Алгебра и геометрия: домашние задания

Семестр 1 (осень 2021)

Преподаватель: Балыкина Ю. Е.

Рубашкин Илья Михайлович
Email: st095290@student.spbu.ru

Задача 220(d).

Умножить матрицы: d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2+3 & -2-4+6 & -4-8+12 \\ -2-4+6 & -4-8+12 & -8-16+24 \\ -3-6+9 & -6-12+18 & -12-24+36 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 220(f).

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$

Решение:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & 2ac+b^2+ \\ a+b+c & 2ac+b^2 & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

Задача 274.

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 41 & 427 & 327 \\ 169 & 543 & 443 \\ -57 & 721 & 621 \end{vmatrix} = 6 \cdot (41 \cdot 543 \cdot 621 + 427 \cdot 443 \cdot (-57) + 327 \cdot$$
$$169 \cdot 721 - (-57) \cdot 543 \cdot 327 - 169 \cdot 427 \cdot 621 - 41 \cdot 721 \cdot 443) = -29\,400\,000$$

Задача 221.
Выполнить действия:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

Решение:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4+3 & 6+1 & 2+2 \\ 6+3 & 3+1 & 3 \\ 3 & 1+2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^2\right)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}^2 =$
$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

d) Покажем с помощью метода матиматической индуции, что $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

База индукции(n=1): $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - выполнено

Индукционный переход: Пусть для некоторого $k = n \in \mathbb{N}$ выполнено утверждение $a_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Докажем его для k=n+1: $a_n + 1 = a_n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - Выполнено

Таким образом: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 224.

Вычислить $A \cdot A'$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Решение:

$$A \cdot A' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 21 \\ 21 & 27 \end{pmatrix}$$

Задача 232(c).

Вычислить определитель: c) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$

Решение:

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix} \underset{\substack{S_2+S_1 \\ S_3+S_1}}{=} \begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & 2a & a+x \\ 0 & 0 & a+x \end{vmatrix} = a \cdot 2a \cdot (a+x) = 2a^2(a+x)$$

Задача 232(d).

Вычислить определитель: d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \underset{\substack{S_2-S_1 \\ S_3-S_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$$

Задача 232(f).

Вычислить определитель: f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} \underset{\substack{S_2-S_1 \\ S_3-S_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \omega-1 & \omega-1 \\ 0 & \omega^2-1 & \omega-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega-1 & \omega-1 \\ \omega^2-1 & \omega-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\omega-1)^2 - (\omega-1) \cdot (\omega^2-1) = -\omega + 2\omega^2 - \omega^3$$

Задача 284.

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = 3xy(x+y) - (x+y)^3 - x^3 - y^3 = -2(x^3+y^3)$$

Задача 256(c).

Вычислить определитель: c) $\begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & 2 & a & \dots & a \\ 0 & 0 & 3 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & 2 & a & \dots & a \\ 0 & 0 & 3 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

Задача 276.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \underset{\substack{S_2 - S_1 \\ S_3 - S_1 \\ S_4 - S_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} \underset{\substack{S_3 - 2S_2 \\ S_4 - 3S_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 1$$

Задача 295.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\begin{vmatrix}1&2&2&\dots&2\\2&2&2&\dots&2\\2&2&3&\dots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\2&2&2&\dots&n\end{vmatrix} \underset{\substack{S_3-S_2\\ \dots\\ S_n-S_2}}{=} \begin{vmatrix}1&2&2&2&\dots&2\\2&2&2&2&\dots&2\\0&0&1&0&\dots&2\\0&0&0&2&\dots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\dots&n-2\end{vmatrix} \underset{S_2-2S_1}{=} \begin{vmatrix}1&2&2&2&\dots&2\\0&-2&-2&-2&\dots&-2\\0&0&1&0&\dots&2\\0&0&0&2&\dots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\dots&n-2\end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-2)\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-2) = -2(n-2)!$$

Задача 323.

$$\begin{vmatrix}1+a_1&1&1&\dots&1\\1&1+a_2&1&\dots&1\\1&1&1+a_3&\dots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\dots&1+a_n\end{vmatrix}$$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix}1+a_1&1&1&\dots&1\\1&1+a_2&1&\dots&1\\1&1&1+a_3&\dots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\dots&1+a_n\end{vmatrix} \underset{\substack{S_2-S_1\\ \dots\\ S_{n-1}-S_n}}{=} \begin{vmatrix}1+a_1&1&1&\dots&1&1\\0&a_2&1&\dots&0&-a_n\\0&0&a_3&\dots&0&-a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\\0&0&0&\dots&a_{n-1}&-a_n\\1&1&1&\dots&1&1+a_n\end{vmatrix} \underset{S_n-S_1}{=}$$

$$= \begin{vmatrix}1+a_1&1&1&\dots&1&1\\0&a_2&0&\dots&0&-a_n\\0&0&a_3&\dots&0&-a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\\0&0&0&\dots&a_{n-1}&-a_n\\-a_1&0&0&\dots&0&a_n\end{vmatrix} = (1+a_1)\cdot \underbrace{\begin{vmatrix}a_2&0&\dots&0&-a_n\\0&a_3&\dots&0&-a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\\0&0&\dots&a_{n-1}&-a_n\\0&0&\dots&0&a_n\end{vmatrix}}_{a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n} +$$

$$+(-1)^{n+1}\cdot a_1\cdot \begin{vmatrix}1&1&\dots&1&1\\a_2&0&\dots&0&-a_n\\0&a_3&\dots&0&-a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\\0&0&\dots&a_{n-1}&-a_n\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&1&\dots&1&1\\a_2&0&\dots&0&-a_n\\0&a_3&\dots&0&-a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\\0&0&\dots&a_{n-1}&-a_n\end{vmatrix} \underset{S_2-a_2S_1}{=} \begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\0&-a_2&\dots&-a_2&-a_n-a_2\\0&a_3&\dots&0&-a_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&-a_n\\0&0&\dots&a_{n-1}&-a_n\end{vmatrix} \underset{S_3+S_2\frac{a_3}{a_2}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -a_2 & -a_2 & \dots & -a_2 & -a_n - a_2 \\ 0 & 0 & -a_3 & \dots & -a_3 & -\frac{a_n a_2 + a_n a_3 + a_2 a_3}{a_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \end{vmatrix} \underset{S_4 + S_3 \frac{a_4}{a_3}}{=} \dots = $$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -a_2 & \dots & -a_2 & -(a_n + a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -a_{n-2} & -\frac{a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-2} + \ldots + a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_n}{a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-4} \cdot a_{n-3}} \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \end{vmatrix} \underset{S_n + \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} S_{n-1}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -a_2 & \dots & -(a_n + a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{\sum\limits_{2<=i_1<=\ldots<=i_{n-2}<=n} a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_{n-2}}}{a_2 \cdot \ldots a_{n-1}} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot a_2 \cdot \ldots a_{n-2} \cdot \frac{\sum\limits_{2<=i_1<=\ldots<=i_{n-2}<=n} a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_{n-2}}}{a_2 \cdot \ldots a_{n-1}} =$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot \sum_{2<=i_1<=\ldots<=i_{n-2}<=n} a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_{n-2}}$$

$$\Delta = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n + a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} + a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_n + \ldots + a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Задача 306.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} \underset{S_1 - \alpha S_2}{=} -\alpha \cdot \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} \underset{S_1 - \alpha S_3}{=}$$

$$= (-\alpha)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha & \alpha\beta \\ 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot (-\alpha)^{n-2} \underset{S_1 - \alpha S_n}{=} (-\alpha)^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \cancel{(-1)^{n-1}} \cdot \alpha \cdot \cancel{(-1)^{n-1}} \cdot \alpha^{n-1} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1} = \alpha^n$$
