

Основы дискретной математики

№ 13г

Доказать $A \subseteq (B \cup C) \leftrightarrow (A \cap \overline{B}) \subseteq C$

В одну сторону: $\forall x \in A \Rightarrow x \in (B \cup C)$

- $x \in A \ \& \ x \in B$
 $x \in A \ \& \ x \notin B \Rightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset; \quad \emptyset \in C$
- $x \in A \ \& \ x \notin B \Rightarrow x \in A \cap \overline{B} \Rightarrow x \in C$

В другую сторону:

- $x \in A, x \in B \Rightarrow x \in (B \cup C)$
- $x \in A, x \notin B, x \in C \Rightarrow x \in (B \cup C)$

№ 14б

Доказать: $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

$$A \Delta [(B \setminus C) \cap (C \setminus B)] = A \Delta [(B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})] = A \Delta X$$

Пусть $X = (B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})$

$$\overline{X} = \overline{(B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})} = (\overline{B} \cup C) \cap (\overline{C} \cup B)$$

$$A \Delta X = (A \setminus X) \cup (X \setminus A) = (A \cup \overline{X}) \cap (X \cup \overline{A}) = A \cap (\overline{B} \cup C) \cap (\overline{C} \cup B) \cup$$

$$X = (\overline{B} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{B}) \cup (B \cap C) = (\overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap C)$$

$$A \Delta X = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap B) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap C \cap B) =$$
$$[(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C})] \cup (A \cap C \cap B) \cup (\overline{A} \cap C \cap B) = [\overline{C} \cap ((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}))] \cup [C \cap ((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}))] = [\overline{C} \cap (A \Delta B)] \cup [C \cap (\overline{A \Delta B})] = [A \Delta B] \Delta C$$

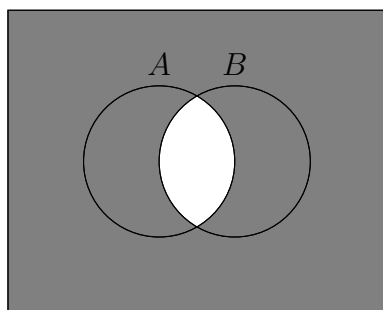
Задача с листочка № 4

$U = \{\forall \text{ студентов 3 курса}\}, \quad |U| = 63$
 $A = \{\text{студенты, слушающие прорицание}\}, \quad |A| = 16$
 $B = \{\dots, \text{магловедение}\}, \quad |B| = 37$
 $|A \cap B| = 5$

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| - |A \cap B|$$

04.10.2021

Def: $A * B = \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



Доказать: $(A * B) * (A * B) = A \cap B$

$$A * A = \overline{A} \cup \overline{A} = \overline{A} \implies \overline{(A * B)} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$$

Доказать: $(A * A) * (B * B) = A \cup B$

$$\text{Аналогично: } (A * A) * (B * B) = \overline{A} * \overline{B} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cup B$$

1 Решение уравнений и систем уравнений

№ 1

Доказать: $A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B \leftrightarrow A \setminus B = \emptyset \leftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$

- Докажем, что $\overline{A} \cup B = U \implies A \subseteq B$:
 $x \in (\overline{A} \cup B) \leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ или } x \in B$

$$A \cup \bar{A} = U$$

Пусть $x \in A$. Если $x \notin B \implies x \notin \bar{A} \implies x \notin \bar{A} \cup B \leftrightarrow x \notin U$ - противоречие $\implies x \in B$

№ 2

Доказать: $A = B \leftrightarrow A \Delta B = \emptyset$

$$1. A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$$

$$\begin{cases} \forall x \in A \implies x \in B \\ \forall x \in B \implies x \in A \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A \subseteq B \implies A \cap \bar{B} = \emptyset \\ B \subseteq A \implies B \cap \bar{A} = \emptyset \end{cases} \implies (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = \emptyset$$

$$2. A \Delta B = \emptyset = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \implies A \cap \bar{B} = \emptyset \implies A \subseteq B. \text{ Аналогично: } B \subseteq A$$

№ 3

Решить уравнение: $A \setminus X = B$

Пусть $C = A \setminus X \implies C = B \leftrightarrow C \Delta B = \emptyset$

$$(A \setminus X) \Delta B = \emptyset = [(A \setminus X) \setminus B] \cup [B \setminus (A \setminus X)] = [(A \cap \bar{X}) \cap \bar{B}] \cup [B \cap (A \cap \bar{X})] = [A \cap \bar{B} \cap \bar{X}] \cup [B \cap \bar{A}] \cup [B \cap X] = \emptyset \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} B \cap \bar{A} = \emptyset \\ B \cap X = \emptyset \\ [A \cap \bar{B}] \cap \bar{X} = \emptyset \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} B \subseteq A \\ X \subseteq \bar{B} \\ A \cap \bar{B} \subseteq X \end{cases}$$

$$A \cap \bar{B} \subseteq X \subseteq \bar{B} \leftrightarrow X = (A \cap \bar{B}) \cup Z, \quad Z \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$$

№ 4

Решить систему:

$$\begin{cases} A \cap X = \emptyset \\ B \cap \overline{X} = \emptyset \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} X \subseteq \overline{A} \\ B \subseteq X \end{cases} \leftrightarrow B \subseteq X \subseteq \overline{A} \implies$$

$$\implies X = B \cup Y, \quad Y \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$

№ 27 Л&В

Решить систему:

$$\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} (A \cap X) \Delta B = \emptyset \\ (A \cup X) \Delta C = \emptyset \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} [A \cap X \cap \overline{B}] \cup [B \cap \overline{A}] \cup [B \cap \overline{X}] = \emptyset \\ [A \cap \overline{C}] \cup [X \cap \overline{C}] \cup [C \cap \overline{AX}] = \emptyset \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} B \cap \overline{A} = \emptyset \\ A \cap \overline{C} = \emptyset \\ (A \cap \overline{B} \cap X) \cup (\overline{C} \cap X) = [(A \cap \overline{B}) \cup \overline{C}]^{\text{S}} \cap X = \emptyset \\ [B \cup (C \cap \overline{A})]^{\text{T}} \cap \overline{X} = \emptyset \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} B \subseteq A \subseteq C \\ T \subseteq X \subseteq \overline{S} \\ \overline{S} = \overline{(A \cap \overline{B}) \cup \overline{C}} = \overline{A \cap \overline{B}} \cap C = (\overline{A} \cup B) \cap C = \\ = (C \cap \overline{A}) \cup (B \cap C) = (C \cap \overline{A}) \cup B = T \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} X = B \cup (C \cap \overline{A}) \\ B \subseteq A \subseteq C \end{cases}$$

№ 28 Л&В

$$\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} (A \setminus X) \Delta B = \emptyset \\ (X \setminus A) \Delta C = \emptyset \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} (A \cap \overline{X} \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap X) = \emptyset \\ (X \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap A) \cup (C \cap \overline{X}) = \emptyset \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B \subseteq A \subseteq \overline{C} \\ X \cap [B \cup (\overline{A} \cap \overline{C})] = \emptyset \\ \overline{X} \cap [C \cup (A \cap \overline{B})] = \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \subseteq A \subseteq \overline{C} \\ [C \cup (A \cap \overline{B})] \subseteq X \subseteq \overline{[B \cup (\overline{A} \cap \overline{C})]} \end{cases}$$

$$\overline{[B \cup (\overline{A} \cap \overline{C})]} = \overline{B} \cap \overline{\overline{A} \cap \overline{C}} = \overline{B} \cap (A \cup C) = C \cup (A \cap \overline{B})$$

№ 30 Л&В

$$\begin{aligned} \begin{cases} A \setminus X = B \\ A \cup X = C \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (A \setminus X) \Delta B = \emptyset \\ (A \cup X) \Delta C = \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A \cap \overline{X} \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap X) = \emptyset \\ (A \cap \overline{C}) \cup (X \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{X}) = \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} B \subseteq A \subseteq C \\ X \cap (B \cup \overline{C}) = \emptyset \\ \overline{X} \cap ((C \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})) = \emptyset \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} B \subseteq A \subseteq C \\ ((C \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})) \subseteq X \subseteq \overline{B} \cap C \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} X = \overline{B} \cap C \\ B \subseteq A \subseteq C \end{cases} \end{aligned}$$

2 Декартово произведение множеств

$$A = \{a_i | i \in (1, n)\}$$

$$B = \{b_j | j \in (1, m)\}$$

$$A \times B = \{(a_i; b_j) | i \in (1, n) \& j \in (1, m)\}$$

$$\{x, y\} \times \{1, 2, 3\} = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

$$A \times A = A^2$$

2.1 Свойства декартового произведения

$$1. A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$$

$$2. A \times B = A \times C \Leftrightarrow B = C$$

2.2 Отношения

25.10.2021

№ 8е

$(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 1)$

1. Рефлексивность - нет (нет пар вида (x, x))
2. Симметричность - нет
3. Антисимметричность - нет (есть $(2, 1), (1, 2)$)
4. Транзитивность - Да

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1

№ 2

$\Phi = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, a)\}$

1. Рефлексивность - нет (нет пары (d, d))
2. Симметричность - нет (нет пары $(a, c) \rightarrow +(a, b); (c, b); (d, b)$)
3. Антисимметричность - нет (есть $(a, d), (d, a)$)
4. Транзитивность - Да

	a	b	c	d
a	1	1	1	1
b	①	1	①	1
c	1	1	1	①
d	1	1	1	①

$$\begin{array}{c|c} & a \\ a & a \\ c & c \\ d & d \end{array} \rightarrow +(c, d); (d, c); (d, d)$$

$$\begin{array}{c|c} & b \\ b & d \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & c \\ a & a \\ c & c \\ d & d \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & d \\ a & a \\ b & c \\ c & d \\ d & \end{array} \rightarrow +(b, a); (b, c)$$