Ejercicios

Eric Dolores

March 2021

1. Introducción

En mi plática hablaré de un problema abierto en neuro-matemáticas [3] y su relación con la teoría de categorías.

En nuestro projecto nos encontramos con sucesiones que aun no podemos calcular. Este escrito define estas sucesiones usando lenguage accesible para nivel de universidad, con la esperanza que alguien con tiempo libre pueda resolverlos. Los calculos en este texto fueron hechos por dos estudiantas de universidad, a veces usando el software mathematica [2].

Estos problemas son parte de un problema abierto desde el 2006.

2. Secuencias triangulares

Dado un n número natural, ¿Cuantas ternas de números $1 \leq x < y < z \leq n$ existen? Contamos $\binom{n}{3}$. Con esta información y usando las técnicas de [4] podemos calcular la siguiente serie

$$\sum \binom{n}{3} x^n = \frac{x^3}{(1-x)^4}.$$

Nosotros pensamos en las ternas $x < y < z$ geométricamente y las dibujamos de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r] & z \\ x \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

la flecha $a \to b$ implica que $a < b$. Hay ciertas relaciones entre el dibujo geométrico de arriba y la serie combinatoria $\frac{x^3}{(1-x)^4}$, ver [1].

Para el dibujo:

$$
\begin{tikzcd}
s^1_1 \arrow[r] & s^1_2 \arrow[r] & s^1_3 \\
s^2_2 \arrow[u] \arrow[r] & s^2_3 \arrow[u] & \\
s^3_3 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
$$

le queremos asociar el numero c_n de soluciones simultaneas a los sistemas:

$$
\begin{tikzcd}
s^1_1 \arrow[r] & s^1_2 \arrow[r] & s^1_3 \leq n \\
s^2_2 \arrow[u] & & \\
1 \leq s^3_3 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
$$

y

$$
\begin{tikzcd}
 & s^1_2 \arrow[r] & s^1_3 \leq n \\
s^2_2 \arrow[r] & s^2_3 \arrow[u] & \\
1 \leq s^3_3 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
$$

Y con un poco de trabajo calculamos la serie correspondiente

$$\sum c_n x^n = \frac{(1+x)x^5}{(1-x)^7}.$$

Definimos una R secuencia triangular como la secuencia doble:

$$
\begin{tikzcd}
s^1_1 \arrow[r] & s^1_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & s^1_{R-1} \arrow[r] & s^1_R \\
s^2_2 \arrow[u] \arrow[r] & s^2_3 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & s^2_R \arrow[u] & \\
 \arrow[u] & \arrow[u] & \vdots & & \\
s^{R-1}_{R-1} \arrow[u] \arrow[r] & s^{R-1}_R \arrow[u] & & & \\
s^R_R \arrow[u] & & & &
\end{tikzcd}
$$

Si A_R es una R secuencia triangular, le asociamos la función zeta

$$Z(A_R) = \sum c_n x^n,$$

donde c_n es el número de soluciones simultaneos a los sistemas representados por la secuencia triangular. Cada camino de s_R^R a s_R^1 define un sistema nuevo.

Equivalentemente, c_n es el número de maneras de poner índices en los vertices del dibujo preservando el orden.

Por ejemplo

$$\begin{tikzcd}
& s_2^1 \arrow[r] & s_3^1 \arrow[r] & s_4^1 \\
& s_3^2 \arrow[u] & & \\
s_3^3 \arrow[r] & s_4^3 \arrow[u] & & \\
s_4^4 \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}$$

es uno de los sistemas definido por

$$\begin{tikzcd}
s_1^1 \arrow[r] & s_2^1 \arrow[r] & s_3^1 \arrow[r] & s_4^1 \\
s_2^2 \arrow[u] \arrow[r] & s_3^2 \arrow[u] \arrow[r] & s_4^2 \arrow[u] & \\
s_3^3 \arrow[u] \arrow[r] & s_4^3 \arrow[u] & & \\
s_4^4 \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}$$

En nuestro projecto hemos calculado:

- Si $R = 2, Z(A_R) = \frac{x^3}{(1-x)^4}$.

$$\begin{tikzcd}
s_1^1 \arrow[r] & s_2^1 \\
s_2^2 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

- Si $R = 3, Z(A_R) = \frac{(1+x)x^5}{(1-x)^7}$.

$$
\begin{tikzcd}
s^1_1 \arrow[r] & s^1_2 \arrow[r] & s^1_3 \\
s^2_2 \arrow[u] \arrow[r] & s^2_3 \arrow[u] & \\
s^3_3 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
$$

- Si $R = 4, Z(A_R) = \frac{(1+5x+5x^2+x^3)x^7}{(1-x)^{11}}$.

$$
\begin{tikzcd}
s^1_1 \arrow[r] & s^1_2 \arrow[r] & s^1_3 \arrow[r] & s^1_4 \\
s^2_2 \arrow[u] \arrow[r] & s^2_3 \arrow[u] \arrow[r] & s^2_4 \arrow[u] & \\
s^3_3 \arrow[u] \arrow[r] & s^3_4 \arrow[u] & & \\
s^4_4 \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}
$$

- Si $R = 5, Z(A_R) = \frac{(1+16x+70x^2+112x^3+70x^4+16x^5+x^6)x^9}{(1-x)^{16}}$.
- Si $R = 6, Z(A_R) =$
$\frac{(1+42x+539x^2+2948x^3+7854x^4+10824x^5+7854x^6+2948x^7+539x^8+42x^9+x^{10})x^{11}}{(1-x)^{22}}$.
- Si $R = 7, Z(A_R) =$
$\frac{(1+99x+3129x^2+44739x^3+336819x^4+1450761x^5+3753841x^6+5999851x^7)x^{13}}{(1-x)^{29}} +$
$+ \frac{(5999851x^8+3753841x^9+1450761x^{10}+336819x^{11}+44739x^{12}+3129x^{13}+99x^{14}+x^{15})x^{13}}{(1-x)^{29}}$.

3. Problema abierto

¿Cual es $Z(A_R)$ para $R > 7$?
En https://github.com/mendozacortesgroup/chinampas,
archivo Computation_of_R7.nb pueden ver nuestro código, sin embargo el método es ineficiente y no sirve para R grande.

Referencias

[1] François Bergeron, Gilbert Labelle, and Pierre Leroux. *Combinatorial Species and Tree-like Structures*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1997.

[2] Wolfram Research, Inc. Mathematica, Version 12.1. Champaign, IL, 2020.

[3] Eugene M Izhikevich. Polychronization: computation with spikes. *Neural computation*, 18(2):245–282, 2006.

[4] Herbert S. Wilf. *generatingfunctionology*. A K Peters Ltd., Wellesley, MA, third edition, 2006.