Ejercicios de Análisis Matemático II

20 de abril de 2016

Índice

1. Sucesiones de funciones

1.1. Sucesiones de funciones

1.2. Series de potencias

2. Integral de Lebesgue

2.1. Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

5. Probar que M es la mayor σ -álgebra que contiene los intervalos acotados y sobre la que λ^* es aditiva.
Supongamos que existe otra σ -álgebra N que contiene los intervalos acotados y sobre la que λ^* es aditiva. Terminaremos demostrando que en ese caso $N \subseteq M$.
Recordemos que $M = \{B \cup Z : B \in \mathfrak{B}, \lambda^*(Z) = 0\} \subseteq C_{\mathbb{R},\lambda}$
La σ-subaditividad nos decía:

$$\lambda^*(A \cup B) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$$

Llamaremos $\lambda' = \lambda^*/N$
Por ser una σ-álgebra $\Omega \in N$, al estar hablando de intervalos $\Omega = \mathbb{R}$
Sea $E \subseteq \mathbb{R}$, cogemos un conjunto arbitrario $A \subseteq \mathbb{R}$. Sabemos, en virtud de la propiedad de regularidad de la medida exterior (Prop. 2.1.10), que existe un boreliano B

$$B : A \subseteq B, \lambda'(A) = \lambda'(B)$$

$\lambda'(A) = \lambda'(B)$, usando la propiedad de que N contiene los intervalos acotados podemos usar la $\sigma-$aditividad. $B \cap E, B \cap E^c \in N$
$\lambda'(B) = \lambda'\left((B \cap E) \cup (B \cap E^c)\right) \geqslant \lambda'(A \cap E) + \lambda'(A \cap E^c) \geqslant \lambda'(A)$
Por tanto $E \in C_{\mathbb{R},\lambda'}$ lo que es equivalente a $E \in M \implies N \subseteq M$
7. Existencia de conjuntos no medibles

a) Probar que la familia $\{x + \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}\}$ es una partición de $\mathbb{R}$.

Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces $x \in x + \mathbb{Q}$ dado que $x = x + 0$. Por ello, $\bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}} \{x + \mathbb{Q}\} = \mathbb{R}$.
Sean $x, y, t \in \mathbb{R} : t \in x + \mathbb{Q}$ y $t \in y + \mathbb{Q}$. Entonces $\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q} : t = x + q_1 = y + q_2$. Así, $x = y + q_2 - q_1$, y, como $q_2 - q_1 \in \mathbb{Q}$, $x \in y + \mathbb{Q}$ y $x + \mathbb{Q} = y + \mathbb{Q}$.

Así, esta familia está formada por conjuntos disjuntos (si un elemento está en dos elementos de la familia, estos son el mismo) cuya unión es $\mathbb{R}$: es una partición de $\mathbb{R}$.

b) Pongamos $\{x + \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}\} = \{A_i : i \in I\}$ ($A_i \neq A_j$ para $i \neq j$) y, para cada $i \in I$, sea $x_i \in A_i \cap \,]0, 1]$. Probar que el conjunto $E = \{x_i : i \in I\}$ no es medible.

Sea $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ una numeración de $]-1, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Supongamos que E es medible. En tal caso, $\lambda(E) = \lambda(E + k)$ $\forall k \in \mathbb{R}$ dado que λ es invariante por traslación. Debido a la σ-aditividad de λ y a que los conjuntos $q_n + E$ son disjuntos entre sí [proof needed], resulta que:

$$\lambda(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(q_n + E)) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lambda(q_n + E) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lambda(E)$$

Como $]0, 1] \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}(q_n + E) \subseteq \,]-1, 2]$ [proof needed], también tendremos que $\lambda(]0, 1]) = 1 \leq \lambda(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}(q_n + E)) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lambda(E) \leq \lambda(]-1, 2]) = 3$. Como esto es imposible tanto si $\lambda(E) = 0$ (en cuyo caso $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(E) = 0 \not\geq 1$) como si $\lambda(E) \in \mathbb{R}^+$ (en cuyo caso $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(E) = +\infty \not\leq 3$), la suposición de que E es medible resulta haber sido incorrecta, y E no es medible.

c) Probar que cualquier subconjunto medible de E tiene medida cero.

Los conjuntos $q_n + A$ son, de nuevo, disjuntos. Por ello, vuelve a ocurrir que $\lambda(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(q_n + A)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A)$. De nuevo, $\bigcup_{n=1}^{+\infty}(q_n + A) \subseteq]-1, 2]$ y por ello $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A) \leq \lambda(]-1,2]) = 3$. La única posibilidad es que $\lambda(A) = 0$.

d) Sea $M \subseteq \mathbb{R}$ con $\lambda^*(M) > 0$. Probar que M contiene un subconjunto no medible.

Si M no es medible, el enunciado es trivial (M sería un subconjunto no medible de M). Sea M medible, es decir, $\lambda(M) = \lambda^*(M)$. Se observa que $M = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} M \cap (q + E)$ [proof needed].

Supongamos que $M \cap (q + E)$ es medible para todo $q \in \mathbb{Q}$. En ese caso: (aparece un $\leq$ porque la unión no es disjunta)

$$\lambda(M) = \lambda(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} M \cap (q + E)) \leq \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda(M \cap (q + E)) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda((M - q) \cap E)$$

Que es igual a 0 por ser la suma de las medidas de subconjuntos de E medibles (porque suponemos que todos son medibles), las cuales son 0 por lo probado en c). Contradicción (hemos obtenido que $\lambda(M) \leq 0$), por lo cual alguno de los $M \cap (q + E)$ no será medible.

2.2. Integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

2.3. Teoremas de convergencia

3. Técnicas de integración

3.1. Técnicas de integración en una variable

3.2. Técnicas de integración en varias variables