24.09.2021

1 Предел последовательности

№ 62

$$\lim_{n\to\infty} nq^n = 0, \quad |q| < 1$$

- **Случай q = 0 очевиден**
- **Разберем случай q $\neq$ 0:**
  Т. к. $|q| \in (0;1)$, то $|q| = \frac{1}{d+1}$, где d > 0; Тогда $nq^n = \frac{n}{(1+x)^n}$
  Заметим, что $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + ... \;\; > \;\; \frac{n(n-1)}{2}x^2$
  Таким образом: $|nq^n| < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}x^2} = \frac{2}{(n-1)x^2} < \epsilon$ $(\epsilon > 0)$ $\leftrightarrow$ n > 1 + $\frac{2}{\epsilon x^2}$
  Значит по определению предела: $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$

№ 63

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \text{ (a > 0)}$$

По определению предела нужно доказать следующее неравенство:
$|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon$

- **Рассмотрим случай a > 1**
  $|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon, \quad \epsilon > 0 \leftrightarrow |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \epsilon.$
  Так как a > 1, то $a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$. Опустим модуль в неравенстве.
  $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \epsilon \;\; \leftrightarrow \;\; (1+\epsilon)^n > a$
  $(1+\epsilon)^n = 1 + \epsilon n + ... > \epsilon n > a \;\; \leftrightarrow \;\; n > \frac{a}{\epsilon}$
  Значит при a > 1 неравенство верно.
- **Случай a = 1 очевиден**

- **Рассмотрим случай a $<$ 1**
  $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\frac{1}{a})}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1$
  Так как 1/a $>$ 1, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$ (1 пункт)

№ 58

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n} = 0,\ a > 1$$

Рассмотрим пример №61: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{b^n} = 0$, b $>$ 1 $=>$ $\frac{1}{b^n} < \frac{n}{b^n} < 1$ (*), в окрестночти $+\infty$
Пусть b $= a^p$, p $>$ 0 $=>$ pln $a = \ln b$
(*): $\frac{1}{a^{pn}} < \frac{n}{a^{pn}} < 1 \leftrightarrow \log_a(\frac{1}{a^{pn}}) < \log_a(\frac{n}{a^{pn}}) < 1 \leftrightarrow 0 < \log_a(\frac{a^{pn}}{n}) < \log_a(\frac{1}{a^{pn}})$
$\leftrightarrow 0 <$ pn (1 $<$ n $< a^{pn}$ $\leftrightarrow 0 < \log_a n < \log_a(a^{pn}) =$ pn)
Разделим все на n: 1 $< \frac{log_a(a^{pn})}{n} <$ p
==============

№ 65

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

При n $\geq$ 2: $\sqrt[n]{n} > 1$
n $= (\sqrt[n]{n})^n = [1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n = 1 +$ n$((\sqrt[n]{n} - 1)) + ... + (\sqrt[n]{n} - 1)^n > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2$
n $> \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \quad \leftrightarrow \quad 0 < (\sqrt[n]{n} - 1)^2 < \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1} \to 0 \leftrightarrow$
$1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{n-1} \to 1$

№ 66

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

Докажем, что n! $> (\frac{n}{3})^n$ (*) при n $\to \infty$ методом матиматической индукции:

База:
n = 1: 1 > $\frac{1}{3}$
n = 2: 2! = 2 > $(\frac{2}{3})^2$
Переход: нредположим, что (*) верно. Тогда n! > $(\frac{n}{3})^n$
(n + 1)! = (n + 1)n! > (n + 1) $(\frac{n}{3})^n$
$\frac{(n+1)^n}{n^n}$ = $(1 + \frac{1}{n})^n$ < e < 3 ↔ $(\frac{n}{3})^n$ > $\frac{(n+1)^n}{3^{n+1}}$
Таким образом: 0 < $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ < $\frac{3}{n}$ $\rightarrow 0$

№ 75

$\frac{1}{n+1}$ < $\ln(1 + \frac{1}{n})$ < $\frac{1}{n}$

№ 76

$\lim\limits_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a$

2 Предел функции

2.1 Область определения

y = f(x), x,y ∈ $\mathbb{R}$
ДЗ: 151 - 165

№ 152
y = $\sqrt{3x - x^2}$

D: $3x - x^2 \geq 0 \;\leftrightarrow\; x^2 - 3x \leq 0 \;\leftrightarrow\; x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

Определние

Пусть x = a - внутренняя точка D(f) $\leftrightarrow$ $\exists$ $\delta > 0$: $(a-\delta; a+\delta) \subset D(x)$
Тогда A = $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, если $\forall$ $\epsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ такое, что $\exists$ x $\in$ $(a-\delta; a+\delta)$ => $|f(x)-A| < \epsilon$

2.2 Замечательные пределы

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = +\infty$

2.3 Свойства пределов

1. $\lim\limits_{x\to a}[Af(x)+Bg(x)] = A\lim\limits_{x\to a} f(x) + B\lim\limits_{x\to a} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to a}[Af(x)g(x)] = A\lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

Если существуют два из трех пределов, то существует и третий, и справедливы свойства 1-3

2.4 Примеры

№ 412

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{6x+11x^2+6x^3}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}[6+11x+6x^2] = 6$$

№ 413

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^5+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1-5x-1}{x^5+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+5x^2+10x+10}{1+x^3}$$
$$=10$$

№ 416

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{50}(2-\frac{3}{x})^{20}(3+\frac{2}{x})^{30}}{x^{50}(2+\frac{1}{x})}=\frac{2^{20}3^{30}}{2^{50}}=$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$$

№ 418

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3(x-2))}{(x-3)(x-5)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x-5}=-\frac{1}{2}$$

№ 419

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x-3)}=\frac{1+2}{1^2+2+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

№ 422

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x-1)}{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x-1)}=\frac{1-(-1)-1}{1-(-1)+1-(-1)-1}=$$

$$=\frac{1}{3}$$

№ 424

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\mathrm{d}(x^{100}-2x+1)}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}x^{50}-2x+1}{\mathrm{d}x}}=\lim_{x\to 1}\frac{100x^{99}-2}{50x^{49}-2}=\frac{98}{48}$$

2.5 Иррациональные функции

№ 435

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 1$$

<u>*24.09.2021*</u>

№ 437

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x\to 4} \frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)((\sqrt{1+2x}+3)}$$
$$= 2 \cdot \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \frac{2\cdot 4}{6} = \frac{4}{3}$$

№ 440

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 3} = \frac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(x^2-9)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+13-4x-4}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} = -3\cdot \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} =$$
$$-3 \cdot \frac{1}{6\cdot(4+4)} = \text{-}\frac{1}{16}$$

№ 447

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x})((\sqrt[3]{27+x})^2+\sqrt[3]{27+x}\sqrt[3]{27-x}+(\sqrt[3]{27-x})^2)}{x(1+2\sqrt[3]{x})((\sqrt[3]{27+x})^2+\sqrt[3]{27+x}\sqrt[3]{27-x}+(\sqrt[3]{27-x})^2)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(1+2\sqrt[3]{x})((\sqrt[3]{27+x})^2+\sqrt[3]{27+x}\sqrt[3]{27-x}+(\sqrt[3]{27-x})^2)} = \frac{2}{3^2+3\cdot 3+3^2} = \frac{2}{27}$$

№ 455

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$

Пусть $x = t^{n\cdot m} \implies \sqrt[m]{x} = t^n \quad \sqrt[n]{x} = t^m$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} = \lim\limits_{t\to 1} \frac{t^n-1}{t^m-1} = \lim\limits_{t\to 1} \frac{\cancel{(t-1)}(1+t+t^2+...+t^{n-1})}{\cancel{(t-1)}(1+t+t^2+...+t^{m-1})} = \frac{n}{m}$

№ 457

$\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x] \ ^{[\infty-\infty]} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}[(a+b)+\frac{ab}{x}]}{\cancel{x}(1+\sqrt{(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})})} =$

$= \frac{a+b}{2}$

ДЗ: 436, 455.1, 456, 458

27.09.2021

№ 462

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}) \ ^{[\infty-\infty]} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x^3+3x^2)^2-(x^2-2x)^3}{(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^5+(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^4\sqrt{x^2-2x}+...+(\sqrt{x^2-2x})^5}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^6+6x^5+9x^4-(x^6-6x^5+12x^4-8x^3)}{(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^5+(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^4\sqrt{x^2-2x}+...+(\sqrt{x^2-2x})^5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^5}(12-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2})}{\cancel{x^5}((\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}})^5+...+(\sqrt{1-\frac{2}{x}})^5)} =$

$= \frac{12}{6} = 2$

2.6 Тригонометрические функции

1 *Замечательный предел*

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{sin(x)}=1$

2 *Тригонометрические формулы*

1. $sin(2x)=2sin(x)cos(x)$
2. $cos(2x)=cos^2(x)-sin^2(x)=2cos^2(x)-1=1-2sin^2(x)$
3. $1+cos(x)=2cos^2(\frac{x}{2})$
4. $1-cos(x)=2sin^2(\frac{x}{2})$
5. $sin(\alpha+\beta)=sin(\alpha)\cdot cos(\beta)+cos(\alpha)\cdot sin(\beta)$

№ 471

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(5x)}{x}=|t=5x|=5\cdot\lim_{t\to 0}\frac{sin(t)}{t}=5$$

№ 472

$$\lim_{x\to\infty}\frac{sin(x)}{x}$$

$$0\leq|\frac{sinx}{x}|=\frac{|sinx|}{x}\leq\frac{1}{x}\to 0$$

№ 474

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin^2(\frac{x}{2})}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot[\lim_{x\to 0}\frac{sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}]^2=\frac{1}{2}$$

№ 475

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)-sin(x)}{sin^2(x)}\ \ ^{[\frac{0}{0}]} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{sin(x)}(\frac{1-cos(x)}{cos(x)})}{\cancel{sin(x)}\cdot sin^2(x)} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{cos(x)}\cdot[\frac{1}{2}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}}]^2 = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

№ 476

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(5x)-sin(3x)}{sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{sin(5x)}{sin(x)} - \lim_{x\to 0}\frac{sin(3x)}{sin(x)} = 5-3=2$$

№ 480

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg(\frac{\pi x}{2})\ \ ^{[0\cdot\infty]} = \lim_{x\to 1}(1-x)\frac{sin(\frac{\pi x}{2})}{cos(\frac{\pi x}{2})} = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{cos(\frac{\pi x}{2})}\ \ ^{[\frac{0}{0}]} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{cos(\frac{\pi(x-1)}{2}+\frac{\pi}{2})} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{sin(\frac{\pi(x-1)}{2})} = \frac{2}{\pi}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi t}{2}}{sin(\frac{\pi t}{2})} = \frac{2}{\pi}$$

№ 488

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(a+2x)-2sin(a+x)+sin(a)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(sin(a+2x)+sin(a))-2sin(a+x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2sin(a+x)\cdot cos(x)-2sin(a+x)}{x^2} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin(a+x)(cos(x)-1)}{x^2} = -2sin(a)\cdot$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})^2\cdot 4} = -sin(a)$$

№ 493

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2sin^2(x)+sin(x)-1}{2sin^2(x)-3sin(x)+1}\ \ ^{[\frac{0}{0}]} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cancel{(2sin(x)-1)}(sin(x)+1)}{\cancel{(2sin(x)-1)}(sin(x)-1)} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3$$

01.10.2021

№ 499

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+tg(x)}-\sqrt{1+sin(x)}}{x^3}\ \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{tg(x)-sin(x)}{x^3(\sqrt{1+tg(x)}+\sqrt{1+sin(x)})} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left[\frac{sin(x)}{x}\cdot \frac{1-cos(x)}{x^2cos(x)}\right] = \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2(\frac{x}{2})}{4(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{4}$$

№ 502

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-cos(x^2)}}{1-cos(x)}\ \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2sin^2(\frac{x^2}{2})}}{2sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\lim_{x\to 0}2\cdot\cancelto{1}{\frac{sin(\frac{x^2}{2})}{\frac{x^2}{2}}}\cdot\cancelto{1}{\frac{(\frac{x}{2})^2}{sin^2(\frac{x}{2})}} = \\ = \sqrt{2}$$

ДЗ: 503, 504, 505, 688, 689

3 Непрерывность функции

Опр. Пусть $f(x), x \in \mathbb{X} \subseteq R$
$a \in \mathbb{X}$ - внутренняя точка, т. е $(a - x_0; a + x_0) \subset \mathbb{X}, x_0 > 0$
Тогда f(x) - непрерывная в точке x = a, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

№ 687

$y = \frac{x}{(x+1)^2}$ $\quad x \neq -1 \implies x = -1$ - точка разрыва?
$\lim\limits_{x \to -1} \frac{x}{(x+1)^2} = -\lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{(x+1)^2} = -\infty \quad \implies \quad$ x = -1 - точка разрыва II рода

№ 690

$y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$
Особые точки: $x = 0, x = -1, x = 1$
$y = \frac{\frac{1}{x(x+1)}}{\frac{1}{x(x-1)}} = \frac{x-1}{x+1}, \quad x \in \mathbb{D}$(y)
$\lim\limits_{x \to -1} y = \lim\limits_{x \to -1} \frac{x-1}{x+1} = -2 \lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{x+1} = -\infty \quad \implies \quad x = -1$ -
- точка разрыва II рода
$\lim\limits_{x \to 0} y = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x-1}{x+1} = -1 \quad \implies \quad$ x = 0 - точка разрыва III рода
$\lim\limits_{x \to 1} y = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x-1}{x+1} = 0 \quad \implies \quad$ x = 1 - точка разрыва III рода

№ 720

$y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n}, \quad x \geq 0$

$$y(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \implies \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \implies x = 1 - \text{точка интереса}$$

$x = 1$ - точка разрыва I рода, т. к. $\lim\limits_{x\to 1-} y(x) = 1; \lim\limits_{x\to 1+} y(x) = 0$

3.1 Исследование функций. Построение графиков

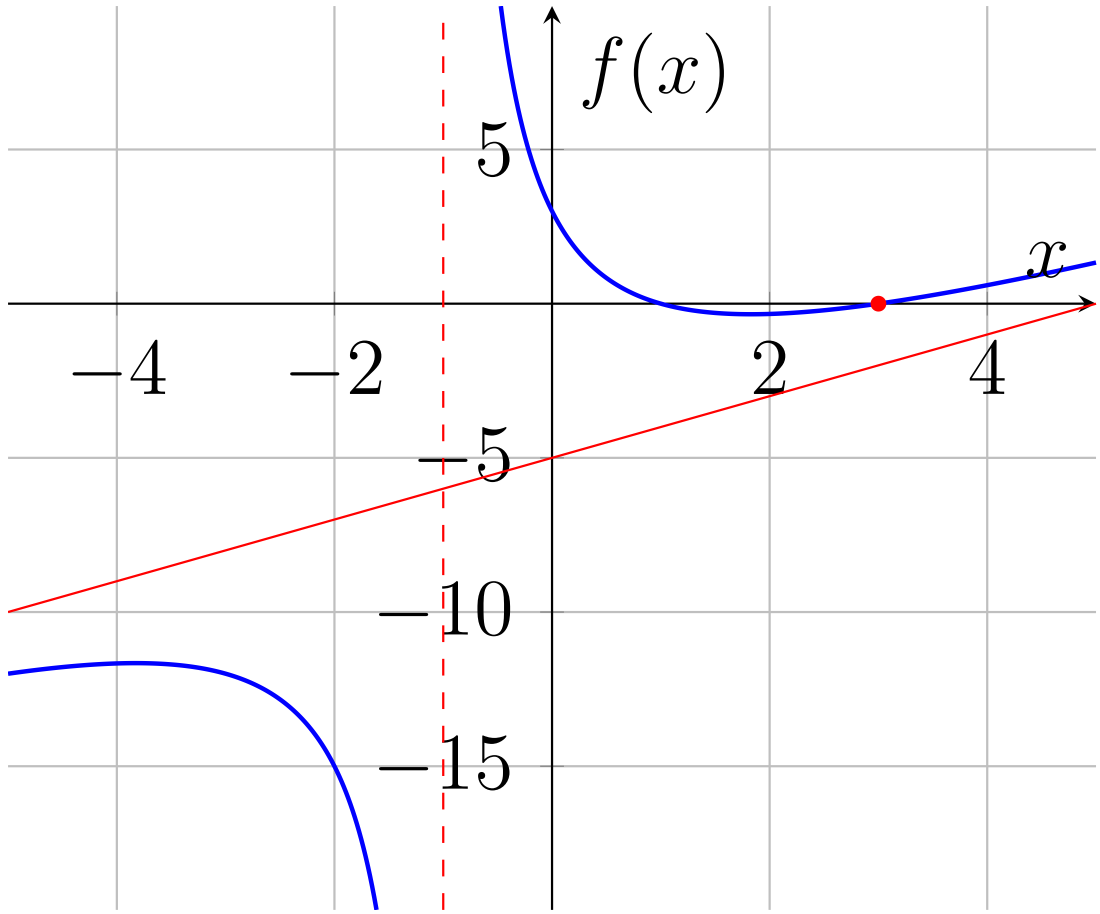
04.10.2021

$y = f(x)$

1. Найти $D(f(x))$ & найти корни $f(x) = 0$
2. Найти особые точки - $x = a$: $\lim\limits_{x\to a+} f(x), \lim\limits_{x\to a-} f(x)$?
   Найти асимптоты
3. Поведение функции в окрестностях $\pm\infty$
4. Монотонность $f(x)$
5. График

№ 263

$y = \frac{x^2-4x+3}{x+1} = x - 5 + \frac{8}{x+1}$
$\lim\limits_{x\to -1} [x - 5 + \frac{8}{x+1}] = -6 + 8 \lim\limits_{x\to -1} \frac{1}{x+1} = \infty$



$$\lim \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x+3}{x+1} = +\infty$$

$$\lim \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x+3}{x+1} = -\infty$$

№ 242

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x-10}}$$

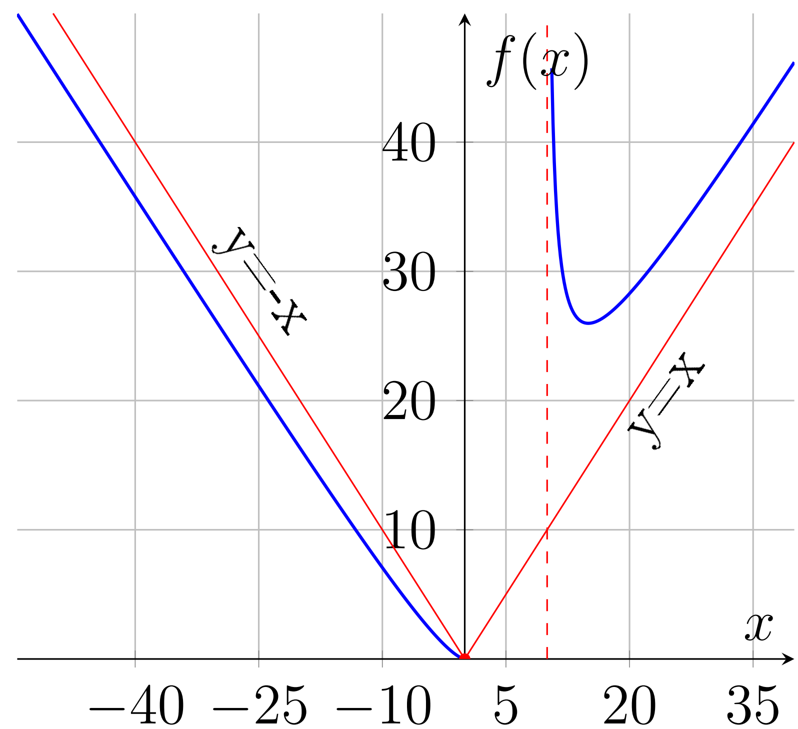
1. $D(y) : \frac{x^3}{x-10} \geq 0 \quad \leftrightarrow$

$$\begin{cases} x \geq 0, \;\; x-10 > 0 \implies x \leq 0 \\ x < 0, \;\; x-10 < 0 \implies x < 0 \end{cases} .$$

$D(y) = (-\infty; 0] \cup (10; +\infty)$

2. $x = 10$ – вкртикальная асимптота, т. к. $\lim\limits_{x\to 10} y(x) = +\infty$
   $\lim\limits_{x\to 0+} y(x)$ – не существует
   $\lim\limits_{x\to 0-} y(x) = 0$

   - $x > 10 \implies y = \sqrt{\frac{x^3}{x-10}} = x \cdot \cancelto{1}{\sqrt{\frac{x}{x-10}}} \implies$
     $\implies y = x$ - наклонная асимптота
   - $x < 10 \implies y = \sqrt{\frac{x^3}{x-10}} = -x \cdot \cancelto{1}{\sqrt{\frac{x}{10-x}}} \implies$
     $\implies y = -x$ - наклонная асимптота



3.2 Производные

22.10.2021

$y = f(x)$
$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

3.2.1 Таблица производных

1. $(x^n)' = nx^{n-1} \;\; \forall \;\; n \in \mathbb{R}$
2. $(sinx)' = cosx \qquad (cosx)' = -sinx$
3. $(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = (e^{xln(a)})' = a^x \cdot lna$
4. $(lnx)' = \frac{1}{x}$
5. $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (arctgx)' = \frac{1}{x^2+1}$

3.2.2 Правила дефференцирования

1. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
2. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
3. $[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
4. $(f[g(x)])' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ - *Производная сложной функции*

3.2.3 Примеры

№ 918

$$y = x + \sqrt{1-x^2} \cdot arccos(x)$$
$$y' = \cancel{1} + \frac{-x \cdot arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \cancel{\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}} = -\frac{x \cdot arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

№ 919

$$y = x \cdot arcsin(\sqrt{\frac{x}{1+x}}) + arctg(\sqrt{x}) - \sqrt{x}$$

$y' = arcsin(\sqrt{\frac{x}{1+x}}) + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) + \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} - \frac{1}{2\sqrt{x}} =$
$arcsin(\sqrt{\frac{x}{1+x}}) - \frac{\sqrt{x}(x+1)}{2x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

№ 961

$y = x + x^x + x^{x^x}$
$(x)' = 1$
$(x^x)' = (e^{xln(x)})' = x^x(lnx + 1)$
$(x^{x^x})' = (e^{x^x ln(x)})' = x^{x^x} \cdot [x^{x-1} + lnx \cdot x^x \cdot (lnx + 1)]$
$y' = 1 + x^x(lnx + 1) + x^{x^x} \cdot [x^{x-1} + lnx \cdot x^x \cdot (lnx + 1)]$

№ 963

$y = \sqrt[x]{x}$
$y' = (e^{\frac{lnx}{x}})' = \sqrt[x]{x} \cdot \frac{1-lnx}{x^2}$

ДЗ: 901-903, 913-930

3.3 Самостоятельная работа

25.10.2021

№ 858

$y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} = -\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{\sqrt[3]{x^3-1}}$
$y' = -\frac{\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}} \cdot \sqrt[3]{x^3-1} - \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}} \cdot \sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}} = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$

№ 873

$$y = 4\sqrt[3]{ctg^2x} + \sqrt[3]{ctg^8x}$$
$$y' = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{ctgx}} \cdot (-\frac{1}{sin^2x}) + \frac{8}{3}\sqrt[3]{ctg^5x} \cdot (-\frac{1}{sin^2x}) =$$
$$= -\frac{8}{3sin^2x\sqrt[3]{ctgx}}(1 + ctg^2x) = -\frac{8\sqrt[3]{tgx}}{3sin^4x}$$

№ 896

$$y = xln(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{1+x^2}$$
$$y' = ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \cancel{x \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot (1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}})} - \cancel{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} =$$
$$= ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

№ 940

$$y = \frac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}ln(\frac{1-x}{1+x})$$
$$y' = \frac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2}} + \frac{xarcsinx}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{1+x}}{1-x} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^{\cancel{2}}} = \frac{xarcsinx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$