Ejercicios de Análisis Matemático II

6 de mayo de 2016

Índice

1. Sucesiones de funciones

1.1. Sucesiones de funciones

1.2. Series de potencias

2. Integral de Lebesgue

2.1. Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

2.1.1. Ejercicio 3

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y sea Ω' un nuevo conjunto. Sea $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ una aplicación. Probar que $(\Omega', \{B \in \Omega' :\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\})$ es un espacio medible.
Definimos $\mathcal{A}' = \{B \in \Omega' :\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$, debemos demostrar que es σ-álgebra.
i) $\Omega' \in \mathcal{A}'$:
$f^{-1}(\Omega') = \Omega \in \mathcal{A}$ por ser $\mathcal{A}$ σ-álgebra.
ii) Si $\{A_n\}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{A}'$, entonces $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \in \mathcal{A}'$:
Si $A_i \in \mathcal{A}'\ \forall i \in \mathbb{N} \implies \forall i \in \mathbb{N} A_i \subseteq \Omega'\ : \left(f^{-1}(A_i)\right) \in \mathcal{A}$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{A}\ por\ ser\ \sigma - lgebra$$

iii) Si $A \in \mathcal{A}'$ entonces $A^c = \Omega' \setminus A \in \mathcal{A}'$:
Si $A \in \mathcal{A}' \implies f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$

$$f^{-1}(A^c) = f^{-1}(\Omega' \setminus A) = f^{-1}(\Omega') - f^{-1}(A) = \Omega - f^{-1}(A)$$

Por ser $\Omega, f^{-1}(A) \in \mathcal{A} \implies f^{-1}(A^c) \in \mathcal{A}$ por ser σ-álgebra. Por tanto $A^c \in \mathcal{A}$
$\Longrightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ es un espacio medible.

2.1.2. Ejercicio 4

Sea μ^* una medida exterior en un conjunto no vacío Ω. Probar que la restricción de μ^* a la σ -álgebra C_{Ω,μ^*} es una medida completa (esto es, todo subconjunto B de un conjunto $Z \in C_{\Omega,\mu^*}$ tal que $\mu^*(Z) = 0$ es también un conjunto de la propia σ -álgebra)
Sea Z un conjunto tal que $\mu^*(Z) = 0$ y $B \subseteq Z$, entonces , B será medible si y solo si

$$\forall A \subseteq \Omega, \mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

Para probarlo partimos de la desigualdad que nos da la subaditividad de una medida exterior, es decir:

$$A \subseteq \Omega\ \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

Si además usamos que

$$A \cap B \subseteq A \cap B \subseteq Z \Rightarrow \mu^*(A \cap B) = 0$$

entonces obtenemos

$$A \subseteq \Omega\ \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c) \leq \mu^*(A)$$

como queríamos demostrar.

2.1.3. Ejercicio 5

Probar que M es la mayor σ -álgebra que contiene los intervalos acotados y sobre la que λ^* es aditiva.
Supongamos que existe otra σ -álgebra N que contiene los intervalos acotados y sobre la que λ^* es aditiva. Terminaremos demostrando que en ese caso $N \subseteq M$.
Recordemos que $M = \{B \cup Z : B \in \mathfrak{B}, \lambda^*(Z) = 0\} \subseteq C_{\mathbb{R},\lambda}$

La σ-subaditividad nos decía:
$$\lambda^*(A \cup B) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$$
Llamaremos $\lambda' = \lambda^*/N$
Por ser una σ-álgebra $\Omega \in N$, al estar hablando de intervalos $\Omega = \mathbb{R}$
Sea $E \subseteq \mathbb{R}$, cogemos un conjunto arbitrario $A \subseteq \mathbb{R}$. Sabemos, en virtud de la propiedad de regularidad de la medida exterior (Prop. 2.1.10), que existe un boreliano B
$$B : A \subseteq B, \lambda'(A) = \lambda'(B)$$
$\lambda'(A) = \lambda'(B)$, usando la propiedad de que N contiene los intervalos acotados podemos usar la $\sigma-$aditividad. $B \cap E, B \cap E^c \in N$
$\lambda'(B) = \lambda'((B \cap E) \cup (B \cap E^c)) \geqslant \lambda'(A \cap E) + \lambda'(A \cap E^c) \geqslant \lambda'(A)$
Por tanto $E \in C_{\mathbb{R},\lambda'}$ lo que es equivalente a $E \in M \implies N \subseteq M$

2.1.4. Ejercicio 6

Probar que la unión numerable de conjuntos de medida nula es un conjunto de medida nula. Dedúzcase que $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$ son dos conjuntos de medida nula.

Sea $\mu(A_i) = 0\ \forall i \in \mathbb{N}$. Entonces, por la σ-aditividad, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$.

Probemos ahora que $\mathbb{N}$ es un conjunto de medida nula. Para ello, demostraremos en primer lugar que $\mu(\{n\}) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Definimos $A_k = [n - \frac{1}{k}, n + \frac{1}{k}]$. Por tanto, $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_k) = \lim_k \mu(A_k) = \lim_k \frac{2}{k} = 0$. Demostramos así que $\mu(\mathbb{N}) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{n\}) = 0$.

La prueba para $\mathbb{Q}$ es muy parecida. Como $\mathbb{Q}$ es numerable, podemos definir una sucesión $\{q_n\}$ tal que $q_n \in \mathbb{Q}\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\} = \mathbb{Q}$. Por tanto, $\mu(\mathbb{Q}) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{q_n\}) = 0$.

2.1.5. Ejercicio 7

Existencia de conjuntos no medibles

a) **Probar que la familia $\{x + \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}\}$ es una partición de $\mathbb{R}$.**

Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces $x \in x + \mathbb{Q}$ dado que $x = x + 0$. Por ello, $\displaystyle\bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x + \mathbb{Q}\} = \mathbb{R}$.

Sean $x, y, t \in \mathbb{R} : t \in x + \mathbb{Q}$ y $t \in y + \mathbb{Q}$. Entonces $\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q} : t = x + q_1 = y + q_2$. Así, $x = y + q_2 - q_1$, y, como $q_2 - q_1 \in \mathbb{Q}$, $x \in y + \mathbb{Q}$ y $x + \mathbb{Q} = y + \mathbb{Q}$.

Así, esta familia está formada por conjuntos disjuntos (si un número está en dos elementos de la familia, estos son el mismo) cuya unión es $\mathbb{R}$: es una partición de $\mathbb{R}$.

b) **Pongamos $\{x + \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}\} = \{A_i : i \in I\}$ $(A_i \neq A_j$ para $i \neq j)$ y, para cada $i \in I$, sea $x_i \in A_i \cap\ ]0, 1]$. Probar que el conjunto $E = \{x_i : i \in I\}$ no es medible.**

Sea $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ una numeración de $]-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. Obsérvese que $\{q_n + E : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de conjuntos disjuntos entre sí: si hay un $x \in (q_a + E) \cap (q_b + E)$ para algunos $a, b \in \mathbb{N}$, entonces $x = q_a + x_i = q_b + x_j$ para algunos $i, j \in I$. En ese caso $x_i = x_j + q_b - q_a \implies x_i \in x_j + \mathbb{Q}$.

Como cada x_i está escogido de forma que dos distintos pertenecen a un elemento distinto de la partición $\{x + \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}\}$, necesariamente $x_i = x_j \implies q_a = q_b \implies q_a + E = q_b + E$.

Supongamos que E es medible. En tal caso, $\lambda(E) = \lambda(E + k)\ \forall k \in \mathbb{R}$ dado que λ es invariante por traslación. Debido a la σ-aditividad de λ y a que los conjuntos $q_n + E$ son disjuntos entre sí, resulta que:

$$\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n + E)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(q_n + E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(E)$$

Puede verse que $]0, 1] \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n + E) \subseteq\ ] - 1, 2]$. Demostración de la primera inclusión: sea $x \in\ ]0, 1]$. $x \in x+\mathbb{Q} \implies \exists i \in I : x \in A_i \implies \exists i \in I \exists q \in \mathbb{Q} : x = x_i+q \implies \exists q \in \mathbb{Q} : x \in q+E$, y como $|x_i - x| < 1$ puesto que $x_i, x \in\ ]0, 1]$, ocurre que $q \in\ ] - 1, 1]$. Así, $q = q_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n + E)$. La otra inclusión se debe al rango de valores posible de los q_n y los x_i.

Aplicando que $A \subseteq B \implies \lambda(A) \leq \lambda(B)$, tendremos que $\lambda(]0, 1]) = 1 \leq \lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n + E)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(E) \leq \lambda(] - 1, 2]) = 3$. Como esto es imposible tanto si $\lambda(E) = 0$ (en cuyo caso $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(E) = 0 \not\geq 1$) como si $\lambda(E) \in \mathbb{R}^+$ (en cuyo caso $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(E) = +\infty \not\leq 3$), la suposición de que E es medible resulta haber sido incorrecta, y E no es medible.

c) **Probar que cualquier subconjunto medible de E tiene medida cero.**

Los conjuntos $q_n + A$ son, de nuevo, disjuntos. Por ello, vuelve a ocurrir que $\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n + A)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A)$. De nuevo, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n + A) \subseteq\ ] - 1, 2]$ y consecuentemente $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A) \leq \lambda(] - 1, 2]) = 3$. La única posibilidad es que $\lambda(A) = 0$.

d) **Sea $M \subseteq \mathbb{R}$ con $\lambda^*(M) > 0$. Probar que M contiene un subconjunto no medible.**

Si M no es medible, el enunciado es cierto (M sería un subconjunto no medible de M). Sea M medible, es decir, $\lambda(M) = \lambda^*(M)$. Se observa que $M = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} M \cap (q + E)$: todo $m \in M$ tendrá en E un x_i representante de su clase de equivalencia según la partición $\{x + Q : x \in \mathbb{R}\}$, por lo que $x = q_a + x_i \in q_a + E$.

Supongamos que $M \cap (q + E)$ es medible para todo $q \in \mathbb{Q}$. En ese caso: (aparece un $\leq$ porque la unión no es disjunta)

$$\lambda(M) = \lambda(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} M \cap (q + E)) \leq \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda(M \cap (q + E)) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda((M - q) \cap E)$$

Que es igual a 0 por ser la suma de las medidas de subconjuntos de E medibles (porque suponemos que todos son medibles), las cuales son 0 por lo probado en c). Contradicción (hemos obtenido que $\lambda(M) \leq 0$), por lo cual alguno de los $M \cap (q + E)$ no será medible.

2.1.6. Ejercicio 8

Probar que la existencia de conjuntos no medibles equivale a la no aditividad de λ^*.
Sabemos que $E \in M \iff E \in C_{\mathbb{R},\lambda^*}$
Queremos probar: $E \in M$ *no medible* $\iff \lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)\ \forall A \subset \mathbb{R}^N$
$\implies$
Si $E \in \mathbb{R}^N noesmedible$, entonces existe $A \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que

$$\lambda^*((A \cap E) \cup (A \cap E^c)) = \lambda^*(A) < \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$$

y λ^* no es aditiva.
$\impliedby$
Supongamos que λ^* no es aditiva. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^N,\ A \cap B = \varnothing$ tales que

$$\lambda^*(A \cup B) < \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$$

Se tiene que

$$\lambda^*(A \cup B) < \lambda^*((A \cup B) \cap A) + \lambda^*((A \cup B) \cap A^c)$$

y el conjunto A no es medible.

2.1.7. Ejercicio 9

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^N$ y $f : A \to \mathbb{R}^M$ una función de clase C^1 con $N < M$. Probar que $f(A)$ es de medida cero.
Sea G un abierto de $\mathbb{R}^N$ y sea $f \in C^1(G)$
1. Si $Z \subseteq G(= B \supseteq Ax\{0\})$, $\lambda(Z) = 0$, entonces $\lambda(f(Z)) = 0$
Definimos $B := Ax\mathbb{R}^{M-N} \subseteq \mathbb{R}^M$ y $g : B \to \mathbb{R}^M$ por

$$g(x, y) = f(x)\ \forall (x, y) \in B$$

El conjunto B es un abierto de $\mathbb{R}^M$ y $g \in C^1(B)$
El conjunto $Ax\{0\} \subset B$ es de medida cero en $\mathbb{R}^M$ por estar contenido en un hiperplano.

$$\lambda(Ax\{0\}) = \lambda(A) \cdot \lambda(0) = 0$$

Aplicando la proposición anterior $\lambda(g(A, \{0\})) = 0 \implies \lambda(f(A)) = 0$

2.2. Integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

2.3. Teoremas de convergencia

3. Técnicas de integración

3.1. Técnicas de integración en una variable

3.2. Técnicas de integración en varias variables