1 Комплексные числа и полиномы

Классная работа

17.09.2021

№ 137

Вычислить $(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2})^{24}$

z $=(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2})^{24}=[1-(\frac{\sqrt{3}-i}{2})]^{24}=[cos(0)+isin(0)-cos(-\frac{\pi}{6})-isin(-\frac{\pi}{6})]^{24}$
$=[cos(0)-cos(-\frac{\pi}{6})+i(sin(0)-sin(-\frac{\pi}{6}))]^{24}=$
$=[-2sin(-\frac{\pi}{12})sin(\frac{\pi}{12})+2isin(\frac{\pi}{12})cos(-\frac{\pi}{12})]^{24}$
z $=[-2sin(\frac{\pi}{12})(sin(-\frac{\pi}{12})-icos(-\frac{\pi}{12}))]^{24}$

$sin(-\frac{\pi}{12})-icos(-\frac{\pi}{12})$ = $-cos(\frac{5\pi}{12})$ - $isin(\frac{5\pi}{12})$

z = $[2sin(\frac{\pi}{12})(cos(\frac{5\pi}{12})+isin(\frac{5\pi}{12}))]^{24}$ = $2^{24}*sin(\frac{\pi}{12})^{24}(cos(10\pi)+isin(10\pi))$
$=2\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}^{24}$ $=(2-\sqrt{3})^{12}$

№ 554 b

f(x) = $(x-2)^4+4(x-2)^3+6(x-2)^2+10(x-2)+20$

1.1 НОД

Даны полиномы $f(x)$, $g(x)$. Если $f(x) \mod q(x) = 0$, то q(x) - делитель f(x)
НОД - наибольший общий делитель $f(x)$ и $g(x)$
$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$
$g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x)$
$r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x)$
...
$r_{k-1}(x) = r_k(x)q_{k+1}(x)$
НОД$(f(x), g(x)) = r_k(x)$

№ 577 a

НОД($x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$, $x^3 + x^2 - x - 1$)

$x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = x(x^3 + x^2 - x - 1) - 2x^2 - 3x - 1$
$(x^3 + x^2 - x - 1) = (2x^2 + 3x + 1)(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})$ - $\frac{3}{4}(x + 1)$
$(2x^2+3x+1) = (x+1)(2x+1)$ => НОД($x^4+x^3-3x^2-4x-1$, x^3+x^2-x-1) = x + 1

№ 577 c

НОД($x^6 + 7x^4 + 8x^3 + 7x + 7$, $3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - x$)

$x^6 + 7x^4 + 8x^3 + 7x + 7 = \frac{x}{3}(3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - x) - \frac{14}{3}x^4 + 7x^3 - \frac{14}{3}x + 7$
$3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - x = (2x^4 - 3x^3 + 2x - 3)(\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}) - \frac{x^3+1}{4}$
$2x^4 - 3x^3 + 2x - 3 = (x^3 + 1)(2x - 3)$
НОД($x^6 + 7x^4 + 8x^3 + 7x + 7$, $3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - x$) $= x^3 + 1$

ДЗ: 549c; 577e,f; 578c,d; 593c; 583a

Классная работа

20.09.2021

№ 578 а

Найдем δ:
$x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2 = (x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2) + x^3 - 2x$
$x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = (x+1)(x^3 - 2x) + x^2 - 2$
$x^3 - 2x = x(x^2 - 2)$
$\delta = \mathrm{GCD}<x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2,\, x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2> = x^2 - 2$

$r_2 = g - r_1 q_2 \quad | \quad r_1 = f - gq_1 => r_2 = g - q_2(f - gq_1) = -q_2 f + (1 + q_1 q_2) g$

$x^2 - 2 = -(x+1) f_1 + (x+2) f_2$

№ 583 а

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-4)(x^2 - 2x + 1) + 3x - 4$
$x^2 - 2x + 1 = (\frac{1}{3}x - \frac{2}{9})(3x - 4) + \frac{1}{9}$
$3x - 4 = (3x - 4)(1)$
$\mathrm{GCD}<x^3 - 6x^2 + 12x - 8,\, x^2 - 2x + 1> = 1$

$1 = 9(x^2 - 2x + 1) - (3x - 2)(3x - 4) = 9(x-1)^2 -$
$- (3x - 2)((x-2)^3 - (x-4)(x-1)^2) = (x-1)^2(9 + (3x-2)(x-4)) -$
$- (x-2)^3(3x-2) = (x-1)^2(3x^2 - 14x + 17) - (x-2)^3(3x-2)$

1.2 Формула Виета. Разложение дроби на простейшие

20.09.2021

$f_n = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + .. + a_n$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = -a_1 \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + ... + \alpha_{n-1}\alpha n = a_2 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + ... + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -a_3 \\ .... \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n = (-1)^n a_n \end{cases} \tag{1}$$

Пример

5, 2 - корни 1 кратности, 3 - 2 кратности. Найти $f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$

1. 5-2+3+3=$-a_1$ => $a_1 = -9$
2. $5(-2) + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 17 = a_2$
3. $a_3 = 33$
4. $a_4 = -90$

$f(x) = x^4 - 9x^3 + 17x^2 + 33x - 90$

$\frac{P(x)}{Q(x)}, \quad degP < degQ$

$Q(x) = (x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2}...(x - \alpha_s)^{k_s}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{l_2}...(x^2 + p_mx + q_m)^{l_m}$

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + ... + \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{A_{21}}{x-\alpha_2} + \frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2} + ... + \frac{A_{2k_2}}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + ... + \frac{A_{s_{k_s}}}{(x-\alpha_s)^{k_s}} + \frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + ... + \frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + ... + \frac{B_{ml_m}x+C_{ml_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{l_m}}$

Пример 1

$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2+x+1}$
$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{(A+B)x^2+x(A-B+C)+(A-C)}{x^3-1} \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A-C=1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=-\frac{2}{3} \end{cases} \tag{2}$$

№ 625c

$\frac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2} + \frac{F}{x-2}$
$A(x-1)^2(x+1)^2(x-2) + B(x-1)(x+1)^2(x-2) + C(x+1)^2(x-2) +$
$+D(x-1)^3(x+1)(x-2)+E(x-1)^3(x-2)+F(x-1)^3(x+1)^2 = 5x^2+6x-23$

$$\begin{cases} x=1: & -4C=-12 \\ x=-1: & 24E=-24 \\ x=2: & 9F=9 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} C=3 \\ E=-1 \\ F=1 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x=0: & -2A+2B-2C+2D+2E-F=-23 \leftrightarrow -A+B+D=-7 \\ x^5: & A+D+1=0 \\ x^4: & -2A+B-4D=2 \end{cases} \leftrightarrow \tag{4}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} A+D=-1 \\ -2A+B-4D=2 \\ -A+B+D=-7 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-4 \\ D=-2 \end{cases} \tag{5}$$

$\frac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3} - \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-2}$

2 Матрицы

27.09.2021

$A_{m\times n} \qquad a_{ij}$
$A_{n\times n}$ - квадратная
$E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная
$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ - нулевая
$D_{n\times n} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ - диагональная

2.1 Операции над матрицами

$C_{m\times n} = A_{m\times n} \pm B_{m\times n}, \qquad c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$
$C_{m\times n} = A_{m\times p} \cdot B_{p\times n}$
$C = \alpha \cdot A, \qquad c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$
$A^T_{m\times n} \to A_{n\times n}, \qquad a_{ij} \to a_{ji}$

2.2 Определитель матрицы

$|A|$ или $det(A)$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_32 \cdot a_{13}) -$
$-(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33})$

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}} & a_1 & b_1 & \\ & & & a_2 & b_2 & \\ & & & a_3 & b_3 & \end{array}$$

№ 220c

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

№ 223a

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$$

№ 220c

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 6 & 12 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}$$

№ 231c

$$\begin{vmatrix} sin(\alpha) & cos(\alpha) \\ -cos(\alpha) & sin(\alpha) \end{vmatrix} = sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

№ 232a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 + 1 - (-1) = 1$$

№ 232e

$$\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-(1+i)(1-i)-(-i^2) = 1-2-1 = -2$$

№ 273

$$\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix} = \cancel{13547 \cdot 28423} + 1354700 - \cancel{28423 \cdot 13547} - 2842300 =$$
$$= 1354700 - 2842300 = -1487600$$

№ 284

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = 3x^2y + 3xy^2 - (x+y)^3 - x^3 - y^3 = -2(x^3+y^3)$$

ДЗ: 220df, 274, 221, 224, 232cdf

2.2.1 Свойства определителей

1. $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B) \quad\implies\quad det(A^n) = det(A)^n$
2. $det(A^T) = det(A)$
3. $if\ \exists$ 0 - строка(столбец) $\implies$ $det(A) = 0$
4. $if\ \exists$ две пропорциональные строки(столбца) $\implies$ $det(A) = 0$
5. При перестановке строк знак определителя меняется
6. $\alpha \cdot a_i$ (строка/столбец) $\implies$ $det = \alpha \cdot det(A)$
7. $if\ a_i = alpha \cdot a_j + \beta \cdot a_k \implies det(A) = 0$
8. Определитель не изменится, если к a_i прибавить $\alpha \cdot a_j$

9. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & ... & b_n+c_n \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ c_1 & c_2 & ... & c_n \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2.2.2 Подсчет определителя

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \Delta_{12,12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \qquad \Delta_{23,23} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad ...$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

$$detA = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

2.2.3 Примеры

№ 273

I Способ

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1)^{5+2} \cdot$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{5+4}\cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -7\cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -8 & 3 \\ 0 & 10 & -2 & -1 \end{vmatrix} -$$

$$- 3 \cdot [3 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} - 5 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}] = 28 \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 4 & -8 & 3 \\ 10 & -2 & -1 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 15 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= 28\cdot(30+40-400+4)-9\cdot(-2+6+1+12)+15\cdot(36-1-4-6+4-6) = -9128-153+225 = -1069$ - Ошибка в вычислениях!

II Способ

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{4+3+1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+4+1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -3 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+4+1+4} \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1069$$

2.3 Собственные числа матрицы

22.10.2021

$\Delta_n = \alpha \cdot \Delta_{n-1} + \beta \cdot \Delta_{n-2}$
$\Delta_2 = \lambda^2 - 1 \qquad \Delta_1 = \lambda \qquad \Delta_0 = 1$
$G(z) = \frac{1+\lambda z - \lambda z}{1-\lambda z+z^2} = \frac{1}{1-\lambda z+z^2}$ - *производящая функция*
$1 - \lambda z + z^2 = 0 \implies z_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2-4}}{2}$
$\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4} = (cos(\varphi) + isin(\varphi)) \leftrightarrow \cancel{\lambda^2} - 4 = 4(cos(2\varphi) + isin(2\varphi)) - 4\lambda(cos(\varphi) + isin(\varphi)) + \cancel{\lambda^2}$
$cos^2(\varphi) - sin^2(\varphi) + 2sin(\varphi)cos(\varphi) - \lambda cos(\varphi) - \lambda isin(\varphi) = -1 \leftrightarrow \lambda = 2cos(\varphi)$

$$G(z) = \frac{A}{z_1 - z} + \frac{B}{z_2 - z} = \frac{A(z_2-z)+B(z_1-z)}{(z_1-z)(z_2-z)}$$

$$\begin{cases} z = z_1: \quad A(z_2 - z_1) = 1 \\ z = z_2: \quad B(z_1 - z_2) = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A(-2isin(\varphi)) = 1 \\ B(2isin(\varphi)) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{i}{2sin(\varphi)} \\ B = -\frac{i}{2sin(\varphi)} \end{cases}$$

$\frac{1}{1-\alpha \cdot z} = \sum^{+\infty} (\alpha z)^n \implies$
$\frac{A}{z_1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z_1}z} = \frac{A}{z_1} \cdot \sum^{+\infty} (\frac{1}{z_1})^n \cdot z^n = A \cdot \sum^{+\infty} \frac{1}{z_1^{n+1}} \cdot z^n$
$G(z) = \frac{\frac{A}{z_1}}{1-\frac{1}{z_1}\cdot z} + \frac{\frac{B}{z_2}}{1-\frac{1}{z_2}\cdot z} = \frac{i}{2sin(\varphi)} \cdot \sum^{+\infty} [\frac{1}{(cos(\varphi)+isin(\varphi))^{n+1}} - \frac{1}{(cos(\varphi)-isin(\varphi))^{n+1}}] \cdot z^n \implies \Delta_n = \frac{i}{2sin(\varphi)} \cdot [(cos(\varphi) - isin(\varphi))^{n+1} - (cos(\varphi) + isin(\varphi))^{n+1}] = \frac{i}{2sin(\varphi)} \cdot (-2sin((n+1)\varphi) = \frac{\sin((n+1)\varphi)}{sin(\varphi)}$
$\Delta_n = \frac{sin((n+1)\varphi)}{sin(\varphi)} = 0 \leftrightarrow (n+1)\varphi = \pi \cdot k, \qquad k \in \mathbb{Z}$
$\lambda = 2cos(\frac{\pi k}{n+1}), \qquad k \in \mathbb{Z}$

2.4 Системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ & ... & \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

$Ax = 0$ - *однородная система*
$Ax = b$ - *неоднородная система*

2.5 Решение систем

1. $Ax = b, \qquad A_{[n\times n]} \implies X = A^{-1}b$
2. *Крамер*
   $Ax = b, \qquad A_{[n\times n]}$
   $\Delta = det(A)$
   $\Delta_i = \Delta$, где вместо i-го столбца - столбец b
   $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$
3. *Гаусс*
   $Ax = b, \qquad A_{[m\times n]}$
   $(A|b) \to$ Трапецевидный вид
   Если нулевой строке соответствует ненулевой элемент в строке b, то решений нет
   Переписать систему в обычном виде, выразить одну переменную через все остальные
   $X_{\text{неоднородная}} = X_{\text{частное}} + X_{\text{общее}}$

2.6 Примеры

№ 449b

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \to_{S_2 - 2S_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Система разрешима

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - 2x_4 = \frac{1}{3}c_3 - c_4 \\ x_2 = \frac{1}{3}(-4c_3 - 3c_4) \\ x_3 = c_3 \\ x_4 = c_4 \end{cases}$$

$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c_3 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot c_4$ - *общее решение в параметрическом виде*

$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ - *фундаментальная система решений (только при параметрах)*

Вектор без параметра - частное решение

2.7 Собственный вектор матрицы

22.10.2021

$Ax = \lambda X$
$(A - \lambda E)X = 0$

№ 1032 e

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & -3 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(5-\lambda) + 6 + 6 - (-3\lambda) - 2(5-\lambda) -$$
$$- 6(\lambda - 1) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 0$$
$\lambda_{1,2,3} = 2$

$\lambda = 2$:
$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot X = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2c_2 - c_3 \\ x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \end{cases}$$

$$X = c_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ – ФСР, собственные векторы

№ 1032 j

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

$\lambda = \pm 1$

- $\lambda = 1:$

  $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = 0$$

  $$X = c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -1:$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -c_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = c_3 \end{cases}$$

$$X = c_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

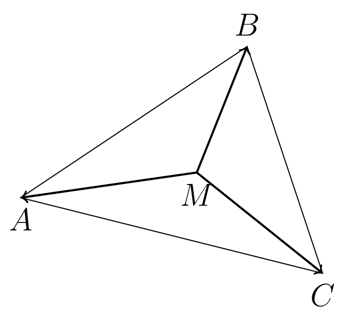
Собственные векторы: $\lambda = 1:$

3 Геометрия

3.1 Векторы

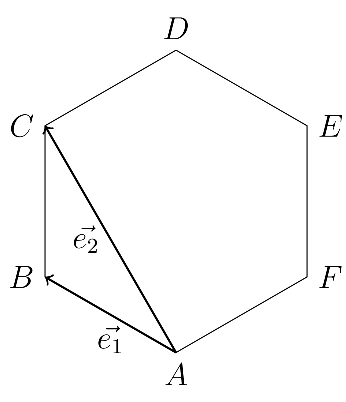
Вектор: $\vec{AB}$, $\quad |\vec{AB}|-$ длина вектора
$\vec{a}$, $\vec{b}$ - коллинеарны, если лежат на одной или параллельных прямых
$\vec{a}$, $\vec{b}$ - компланарны, если лежат в одной или параллельных плоскостях

№ 9



Найти точку M: $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=\vec{0}$
$\vec{MA}=\vec{AB}-\vec{MB}$
$\vec{MC}=\vec{CB}-\vec{MB}$
Тогда: $\vec{AB}+\vec{CB}-3\vec{MB}=\vec{0}$
$\vec{MB}=\frac{\vec{AB}+\vec{CB}}{3}$

№ 23



$\vec{AB}=e_1=(1,0)$

$\vec{AC} = e_2 = (0,1)$
$\vec{BC} = \vec{e_2} - \vec{e_1} = (-1,1)$
$\vec{CD} = \vec{AD} - \vec{AC} = 2\vec{BC} - \vec{AC} = (-2,1)$
$\vec{DE} = -\vec{e_1} = (-1,0)$
$\vec{EF} = -\vec{BC} = (1,-1)$
$\vec{FA} = -\vec{CD}$

01.11.2021

№ 29

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – Произвольные три вектора
α, β, γ
$\vec{v_1} = \alpha\vec{a} - \beta\vec{b}, \quad \vec{v_2} = \gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}, \quad \vec{v_3} = \beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$ – Доказать компланарность
Компланарность $\leftrightarrow$ Линейная зависимость
$\gamma(\alpha\vec{a}-\beta\vec{b})+\beta(\gamma\vec{b}-\alpha\vec{c})+\alpha(\beta\vec{c}-\gamma\vec{a}) = \vec{0} \implies \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$–линейно зависимы $\implies$

$\implies \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ – Компланарны

№ 30

$\vec{a} = (2,5,14), \quad \vec{b} = (14,5,2)$
Проекция $\vec{a}$ на $Oxy \parallel \vec{b}$ -?

$\vec{d} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$
$d_z = 0$, т. к. $d \subset Oxy \implies d_z = a_z + \lambda b_z = 14 + 2\lambda = 0 \implies \lambda = -7 \implies$
$\implies \vec{d} = (-96, -30, 0)$

№ 28

Установить, в каком случае тройки векторов будут линейно зависимы. Если они линейно зависимы - представить третий вектор как комбинацию двух.

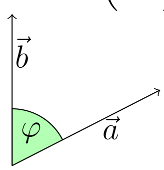
1. $\vec{a} = (5, 2, 1), \quad \vec{b} = (-1, 4, 2), \quad \vec{c} = (-1, -1, 6)$
   $$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$
   Найдем ранг матрицы А:
   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{22}{5} & \frac{11}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & 0 \end{array}\right) \implies \alpha = \beta = \gamma = 0 \implies$$
   $\implies \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}-$ линейно независимы

2. $\vec{a} = (6, 4, 2), \quad \vec{b} = (-9, 6, 3), \quad \vec{c} = (-3, 6, 3)$
   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & 0 \\ -9 & 6 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{линейно зависимы}$$
   $$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{2}{3} \\ \gamma = -1 \end{cases} - \text{частное решение} \implies \vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

3.1.1 Произведение векторов

1. Умножение на число
   $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{a}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

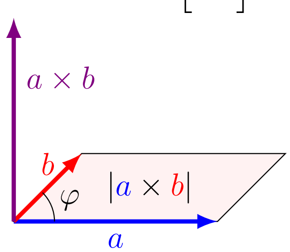
2. Скалярное произведение
   $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\varphi)$

   В декартовой системе координат: $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \implies$
   $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$
   Свойства

   - $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$
   - $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$
   - $(\vec{a}, \alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}, \vec{b})$

3. Векторное произведение
   $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$

   1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin(\varphi)$
   2. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{c}$
   3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка

   В декартовой системе координат: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

Свойства

- $[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}]$
- $[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}] = [\vec{a},\vec{b}] + [\vec{a},\vec{c}]$
- $[\vec{a},\alpha\vec{b}] = \alpha[\vec{a},\vec{b}]$

4. Смешанное произведение
   $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\times(\vec{b}\cdot\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$
   В декартовой системе координат: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$

5. Двойное векторное произведение
   $\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{c})$

№ 131

$\triangle ABC$, длины сторон $= 1$
$(\vec{AB},\vec{BC}) + (\vec{BC},\vec{CS}) + (\vec{CA},\vec{AB}) = 1\cdot 1\cdot\cos(120) + 1\cdot 1\cdot\cos(120) +$
$+ 1\cdot 1\cdot\cos(120) = -\frac{3}{2}$