Case Dynamica 2014

Pieter Van Damme　　Wouter Van Gansbeke　　Lennert Vanmunster
Ruben Verhulst

27 november 2014

1 Transformatiematrices

1.1 Van het $x'y'z'$-assenstelstel naar het xyz-assenstelsel

Het $x'y'z'$ assenstel wordt bekomen door het xyz-assenstelsel te roteren met een hoek α rond de x-as. De omgekeerde transformatie draait dus met een negatieve hoek α rond de x-as.

$$R^{x'y'z'\to xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

1.2 Van het $x'''y'''z'''$-assenstelsel naar het $x''y''z''$-assenstelsel

Het $x'''y'''z'''$-assenstelsel wordt bekomen door het $x''y''z''$-assenstelsel te roteren met een hoek β rond de y''-as. De transformatiematrix draait dus met een negatieve hoek β rond de y'''-as.

$$R^{x'''y'''z'''\to x''y''z''} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

Voor de omgekeerde transformatie wordt deze matrix geïnverteerd.

$$R^{x''y''z''\to x'''y'''z'''} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

1.3 Van het $x'''y'''z'''$-assenstelsel naar het xyz-assenstelsel

Om van het $x'''y'''z'''$-assenstelsel naar het xyz-assenstelsel te gaan, worden de vorige twee berekende transformatiematrices met alkaar vermenigvuldigd. Eerst worden de $x'''y'''z'''$-coördinaten getransformeerd naar het $x''y''z''$-assenstelsel. Vervolgens worden ze omgezet naar het xyz-assenstelsel.

$$\begin{aligned} R^{x'''y'''z'''\to xyz} &= R^{x'''y'''z'''\to x''y''z''} R^{x'y'z'\to xyz} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\beta) \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2 Kinematica

2.1 Vraag 1

2.1.1 Ogenblikkelijke totale rotatiesnelheidsvector

Om de ogenblikkelijke totale rotatiesnelheidsvector $\overrightarrow{\omega}_w$ te bepalen worden de drie afzonderlijke rotatiesnelheidsvectoren uitgedrukt in het wereldassenstelsel en vervolgens opgeteld.

$$\overrightarrow{\omega}_w = \overrightarrow{\omega}_g + \overrightarrow{\omega}_i + \overrightarrow{\omega}_w$$

Deze termen worden nu afzonderlijk bepaald.

$$\overrightarrow{\omega}_g = R^{x'y'z' \to xyz}\,\overrightarrow{\omega}'_g \quad = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\alpha\,\omega_g \\ \cos(\alpha)\,\omega_g \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega}_i = R^{x'y'z' \to xyz}\,\overrightarrow{\omega}'_g \quad = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\alpha\,\omega_i \\ \sin(\alpha)\,\omega_i \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega}_w = R^{x'''y'''z''' \to xyz}\,\overrightarrow{\omega}'''_w \quad = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\beta) \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\beta)\,\omega_w \\ -\sin(\alpha)\sin(\beta)\,\omega_w \\ \cos(\alpha)\sin(\beta)\,\omega_w \end{bmatrix}$$

De ogenblikkelijke rotatievector wordt dus weergegeven door door de volgende vergelijking.

$$\overrightarrow{(}\omega)_w = \begin{bmatrix} -\cos(\beta)\,\omega_w \\ \cos(\alpha)\,\omega_i - \sin(\alpha)(\omega_g + \sin\beta\,\omega_w) \\ \sin(\alpha)\,\omega_i + \cos(\alpha)(\omega_g + \sin\beta\,\omega_w) \end{bmatrix}$$

2.1.2 Ogenblikkelijke totale rotatieversnellingsvector

De totale rotatieversnellingsvector is de afgeleide van de rotatiesnelheidsvector naar de tijd. Hierbij moeten er termen geïntroduceerd worden die de rotatie van de snelheidsvectoren weergeven.

$$\frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt} = \overrightarrow{\alpha}_g + \overrightarrow{\alpha}_w + \overrightarrow{\alpha}_i + \overrightarrow{\omega}_g \times \overrightarrow{\omega}_i + \overrightarrow{\omega}_g \times \overrightarrow{\omega}_w + \overrightarrow{\omega}_i \times \overrightarrow{\omega}_w$$

Al deze termen worden nu afzonderlijk bepaald.

$$\overrightarrow{\alpha_g} = R^{x'y'z' \to xyz} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_g \end{bmatrix} \quad = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\alpha)\alpha_g \\ \cos(\alpha)\alpha_g \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\alpha_i} = R^{x'y'z' \to xyz} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\alpha)\alpha_i \\ \sin(\alpha)\alpha_i \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\alpha_w} = R^{x'''y'''z'''\to xyz} \begin{bmatrix} \alpha_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta)\alpha_w \\ \sin(\alpha)\sin(\beta)\alpha_w \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta)\alpha_w \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega}_g \times \overrightarrow{\omega}_i = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e}_x & \overrightarrow{e}_y & \overrightarrow{e}_z \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_i\omega_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega}_g \times \overrightarrow{\omega}_w = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e}_x & \overrightarrow{e}_y & \overrightarrow{e}_z \\ \omega_{gx} & \omega_{gy} & \omega_{gz} \\ \omega_{wx} & \omega_{wy} & \omega_{wz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos(\alpha)\cos(\beta)\omega_g\omega_w \\ -\sin(\alpha)\cos(\beta)\omega_g\omega_w \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega}_i \times \omega_w = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e}_x & \overrightarrow{e}_y & \overrightarrow{e}_z \\ \omega_{ix} & \omega_{iy} & \omega_{iz} \\ \omega_{wx} & \omega_{wy} & \omega_{wz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\beta)\omega_i\omega_w \\ -\sin(\alpha)\cos(\beta)\omega_i\omega_w \\ \cos(\beta)\cos(\beta)\omega_i\omega_w \end{bmatrix}$$

De totale ogenblikkelijke rotatieversnellingsvector wordt dus door de volgende formule gegeven.

$$\frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt} = \begin{bmatrix} \cos(\beta)\alpha_w - \omega_g\omega_i + \sin(\beta)\omega_i\omega_w \\ -\sin(\alpha)\alpha_g + \cos(\alpha)\alpha_i + \sin(\alpha)\sin(\beta)\alpha_w - \cos(\alpha)\cos(\beta)\omega_g\omega_w - \sin(\alpha)\sin(\beta)\omega_i\omega_w \\ \cos(\alpha)\alpha_g + \sin(\alpha)\alpha_i - \cos(\alpha)\sin(\beta)\alpha_w - \sin(\alpha)\cos(\beta)\omega_g\omega_w + \cos(\alpha)\cos(\beta)\omega_i\omega_w \end{bmatrix}$$

2.2 Vraag 2

2.2.1 De ogenblikkelijke snelheid

De snelheid van C kan beschouwd worden als de som van de relatieve snelheid van het punt C in het $x'y'z'$-assenstelsel en de snelheid van dat assenstelsel. In dit assenstelsel kan de beweging van C beschouwd worden als een som van rotaties, nl. een rotatie rond het punt A door $\overrightarrow{\omega}_g$ en een rotatie rond het punt B door $\overrightarrow{\omega}_i$

$$\overrightarrow{v}_C = \overrightarrow{v}_A + \overrightarrow{\omega}_g \times (\overrightarrow{r}_C - \overrightarrow{r}_A) + \overrightarrow{\omega}_i \times (\overrightarrow{r}_C - \overrightarrow{r}_B)$$

2.3 Vraag 3

2.4 Vraag 4

3 Dynamica

3.1 Vraag 1

3.2 Vraag 2

3.3 Vraag 3

3.4 Vraag 4

3.5 Vraag 5