + \overrightarrow{R_{lw}} + \overrightarrow{F_{lv}} = \frac{d\overrightarrow{p_l}}{dt}$$

Van deze termen is er maar één onbekend, namelijk de kracht door de vleugel. De vergelijking wordt dus opgelost naar deze term en de oplossing wordt omgedraaid. Dit is de gevraagde kracht van het landingsgestel op de vleugel.

3.4 Vraag 4

$$M_{w,l} = \frac{dL_{w,wereld}}{dt}$$

$$M_{l,w} = -M_{w,l}$$

$$M_{l,v} = \frac{dL_{l,wereld}}{dt} - (-\overrightarrow{r}_{D,C} \times R_{l,w}) - (-\overrightarrow{r}_{D,B} \times F_{l,v}) - M_{l,w}$$

$$M_{v,l} = -M_{l,v} = \frac{dL_{l,wereld}}{dt} + \left[\begin{array}{r} 1/16 \; \left(\left(-9 \; \left(m_l + \frac{16\, m_w}{9} \right) \alpha_g \, {l_3}^2 + 12\, l_4\, \omega_i\, l_3 \; (m_l + 16/3\, m_w)\, \omega_g - 16 \; \left((-m_l/16 - \ldots \right.\right.\right. \\ 1/16 \; \left(\left(-12\, l_4\, \omega_i\, l_3 \; (m_l + 16/3\, m_w)\, \omega_{\ldots} \right.\right. \end{array} \right.$$

3.5 Vraag 5

$$M_{l,v} = \frac{dL_{l,wereld}}{dt} + \left[\begin{array}{r} 1/16 \; \left(\left(9 \; \left(m_l + \frac{16\, m_w}{9} \right) \alpha_g \, {l_3}^2 - 12\, l_4\, \omega_i\, l_3 \; (m_l + 16/3\, m_w)\, \omega_g + 16 \; \left((-m_l/16 - m_w)\, {l_4}^2 + \ldots \right.\right.\right. \\ 1/16 \; \left(\left(12\, l_4\, \omega_i\, l_3 \; (m_l + 16/3\, m_w)\, \omega_g + 16\, \alpha_g \; \left(\ldots \right.\right.\right. \end{array} \right.$$