

Алгебра и геометрия: домашние задания

Семестр 1 (осень 2021)

Преподаватель: Балыкина Ю. Е.

Рубашкин Илья Михайлович
Email: st095290@student.spbu.ru

Задача 220(d).

Умножить матрицы: d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 2 + 3 & -2 - 4 + 6 & -4 - 8 + 12 \\ -2 - 4 + 6 & -4 - 8 + 12 & -8 - 16 + 24 \\ -3 - 6 + 9 & -6 - 12 + 18 & -12 - 24 + 36 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 220(f).

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b + c & a^2 + b^2 + c^2 & 2ac + b^2 + \\ a + b + c & 2ac + b^2 & a^2 + b^2 + c^2 \\ 3 & a + b + c & a + b + c \end{pmatrix}$$

Задача 274.

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 41 & 427 & 327 \\ 169 & 543 & 443 \\ -57 & 721 & 621 \end{vmatrix} = 6 \cdot (41 \cdot 543 \cdot 621 + 427 \cdot 443 \cdot (-57) + 327 \cdot$$

$$169 \cdot 721 - (-57) \cdot 543 \cdot 327 - 169 \cdot 427 \cdot 621 - 41 \cdot 721 \cdot 443) = -29\,400\,000$$

Задача 221.

Выполнить действия:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5 \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Решение:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4+3 & 6+1 & 2+2 \\ 6+3 & 3+1 & 3 \\ 3 & 1+2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^2 \right)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}^2 = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \text{Покажем с помощью метода математической индукции, что } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

 $\forall n \in \mathbb{N}$ База индукции (n=1): $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - выполненоИндукционный переход: Пусть для некоторого $k = n \in \mathbb{N}$ выполнено утверждение $a_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{Докажем его для } k=n+1: a_n + 1 &= a_n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{Выполнено} \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом: } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 224.

Вычислить $A \cdot A'$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Решение:

$$A \cdot A' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 21 \\ 21 & 27 \end{pmatrix}$$

Задача 232(с).

Вычислить определитель: с) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$

Решение:

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix} \stackrel{S_2+S_1, S_3+S_1}{=} \begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & 2a & a+x \\ 0 & 0 & a+x \end{vmatrix} = a \cdot 2a \cdot (a+x) = 2a^2(a+x)$$

Задача 232(d).

Вычислить определитель: d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \stackrel{S_2-S_1, S_3-S_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$$

Задача 232(f).

Вычислить определитель: f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} \stackrel{S_2-S_1, S_3-S_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \omega-1 & \omega-1 \\ 0 & \omega^2-1 & \omega-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega-1 & \omega-1 \\ \omega^2-1 & \omega-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\omega-1)^2 - (\omega-1) \cdot (\omega^2-1) = -\omega + 2\omega^2 - \omega^3$$

Задача 284.

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = 3xy(x+y) - (x+y)^3 - x^3 - y^3 = -2(x^3 + y^3)$$
