ОДМ. Контрольная работа №1

1	2	3	4	5	6	Итого:
1	1-	1-	2/3	1-	1	5 2/3 -

Номер листа: 1

Вариант 1528 **ФИО** Зубашкин Илья Михайлович **Дата** 08 / 11 / 2021

1. Существуют ли множества A, B, X такие, что выполняется набор условий $X \backslash A = A \cap X = A \backslash B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$?

2. Для произвольных множеств A, B, C проверить, является ли выполнение включения $A \cup B \subseteq C$ необходимым и достаточным условием выполнение равенства $A \cap C = A \cup (B \backslash C)$.

3. Решить систему уравнений относительно множества X и указать условия совместности системы или доказать её несовместность $\begin{cases} C \backslash X = X \backslash A \\ X \backslash C = B \backslash X \\ \overline{A \cup X} = X \backslash C \end{cases}$

4. Произвольные бинарные отношения ρ и σ на множестве A обладают свойством транзитивности. Проверить, обладает ли этим свойством отношение $\rho \Delta \sigma$.

5. 1) Выяснить какими свойствами: рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность, обладает бинарное отношение $\rho = \{(x, y) | x$ и y имеют хотя бы одну общую точку$\}$, заданное на множестве $A = \{$прямые в пространстве$\}$.
   2) Что из себя представляют отношения $\rho \circ \rho$ и $\rho \circ \rho^{-1}$?
   3) Является ли отношение ρ отношением эквивалентности? Если да, то указать классы эквивалентности.
   4) Является ли отношение ρ отношением частичного или линейного порядка? Если да, то укажите максимальные (не имеющие последующих элементов), минимальные (не имеющие предшествующих элементов) элементы (если они существуют).

6. Отношение задано парами BC, DG, EA, HB, KB, KC, LJ.
   1) Какими свойствами обладает данное отношение?
   2) Какое минимальное число пар следует добавить к заданному отношению, чтобы оно стало отношением частичного порядка? Построить диаграмму Хассе, соответствующую этому отношению.
   3) Какое минимальное число пар надо добавить, чтобы дополнить заданное отношение до отношения эквивалентности? Добавьте необходимые пары и перечислите образовавшиеся классы эквивалентности. Сколько всего существует способов дополнить исходное отношение до отношения эквивалентности?

№ 1

$$\begin{cases} X / A = \varnothing \\ A \cap X = \varnothing \\ A / B = \varnothing \end{cases} \Longleftrightarrow (X \cap \bar{A}) \cup (X \cap A) \cup (A \cap \bar{B}) = \varnothing \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\underbrace{X \cap [A \cup \bar{A}]}_{= X}) \cup (A \cap \bar{B}) = X \cup (A \cap \bar{B}) = \varnothing \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} X = \varnothing \\ A \subseteq B. \end{cases}$$

1

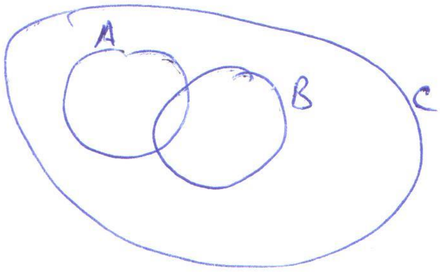
Такие множества существуют, например: $X = \varnothing$; $A = \{1\}$; $B = \{1, 2\}$.

Тогда действительно: $X \setminus A = A \cap X = A \setminus B = \varnothing$, $A \neq \varnothing$

Ответ: существуют.

№ 2

(*) $A \cup B \subseteq C$



Схематичное изображение (*)

I В одну сторону: ($A \cup B \subseteq C \Rightarrow A \cap C = A \cup (B / C)$)

$A \subseteq A \cup B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

$B \subseteq A \cup B \subseteq C \Rightarrow B \subseteq C$.

Т.к. $A \subseteq C \Rightarrow A \cap C = A$.

Т.к. $B \subseteq C \Rightarrow B \setminus C = \varnothing$

Тогда: $A \cap C = A \cup (B / C) \Leftrightarrow A = A \cup \varnothing = A$ – верно всегда

II В другую сторону: ($A \cap C = A \cup (B/C) \Rightarrow A \cup B \subseteq C$).

$A \cap C = A \cup (B/C)$.

$$\begin{cases} A \cap C \subseteq A \subseteq A \cup (B/C) \\ A \cap C = A \cup (B/C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cap C = A \\ A \cup (B/C) = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \subseteq C \\ B/C \subseteq A \end{cases}$$

$B/C \subseteq A \subseteq C \Rightarrow$ $B \subseteq C$ (Если B содержит эл-ты из $\bar{C} \Rightarrow$ $\Rightarrow B/C$ содержит эл-ты из $\bar{C} \Rightarrow$ $\Rightarrow B/C \not\subseteq C$).

Т.О. $A \subseteq C$ и $B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$.

ч.т.д.

Значит $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \cap C = A \cup (B/C)$

Ответ: является

Рубашкин Илья

Лист 2.

N3

$$\begin{cases} C \setminus X = X \setminus A \\ X \setminus C = B \setminus X \\ \overline{A \cup X} = X \setminus C \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} C \cap \overline{X} = X \cap \overline{A} \\ X \cap \overline{C} = \overline{X} \cap B \\ \overline{A} \cap \overline{X} = X \cap \overline{C} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (1)\ (C \cap \overline{X}) \triangle (X \cap \overline{A}) = \varnothing \\ (2)\ (X \cap \overline{C}) \triangle (\overline{X} \cap B) = \varnothing \\ (3)\ (\overline{X} \cap \overline{A}) \triangle (X \cap \overline{C}) = \varnothing \end{cases} \Longleftrightarrow (1) \cup (2) \cup (3) = \varnothing$$

$$(1):\ (C \cap \overline{X}) \triangle (X \cap \overline{A}) = (C \cap \overline{X} \cap (\overline{X} \cup A)) \cup$$

$$\cup (X \cap \overline{A} \cap (X \cup \overline{C})) = (C \cap \overline{X}) \cup (X \cap \overline{A})$$

Заметим, что $D \cap (D \cup E) = (D \cap D) \cup (D \cap E) =$
$= D \cup (D \cap E)$; $D \cap E \subseteq D \Rightarrow D \cup (D \cap E) = D$ для любых D и E.

$$(2):\ (X \cap \overline{C} \cap (X \cup \overline{B})) \cup (\overline{X} \cap B \cap (\overline{X} \cup C)) =$$

$$= (X \cap \overline{C}) \cup (\overline{X} \cap B)$$

$$(3):\ (\overline{X} \cap \overline{A} \cap (\overline{X} \cup C)) \cup (X \cap \overline{C} \cap (X \cup A)) =$$

$$= (\overline{X} \cap \overline{A}) \cup (X \cap \overline{C})$$

$$(1) \cup (2) \cup (3) = (X \cap \overline{A}) \cup (\overline{X} \cap C) \cup (X \cap \overline{C}) \cup (\overline{X} \cap B) \cup$$

$$\cup (X \cap \overline{C}) \cup (\overline{X} \cap \overline{A}) = (X \cap (\overline{A} \cup \overline{C})) \cup (\overline{X} \cap (\overline{A} \cup B \cup C))$$

$$= \varnothing \Longleftrightarrow \begin{cases} X \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) = \varnothing \\ \overline{X} \cap (\overline{A} \cup B \cup C) = \varnothing \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} X \subseteq (\bar A \cup \bar C) = A \cap C \\ \overline{(\bar A \cup B \cup \bar C)} = A \cap \bar B \cap \bar C \subseteq X \end{cases}$$

Т.о. $A \cap \bar B \cap \bar C \subseteq X \subseteq A \cap C$

~~Разберемся, когда такое возможно: $A \cap (\bar B \cap \bar C) \subseteq A \cap C$~~

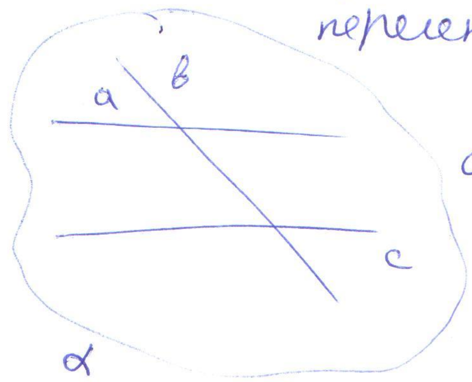
$\Leftrightarrow$ Ответ: $A \cap \bar B \cap \bar C \subseteq X \subseteq A \cap C$ при $A \cap \bar B \cap \bar C \subseteq A \cap C$

когда это условие м. быть выполнено?

N 5

1) Свойства ρ:

1. Рефлексивность: да (прямая имеет с собой общ. точку)
2. Иррефлексивность: нет
3. Симметричность: да (если a пересекает b, то b пересекает a)
4. Антисимметричность: нет
5. Транзитивность: нет



$a \parallel c$

$a \rho b,\ b \rho c \not\Rightarrow a \rho c$

2) $\rho \circ \rho = \{(x; z) \mid \exists y : x \rho y,\ y \rho z\}$ y — прямая, пересекающая x и z. Такая прямая всегда существует: достаточно взять точку из x и точку из z и провести через них y.

Т.о. $\forall x, z \in A : x \rho z \Rightarrow \rho$ ставит все прямые в отношение друг с другом.

тут что-то не так

Лист 3 Рубашкин Илья.

$$\rho \circ \rho^{-1} = \{(x;z) \mid \exists y \in A: \ x\rho^{-1}y, \ y\rho z\} =$$

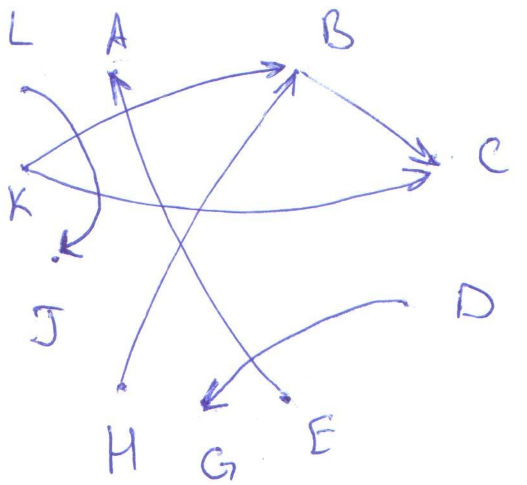
$$x\rho^{-1}y \Leftrightarrow y\rho x \overset{\text{симметричность}}{\Leftrightarrow} x\rho y$$

$$= \{(x;z) \mid \exists y: \ x\rho y, \ y\rho z\} = \rho\circ\rho$$ — см. предыдущую страницу.

3) ρ не является отношением эквивалентности, т.к. не обладает транзитивностью

4) ρ не является отношением порядка, т.к. обладает симметричностью и не обладает транзитивностью.

N 6



1) Свойства ρ:

1. Рефлексивность: нет $(A,A) \notin \rho$
2. Иррефлексивность: да
3. Симметричность: нет $(C,B) \notin \rho$
4. Антисимметричность: да
5. Транзитивность: нет, т.к. $H\rho B$, $B\rho C$, но $(H;C) \notin \rho$.

2) Для отношения частичного порядка, необходимы:
рефлексивность, антисимметричность и транзитивность.

Для рефлексивности нужно добавить <u>10 пар</u> вида (x,x)

Достроим отношение до транзитивного:

A

E	A
A	

B

K	C
H	B
B	

+ (H, B)

C

C	C
B	
K	
H	

D

D	D
	G

E

E	A

G

G	G
D	

H

H	B
	C

J

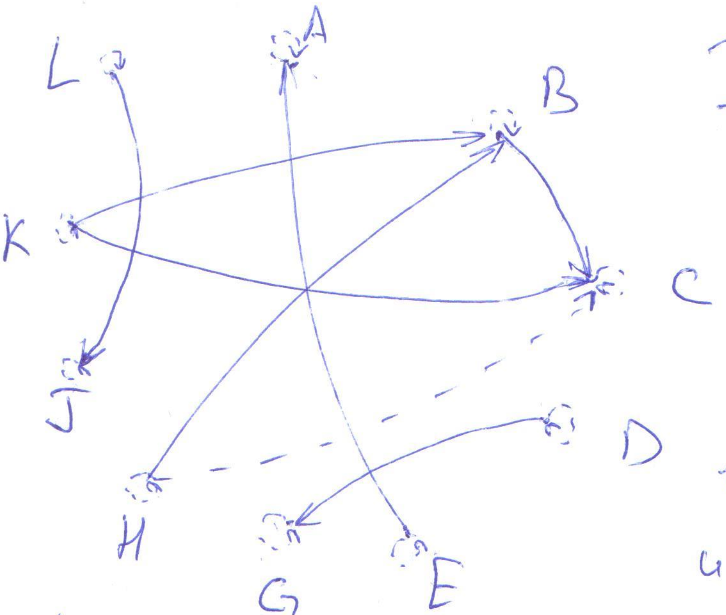
L	J
J	

K

K	K
	B
	C

L

L	L
	J



—— - пары исходного отношения

--- - добавленные пары.

Т.о. для получения отношения частичного порядка, нужно добавить 10 пар для рефлексивности и 1 для транзитивности

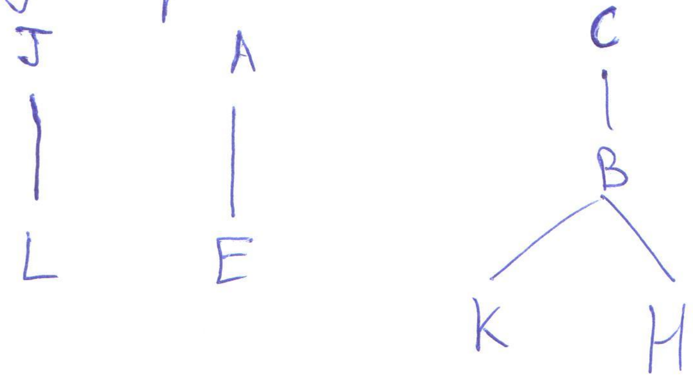
(Антисимметричность при этом сохраняется)

Итого: 11 пар.

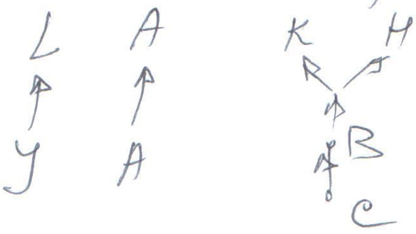
Рубашкин Илья

МИТ 4

Диаграмма Хассе:



наоборот надо..



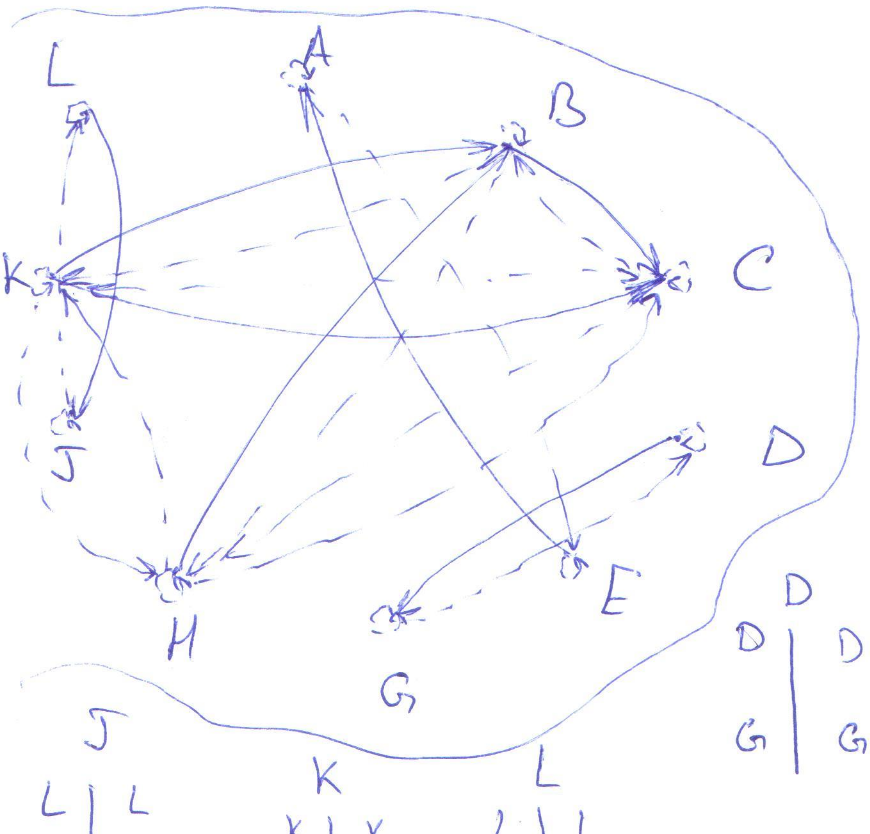
сама регулярно путаю и без стрелок.

3) Для того, чтобы получить отношения эквивалентности, необходимы: рефлексивность, симметричность и транзитивность.

Для рефлексивности добавим <u>10 пар</u> вида (x, x).

Для симметричности добавим <u>7 пар</u>:

$\{(C\,B), (G\,D), (A\,E), (B\,H), (B\,K), (C\,K), (J\,L)\}$



Транзитивность:

A

A	A
E	E

B

B	B
K	K
H	H
C	C

+ (K, H)
+ (H, K)
+ (H, C)
+ (C, H)

C

C	B
B	H
K	C
H	K

D

D	D
G	G

E

A	A
E	E

G

G	G
D	D

H

H	H
K	K
B	B
C	C

J

L	L
J	J

K

K	K
B	B
C	C
H	H

L

L	L
J	J

Т.о. для получения отношения эквивалентности нужно добавить 10 эл-ов для рефлексивности, 7 эл-ов для симметричности и 4 пары для транзитивности. Итого: $10+7+4=21$

У полученного отношения будет 4 класса эквивалентности, порожденных эл-ами:

1. $\{L, J\}$; 2. $\{A, E\}$ 3. $\{D, G\}$ 4. $\{B, C, H, K\}$

Исходное отношение можно достраивать до отношения эквивалентности, изменяя кол-во классов эквивалентности.

4 класса экв: 1 вар

3 класса экв: 6 вар (C_2^4)

2 класса экв: $4+6=10$ вар $(C_3^4+C_4^2)$

1 класс экв: 1 вар

Итого: $1+6+10+1=18$ вар-ов.

№4

~~Ρ∆σ не обладает~~ транзитивностью ~~всегда~~:

Пример 1: $\rho = \{(a,b), (b,c), (a,c)\}$,

$\sigma = \{(b,c), (c,d), (b,d)\}$

Тогда $(a,b) \in \rho \Delta \sigma$; $(b,c) \in \rho \Delta \sigma$, но

$(a,c) \notin \rho \Delta \sigma$

почему?!

вдруг

Рубашкин Илья

Лист 5

Пример 2:

$\rho = \{(a, b)\}$ ~~[illegible]~~

$\sigma = \{(b, a)\}$

2/3

Тогда $\gamma = \rho \Delta \sigma = \{(a, b), (b, a)\}$ – Обладает транзитивностью.

Ответ: $\rho \Delta \sigma$ может обладать транзитивностью, а может нет.

нужен пример, когда $\rho \Delta \sigma$ не транзитивно