Ejercicios de Análisis Matemático II

19 de abril de 2016

Índice

1. Sucesiones de funciones

1.1. Sucesiones de funciones

1.2. Series de potencias

2. Integral de Lebesgue

2.1. Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

5. Probar que M es la mayor σ -álgebra que contiene los intervalos acotados y sobre la que λ^* es aditiva.
Supongamos que existe otra σ -álgebra N que contiene los intervalos acotados y sobre la que λ^* es aditiva. Terminaremos demostrando que en ese caso $N \subseteq M$.
Recordemos que $M = \{B \cup Z : B \in \mathfrak{B}, \lambda^*(Z) = 0\} \subseteq C_{\mathbb{R},\lambda}$
La σ-subaditividad nos decía:

$$\lambda^*(A \cup B) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$$

Llamaremos $\lambda' = \lambda^*/N$
Por ser una σ-álgebra $\Omega \in N$, al estar hablando de intervalos $\Omega = \mathbb{R}$
Sea $E \subseteq \mathbb{R}$, cogemos un conjunto arbitrario $A \subseteq \mathbb{R}$. Sabemos, en virtud de la propiedad de regularidad de la medida exterior (Prop. 2.1.10), que existe un boreliano B

$$B : A \subseteq B, \lambda'(A) = \lambda'(B)$$

$\lambda'(A) = \lambda'(B)$, usando la propiedad de que N contiene los intervalos acotados podemos usar la $\sigma-$aditividad. $B \cap E, B \cap E^c \in N$
$\lambda'(B) = \lambda'\left((B \cap E) \cup (B \cap E^c)\right) \geqslant \lambda'(A \cap E) + \lambda'(A \cap E^c) \geqslant \lambda'(A)$
Por tanto $E \in C_{\mathbb{R},\lambda'}$ lo que es equivalente a $E \in M \implies N \subseteq M$

2.2. Integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

2.3. Teoremas de convergencia

3. Técnicas de integración

3.1. Técnicas de integración en una variable

3.2. Técnicas de integración en varias variables