№ 1

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3 & 5\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & -9 & 17\\ 2 & -15 & 23\\ -2 & 3 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20 & 46\\ -92 & 34\\ 14 & -10\end{pmatrix}$$

№ 1.1

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 16\\ 19 & 28\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-16 & 43\\ -28 & 75\end{pmatrix}$$

№ 3

Найдем характеристический полином матрицы: $P(\lambda)=det(A-\lambda E)=$

$$=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & 4 & 4\\ -4 & -2-\lambda & -4 & -4\\ -1 & 0 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & -4 & -1-\lambda\end{vmatrix}\underset{\substack{R_1:R_1+(3-\lambda)R_3\\ R_2:R_2-4R_3}}{=}\begin{vmatrix}0 & 1 & \lambda^2-5\lambda+10 & \lambda+1\\ 0 & -2-\lambda & 4\lambda-12 & 0\\ -1 & 0 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & -4 & -1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & \lambda^2-5\lambda+10 & \lambda+1\\ -2-\lambda & 4\lambda-12 & 0\\ 1 & 4 & 1+\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)\cdot\begin{vmatrix}1 & \lambda^2-5\lambda+10 & 1\\ -2-\lambda & 4\lambda-12 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}\underset{R_1:R_1-R_3}{=}$$

$$=(\lambda+1)\cdot\begin{vmatrix}0 & \lambda^2-5\lambda+6 & 0\\ -2-\lambda & 4\lambda-12 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}=(\lambda+1)\cdot\begin{vmatrix}0 & \lambda^2-5\lambda+6\\ -2-\lambda & 4\lambda-12\end{vmatrix}=$$
$$=\underbrace{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-3)}_{P(\lambda)}$$

Найдем собственные числа матрицы:

$$P(\lambda)=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lambda_1=-2\\ \lambda_2=-1\\ \lambda_3=2\\ \lambda_4=3\end{array}\right.\ \begin{array}{c}\text{Собственные}\\ \text{числа матрицы}\end{array}$$

Найдем собственные вектора матрицы:

1. $\lambda=-2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}5 & 1 & 4 & 4 & 0\\ -4 & 0 & -4 & -4 & 0\\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -4 & 1 & 0\end{array}\right)\underset{\substack{R_1:R_1+R_2+R_3\\ R_2:\frac{R_2-4R_3}{-20}\\ R_3:-R_3}}{=}\left(\begin{array}{cccc|c}0 & 1 & 4 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -4 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -4 & 1 & 0\end{array}\right)\underset{\substack{R_4:R_4+R_1\\ R_3:R_3+R_1\\ R_1:R_1-4R_2}}{=}$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = c_4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -c_4 \\ x_2 = c_4 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = c_4 \end{cases} \leftrightarrow X = c_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v_1}}$$

2. $\lambda = -1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 4 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & -4 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{R_1 : R_1 + R_2 \\ R_2 : R_2 - 4R_3 \\ R_3 : -R_3 \\ R_4 : -R_4}}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -16 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 : -\frac{R_2 + R_4}{12} \\ R_3 : R_3 + 3R_2 \\ R_4 : R_4 - 4R_2}}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = c_4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -c_4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = c_4 \end{cases} \leftrightarrow X = c_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v_2}}$$

3. $\lambda = 2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 : -\frac{R_2}{4} \\ R_3 : -R_3 \\ R_4 : -R_4 \\ R_1 : \frac{R_1 - R_2}{3}}}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 : R_2 - R_1 - R_3 \\ R_4 : -(R_4 - R_2 - 4R_1)}}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = c_4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -c_4 \\ x_2 = c_4 \\ x_3 = -c_4 \\ x_4 = c_4 \end{cases} \leftrightarrow X = c_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v_3}}$$

4. $\lambda = 3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 4 & 4 & 0 \\ -4 & -5 & -4 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{R_4 : R_4 + R_1 \\ R_2 : \frac{4R_3 - R_2}{5} \\ R_3 : -R_3}}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{R_1 : \frac{R_1 - R_2}{4}}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = c_4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -c_4 \\ x_4 = c_4 \end{cases} \leftrightarrow X = c_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v_4}}$$

Ответ: $P(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$

Собственные числа матрицы: $-2, -1, 2, 3$

Собственные вектора матрицы: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

№ 3.1

Найдем характеристический полином матрицы: $P(\lambda) = det(A - \lambda E) =$

$$= \begin{vmatrix} 7-\lambda & -3 & 2 & -6 \\ 1 & -1-\lambda & -2 & -6 \\ -1 & 3 & 4-\lambda & 6 \\ -1 & -3 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{R_1 : R_1 + R_2(\lambda-7) \\ R_3 : R_3 + R_2 \\ R_4 : R_4 + R_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -\lambda^2+6\lambda+4 & 16-2\lambda & 36-6\lambda \\ 1 & -1-\lambda & -2 & -6 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -4-\lambda & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+4) \cdot \begin{vmatrix} \lambda^2-6\lambda-4 & 2\lambda-16 & 6\lambda-36 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+4) \cdot [\begin{vmatrix} 2\lambda-16 & 6\lambda-36 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} \lambda^2-6\lambda-4 & 2\lambda-16 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}] = (\lambda-2)(\lambda+4) \cdot [36-6\lambda+\lambda^2-6\lambda-4+16-2\lambda] =$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+4)(\lambda^2-14\lambda+48) = \underbrace{(\lambda+4)(\lambda-2)(\lambda-6)(\lambda-8)}_{P(\lambda)}$$

Найдем собственные числа матрицы:

$$P(\lambda) = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 6 \\ \lambda_4 = 8 \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} \text{Собственные} \\ \text{числа матрицы} \end{array}$$

Найдем собственные вектора матрицы:

1. $\lambda = -4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 11 & -3 & 2 & -6 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -6 & 0 \\ -1 & 3 & 8 & 6 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 6 & 0 \end{array} \right) \underset{\substack{R_1 : \frac{R_1+6R_3+5R_4}{60} \\ R_4 : R_4 + R_2 \\ R_3 : \frac{R_3+R_2}{6}}}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \underset{R_2 : R_2 - 3R_3 + 6R_1}{=}$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = c_4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = c_4 \\ x_2 = c_4 \\ x_3 = -c_4 \\ x_4 = c_4 \end{cases} \leftrightarrow X = c_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v_1}}$$

2. $\lambda = 2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & -6 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & -6 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 6 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \underset{\substack{R_1 : \frac{R_1+3R_3+2R_4}{12} \\ R_4 : \frac{R_3-R_4}{6} \\ R_3 : R_3 + R_2}}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \underset{R_2 : R_2 + 3R_4 + 3R_1}{=}$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = c_4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = c_4 \\ x_2 = -c_4 \\ x_3 = -c_4 \\ x_4 = c_4 \end{cases} \leftrightarrow X = c_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v_2}}$$

3. $\lambda = 6$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -6 & 0 \\ 1 & -7 & -2 & -6 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 6 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{R_3 : R_3 + R_1 \\ R_2 : \frac{R_1 - R_2}{4} \\ R_4 : -\frac{R_4 + R_1}{2}}}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{R_1 : R_1 + R_4 \\ R_4 : \frac{3R_2 - R_4}{5}}}{=}$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_4 = c_4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = c_4 \\ x_2 = -c_4 \\ x_3 = c_4 \\ x_4 = c_4 \end{cases} \leftrightarrow X = c_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v_3}}$$

4. $\lambda = 8$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & 2 & -6 & 0 \\ 1 & -9 & -2 & -6 & 0 \\ -1 & 3 & -4 & 6 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 : -\frac{R_2 + R_3}{6} \\ R_3 : \frac{R_3 - R_1}{6} \\ R_4 : R_4 - R_1 \\ R_1 : -R_1}}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{R_1 : R_1 - 3R_3 \\ R_3 : \frac{R_2 - R_3}{2}}}{=}$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_4 = c_4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -c_4 \\ x_2 = -c_4 \\ x_3 = c_4 \\ x_4 = c_4 \end{cases} \leftrightarrow X = c_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v_4}}$$

Ответ: $P(\lambda) = (\lambda + 4)(\lambda - 2)(\lambda - 6)(\lambda - 8)$

Собственные числа матрицы: $-4, 2, 6, 8$

Собственные вектора матрицы: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

№ 5

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = ?$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 7 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{R_1 : R_1 + 3R_3 \\ R_2 : R_2 + R_3 \\ R_3 : R_4 - R_3 \\ R_4 : R_4 + 2R_1}}{=} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 5 & -5 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 12 & -12 & 2 & 0 & 6 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{R_1 : R_1 - R_4 \\ R_2 : R_2 + 3R_4 \\ R_3 : R_3 + 2R_4 \\ R_4 : -R_4}}{=}$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & 7 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 38 & -35 & 6 & 1 & 19 & 3 \\ 0 & 0 & 25 & -23 & 4 & 0 & 11 & 3 \\ 0 & 1 & -12 & 12 & -2 & 0 & -6 & -1 \end{array}\right)$$