Ejercicios de Análisis Matemático II

22 de abril de 2016

Índice

1. Sucesiones de funciones

1.1. Sucesiones de funciones

1.2. Series de potencias

2. Integral de Lebesgue

2.1. Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

2.1.1. Ejercicio 4

Sea μ^* una medida exterior en un conjunto no vacío Ω. Probar que la restricción de μ^* a la σ -álgebra C_{Ω,μ^*} es una medida completa (esto es, todo subconjunto B de un conjunto $Z \in C_{\Omega,\mu^*}$ tal que $\mu^*(Z) = 0$ es también un conjunto de la propia σ -álgebra)

Sea Z un conjunto tal que $\mu^*(Z) = 0$ y $B \subseteq Z$, entonces , B será medible si y solo si

$$\forall A \subseteq \Omega, \mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

Para probarlo partimos de la desigualdad que nos da la subaditividad de una medida exterior, es decir:

$$A \subseteq \Omega \ \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

Si además usamos que

$$A \cap B \subseteq A \cap B \subseteq Z \Rightarrow \mu^*(A \cap B) = 0$$

entonces obtenemos

$$A \subseteq \Omega \ \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c) \leq \mu^*(A)$$

como queríamos demostrar.

2.1.2. Ejercicio 5

Probar que M es la mayor σ -álgebra que contiene los intervalos acotados y sobre la que λ^* es aditiva.

Supongamos que existe otra σ -álgebra N que contiene los intervalos acotados y sobre la que λ^* es aditiva. Terminaremos demostrando que en ese caso $N \subseteq M$.

Recordemos que $M = \{B \cup Z : B \in \mathfrak{B}, \lambda^*(Z) = 0\} \subseteq C_{\mathbb{R},\lambda}$

La σ-subaditividad nos decía:

$$\lambda^*(A \cup B) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$$

Llamaremos $\lambda' = \lambda^*/N$

Por ser una σ-álgebra $\Omega \in N$, al estar hablando de intervalos $\Omega = \mathbb{R}$

Sea $E \subseteq \mathbb{R}$, cogemos un conjunto arbitrario $A \subseteq \mathbb{R}$. Sabemos, en virtud de la propiedad de regularidad de la medida exterior (Prop. 2.1.10), que existe un boreliano B

$$B : A \subseteq B, \lambda'(A) = \lambda'(B)$$

$\lambda'(A) = \lambda'(B)$, usando la propiedad de que N contiene los intervalos acotados podemos usar la $\sigma-$aditividad. $B \cap E, B \cap E^c \in N$

$\lambda'(B) = \lambda'((B \cap E) \cup (B \cap E^c)) \geqslant \lambda'(A \cap E) + \lambda'(A \cap E^c) \geqslant \lambda'(A)$

Por tanto $E \in C_{\mathbb{R},\lambda'}$ lo que es equivalente a $E \in M \implies N \subseteq M$

2.1.3. Ejercicio 6

Probar que la unión numerable de conjuntos de medida nula es un conjunto de medida nula. Dedúzcase que $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$ son dos conjuntos de medida nula.

Sea $\mu(A_i) = 0\ \forall i \in \mathbb{N}$. Entonces, por la σ-aditividad, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$.

Probemos ahora que $\mathbb{N}$ es un conjunto de medida nula. Para ello, demostraremos en primer lugar que $\mu(\{n\}) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Definimos $A_k = [n - \frac{1}{k}, n + \frac{1}{k}]$. Por tanto, $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_k) = \text{lím}_k\, \mu(A_k) = \text{lím}_k \frac{2}{k} = 0$. Demostramos así que $\mu(\mathbb{N}) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{n\}) = 0$.

La prueba para $\mathbb{Q}$ es muy parecida. Como $\mathbb{Q}$ es numerable, podemos definir una sucesión $\{q_n\}$ tal que $q_n \in \mathbb{Q}\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\} = \mathbb{Q}$. Por tanto, $\mu(\mathbb{Q}) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{q_n\}) = 0$.

2.1.4. Ejercicio 7

Existencia de conjuntos no medibles

a) **Probar que la familia $\{x + \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}\}$ es una partición de $\mathbb{R}$.**

   Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces $x \in x + \mathbb{Q}$ dado que $x = x + 0$. Por ello, $\displaystyle\bigcup_{x\in\mathbb{R}}\{x + \mathbb{Q}\} = \mathbb{R}$.

   Sean $x, y, t \in \mathbb{R} : t \in x + \mathbb{Q}$ y $t \in y + \mathbb{Q}$. Entonces $\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q} : t = x + q_1 = y + q_2$. Así, $x = y + q_2 - q_1$, y, como $q_2 - q_1 \in \mathbb{Q}$, $x \in y + \mathbb{Q}$ y $x + \mathbb{Q} = y + \mathbb{Q}$.

   Así, esta familia está formada por conjuntos disjuntos (si un número está en dos elementos de la familia, estos son el mismo) cuya unión es $\mathbb{R}$: es una partición de $\mathbb{R}$.

b) **Pongamos $\{x + \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}\} = \{A_i : i \in I\}$ ($A_i \neq A_j$ para $i \neq j$) y, para cada $i \in I$, sea $x_i \in A_i \cap\,]0, 1]$. Probar que el conjunto $E = \{x_i : i \in I\}$ no es medible.**

   Sea $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ una numeración de $]-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. Obsérvese que $\{q_n + E : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de conjuntos disjuntos entre sí: si hay un $x \in (q_a + E) \cap (q_b + E)$ para algunos $a, b \in \mathbb{N}$, entonces $x = q_a + x_i = q_b + x_j$ para algunos $i, j \in I$. En ese caso $x_i = x_j + q_b - q_a \implies x_i \in x_j + \mathbb{Q}$. Como cada x_i está escogido de forma que dos distintos pertenecen a un elemento distinto de la partición $\{x + \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}\}$, necesariamente $x_i = x_j \implies q_a = q_b \implies q_a + E = q_b + E$.

   Supongamos que E es medible. En tal caso, $\lambda(E) = \lambda(E + k)\ \forall k \in \mathbb{R}$ dado que λ es invariante por traslación. Debido a la σ-aditividad de λ y a que los conjuntos $q_n + E$ son disjuntos entre sí, resulta que:

$$\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n + E)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(q_n + E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(E)$$

   Puede verse que $]0, 1] \subseteq \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n + E) \subseteq\,]-1, 2]$. Demostración de la primera inclusión: sea $x \in]0, 1]$. $x \in x + \mathbb{Q} \implies \exists i \in I : x \in A_i \implies \exists i \in I \exists q \in \mathbb{Q} : x = x_i + q \implies \exists q \in \mathbb{Q} : x \in q + E$, y como $|x_i - x| < 1$ puesto que $x_i, x \in]0, 1]$, ocurre que $q \in]-1, 1]$. Así, $q = q_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n + E)$. La otra inclusión se debe al rango de valores posible de los q_n y los x_i.

Aplicando que $A \subseteq B \implies \lambda(A) \leq \lambda(B)$, tendremos que $\lambda([0,1]) = 1 \leq \lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(q_n + E)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(E) \leq \lambda([-1,2]) = 3$. Como esto es imposible tanto si $\lambda(E) = 0$ (en cuyo caso $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(E) = 0 \ngeq 1$) como si $\lambda(E) \in \mathbb{R}^+$ (en cuyo caso $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(E) = +\infty \nleq 3$), la suposición de que E es medible resulta haber sido incorrecta, y E no es medible.

c) **Probar que cualquier subconjunto medible de E tiene medida cero.**

Los conjuntos $q_n + A$ son, de nuevo, disjuntos. Por ello, vuelve a ocurrir que $\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(q_n + A)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A)$. De nuevo, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(q_n + A) \subseteq]-1,2]$ y consecuentemente $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A) \leq \lambda([-1,2]) = 3$. La única posibilidad es que $\lambda(A) = 0$.

d) **Sea $M \subseteq \mathbb{R}$ con $\lambda^*(M) > 0$. Probar que M contiene un subconjunto no medible.**

Si M no es medible, el enunciado es cierto (M sería un subconjunto no medible de M). Sea M medible, es decir, $\lambda(M) = \lambda^*(M)$. Se observa que $M = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} M \cap (q + E)$: todo $m \in M$ tendrá en E un x_i representante de su clase de equivalencia según la partición $\{x + Q : x \in \mathbb{R}\}$, por lo que $x = q_a + x_i \in q_a + E$.

Supongamos que $M \cap (q + E)$ es medible para todo $q \in \mathbb{Q}$. En ese caso: (aparece un $\leq$ porque la unión no es disjunta)

$$\lambda(M) = \lambda(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} M \cap (q + E)) \leq \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda(M \cap (q + E)) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda((M - q) \cap E)$$

Que es igual a 0 por ser la suma de las medidas de subconjuntos de E medibles (porque suponemos que todos son medibles), las cuales son 0 por lo probado en *c*). Contradicción (hemos obtenido que $\lambda(M) \leq 0$), por lo cual alguno de los $M \cap (q + E)$ no será medible.

2.2. Integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

2.3. Teoremas de convergencia

3. Técnicas de integración

3.1. Técnicas de integración en una variable

3.2. Técnicas de integración en varias variables