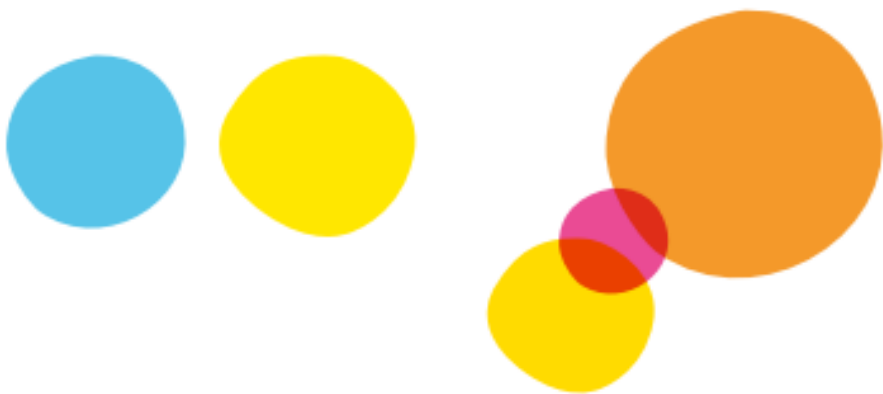

Morphing

RYAN BOUCHOU, X
X, X
X

CURSUS INGÉNIEUR
PREMIÈRE ANNÉE
GÉNIE INFORMATIQUE

20 janvier 2024

Tuteur entreprise :
ÉLISABETH X
prénom.nom@entreprise.com



Résumé

Table des matières

1	Morphing de formes courbes	3
1.1	Propédeutique au morphing de courbes splines	3
1.1.1	Splines	3
1.1.2	Courbes B-Splines	3
1.2	Morphing de courbes B-splines	4
	Annexes	7
	Références	8

1 Morphing de formes courbes

Les polygones à courbure nulle ne permettent pas une représentation précise de formes courbes. Pour pallier ce problème, nous allons nous appuyer sur les *courbes B-splines*, couramment utilisées en CAO pour représenter des formes courbes [1].

1.1 Propédeutique au morphing de courbes splines

1.1.1 Splines

Définition 1.1. Considérons des réels $u_0 < u_1 < \dots < u_m$, et $p \in \mathbb{N}$. On définit les *fonction B-Splines* $B_{i,p}$ par récurrence sur p et i dans \mathbb{N} comme suit :

$$\begin{cases} \text{Pour } 0 \leq i \leq m-1 \\ B_{i,0}(u) = 1 \text{ si } u \in [u_i, u_{i+1}[, \quad B_{i,0}(u) = 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \text{Pour } 0 \leq i \leq m-1 \\ B_{i,p}(u) = \frac{u-u_i}{t_{i+p}-t_i} B_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1}-u}{u_{i+p+1}-u_{i+1}} B_{i+1,p-1}(u) \end{cases} \quad (2)$$

Notation. Soit $j = 1, \dots, m+1-i$, on note :
$$\begin{cases} \omega_{i,j}(u) = \frac{u-u_i}{u_{i+j}-u_i} & \text{si } u_i < u_{i+1}, \\ \omega_{i,j} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Convention. Pour la suite, toute fonction dont le dénominateur est nul sera considérée comme nulle.

Définition 1.2. Ainsi, on a pour $i \in \{0, \dots, m-p-1\}$ et $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} B_{i,0}(u) &= 1 \quad \text{pour } t \in [u_i, t_{i+1}[= 0, \\ B_{i,p}(u) &= \sum_{j=1}^{m+1-i} \omega_{i,j}(u) B_{i,p-1}(u) \quad \text{pour } p > 0. \end{aligned}$$

1.1.2 Courbes B-Splines

Définition 1.3. Soit $m \in \mathbb{N}$. On appelle $(u_i)_{0 \leq i \leq m}$, *vecteur de noeuds*, et p , *degré de la B-spline*. On considère aussi des *points de contrôle* $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m$ de \mathbb{R}^n . De fait, $(\mathbf{P}_i)_{0 \leq i \leq m}$ forme un *polygone de contrôle*. La *courbe B-Spline* d'ordre p associée à ces données est définie par :

$$u \mapsto C(u) = \sum_{i=0}^m B_{i,p}(u) \mathbf{P}_i. \quad (3)$$

Propriété 1.1. Supposons que $C(u)$ soit une courbe B-spline de degré p définie comme suit :

$$C(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,p}(u) \mathbf{P}_i$$

Soit le point de contrôle \mathbf{P}_i déplacé vers une nouvelle position $\mathbf{P}_i + \mathbf{v}$. Alors, la nouvelle courbe B-spline $D(u)$ de degré p est la suivante [1] :

$$D(u) = C(u) + N_{i,p}(u) \mathbf{v} \quad (4)$$

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned}
 D(u) &= \sum_{i=0}^n B_{i,p}(u)(\mathbf{P}_i + \mathbf{v}) \\
 &= \sum_{i=0}^n B_{i,p}(u)\mathbf{P}_i + \sum_{i=0}^n B_{i,p}(u)\mathbf{v} \\
 &= C(u) + \sum_{i=0}^n B_{i,p}(u)\mathbf{v} \\
 &= C(u) + N_{i,p}(u)\mathbf{v} \quad \text{o.é.δ.}
 \end{aligned}$$

En pratique Desormais, il nous est possible, sur la base de points de contrôle, d'un vecteur de noeud et du degré de la B-spline, de générer une courbe B-spline comme ci-dessous :

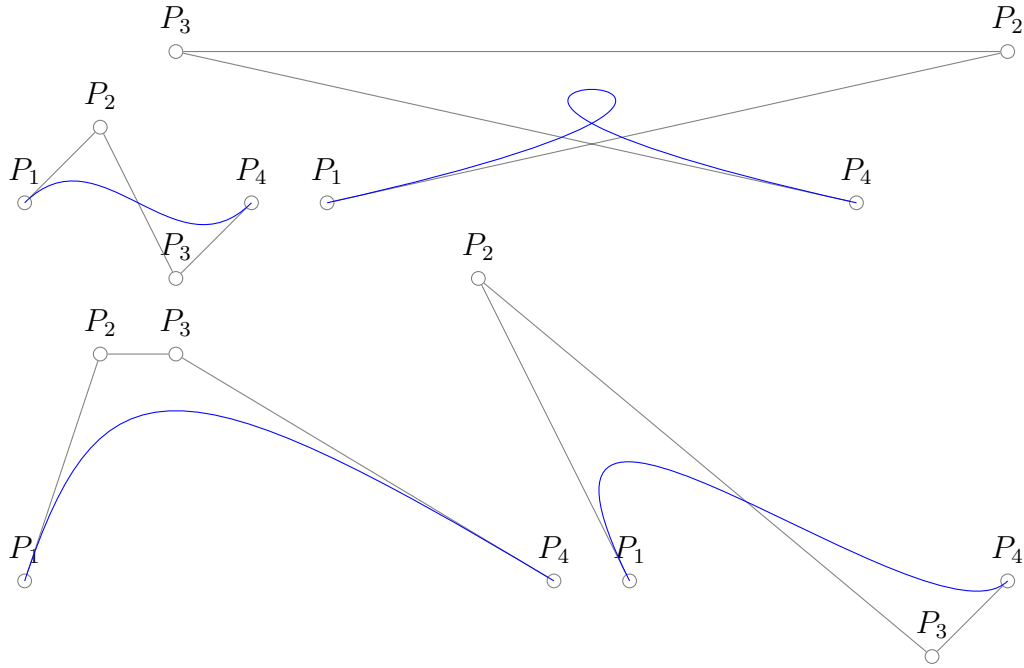


FIGURE 2 – Courbes B-splines

Lemme 2. — Soit $\mathcal{C} = (U, P, d)$ une courbe B-Spline. Alors, \mathcal{C} est une courbe fermée si et seulement si $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_m$, où $m = \text{ord}(P)$.

1.2 Morphing de courbes B-splines

Liste des Algorithmes

Table des figures

2	Courbes B-splines	4
---	-----------------------------	---

Annexes

Références

- [1] Pierre Pansu. Courbes b-splines, 2004. Accessed : 2024-05-30.