

# Análisis I

## 1. El espacio euclídeo, espacios normados y espacios métricos

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}^{(N)}$  con la suma y producto por escalares tiene estructura de espacio vectorial. La base usual es  $\Phi = \{e_k : k \in I_N\}$  con  $e_k(k) = 1$  y  $e_k(j) = 0 \ \forall j \in I_N \setminus \{k\}$ .

El producto escalar de dos vectores  $x, y \in \mathbb{R}^N$  es  $(x|y) = \sum_{k=1}^N x(k)y(k)$  cumple:

- **(P.1)**  $(\lambda u + \mu v) = \lambda(u|y) + \mu(v|y) \quad \forall u, v, y \in \mathbb{R}^N, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- **(P.2)**  $(x|y) = (y|x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$
- **(P.3)**  $(x|x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$

$\phi$  es una forma bilineal cuando es lineal en cada variable, simétrica si  $\phi(x, y) = \phi(y, x)$ . La forma cuadrática asociada se define como  $Q(x) = \phi(x, x)$ . Un espacio pre-hilbertiano es un espacio vectorial con un producto escalar.

La norma de un vector  $x \in X$  es  $\|x\| = (x|x)^{1/2}$ , intuitivamente es la longitud del vector. Cumple:

- **(N.1)**  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$  (desigualdad triangular)
- **(N.2)**  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$  (homogeneidad por homotecias)
- **(N.3)**  $x \in X, \|x\| = 0 \implies x = 0$  (no degeneración)

**Desigualdad de Cauchy-Schwartz.** En todo espacio pre-hilbertiano  $X$

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in X \quad \text{Igualdad si } x, y \text{ linealmente dependientes}$$

Un espacio normado es un espacio vectorial con una norma  $\|\cdot\|$ . Todo espacio pre-hilbertiano es normado. Una norma puede no proceder de un producto escalar, ejemplo de ello son las normas del máximo y de la suma, con ellas  $\mathbb{R}^N$  es espacio normado, no pre-hilbertiano.

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_k| : k \in \{1, 2, \dots, N\}\} \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^N |x_k|$$

### 1.1. Ortogonalidad/perpendicularidad

$$x \perp y \stackrel{\Delta}{\iff} (x|y) = 0 \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Un conjunto  $A$  es ortogonal si  $\forall x, y \in A, \ x \neq y, x \perp y$ , se llama ortonormal si además  $\|x\| = 1 \ \forall x \in A$

$$\text{Ángulo entre vectores no nulos } \alpha(x, y) = \arccos \frac{(x|y)}{\|x\| \|y\|} \in [0, \pi]$$

En un espacio normado se define la distancia por  $d(x, y) = \|y - x\|$ . En cualquier conjunto definimos la distancia discreta como

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

## 2. Topología de un espacio métrico

Bola abierta  $B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\} = \{x + ru : u \in B(0, 1)\}$ , su aspecto cambio cuando utilizamos una norma distinta de la euclídea. Los abiertos de un espacio métrico son las uniones de bolas abiertas. Dos distancias son equivalentes cuando generan la misma topología, dos normas lo son si lo son sus distancias asociadas. Para dos normas  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_2$  en un espacio vectorial equivalen:

- $\exists p \in \mathbb{R}^+ : \|x\|_2 \leq p\|x\|_1 \quad \forall x$
- La topología de la norma  $\|x\|_2$  está incluida en la de  $\|x\|_1$

Todas las normas en  $\mathbb{R}^N$  son equivalentes. Si  $\tau$  es una topología en  $E$  y  $\tau_A$  la de un subespacio métrico

$$\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\} \quad A^\circ = \bigcup \{U \in \tau : U \subset A\} \quad \bar{A} = \bigcap \{C \in \mathcal{C} : A \subset C\}$$

EL interior es el máximo abierto incluido en  $A$ , un conjunto es abierto si, y sólo si, es entorno de todos sus puntos. Un conjunto es denso en  $\mathbb{R}$  si su adherencia es  $\mathbb{R}$

$$x \in A^\circ \iff A \in \mathcal{U}(x) \iff \exists \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \subset A$$

$$x \in \bar{A} \text{ punto adherente} \iff U \cap A \neq \emptyset \quad \forall U \in \mathcal{U}(x) \iff B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$$

$$E \setminus \bar{A} = (E \setminus A)^\circ \quad E \setminus A^\circ = \overline{E \setminus A}$$

En cualquier espacio métrico  $E$ , todo subconjunto finito de  $E$  es cerrado.

$$S(x, r) = \{y \in E : d(y, x) = r\} = \bar{B}(x, r) \setminus B(x, r)$$

$$Fr(A) = \bar{A} \setminus A^\circ = \bar{A} \cap (E \setminus A^\circ) \quad Fr(A) = Fr(E \setminus A)$$

$$A \text{ es abierto} \iff A \cap Fr(A) = \emptyset \quad A \text{ es cerrado} \iff Fr(A) \subset A$$

Cuando todos los puntos de  $A$  son aislados es un subconjunto discreto, es decir  $A \cap A' = \emptyset$ . Equivale a que la topología inducida sea la discreta. En todo espacio métrico un punto es adherente a un conjunto si, y sólo si, existe una sucesión de puntos del conjunto que converge a él.

$$x \in A' \iff U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \quad \forall U \in \mathcal{U}(x) \iff B(x, \epsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$$

$$\{x_n\} \rightarrow x \iff [\forall U \in \mathcal{U}(x) \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \implies x_n \in U] \iff \{d(x_n, x)\} \rightarrow 0$$

Sean  $d_1, d_2$  distancias, equivalen

- La topología generada por  $d_1$  está incluida en la generada por  $d_2$
- Toda sucesión convergente para la distancia  $d_2$  es convergente para  $d_1$

Por tanto las distancias son equivalentes si, y sólo si, dan lugar a las mismas sucesiones convergentes. Para convertir un producto de espacios normados en normado podemos tomar la norma del máximo.

### 3. Continuidad y límite funcional

Una función  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $x \in E$

$$\forall V \in \mathcal{U}(f(x)) \exists U \in \mathcal{U}(x) : f(U) \subset V$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : y \in E, d(y, x) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

$$V \in \mathcal{U}(f(x)) \implies f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$$

$$x_n \in E \forall n \in \mathbb{N}, \{x_n\} \rightarrow x \implies \{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$$