Cálculo I

1. Números reales

$\mathbb{R}$ con las operaciones de suma y producto es un cuepo conmutativo con los axiomas de **asociatividad, conmutatividad, distributividad, elementos neutros, elementos simétricos**

1.1. Orden de los números reales ($\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo ordenado)

Tricotomía: $\forall x \in \mathbb{R}$ $x = 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, ó $-x \in \mathbb{R}^+$.
Estabilidad: $x, y \in \mathbb{R}^+ \implies x + y, xy \in \mathbb{R}^+$

1.2. Propiedades de la relación de orden $\leq$

Reflexiva: $x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Antisimétrica: $x, y \in \mathbb{R} \quad x \leq y,\ y \leq x \implies x = y$
Transitiva: $x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y, y \leq z \implies x \leq z$
$\leq$ es relación de orden total ya que dados $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ ó $y \leq x$

1.3. Axioma del continuo o de Dedekind

$A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$, con $a \leq b$ para cualesquiera $a \in A$, $b \in B \implies \exists x \in \mathbb{R}$, $a \leq x \leq b$

1.4. Valor absoluto

$$|x| \leq z \iff -z \leq x \leq z \qquad\qquad ||x| - |y|| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

2. Números naturales, enteros y racionales

$\mathbb{N}$ es la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$. $A \subset \mathbb{R}$ es inductivo si verifica:

$$1 \in A \qquad\qquad x \in A \implies x + 1 \in A$$

2.1. Principio de inducción

Si A es un subconjunto de $\mathbb{N}$ y A es inductivo, entonces $A = \mathbb{N}$

2.2. Principio de buena ordenación de los números naturales

Todo conjunto no vacío de números naturales tiene mínimo.
Un conjunto bien ordenado está ordenado y todo subconjunto no vacío suyo tiene mínimo.

2.3. Potencias de una suma y sumas de potencias

Números combinatorios $(n \in \mathbb{N},\ n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1)$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Binomio de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Suma de una progresión geométrica

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} \qquad \forall z \in \mathbb{R}\backslash\{1\},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y} = \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} y^k \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Grupo abeliano: Conjunto con operación asociativa y conmutativa, elementos neutro y simétrico.

3. Conjuntos finitos y conjuntos numerables

3.1. Conjuntos finitos

A, B conjuntos, A es equipotente a B, ó $A \sim B$ cuando existe una aplicación biyectiva de A sobre B. Si A es finito (biyectivo con $\{k \in \mathbb{N} : k \leq n\}$) B también lo es si existe una inyección de B en A o una sobreyección de A en B. La imagen de un conjunto finito por cualquier aplicación es un conjunto finito. Todo conjunto no vacío y finito de números reales tiene máximo y mínimo.

3.2. Conjuntos numerables

A es numerable si $A = \emptyset$ o existe una aplicación inyectiva de A en $\mathbb{N}$. Si A es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, existe una aplicación biyectiva $\sigma : \mathbb{N} \to A$, que tiene la siguiente propiedad:

$$n, m \in \mathbb{N},\ n < m \implies \sigma(n) < \sigma(m)$$

3.2.1. Ejemplos

Si A es un conjunto numerable y $f : A \to C$ una aplicación, entonces $f(A)$ es numerable.
Producto cartesiano. A, B conjuntos numerables $\implies$ AxB es numerable
La unión numerable de conjuntos numerables es numerable. (Ejemplo: $\mathbb{Z}$)
$\mathbb{Q}$ es numerable, imagen de un conjunto numerable por una aplicación

$$f(p, m) = \frac{p}{m} \qquad \forall p \in \mathbb{Z},\ \forall m \in \mathbb{N}$$

4. Supremo e ínfimo. Números irracionales

4.1. Supremo e ínfimo

Dado $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, A está mayorado si existe $y \in \mathbb{R}$ llamado mayorante tal que $y \geq a \ \forall a \in A$. Analogamente con minorado y minorante. Mayorantes y minorantes no siempre son del conjunto.
Si A está mayorado y minorado está acotado. Si el conjuntos de mayorantes tiene mínimo, es el supremo, si A está minorado, el máximo de los minorantes es el ínfimo.

$$a \leq y \ \ \forall a \in A \Longleftrightarrow sup(A) \leq y \qquad\qquad x \leq a \ \ \forall a \in A \Longleftrightarrow x \leq inf(A)$$

Relación con máximo y mínimo ($\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}, \ \alpha \in \mathbb{R}$)

$$\alpha = max(A) \Longleftrightarrow \alpha \in A, \ a \leq \alpha \ \ \forall a \in A \qquad \alpha = sup(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} a \leq \alpha \ \ \forall a \in A \\ \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \ \exists a \in A \ : \ \alpha - \epsilon < a \end{cases}$$

Raíz n-ésima. Dado $n \in \mathbb{N}$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$ existe un único $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $y^n = x$, $y = \sqrt[n]{x}$
Dados $n, m \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{m}$ es un número natural o un número irracional.

4.2. Propiedad arquimediana

$\mathbb{N}$ no está mayorado, $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ n > x$. Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z}$

- Si A está mayorado(minorado/acotada), entonces A tiene máximo(mínimo/es finito).

Función parte entera. $E(x) = max\{k \in \mathbb{Z} \ : \ k \leq x\}$. $\quad \forall x \in \mathbb{R}$, $E(x) \leq x \leq E(x) + 1$

4.3. Densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

Un conjunto $D \subset \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$ cuando, $\forall x, y \in \mathbb{R} \ : \ x < y, \ \exists d \in D \ : \ x < d < y$
Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, existen $r \in \mathbb{Q}, \ \beta \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ verificando que $x < r < \beta < y$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ sup\{r \in \mathbb{Q} \ : \ r < x\} = x = inf\{s \in \mathbb{Q} \ : \ s > x\}$$

4.4. Intervalos

I es un intervalo si $\forall x, y \in I : x < y$, entonces $\forall z \in \mathbb{R}$ con $x < z < y \implies z \in I$. La intersección de cualquier familia de intervalos es un intervalo. Todo intervalo no trivial es no numerable.
Principio de los intervalos encajados (Georg Cantor):
Suponemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un intervalo cerrado y acotado $J_n = [a_n, b_n]$, con $a_n \leq b_n$, y cada uno de estos intervalos contiene al siguiente ($J_{n+1} \subset J_n$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la intersección $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$ no es vacía, es decir, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in J_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.5. Números alebraicos y trascendentes

Un número real es algebraico cuando se puede obtener como solución de una ecuación algrebraica con coeficientes enteros. Los números irracionales que hasta ahora conocemos son algebraicos. El conjunto de los números algebraicos es numerable. Un número real es trascendente cuando no es algebraico.

5. Sucesiones convergentes

Una sucesión $\{x_n\}$ es una aplicación de $\mathbb{N}$ a otro conjunto, si es de números reales, $\mathbb{R}$.

$$\{x_n\} \to x \in \mathbb{R} \iff \forall \epsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{N}\ :\ n \geq m \implies |x_n - x| < \epsilon \qquad x = lim\{x_n\} \text{ es único}$$

Converge a x si $\forall \epsilon > 0,\ A_\epsilon = \{n \in \mathbb{N}\ :\ |x_n - x| \geq \epsilon\}$ es finito. Esta expresión es útil para negar.

5.1. Sucesiones parciales

Dada una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ (estrictamente creciente) obtenemos la sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$. Si la sucesión inicial tiene límite la parcial también y es el mismo.
Si $\{x_n\}$ admite parcial no convergente o parciales con límites diferentes, entonces $\{x_n\}$ no converge.

$$\{x_n\} \to x \iff \{x_{k+n}\} \to x \qquad\qquad \{x_n\} \to x \iff \{x_{2n}\} \to x\ y\ \{x_{2n-1}\} \to x$$

5.2. Sucesiones acotadas

Una sucesión está acotada cuando está mayorada y minorada, equivalente a que $\{|x_n|\}$ esté mayorada. Toda sucesión convergente está acotada, el recíproco es falso. Una sucesión está acotada si fijando $m \in \mathbb{N}$ $\{x_n\ :\ n \geq m\}$ está acotado.

$$\{x_n\} \to x \iff \{|x_n - x|\} \to 0 \qquad\qquad \{x_n\} \to x \implies \{|x_n|\} \to |x| \text{ (Recíproco falso)}$$

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones convergentes, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Si $\{y_n\}$ está acotada y $\{z_n\} \to 0$, entonces $\{y_n z_n\} \to 0$
Si $\lim_{n\to\infty}\{y_n\} < \lim_{n\to\infty}\{x_n\}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y_n < x_n$ para $n \geq m$
Si $\{n \in \mathbb{N}\ :\ x_n \leq y_n\}$ es infinito, entonces $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} \leq \lim_{n\to\infty}\{y_n\}$
De la desigualdad estricta $x_n < y_n$ no podemos deducir $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} < \lim_{n\to\infty}\{y_n\}$

- Si $\{n \in \mathbb{N}\ :\ x_n \leq \beta\}$ es infinito, entonces $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} \leq \beta$
- Si $\{n \in \mathbb{N}\ :\ \alpha \leq x_n\}$ es infinito, entonces $\alpha \leq \lim_{n\to\infty}\{x_n\}$

Si $\{x_n\} \to \alpha$, $\{z_n\} \to \alpha$ y $x_n \leq y_n \leq z_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\{y_n\} \to \alpha$.
Si $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ está mayorado, $\exists\{x_n\}$ de elementos de A tal que $\{x_n\} \to sup(A)$ (resp. minorado, inf)
$\forall x \in A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ denso en $\mathbb{R}$, existen sucesiones $\{r_n\}, \{s_n\}$ de elementos de A tales que

$$\{r_n\} < x < \{s_n\}\ \forall n \in \mathbb{N},\ x = \lim_{n\to\infty}\{r_n\} = \lim_{n\to\infty}\{s_n\}$$

6. Sucesiones monótonas

Una sucesión $\{x_n\}$ es creciente (resp. decreciente) si $x_n \leq x_{n+1}$(resp. $x_n \geq x_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$. Es monótona si es creciente o decreciente. Una sucesión creciente está minorada, una decreciente está mayorada.

- Toda sucesión monótona y acotada es convergente, a su supremo o ínfimo.
- Toda sucesión de números reales admite una sucesión parcial monótona.

Teorema de Bolzano-Weierstrass
Toda sucesión acotada de números reales admite una sucesión parcial convergente.

6.1. Sucesiones de Cauchy

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{N}\ :\ p, q \geq m \implies |x_p - x_q| < \epsilon$$

$$\text{Sucesión convergente} \implies \text{Sucesión de Cauchy} \ (\Longleftarrow \text{Complitud de } \mathbb{R})$$

6.2. Límites superior e inferior

$\alpha_n = \inf\{x_k\ :\ k \geq n\}$ creciente y mayorada $\qquad \beta_n = \sup\{x_k\ :\ k \geq n\}$ decreciente y minorada

Los límites de dichas sucesiones son los límites inferior y superior. Son equivalentes:

$$\liminf\{x_n\} = \limsup\{x_n\} \Longleftrightarrow \{x_n\} \text{ es convergente}$$

$$\liminf\{x_n\} \leq \lim\{x_{\sigma(n)}\} \leq \limsup\{x_n\}$$

Teorema de Bolzano-Weierstrass (revisitado)
Si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada de números reales, entonces admite dos sucesiones parciales tales que

$$\{x_{\sigma(n)}\} \to \liminf\{x_n\} \qquad \{x_{\tau(n)}\} \to \limsup\{x_n\}$$

7. Divergencia de sucesiones

La divergencia no es lo contrario de convergencia, véase $\{(-1)^n\}$. Una sucesión $\{x_n\}$ no acotada no implica $\{1/x_n\} \to 0$, ejemplo

$$y_n = n + (-1)^n + 1 \implies \{1/y_n\} \not\to 0 \text{ ya que } \{1/y_{2n-1}\} \to 1$$

Divergencia positiva equivale a que $\{n \in \mathbb{N}\ :\ x_n \leq K \in \mathbb{R}\}$ sea finito.

$$\{x_n\} \to +\infty \Longleftrightarrow [\forall K \in \mathbb{R},\ \exists m \in \mathbb{N}\ : n \geq m \implies x_n > K]$$

$$\{|x_n|\} \to +\infty \Longleftrightarrow \{x_n\} \to \infty$$

Que una sucesión diverja no significa que lo haga positiva o negativamente. Ejemplo $\{(-1)^n n\}$

7.1. Relación con otras sucesiones

Toda sucesión parcial de una sucesión divergente es divergente. Son equivalentes

- $\{x_n\}$ no es divergente
- $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial acotada
- $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial convergente

Podemos encontrar una sucesión no mayorada, ni minorada y no divergente:

$$y_{3k-2} = k,\ y_{3k-1} = -k,\ y_{3k} = 0 \qquad \underbrace{1, -1, 0}, \underbrace{2, -2, 0}, \underbrace{3, -3, 0}, \ldots$$

Toda sucesión monótona es convergente o divergente.

7.2. Operaciones

$$\{x_n\} \text{ e } \{y_n\} \text{ convergentes } \implies \{x_n + y_n\} \text{ convergente} \qquad \text{(Recíproco falso)}$$

$$\text{Si } \{x_n\} \to +\infty \text{ e } \{y_n\} \text{ está minorada en } \mathbb{R}^+\text{, entonces } \{x_n + y_n\} \to +\infty,\ \{x_n y_n\} \to +\infty$$

Toda sucesión puede expresarse como suma de dos divergentes, o como multiplicación de una que diverja positivamente y otra que converja a 0.

$$\{x_n\} \to \infty,\ \{y_n\} \to \lambda \in \mathbb{R}^* \implies \{x_n y_n\} \to \infty$$

$$\text{Si } x_n \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N}\text{, entonces } \{x_n\} \to 0 \iff \{1/x_n\} \text{ es divergente}$$

Sea $x_n \in \mathbb{R}_0^+,\ \forall n \in \mathbb{N}$ y sea $q \in \mathbb{N}$

- $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}_0^+ \implies \{\sqrt[q]{x_n}\} \to \sqrt[q]{x}$
- $\{x_n\} \to +\infty \implies \{\sqrt[q]{x_n}\} \to +\infty$

8. Cálculo de límites

8.1. Criterio de Stolz (no reversible)

Sea $\{p_n\} \to +\infty$, $0 < p_n < p_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\forall \{x_n\}$ y $\forall L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

$$\left\{\frac{x_{n+1} - x_n}{p_{n+1} - p_n}\right\} \to L \implies \left\{\frac{x_n}{p_n}\right\} \to L$$

Para cualquier $x \in \mathbb{R}$ con $|x| > 1$ y $p \in \mathbb{N}$ $\quad \lim_{n\to\infty} n^p/x^n = 0$

8.2. Criterio de la media aritmética (Consecuencia de Stolz)

Dada $\{y_n\}$ y sus medias aritméticas $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$.
Si $\{y_n\} \to L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, entonces $\{\sigma_n\} \to L$, pero no para ∞ (Recíproco falso).
Lema Si $x_n \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\}$ está acotada, entonces $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ también está acotada y

$$\liminf \left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\} \le \liminf\{\sqrt[n]{x_n}\} \le \limsup\{\sqrt[n]{x_n}\} \le \limsup \left\{\frac{x_n + 1}{x_n}\right\}$$

8.3. Criterio de la raíz para sucesiones

Si $\{x_n\} \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\{x_{n+1}/x_n\}$ es convergente, entonces $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ también es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Si $\{x_{n+1}/x_n\} \to +\infty$, entonces $\{\sqrt[n]{x_n}\} \to +\infty$. $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ puede ser convergente sin que $\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\}$ lo sea.

8.4. Criterio de la media geométrica

Sea $y_n \in \mathbb{R}^+$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\mu_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} y_k}$
Si $\{y_n\} \to L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, se tiene $\{\mu_n\} \to L$

9. Series de números reales

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \text{Suma parcial de la serie}$$

El término general de una serie convergente es una sucesión convergente a cero.

- La serie armónica con exponente p $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$ converge para $p = 1$ y diverge para $p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$
- La serie geométrica con razón $r \ : |r| < 1$ es $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$
- Suma de los términos de una progresión geométrica con términos a_n $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}-a_1}{r-1}$
- Fijando $p \in \mathbb{N}$ una seria converge si, y sólo si, la serie omitiendo los primeros p términos converge

10. Series de términos no negativos

Una serie de términos no negativos es convergente si, y sólo si, está mayorada.

10.1. Criterio de comparación

(1) Si $0 \leq a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge, entonces $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge a $a \in \mathbb{R}^+,\ a \leq \sum_{n\geq 1} b_n$
(2) $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ series de números reales. Supongamos que existe $p \in \mathbb{N} \ : \ \forall k > p,\ 0 \leq a_n \leq b_n$ y la serie $\sum_{n\geq 1} b_n$ es convergente, entonces $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.
(3)**[Paso a límite]** Sean $a_n \geq 0, b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, suponemos que $\{a_n/b_n\} \to L \in \mathbb{R}_0^+$

- Si $L > 0$ la convergencia de $\sum_{n\geq 1} a_n$ equivale a la de $\sum_{n\geq 1} b_n$
- Si $L = 0$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge, entonces $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge

10.2. Criterio de la raíz para series (Cauchy)

(1) Si $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ no está acotada o lo está con $\liminf\{\sqrt[n]{a_n}\} > 1$, entonces $\{a_n\} \not\to 0$, $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge
(2) Si $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ está acotada con $\limsup\{\sqrt[n]{a_n}\} < 1$, entonces $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge

- Sea $a_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ convergente
  (1) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, entonces $\{a_n\} \not\to 0$, luego $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge
  (2) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, entonces $\sum_{n\geq 1}$ es convergente

10.3. Criterio del cociente o de D'Alembert

Sea $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$ acotada
(1) Si $\liminf\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\} > 1$, entonces $\{a_n\} \not\to 0$ y $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge
(2) Si $\limsup\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\} < 1$, entonces $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente

- Sea $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$ convergente
  (1) Si $\lim_{n\to\infty}\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\} > 1$, entonces $\{a_n\}$ no converge a 0, luego $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge
  (2) Si $\lim_{n\to\infty}\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\} < 1$, entonces $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge

10.4. Criterio de condensación de Cauchy

Si $\{a_n\}$ es decreciente con números positivos, la convergencia de $\sum_{n\geq 1} a_n$ equivale a la de $\sum_{n\geq 0} 2^n a_n$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad e - \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} < \frac{1}{p!p} \qquad e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

11. Convergencia absoluta y series alternadas

Una serie de números reales $\sum_{n\geq 1} x_n$ es absolutamente convergente cuando $\sum_{n\geq 1} |x_n|$ es convergente.
Teorema. Toda serie absolutamente convergente es convergente y se verifica

$$\left|\sum_{n\geq 1}^{\infty} x_n\right| \leq \sum_{n\geq 1}^{\infty} |x_n|$$

11.1. Series alternadas

Si queremos que una serie converja sin hacerlo absolutamente los conjuntos $\{n \in \mathbb{N} \ : \ x_n < 0\}$ y $\{n \in \mathbb{N} \ : \ x_n > 0\}$ deben ser infinitos. Serie alternada presenta un aspecto similar a $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$, la serie armónica alternada $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es convergente pero no converge absolutamente.
Criterio de Leibniz. Si $\{a_n\} \to 0$ y es decreciente, entonces $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$ es convergente

11.2. Convergencia incondicional

Una permutación de los naturales sería una aplicación $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyectiva. Una serie es incondicionalmente convergente cuando para cualquier permutación la serie reordenada $\sum_{n\geq 1} x_{\pi(n)}$ converge
Teorema. Una serie de números reales es incondicionalmente convergente si, y sólo si, es absolutamente convergente. Además, si la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es absolutamente convergente, entonces, para toda permutación π de los números naturales, se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$
Teorema de Riemann. Sea $\sum_{n\geq 1} x_n$ una serie convergente, no absolutamente convergente, y fijemos $s \in \mathbb{R}$. Entonces existen permutaciones π_+, π_-, π_s de los números naturales, tales que la serie $\sum_{n\geq 1} x_{\pi_+(n)}$ diverge positivamente, la serie $\sum_{n\geq 1} x_{\pi_-(n)}$ diverge negativamente y la serie $\sum_{n\geq 1} x_{\pi_s(n)}$ converge, con $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi_s(n)} = s$

12. Continuidad

Función real de variable real $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)$ es único $\forall x \in \mathbb{R}$, interpretación geométrica:

$$Gr\ f = \{(x, f(x)) \ : \ x \in A\} \qquad \text{Gráfica de f, 'x' abscisa, 'y' ordenada}$$

La condición necesaria y suficiente para que $\emptyset \neq E \in \mathbb{R}^2$ sea la gráfica de una función real de variable real es que $\forall x \in \mathbb{R}$ la intersección de E con la recta vertical de abscisa x debe ser vacía o un punto.
Imagen de una función sobreyectiva f de A en $f(A) = \{f(x) \ : \ x \in A\}$
Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ con $f(A) \subset B$, la composición de f con g es $g(f(x)) = gof : A \to \mathbb{R}$

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ restringida a un conjunto $B \subset A$, $f|_B : B \to \mathbb{R}$, $f|_B(x) = f(x)\ \forall x \in B$
Sea $f : A \to \mathbb{R}$, f es continua en $x \in A$ si

$$x_n \in A \ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \{x_n\} \to x \implies \{f(x_n)\} \to f(x)$$

f es continua en $B \subset A$ si lo es $\forall x \in B$, la suma, el producto y el cociente (con denominador nunca nulo) de funciones continuas es continua Las funciones polinómicas, racionales, composición y valor absoluto de funciones continuas, son continuas.

12.1. Carácter local de la continuidad

Sea $f : A \to \mathbb{R}$, $x \in B \subset A$, si f es continua en x, entonces $f|_B$ es continua en x
(Recíproco falso, salvo que exista un $\delta \in \mathbb{R}^+ \ :]x - \delta, x + \delta[\cap A \subset B)$

13. Propiedades de las funciones continuas

$f : A \to \mathbb{R}$, $x \in A$, son equivalentes

- f es continua en x
- Para toda sucesión $\{x_n\} \to x$ de puntos de A y monótona, se tiene que $\{f(x_n)\} \to f(x)$
- $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ :\ y \in A,\ |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon$

Conservación del signo. $f : A \to \mathbb{R}$ continua en x, $\exists \delta > 0 \ :\ \forall y \in A$ con $|y - x| < \delta \implies f(y) > 0$
Bolzano. $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, $f(a) < 0, f(b) > 0 \implies \exists c \in [a, b] \ :\ f(c) = 0$

13.1. Teorema del valor intermedio

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. $I \subset A$ intervalo no trivial $\implies f(I)$ es un intervalo.
$f : I \to \mathbb{R}$ tiene la propiedad del valor intermedio cuando $\forall J \subset I$, $f(J)$ es un intervalo.
f definida en un intervalo, continua $\implies$ cumple la propiedad del valor intermedio (Recíproco falso)

13.2. Teorema de Weierstrass

Sean $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces el intervalo $f([a, b])$ es cerrado y acotado.

14. Continuidad y monotonía

Una función es estrictamente creciente si, y sólo si, es creciente e inyectiva
Teorema. Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ continua e inyectiva, entonces f es estrictamente monótona.
Teorema. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es monótona y $f(A)$ es un intervalo, entones f es continua.
La inversa de una función se obtiene mediante la simetría con eje la recta $y = x$. Existen funciones continuas e inyectivas cuya inversa no es continua.

- Si $f : A \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, su inversa también lo es
- Si I es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es estrictamente monótona, entonces f^{-1} es continua
- Si I es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es continua e inyectiva, entonces f^{-1} es continua