24.09.2021

1 Предел последовательности

№ 62

$$\lim_{n\to\infty} nq^n = 0, \quad |q| < 1$$

- **Случай q = 0 очевиден**
- **Разберем случай q $\neq$ 0:**
  Т. к. $|q| \in (0; 1)$, то $|q| = \frac{1}{d+1}$, где d > 0; Тогда $nq^n = \frac{n}{(1+x)^n}$
  Заметим, что $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + ... \ > \ \frac{n(n-1)}{2}x^2$
  Таким образом: $|nq^n| < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}x^2} = \frac{2}{(n-1)x^2} < \epsilon$ $(\epsilon > 0) \leftrightarrow$ n > $1 + \frac{2}{\epsilon x^2}$
  Значит по определению предела: $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$

№ 63

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \text{ (a > 0)}$$

По определению предела нужно доказать следующее неравенство:
$|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon$

- **Рассмотрим случай a > 1**
  $|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon, \quad \epsilon > 0 \leftrightarrow |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \epsilon.$
  Так как a > 1, то $a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$. Опустим модуль в неравенстве.
  $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \epsilon \ \ \leftrightarrow \ \ (1+\epsilon)^n > a$
  $(1+\epsilon)^n = 1 + \epsilon n + ... > \epsilon n > a \ \ \leftrightarrow \ \ n > \frac{a}{\epsilon}$
  Значит при a > 1 неравенство верно.
- **Случай a = 1 очевиден**

- **Рассмотрим случай а < 1**

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\frac{1}{a})}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1$

Так как 1/a > 1, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$ (1 пункт)

№ 58

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0,\ \text{a} > 1$$

Рассмотрим пример №61: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{b^n} = 0$, b $> 1 => \frac{1}{b^n} < \frac{n}{b^n} < 1$ (*), в окрестночти $+\infty$

Пусть b $= a^p$, p $> 0 =>$ p$\ln a = \ln b$

(*): $\frac{1}{a^{pn}} < \frac{n}{a^{pn}} < 1 \leftrightarrow \log_a(\frac{1}{a^{pn}}) < \log_a(\frac{n}{a^{pn}}) < 1 \leftrightarrow 0 < \log_a(\frac{a^{pn}}{n}) < \log_a(\frac{1}{a^{pn}})$

$\leftrightarrow 0 <$ pn (1 $<$ n $< a^{pn}$ $\leftrightarrow 0 < \log_a n < \log_a(a^{pn}) =$ pn)

Разделим все на n: $1 < \frac{log_a(a^{pn})}{n} <$ p

==============

№ 65

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

При n ≥ 2: $\sqrt[n]{n} > 1$

n $= (\sqrt[n]{n})^n = [1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n = 1 +$ n$((\sqrt[n]{n} - 1)) + ... + (\sqrt[n]{n} - 1)^n > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2$

n $> \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \leftrightarrow 0 < (\sqrt[n]{n} - 1)^2 < \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1} \to 0 \leftrightarrow$

$1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{n-1} \to 1$

№ 66

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

Докажем, что n! $> (\frac{n}{3})^n$ (*) при n $\to \infty$ методом матиматической индукции:

База:
n = 1: $1 > \frac{1}{3}$
n = 2: $2! = 2 > (\frac{2}{3})^2$
Переход: нредположим, что (*) верно. Тогда $n! > (\frac{n}{3})^n$
$(n + 1)! = (n + 1)n! > (n + 1)\ (\frac{n}{3})^n$
$\frac{(n+1)^n}{n^n} = (1 + \frac{1}{n})^n < e < 3 \leftrightarrow (\frac{n}{3})^n > \frac{(n+1)^n}{3^{n+1}}$
Таким образом: $0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{3}{n} \ \ \to 0$

№ 75

$\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$

№ 76

$\lim\limits_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a$

2 Предел функции

2.1 Область определения

$y = f(x)$, $x,y \in \mathbb{R}$
ДЗ: 151 - 165

№ 152
$y = \sqrt{3x - x^2}$

D: $3x - x^2 \geq 0 \ \ \leftrightarrow \ \ x^2 - 3x \leq 0 \ \ \leftrightarrow \ \ x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

Определние

Пусть x = a - внутренняя точка D(f) $\leftrightarrow \exists\ \delta > 0$: $(a-\delta; a+\delta) \subset D(x)$
Тогда A = $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, если $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\exists$ x $\in (a-\delta; a+\delta)$
$=> |f(x) - A| < \epsilon$

2.2 Замечательные пределы

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to \infty} (1+\frac{1}{x})^x = +\infty$

2.3 Свойства пределов

1. $\lim\limits_{x\to a}[Af(x) + Bg(x)] = A\lim\limits_{x\to a} f(x) + B\lim\limits_{x\to a} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to a}[Af(x)g(x)] = A\lim\limits_{x\to a} f(x)\ \lim\limits_{x\to a} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

Если существуют два из трех пределов, то существует и третий, и справедливы свойства 1-3

2.4 Примеры

№ 412

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\ \frac{6x+11x^2+6x^3}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}[6 + 11x + 6x^2] = 6$$

№ 413

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^5+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1-5x-1}{x^5+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+5x^2+10x+10}{1+x^3}$$
$$=10$$

№ 416

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{50}(2-\frac{3}{x})^{20}(3+\frac{2}{x})^{30}}{x^{50}(2+\frac{1}{x})}=\frac{2^{20}3^{30}}{2^{50}}=$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$$

№ 418

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3(x-2))}{(x-3)(x-5)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x-5}=-\frac{1}{2}$$

№ 419

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x-3)}=\frac{1+2}{1^2+2+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

№ 422

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x-1)}{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x-1)}=\frac{1-(-1)-1}{1-(-1)+1-(-1)-1}=$$

$$=\frac{1}{3}$$

№ 424

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\mathrm{d}(x^{100}-2x+1)}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}x^{50}-2x+1}{\mathrm{d}x}}=\lim_{x\to 1}\frac{100x^{99}-2}{50x^{49}-2}=\frac{98}{48}$$

2.5 Иррациональные функции

№ 435

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1$$

24.09.2021

№ 437

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}\ \overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)((\sqrt{1+2x}+3)}$$
$$=2\cdot\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\frac{2\cdot 4}{6}=\frac{4}{3}$$

№ 440

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}\ \overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to 3}=\frac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(x^2-9)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+13-4x-4}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=-3\cdot\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=$$
$$-3\cdot\frac{1}{6\cdot(4+4)}=\text{-}\frac{1}{16}$$

№ 447

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}\ \overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x})((\sqrt[3]{27+x})^2+\sqrt[3]{27+x}\sqrt[3]{27-x}+(\sqrt[3]{27-x})^2)}{x(1+2\sqrt[3]{x})((\sqrt[3]{27+x})^2+\sqrt[3]{27+x}\sqrt[3]{27-x}+(\sqrt[3]{27-x})^2)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(1+2\sqrt[3]{x})((\sqrt[3]{27+x})^2+\sqrt[3]{27+x}\sqrt[3]{27-x}+(\sqrt[3]{27-x})^2)}=\frac{2}{3^2+3\cdot 3+3^2}=\frac{2}{27}$$

№ 455

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$

Пусть $x=t^{n\cdot m}\implies\sqrt[m]{x}=t^n\quad\sqrt[n]{x}=t^m$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\lim\limits_{t\to1}\frac{t^n-1}{t^m-1}=\lim\limits_{t\to1}\frac{\cancel{(t-1)}(1+t+t^2+...+t^{n-1})}{\cancel{(t-1)}(1+t+t^2+...+t^{m-1})}=\frac{n}{m}$

№ 457

$\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x]\ ^{[\infty-\infty]}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}[(a+b)+\frac{ab}{x}]}{\cancel{x}(1+\sqrt{(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})})}=$
$=\frac{a+b}{2}$

ДЗ: 436, 455.1, 456, 458

27.09.2021

№ 462

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})\ ^{[\infty-\infty]}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^3+3x^2)^2-(x^2-2x)^3}{(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^5+(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^4\sqrt{x^2-2x}+...+(\sqrt{x^2-2x})^5}$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^6+6x^5+9x^4-(x^6-6x^5+12x^4-8x^3)}{(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^5+(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^4\sqrt{x^2-2x}+...+(\sqrt{x^2-2x})^5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^5}(12-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2})}{\cancel{x^5}((\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}})^5+...+(\sqrt{1-\frac{2}{x}})^5)}=$
$=\frac{12}{6}=2$

2.6 Тригонометрические функции

1 *Замечательный предел*

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{sin(x)}=1$

2 *Тригонометрические формулы*

1. $sin(2x)=2sin(x)cos(x)$
2. $cos(2x)=cos^2(x)-sin^2(x)=2cos^2(x)-1=1-2sin^2(x)$
3. $1+cos(x)=2cos^2(\frac{x}{2})$
4. $1-cos(x)=2sin^2(\frac{x}{2})$
5. $sin(\alpha+\beta)=sin(\alpha)\cdot cos(\beta)+cos(\alpha)\cdot sin(\beta)$

№ 471

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(5x)}{x}=|t=5x|=5\cdot\lim_{t\to 0}\frac{sin(t)}{t}=5$$

№ 472

$$\lim_{x\to\infty}\frac{sin(x)}{x}$$
$$0\le|\frac{sinx}{x}|=\frac{|sinx|}{x}\le\frac{1}{x}\to 0$$

№ 474

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin^2(\frac{x}{2})}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot[\lim_{x\to 0}\frac{sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}]^2=\frac{1}{2}$$

№ 475

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)-sin(x)}{sin^2(x)}\ ^{\left[\frac{0}{0}\right]} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{sin(x)}(\frac{1-cos(x)}{cos(x)})}{\cancel{sin(x)}\cdot sin^2(x)} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{cos(x)}\cdot[\frac{1}{2}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}}]^2 = 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

№ 476

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(5x)-sin(3x)}{sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{sin(5x)}{sin(x)} - \lim_{x\to 0}\frac{sin(3x)}{sin(x)} = 5-3=2$$

№ 480

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg(\frac{\pi x}{2})\ ^{[0\cdot\infty]} = \lim_{x\to 1}(1-x)\frac{sin(\frac{\pi x}{2})}{cos(\frac{\pi x}{2})} = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{cos(\frac{\pi x}{2})}\ ^{\left[\frac{0}{0}\right]} =$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{cos(\frac{\pi(x-1)}{2}+\frac{\pi}{2})} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{sin(\frac{\pi(x-1)}{2})} = \frac{2}{\pi}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi t}{2}}{sin(\frac{\pi t}{2})} = \frac{2}{\pi}$$

№ 488

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(a+2x)-2sin(a+x)+sin(a)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(sin(a+2x)+sin(a))-2sin(a+x)}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2sin(a+x)\cdot cos(x)-2sin(a+x)}{x^2} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin(a+x)(cos(x)-1)}{x^2} = -2sin(a)\cdot$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})^2\cdot 4} = -sin(a)$$

№ 493

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2sin^2(x)+sin(x)-1}{2sin^2(x)-3sin(x)+1}\ ^{\left[\frac{0}{0}\right]} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cancel{(2sin(x)-1)}(sin(x)+1)}{\cancel{(2sin(x)-1)}(sin(x)-1)} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3$$

01.10.2021

№ 499

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+tg(x)}-\sqrt{1+sin(x)}}{x^3}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)-sin(x)}{x^3(\sqrt{1+tg(x)}+\sqrt{1+sin(x)})}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}[\frac{sin(x)}{x}\cdot\frac{1-cos(x)}{x^2cos(x)}]=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2(\frac{x}{2})}{4(\frac{x}{2})^2}=\frac{1}{4}$$

№ 502

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-cos(x^2)}}{1-cos(x)}\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2sin^2(\frac{x^2}{2})}}{2sin^2(\frac{x}{2})}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\lim_{x\to 0}2\cdot\cancelto{1}{\frac{sin(\frac{x^2}{2})}{\frac{x^2}{2}}}\cdot\cancelto{1}{\frac{(\frac{x}{2})^2}{sin^2(\frac{x}{2})}}=$$
$$=\sqrt{2}$$

ДЗ: 503, 504, 505, 688, 689

3 Непрерывность функции

Опр. Пусть $f(x), x \in \mathbb{X} \subseteq R$
$a \in \mathbb{X}$ - внутренняя точка, т. е $(a - x_0; a + x_0) \subset \mathbb{X}, x_0 > 0$
Тогда f(x) - непрерывная в точке x = a, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

№ 687

$y = \frac{x}{(x+1)^2} \qquad x \neq -1 \implies x = -1$ - точка разрыва?
$\lim\limits_{x \to -1} \frac{x}{(x+1)^2} = -\lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{(x+1)^2} = -\infty \quad \implies \quad$ x = -1 - точка разрыва II рода

№ 690

$y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$
Особые точки: $x = 0, x = -1, x = 1$
$y = \frac{\frac{1}{x(x+1)}}{\frac{1}{x(x-1)}} = \frac{x-1}{x+1}, \quad x \in \mathbb{D}$(y)
$\lim\limits_{x \to -1} y = \lim\limits_{x \to -1} \frac{x-1}{x+1} = -2 \lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{x+1} = -\infty \quad \implies \quad x = -1$ -
- точка разрыва II рода
$\lim\limits_{x \to 0} y = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x-1}{x+1} = -1 \quad \implies \quad$ x = 0 - точка разрыва III рода
$\lim\limits_{x \to 1} y = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x-1}{x+1} = 0 \quad \implies \quad$ x = 1 - точка разрыва III рода

№ 720

$y(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n},\quad x\geq 0$

$$y(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1 \implies \lim\limits_{n\to\infty}x^n=0\\ 1, & x=0\\ 0, & x>1\end{cases} \implies x=1-\text{точка интереса}$$

$x=1$ - точка разрыва I рода, т. к. $\lim\limits_{x\to 1-}y(x)=1;\ \lim\limits_{x\to 1+}y(x)=0$

3.1 Исследование функций. Построение графиков

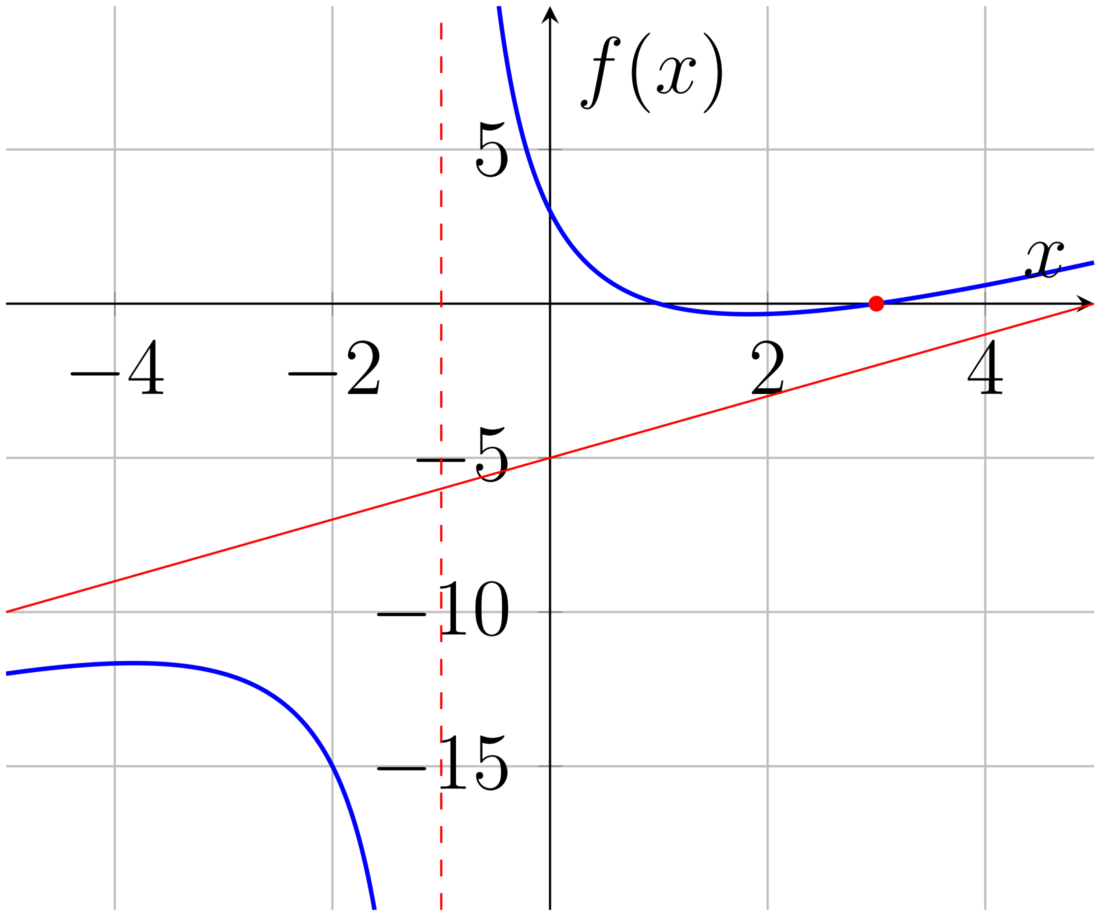
04.10.2021

$y=f(x)$

1. Найти $D(f(x))$ & найти корни $f(x)=0$
2. Найти особые точки - $x=a:\quad \lim\limits_{x\to a+}f(x),\ \lim\limits_{x\to a-}f(x)$?
   Найти асимптоты
3. Поведение функции в окрестностях $\pm\infty$
4. Монотонность $f(x)$
5. График

№ 263

$y=\frac{x^2-4x+3}{x+1}=x-5+\frac{8}{x+1}$
$\lim\limits_{x\to -1}[x-5+\frac{8}{x+1}]=-6+8\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{x+1}=\infty$



$\lim \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x+3}{x+1} = +\infty$

$\lim \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x+3}{x+1} = -\infty$

№ 242

$y = \sqrt{\frac{x^3}{x-10}}$

1. $D(y) : \frac{x^3}{x-10} \geq 0 \quad \leftrightarrow$

$$\begin{cases} x \geq 0, \;\; x-10 > 0 \implies x \leq 0 \\ x < 0, \;\; x-10 < 0 \implies x < 0 \end{cases} .$$

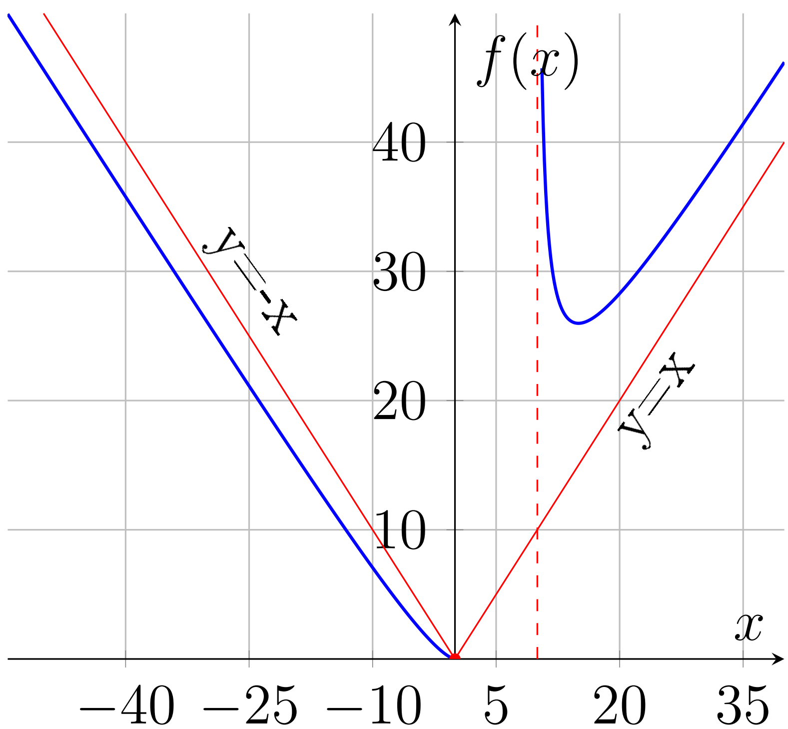
$D(y) = (-\infty; 0] \cup (10; +\infty)$

2. $x = 10$ – вкртикальная асимптота, т. к. $\lim\limits_{x \to 10} y(x) = +\infty$

   $\lim\limits_{x \to 0+} y(x)$ – не существует

   $\lim\limits_{x \to 0-} y(x) = 0$

   - $x > 10 \implies y = \sqrt{\frac{x^3}{x-10}} = x \cdot \cancelto{1}{\sqrt{\frac{x}{x-10}}} \implies$
     $\implies y = x$ - наклонная асимптота
   - $x < 10 \implies y = \sqrt{\frac{x^3}{x-10}} = -x \cdot \cancelto{1}{\sqrt{\frac{x}{10-x}}} \implies$
     $\implies y = -x$ - наклонная асимптота



3.2 Производные

22.10.2021

$y = f(x)$
$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

3.2.1 Таблица производных

1. $(x^n)' = nx^{n-1} \ \forall \ n \in \mathbb{R}$
2. $(sinx)' = cosx \qquad (cosx)' = -sinx$
3. $(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = (e^{xln(a)})' = a^x \cdot lna$
4. $(lnx)' = \frac{1}{x}$
5. $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (arctgx)' = \frac{1}{x^2+1}$

3.2.2 Правила дефференцирования

1. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
2. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
3. $[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
4. $(f[g(x)])' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ - *Производная сложной функции*

3.2.3 Примеры

№ 918

$$y = x + \sqrt{1-x^2} \cdot arccos(x)$$
$$y' = \cancel{1} + \frac{-x \cdot arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \cancel{\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}} = -\frac{x \cdot arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

№ 919

$$y = x \cdot arcsin(\sqrt{\frac{x}{1+x}}) + arctg(\sqrt{x}) - \sqrt{x}$$

$$y' = arcsin(\sqrt{\frac{x}{1+x}}) + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) + \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = arcsin(\sqrt{\frac{x}{1+x}}) - \frac{\sqrt{x}(x+1)}{2x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

№ 961

$$y = x + x^x + x^{x^x}$$
$$(x)' = 1$$
$$(x^x)' = (e^{xln(x)})' = x^x(lnx + 1)$$
$$(x^{x^x})' = (e^{x^x ln(x)})' = x^{x^x} \cdot [x^{x-1} + lnx \cdot x^x \cdot (lnx + 1)]$$
$$y' = 1 + x^x(lnx + 1) + x^{x^x} \cdot [x^{x-1} + lnx \cdot x^x \cdot (lnx + 1)]$$

№ 963

$$y = \sqrt[x]{x}$$
$$y' = (e^{\frac{lnx}{x}})' = \sqrt[x]{x} \cdot \frac{1-lnx}{x^2}$$

ДЗ: 901-903, 913-930

3.2.4 Самостоятельная работа

25.10.2021

№ 858

$$y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} = -\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$
$$y' = -\frac{\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}} \cdot \sqrt[3]{x^3-1} - \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}} \cdot \sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}} = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$$

№ 873

$$y = 4\sqrt[3]{ctg^2x} + \sqrt[3]{ctg^8x}$$
$$y' = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{ctgx}} \cdot (-\frac{1}{sin^2x}) + \frac{8}{3}\sqrt[3]{ctg^5x} \cdot (-\frac{1}{sin^2x}) =$$
$$= -\frac{8}{3sin^2x\sqrt[3]{ctgx}}(1 + ctg^2x) = -\frac{8\sqrt[3]{tgx}}{3sin^4x}$$

№ 896

$$y = xln(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{1+x^2}$$
$$y' = ln(x + \sqrt{x^2+1}) + x \cdot \cancel{\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot (1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}})} - \cancel{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} =$$
$$= ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

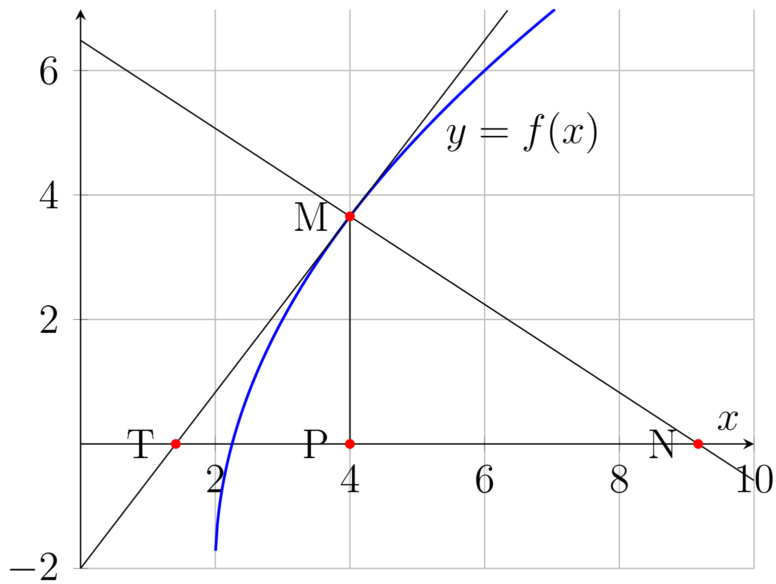
№ 940

$$y = \frac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}ln(\frac{1-x}{1+x})$$
$$y' = \frac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2}} + \frac{xarcsinx}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{1+x}}{1-x} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^{\cancel{2}}} = \frac{xarcsinx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

3.2.5 Геометрические приложения производных

08.11.2021

$y = f(x), a < x < b$



MT - касательная
MN - нормаль
PT - подкасательная
PN - поднормаль

$(MT): y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0, \qquad (MN): y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0$
$|PT| = |\frac{y_0}{f'(x_0)}|$
$|PN| = |y_0 \cdot f'(x_0)|$
$|MT| = |\frac{y_0}{f'(x_0)}| \cdot \sqrt{1 + f'^2(x_0)}$
$|MN| = |y_0| \cdot \sqrt{1 + f'^2(x_0)}$

№ 1055

$y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$

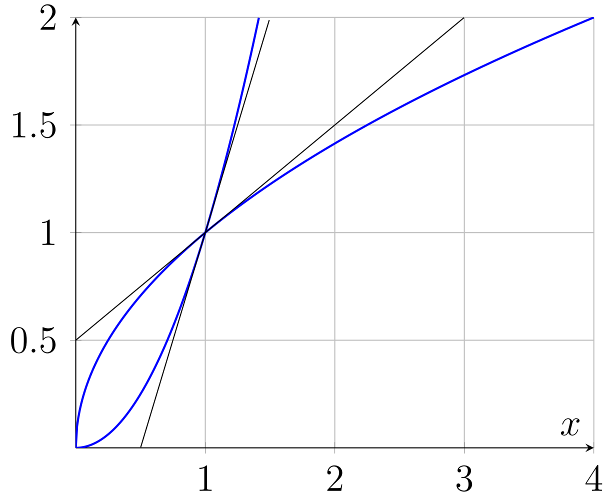
1. $M_1(-1, 0)$
   $y' = \sqrt[3]{3-x} - (x+1) \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}} = \frac{9-3x-x-1}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}} = \frac{4(2-x)}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}}$
   $y'(-1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}$
   $y = \sqrt[3]{4}(x+1)$
   $y = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x+1)$ - У доски

№ 1057

$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$
$y = a(x-x_0)(x-x_1)$
$y' = a(x-x_0) + a(x-x_1)$
$y'(x_0) = a(x_0 - x_1), \quad y'(x_1) = a(x_1 - x_0) = -y'(x_0) \implies$
$\implies$ углы равны

№ 1061

$y = x^2, \qquad x = y^2 \implies y = \sqrt{x}$



$y_1 = 2(x-1)+1, \qquad y_2 = \frac{1}{2}(x-1)+1$
$\varphi = tg(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{tg(\varphi_1)-tg(\varphi_2)}{1+th(\varphi_1)tg(\varphi_2)} = \frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \implies \varphi = arctg(\frac{3}{4})$

ДЗ: 1070, 1075

12.11.2021

№ 1071

$f'(x) = 2ax + b = 0 \leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$
$y = 0\cdot(x+\frac{b}{2a}) + a\cdot(\frac{b}{2a})^2 + b\cdot(-\frac{b}{2a}) + c = \frac{b^2-2b^2+4ac^2}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a} =$
$= 0 \leftrightarrow D = b^2 = 4ac = 0$

№ 1075

$$M_0(x_0; y_0): \begin{cases} x_0^2 - y_0^2 = a^2 \\ x_0 \cdot y_0 = b^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{b^2}{x_0} \\ x_0^4 - a^2 x_0^2 - b^4 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4b^4}}{2} \\ y_0 = \frac{b}{x_0} \end{cases}$$

$y_1 = \sqrt{x^2 - a^2},\ y_2 = \frac{b^2}{x}$

$y_1' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}},\ \ y_2' = -\frac{b^2}{x^2}$

$y_1' \cdot y_2' = -\frac{b^2}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -1$

3.2.6 Касательные кривых, заданныз параметрически или неявно

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right| t \in (\alpha, \beta)$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}$

$t_0 \implies (x_0, y_0), \begin{array}{l} x_0 = x(t_0) \\ y_0 = y(t_0) \end{array}$

$y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$

№ 1077

$$\left. \begin{array}{c} x = 2t - t^2 \\ y = t - t^3 \end{array} \right\}$$

$y'_x(x) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{3-3t^2}{2-2t} = \frac{3}{2}(1+t)$

$\begin{cases} y'_x = \frac{3}{2} \implies y(t) = \frac{3}{2}(1+t)(2-t-t^2) \\ x(t) = 2t - t^2 \end{cases}$ - касательная в t $= 0$

№ 1084

$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1, \quad M_0(6, 6.4)$

$\frac{x}{50} + \frac{y \cdot y'}{32} = 0 \implies y'(6) = -\frac{16x}{25y} = -\frac{3}{5}$

Касательная: $y = y_0 + y'(x - x_0) \leftrightarrow y = 10 - 0.6x$

ДЗ: 1073, 1078

3.2.7 Производные высшего порядка

15.11.2021

Основные формулы

1. $(e^x)^{(n)} = e^x \quad \Longrightarrow \quad (a^x)^{(n)} = a^x(ln(a))^n$
2. $(sin(x))^{(n)} = sin(x + n\frac{\pi}{2})$
   $(cos(x))^{(n)} = cos(x + n\frac{\pi}{2})$
3. $(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}$
4. $(ln(x))^{(n)} = (\frac{1}{x})^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!x^{-n}$
5. $(u \cdot v)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$

Примеры

№ 1189

$y = \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$
$y^{(n)} = (\frac{1}{x-1})^{(n)} - (\frac{1}{x})^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^n} - \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^n}$

№ 1193

$y = sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - cos(2x))$
$y^{(n)} = -2^{n-1}cos(2x + n\frac{\pi}{2})$

№ 1195

$y = sin^3(x) = \frac{1}{2}(1-cos(2x))sin(x) = \frac{1}{2}sin(x) - \frac{1}{2}sin(x)cos(2x) =$

$= \frac{1}{2}sin(x) - \frac{1}{4}sin(3x) + \frac{1}{4}sin(x) = \frac{3}{4}sin(x) - \frac{1}{4}sin(3x)$
$y^{(n)} = \frac{3}{4}sin(x + n\frac{\pi}{2}) - \frac{3^n}{4} \cdot sin(3x + n\frac{\pi}{2})$

№ 1202

$y = xcos(mx)$
$y^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^{(k)}(cos(mx))^{(n-k)} = m^n \cdot xcos(mx + \frac{\pi n}{2}) +$
$+ nm^{n-1} \cdot cos(mx + \frac{(n-1)\pi}{2})$

№ 1204

$y = (x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x}$
$y^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} (x^2 + 2x + 2)^{(k)} \cdot (e^{-x})^{(n-k)} = (-1)^n \cdot (x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x} + (-1)^{n-1} \cdot n \cdot (2x + 2) \cdot e^{-x} + (-1)^{n-2} \cdot n(n-1) \cdot e^{-x}$

3.2.8 Дифференцируемость функции

22.11.2021

$f(x), a <= x <= b, f'(x)$

Теорема Ролля

1. $f(x)$ - определена на интервале $[a; b]$
2. $\exists f'(x)$ - ограниченная на $(a; b)$

3. $f(a) = f(b)$

$\implies \quad \exists c \in (a;b) \implies f'(c) = 0$

№ 1235

$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \implies [a;b] = [1;3]$

1. 1 - выполнено

2. $f'(x) = (x-1)(x-2) + (x-1)(x-3) + (x-2)(x-3)$ - выполнено

3. Выполнено

$?\exists c \in (1;3) \implies f'(c) = 0$
$f'(x) = x^2 - 5x + 6 + x_2 - 3x + 2 + x^2 - 4x + 3 = 3x^2 - 12x + 11 = 0 \leftrightarrow x_{1,2} = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = c$

№ 1236

$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}, [-1;1]$
$f(-1) = 0$
$f(1) = 0$
$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \neq 0$
Не выполнено условие 2 теоремы Ролля

№ 1238

1. $f(x), x \in [x+0; x_1]$

2. $f^{n-1}(x)$ - непрерывная функция

3. $f^{(n)} - (x_0; x_1)$

4. $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n)$

Доказать, что $\exists\ \xi \in (x_0; x_n) \implies f^{(n)}(\xi) = 0$ - ДЗ

Теорема Лагранжа

1. $f(x), x \in [a;b]$ и непрерывна на $(a;b) \implies$
   $\implies \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$
2. $|f'(x)| <= c, \forall x \in (a;b)$

Тогда:
$\exists\ c \in (a;b): \quad f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$

№ 1244

$y = x^3$
$A(-1;-1), B(2;8)$
Касательная через $M(x;y)$ такая, что она параллельна прямой (AB) - ?
$f'(x) = 3x^2$
$k_{(AB)} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 3$
$f'(x) = 3x^2 = 3 \implies \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$

1. $x = 1:$
   $$y = 3(x-1) + 1 \leftrightarrow y = 3x - 2$$
2. $x = -1: -1 \notin (-1;2)$

№ 1245

$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [a;b], \quad ab < 0$

№ 1251

a) $|sin(x) - sin(y)| \leq |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$
Рассмотрим $0 <= x < y <= \pi$:
$|sin(x) - sin(y)| = 2|cos(\frac{x+y}{2}) \cdot sin(\frac{x-y}{2})| \leq 2|sin(\frac{x-y}{2})|$
$y = x$ - касательная к $y = sin(x)$ в $x = 0$. Т. к. $sin(x)$ выпукла вверх, то $sin(x) < x \implies |sin(x) - sin(y)| =$
$= 2|sin(\frac{x-y}{2})| \leq x - y$

b)
$|arctg(x) - arctg(y)| <= |x - y|$
$z = arctg(x) - arctg(y) \implies tg(z) =$
$= tg(arctg(x) - arctg(y)) = \frac{tg(arctg(x)) - tg(arctg(y))}{1 + tg(arctg(x) \cdot tg(arctg(y))} = \frac{x-y}{1+xy} \implies$
$|arctg(x) - arctg(y)| = |arctg(\frac{x-y}{1+xy})| \leq |x - y|$
Если $xy < 0 \implies |\frac{x-y}{1+xy}| \leq |x - y|$

3.3 Правило Лопиталя

26.11.2021

$$L = \lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}, \left[\frac{0}{0}\right] \text{ или } \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$L = \lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to a}\frac{P'(x)}{Q'(x)}$$

№ 1320

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)-x}{x-sin(x)}^{\left[\frac{0}{0}\right]} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{cos^2(x)}-1}{1-cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{(1-cos(x))}(1+cos(x))}{\cancel{(1-cos(x))}cos^2(x)} = 2$$

№ 1321

$$\lim_{x\to 0}\frac{3tg(4x)-12tg(x)}{3sin(4x)-12sin(x)}^{\left[\frac{0}{0}\right]} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{12}{cos^2(4x)}-\frac{12}{cos^2(x)}}{12cos(4x)-12scos(x)} = -\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{(cos(4x)-cos(x))}(cos(4x)+cos(x))}{\cancel{(cos(4x)-cos(x))}cos^2(4x)cos^2(x)} =$$

$$= -2$$

№ 1323

$$\lim_{x\to 0}\frac{xctg(x)-1}{x^2}^{\left[\frac{0}{0}\right]} = \lim_{x\to 0}\frac{ctg(x)-\frac{x}{sin^2(x)}}{2x}^{\left[\frac{0}{0}\right]} = \lim_{x\to 0} f\,\frac{-sin^2(x)+cos^2(x)-1}{sin^2(x)+2xsin(x)cos(x)}^{\left[\frac{0}{0}\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2sin(x)cos(x)-2cos(x)sin(x)}{2sin(x)cos(x)+2sin(x)cos(x)+2x(xos^2(x)-sin^2(x))} = -\lim\frac{cos(x)sin(x)}{sin(x)cos(x)+xcos(2x)}^{\left[\frac{0}{0}\right]} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)}{2cos(2x)-2xsin(2x)} = -\frac{1}{2}$$

№ 1324

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{tg(x)}-1}{2sin^2(x)-1}^{\left[\frac{0}{0}\right]} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{tg^2(x)}cos^2(x)}}{4sin(x)cos(x)} = \frac{1}{3}$$

№ 1325

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}^{\left[\frac{0}{0}\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{1+xe^x-e^x}{3x^2}^{\left[\frac{0}{0}\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}e^x}{6\cancel{x}}=\frac{1}{6}$$

№ 1327

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsin(2x)-2arcsin(x)}{x^3}^{\left[\frac{0}{0}\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4x^2})}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1$$

№ 1343

$$\lim_{x\to 0}x^{x^x-1}=\lim_{e^{(x^x-1)ln(x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(x^x-1)ln(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(x)}{(x^x-1)^{-1}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{(x^x-1)^{-2}x^x(1+ln(x))}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x^x-1)^2}{x(1+ln(x))}}$$

$$(x^x)'=(e^{xln(x)})'=x^x(1+ln(x))$$

$$\lim_{x\to 0}x^x=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(x)}{x^{-1}}}=e^{\overset{\lim}{\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}}}=1$$

ДЗ: 1329, 1330

29.11.2021

№ 1345

$$\lim_{x\to 0+}x^{\frac{k}{1+ln(x)}}=\lim_{x\to 0+}e^{\frac{kln(x)}{1+ln(x)}}=e^{k\cdot\lim\limits_{x\to 0+}\frac{ln(x)}{1+ln(x)}^{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}}=e^{k\cdot\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}=e^k$$

№ 1351

$$\lim_{x\to\infty}(tg(\frac{\pi x}{2x+1}))^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ln(tg(\frac{\pi x}{2x+1}))}{x}\left[\frac{\infty}{\infty}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi}{tg(\frac{\pi x}{2x+1})\cdot cos^2(\frac{\pi x}{2x+1})\cdot(2x+1)^2}} =$$

$$= e^{2\pi\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(2x+1)^2 sin(\frac{2\pi x}{2x+1})}} = e^{2\pi\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(2x+1)^2}}{sin(\frac{2\pi x}{2x+1})}} = e^{2\pi\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4\cdot(2x+1)^{-3}}{cos(\frac{2\pi x}{2x+1})\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{(2x+1)^2}}} =$$

$$= e^{-4\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(2x+1)cos(\frac{2\pi x}{2x+1})}} = e^0 = 1$$

№ 1353

$$L = \lim_{x\to 0}(\frac{a^x - xln(a)}{b^x - xln(x)})^{\frac{1}{x^2}} \quad [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot ln(\frac{a^x - xln(a)}{b^x - xln(x)})}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot ln(\frac{a^x - xln(a)}{b^x - xln(x)}) = \lim_{x\to 0}\frac{ln(a^x - xln(a)) - ln(b^x - xln(b))}{x^2}\left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(b^x - xln(b))\cdot(a^x ln(a) - ln(a)) - (a^x - xln(a))\cdot(b^x ln(b) - ln(b))}{2x(a^x - xln(a))(b^x - xln(b))} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}(b^x - xln(b))\cdot\frac{ln(a)(a^x - 1)}{x} - \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}(a^x - xln(a))ln(b)\cdot\frac{b^x - 1}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(ln^2(a) - ln^2(b)) = \frac{ln(\frac{a}{b})\cdot ln(ab)}{2}$$

$$L = e^{\frac{ln(\frac{a}{b})\cdot ln(ab)}{2}} = (ab)^{\frac{1}{2}ln(\frac{a}{b})}$$

№ 1354

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)}\left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{e^x(x+1) - 1}\left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(x+2)} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

№ 1357

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{ln(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{ln(x+1)}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{ln(x+1) - ln(x+\sqrt{x^2+1})}{ln(x+1)\cdot ln(x+\sqrt{x^2+1})}\left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot (1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})}{\frac{1}{x+1} ln(x+\sqrt{x^2+1}) + \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} ln(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-(x+1)}{(x+1)\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2} \cdot \left[\frac{ln(x+\sqrt{x^2+1})}{1+x} + \frac{ln(x+1)}{\sqrt{1+x^2}}\right])} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-(x+1)}{\sqrt{1+x^2} ln(x+\sqrt{x^2+1}) + (1+x) ln(1+x)} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{\sqrt{x^2+1} ln(x+\sqrt{x^2}) + (1+x) ln(1+x)} = -\frac{1}{2}$$

№ 1359

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}^{\left[\frac{0}{0}\right]} = \lim_{x\to 0} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x} ln(1+x)} \cdot \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{ln(x+1)}{x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{e^{\frac{1}{x} ln(1+x)}}_{e^{ln((1+x)^{\frac{1}{x}})}=e} \cdot \frac{x-(x+1)ln(x+1)}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x-(x+1)ln(x+1)}{x^2}^{\left[\frac{0}{0}\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{1-[ln(x+1)+1]}{2x} =$$

$$= -\frac{e}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{ln(x+1)}{x} = -\frac{e}{2}$$

ДЗ: 1355, 1356

3.4 Экстремум функции

06.12.2021

$y = f(x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}$

Опредиление: Говорят, что $f(x)$ принимает в точке $x = x_0 \in \Omega$ минимальное (максисальное) значение, если $\exists \epsilon > 0$ - такое, то в ϵ корестности: $|x - x_0| < \epsilon$ имеет место неравенство: $f(x) > f(x_0)$

Теорема: Если $x = x_0$ - точка экстремума $y = f(x)$, то необходимо выполнение условия: $f'(x_0) = 0$ (*)

Теорема 2: При этом если $f''(x_0) > 0$, то $f(x_0) = \min\limits_{|x - x_0| < \epsilon} f(x)$

$$\left[f''(x_0) > 0, \text{ то } f(x_0) = \min_{|x - x_0| < \epsilon} f(x) \right]$$

№ 1414

$y = 2 + x - x^2$

$$\left.\begin{array}{l} y' = 1 - 2x = 0 \leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\ y'' = -2 \end{array}\right\} \implies x = \tfrac{1}{2} \text{ - точка максимума}$$

№ 1474

$y = \frac{2-x^2}{1+x^4}$

1. $D = \mathbb{R}$
2. Функция четна
3. Экстремум
   $y' = \frac{-2x(1+x^4)-4x^3(2-x^2)}{(1+x^4)^2} = \frac{2x\cdot(x^4-4x^2+1)}{(1+x^4)^2}$
4. $y' = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2+\sqrt{5}} \end{array}\right.$
5. $y'' = \frac{-2(x^2+1)(3x^6+11x^2+1)}{(1+x^4)^3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2-x^2}{1+x^4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2-x^2}{1+x^4} = 0$

10.12.2021

№ 2

$y = \frac{x^3}{(1+x)(1-x^2)}$

1. $D = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$
   $\lim\limits_{x\to-1} y = \lim\limits_{x\to-1} \frac{-1}{2(1+x)^2} = -\infty$
   $\lim\limits_{x\to1} y = \lim\limits_{x\to1} \frac{1}{4(1-x)} = \infty$
2. $y' = \frac{3x^2(1+x)^2(1-x)-x^3(1-x^2-2x(1+x))}{(1+x)^4(1-x)^2} = \frac{x^2(3+3x-3x^2-3x^3+3x^3+2x^2-x)}{(1+x)^4(1-x)^2} =$

$= \frac{-x^2(x^2-2x-3)}{(1+x)^4(1-x)^2} = -\frac{x^2(x-3)}{(1+x)^3(1-x)^2} = 0 \;\leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{array} \right.$

$y(0) = 0$

$y(3) = -\frac{27}{32}$

3. $y''(x) = ... \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} y''(x_k) > 0 \implies x = x_k \text{ - точка } min f(x) \\ y''(x_k) < 0 \implies x = x_k \text{ - точка } max f(x) \end{array}$