

# Алгебра и геометрия: домашние задания

Семестр 1 (осень 2021)

*Преподаватель: Балыкина Ю. Е.*

Рубашкин Илья Михайлович  
Email: st095290@student.spbu.ru

**Задача 220(d).**

Умножить матрицы: d)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

*Решение:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 2 + 3 & -2 - 4 + 6 & -4 - 8 + 12 \\ -2 - 4 + 6 & -4 - 8 + 12 & -8 - 16 + 24 \\ -3 - 6 + 9 & -6 - 12 + 18 & -12 - 24 + 36 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Задача 220(f).**

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

*Решение:*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b + c & a^2 + b^2 + c^2 & 2ac + b^2 + \\ a + b + c & 2ac + b^2 & a^2 + b^2 + c^2 \\ 3 & a + b + c & a + b + c \end{pmatrix}$$

**Задача 274.**

Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$

*Решение:*

$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 41 & 427 & 327 \\ 169 & 543 & 443 \\ -57 & 721 & 621 \end{vmatrix} = 6 \cdot (41 \cdot 543 \cdot 621 + 427 \cdot 443 \cdot (-57) + 327 \cdot$$

$$169 \cdot 721 - (-57) \cdot 543 \cdot 327 - 169 \cdot 427 \cdot 621 - 41 \cdot 721 \cdot 443) = -29\,400\,000$$

**Задача 221.**

Выполнить действия:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5 \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

*Решение:*

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4+3 & 6+1 & 2+2 \\ 6+3 & 3+1 & 3 \\ 3 & 1+2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^2 \right)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}^2 = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \text{Покажем с помощью метода математической индукции, что } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{База индукции (n=1): } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{выполнено}$$

$$\text{Индукционный переход: Пусть для некоторого } k = n \in \mathbb{N} \text{ выполнено утверждение } a_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Докажем его для } k=n+1: a_{n+1} &= a_n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{Выполнено} \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом: } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Задача 224.**

Вычислить  $A \cdot A'$ , где  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

*Решение:*

$$A \cdot A' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 21 \\ 21 & 27 \end{pmatrix}$$

**Задача 232(с).**

Вычислить определитель: с)  $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$

*Решение:*

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix} \stackrel{S_2+S_1, S_3+S_1}{=} \begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & 2a & a+x \\ 0 & 0 & a+x \end{vmatrix} = a \cdot 2a \cdot (a+x) = 2a^2(a+x)$$

**Задача 232(d).**

Вычислить определитель: d)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

*Решение:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \stackrel{S_2-S_1, S_3-S_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$$

**Задача 232(f).**

Вычислить определитель: f)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$

*Решение:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} \stackrel{S_2-S_1, S_3-S_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \omega-1 & \omega-1 \\ 0 & \omega^2-1 & \omega-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega-1 & \omega-1 \\ \omega^2-1 & \omega-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\omega-1)^2 - (\omega-1) \cdot (\omega^2-1) = -\omega + 2\omega^2 - \omega^3$$

**Задача 284.**

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

*Решение:*

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = 3xy(x+y) - (x+y)^3 - x^3 - y^3 = -2(x^3 + y^3)$$

---

**Задача 256(с).**

Вычислить определитель: с)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & 2 & a & \dots & a \\ 0 & 0 & 3 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$$

*Решение:*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & 2 & a & \dots & a \\ 0 & 0 & 3 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

**Задача 276.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

*Решение:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \xrightarrow[S_4 - S_1]{S_2 - S_1, S_3 - S_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} \xrightarrow[S_4 - 3S_2]{S_3 - 2S_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 1$$

**Задача 295.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} \stackrel{S_3 - S_2}{=} \stackrel{\dots}{S_n - S_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} \stackrel{S_2 - 2S_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = \\
 = 1 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-2) = -2(n-2)!$$

### Задача 323.

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} \stackrel{S_2 - S_1}{=} \stackrel{\dots}{S_{n-1} - S_n} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & a_2 & 1 & \dots & 0 & -a_n \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & -a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} \stackrel{S_n - S_1}{=} \\
 = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & -a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix} = (1+a_1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 0 & a_3 & \dots & 0 & -a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}}_{a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n} + \\
 + (-1)^{n+1} \cdot a_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_2 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 0 & a_3 & \dots & 0 & -a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_2 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 0 & a_3 & \dots & 0 & -a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \end{vmatrix} \stackrel{S_2 - a_2 S_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -a_2 & \dots & -a_2 & -a_n - a_2 \\ 0 & a_3 & \dots & 0 & -a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & -a_n \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \end{vmatrix} \stackrel{S_3 + S_2 \frac{a_3}{a_2}}{=}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -a_2 & -a_2 & \dots & -a_2 & -a_n - a_2 \\ 0 & 0 & -a_3 & \dots & -a_3 & -\frac{a_n a_2 + a_n a_3 + a_2 a_3}{a_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \end{vmatrix} \stackrel{=}{=} S_4 + S_3 \frac{a_4}{a_3} \dots = \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -a_2 & \dots & -a_2 & -(a_n + a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -a_{n-2} & -\frac{a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-2} + \dots + a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-2} \cdot a_n}{a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-4} \cdot a_{n-3}} \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \end{vmatrix} \stackrel{=}{=} S_n + \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} S_{n-1} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -a_2 & \dots & -(a_n + a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{\sum_{2 \leq i_1 < \dots < i_{n-2} \leq n} a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_{n-2}}}{a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1}} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-2} \cdot \frac{\sum_{2 \leq i_1 < \dots < i_{n-2} \leq n} a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_{n-2}}}{a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1}} = \\
&= (-1)^{n-1} \cdot \sum_{2 \leq i_1 < \dots < i_{n-2} \leq n} a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_{n-2}} \\
\Delta &= a_1 \cdot \dots \cdot a_n + a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} + a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-2} \cdot a_n + \dots + a_2 \cdot \dots \cdot a_n
\end{aligned}$$


---

### Задача 306.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} \stackrel{=}{=}_{S_1 - \alpha S_2} -\alpha \cdot \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} \stackrel{=}{=}_{S_1 - \alpha S_3} \\
&= (-\alpha)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha & \alpha\beta \\ 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} \\
&\cdot (-\alpha)^{n-2} \stackrel{=}{=}_{S_1 - \alpha S_n} (-\alpha)^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} = \cancel{(-1)^{n-1}} \cdot \alpha \cdot \cancel{(-1)^{n-1}} \cdot \alpha^{n-1}.
\end{aligned}$$



$$\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha + \beta \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}}_1 = \alpha^n$$


---