1 Комплексные числа и полиномы

Классная работа

17.09.2021

№ 137

Вычислить $(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2})^{24}$

z = $(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2})^{24} = [1 - (\frac{\sqrt{3}-i}{2})]^{24} = [cos(0) + isin(0) - cos(-\frac{\pi}{6}) - isin(-\frac{\pi}{6})]^{24}$

$= [cos(0) - cos(-\frac{\pi}{6}) + i(sin(0) - sin(-\frac{\pi}{6}))]^{24} =$

$= [-2sin(-\frac{\pi}{12})sin(\frac{\pi}{12}) + 2isin(\frac{\pi}{12})cos(-\frac{\pi}{12})]^{24}$

z = $[-2sin(\frac{\pi}{12})(sin(-\frac{\pi}{12}) - icos(-\frac{\pi}{12}))]^{24}$

$sin(-\frac{\pi}{12}) - icos(-\frac{\pi}{12})$ = $-cos(\frac{5\pi}{12})$ - $isin(\frac{5\pi}{12})$

z = $[2sin(\frac{\pi}{12})(cos(\frac{5\pi}{12}) + isin(\frac{5\pi}{12}))]^{24}$ = $2^{24} * sin(\frac{\pi}{12})^{24}(cos(10\pi) + isin(10\pi))$

$= 2\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}^{24}$ $= (2 - \sqrt{3})^{12}$

№ 554 b

f(x) = $(x-2)^4 + 4(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 10(x-2) + 20$

1.1 НОД

Даны полиномы $f(x)$, $g(x)$. Если $f(x) \mod q(x) = 0$, то q(x) - делитель f(x)
НОД - наибольший общий делитель $f(x)$ и $g(x)$
$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$
$g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x)$
$r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x)$
...
$r_{k-1}(x) = r_k(x)q_{k+1}(x)$
НОД$(f(x), g(x)) = r_k(x)$

№ 577 a

НОД($x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$, $x^3 + x^2 - x - 1$)

$x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = x(x^3 + x^2 - x - 1) - 2x^2 - 3x - 1$
$(x^3 + x^2 - x - 1) = (2x^2 + 3x + 1)(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})$ - $\frac{3}{4}(x + 1)$
$(2x^2+3x+1) = (x+1)(2x+1)$ => НОД$(x^4+x^3-3x^2-4x-1$, $x^3+x^2-x-1)$ = x + 1

№ 577 c

НОД($x^6 + 7x^4 + 8x^3 + 7x + 7$, $3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - x$)

$x^6 + 7x^4 + 8x^3 + 7x + 7 = \frac{x}{3}(3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - x) - \frac{14}{3}x^4 + 7x^3 - \frac{14}{3}x + 7$
$3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - x = (2x^4 - 3x^3 + 2x - 3)(\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}) - \frac{x^3+1}{4}$
$2x^4 - 3x^3 + 2x - 3 = (x^3 + 1)(2x - 3)$
НОД$(x^6 + 7x^4 + 8x^3 + 7x + 7$, $3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - x) = x^3 + 1$

ДЗ: 549c; 577e,f; 578c,d; 593c; 583a

Классная работа

20.09.2021

№ 578 a

Найдем δ:

$x^4+2x^3-x^2-4x-2 = (x^4+x^3-x^2-2x-2) + x^3-2x$
$x^4+x^3-x^2-2x-2 = (x+1)(x^3-2x) + x^2-2$
$x^3-2x = x(x^2-2)$
$\delta = \text{GCD}{<}x^4+2x^3-x^2-4x-2,\ x^4+x^3-x^2-2x-2{>} = x^2-2$

$r_2 = g - r_1 q_2 \quad | \quad r_1 = f - gq_1 \Rightarrow r_2 = g - q_2(f-gq_1) = -q_2 f + (1+q_1q_2)g$

$x^2-2 = -(x+1)f_1 + (x+2)f_2$

№ 583 a

$x^3-6x^2+12x-8 = (x-4)(x^2-2x+1) + 3x-4$
$x^2-2x+1 = (\frac{1}{3}x-\frac{2}{9})(3x-4) + \frac{1}{9}$
$3x-4 = (3x-4)(1)$
$\text{GCD}{<}x^3-6x^2+12x-8,\ x^2-2x+1{>} = 1$

$1 = 9(x^2-2x+1)-(3x-2)(3x-4) = 9(x-1)^2-$
$-(3x-2)((x-2)^3-(x-4)(x-1)^2) = (x-1)^2(9+(3x-2)(x-4))-$
$-(x-2)^3(3x-2) = (x-1)^2(3x^2-14x+17)-(x-2)^3(3x-2)$

1.2 Формула Виета. Разложение дроби на простейшие

20.09.2021

$f_n = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + .. + a_n$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = -a_1 \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + ... + \alpha_{n-1}\alpha n = a_2 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + ... + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -a_3 \\ .... \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n = (-1)^n a_n \end{cases} \tag{1}$$

Пример

5, 2 - корни 1 кратности, 3 - 2 кратности. Найти $f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$

1. 5-2+3+3=$-a_1$ => $a_1 = -9$
2. $5(-2) + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 17 = a_2$
3. $a_3 = 33$
4. $a_4 = -90$

$f(x) = x^4 - 9x^3 + 17x^2 + 33x - 90$

$\frac{P(x)}{Q(x)}, \quad degP < degQ$

$Q(x) = (x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2}...(x - \alpha_s)^{k_s}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{l_2}...(x^2 + p_mx + q_m)^{l_m}$

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + ... + \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{A_{21}}{x-\alpha_2} + \frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2} + ... + \frac{A_{2k_2}}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + ... + \frac{A_{sk_s}}{(x-\alpha_s)^{k_s}} + \frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + ... + \frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + ... + \frac{B_{ml_m}x+C_{ml_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{l_m}}$

Пример 1

$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2+x+1}$
$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{(A+B)x^2+x(A-B+C)+(A-C)}{x^3-1} \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A-C=1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=-\frac{2}{3} \end{cases} \tag{2}$$

№ 625c

$\frac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2} + \frac{F}{x-2}$

$A(x-1)^2(x+1)^2(x-2) + B(x-1)(x+1)^2(x-2) + C(x+1)^2(x-2) +$
$+D(x-1)^3(x+1)(x-2) + E(x-1)^3(x-2) + F(x-1)^3(x+1)^2 = 5x^2+6x-23$

$$\begin{cases} x=1: \quad -4C=-12 \\ x=-1: \quad 24E=-24 \\ x=2: \quad 9F=9 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} C=3 \\ E=-1 \\ F=1 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x=0: \quad -2A+2B-2C+2D+2E-F=-23 \leftrightarrow -A+B+D=-7 \\ x^5: \quad A+D+1=0 \\ x^4: \quad -2A+B-4D=2 \end{cases} \leftrightarrow \tag{4}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} A+D=-1 \\ -2A+B-4D=2 \\ -A+B+D=-7 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-4 \\ D=-2 \end{cases} \tag{5}$$

$\frac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3} - \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-2}$

2 Матрицы

27.09.2021

$A_{m\times n} \qquad a_{ij}$
$A_{n\times n}$ - квадратная
$E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная
$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ - нулевая
$D_{n\times n} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ - диагональная

2.1 Операции над матрицами

$C_{m\times n} = A_{m\times n} \pm B_{m\times n}, \qquad c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$
$C_{m\times n} = A_{m\times p} \cdot B_{p\times n}$
$C = \alpha \cdot A, \qquad c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$
$A^T_{m\times n} \to A_{n\times n}, \qquad a_{ij} \to a_{ji}$

2.2 Определитель матрицы

$|A|$ или $det(A)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_3 2 \cdot a_{13}) -$$
$$- (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33})$$

$$\begin{array}{ccccc} + & + & +\;- & - & - \\ \left(\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right. \!\!\!\!\! & & \left.\right) & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \end{array}$$

№ 220c

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

№ 223a

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$$

№ 220c

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 6 & 12 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}$$

№ 231c

$$\begin{vmatrix} sin(\alpha) & cos(\alpha) \\ -cos(\alpha) & sin(\alpha) \end{vmatrix} = sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

№ 232a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 + 1 - (-1) = 1$$

№ 232e

$$\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-(1+i)(1-i)-(-i^2) = 1-2-1 = -2$$

№ 273

$$\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix} = \cancel{13547 \cdot 28423} + 1354700 - \cancel{28423 \cdot 13547} - 2842300 =$$
$$= 1354700 - 2842300 = -1487600$$

№ 284

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = 3x^2y + 3xy^2 - (x+y)^3 - x^3 - y^3 = -2(x^3+y^3)$$

ДЗ: 220df, 274, 221, 224, 232cdf

2.2.1 Свойства определителей

1. $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B) \quad \Longrightarrow \quad det(A^n) = det(A)^n$
2. $det(A^T) = det(A)$
3. $if\ \exists\ 0$ - строка(столбец) $\Longrightarrow \quad det(A) = 0$
4. $if\ \exists$ две пропорциональные строки(столбца) $\Longrightarrow \quad det(A) = 0$
5. При перестановке строк знак определителя меняется
6. $\alpha \cdot a_i$ (строка/столбец) $\Longrightarrow \quad det = \alpha \cdot det(A)$
7. $if\ \ a_i = alpha \cdot a_j + \beta \cdot a_k \quad \Longrightarrow \quad det(A) = 0$
8. Определитель не изменится, если к a_i прибавить $\alpha \cdot a_j$

9. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & ... & b_n+c_n \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ c_1 & c_2 & ... & c_n \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2.2.2 Подсчет определителя

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \Delta_{12,12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \qquad \Delta_{23,23} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad ...$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

$$detA = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

2.2.3 Примеры

№ 273

I Способ

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1)^{5+2} \cdot$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{5+4}\cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -7\cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -8 & 3 \\ 0 & 10 & -2 & -1 \end{vmatrix} -$$

$$- 3 \cdot [3 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} - 5 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}] = 28 \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 4 & -8 & 3 \\ 10 & -2 & -1 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 15 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= 28\cdot(30+40-400+4)-9\cdot(-2+6+1+12)+15\cdot(36-1-4-6+4-6) = -9128-153+225 = -1069$ - Ошибка в вычислениях!

II Способ

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{4+3+1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+4+1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+4+1+4} \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1069$$

2.3 Собственные числа матрицы

22.10.2021

$\Delta_n = \alpha \cdot \Delta_{n-1} + \beta \cdot \Delta_{n-2}$
$\Delta_2 = \lambda^2 - 1 \qquad \Delta_1 = \lambda \qquad \Delta_0 = 1$
$G(z) = \frac{1+\lambda z - \lambda z}{1-\lambda z + z^2} = \frac{1}{1-\lambda z+z^2}$ - *производящая функция*
$1 - \lambda z + z^2 = 0 \implies z_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2-4}}{2}$
$\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4} = (cos(\varphi) + isin(\varphi)) \leftrightarrow \cancel{\lambda^2} - 4 = 4(cos(2\varphi) + isin(2\varphi)) - 4\lambda(cos(\varphi) + isin(\varphi)) + \cancel{\lambda^2}$
$cos^2(\varphi) - sin^2(\varphi) + 2sin(\varphi)cos(\varphi) - \lambda cos(\varphi) - \lambda isin(\varphi) = -1 \leftrightarrow \lambda = 2cos(\varphi)$

$$G(z) = \frac{A}{z_1 - z} + \frac{B}{z_2 - z} = \frac{A(z_2-z)+B(z_1-z)}{(z_1-z)(z_2-z)}$$

$$\begin{cases} z = z_1: \quad A(z_2 - z_1) = 1 \\ z = z_2: \quad B(z_1 - z_2) = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A(-2isin(\varphi)) = 1 \\ B(2isin(\varphi)) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{i}{2sin(\varphi)} \\ B = -\frac{i}{2sin(\varphi)} \end{cases}$$

$\frac{1}{1-\alpha\cdot z} = \sum^{+\infty}(\alpha z)^n \implies$
$\frac{A}{z_1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z_1}z} = \frac{A}{z_1} \cdot \sum^{+\infty}(\frac{1}{z_1})^n \cdot z^n = A \cdot \sum^{+\infty} \frac{1}{z_1^{n+1}} \cdot z^n$
$G(z) = \frac{\frac{A}{z_1}}{1-\frac{1}{z_1}\cdot z} + \frac{\frac{B}{z_2}}{1-\frac{1}{z_2}\cdot z} = \frac{i}{2sin(\varphi)} \cdot \sum^{+\infty}[\frac{1}{(cos(\varphi)+isin(\varphi))^{n+1}} - \frac{1}{(cos(\varphi)-isin(\varphi))^{n+1}}] \cdot z^n \implies \Delta_n = \frac{i}{2sin(\varphi)} \cdot [(cos(\varphi) - isin(\varphi))^{n+1} - (cos(\varphi) + isin(\varphi))^{n+1}] = \frac{i}{2sin(\varphi)} \cdot (-2sin((n+1)\varphi) = \frac{\sin((n+1)\varphi)}{sin(\varphi)}$
$\Delta_n = \frac{sin((n+1)\varphi)}{sin(\varphi)} = 0 \leftrightarrow (n+1)\varphi = \pi \cdot k, \qquad k \in \mathbb{Z}$
$\lambda = 2cos(\frac{\pi k}{n+1}), \qquad k \in \mathbb{Z}$

2.4 Системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ & ... & \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

$Ax = 0$ - *однородная система*
$Ax = b$ - *неоднородная система*

2.5 Решение систем

1. $Ax = b, \qquad A_{[n \times n]} \implies X = A^{-1}b$

2. *Крамер*
   $Ax = b, \qquad A_{[n \times n]}$
   $\Delta = det(A)$
   $\Delta_i = \Delta$, где вместо i-го столбца - столбец b
   $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$

3. *Гаусс*
   $Ax = b, \qquad A_{[m \times n]}$
   $(A|b) \rightarrow$ Трапецевидный вид
   Если нулевой строке соответствует ненулевой элемент в строке b, то решений нет
   Переписать систему в обычном виде, выразить одну переменную через все остальные
   $X_{\text{неоднородная}} = X_{\text{частное}} + X_{\text{общее}}$

2.6 Примеры

№ 449b

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \to_{S_2 - 2S_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Система разрешима

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - 2x_4 = \frac{1}{3}c_3 - c_4 \\ x_2 = \frac{1}{3}(-4c_3 - 3c_4) \\ x_3 = c_3 \\ x_4 = c_4 \end{cases}$$

$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c_3 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot c_4$ - *общее решение в параметрическом виде*

$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ - *фундаментальная система решений (только при параметрах)*

Вектор без параметра - частное решение

2.7 Собственный вектор матрицы

22.10.2021

$Ax = \lambda X$
$(A - \lambda E)X = 0$

№ 1032 e

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & -3 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(5-\lambda) + 6 + 6 - (-3\lambda) - 2(5-\lambda) -$$
$$- 6(\lambda - 1) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 0$$
$\lambda_{1,2,3} = 2$

$\lambda = 2$:
$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot X = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_2 - c_3 \\ x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \end{cases}$$

$$X = c_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ – ФСР, собственные векторы

№ 1032 j

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$
$\lambda = \pm 1$

- $\lambda = 1:$
  $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = 0$$
  $$X = c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -1:$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -c_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = c_3 \end{cases}$$

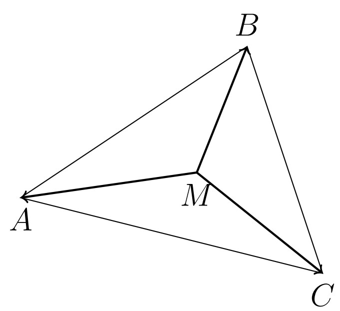
$$X = c_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Собственные векторы: $\lambda = 1:$

3 Геометрия

3.1 Векторы

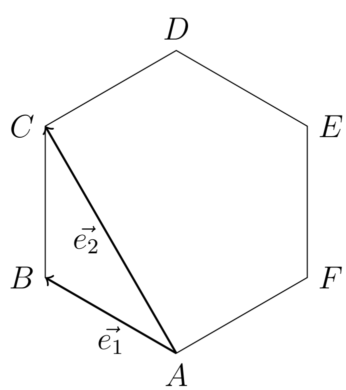
Вектор: $\vec{AB}$, $\quad |\vec{AB}|-$ длина вектора
$\vec{a}$, $\vec{b}$ - коллинеарны, если лежат на одной или параллельных прямых
$\vec{a}$, $\vec{b}$ - компланарны, если лежат в одной или параллельных плоскостях

№ 9



Найти точку M: $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$
$\vec{MA} = \vec{AB} - \vec{MB}$
$\vec{MC} = \vec{CB} - \vec{MB}$
Тогда: $\vec{AB} + \vec{CB} - 3\vec{MB} = \vec{0}$
$\vec{MB} = \frac{\vec{AB}+\vec{CB}}{3}$

№ 23



$\vec{AB} = e_1 = (1, 0)$

$\vec{AC} = e_2 = (0, 1)$
$\vec{BC} = \vec{e_2} - \vec{e_1} = (-1, 1)$
$\vec{CD} = \vec{AD} - \vec{AC} = 2\vec{BC} - \vec{AC} = (-2, 1)$
$\vec{DE} = -\vec{e_1} = (-1, 0)$
$\vec{EF} = -\vec{BC} = (1, -1)$
$\vec{FA} = -\vec{CD}$

01.11.2021

№ 29

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – Произвольные три вектора
α, β, γ
$\vec{v_1} = \alpha\vec{a} - \beta\vec{b}, \quad \vec{v_2} = \gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}, \quad \vec{v_3} = \beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$ – Доказать компланарность
Компланарность $\leftrightarrow$ Линейная зависимость
$\gamma(\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}) + \beta(\gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}) + \alpha(\beta\vec{c} - \gamma\vec{a}) = \vec{0} \implies \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ –линейно зависимы $\implies$

$\implies \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ – Компланарны

№ 30

$\vec{a} = (2, 5, 14), \quad \vec{b} = (14, 5, 2)$
Проекция $\vec{a}$ на $Oxy \parallel \vec{b}$ -?

$\vec{d} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$
$d_z = 0$, т. к. $d \subset Oxy \implies d_z = a_z + \lambda b_z = 14 + 2\lambda = 0 \implies \lambda = -7 \implies$
$\implies \vec{d} = (-96, -30, 0)$

№ 28

Установить, в каком случае тройки векторов будут линейно зависимы. Если они линейно зависимы - представить третий вектор как комбинацию двух.

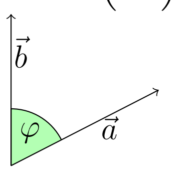
1. $\vec{a} = (5, 2, 1), \quad \vec{b} = (-1, 4, 2), \quad \vec{c} = (-1, -1, 6)$
   $$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$
   Найдем ранг матрицы А:
   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{22}{5} & \frac{11}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Longrightarrow$$
   $\Longrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} -$ линейно независимы

2. $\vec{a} = (6, 4, 2), \quad \vec{b} = (-9, 6, 3), \quad \vec{c} = (-3, 6, 3)$
   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & 0 \\ -9 & 6 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{линейно зависимы}$$
   $$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{2}{3} \\ \gamma = -1 \end{cases} - \text{частное решение} \Longrightarrow \vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

3.1.1 Произведение векторов

1. Умножение на число
   $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{a}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

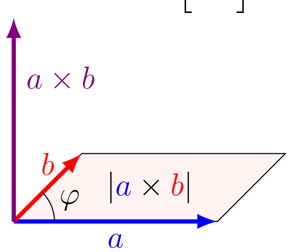
2. Скалярное произведение
   $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\varphi)$

   В декартовой системе координат: $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \implies$
   $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$
   Свойства

   - $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$
   - $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$
   - $(\vec{a}, \alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}, \vec{b})$

3. Векторное произведение
   $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$

   1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin(\varphi)$
   2. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{c}$
   3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка

   В декартовой системе координат: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

Свойства

- $[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}]$
- $[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}] = [\vec{a},\vec{b}] + [\vec{a},\vec{c}]$
- $[\vec{a},\alpha\vec{b}] = \alpha[\vec{a},\vec{b}]$

4. Смешанное произведение
   $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\times(\vec{b}\cdot\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$
   В декартовой системе координат: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$

5. Двойное векторное произведение
   $\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{c})$

№ 131

$\triangle ABC$, длины сторон $= 1$
$(\vec{AB},\vec{BC}) + (\vec{BC},\vec{CS}) + (\vec{CA},\vec{AB}) = 1\cdot 1\cdot\cos(120) + 1\cdot 1\cdot\cos(120) +$
$+ 1\cdot 1\cdot\cos(120) = -\frac{3}{2}$

3.2 Прямые и плоскости

08.11.2021

Взаимное расположение плоскостей/прямых на плоскости

1. $\Pi_1 \perp \Pi_2$ ($l_1 \perp l_2$ на плоскости) $\implies$
   $\implies \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \leftrightarrow \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$
   $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ $(A_1A_2 + B_1B_2 = 0)$

2. $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ ($l_1 \parallel l_2$ на плоскости)
   $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_2}{C_2}, \quad (\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2})$

3. $\Pi_1 \cap \Pi_2$
   $\vec{n_1} \neq \vec{n_2}, \quad \vec{n_1} \times \vec{n_2} \neq 0$

Взаимное расположение прямых в пространстве

1. l_1, l_2 в одной плоскости
   ()

2. $l_1 \perp l_2 \implies a_1 \perp a_2 \implies a_1 \cdot a_2 = 0$

3. $l_1 \parallel l_2 \implies \vec{a_1} = \lambda \vec{a_2} \implies \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$

4. l_1, l_2 совпадают
   $\vec{a_1} \times \vec{a_2} = 0 \quad (\vec{r_2} - \vec{r_1}) \times \vec{a_1} = 0$

№ 367

$\triangle ABC : A(-2,3), B(4,1), C(6,-5), \quad m_a-?$
$M_A = (\frac{4+6}{2}, \frac{1-5}{2}) = (5,-2) \implies m_a = (M_A A)$
$m_a : \frac{x+2}{7} = -\frac{y-3}{5} \leftrightarrow 5x + 10 + 7y - 21 = 0 \leftrightarrow 5x + 7y - 11 = 0$

№ 372

$$y = ax+b \implies \begin{cases} -3 = 4a + b \\ S = \frac{1}{2}|b||\frac{b}{a}| = 3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 6|a| \\ b = -3 - 4a \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} b = -3 - 4a \\ 16a^2 + 24a - 6|a| + 9 = 0 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a >= 0 \\ b = -3 - 4a \\ 16a^2 + 18a + 9 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \emptyset \\ \quad \begin{cases} a < 0 \\ b = -3 - 4a \\ 16a^2 + 30a + 9 = 0 \end{cases} \end{array} \right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -\frac{3}{8} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{array} \right.$$

$l_1: \ y = -\frac{3}{2}x + 3 \leftrightarrow 3x + 2y - 6 = 0$
$l_2: \ y = -\frac{3}{8} - \frac{3}{2} \leftrightarrow 3x + 8y + 12 = 0$

№ 377

$2x - y = 0$
$5x - y = 0$
$3x - y = 0 -$ У треугольника одна из вершин находится в точке $(0,0)$. Через эту же вершину проходит медиана. Найдем две остальные вершины:
$A(0,0), B(b,2b), C(c,5c)$. Тогда уравнение 3 стороны: $\frac{x-b}{c-b} = \frac{y-2b}{5c-2b} \implies$
$\implies \frac{3-b}{c-b} = \frac{9-2b}{5c-2b}$
$M(\frac{b+c}{2}, \frac{2b+5c}{2})$ лежит на медиане $\implies \frac{2b+5c}{2} = \frac{3b+3c}{2}$

$$\begin{cases} 2b + 5c = 3b + 3c \\ \frac{3-b}{c-b} = \frac{9-2b}{5c-2b} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} b = 2c \\ -\frac{3-2c}{c} = \frac{9-4c}{c} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

Т. о. $B(4,8), C(2,10), (BC): x + y - 12 = 0$

12.11.2021

3.3 Система координат

O, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}$
$\vec{x} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \ldots + \alpha_n\vec{e_n}$
$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$– координаты вектора

3.3.1 Смена систем координат

O, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$
O', $\vec{e_1}', \vec{e_2'}, \vec{e_3'}$
M(x, y, z) в O, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$
M(x', y', z') в O', $\vec{e_1'}, \vec{e_2}', \vec{e_3'}$
O'(x_0, y_0, z_0) в O, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$

$$\begin{cases} \vec{e_1}' = \sum \alpha_{1j}\vec{e_j} \\ \vec{e_2}' = \sum \alpha_{2j}\vec{e_j} \\ \vec{e_3}' = \sum \alpha_{3j}\vec{e_j} \end{cases} \implies A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \text{ - матрица преобразования}$$

$\vec{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$
$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$
$\vec{OO'} = x_0\vec{e_1} + y_0\vec{e_2} + z_0\vec{e_3}$
$\vec{O'M} = x'\vec{e_1'} + y'\vec{e_2'} + z'\vec{e_3'}$

$$(x - x_0 - x'\alpha_{11} - y'\alpha_{21} - z'\alpha_{31})\vec{e_1} + (y - y_0 - x'\alpha_{12} - y'\alpha_{22} - z'\alpha_{32})\vec{e_2} +$$
$$+ (z - z_0 - x'\alpha_{13} - y'\alpha_{23} - z'\alpha_{33})\vec{e_3} = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + x'\alpha_{11} + y'\alpha_{21} + z'\alpha_{31} \\ y = y_0 + x'\alpha_{12} + y'\alpha_{22} + z'\alpha_{32} \\ z = z_0 + x'\alpha_{13} + y'\alpha_{23} + z'\alpha_{33} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + A^T \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (A^T)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

№ 91 (13)

(2, 4), (-3, 0), (2, 1)
$\frac{x+3}{-5} = \frac{y}{4} \leftrightarrow 5y - 4x - 12 = 0$

$5(y-1)-4(x-2)=0 \leftrightarrow 5y-4x-12=0$ - сторона треугольника
Аналогично:
$x=2 \leftrightarrow x=-3$ - вторая сторона
$\frac{x+3}{5} = y \leftrightarrow 5y-x-3=0 \leftrightarrow 5(y-2)-(x-4)=0 \leftrightarrow 5y-x-3=0$ - третья сторона треугольника

$\begin{cases} x=-3 \\ 5y-x-3=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}$ - 1 вершина

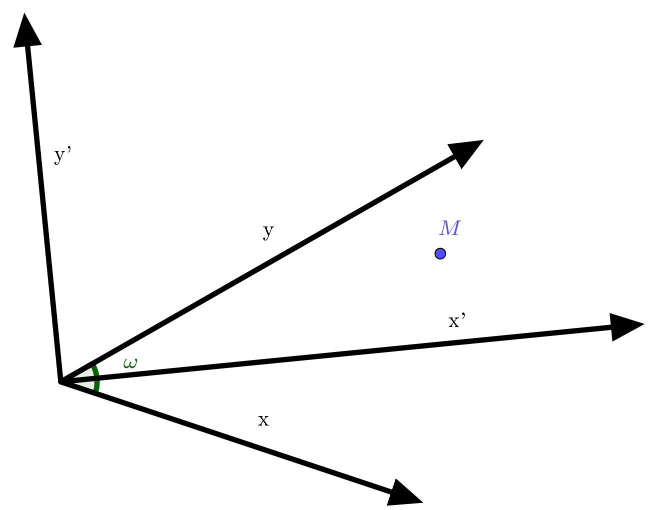
$\begin{cases} x=-3 \\ 5y-4x-12=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$ - 2 вершина

$\begin{cases} 5y-4x-12=0 \\ 5y-x-3=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=5 \end{cases}$ - 3 вершина

№ 119

$(4, \frac{\pi}{9}), (1, \frac{5\pi}{18})$
$\varphi = \frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{6} S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$

№ 664



$$\vec{e'_1} = \frac{\vec{e_1}+\vec{e_2}}{\sqrt{2+2cos(\omega)}} = \frac{\vec{e_1}+\vec{e_2}}{2cos(\frac{\omega}{2})}$$

$$\vec{e'_2} = \frac{\vec{e_1}-\vec{e_2}}{\sqrt{2-2cos(\omega)}} = \frac{\vec{e_1}-\vec{e_2}}{2sin(\frac{\omega}{2})}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2cos(\frac{\omega}{2})} & \frac{1}{2cos(\frac{\omega}{2})} \\ -\frac{1}{2sin(\frac{\omega}{2})} & \frac{1}{2sin(\frac{\omega}{2})} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (A^T)^-1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2cos(\frac{\omega}{2})} & -\frac{1}{2sin(\frac{\omega}{2})} \\ \frac{1}{2cos(\frac{\omega}{2})} & \frac{1}{2sin(\frac{\omega}{2})} \end{pmatrix}^{-1}$$

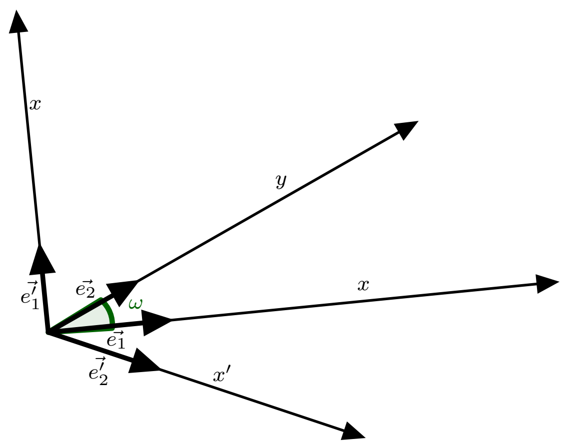
$$\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{2cos(\frac{\omega}{2})} & -\frac{1}{2sin(\frac{\omega}{2})} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2cos(\frac{\omega}{2})} & \frac{1}{2sin(\frac{\omega}{2})} & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{2cos(\frac{\omega}{2})} & -\frac{1}{2sin(\frac{\omega}{2})} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{sin(\frac{\omega}{2})} & -1 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & cos(\frac{\omega}{2}) & cos(\frac{\omega}{2}) \\ 0 & 1 & -sin(\frac{\omega}{2}) & sin(\frac{\omega}{2}) \end{array}\right) \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} cos(\frac{\omega}{2}) & cos(\frac{\omega}{2}) \\ -sin(\frac{\omega}{2}) & sin(\frac{\omega}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\frac{\omega}{2}) & cos(\frac{\omega}{2}) \\ -sin(\frac{\omega}{2}) & sin(\frac{\omega}{2}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x' = (x+y)cos(\frac{\omega}{2}) \\ y' = (y-x)sin(\frac{\omega}{2}) \end{cases}$$

№ 665



$Oxy\,\omega \to Ox'y',$
$|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = |\vec{e_1'}| = |\vec{e_2'}| = 1$
$\vec{a} = \alpha\vec{e_2} - \vec{e_1}, \quad \vec{a} \parallel \vec{e_1'} \implies \vec{a} \cdot \vec{e_1} = 0 \implies \alpha = \frac{1}{cos(\omega)}$
$\vec{a} = -\vec{e_1} + \frac{1}{cos(\omega)}\vec{e_2}$
$|\vec{a}| = \sqrt{1 + \frac{1}{cos^2(\omega)} - 2} = tg(\omega) \implies$
$\implies \vec{e_1}' = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = -ctg(\omega)\vec{e_1} + sin(\omega)\vec{e_2}$

$\vec{b} = \beta\vec{e_1} - e_2, \quad \vec{b} \parallel \vec{e_2'}$
$\implies \vec{b} \cdot \vec{e_2} = 0 \leftrightarrow \beta \cdot cos(\omega) - 1 = 0 \leftrightarrow \beta = \frac{1}{cos(\omega)}$
$|\vec{b}| = \sqrt{\frac{1}{cos^2(\omega)} + 1 - 2} = tg(\omega) \implies$
$\implies \vec{e_2'} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{sin(\omega)}\vec{e_1} - ctg(\omega)\vec{e_2}$

$$A = \begin{pmatrix} -ctg(\omega) & \frac{1}{sin(\omega)} \\ \frac{1}{sin(\omega)} & -ctg(\omega) \end{pmatrix} = A^T$$

$$(A^T)^{-1} = A^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} -ctg(\omega) & \frac{1}{sin(\omega)} & 1 & 0 \\ \frac{1}{sin(\omega)} & -ctg(\omega) & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & ctg(\omega) & \frac{1}{sin(\omega)} \\ 0 & 1 & \frac{1}{sin(\omega)} & ctg(\omega) \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} x = -ctg(\omega)x' + \frac{1}{sin(\omega)}y' \\ y = \frac{1}{sin(\omega)}x' - ctg(\omega)y' \end{cases}$$
$$\begin{cases} x' = ctg(\omega)x + \frac{1}{sin(\omega)}y \\ y' = \frac{1}{sin(\omega)}x + ctg(\omega)y \end{cases}$$

3.4 Прямые и плоскости в пространстве

Плоскости:
$(\vec{r} - \vec{r_0}, \vec{n}) = 0, \leftrightarrow (\vec{r}, \vec{n}) + D = 0$
$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{a}t, \quad \vec{r} \cdot \vec{n}' - p = 0, \ |\vec{n'}| = 1$
$d = \frac{|\vec{r_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$
Прямые:
$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{a}t$
$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$
$$\begin{cases} \vec{r} \cdot \vec{n_1} + D_1 = 0 \\ \vec{r} \cdot \vec{n_2} + D_2 = 0 \end{cases}$$
Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую:
$\alpha(\vec{r} \cdot \vec{n_1} + D_1) + \beta(\vec{r} \cdot \vec{n_2} + D_2) = 0$

3.4.1 Примеры

№ 513

α - искомая плоскость
$$l_1 : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 6t \\ z = 4t \end{cases}$$

$$l_2: \begin{cases} x = -1 + 2t = 0 \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}$$
$Ax + By + Cz + D = 0$
$\vec{n} = (A, B, C)$
$\vec{a_1} = (3, 6, 4)$ - напр. l_1
$\vec{a_2} = (2, 3, -1)$ - напр. l_2
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{a_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{a_2} = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 3A + 6B + 4C = 0 \\ 2A + 3B - C = 0 \\ C = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A = 6 \\ B = -\frac{11}{3} \\ C = 1 \end{cases}$$
$(2, -1, 0) \in \alpha \implies \alpha : 6(x-2) - \frac{11}{3}(y+1) + z = 0 \leftrightarrow$
$\leftrightarrow \alpha : 18x - 11y + 3z - 47 = 0$

№ 587

$\Pi_1 : 2x + 3y - 4z + 5 = 0$
$\Pi_2 : 2x - z + 3 = 0$
$\Pi_3 : x + y - z = 0$
ϕ–?
$2x + 3y - 4z + 5 + \alpha(2x - z + 3) = 0$ - пучок плоскостей через $\Pi_1 \cap \Pi_2$
$x(2 + 2\alpha) + 3y + z(-4 - \alpha)z + 5 + 3\alpha = 0 \implies \vec{n_\phi} = (2 + 2\alpha, 3, -4 - \alpha)$
$$\vec{a} = \phi \vec{\cap} \Pi_3 = \vec{n_\phi} \times \vec{\Pi_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j}, & \vec{k} \\ 2 + 2\alpha & 3 & -4 - \alpha \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1 + \alpha, \alpha - 2, 2\alpha - 1)$$
$$\vec{b} = (\Pi_1 \vec{\cap} \Pi_2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-3, -6, -6) \parallel (1, 2, 2)$$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + \alpha + 2\alpha - 4 + 4\alpha - 2 = 7\alpha - 5 = 0 \implies \alpha = \frac{5}{7}$
$\phi : \frac{24}{7} + 3y - \frac{33}{7}z + \frac{50}{7} = 0 \leftrightarrow 24x + 21y - 33z + 50 = 0$

4 Квадратичные формы

22.11.2021

$F(x_1, \ldots, x_n) = X^T A X$
$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2$
Замена: $X = CY \to F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = Y^T \overbrace{C^T A C} Y$
$F = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$ - канонический вид

4.1 Метод Лагранжа

4.2 Метод ортогональных преобразований

1. $F = X^T A X \to det(A - \lambda E) = f(\lambda) \implies \lambda_1, \quad \lambda_2$
   $F(y_1, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$

2. Найти собственные вектора $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$
   $C = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$
   Если одному числу соответствует несколько собственных векторов, то их надо ортагонализировать

№ 527 а

$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$ - методом Лагранжа

$$\underbrace{(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2)}_{y_1} + x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2 = y_1^2 + \underbrace{(x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2)}_{y_2} + \underbrace{x_3^2}_{y_3} =$$

$$= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \qquad \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

№ 0

$F(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = det(A{-}\lambda E) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+\lambda^2 & 1+\lambda & -\lambda-1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} \lambda^2+1 & 1+\lambda & -\lambda-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^3 \cdot (\lambda+3) = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_{1,2,3} = 1 \\ \lambda_4 = -3 \end{array} \right.$$

$F(y_1,y_2,y_3,y_4) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2$

1. $\lambda = 1:$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)}_{Rank=1} \implies \vec{v_1} = (1,1,0,0)^T, \;\; \vec{v_2} = (1,0,1,0)^T,$$

$\vec{v_3} = (-1,0,0,1)^T$

Нормируем полученные векторы:

$\vec{c_1} = \vec{v_1} = (1,1,0,0)^T$

$\vec{c_2} = \alpha\vec{v_1} + \vec{v_2}$

$c_1 \perp c_2 \leftrightarrow \vec{c_1} \cdot \vec{c_2} = 0 \leftrightarrow 2\alpha + 1 = 0 \leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \implies \vec{c_2} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)^T$

$\vec{c_3} = \beta_1\vec{v_1} + \beta_2\vec{v_2} + \vec{v_3}, \quad | \quad \vec{c_1} \cdot \vec{c_3} = \vec{c_2} \cdot \vec{c_3} = 0 \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 2\beta_1 + \beta_2 = 1 \\ \frac{3}{2}\beta_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = \frac{1}{3} \\ \beta_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \implies$$

$\implies \vec{c_3} = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)^T$

2. $\lambda = -3:$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = c_4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = c_4 \\ x_2 = -c_4 \\ x_3 = -c_4 \\ x_4 = c_4 \end{cases} \leftrightarrow X = c_4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v_4}}$$

$\vec{e_1} = \frac{\vec{c_1}}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)^T$
$\vec{e_2} = \frac{\vec{c_2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = (\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0)^T$
$\vec{e_3} = \frac{\vec{c_3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = (-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2})^T$
$\vec{e_4} = \frac{\vec{v_4}}{2} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad X = PY$$