Uma breve incursão pelo Caos

Introdução a Física Estatística e Computacional - IFEC

Uma impressão que costuma surgir aos darmos nossos primeiros passos nas ciências exatas é que comportamentos aparentemente aleatórios e imprevisíveis não surgiriam das equações determinísticas que muitas vezes regem os fenômenos estudados. De fato, o paradigma clássico da mecânica Newtoniana, por exemplo, é que dadas as posições e velocidades iniciais de todas partículas de um sistema todo seu passado e futuro poderiam ser determinados resolvendo as equações pertinentes.

No entanto, para um sistema com um número muito grande de entes, isso não seria factível. A ideia de se resolver exatamente tais equações pode ser descartada quase de imediato já que mesmo o "simples" problema de três partículas interagindo por forças gravitacionais não pode ser resolvido exatamente para o caso geral. Numericamente podemos integrar as equações de movimento com precisão arbitrariamente grande ao custo de um enorme tempo computacional, o que aparentemente resolveria o problema. O mais surpreendente, no entanto, é que em muitas situações como a descrita, mudanças insignificantes nas condições iniciais ou mesmo nos arredondamentos feitos ao longo da simulação, podem levar a resultados completamente diferentes. Essa é uma das características possíveis de uma grande classe de fenômenos que compõem a área chamada de **Sistemas Complexos**, que poderia ser definida como a área da ciência dedicada ao estudo de sistemas compostos por componentes interagentes cujo comportamento torna-se intrinsecamente difícil de ser estudado devido às interações, o que leva, geralmente, a comportamentos não lineares, imprevisíveis e caóticos.

Neste texto iremos apresentar alguns exemplos de sistemas denominados "caóticos", i.e., determinísticos, porém altamente dependente das configurações iniciais. No final será proposta uma tarefa onde iremos explorar um sistema determinístico simples para mostrar que comportamentos aleatórios e imprevisíveis podem surgir em situações completamente determinísticas, dando origem a um comportamento caótico e servindo como nosso primeiro exemplo de aplicação na área de sistemas complexos.

1 O Pêndulo Duplo

O primeiro sistema que usaremos para exemplificar o que chamamos de "caos" é o chamado pêndulo duplo, que são basicamente dois pêndulos simples acoplados como mostra a Figura 1

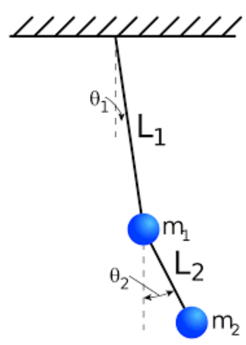

Figure 1: Pêndulo Duplo Esquematizado

O pêndulo simples é bem comportado. No regime de "pequenos ângulos" a solução é da forma $\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. No regime de "grandes ângulos" a solução analítica é mais complicada mas é conhecida como função de t e, portanto, podemos prever o comportamento do pendulo simples com exatidão.

O mesmo não acontece para o pêndulo duplo. As equações diferenciais de movimento que devem ser resolvidas para determinarmos a evolução temporal são:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\cos(\theta_1-\theta_2)\sin\theta_2 - 2\sin\theta_1 - \sin(\theta_1-\theta_2)\left[\cos(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right]}{1+\sin^2(\theta_1-\theta_2)} \tag{1}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{2[\cos(\theta_1-\theta_2)\sin\theta_1 - \sin\theta_2] + \sin(\theta_1-\theta_2)\left[2\dot{\theta}_1^2 + \cos(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2^2\right]}{1+\sin^2(\theta_1-\theta_2)}, \tag{2}$$

onde $\dot{\theta}_1 = d\theta_1/dt$ é a derivada primeira de θ_1 em relação ao tempo e $\ddot{\theta}_1$ é a derivada segunda.

Essa é uma equação diferencial que até então não sabemos resolver analiticamente de forma que temos que usar métodos numéricos para determinar como o sistema se comporta. Para solucionar uma equação dessas computacionalmente costuma-se primeiro definir uma condição inicial $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ e ir calculando $\theta_{1,2}$ em intervalos de tempo δt através de um processo iterativo. Aí começamos a ver o que é conhecido como caos: mudanças ínfimas nas condições iniciais são capazes de acumular durante o processo iterativo como um efeito cascata, resultando em um caminho completamente diferente para condições iniciais praticamente idênticas.

A sensitividade do sistema às condições iniciais também gera outro questionamento: como uma solução numérica é aproximada, como os erros cometidos durante o processo iterativo influenciam o passo a passo das iterações? A solução obtida computacionalmente é confiável?

2 O Conjunto de Mandelbrot

Um dos fractais mais curiosos e conhecidos é o **conjunto de Mandelbrot**, definido através de uma formula simples definida no plano complexo:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z_0 = 0 \tag{3}$$

De tal forma que definimos um valor inicial c e, a partir dele, começamos a iterar a equação. O conjunto é montado tomando c como ponto de partida da seguinte forma

- Se o processo iterativo diverge, c não pertence ao conjunto
- Se o processo é limitado, i.e., $z_n < \infty \qquad \forall n$, c pertence ao conjunto

A Figura 2 ilustra o conjunto. Pontos em preto são os que pertencem ao conjunto e os em branco não pertencem. Podemos classificar esse sistema como caótico quando observamos a fronteira da figura: para c próximo à fronteira, o processo irá divergir ou permanecer limitado? Na fronteira, pequenas alterações em c podem levar um ponto que não pertence ao conjunto para um ponto que pertence e vice versa. Tal é mais um exemplo de sistema determinístico sensível às condições iniciais.

3 Dinâmica de Populações

A origem do modelo que utilizaremos para exemplificar o comportamento caótico presente em alguns sistemas está relacionado à biologia, mais especificamente, à dinâmica de populações. Imagine que queiramos determinar como evolui o número de indivíduos de uma população, por exemplo, de bactérias. Iremos considerar uma versão discretizada, onde avaliaremos a população em cada geração. Assim, um modelo que captura a essência deste processo é:

$$y_{n+1} = r y_n (1 - y_n), \tag{4}$$

onde y_n representa a população da geração n e r é um fator que controla o processo e está relacionado à fatores como a taxa de natalidade. O termo não linear $(1 - y_n)$ dá conta do fato que em algum momento a população será tão grande que tenderá a diminuir sua taxa de crescimento, um fato geralmente relacionado à falta de recursos suficientes para sustentar toda a população. Da forma tratada aqui, $y \in [0, 1]$ e representa

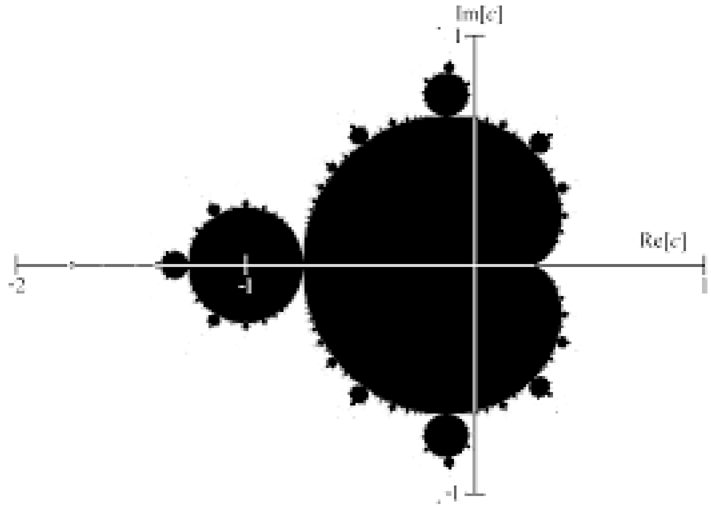

Figure 2: Conjunto de Mandelbrot

a fração da população máxima possível no ambiente em questão. Uma solução da versão contínua desta equação é a chamada função logística, que é uma curva sigmoide (formato de S) que está presente numa infinidade de situações (veja, por exemplo, https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_function).

A constante r, presente na equação acima, desempenha um papel crucial. Perceba inicialmente que para r menor que 1 a população irá sempre decrescer, de forma que após um número suficientemente grande de gerações a população se extinguirá. Vamos, então, explorar mais sistematicamente o papel desta constante e as consequências de escolhermos diferentes valores.

3.1 Tarefa

1. Faça gráficos de y_n como função de n para $r = 0,5$. Use $y_0 = 0,5$ e n entre 1 e 50.

2. Repita o procedimento acima para os seguintes valores de r: 2.5; 3.1; 3.5 e 3.7. Comente sobre cada resultado. Em particular comente sobre a existência de padrões.

3. Refaça os gráficos anteriores considerando três condições iniciais consideravelmente diferentes, ou seja, trace, em um mesmo gráfico, as curvas para $y_0 = 0.25$, $y_0 = 0.5$ e $y_0 = 0.75$. Comente

4. Refaça o item anterior considerando três condições iniciais ligeiramente diferentes, ou seja, trace as curvas para $y_0 = 0.5$, $y_0 = 0.501$ e $y_0 = 0.5001$. Comente

   Aqui, você deve ter percebido que para determinados valores de r o comportamento do sistema após um longo tempo não pode ser predito com segurança. Para explorar melhor esse comportamento, vamos adotar o seguinte procedimento:

5. Considere 10000 valores de r igualmente espaçados entre 10^{-5} e 4. Para cada um desses valores de r, vamos iterar a equação logística 1000 vezes, i.e., $n_{max} = 1000$. Em um gráfico de y_n como função de r, vamos plotar para cada valor de r os 100 últimos passos da evolução. Teremos 100 pontos no eixo y do gráfico para cada valor de r, que estará no eixo x. A figura gerada é conhecida como diagrama de bifurcação. Essa figura traz inúmeras informações importantes. Tire um tempo para pensar nela e analisar o que encontrou.

6. Para explorar melhor uma das interessantes propriedades desse diagrama, refaça o procedimento anterior para valores de r entre 3.7 e 3.9 e para valores de r entre 3.840 e 3.856. No último caso, para melhorar a visualização, restrinja os valores do eixo y para o intervalo entre 0,44 e 0,56. Comente seus resultados.

Apresente um relatório com os resultados, suas análises e conclusões.

4 Referências

- K. Anagnostopoulos, “Computational Physics: A Practical Introduction to Computational Physics and Scientific Computing”, http://www.physics.ntua.gr/~konstant/ComputationalPhysics/
- This equation will change how you see the world (the logistic map) – Veritasium https://youtu.be/ovJcsL7vyrk
- The Hardest Mandelbrot Zoom Ever In 2014 https://www.youtube.com/watch?v=zXTpASSd9xE
- Double pendulum — Chaos — Butterfly effect — Computer simulation https://www.youtube.com/watch?v=d0Z8wLLPNE0