

# 1 Предел последовательности

## № 62

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0, \quad |q| < 1$$

• **Случай  $q = 0$  очевиден**

• **Разберем случай  $q \neq 0$ :**

Т. к.  $|q| \in (0; 1)$ , то  $|q| = \frac{1}{d+1}$ , где  $d > 0$ ; Тогда  $nq^n = \frac{n}{(1+x)^n}$

Заметим, что  $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots > \frac{n(n-1)}{2}x^2$

Таким образом:  $|nq^n| < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}x^2} = \frac{2}{(n-1)x^2} < \epsilon \quad (\epsilon > 0) \Leftrightarrow n > 1 + \frac{2}{\epsilon x^2}$

Значит по определению предела:  $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$

## № 63

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad (a > 0)$$

По определению предела нужно доказать следующее неравенство:  
 $|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon$

• **Рассмотрим случай  $a > 1$**

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon, \quad \epsilon > 0 \Leftrightarrow |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \epsilon.$$

Так как  $a > 1$ , то  $a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$ . Опустим модуль в неравенстве.

$$a^{\frac{1}{n}} < 1 + \epsilon \Leftrightarrow (1 + \epsilon)^n > a$$

$$(1 + \epsilon)^n = 1 + \epsilon n + \dots > \epsilon n > a \Leftrightarrow n > \frac{a}{\epsilon}$$

Значит при  $a > 1$  неравенство верно.

• **Случай  $a = 1$  очевиден**

- Рассмотрим случай  $a < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{a}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1$$

Так как  $1/a > 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$  (1 пункт)

## № 58

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0, a > 1$$

Рассмотрим пример №61:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b^n} = 0, b > 1 \Rightarrow \frac{1}{b^n} < \frac{n}{b^n} < 1$  (\*), в окрестности  $+\infty$

Пусть  $b = a^p, p > 0 \Rightarrow p \ln a = \ln b$

(\*):  $\frac{1}{a^{pn}} < \frac{n}{a^{pn}} < 1 \Leftrightarrow \log_a(\frac{1}{a^{pn}}) < \log_a(\frac{n}{a^{pn}}) < 1 \Leftrightarrow 0 < \log_a(\frac{a^{pn}}{n}) < \log_a(\frac{1}{a^{pn}})$   
 $\Leftrightarrow 0 < pn (1 < n < a^{pn} \Leftrightarrow 0 < \log_a n < \log_a(a^{pn}) = pn)$

Разделим все на  $n$ :  $1 < \frac{\log_a(a^{pn})}{n} < p$

=====

## № 65

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

При  $n \geq 2$ :  $\sqrt[n]{n} > 1$

$n = (\sqrt[n]{n})^n = [1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n = 1 + n((\sqrt[n]{n} - 1)) + \dots + (\sqrt[n]{n} - 1)^n >$   
 $\frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2$

$n > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \Leftrightarrow 0 < (\sqrt[n]{n} - 1)^2 < \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1} \rightarrow 0 \Leftrightarrow$

$1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{n-1} \rightarrow 1$

## № 66

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

Докажем, что  $n! > (\frac{n}{3})^n$  (\*) при  $n \rightarrow \infty$  методом математической индукции:

**База:**

$$n = 1: 1 > \frac{1}{3}$$

$$n = 2: 2! = 2 > \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

**Переход:** предположим, что (\*) верно. Тогда  $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$

$$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1) \left(\frac{n}{3}\right)^n$$

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < 3 \Leftrightarrow \left(\frac{n}{3}\right)^n > \frac{(n+1)^n}{3^{n+1}}$$

$$\text{Таким образом: } 0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{3}{n} \rightarrow 0$$

**№ 75**

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

**№ 76**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a$$

## 2 Предел функции

### 2.1 Область определения

$$y = f(x), x, y \in \mathbb{R}$$

ДЗ: 151 - 165

**№ 152**

$$y = \sqrt{3x - x^2}$$

$$D: 3x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$$

### Определение

Пусть  $x = a$  - внутренняя точка  $D(f) \leftrightarrow \exists \delta > 0: (a - \delta; a + \delta) \subset D(x)$   
Тогда  $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , если  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что  $\exists x \in (a - \delta; a + \delta)$   
 $\Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$

## 2.2 Замечательные пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = +\infty$$

## 2.3 Свойства пределов

1.  $\lim_{x \rightarrow a} [Af(x) + Bg(x)] = A \lim_{x \rightarrow a} f(x) + B \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} [Af(x)g(x)] = A \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$

*Если существуют два из трех пределов, то существует и третий, и справедливы свойства 1-3*

## 2.4 Примеры

№ 412

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x+11x^2+6x^3}{x}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} [6 + 11x + 6x^2] = 6$$

**№ 413**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^5 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 - 5x - 1}{x^5 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 5x^2 + 10x + 10}{1 + x^3} = 10$$

**№ 416**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{50}(2-\frac{3}{x})^{20}(3+\frac{2}{x})^{30}}{x^{50}(2+\frac{1}{x})} = \frac{2^{20}3^{30}}{2^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}$$

**№ 418**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x-5} = -\frac{1}{2}$$

**№ 419**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2 + 2x - 3)} = \frac{1+2}{1^2 + 2 + 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

**№ 422**

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x - 1)}{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x - 1)} = \frac{1 - (-1) - 1}{1 - (-1) + 1 - (-1) - 1} = \frac{1}{3}$$

**№ 424**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1} \stackrel{[0]}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{d(x^{100} - 2x + 1)}{dx}}{\frac{d(x^{50} - 2x + 1)}{dx}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{100x^{99} - 2}{50x^{49} - 2} = \frac{98}{48}$$

## 2.5 Иррациональные функции

№ 435

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = 1$$

24.09.2021

№ 437

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} \stackrel{[0]}{=} & \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)((\sqrt{1+2x}+3))} \\ & = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \frac{2 \cdot 4}{6} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

№ 440

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} \stackrel{[0]}{=} & \lim_{x \rightarrow 3} = \frac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(x^2-9)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} \\ & = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+13-4x-4}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} = -3 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} = \\ & -3 \cdot \frac{1}{6 \cdot (4+4)} = -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

№ 447

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}} \stackrel{[0]}{=} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x})((\sqrt[3]{27+x})^2 + \sqrt[3]{27+x}\sqrt[3]{27-x} + (\sqrt[3]{27-x})^2)}{x(1+2\sqrt[3]{x})((\sqrt[3]{27+x})^2 + \sqrt[3]{27+x}\sqrt[3]{27-x} + (\sqrt[3]{27-x})^2)} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(1+2\sqrt[3]{x})((\sqrt[3]{27+x})^2 + \sqrt[3]{27+x}\sqrt[3]{27-x} + (\sqrt[3]{27-x})^2)} = \frac{2}{3^2+3 \cdot 3+3^2} = \frac{2}{27} \end{aligned}$$

№ 455

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$$

Пусть  $x = t^{n \cdot m} \implies \sqrt[n]{x} = t^n \quad \sqrt[n]{x} = t^m$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^n-1}{t^m-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\cancel{(t-1)}(1+t+t^2+\dots+t^{n-1})}{\cancel{(t-1)}(1+t+t^2+\dots+t^{m-1})} = \frac{n}{m}$$

№ 457

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{(x+a)(x+b)}-x]^{[\infty-\infty]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}[(a+b)+\frac{ab}{x}]}{\cancel{x}(1+\sqrt{(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})})} =$$

$$= \frac{a+b}{2}$$

ДЗ: 436, 455.1, 456, 458

27.09.2021

№ 462

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})^{[\infty-\infty]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3+3x^2)^2-(x^2-2x)^3}{(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^5+(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^4\sqrt{x^2-2x}+\dots+(\sqrt{x^2-2x})^5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6+6x^5+9x^4-(x^6-6x^5+12x^4-8x^3)}{(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^5+(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^4\sqrt{x^2-2x}+\dots+(\sqrt{x^2-2x})^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\cancel{3}}(12-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2})}{x^{\cancel{3}}((\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}})^5+\dots+(\sqrt{1-\frac{2}{x}})^5)} =$$

$$= \frac{12}{6} = 2$$

## 2.6 Тригонометрические функции

① Замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

② Тригонометрические формулы

1.  $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
2.  $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
3.  $1 + \cos(x) = 2\cos^2(\frac{x}{2})$
4.  $1 - \cos(x) = 2\sin^2(\frac{x}{2})$
5.  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

№ 471

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x} = |t = 5x| = 5 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 5$$

№ 472

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$$
$$0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

№ 474

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \right]^2 = \frac{1}{2}$$



№ 475

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(x) - \sin(x)}{\sin^2(x)} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cdot \left(\frac{1 - \cos(x)}{\cos(x)}\right)}{\sin(x) \cdot \sin^2(x)} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \cdot \left[\frac{1}{2} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}}\right]^2 =$$

$$2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

№ 476

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(x)} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(x)} = 5 - 3 = 2$$

№ 480

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)tg\left(\frac{\pi x}{2}\right) \stackrel{[0 \cdot \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \frac{\sin(\frac{\pi x}{2})}{\cos(\frac{\pi x}{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\cos(\frac{\pi x}{2})} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\cos(\frac{\pi(x-1)}{2} + \frac{\pi}{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sin(\frac{\pi(x-1)}{2})} = \frac{2}{\pi} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi t}{2}}{\sin(\frac{\pi t}{2})} = \frac{2}{\pi}$$

№ 488

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin(a)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(a+2x) + \sin(a)) - 2\sin(a+x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin(a+x) \cdot \cos(x) - 2\sin(a+x)}{x^2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x)(\cos(x) - 1)}{x^2} = -2\sin(a) \cdot$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})^2 \cdot 4} = -\sin(a)$$

№ 493

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2(x) + \sin(x) - 1}{2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cancel{(2\sin(x) - 1)}(\sin(x) + 1)}{\cancel{(2\sin(x) - 1)}(\sin(x) - 1)} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3$$

01.10.2021

№ 499

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)} - \sqrt{1+\sin(x)}}{x^3} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - \sin(x)}{x^3(\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)} + \sqrt{1+\sin(x)})} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1 - \cos(x)}{x^2 \cos(x)} \right] = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}$$

№ 502

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x^2)}}{1 - \cos(x)} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2\sin^2\left(\frac{x^2}{2}\right)}}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)}{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \stackrel{1}{=} = \sqrt{2}$$

ДЗ: 503, 504, 505, 688, 689

### 3 Непрерывность функции

Опр. Пусть  $f(x), x \in \mathbb{X} \subseteq R$

$a \in \mathbb{X}$  - внутренняя точка, т. е.  $(a - x_0; a + x_0) \subset \mathbb{X}, x_0 > 0$

Тогда  $f(x)$  - непрерывная в точке  $x = a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

**№ 687**

$$y = \frac{x}{(x+1)^2} \quad x \neq -1 \implies x = -1 - \text{точка разрыва?}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{(x+1)^2} = - \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^2} = -\infty \implies x = -1 - \text{точка разрыва II рода}$$

**№ 690**

$$y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$$

Особые точки:  $x = 0, x = -1, x = 1$

$$y = \frac{\frac{1}{x(x+1)}}{\frac{1}{x(x-1)}} = \frac{x-1}{x+1}, \quad x \in \mathbb{D}(y)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+1} = -2 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = -\infty \implies x = -1 -$$

- точка разрыва II рода

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x+1} = -1 \implies x = 0 - \text{точка разрыва III рода}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = 0 \implies x = 1 - \text{точка разрыва III рода}$$

**№ 720**

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n}, \quad x \geq 0$$

$$y(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \implies x = 1 - \text{точка интереса}$$

$x = 1$  - точка разрыва I рода, т. к.  $\lim_{x \rightarrow 1-} y(x) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1+} y(x) = 0$

**3.1 Исследование функций. Построение графиков**

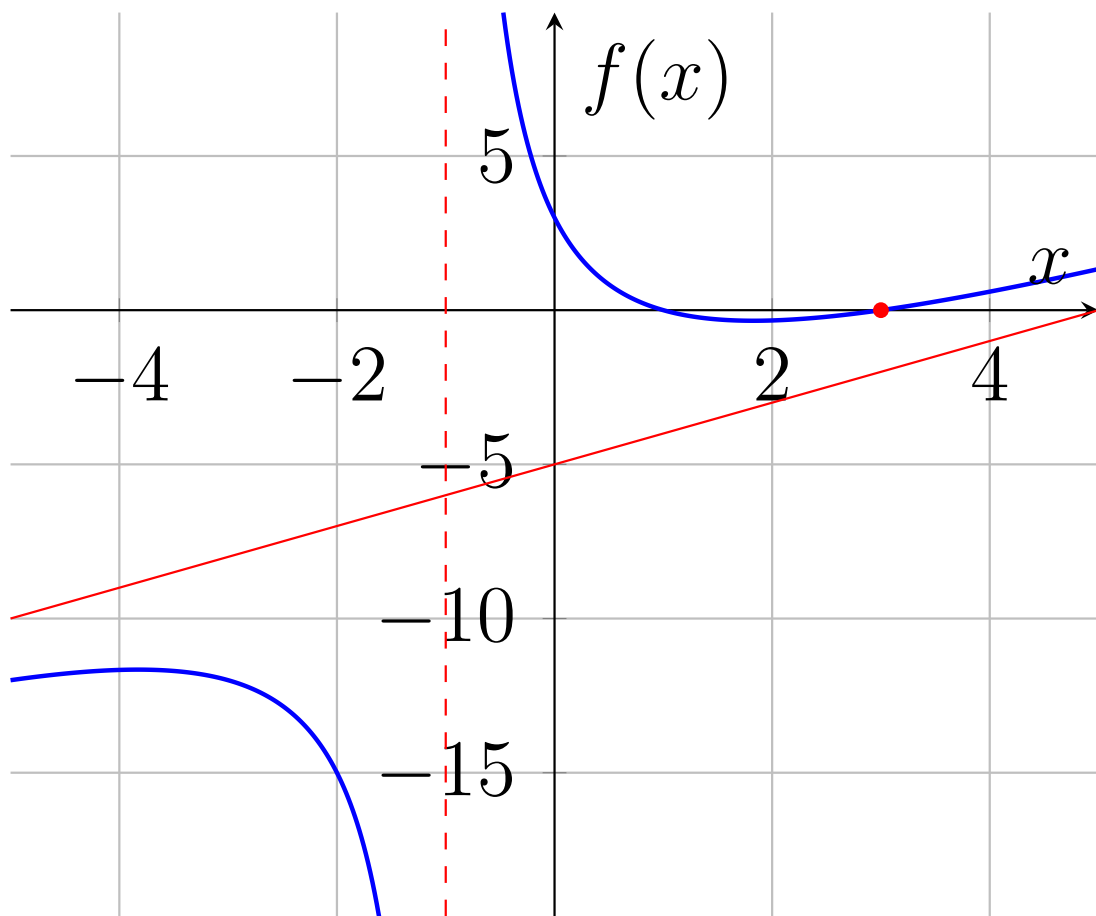
04.10.2021

$$y = f(x)$$

1. Найти  $D(f(x))$  & найти корни  $f(x) = 0$
2. Найти особые точки -  $x = a$  :  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ ?  
Найти асимптоты
3. Поведение функции в окрестностях  $\pm\infty$
4. Монотонность  $f(x)$
5. График

**№ 263**

$$y = \frac{x^2-4x+3}{x+1} = x - 5 + \frac{8}{x+1}$$
$$\lim_{x \rightarrow -1} \left[ x - 5 + \frac{8}{x+1} \right] = -6 + 8 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = \infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1} = -\infty$$

**№ 242**

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x-10}}$$

$$1. D(y) : \frac{x^3}{x-10} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 0, & x - 10 > 0 \implies x \leq 0 \\ x < 0, & x - 10 < 0 \implies x < 0 \end{cases}.$$

$$D(y) = (-\infty; 0] \cup (10; +\infty)$$

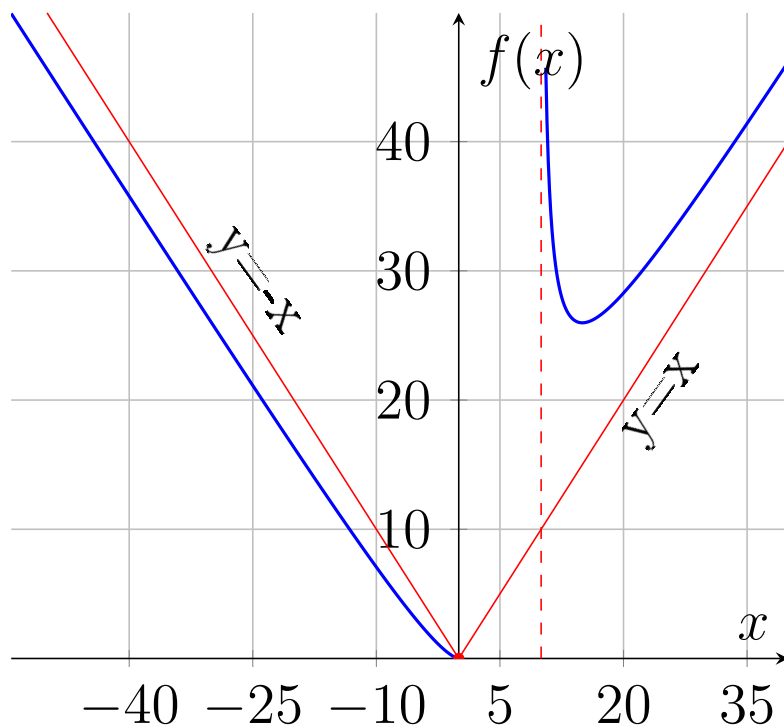
2.  $x = 10$  — вертикальная асимптота, т. к.  $\lim_{x \rightarrow 10} y(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0+} y(x)$  — не существует

$$\lim_{x \rightarrow 0-} y(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad x > 10 &\implies y = \sqrt{\frac{x^3}{x-10}} = x \cdot \sqrt{\frac{x}{x-10}} \xrightarrow{1} \implies \\ &\implies y = x - \text{наклонная асимптота} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad x < 10 &\implies y = \sqrt{\frac{x^3}{x-10}} = -x \cdot \sqrt{\frac{x}{10-x}} \xrightarrow{1} \implies \\ &\implies y = -x - \text{наклонная асимптота} \end{aligned}$$



## 3.2 Производные

22.10.2021

$$y = f(x)$$
$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

### 3.2.1 Таблица производных

1.  $(x^n)' = nx^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{R}$
2.  $(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$
3.  $(e^x)' = e^x \quad (a^x)' = (e^{x \ln(a)})' = a^x \cdot \ln a$
4.  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arctg x)' = \frac{1}{x^2+1}$

### 3.2.2 Правила дифференцирования

1.  $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
2.  $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
3.  $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
4.  $(f[g(x)])' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$  - Производная сложной функции

### 3.2.3 Примеры

№ 918

$$y = x + \sqrt{1-x^2} \cdot \arccos(x)$$
$$y' = 1 + \frac{-x \cdot \arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}} = -\frac{x \cdot \arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

№ 919

$$y = x \cdot \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right) + \arctg(\sqrt{x}) - \sqrt{x}$$

$$y' = \arcsin(\sqrt{\frac{x}{1+x}}) + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) + \frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$\arcsin(\sqrt{\frac{x}{1+x}}) - \frac{\sqrt{x(x+1)}}{2x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**№ 961**

$$y = x + x^x + x^{x^x}$$

$$(x)' = 1$$

$$(x^x)' = (e^{x \ln(x)})' = x^x (\ln x + 1)$$

$$(x^{x^x})' = (e^{x^x \ln(x)})' = x^{x^x} \cdot [x^{x-1} + \ln x \cdot x^x \cdot (\ln x + 1)]$$

$$y' = 1 + x^x (\ln x + 1) + x^{x^x} \cdot [x^{x-1} + \ln x \cdot x^x \cdot (\ln x + 1)]$$

**№ 963**

$$y = \sqrt[x]{x}$$

$$y' = (e^{\frac{\ln x}{x}})' = \sqrt[x]{x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

ДЗ: 901-903, 913-930

### 3.2.4 Самостоятельная работа

25.10.2021

**№ 858**

$$y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} = -\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$

$$y' = -\frac{\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}} \cdot \sqrt[3]{x^3-1} - \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}} \cdot \sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}} = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4} \sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$$



№ 873

$$\begin{aligned}
 y &= 4\sqrt[3]{ctg^2x} + \sqrt[3]{ctg^8x} \\
 y' &= 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{ctgx}} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2x}\right) + \frac{8}{3}\sqrt[3]{ctg^5x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2x}\right) = \\
 &= -\frac{8}{3\sin^2x\sqrt[3]{ctgx}}(1 + ctg^2x) = -\frac{8\sqrt[3]{tgx}}{3\sin^4x}
 \end{aligned}$$

№ 896

$$\begin{aligned}
 y &= x\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{1 + x^2} \\
 y' &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \cancel{x \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)} - \cancel{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}} = \\
 &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})
 \end{aligned}$$

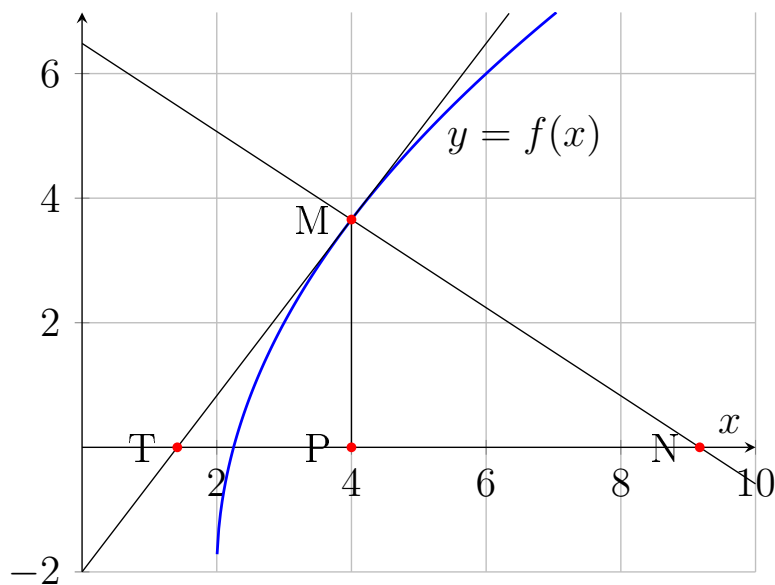
№ 940

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\arcsinx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\
 y' &= \frac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \cdot \cancel{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} + \frac{1}{2} \cdot \cancel{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{x\arcsinx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}
 \end{aligned}$$

### 3.2.5 Геометрические приложения производных

08.11.2021

$$y = f(x), a < x < b$$



MT - касательная

MN - нормаль

PT - подкасательная

PN - поднормаль

$$(MT) : y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0, \quad (MN) : y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0$$

$$|PT| = \left| \frac{y_0}{f'(x_0)} \right|$$

$$|PN| = |y_0 \cdot f'(x_0)|$$

$$|MT| = \left| \frac{y_0}{f'(x_0)} \right| \cdot \sqrt{1 + f'^2(x_0)}$$

$$|MN| = |y_0| \cdot \sqrt{1 + f'^2(x_0)}$$

**№ 1055**

$$y = (x + 1)\sqrt[3]{3 - x}$$

1.  $M_1(-1, 0)$

$$y' = \sqrt[3]{3 - x} - (x + 1) \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(3 - x)^2}} = \frac{9 - 3x - x - 1}{3\sqrt[3]{(3 - x)^2}} = \frac{4(2 - x)}{3\sqrt[3]{(3 - x)^2}}$$

$$y'(-1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}$$

$$y = \sqrt[3]{4}(x + 1)$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x + 1) - Y \text{ доски}$$

**№ 1057**

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

$$y = a(x - x_0)(x - x_1)$$

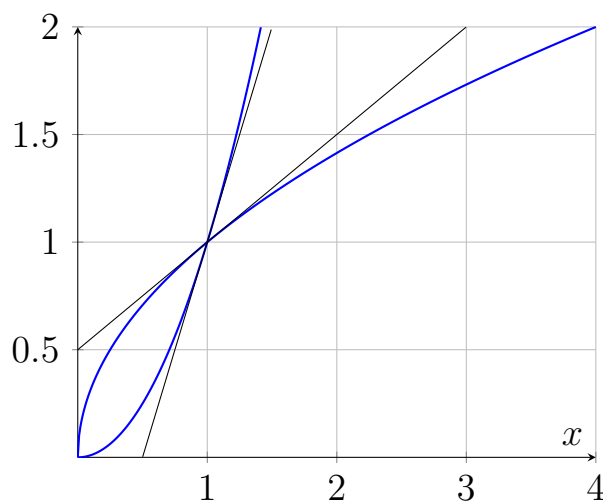
$$y' = a(x - x_0) + a(x - x_1)$$

$$y'(x_0) = a(x_0 - x_1), \quad y'(x_1) = a(x_1 - x_0) = -y'(x_0) \implies$$

$$\implies \text{ углы равны }$$

№ 1061

$$y = x^2, \quad x = y^2 \implies y = \sqrt{x}$$



$$y_1 = 2(x - 1) + 1, \quad y_2 = \frac{1}{2}(x - 1) + 1$$

$$\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1) - \operatorname{tg}(\varphi_2)}{1 + \operatorname{th}(\varphi_1)\operatorname{tg}(\varphi_2)} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \implies \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)$$

ДЗ: 1070, 1075

12.11.2021

№ 1071

$$f'(x) = 2ax + b = 0 \leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

$$y = 0 \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right) + a \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} =$$

$$= 0 \leftrightarrow D = b^2 = 4ac = 0$$

№ 1075

$$\begin{aligned}
M_0(x_0; y_0) : \begin{cases} x_0^2 - y_0^2 = a^2 \\ x_0 \cdot y_0 = b^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{b^2}{x_0} \\ x_0^4 - a^2 x_0^2 - b^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4b^4}}{2} \\ y_0 = \frac{b}{x_0} \end{cases} \\
y_1 = \sqrt{x^2 - a^2}, \ y_2 = \frac{b^2}{x} \\
y'_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \ y'_2 = -\frac{b^2}{x^2} \\
y'_1 \cdot y'_2 = -\frac{b^2}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -1
\end{aligned}$$

**3.2.6 Касательные кривых, заданных параметрически или неявно**

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right| t \in (\alpha, \beta)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$t_0 \implies (x_0, y_0), \quad \begin{array}{l} x_0 = x(t_0) \\ y_0 = y(t_0) \end{array}$$

$$y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$$

**№ 1077**

$$\left. \begin{array}{l} x = 2t - t^2 \\ y = t - t^3 \end{array} \right\}$$

$$y'_x(x) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{3-3t^2}{2-2t} = \frac{3}{2}(1+t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_x = \frac{3}{2} \implies y(t) = \frac{3}{2}(1+t)(2-t-t^2) \\ x(t) = 2t - t^2 \end{array} \right. \quad \text{- касательная в } t$$

$$= 0$$

**№ 1084**

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1, \quad M_0(6, 6.4)$$

$$\frac{x}{50} + \frac{y y'}{32} = 0 \implies y'(6) = -\frac{16x}{25y} = -\frac{3}{5}$$

Касательная:  $y = y_0 + y'(x - x_0) \leftrightarrow y = 10 - 0.6x$

ДЗ: 1073, 1078

### 3.2.7 Производные высшего порядка

15.11.2021

#### Основные формулы

1.  $(e^x)^{(n)} = e^x \implies (a^x)^{(n)} = a^x (\ln(a))^n$
2.  $(\sin(x))^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$   
 $(\cos(x))^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$
3.  $(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}$
4.  $(\ln(x))^{(n)} = (\frac{1}{x})^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!x^{-n}$
5.  $(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$

#### Примеры

##### № 1189

$$y = \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$
$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^n} - \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^n}$$

##### № 1193

$$y = \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$
$$y^{(n)} = -2^{n-1} \cos(2x + n\frac{\pi}{2})$$

##### № 1195

$$y = \sin^3(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))\sin(x) = \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(x)\cos(2x) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

$$y^{(n)} = \frac{3}{4}\sin(x + n\frac{\pi}{2}) - \frac{3^n}{4} \cdot \sin(3x + n\frac{\pi}{2})$$

### № 1202

$$y = x\cos(mx)$$

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{(k)} (\cos(mx))^{(n-k)} = m^n \cdot x\cos(mx + \frac{\pi n}{2}) +$$

$$+ nm^{n-1} \cdot \cos(mx + \frac{(n-1)\pi}{2})$$

### № 1204

$$y = (x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x}$$

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^n (x^2 + 2x + 2)^{(k)} \cdot (e^{-x})^{(n-k)} = (-1)^n \cdot (x^2 + 2x + 2) \cdot$$

$$e^{-x} + (-1)^{n-1} \cdot n \cdot (2x + 2) \cdot e^{-x} + (-1)^{n-2} \cdot n(n-1) \cdot e^{-x}$$

### 3.2.8 Дифференцируемость функции

22.11.2021

$$f(x), a \leq x \leq b, f'(x)$$

### Теорема Ролля

1.  $f(x)$  - определена на интервале  $[a; b]$
2.  $\exists f'(x)$  - ограниченная на  $(a; b)$



$$3. f(a) = f(b) \\ \implies \exists c \in (a; b) \implies f'(c) = 0$$

### № 1235

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \implies [a; b] = [1; 3]$$

1. 1 - выполнено

2.  $f'(x) = (x-1)(x-2) + (x-1)(x-3) + (x-2)(x-3)$  - выполнено

3. Выполнено

$$\begin{aligned} & \exists c \in (1; 3) \implies f'(c) = 0 \\ f'(x) &= x^2 - 5x + 6 + x^2 - 3x + 2 + x^2 - 4x + 3 = 3x^2 - 12x + 11 = \\ 0 &\leftrightarrow x_{1,2} = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = c \end{aligned}$$

### № 1236

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}, [-1; 1]$$

$$f(-1) = 0$$

$$f(1) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \neq 0$$

Не выполнено условие 2 теоремы Ролля

### № 1238

1.  $f(x), x \in [x_0; x_1]$

2.  $f^{n-1}(x)$  - непрерывная функция

3.  $f^{(n)} - (x_0; x_1)$

$$4. f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$$

Доказать, что  $\exists \xi \in (x_0; x_n) \implies f^{(n)}(\xi) = 0$  - ДЗ

### Теорема Лагранжа

$$1. f(x), x \in [a; b] \text{ и непрерывна на } (a; b) \implies \\ \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

$$2. |f'(x)| \leq c, \forall x \in (a; b)$$

Тогда:

$$\exists c \in (a; b) : f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

### № 1244

$$y = x^3$$

$$A(-1; -1), B(2; 8)$$

Касательная через  $M(x; y)$  такая, что она параллельна прямой  $(AB)$  - ?

$$f'(x) = 3x^2$$

$$k_{(AB)} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 3$$

$$f'(x) = 3x^2 = 3 \implies \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$1. x = 1 :$$

$$y = 3(x - 1) + 1 \leftrightarrow y = 3x - 2$$

$$2. x = -1 : -1 \notin (-1; 2)$$

**№ 1245**

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [a; b], \quad ab < 0$$

**№ 1251**

a)  $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$

Рассмотрим  $0 \leq x < y \leq \pi$  :

$$|\sin(x) - \sin(y)| = 2|\cos(\frac{x+y}{2}) \cdot \sin(\frac{x-y}{2})| \leq 2|\sin(\frac{x-y}{2})|$$

$y = x$  - касательная к  $y = \sin(x)$  в  $x = 0$ . Т. к.  $\sin(x)$

выпукла вверх, то  $\sin(x) < x \implies |\sin(x) - \sin(y)| =$   
 $= 2|\sin(\frac{x-y}{2})| \leq x - y$

b)

$$|\arctg(x) - \arctg(y)| \leq |x - y|$$

$$z = \arctg(x) - \arctg(y) \implies \tg(z) =$$

$$= \tg(\arctg(x) - \arctg(y)) = \frac{\tg(\arctg(x)) - \tg(\arctg(y))}{1 + \tg(\arctg(x)) \cdot \tg(\arctg(y))} = \frac{x-y}{1+xy} \implies$$

$$|\arctg(x) - \arctg(y)| = |\arctg(\frac{x-y}{1+xy})| \leq |x - y|$$

$$\text{Если } xy < 0 \implies |\frac{x-y}{1+xy}| \leq |x - y|$$