Cálculo II

1. Límite funcional

$\alpha \in \mathbb{R}$ es punto de acumulación de A si existe $\{x_n\} \to \alpha$ de puntos de $A\backslash\{\alpha\}$. A' es el conjunto de todos estos puntos. Los puntos $a \in A\backslash A'$ son aislados, toda función es continua allí.

$$\alpha \in A' \Longleftrightarrow]\alpha - \delta, \alpha + \delta[\cap (A\backslash\{\alpha\}) \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0$$

Son equivalentes:

- $\lim_{x \to \alpha \in A'} f(x) = L \in \mathbb{R}$
- $x_n \in A\backslash\{\alpha\} \ \forall n \in \mathbb{N},\ \{x_n\} \to \alpha \implies \{f(x_n)\} \to L$ (puede verse solamente con sucesiones monótonas)
- $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ :\ x \in A,\ 0 < |x - \alpha| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en un punto $a \in A \cap A'$ si, y sólo si, $\lim_{x \to \alpha} f(x) = f(a)$
Si una función tiene límite en $a \in A \cap A'$ pero $\lim_{x \to \alpha} f(x) \neq f(a)$ f tiene una discontinuidad evitable en el punto a. Son equivalentes:

- f tiene límite en el punto $\alpha \in A\backslash A'$
- Existe $f' : A \cup \{\alpha\} \to \mathbb{R}$ continua en α con $f'(x) = f(x) \ \ \forall x \in A$

1.1. Límites laterales

El límite tiene carácter local. Consideramos los conjuntos $A_\alpha^- = \{x \in A\ :\ x < a\}$ y $A_\alpha^+ = \{x \in A\ :\ x > a\}$, A se acumula a la izquierda (res. derecha) de α si $\forall \delta > 0$ $]\alpha - \delta, \alpha[\cap A \neq \emptyset$. Sea $\alpha \in (A_\alpha^-)'$

$$\lim_{x \to \alpha -} f(x) = L \Longleftrightarrow [x_n \in A,\ x_n < \alpha\ \forall n \in \mathbb{N},\ \{x_n\} \to \alpha \implies \{f(x_n)\} \to L]$$

Las caracterizaciones anteriores para límite tienen su versión para límites laterales, en el límite por la izquierda son sucesiones crecientes y $\alpha - \delta < x < \alpha$ en la caracterización $(\epsilon - \delta)$
Si A se acumula a la izquierda pero no a la derecha de α $\quad \lim_{x \to \alpha} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to \alpha -} f(x) = L$
Si límites laterales no coinciden, tenemos una discontinuidad de salto, en otro caso

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to \alpha -} f(x) = \lim_{x \to \alpha +} f(x) = L$$

2. Límites en el infinito, funciones divergentes

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y A no mayorado:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \iff [x_n \in A\ \forall n \in \mathbb{N},\ \{x_n\} \to +\infty \implies \{f(x_n)\} \to L]$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \iff \lim_{y\to 0^+} f(1/y) = L$$

Sea A conjunto no mayorado, $f : A \to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$, son equivalentes

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$
- $\forall\{x_n\}$ de puntos de A, creciente y no mayorada, $\{f(x_n)\} \to L$
- $\forall \epsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{R}\ :\ x > K \implies |f(x) - L| < \epsilon$

2.1. Funciones divergentes en un punto

$$\lim_{x\to\alpha\in A'} f(x) = +\infty \iff [x_n \in A\backslash\{\alpha\}\ \forall n \in \mathbb{N}, \{x_n\} \to \alpha \implies \{f(x_n)\} \to +\infty]$$

f diverge cuando $|f|$ diverge positivamente, son propiedades locales. Son equivalentes

- $\{x_n\} \to \alpha$ monótona de puntos de $A\backslash\{\alpha\} \implies \{f(x_n)\} \to +\infty$
- $\forall K \in \mathbb{R},\ \exists \epsilon > 0\ :\ x \in A, 0 < |x - \alpha| < \delta \implies f(x) > K$

Las nociones de divergencia lateral se deducen fácilmente. Si A se acumula a ambos lados de α

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty \iff \begin{cases} \lim_{x\to\alpha-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to\alpha+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

2.2. Divergencia en el infinito

La definición por sucesiones es equivalente con $L = +\infty$, solamente cambia la 3^a equivalencia

- $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists m \in \mathbb{R}\ :\ x \in A,\ x > M \implies f(x) > K$

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta \text{ y } g \text{ es continua en } \beta,\ \lim_{x\to\alpha}(gof)(x) = g(\beta)$$

3. Derivación

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad a \in A \cap A'$$

La derivabilidad tiene carácter local e implica la continuidad. Las derivadas laterales se denotan por $f'(a-)$ y $f'(a+)$. Si f es derivable por izquierda y derecha es continua, aunque las derivadas no coincidan. Existe un polinomio $P(x)$ que representa la recta tangente por el punto a

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a)\ \ \forall x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{x - a} = 0$$

Caracterización $(\epsilon - \delta)$ de la derivada

$$x \in A,\ |x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)| \leq \epsilon |x-a|$$

Si f es derivable, f es diferenciable con diferencial de f en a, $df(a)(h) = f'(a)h \quad \forall h \in \mathbb{R}$

$$f'(a) = \frac{df(a)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La recta secante por los puntos es $p_1 = (x_1, y_1),\ p_2 = (x_2, y_2)$ es $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
La interpretación física de la derivada es la velocidad de variación de una magnitud física.
Denotamos al conjunto de funciones derivables $D(A)$, al de continuas $C(A)$, a todas por $\mathscr{F}(A)$ en A:

$$D(A) \subset C(A) \subset \mathscr{F}(A)$$

4. Reglas de derivación

$$(f+g)'(x) = f'(a) + g'(a) \qquad (fg)'(x) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

4.1. Regla de la cadena

$f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ con $f(A) \subset B$ y $a \in A \cap A'$, deben ser f derivable en a y g derivable en $f(a)$

$$(gof)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Sea una función $f : A \to \mathbb{R}$ inyectiva con inversa derivable en a, entonces $f(a) \in f(A)$, son equivalentes

- $f'(a) \neq 0$ y f^{-1} es continua en $f(a)$
- f^{-1} es derivable en $f(a)$

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

$$f'(x^k) = kx^{k-1} \quad k \in \mathbb{N} \qquad f'(\sqrt[q]{x}) = \frac{1}{q(\sqrt[q]{x})^{q-1}}$$

5. Teorema del valor medio

a es un extremo relativo cuando $\exists \delta > 0\ :\ ]a-\delta, a+\delta[\subset A\ y\ f(a) \leq f(x)(resp. \geq)\ \forall x \in]a-\delta, a+\delta[$, hablamos de extremo absoluto cuando se cumple la condición $\forall x \in A$. Un extremo absoluto será relativo si pertenece al interior del conjunto, A^o, y en caso de ser derivable $f'(a) = 0$
Teorema de Rolle Sean $a < b$ y $f \in C([a,b]) \cap D(]a,b[)$ con $f(a) = f(b) \implies \exists c \in]a,b[,\ :\ f(c) = 0$
Teorema del Valor Medio $a < b$ y $f \in C([a,b]) \cap D(]a,b[) \implies \exists c \in]a,b[:\ f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$
Sea I intervalo no trivial , $f \in C(I) \cap D(I^o)$.

$$f'(x) \geq 0 \ \ \forall x \in I^o \iff f \text{ es creciente} \qquad f'(x) \leq 0 \ \ \forall x \in I^o \iff f \text{ es decreciente}$$

$$f'(x) \neq 0\ \forall x \in I^o \implies f \text{ es estrictamente monótona}$$

Teorema del valor intermedio para derivadas (Darboux). Sea I un intervalo no trivial y$f : I \to \mathbb{R}$, $f \in D(I)$. Entonces $f'(I)$ es un intervalo. Por tanto, f' tiene la propiedad del valor intermedio. Si f es derivable en $J = [a,b]$, entonces f' no tiene discontinuidades evitables ni de salto y no diverge.

6. Continuidad uniforme

Cuando δ dependa solamente de ϵ y no de los puntos tomados tendremos continuidad uniforme

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ :\ x, y \in A,\ |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon$$

Ejemplo de función continua no uniforme x^2. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua, $\forall \{x_n\}, \{y_n\}$ de puntos de A tales que $\{y_n - x_n\} \to 0 \implies \{f(y_n) - f(x_n)\}$. f es lipschitziana si existe $M \geq 0$

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x| \quad \forall x, y \in A \qquad sup\left\{\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}\ : x, y \in A, x \neq y\right\} \text{ constante de Lipschitz}$$

Una función es lipschitziana si su derivada está acotada, y lipschitziana $\implies$ uniformemente continua. La función raíz cuadrada es uniformemente continua pero no lipschitziana.

6.1. Teorema de Heine

Sean $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces f es uniformemente continua.

7. Integración

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. $\Pi[a, b]$ es el conjunto de las particiones de $[a, b]$, subconjuntos finitos de $[a, b]$ que contienen los extremos. Tenemos las sumas inferiores y superiores, $P \in \Pi$

$$I(f, P) = \sum_{k=1}^{n} (\text{mín}\, f[t_{k-1}, t_k])(t_k - t_{k-1}) \qquad \{I(f, P) : P \in \Pi[a, b]\} \text{ está mayorado}$$

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} (\text{máx}\, f[t_{k-1}, t_k])(t_k - t_{k-1}) \qquad \{S(f, P) : P \in \Pi[a, b]\} \text{ está minorado}$$

$$\sup\{I(f, P) : P \in \Pi[a, b]\} \leq \text{ínf}\{S(f, P) : P \in \Pi[a, b]\}$$

Lema $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : P \in \Pi[a, b],\ \Delta P < \delta \implies S(f, P) - I(f, P) < \epsilon$
Teorema de la integral de Cauchy

$$\sup\{I(f, P) : P \in \Pi[a, b]\} = \text{ínf}\{S(f, P) : P \in \Pi[a, b]\} = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b - a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b - a)}{n}\right)$$

La integral es lineal, positiva (≥ 0) y aditiva, $c \in]a, b[$, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Si $f \in C[a, b]$, $\exists c \in [a, b] : f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

8. Integral indefinida

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\ \forall a, b, c \in I, f \in C(I)$$

8.1. Teorema fundamental del cálculo

Sea I intervalo no trivial, $f \in C[a,b], a \in I$ y sea

$$F(x) = \int_a^t f(t)dt \quad \forall x \in I \qquad\qquad F \in D(I),\ F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

F es la integral indefinida de f con origen en a. Cualquier integral indefinida de una función continua en un intervalo no trivial es una primitiva de dicha función. Toda función continua en un intervalo no trivial admite primitiva, y entonces tiene la propiedad del valor intermedio. $F \in C^1(A)$ cuando es derivable con derivada continua en A.

8.2. Regla de Barrow

Si I es un intervalo no trivial, $f \in C(I)$ y G es una primitiva de f

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

8.3. Cambio de variable

Sea I intervalo no trivial, $f \in C(I),\ a,b \in I$. Sea J intervalo no trivial y $\Phi \in C^1(I)$ con $\Phi(J) \subset I$, y existen $\alpha, \beta \in J : a = \Phi(\alpha), b = \Phi(\beta)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\Phi(t))\Phi'(t)dt$$

8.4. Integración por partes

ea I un intervalo no trivial y $f, G \in C^1(I),\ \forall x, y \in I$

$$\int_a^b f(x)G'(x)dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx$$

9. Potencias y logaritmos

9.1. Logaritmo

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad logx = \int_1^x \frac{dt}{t} \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

El logaritmo es estrictamente creciente, diverge positivamente en $+\infty$ y negativamente en 0

$$log\ (x/y) = log\ x - log\ y \qquad log(x^n) = nlog\ x \qquad log\ e = 1$$

9.2. Exponencial

$$exp = log^{-1} \qquad exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad \text{es biyectiva}$$

$$exp(x-y) = exp\,x/exp\,y \qquad exp(nx) = (exp\,x)^n \qquad \lim_{x\to-\infty} exp\,x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} exp\,x = +\infty$$

9.3. Potencias de exponente real

$$a^b = exp(blog\ a) \quad \forall b \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}^+ \qquad\qquad a^x \text{ es derivable: } a^x log\ a$$

$$a^{log_a\ y} = y \quad \forall y \in \mathbb{R}+ \qquad\qquad log_a\ a^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad\qquad log_a\ x = \frac{log\ x}{log\ a}$$

$log_a\ x$ con $a > 1$ estrictamente creciente, $a < 1$ estrictamente decreciente.

9.4. Escala de infinitos

$$\forall p \in \mathbb{R}^+ \quad \lim_{x\to\infty} \frac{log\ x}{x^p} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} = \lim_{x\to 0} x^p log\ x = \lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to 0} x^x = 0$$

9.5. Series armónicas y series de Bertrand

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si, y sólo si, } \alpha > 1$$

$$\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n^\alpha (log\ n)^\beta} \text{ serie de Bertrand con exponentes } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Converge cuando $\alpha > 1$ y diverge cuando $\alpha < 1$. Si $\alpha = 1$, converge si, y sólo si, $\beta > 1$

9.6. Equivalencia logarítmica

Sea $\{x_n\} \to 1$, $\{y_n\}$, si $L \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{n\to\infty}\ y_n(x_n - 1) = L \iff \lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = e^L$ww

10. Funciones trigonométricas

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \qquad \arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Función estrictamente creciente, impar $\arctan(-x) = -\arctan\ x$. $\pi = 4 \arctan 1$. La tangente es una función π-periódica, inversa e la tangente en $]-\pi/2, +\pi/2[$, con $\tan(x+\pi) = \tan\ x$
Definimos $B = \mathbb{R}\backslash\{(2k-1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$$\sin\ x = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} \quad \forall x \in B, \qquad \sin\ x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash B$$

$$\cos\ x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} \quad \forall x \in B, \qquad \cos\ x = -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash B$$

$$\arcsin x = \sin^{-1} x \qquad \arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos x = \cos^{-1} x \qquad \arccos : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad\qquad cosec\ x = \frac{1}{\sin x} \qquad\qquad cotg\ x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

10.1. Operaciones

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+(\pi/2)) = \cos x \qquad \cos(x+(\pi/2)) = -\sin x$$

$$\arcsin x + \operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(2x) = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^x} \qquad \sin(2x) = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, existe un único $p \in \mathbb{R}^+$, y un único $t \in]-\pi,\pi[$, tales que $(x,y) = (p\cos t, p\sin t)$

11. Reglas de l'Hôpital

11.1. Teorema del Valor Medio Generalizado

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f, g \in C([a,b]) \cap D(]a,b[)$. Entonces, existe $c \in [a,b]$ verificando

$$(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$$

11.2. Reglas de l'Hôpital

Sea I un intervalo no trivial, $a \in I$ y $f, g : I\backslash A \to \mathbb{R}$ verificando

$$\text{Derivables en } I\backslash A,\ g(x) \neq 0\ \forall x \in I\backslash\{a\} \text{ y}$$
$$[\text{lím}_{x\to a} f(x) = \text{lím}_{x\to a} g(x) = 0 \text{ ó } \text{lím}_{x\to a} = \pm\infty \text{ o } \infty] \implies$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \qquad L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Esta regla puede aplicarse al estudio de límites laterales

12. Derivadas sucesivas

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Las funciones racionales son de clase C^∞. Si dos funciones son de una clase C^k, su composición, sus inversas también lo son.

$$f_n(x) = x^{n-1}|x| \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f_n(x) \in C^{n-1}(\mathbb{R})\backslash D^n(\mathbb{R})$$

$$g_n(x) = x^{2n}\sin(1/x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \qquad g_n(x) \in D^n(\mathbb{R})\backslash C^n(\mathbb{R})$$

13. Fórmula de Taylor

Sea I intervalo $a \in I^o$ y $f \in D^{n-1}(I)$. Supongmos que $f^{(k)}(a) = 0$ para $1 \leq k < n$ y que f es n veces derivable en a con $f^{(n)}(a) \neq 0$

- Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, f tiene mínimo relativo en a, si $f^{(n)}(a) < 0$, f tiene un máximo relativo en a
- Si n es impar, f no tiene extremo relativo en a

Fórmula de Taylor con resto de Lagrange Sea I intervalo no trivial y $f \in C^n(I) \cap D^{n+1}(I^o)$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces, para cualesquiera $a, x \in I : a \neq x$, existe un $c \in \text{mín}\{x, a\} < c < \text{máx}\{x, a\}$

$$R_n[f, a](x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Serie de Taylor:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(a + (n\pi/2))}{n!}(x-a)^n \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{cos(a + (n\pi/2))}{n!}(x-a)^n \quad \forall a, x \in \mathbb{R}$$

$$\log(1+x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \quad \forall x \in]-1, 1[\qquad \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

14. Funciones convexas

Una función será convexa cuando la gráfica de la restricción de f a cualquier intervalo cerrado y acotado queda siempre por debajo del segmento que pasa por $(a, f(a)), (b, f(b))$

Si I es un intervalo no trivial, $f : I \to \mathbb{R}$ es convexa cuando

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \quad \forall x, y \in I, \ \forall t \in [0, 1]$$

f es cóncava cuando $-f$ es convexa, si es convexa tiene pendiente creciente.
Lema de las tres secantes.
$f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces $\forall x_1, x_2, x_3 \in I : x_1 < x_2 < x_3$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

Teorema. $f : I \to \mathbb{R}$ convexa. Entonces f es derivable por la izquierda y por la derecha, y por tanto es continua, $\forall a \in I^o$

- $g : I \to \mathbb{R}$ creciente. Entonces g tiene límite por la izquierda y por la derecha en todo punto $a \in I^o$
- $f \in D^1(I)$, son equivalentes

- f es convexa
- f' es creciente
- $\forall a, x \in I$ se tiene que $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$

- $f \in C^1(I) \cap D^2(I^o)$. Entonces f es convexa si, y sólo si, $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I^o$

14.1. Ejemplos

Todo polinomio de primer orden es cóncavo y convexo (Recíproco verdadero)
La función potencia de exponente $\alpha \in \mathbb{R}$ es convexa cuando $\alpha \leq 0$ o $\alpha \geq 1$, y cóncava cuando $0 \leq \alpha \leq 1$ (en $\mathbb{R}^+$)
La exponencial es una función convexa y el logaritmo es una función cóncava
El $\arctan x$ es una función convexa en $\mathbb{R}_0^+$ y cóncava en $\mathbb{R}_0^+$