Домашняя работа №9 Дата: 28.10.2021

Задача 410(d).

Обратить матрицу: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & -5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_1 : R_1 - 3R_2 \\ R_2 : R_2 - 3R_3 \\ R_3 : R_3 - 2R_4}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -11 & 16 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[\substack{R_1 : R_1 + 11R_3 \\ R_2 : R_2 + 7R_4}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 16 & 1 & -3 & 11 & -22 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 : R_1 - 16R_4]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 410(f).

Обратить матрицу: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 : R_2 - R_3 \\ R_3 : R_3 - R_4 \\ R_4 : R_4 - R_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[R_4 : R_4 + R_2 + 2R_3]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 : \frac{R_2}{2} \\ R_3 : \frac{R_3}{2} \\ R_4 : -\frac{R_4}{4}}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[\substack{R_1 : R_1 - R_2 - 2R_3 - R_4 \\ R_2 : R_2 + R_3 + R_4 \\ R_3 : R_3 + R_4}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 416.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Решение:

Задача 442(b).

Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_1 : R_1 - 2R_2 \\ R_3 : R_3 - 11R_2 \\ R_4 : R_3 - 2R_2}]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 12 & 16 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 : R_3 - 4R_1 \\ R_4 : R_4 + R_1 \\ R_1 \leftrightarrow R_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг данной маттрицы: 2

Задача 442(c).

Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_4 : R_4 - R_1 - 2R_2 - 3R_3 \\ R_5 : R_5 - 4R_1 - 5R_2 - 6R_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг данной маттрицы: 3

Задача 1033(b).

Найти собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$det(A-\lambda E) = 0 \leftrightarrow \Delta_n = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ -1 & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-1}} -$$

$$- \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \Delta_{n-1} + \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ -1 & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-2}} = -\lambda \cdot \Delta_{n-1} + \Delta_{n-2}$$

$G(z) = \Delta_0 + z \cdot \Delta_1 + z^2 \cdot \Delta_2 + \dots$ - производящая функция последовательности $\{\Delta_i\}$

$G(z) = \frac{1+\lambda z - \lambda z}{1+\lambda z - z^2} = \frac{1}{1+\lambda z - z^2}$

$z = cos(\phi) + isin(\phi)$

$1 + \lambda z - z^2 = 0 \implies \lambda = z - \frac{1}{z} = cos(\phi) + isin(\phi) - (cos(\phi) - isin(\phi)) = 2isin(\phi)$

$z_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2+4}}{-2} = cos(\phi) \pm isin(\phi)$

$\frac{A}{z_1-z}+\frac{B}{z_2-z}=\frac{1}{1+\lambda z-z^2} \leftrightarrow A(z_2-z)+B(z_1-z)=1 \implies \begin{cases} z=z_1:\ A(z_2-z_1)=1 \\ z=z_2:\ B(z_1-z_2)=1 \end{cases} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{-2isin(\phi)}=\frac{i}{2sin(\phi)} \\ B=\frac{1}{2isin(\phi)}=-\frac{i}{2sin(\phi)} \end{cases}$

$$G(z)=\frac{\frac{A}{z_1}}{1-\frac{z}{z_1}}+\frac{\frac{B}{z_2}}{1-\frac{z}{z_2}}=\frac{i}{2sin(\phi)\cdot z_1}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left[z^n\cdot(\tfrac{1}{z_1})^n\right]+\frac{-i}{2sin(\phi)\cdot z_2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left[z^n\cdot(\tfrac{1}{z_2})^n\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{i}{2sin(\phi)}z^n\cdot((cos(\phi)+isin(\phi))^{-(n+1)}-(cos(\phi)-isin(\phi))^{-(n+1)})\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[z^n\cdot\frac{i}{2sin(\phi)}\cdot(\cancel{cos((n+1)\phi)}-isin((n+1)\phi)-\cancel{cos((n+1)\phi)}-isin((n+1)\phi))\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[z^n\cdot\frac{sin((n+1)\phi)}{sin(\phi)}\right] \implies \Delta_n=\frac{sin((n+1)\phi)}{sin(\phi)}$$

$\Delta_n=0 \leftrightarrow sin((n+1)\phi)=0 \leftrightarrow \phi=\frac{\pi k}{n+1},\ k\in\mathbb{Z} \implies \lambda=2isin(\phi)=2isin(\frac{\pi k}{n+1})$

Задача 1034.

Найти собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$det(A-\lambda E)=0 \leftrightarrow \Delta_n=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\Delta_n=-\lambda\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-1}}-\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$= -\lambda\Delta_{n-1} - \underbrace{\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-2}} = -\lambda\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$

$G(z) = \Delta_0 + \Delta_1 z + \Delta_2 z^2 + \dots$ - производящая функция последовательности $\{\Delta_i\}$

$G(z) = \frac{1+z(1-\lambda+\lambda)}{1+\lambda z+z^2} = \frac{1-z}{1+\lambda z+z^2}$

$z = cos(\phi) + isin(\phi)$

$1 + \lambda z + z^2 = 0 \implies \lambda = -(z + \frac{1}{z}) = -(cos(\phi) + isin(\phi) + cos(\phi) - isin(\phi)) =$

$= -2cos(\phi)$

$z_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2-4}}{2} = \frac{2cos(\phi) \pm 2isin(\phi)}{2} = cos(\phi) \pm sin(\phi)$

$G(z) = \frac{A}{z_1-z} + \frac{B}{z_2-z} = \frac{1-z}{1+\lambda z+z^2} \leftrightarrow A(z_2 - z) + B(z_1 - z) = 1 - z \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \begin{cases} z = z_1 : \ A(z_2 - z_1) = 1 - z_1 \\ z = z_2 : \ B(z_1 - z_2) = 1 - z_2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{cos(\phi)-1+isin(\phi)}{2isin(\phi)} \\ B = \frac{1-cos(\phi)+isin(\phi)}{2isin(\phi)} \end{cases}$

Задача 1035.

Найти собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ y & 0 & x & \dots & x \\ y & y & 0 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:
