Ejercicios de Análisis Matemático II

8 de mayo de 2016

Índice

1. Sucesiones de funciones

1.1. Sucesiones de funciones

1.1.1. Esquema para los tres primeros ejercicios

Básicamente usamos solo la primera proposición (1.1.1) de los apuntes, que dice que es equivalente la convergencia uniforme de una función f en A con haber acotado la diferencia con su límite por una sucesión que no dependa de x (sea esa sucesión $\{r_n\}$). Y también equivalente a que para toda sucesión de números reales $a_n \in A$ la sucesión $\{f_n(a_n) - f(a_n)\}$ converja a la función nula.
NOTA: El truco del máximo funciona porque la función límite de nuestra sucesión de funciones es la función nula. Si quisiéramos hacerlo con una función límite distinta CREO que tendríamos que derivar la función resta $f_n(x) - f(x)$ y ver sus máximos y mínimos. No hagáis mucho caso que no lo he pensado mucho pero bueh, en el caso de la nula funciona seguro
La idea es que en los tres primeros ejercicios la función límite es la nula, así que se nos simplifican las sucesiones que tenemos que mirar. En este caso (solo en el caso en que la función límite sea la nula) se cumple que son equivalentes:

- $\{f_n\}$ converge uniformemente en A a la función nula.
- Dada cualquier sucesión de reales a_n la sucesión $\{f(a_n)\}$ converge a la nula.
- Existe una sucesión de números reales r_n convergente a cero y un número $p \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq r_n \forall n \geq p, \forall x \in A$.

Donde solo hemos sustituido en la proposición la f nula. Por otro lado, los tres ejercicios cumplen que todas las funciones f_n son positivas. Así que, podemos afirmar que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente si y solo si , dada la sucesión de $\{a_n\}$ las abscisas donde se alcanza el máximo de f_n para cada n, se tiene que la sucesión $f_n(a_n)$ (sucesión de reales) converge a 0.
Nótese que se necesita que exista el a_n para cada n, es decir, que f_n alcance máximo en A.
La implicación a la derecha es la segunda equivalencia que acabamos de poner. La implicación a la izquierda es la tercera equivalencia. Así que lo que se hace en los tres ejercicios es exactamente lo mismo: se estudia la derivada, se ve si f_n tiene máximo y se estudia la convergencia de estos.
La convergencia puntual me la salto, que en estos ejercicios no es muy complicada, son sucesiones parecidas a las que hacíamos el año pasado y tampoco tienen mucho misterio. Así que ya supongo convergencia puntual a la función nula en todos los puntos de los conjuntos.

1.1.2. Ejercicio 1

Estudio la convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0, a]$ y $[a, +\infty[$, donde $a > 0$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \geq 0$ por:

$$f_n(x) = \frac{2nx^2}{1 + n^2x^4}$$

$$f_n(x) = \frac{2nx^2}{1 + n^2x^4} \qquad\qquad f_n'(x) = \frac{4nx(1 + n^2x^4) - 8n^3x^5}{(1 + n^2x^4)^2}$$

Tenemos que $f_n'(x) = 0 \iff 4nx + 4n^3x^5 - 8n^3x^5 = 0 \iff x - n^2x^5 = 0 \iff x = \begin{cases} 0, \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$

Comprobamos el signo de la derivada en medio de los intervalos con algún punto intermedio, sustituyendo:

$$f_n'\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right) < 0 \qquad\qquad f_n'\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) > 0$$

Es decir, que la sucesión de máximos la vamos a poder coger como $x_n = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
Este máximo se encuentra solo en el primer conjunto que queremos estudiar, $[0, a]$, donde utilizando lo que hemos visto arriba, si estudiamos esta sucesión terminamos:

$$x_n = \frac{2}{2} = 1$$

Como no converge a 0, no hay convergencia uniforme en $[0, a]$. Por otro lado, en el conjunto $[a, +\text{ínf})$ las f_n son decrecientes, así que esta vez tomaremos la sucesión de máximos como $x_n = f_n(a)$. Pero aquí lo tenemos más fácil. En caso de haber estudiado que existe convergencia puntual en todo $\mathbb{R}^+$, en concreto habríamos probado que hay convergencia puntual en a, por lo que $\{x_n\}$ converge a 0.

1.1.3. Ejercicio 2

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde $\{f_n\} : [0, 1] \longleftrightarrow \mathbb{R}$ es la función definida para todo $x \in [0, 1]$ por:

$$f_n(x) = n^\alpha x(1 - x^2)^n$$

El conjunto en el que tenemos que estudiar las funciones es el $[0, 1]$, y las funciones son:

$$f_n(x) = n^\alpha x(1 - x^2)^n$$
$$f_n'(x) = n^\alpha(1 - x^2)^n - 2n^{\alpha+1}x^2(1 - x^2)^{n-1} = n^\alpha(1 - x^2)^{n-1}(1 - x^2(1 + 2n))$$

Tenemos que $f_n'(x) = 0 \iff x = \begin{cases} 1, \\ \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \end{cases}$

Vemos rápidamente que $f_n'(0) > 0$ por lo que las funciones son crecientes en la primera parte, llegan hasta $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ y luego debe de bajar (porque $f_n(0) = f_n(1) = 0$), así que vamos a definir nuestra sucesión de máximos como $x_n = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$. La estudiamos:

$$x_n = \frac{n^\alpha * (2n)^n}{(2n+1)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{n^{n+\alpha}}{\sqrt{2}(n+\frac{1}{2})^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{n^\alpha}{(n+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{n}{n+\frac{1}{2}}\right)^n$$

La fracción de la derecha es equivalente a $e^{n \cdot ln\left(\frac{n}{n+\frac{1}{2}}\right)}$. Esto tiende a $\frac{1}{\sqrt{e}}$ cuando n tiende a infinito. Usando que solo tenemos que estudiar este límite:

$$\lim_{n->\infty} n \cdot ln\left(\frac{n}{n+\frac{1}{2}}\right)$$

Para hallar el límite estudiamos la siguiente función y aplicamos L'Hôpital:

$$g(x) = \frac{ln\left(\frac{n}{n+\frac{1}{2}}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{ln(n) - ln(n+1/2)}{\frac{1}{n}}$$

Sabiendo que la fracción de la derecha converge a $\frac{1}{\sqrt{e}}$ (habiendo hecho L'Hôpital arriba) y la fracción de la izquierda converge también, solo nos queda mirar la de en medio. Si $\alpha < 1/2$, esa sucesión converge a 0. Si $\alpha > 1/2$ esa sucesión diverge, y en el caso de $\alpha = 1/2$ esa sucesión converge a 1. Nos queda en total que x_n converge a 0 $\iff$ $\alpha < 1/2$. Por lo que hay convergencia uniforme solo en ese caso.
Para el caso en el que tenemos el conjunto $[\rho, 1]$ para algún $\rho > 1$, esta vez la funcion f_n será decreciente en todo el intervalo a partir de un determinado n (ya que el punto donde se alcanzaba el máximo antes se acerca a 0 conforme n se va agrandando). Por lo que esta vez, a partir de ese n_0 con el que las f_n con $n > n_0$ son decrecientes podemos coger la sucesión de máximos $x_n = f_n(\rho)$. Pero de nuevo, si hemos hecho la convergencia puntual, esta sucesión converge a 0, por lo que hay convergencia uniforme en este intervalo.

1.1.4. Ejercicio 3

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [0, \pi/2] \longleftrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f_n(x) = n(cos(x))^n sen(x)$$

El intervalo en el que nos piden la convergencia uniforme en el $[0, a]$ y en el $[a, \pi/2]$ de las siguientes funciones:

$$f_n(x) = n(cos(x))^n sen(x) \qquad f_n'(x) = -n^2(cos(x))^{n-1}(sen(x))^2 + n(cos(x))^{n+1}$$

Sabemos que $cos(x) = 0 \iff x = \pi/2$ teniendo en cuenta que $x \in [0, \pi/2]$, momento en el que la derivada se hace cero. Si suponemos $cos(x) \neq 0$ podemos deducir que entonces $f_n'(x) = 0 \iff n(sen(x))^2 = cos(x)^2 \iff (tan(x))^2 = \frac{1}{n} \iff x = arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Podemos notar que este x se va acercando cada vez más a 0 conforme avanza n. Este punto es un máximo de f_n que podemos deducir de que $f_n'(0) > 0$ y $f_n'(\pi/4) < 0$ para todo $n > 1$.
Definimos entonces nuestra sucesión de máximos de la función:

$$\{x_n\} = f_n\left(arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = n\left(cos\left(arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)^n sen\left(arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

Como podéis ver, esta sucesión es larguísima y no tiene pinta de tener una forma fácil de mejorarla, así que nos pasamos a alguna otra sucesión que siga los pasos de esta (esto solo nos vale si queremos buscar que es falsa la convergencia uniforme, que en este caso lo es para el conjunto $[0, a]$). Necesitamos una decreciente y que converja a 0, así que probamos con $y_n = f_n\left(\frac{1}{n}\right)$.

$$y_n = n\left(cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n sen\left(\frac{1}{n}\right)$$

Sabemos que $\frac{sen(x)}{x}$ converge a 1 cuando x tiende a 0, que es el caso de $n \cdot sen\left(\frac{1}{n}\right)$. Nos quedaría $cos^n\left(\frac{1}{n}\right)$:

$$\lim_{n->\infty} cos^n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\lim_{n->\infty} n \cdot ln\left(cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

Por L'Hôpital podemos sacar que el límite en el exponente es 0 (sale fácil si hacéis L'Hôpital en el $\lim_{x->0} \frac{ln(cos(x))}{x}$), por lo que todo tiende a $e^0 = 1$, y por lo tanto, como la parte de $n \cdot sen\left(\frac{1}{n}\right)$ también

converge a 1, podemos deducir que y_n converge a 1. Hemos encontrado una sucesión de reales tales que $\{f_n(a_n) - f(n)\}$ no converge a 0, por lo que no hay convergencia uniforme en el $[0, a]$.
En el caso $[a, \pi/2]$ podemos cogernos la sucesión de números $x_n = f_n(a)$. Si bien antes no nos ha servido de nada el estudio del máximo, sí que podemos usar ahora que sabemos que existe un n_0 a partir del cual las funciones f_n son decrecientes en el intervalo $[a, \pi/2]$ para todo $n > n_0$.

$$x_n = n(cos(a))^n sen(a)$$

Mismo razonamiento que en todos los ejercicios anteriores. Si hemos razonado ya que la convergencia puntual se da en todos los puntos del intervalo $[0, \pi/2]$, en concreto se da en a, por lo que $\{x_n\}$ converge a 0, y podemos deducir entonces que en este intervalo hay convergencia uniforme, usando el tercer punto que explicamos justo antes de los ejercicios.

1.1.5. Ejercicio 4

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{n \sin(x)} \quad (0 < x < \pi)$$

Estudia la convergencia puntual de la sucesión puntual $\{f_n\}$ así como la convergencia uniforme en intervalos del tipo $]0, a], [a, \pi[$ y $[a, b]$ donde $0 < a < b < \pi$.

$\{f_n\}$ converge puntualmente a 0
Sea $x \in (0, \pi)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$0 \le \frac{\sin^2(nx)}{n \sin(x)} \le \frac{1}{n \sin(x)}$$

Por tanto, como $\{\frac{1}{n \sin(x)}\} \to 0$, por el teorema del sándwich, la sucesión converge a 0.

La sucesión no converge uniformemente en intervalos de la forma $(0, a]$
La convergencia uniforme es equivalente a que para cualquier sucesión $\{a_n\}$:

$$\{f_n(a_n) - f(a_n)\} = \left\{\frac{\sin^2(na_n)}{n \sin(a_n)}\right\} \to 0$$

Sea $a_n = \frac{1}{n}$:

$$\left\{\frac{\sin^2(na_n)}{n \sin(a_n)}\right\} = \left\{\frac{\sin^2(1)}{\frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}}\right\} \to \sin^2(1) \neq 0$$

La sucesión no converge uniformemente en intervalos de la forma $[a, \pi)$
Sea $a_n = \pi - \frac{1}{n}$:

$$\left\{\frac{\sin^2(na_n)}{n \sin(a_n)}\right\} = \left\{\frac{\sin^2(n\pi - 1)}{\frac{\sin(\pi - \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}}\right\} = \left\{\frac{\sin^2(1)}{\frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}}\right\} \to \sin^2(1) \neq 0$$

Ya que $\sin(x) = \sin(\pi - x)$.

La sucesión converge uniformemente en intervalos de la forma $[a, b]$
Por el teorema de Weierstrass $\exists M > 0 : \forall x \in [a, b] : \left|\frac{1}{\sin(x)}\right| \leq M$. Por tanto:

$$\left|\frac{\sin^2(nx)}{n\sin(x)}\right| \leq \frac{M}{n}$$

Como $\{\frac{M}{n}\} \to 0$, la sucesión converge uniformemente en intervalos de la forma $[a, b]$.

Hecho por *Pablo Baeyens*

1.2. Series de potencias

2. Integral de Lebesgue

2.1. Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

2.1.1. Ejercicio 3

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y sea Ω' un nuevo conjunto. Sea $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ una aplicación. Probar que $(\Omega', \{B \in \Omega' : \ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\})$ es un espacio medible.
Definimos $\mathcal{A}' = \{B \in \Omega' : \ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$, debemos demostrar que es σ-álgebra.
i) $\Omega' \in \mathcal{A}'$:
$f^{-1}(\Omega') = \Omega \in \mathcal{A}$ por ser $\mathcal{A}$ σ-álgebra.
ii) Si $\{A_n\}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{A}'$, entonces $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \in \mathcal{A}'$:
Si $A_i \in \mathcal{A}'$ $\forall i \in \mathbb{N} \implies \forall i \in \mathbb{N}, A_i \subseteq \Omega' \ : \left(f^{-1}(A_i)\right) \in \mathcal{A}$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n)\right) \in \mathcal{A} \; por \; ser \; \sigma - algebra$$

iii) Si $A \in \mathcal{A}'$ entonces $A^c = \Omega' \setminus A \in \mathcal{A}'$:
Si $A \in \mathcal{A}' \implies f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$

$$f^{-1}(A^c) = f^{-1}(\Omega' \setminus A) = f^{-1}(\Omega') - f^{-1}(A) = \Omega - f^{-1}(A)$$

Por ser $\Omega, f^{-1}(A) \in \mathcal{A} \implies f^{-1}(A^c) \in \mathcal{A}$ por ser σ-álgebra. Por tanto $A^c \in \mathcal{A}$
$\Longrightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ es un espacio medible.

2.1.2. Ejercicio 4

Sea μ^* una medida exterior en un conjunto no vacío Ω. Probar que la restricción de μ^* a la σ -álgebra C_{Ω,μ^*} es una medida completa (esto es, todo subconjunto B de un conjunto $Z \in C_{\Omega,\mu^*}$ tal que $\mu^*(Z) = 0$ es también un conjunto de la propia σ -álgebra)
Sea Z un conjunto tal que $\mu^*(Z) = 0$ y $B \subseteq Z$, entonces , B será medible si y solo si

$$\forall A \subseteq \Omega, \mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

Para probarlo partimos de la desigualdad que nos da la subaditividad de una medida exterior, es decir:

$$A \subseteq \Omega \ \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

Si además usamos que

$$A \cap B \subseteq A \cap B \subseteq Z \Rightarrow \mu^*(A \cap B) = 0$$

entonces obtenemos

$$A \subseteq \Omega \ \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c) \leq \mu^*(A)$$

como queríamos demostrar.

2.1.3. Ejercicio 5

Probar que M es la mayor σ -álgebra que contiene los intervalos acotados y sobre la que λ^* es aditiva.
Supongamos que existe otra σ -álgebra N que contiene los intervalos acotados y sobre la que λ^* es aditiva. Terminaremos demostrando que en ese caso $N \subseteq M$.
Recordemos que $M = \{B \cup Z : B \in \mathfrak{B}, \lambda^*(Z) = 0\} \subseteq C_{\mathbb{R},\lambda}$

La σ-subaditividad nos decía:

$$\lambda^*(A \cup B) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$$

Llamaremos $\lambda' = \lambda^*/N$
Por ser una σ-álgebra $\Omega \in N$, al estar hablando de intervalos $\Omega = \mathbb{R}$
Sea $E \subseteq \mathbb{R}$, cogemos un conjunto arbitrario $A \subseteq \mathbb{R}$. Sabemos, en virtud de la propiedad de regularidad de la medida exterior (Prop. 2.1.10), que existe un boreliano B

$$B : A \subseteq B, \lambda'(A) = \lambda'(B)$$

$\lambda'(A) = \lambda'(B)$, usando la propiedad de que N contiene los intervalos acotados podemos usar la $\sigma-$aditividad. $B \cap E, B \cap E^c \in N$
$\lambda'(B) = \lambda'\left((B \cap E) \cup (B \cap E^c)\right) \geqslant \lambda'(A \cap E) + \lambda'(A \cap E^c) \geqslant \lambda'(A)$
Por tanto $E \in C_{\mathbb{R},\lambda'}$ lo que es equivalente a $E \in M \implies N \subseteq M$

2.1.4. Ejercicio 6

Probar que la unión numerable de conjuntos de medida nula es un conjunto de medida nula. Dedúzcase que $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$ son dos conjuntos de medida nula.

Sea $\mu(A_i) = 0\ \forall i \in \mathbb{N}$. Entonces, por la σ-aditividad, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$.

Probemos ahora que $\mathbb{N}$ es un conjunto de medida nula. Para ello, demostraremos en primer lugar que $\mu(\{n\}) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Definimos $A_k = [n - \frac{1}{k}, n + \frac{1}{k}]$. Por tanto, $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_k) = \lim_k \mu(A_k) = \lim_k \frac{2}{k} = 0$. Demostramos así que $\mu(\mathbb{N}) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{n\}) = 0$.

La prueba para $\mathbb{Q}$ es muy parecida. Como $\mathbb{Q}$ es numerable, podemos definir una sucesión $\{q_n\}$ tal que $q_n \in \mathbb{Q}\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\} = \mathbb{Q}$. Por tanto, $\mu(\mathbb{Q}) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{q_n\}) = 0$.

2.1.5. Ejercicio 7

Existencia de conjuntos no medibles

a) **Probar que la familia $\{x + \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}\}$ es una partición de $\mathbb{R}$.**

   Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces $x \in x + \mathbb{Q}$ dado que $x = x + 0$. Por ello, $\displaystyle\bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x + \mathbb{Q}\} = \mathbb{R}$.

   Sean $x, y, t \in \mathbb{R} : t \in x + \mathbb{Q}$ y $t \in y + \mathbb{Q}$. Entonces $\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q} : t = x + q_1 = y + q_2$. Así, $x = y + q_2 - q_1$, y, como $q_2 - q_1 \in \mathbb{Q}$, $x \in y + \mathbb{Q}$ y $x + \mathbb{Q} = y + \mathbb{Q}$.

   Así, esta familia está formada por conjuntos disjuntos (si un número está en dos elementos de la familia, estos son el mismo) cuya unión es $\mathbb{R}$: es una partición de $\mathbb{R}$.

b) **Pongamos $\{x + \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}\} = \{A_i : i \in I\}$ $(A_i \neq A_j$ para $i \neq j)$ y, para cada $i \in I$, sea $x_i \in A_i \cap\ ]0, 1]$. Probar que el conjunto $E = \{x_i : i \in I\}$ no es medible.**

   Sea $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ una numeración de $]-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. Obsérvese que $\{q_n + E : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de conjuntos disjuntos entre sí: si hay un $x \in (q_a + E) \cap (q_b + E)$ para algunos $a, b \in \mathbb{N}$, entonces $x = q_a + x_i = q_b + x_j$ para algunos $i, j \in I$. En ese caso $x_i = x_j + q_b - q_a \implies x_i \in x_j + \mathbb{Q}$.

Como cada x_i está escogido de forma que dos distintos pertenecen a un elemento distinto de la partición $\{x + \mathbb{Q} : x \in \mathbb{R}\}$, necesariamente $x_i = x_j \implies q_a = q_b \implies q_a + E = q_b + E$.

Supongamos que E es medible. En tal caso, $\lambda(E) = \lambda(E + k)\ \forall k \in \mathbb{R}$ dado que λ es invariante por traslación. Debido a la σ-aditividad de λ y a que los conjuntos $q_n + E$ son disjuntos entre sí, resulta que:

$$\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n + E)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(q_n + E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(E)$$

Puede verse que $]0,1] \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n + E) \subseteq\ ]-1,2]$. Demostración de la primera inclusión: sea $x \in\ ]0,1]$. $x \in x + \mathbb{Q} \implies \exists i \in I : x \in A_i \implies \exists i \in I \exists q \in \mathbb{Q} : x = x_i + q \implies \exists q \in \mathbb{Q} : x \in q + E$, y como $|x_i - x| < 1$ puesto que $x_i, x \in\ ]0,1]$, ocurre que $q \in\ ]-1,1]$. Así, $q = q_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n + E)$. La otra inclusión se debe al rango de valores posible de los q_n y los x_i.

Aplicando que $A \subseteq B \implies \lambda(A) \leq \lambda(B)$, tendremos que $\lambda(]0,1]) = 1 \leq \lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n + E)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(E) \leq \lambda(]-1,2]) = 3$. Como esto es imposible tanto si $\lambda(E) = 0$ (en cuyo caso $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(E) = 0 \ngeq 1$) como si $\lambda(E) \in \mathbb{R}^+$ (en cuyo caso $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(E) = +\infty \nleq 3$), la suposición de que E es medible resulta haber sido incorrecta, y E no es medible.

c) **Probar que cualquier subconjunto medible de E tiene medida cero.**

Los conjuntos $q_n + A$ son, de nuevo, disjuntos. Por ello, vuelve a ocurrir que $\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n + A)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A)$. De nuevo, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n + A) \subseteq\ ]-1,2]$ y consecuentemente $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A) \leq \lambda(]-1,2]) = 3$. La única posibilidad es que $\lambda(A) = 0$.

d) **Sea $M \subseteq \mathbb{R}$ con $\lambda^*(M) > 0$. Probar que M contiene un subconjunto no medible.**

Si M no es medible, el enunciado es cierto (M sería un subconjunto no medible de M). Sea M medible, es decir, $\lambda(M) = \lambda^*(M)$. Se observa que $M = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} M \cap (q + E)$: todo $m \in M$ tendrá en E un x_i representante de su clase de equivalencia según la partición $\{x + Q : x \in \mathbb{R}\}$, por lo que $x = q_a + x_i \in q_a + E$.

Supongamos que $M \cap (q + E)$ es medible para todo $q \in \mathbb{Q}$. En ese caso: (aparece un $\leq$ porque la unión no es disjunta)

$$\lambda(M) = \lambda(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} M \cap (q + E)) \leq \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda(M \cap (q + E)) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda((M - q) \cap E)$$

Que es igual a 0 por ser la suma de las medidas de subconjuntos de E medibles (porque suponemos que todos son medibles), las cuales son 0 por lo probado en c). Contradicción (hemos obtenido que $\lambda(M) \leq 0$), por lo cual alguno de los $M \cap (q + E)$ no será medible.

2.1.6. Ejercicio 8

Probar que la existencia de conjuntos no medibles equivale a la no aditividad de λ^*.
Sabemos que $E \in M \iff E \in C_{\mathbb{R},\lambda^*}$
Queremos probar: $E \in M$ *no medible* $\iff \lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)\ \forall A \subset \mathbb{R}^N$
$\Longrightarrow$
Si $E \in \mathbb{R}^N noesmedible$, entonces existe $A \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que

$$\lambda^*((A \cap E) \cup (A \cap E^c)) = \lambda^*(A) < \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$$

y λ^* no es aditiva.
$\Longleftarrow$
Supongamos que λ^* no es aditiva. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^N,\ A \cap B = \varnothing$ tales que

$$\lambda^*(A \cup B) < \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$$

Se tiene que

$$\lambda^*(A \cup B) < \lambda^*((A \cup B) \cap A) + \lambda^*((A \cup B) \cap A^c)$$

y el conjunto A no es medible.

2.1.7. Ejercicio 9

Sean A un abierto de $\mathbb{R}^N$ y $f : A \to \mathbb{R}^M$ una función de clase C^1 con $N < M$. Probar que $f(A)$ es de medida cero.
Sea G un abierto de $\mathbb{R}^N$ y sea $f \in C^1(G)$
1. Si $Z \subseteq G(= B \supseteq Ax\{0\})$, $\lambda(Z) = 0$, entonces $\lambda(f(Z)) = 0$
Definimos $B := Ax\mathbb{R}^{M-N} \subseteq \mathbb{R}^M$ y $g : B \to \mathbb{R}^M$ por

$$g(x, y) = f(x)\ \forall (x, y) \in B$$

El conjunto B es un abierto de $\mathbb{R}^M$ y $g \in C^1(B)$
El conjunto $Ax\{0\} \subset B$ es de medida cero en $\mathbb{R}^M$ por estar contenido en un hiperplano.

$$\lambda(Ax\{0\}) = \lambda(A) \cdot \lambda(0) = 0$$

Aplicando la proposición anterior $\lambda(g(A, \{0\})) = 0 \implies \lambda(f(A)) = 0$

2.2. Integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

2.3. Teoremas de convergencia

3. Técnicas de integración

3.1. Técnicas de integración en una variable

3.2. Técnicas de integración en varias variables