

# 1 Комплексные числа и полиномы

## Классная работа

17.09.2021

№ 137

Вычислить  $(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2})^{24}$

$$\begin{aligned} z &= (1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2})^{24} = [1 - (\frac{\sqrt{3}-i}{2})]^{24} = [\cos(0) + i\sin(0) - \cos(-\frac{\pi}{6}) - i\sin(-\frac{\pi}{6})]^{24} \\ &= [\cos(0) - \cos(-\frac{\pi}{6}) + i(\sin(0) - \sin(-\frac{\pi}{6}))]^{24} = \\ &= [-2\sin(-\frac{\pi}{12})\sin(\frac{\pi}{12}) + 2i\sin(\frac{\pi}{12})\cos(-\frac{\pi}{12})]^{24} \\ z &= [-2\sin(\frac{\pi}{12})(\sin(-\frac{\pi}{12}) - i\cos(-\frac{\pi}{12}))]^{24} \end{aligned}$$

$$\sin(-\frac{\pi}{12}) - i\cos(-\frac{\pi}{12}) = -\cos(\frac{5\pi}{12}) - i\sin(\frac{5\pi}{12})$$

$$\begin{aligned} z &= [2\sin(\frac{\pi}{12})(\cos(\frac{5\pi}{12}) + i\sin(\frac{5\pi}{12}))]^{24} = 2^{24} * \sin(\frac{\pi}{12})^{24}(\cos(10\pi) + i\sin(10\pi)) \\ &= 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}^{24} = (2 - \sqrt{3})^{12} \end{aligned}$$

№ 554 б

$$f(x) = (x-2)^4 + 4(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 10(x-2) + 20$$

## 1.1 НОД

Даны полиномы  $f(x)$ ,  $g(x)$ . Если  $f(x) \bmod q(x) = 0$ , то  $q(x)$  - делитель  $f(x)$

НОД - наибольший общий делитель  $f(x)$  и  $g(x)$

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$$

$$g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x)$$

$$r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x)$$

...

$$r_{k-1}(x) = r_k(x)q_{k+1}(x)$$

$$\text{НОД}(f(x), g(x)) = r_k(x)$$

### № 577 а

$$\text{НОД}(x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1, x^3 + x^2 - x - 1)$$

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1 &= x(x^3 + x^2 - x - 1) - 2x^2 - 3x - 1 \\ (x^3 + x^2 - x - 1) &= (2x^2 + 3x + 1)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4}(x + 1) \\ (2x^2 + 3x + 1) &= (x + 1)(2x + 1) \Rightarrow \text{НОД}(x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1, x^3 + x^2 - x - 1) \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

### № 577 с

$$\text{НОД}(x^6 + 7x^4 + 8x^3 + 7x + 7, 3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - x)$$

$$\begin{aligned} x^6 + 7x^4 + 8x^3 + 7x + 7 &= \frac{x}{3}(3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - x) - \frac{14}{3}x^4 + 7x^3 - \frac{14}{3}x + 7 \\ 3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - x &= (2x^4 - 3x^3 + 2x - 3)\left(\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right) - \frac{x^3 + 1}{4} \\ 2x^4 - 3x^3 + 2x - 3 &= (x^3 + 1)(2x - 3) \\ \text{НОД}(x^6 + 7x^4 + 8x^3 + 7x + 7, 3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - x) &= x^3 + 1 \end{aligned}$$

ДЗ: 549с; 577е,ф; 578с,д; 593с; 583а

# Классная работа

20.09.2021

## № 578 а

Найдем  $\delta$ :

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2 = (x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2) + x^3 - 2x$$

$$x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = (x + 1)(x^3 - 2x) + x^2 - 2$$

$$x^3 - 2x = x(x^2 - 2)$$

$$\delta = \text{GCD}\langle x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 \rangle = x^2 - 2$$

$$r_2 = g - r_1 q_2 \quad | \quad r_1 = f - g q_1 \Rightarrow r_2 = g - q_2(f - g q_1) = -q_2 f + (1 + q_1 q_2)g$$

$$x^2 - 2 = -(x + 1)f_1 + (x + 2)f_2$$

## № 583 а

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 4)(x^2 - 2x + 1) + 3x - 4$$

$$x^2 - 2x + 1 = (\frac{1}{3}x - \frac{2}{9})(3x - 4) + \frac{1}{9}$$

$$3x - 4 = (3x - 4)(1)$$

$$\text{GCD}\langle x^3 - 6x^2 + 12x - 8, x^2 - 2x + 1 \rangle = 1$$

$$\begin{aligned} 1 &= 9(x^2 - 2x + 1) - (3x - 2)(3x - 4) = 9(x - 1)^2 - \\ &- (3x - 2)((x - 2)^3 - (x - 4)(x - 1)^2) = (x - 1)^2(9 + (3x - 2)(x - 4)) - \\ &- (x - 2)^3(3x - 2) = (x - 1)^2(3x^2 - 14x + 17) - (x - 2)^3(3x - 2) \end{aligned}$$

## 1.2 Формула Виета.

### Разложение дроби на простейшие

20.09.2021

$$f_n = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = -a_1 \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n = a_2 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -a_3 \\ \dots \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n = (-1)^na_n \end{cases} \quad (1)$$

#### Пример

5, 2 - корни 1 кратности, 3 - 2 кратности. Найти  $f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$

$$1. \quad 5-2+3+3=-a_1 \Rightarrow a_1 = -9$$

$$2. \quad 5(-2) + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 17 = a_2$$

$$3. \quad a_3 = 33$$

$$4. \quad a_4 = -90$$

$$f(x) = x^4 - 9x^3 + 17x^2 + 33x - 90$$


---

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \deg P < \deg Q$$

$$Q(x) = (x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_s)^{k_s}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{l_2} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{l_m}$$

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x - \alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \frac{A_{21}}{x - \alpha_2} + \frac{A_{22}}{(x - \alpha_2)^2} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x - \alpha_2)^{k_2}} + \\ &\dots + \frac{A_{sk_s}}{(x - \alpha_s)^{k_s}} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \dots + \\ &\frac{B_{ml_m}x + C_{ml_m}}{(x^2 + p_mx + q_m)^{l_m}} \end{aligned}$$

### Пример 1

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3-1} &= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2+x+1} \\
\frac{1}{x^3-1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{(A+B)x^2+x(A-B+C)+(A-C)}{x^3-1} \leftrightarrow \\
&\leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A-C=1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=-\frac{2}{3} \end{cases} \quad (2)
\end{aligned}$$

### № 625с

$$\begin{aligned}
\frac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2} + \frac{F}{x-2} \\
A(x-1)^2(x+1)^2(x-2) + B(x-1)(x+1)^2(x-2) + C(x+1)^2(x-2) + \\
+ D(x-1)^3(x+1)(x-2) + E(x-1)^3(x-2) + F(x-1)^3(x+1)^2 &= 5x^2+6x-23
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x=1: & -4C=-12 \\ x=-1: & 24E=-24 \\ x=2: & 9F=9 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} C=3 \\ E=-1 \\ F=1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x=0: & -2A+2B-2C+2D+2E-F=-23 \leftrightarrow -A+B+D=-7 \\ x^5: & A+D+1=0 \\ x^4: & -2A+B-4D=2 \end{cases} \leftrightarrow \quad (4)$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} A+D=-1 \\ -2A+B-4D=2 \\ -A+B+D=-7 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-4 \\ D=-2 \end{cases} \quad (5)$$

$$\frac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3} - \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-2}$$

## 2 Матрицы

27.09.2021

$$\begin{aligned} & A_{m \times n} \quad a_{ij} \\ & A_{n \times n} - \text{квадратная} \\ & E_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{единичная} \\ & 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{нулевая} \\ & D_{n \times n} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} - \text{диагональная} \end{aligned}$$

### 2.1 Операции над матрицами

$$\begin{aligned} C_{m \times n} &= A_{m \times n} \pm B_{m \times n}, & c_{ij} &= a_{ij} \pm b_{ij} \\ C_{m \times n} &= A_{m \times p} \cdot B_{p \times n} \\ C &= \alpha \cdot A, & c_{ij} &= \alpha \cdot a_{ij} \\ A_{m \times n}^T &\rightarrow A_{n \times m}, & a_{ij} &\rightarrow a_{ji} \end{aligned}$$

### 2.2 Определитель матрицы

$|A|$  или  $\det(A)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}) - \\ - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33})$$

$$\begin{pmatrix} \overset{+}{a_1} & \overset{+}{b_1} & \overset{+}{c_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overset{-}{a_1} & \overset{-}{b_1} \\ \overset{-}{a_2} & \overset{-}{b_2} \\ \overset{-}{a_3} & \overset{-}{b_3} \end{matrix}$$

**№ 220c**

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

**№ 223a**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$$

**№ 220c**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 6 & 12 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}$$

**№ 231c**

$$\begin{vmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{vmatrix} = \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

**№ 232a**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 + 1 - (-1) = 1$$

**№ 232e**

$$\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (1+i)(1-i) - (-i^2) = 1 - 2 - 1 = -2$$

**№ 273**

$$\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix} = \cancel{13547 \cdot 28423} + 1354700 - \cancel{28423 \cdot 13547} - 2842300 = \\ = 1354700 - 2842300 = -1487600$$

**№ 284**

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = 3x^2y + 3xy^2 - (x+y)^3 - x^3 - y^3 = -2(x^3 + y^3)$$

ДЗ: 220df, 274, 221, 224, 232cdf

**2.2.1 Свойства определителей**

1.  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \implies \det(A^n) = \det(A)^n$
2.  $\det(A^T) = \det(A)$
3. *if*  $\exists$  0 - строка(столбец)  $\implies \det(A) = 0$
4. *if*  $\exists$  две пропорциональные строки(столбца)  $\implies \det(A) = 0$
5. При перестановке строк знак определителя меняется
6.  $\alpha \cdot a_i$  (строка/столбец)  $\implies \det = \alpha \cdot \det(A)$
7. *if*  $a_i = \alpha \cdot a_j + \beta \cdot a_k \implies \det(A) = 0$
8. Определитель не изменится, если к  $a_i$  прибавить  $\alpha \cdot a_j$



$$9. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \dots & b_n + c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

### 2.2.2 Подсчет определителя

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \Delta_{12,12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \Delta_{23,23} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \dots$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$$

### 2.2.3 Примеры

№ 273

*I Способ*

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1)^{5+2}.$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{5+4} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -7 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -8 & 3 \\ 0 & 10 & -2 & -1 \end{vmatrix} - \\
- 3 \cdot [3 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} - 5 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}] = 28 \cdot \\
\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 4 & -8 & 3 \\ 10 & -2 & -1 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 15 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \\
= 28 \cdot (30 + 40 - 400 + 4) - 9 \cdot (-2 + 6 + 1 + 12) + 15 \cdot (36 - 1 - 4 - 6 + 4 - 6) = -9128 - 153 + 225 = -1069 \quad \text{- Ошибка в вычислениях!}$$

## II Способ

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{4+3+1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + \\
\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+4+1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+4+1+4} \cdot \\
\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1069$$

## 2.3 Собственные числа матрицы

22.10.2021

$$\Delta_n = \alpha \cdot \Delta_{n-1} + \beta \cdot \Delta_{n-2}$$

$$\Delta_2 = \lambda^2 - 1 \quad \Delta_1 = \lambda \quad \Delta_0 = 1$$

$$G(z) = \frac{1+\lambda z-\lambda z}{1-\lambda z+z^2} = \frac{1}{1-\lambda z+z^2} - \text{производящая функция}$$

$$1 - \lambda z + z^2 = 0 \implies z_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

$$\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4} = (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 4(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)) - 4\lambda(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) + \lambda^2$$

$$\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) + 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) - \lambda\cos(\varphi) - \lambda i\sin(\varphi) = -1 \leftrightarrow \lambda = 2\cos(\varphi)$$

$$G(z) = \frac{A}{z_1 - z} + \frac{B}{z_2 - z} = \frac{A(z_2 - z) + B(z_1 - z)}{(z_1 - z)(z_2 - z)}$$

$$\begin{cases} z = z_1 : & A(z_2 - z_1) = 1 \\ z = z_2 : & B(z_1 - z_2) = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A(-2i\sin(\varphi)) = 1 \\ B(2i\sin(\varphi)) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{i}{2\sin(\varphi)} \\ B = -\frac{i}{2\sin(\varphi)} \end{cases}$$

$$\frac{1}{1-\alpha \cdot z} = \sum^{+\infty} (\alpha z)^n \implies$$

$$\frac{A}{z_1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z_1}z} = \frac{A}{z_1} \cdot \sum^{+\infty} \left(\frac{1}{z_1}\right)^n \cdot z^n = A \cdot \sum^{+\infty} \frac{1}{z_1^{n+1}} \cdot z^n$$

$$G(z) = \frac{\frac{A}{z_1}}{1-\frac{1}{z_1}z} + \frac{\frac{B}{z_2}}{1-\frac{1}{z_2}z} = \frac{i}{2\sin(\varphi)} \cdot \sum^{+\infty} \left[ \frac{1}{(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^{n+1}} - \frac{1}{(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))^{n+1}} \right] \cdot z^n$$

$$\implies \Delta_n = \frac{i}{2\sin(\varphi)} \cdot [(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))^{n+1} - (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^{n+1}] = \frac{i}{2\sin(\varphi)} \cdot (-2\sin((n+1)\varphi)) = \frac{\sin((n+1)\varphi)}{\sin(\varphi)}$$

$$\Delta_n = \frac{\sin((n+1)\varphi)}{\sin(\varphi)} = 0 \leftrightarrow (n+1)\varphi = \pi \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\lambda = 2\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

## 2.4 Системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

$Ax = 0$  - однородная система

$Ax = b$  - неоднородная система

## 2.5 Решение систем

1.  $Ax = b, \quad A_{[n \times n]} \implies X = A^{-1}b$

2. *Крамер*

$$Ax = b, \quad A_{[n \times n]}$$

$$\Delta = \det(A)$$

$\Delta_i = \Delta$ , где вместо  $i$ -го столбца - столбец  $b$

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

3. *Гаусс*

$$Ax = b, \quad A_{[m \times n]}$$

$(A|b) \rightarrow$  Трапецевидный вид

Если нулевой строке соответствует ненулевой элемент в строке  $b$ , то решений нет

Переписать систему в обычном виде, выразить одну переменную через все остальные

$$X_{\text{неоднородная}} = X_{\text{частное}} + X_{\text{общее}}$$

## 2.6 Примеры

№ 449b

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{S_2 - 2S_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Система разрешима

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - 2x_4 = \frac{1}{3}c_3 - c_4 \\ x_2 = \frac{1}{3}(-4c_3 - 3c_4) \\ x_3 = c_3 \\ x_4 = c_4 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c_3 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot c_4 - \text{общее решение в параметрическом виде}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{фундаментальная система решений (только при па-}$$

раметрах)

Вектор без параметра - частное решение

## 2.7 Собственный вектор матрицы

22.10.2021

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda X \\ (A - \lambda E)X &= 0 \end{aligned}$$

№ 1032 e

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & -3 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(5-\lambda) + 6 + 6 - (-3\lambda) - 2(5-\lambda) -$$

$$-6(\lambda-1) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda_{1,2,3} = 2$$

$$\lambda = 2:$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot X = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_2 - c_3 \\ x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \end{cases}$$

$$X = c_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(-2 \ 1 \ 0)^T, \quad (1 \ 0 \ 1)^T - \text{ФСР, собственные векторы}$$

№ 1032 j

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

- $\lambda = 1 :$   

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = 0$$

$$X = c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -1 :$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -c_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = c_3 \end{cases}$$

$$X = c_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Собственные векторы:  $\lambda = 1 :$

## 3 Геометрия

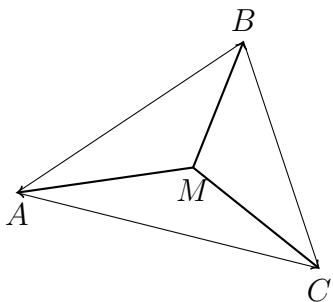
### 3.1 Векторы

Вектор:  $\vec{AB}$ ,  $|\vec{AB}|$  — длина вектора

$\vec{a}, \vec{b}$  — коллинеарны, если лежат на одной или параллельных прямых

$\vec{a}, \vec{b}$  — компланарны, если лежат в одной или параллельных плоскостях

№ 9



Найти точку M:  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$

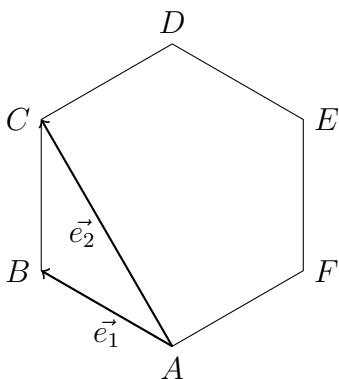
$$\vec{MA} = \vec{AB} - \vec{MB}$$

$$\vec{MC} = \vec{CB} - \vec{MB}$$

$$\text{Тогда: } \vec{AB} + \vec{CB} - 3\vec{MB} = \vec{0}$$

$$\vec{MB} = \frac{\vec{AB} + \vec{CB}}{3}$$

№ 23



$$\vec{AB} = e_1 = (1, 0)$$



$$\begin{aligned}
\vec{AC} &= e_2 = (0, 1) \\
\vec{BC} &= \vec{e}_2 - \vec{e}_1 = (-1, 1) \\
\vec{CD} &= \vec{AD} - \vec{AC} = 2\vec{BC} - \vec{AC} = (-2, 1) \\
\vec{DE} &= -\vec{e}_1 = (-1, 0) \\
\vec{EF} &= -\vec{BC} = (1, -1) \\
\vec{FA} &= -\vec{CD}
\end{aligned}$$

01.11.2021

### № 29

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  — Произвольные три вектора

$\alpha, \beta, \gamma$

$\vec{v}_1 = \alpha\vec{a} - \beta\vec{b}, \quad \vec{v}_2 = \gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}, \quad \vec{v}_3 = \beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$  — Доказать компланарность

Компланарность  $\leftrightarrow$  Линейная зависимость

$\gamma(\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}) + \beta(\gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}) + \alpha(\beta\vec{c} - \gamma\vec{a}) = \vec{0} \implies \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  — линейно зависимы  $\implies$

$\implies \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  — Компланарны

### № 30

$\vec{a} = (2, 5, 14), \quad \vec{b} = (14, 5, 2)$

Проекция  $\vec{a}$  на  $Oxy \parallel \vec{b}$  -?

$\vec{d} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$

$d_z = 0$ , т. к.  $d \subset Oxy \implies d_z = a_z + \lambda b_z = 14 + 2\lambda = 0 \implies \lambda = -7 \implies$

$\implies \vec{d} = (-96, -30, 0)$

№ 28

Установить, в каком случае тройки векторов будут линейно зависимы. Если они линейно зависимы - представить третий вектор как комбинацию двух.

$$1. \vec{a} = (5, 2, 1), \quad \vec{b} = (-1, 4, 2), \quad \vec{c} = (-1, -1, 6)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

Найдем ранг матрицы A:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{22}{5} & \frac{11}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  — линейно независимы

$$2. \vec{a} = (6, 4, 2), \quad \vec{b} = (-9, 6, 3), \quad \vec{c} = (-3, 6, 3)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & 0 \\ -9 & 6 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — линейно зависимы}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{2}{3} \\ \gamma = -1 \end{cases} \quad \text{— частное решение} \Rightarrow \vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

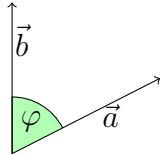
### 3.1.1 Произведение векторов

1. Умножение на число

$$\vec{p} = \alpha \cdot \vec{a}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. Скалярное произведение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$



В декартовой системе координат:  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \implies$

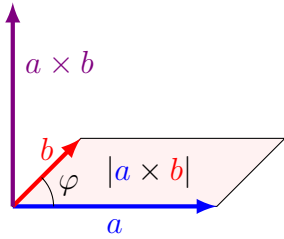
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Свойства

- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$
- $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$
- $(\vec{a}, \alpha \vec{b}) = \alpha (\vec{a}, \vec{b})$

3. Векторное произведение

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$$



1.  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$
2.  $\vec{c} \perp \vec{a}$ ,  $\vec{c} \perp \vec{b}$
3.  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  - правая тройка

$$\text{В декартовой системе координат: } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Свойства

- $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$
- $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$
- $[\vec{a}, \alpha \vec{b}] = \alpha [\vec{a}, \vec{b}]$

4. Смешанное произведение

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

В декартовой системе координат: 
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

5. Двойное векторное произведение

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$$

**№ 131**

$\triangle ABC$ , длины сторон = 1

$$(\vec{AB}, \vec{BC}) + (\vec{BC}, \vec{CA}) + (\vec{CA}, \vec{AB}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(120) + 1 \cdot 1 \cdot \cos(120) + 1 \cdot 1 \cdot \cos(120) = -\frac{3}{2}$$

### 3.2 Прямые и плоскости

08.11.2021

*Взаимное расположение плоскостей/прямых на плоскости*

1.  $\Pi_1 \perp \Pi_2$  ( $l_1 \perp l_2$  на плоскости)  $\implies$   
 $\implies \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$   
 $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$  ( $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ )
2.  $\Pi_1 \parallel \Pi_2$  ( $l_1 \parallel l_2$  на плоскости)  
 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \quad \left(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}\right)$
3.  $\Pi_1 \cap \Pi_2$   
 $\vec{n}_1 \neq \vec{n}_2, \quad \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq 0$

*Взаимное расположение прямых в пространстве*

1.  $l_1, l_2$  в одной плоскости  
 $()$
2.  $l_1 \perp l_2 \implies a_1 \perp a_2 \implies a_1 \cdot a_2 = 0$
3.  $l_1 \parallel l_2 \implies \vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2 \implies \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$
4.  $l_1, l_2$  совпадают  
 $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = 0 \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{a}_1 = 0$

**№ 367**

$$\begin{aligned} \triangle ABC : A(-2, 3), B(4, 1), C(6, -5), \quad m_a - ? \\ M_A = \left(\frac{4+6}{2}, \frac{1-5}{2}\right) = (5, -2) \implies m_a = (M_A A) \\ m_a : \frac{x+2}{7} = -\frac{y-3}{5} \leftrightarrow 5x + 10 + 7y - 21 = 0 \leftrightarrow 5x + 7y - 11 = 0 \end{aligned}$$

**№ 372**

$$y = ax + b \implies \begin{cases} -3 = 4a + b \\ S = \frac{1}{2}|b|\left|\frac{b}{a}\right| = 3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 6|a| \\ b = -3 - 4a \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} b = -3 - 4a \\ 16a^2 + 24a - 6|a| + 9 = 0 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a \geq 0 \\ b = -3 - 4a \\ 16a^2 + 18a + 9 = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a < 0 \\ b = -3 - 4a \\ 16a^2 + 30a + 9 = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \emptyset \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a = -\frac{3}{2} \\ b = 3 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a = -\frac{3}{8} \\ b = -\frac{3}{2} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$l_1 : y = -\frac{3}{2}x + 3 \Leftrightarrow 3x + 2y - 6 = 0$$

$$l_2 : y = -\frac{3}{8}x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3x + 8y + 12 = 0$$

### № 377

$$2x - y = 0$$

$$5x - y = 0$$

$3x - y = 0$  — У треугольника одна из вершин находится в точке  $(0, 0)$ .

Через эту же вершину проходит медиана. Найдём две остальные вершины:

$A(0, 0), B(b, 2b), C(c, 5c)$ . Тогда уравнение 3 стороны:  $\frac{x-b}{c-b} = \frac{y-2b}{5c-2b} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3-b}{c-b} = \frac{9-2b}{5c-2b}$$

$M(\frac{b+c}{2}, \frac{2b+5c}{2})$  лежит на медиане  $\Rightarrow \frac{2b+5c}{2} = \frac{3b+3c}{2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2b + 5c = 3b + 3c \\ \frac{3-b}{c-b} = \frac{9-2b}{5c-2b} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 2c \\ -\frac{3-2c}{c} = \frac{9-4c}{c} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 4 \\ c = 2 \end{array} \right.$$

Т. о.  $B(4, 8), C(2, 10), (BC) : x + y - 12 = 0$

*12.11.2021*