

1 Предел последовательности

№ 62

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0, \quad |q| < 1$$

• **Случай $q = 0$ очевиден**

• **Разберем случай $q \neq 0$:**

Т. к. $|q| \in (0; 1)$, то $|q| = \frac{1}{d+1}$, где $d > 0$; Тогда $nq^n = \frac{n}{(1+x)^n}$

Заметим, что $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots > \frac{n(n-1)}{2}x^2$

Таким образом: $|nq^n| < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}x^2} = \frac{2}{(n-1)x^2} < \epsilon \quad (\epsilon > 0) \Leftrightarrow n > 1 + \frac{2}{\epsilon x^2}$

Значит по определению предела: $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$

№ 63

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad (a > 0)$$

По определению предела нужно доказать следующее неравенство:
 $|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon$

• **Рассмотрим случай $a > 1$**

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon, \quad \epsilon > 0 \Leftrightarrow |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \epsilon.$$

Так как $a > 1$, то $a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$. Опустим модуль в неравенстве.

$$a^{\frac{1}{n}} < 1 + \epsilon \Leftrightarrow (1 + \epsilon)^n > a$$

$$(1 + \epsilon)^n = 1 + \epsilon n + \dots > \epsilon n > a \Leftrightarrow n > \frac{a}{\epsilon}$$

Значит при $a > 1$ неравенство верно.

• **Случай $a = 1$ очевиден**

- Рассмотрим случай $a < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{a}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1$$

Так как $1/a > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$ (1 пункт)

№ 58

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0, a > 1$$

Рассмотрим пример №61: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b^n} = 0, b > 1 \Rightarrow \frac{1}{b^n} < \frac{n}{b^n} < 1$ (*), в окрестности $+\infty$

Пусть $b = a^p, p > 0 \Rightarrow p \ln a = \ln b$

(*): $\frac{1}{a^{pn}} < \frac{n}{a^{pn}} < 1 \Leftrightarrow \log_a(\frac{1}{a^{pn}}) < \log_a(\frac{n}{a^{pn}}) < 1 \Leftrightarrow 0 < \log_a(\frac{a^{pn}}{n}) < \log_a(\frac{1}{a^{pn}})$
 $\Leftrightarrow 0 < pn (1 < n < a^{pn} \Leftrightarrow 0 < \log_a n < \log_a(a^{pn}) = pn)$

Разделим все на n : $1 < \frac{\log_a(a^{pn})}{n} < p$

=====

№ 65

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

При $n \geq 2$: $\sqrt[n]{n} > 1$

$n = (\sqrt[n]{n})^n = [1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n = 1 + n(\sqrt[n]{n} - 1) + \dots + (\sqrt[n]{n} - 1)^n >$
 $\frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2$

$n > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \Leftrightarrow 0 < (\sqrt[n]{n} - 1)^2 < \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1} \rightarrow 0 \Leftrightarrow$

$1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{n-1} \rightarrow 1$

№ 66

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

Докажем, что $n! > (\frac{n}{3})^n$ (*) при $n \rightarrow \infty$ методом математической индукции:

База:

$$n = 1: 1 > \frac{1}{3}$$

$$n = 2: 2! = 2 > \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

Переход: предположим, что (*) верно. Тогда $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$

$$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1) \left(\frac{n}{3}\right)^n$$

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < 3 \Leftrightarrow \left(\frac{n}{3}\right)^n > \frac{(n+1)^n}{3^{n+1}}$$

$$\text{Таким образом: } 0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{3}{n} \rightarrow 0$$

№ 75

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

№ 76

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a$$

2 Предел функции

2.1 Область определения

$$y = f(x), x, y \in \mathbb{R}$$

ДЗ: 151 - 165

№ 152

$$y = \sqrt{3x - x^2}$$

$$D: 3x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$$

Определение

Пусть $x = a$ - внутренняя точка $D(f) \leftrightarrow \exists \delta > 0: (a - \delta; a + \delta) \subset D(x)$
Тогда $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что $\exists x \in (a - \delta; a + \delta)$
 $\Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$

2.2 Замечательные пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = +\infty$$

2.3 Свойства пределов

1. $\lim_{x \rightarrow a} [Af(x) + Bg(x)] = A \lim_{x \rightarrow a} f(x) + B \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow a} [Af(x)g(x)] = A \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$

Если существуют два из трех пределов, то существует и третий, и справедливы свойства 1-3

2.4 Примеры

№ 412

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x+11x^2+6x^3}{x}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} [6 + 11x + 6x^2] = 6$$

№ 413

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^5 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 - 5x - 1}{x^5 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 5x^2 + 10x + 10}{1 + x^3} = 10$$

№ 416

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{50}(2-\frac{3}{x})^{20}(3+\frac{2}{x})^{30}}{x^{50}(2+\frac{1}{x})} = \frac{2^{20}3^{30}}{2^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}$$

№ 418

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x-5} = -\frac{1}{2}$$

№ 419

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2 + 2x - 3)} = \frac{1+2}{1^2 + 2 + 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

№ 422

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x - 1)}{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x - 1)} = \frac{1 - (-1) - 1}{1 - (-1) + 1 - (-1) - 1} = \frac{1}{3}$$

№ 424

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1} \stackrel{[0]}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{d(x^{100} - 2x + 1)}{dx}}{\frac{d(x^{50} - 2x + 1)}{dx}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{100x^{99} - 2}{50x^{49} - 2} = \frac{98}{48}$$

2.5 Иррациональные функции

№ 435

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = 1$$

24.09.2021

№ 437

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} \stackrel{[0]}{=} & \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)((\sqrt{1+2x}+3))} \\ & = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \frac{2 \cdot 4}{6} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

№ 440

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} \stackrel{[0]}{=} & \lim_{x \rightarrow 3} = \frac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(x^2-9)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} \\ & = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+13-4x-4}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} = -3 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} = \\ & -3 \cdot \frac{1}{6 \cdot (4+4)} = -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

№ 447

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}} \stackrel{[0]}{=} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x})((\sqrt[3]{27+x})^2 + \sqrt[3]{27+x}\sqrt[3]{27-x} + (\sqrt[3]{27-x})^2)}{x(1+2\sqrt[3]{x})((\sqrt[3]{27+x})^2 + \sqrt[3]{27+x}\sqrt[3]{27-x} + (\sqrt[3]{27-x})^2)} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(1+2\sqrt[3]{x})((\sqrt[3]{27+x})^2 + \sqrt[3]{27+x}\sqrt[3]{27-x} + (\sqrt[3]{27-x})^2)} = \frac{2}{3^2+3 \cdot 3+3^2} = \frac{2}{27} \end{aligned}$$

№ 455

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$$

Пусть $x = t^{n \cdot m} \implies \sqrt[n]{x} = t^n \quad \sqrt[n]{x} = t^m$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^n-1}{t^m-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\cancel{(t-1)}(1+t+t^2+\dots+t^{n-1})}{\cancel{(t-1)}(1+t+t^2+\dots+t^{m-1})} = \frac{n}{m}$$

№ 457

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{(x+a)(x+b)}-x]^{[\infty-\infty]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}[(a+b)+\frac{ab}{x}]}{\cancel{x}(1+\sqrt{(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})})} =$$

$$= \frac{a+b}{2}$$

ДЗ: 436, 455.1, 456, 458

27.09.2021

№ 462

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})^{[\infty-\infty]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3+3x^2)^2-(x^2-2x)^3}{(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^5+(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^4\sqrt{x^2-2x}+\dots+(\sqrt{x^2-2x})^5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6+6x^5+9x^4-(x^6-6x^5+12x^4-8x^3)}{(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^5+(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^4\sqrt{x^2-2x}+\dots+(\sqrt{x^2-2x})^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^6}(12-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2})}{\cancel{x^6}((\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}})^5+\dots+(\sqrt{1-\frac{2}{x}})^5)} =$$

$$= \frac{12}{6} = 2$$

2.6 Тригонометрические функции

① Замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

② Тригонометрические формулы

1. $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
2. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
3. $1 + \cos(x) = 2\cos^2(\frac{x}{2})$
4. $1 - \cos(x) = 2\sin^2(\frac{x}{2})$
5. $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

№ 471

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x} = |t = 5x| = 5 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 5$$

№ 472

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$$
$$0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

№ 474

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \right]^2 = \frac{1}{2}$$

№ 475

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(x) - \sin(x)}{\sin^2(x)} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cdot (\frac{1 - \cos(x)}{\cos(x)})}{\sin(x) \cdot \sin^2(x)} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \cdot \left[\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \right]^2 =$$

$$2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

№ 476

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(x)} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(x)} = 5 - 3 = 2$$

№ 480

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)tg\left(\frac{\pi x}{2}\right) \stackrel{[0 \cdot \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \frac{\sin(\frac{\pi x}{2})}{\cos(\frac{\pi x}{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\cos(\frac{\pi x}{2})} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\cos(\frac{\pi(x-1)}{2} + \frac{\pi}{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sin(\frac{\pi(x-1)}{2})} = \frac{2}{\pi} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi t}{2}}{\sin(\frac{\pi t}{2})} = \frac{2}{\pi}$$

№ 488

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin(a)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(a+2x) + \sin(a)) - 2\sin(a+x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin(a+x) \cdot \cos(x) - 2\sin(a+x)}{x^2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x)(\cos(x) - 1)}{x^2} = -2\sin(a) \cdot$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})^2 \cdot 4} = -\sin(a)$$

№ 493

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2(x) + \sin(x) - 1}{2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cancel{(2\sin(x) - 1)}(\sin(x) + 1)}{\cancel{(2\sin(x) - 1)}(\sin(x) - 1)} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3$$

01.10.2021

№ 499

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)} - \sqrt{1+\sin(x)}}{x^3} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - \sin(x)}{x^3(\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)} + \sqrt{1+\sin(x)})} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1 - \cos(x)}{x^2 \cos(x)} \right] = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}$$

№ 502

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x^2)}}{1 - \cos(x)} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2\sin^2\left(\frac{x^2}{2}\right)}}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)}{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \stackrel{1}{=} = \sqrt{2}$$

ДЗ: 503, 504, 505, 688, 689

3 Непрерывность функции

Опр. Пусть $f(x), x \in \mathbb{X} \subseteq R$

$a \in \mathbb{X}$ - внутренняя точка, т. е. $(a - x_0; a + x_0) \subset \mathbb{X}, x_0 > 0$

Тогда $f(x)$ - непрерывная в точке $x = a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

№ 687

$y = \frac{x}{(x+1)^2} \quad x \neq -1 \implies x = -1$ - точка разрыва?

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{(x+1)^2} = -\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^2} = -\infty \implies x = -1$ - точка разрыва II рода

№ 690

$$y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$$

Особые точки: $x = 0, x = -1, x = 1$

$$y = \frac{\frac{1}{x(x+1)}}{\frac{1}{x(x-1)}} = \frac{x-1}{x+1}, \quad x \in \mathbb{D}(y)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+1} = -2 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = -\infty \implies x = -1$$

- точка разрыва II рода

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x+1} = -1 \implies x = 0$$
 - точка разрыва III рода

$$\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = 0 \implies x = 1$$
 - точка разрыва III рода

№ 720

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n}, \quad x \geq 0$$

$$y(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \implies x = 1 - \text{точка интереса}$$

$x = 1$ - точка разрыва I рода, т. к. $\lim_{x \rightarrow 1-} y(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1+} y(x) = 0$

3.1 Исследование функций. Построение графиков

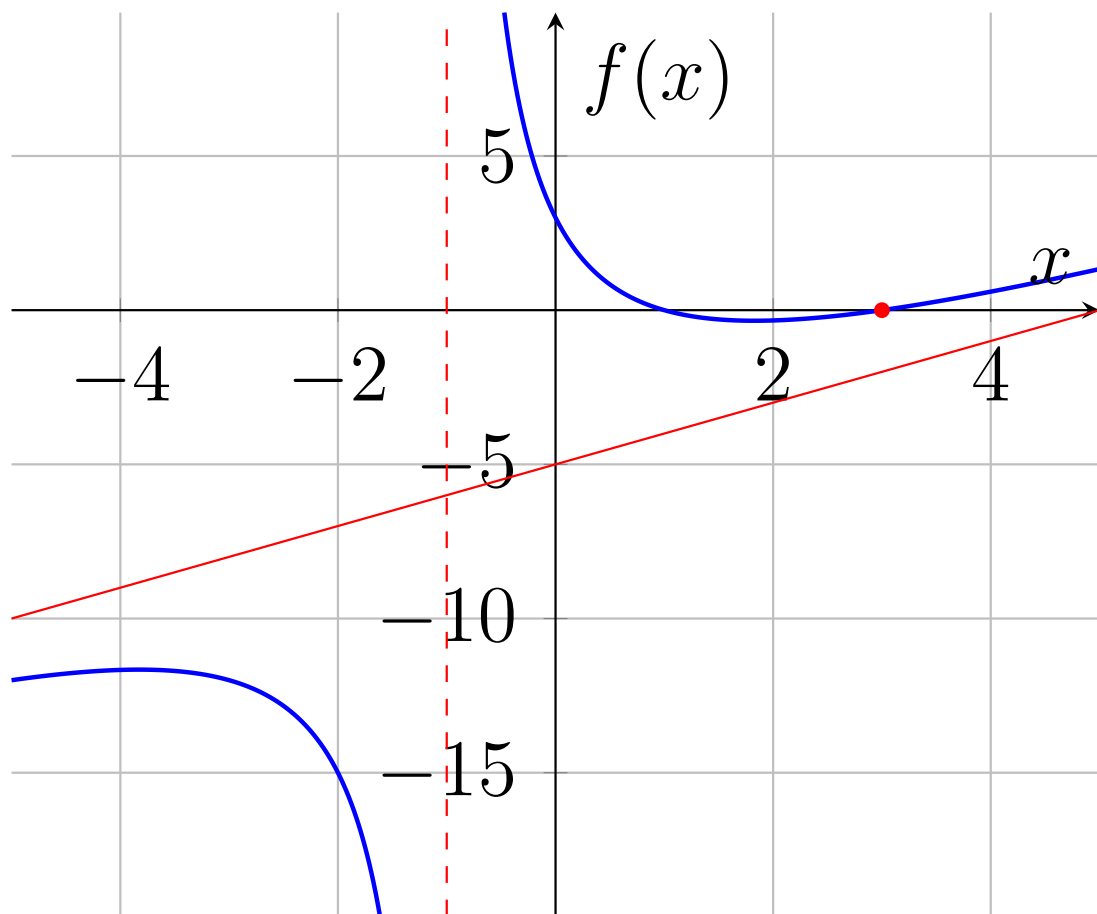
04.10.2021

$$y = f(x)$$

1. Найти $D(f(x))$ & найти корни $f(x) = 0$
2. Найти особые точки - $x = a$: $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$?
Найти асимптоты
3. Поведение функции в окрестностях $\pm\infty$
4. Монотонность $f(x)$
5. График

№ 263

$$y = \frac{x^2-4x+3}{x+1} = x - 5 + \frac{8}{x+1}$$
$$\lim_{x \rightarrow -1} \left[x - 5 + \frac{8}{x+1} \right] = -6 + 8 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = \infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1} = -\infty$$

№ 242

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x-10}}$$

$$1. D(y) : \frac{x^3}{x-10} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 0, & x - 10 > 0 \implies x \leq 0 \\ x < 0, & x - 10 < 0 \implies x < 0 \end{cases}.$$

$$D(y) = (-\infty; 0] \cup (10; +\infty)$$

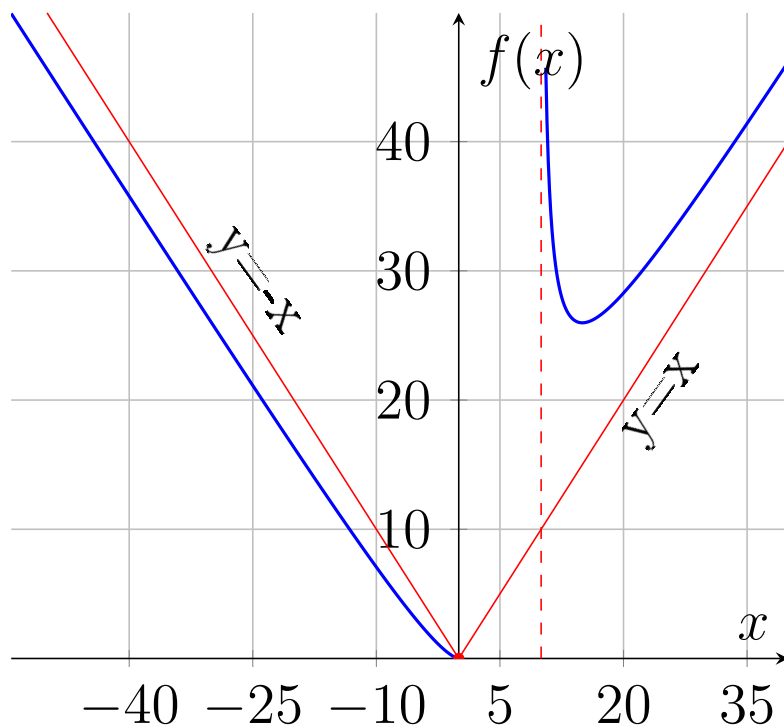
2. $x = 10$ — вертикальная асимптота, т. к. $\lim_{x \rightarrow 10} y(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0+} y(x)$ — не существует

$$\lim_{x \rightarrow 0-} y(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad x > 10 &\implies y = \sqrt{\frac{x^3}{x-10}} = x \cdot \sqrt{\frac{x}{x-10}} \xrightarrow{1} \implies \\ &\implies y = x - \text{наклонная асимптота} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad x < 10 &\implies y = \sqrt{\frac{x^3}{x-10}} = -x \cdot \sqrt{\frac{x}{10-x}} \xrightarrow{1} \implies \\ &\implies y = -x - \text{наклонная асимптота} \end{aligned}$$



3.2 Производные

22.10.2021

$$y = f(x)$$
$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

3.2.1 Таблица производных

1. $(x^n)' = nx^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{R}$
2. $(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$
3. $(e^x)' = e^x \quad (a^x)' = (e^{x \ln(a)})' = a^x \cdot \ln a$
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}$

3.2.2 Правила дифференцирования

1. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
2. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
3. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
4. $(f[g(x)])' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ - Производная сложной функции

3.2.3 Примеры

№ 918

$$y = x + \sqrt{1-x^2} \cdot \arccos(x)$$
$$y' = 1 + \frac{-x \cdot \arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}} = -\frac{x \cdot \arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

№ 919

$$y = x \cdot \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right) + \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) - \sqrt{x}$$

$$y' = \arcsin(\sqrt{\frac{x}{1+x}}) + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) + \frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$\arcsin(\sqrt{\frac{x}{1+x}}) - \frac{\sqrt{x(x+1)}}{2x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

№ 961

$$y = x + x^x + x^{x^x}$$

$$(x)' = 1$$

$$(x^x)' = (e^{x \ln(x)})' = x^x (\ln x + 1)$$

$$(x^{x^x})' = (e^{x^x \ln(x)})' = x^{x^x} \cdot [x^{x-1} + \ln x \cdot x^x \cdot (\ln x + 1)]$$

$$y' = 1 + x^x (\ln x + 1) + x^{x^x} \cdot [x^{x-1} + \ln x \cdot x^x \cdot (\ln x + 1)]$$

№ 963

$$y = \sqrt[x]{x}$$

$$y' = (e^{\frac{\ln x}{x}})' = \sqrt[x]{x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

ДЗ: 901-903, 913-930

3.2.4 Самостоятельная работа

25.10.2021

№ 858

$$y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} = -\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$

$$y' = -\frac{\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}} \cdot \sqrt[3]{x^3-1} - \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}} \cdot \sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}} = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4} \sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$$

№ 873

$$y = 4\sqrt[3]{ctg^2x} + \sqrt[3]{ctg^8x}$$

$$y' = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{ctgx}} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2x}\right) + \frac{8}{3}\sqrt[3]{ctg^5x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2x}\right) =$$

$$= -\frac{8}{3\sin^2x\sqrt[3]{ctgx}}(1 + ctg^2x) = -\frac{8\sqrt[3]{tgx}}{3\sin^4x}$$

№ 896

$$y = x\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{1 + x^2}$$

$$y' = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \cancel{x \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)} - \cancel{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}} =$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

№ 940

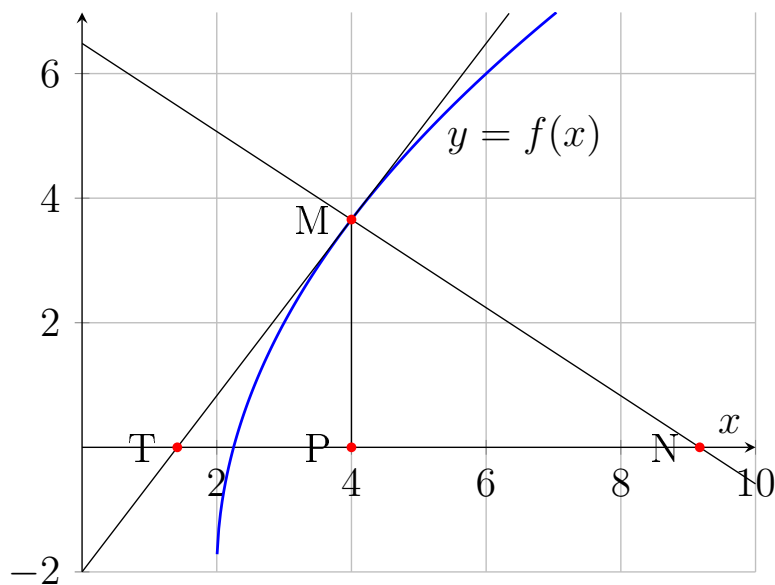
$$y = \frac{\arcsinx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$y' = \frac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \cdot \cancel{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} + \frac{1}{2} \cdot \cancel{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{x\arcsinx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

3.2.5 Геометрические приложения производных

08.11.2021

$$y = f(x), a < x < b$$



MT - касательная

MN - нормаль

PT - подкасательная

PN - поднормаль

$$(MT) : y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0, \quad (MN) : y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0$$

$$|PT| = \left| \frac{y_0}{f'(x_0)} \right|$$

$$|PN| = |y_0 \cdot f'(x_0)|$$

$$|MT| = \left| \frac{y_0}{f'(x_0)} \right| \cdot \sqrt{1 + f'^2(x_0)}$$

$$|MN| = |y_0| \cdot \sqrt{1 + f'^2(x_0)}$$

№ 1055

$$y = (x + 1)\sqrt[3]{3 - x}$$

1. $M_1(-1, 0)$

$$y' = \sqrt[3]{3 - x} - (x + 1) \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}} = \frac{9-3x-x-1}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}} = \frac{4(2-x)}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}}$$

$$y'(-1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}$$

$$y = \sqrt[3]{4}(x + 1)$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x + 1) - Y \text{ доски}$$

№ 1057

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

$$y = a(x - x_0)(x - x_1)$$

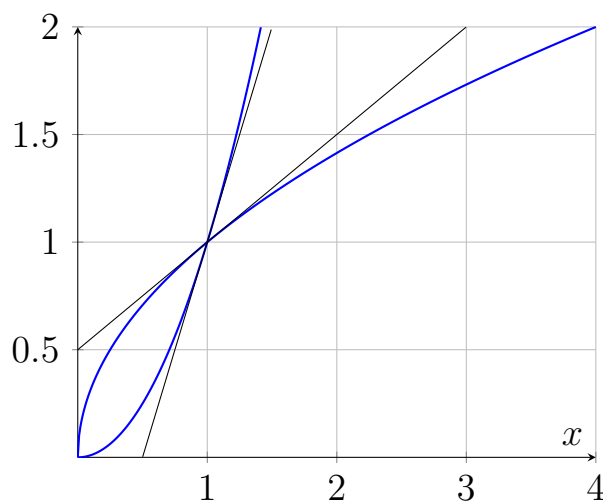
$$y' = a(x - x_0) + a(x - x_1)$$

$$y'(x_0) = a(x_0 - x_1), \quad y'(x_1) = a(x_1 - x_0) = -y'(x_0) \implies$$

$$\implies \text{ углы равны }$$

№ 1061

$$y = x^2, \quad x = y^2 \implies y = \sqrt{x}$$



$$y_1 = 2(x - 1) + 1, \quad y_2 = \frac{1}{2}(x - 1) + 1$$

$$\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1) - \operatorname{tg}(\varphi_2)}{1 + \operatorname{tg}(\varphi_1)\operatorname{tg}(\varphi_2)} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \implies \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)$$

ДЗ: 1070, 1075

12.11.2021

№ 1071

$$f'(x) = 2ax + b = 0 \leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

$$y = 0 \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right) + a \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} =$$

$$= 0 \leftrightarrow D = b^2 = 4ac = 0$$

№ 1075

$$\begin{aligned}
M_0(x_0; y_0) : \begin{cases} x_0^2 - y_0^2 = a^2 \\ x_0 \cdot y_0 = b^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{b^2}{x_0} \\ x_0^4 - a^2 x_0^2 - b^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4b^4}}{2} \\ y_0 = \frac{b}{x_0} \end{cases} \\
y_1 = \sqrt{x^2 - a^2}, \ y_2 = \frac{b^2}{x} \\
y'_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \ y'_2 = -\frac{b^2}{x^2} \\
y'_1 \cdot y'_2 = -\frac{b^2}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -1
\end{aligned}$$

3.2.6 Касательные кривых, заданных параметрически или неявно

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right| t \in (\alpha, \beta)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$t_0 \implies (x_0, y_0), \quad \begin{array}{l} x_0 = x(t_0) \\ y_0 = y(t_0) \end{array}$$

$$y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$$

№ 1077

$$\left. \begin{array}{l} x = 2t - t^2 \\ y = t - t^3 \end{array} \right\}$$

$$y'_x(x) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{3-3t^2}{2-2t} = \frac{3}{2}(1+t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_x = \frac{3}{2} \implies y(t) = \frac{3}{2}(1+t)(2-t-t^2) \\ x(t) = 2t - t^2 \end{array} \right. \quad \text{- касательная в } t$$

$$= 0$$

№ 1084

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1, \quad M_0(6, 6.4)$$

$$\frac{x}{50} + \frac{y y'}{32} = 0 \implies y'(6) = -\frac{16x}{25y} = -\frac{3}{5}$$

Касательная: $y = y_0 + y'(x - x_0) \leftrightarrow y = 10 - 0.6x$

ДЗ: 1073, 1078

3.2.7 Производные высшего порядка

15.11.2021

Основные формулы

1. $(e^x)^{(n)} = e^x \implies (a^x)^{(n)} = a^x (\ln(a))^n$
2. $(\sin(x))^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$
 $(\cos(x))^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$
3. $(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}$
4. $(\ln(x))^{(n)} = (\frac{1}{x})^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!x^{-n}$
5. $(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$

Примеры

№ 1189

$$y = \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$
$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$$

№ 1193

$$y = \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$
$$y^{(n)} = -2^{n-1} \cos(2x + n\frac{\pi}{2})$$

№ 1195

$$y = \sin^3(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))\sin(x) = \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(x)\cos(2x) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

$$y^{(n)} = \frac{3}{4}\sin(x + n\frac{\pi}{2}) - \frac{3^n}{4} \cdot \sin(3x + n\frac{\pi}{2})$$

№ 1202

$$y = x\cos(mx)$$

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{(k)} (\cos(mx))^{(n-k)} = m^n \cdot x\cos(mx + \frac{\pi n}{2}) +$$

$$+ nm^{n-1} \cdot \cos(mx + \frac{(n-1)\pi}{2})$$

№ 1204

$$y = (x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x}$$

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^n (x^2 + 2x + 2)^{(k)} \cdot (e^{-x})^{(n-k)} = (-1)^n \cdot (x^2 + 2x + 2) \cdot$$

$$e^{-x} + (-1)^{n-1} \cdot n \cdot (2x + 2) \cdot e^{-x} + (-1)^{n-2} \cdot n(n-1) \cdot e^{-x}$$

3.2.8 Дифференцируемость функции

22.11.2021

$$f(x), a \leq x \leq b, f'(x)$$

Теорема Ролля

1. $f(x)$ - определена на интервале $[a; b]$
2. $\exists f'(x)$ - ограниченная на $(a; b)$

$$3. f(a) = f(b) \\ \implies \exists c \in (a; b) \implies f'(c) = 0$$

№ 1235

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \implies [a; b] = [1; 3]$$

1. 1 - выполнено

2. $f'(x) = (x-1)(x-2) + (x-1)(x-3) + (x-2)(x-3)$ - выполнено

3. Выполнено

$$\begin{aligned} & \exists c \in (1; 3) \implies f'(c) = 0 \\ f'(x) &= x^2 - 5x + 6 + x^2 - 3x + 2 + x^2 - 4x + 3 = 3x^2 - 12x + 11 = \\ 0 &\leftrightarrow x_{1,2} = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = c \end{aligned}$$

№ 1236

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}, [-1; 1]$$

$$f(-1) = 0$$

$$f(1) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \neq 0$$

Не выполнено условие 2 теоремы Ролля

№ 1238

1. $f(x), x \in [x_0; x_1]$

2. $f^{n-1}(x)$ - непрерывная функция

3. $f^{(n)} - (x_0; x_1)$

$$4. f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$$

Доказать, что $\exists \xi \in (x_0; x_n) \implies f^{(n)}(\xi) = 0$ - ДЗ

Теорема Лагранжа

$$1. f(x), x \in [a; b] \text{ и непрерывна на } (a; b) \implies \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

$$2. |f'(x)| \leq c, \forall x \in (a; b)$$

Тогда:

$$\exists c \in (a; b) : f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

№ 1244

$$y = x^3$$

$$A(-1; -1), B(2; 8)$$

Касательная через $M(x; y)$ такая, что она параллельна прямой (AB) - ?

$$f'(x) = 3x^2$$

$$k_{(AB)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 3$$

$$f'(x) = 3x^2 = 3 \implies \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$1. x = 1 :$$

$$y = 3(x - 1) + 1 \leftrightarrow y = 3x - 2$$

$$2. x = -1 : -1 \notin (-1; 2)$$

№ 1245

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [a; b], \quad ab < 0$$

№ 1251

a) $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$

Рассмотрим $0 \leq x < y \leq \pi$:

$$|\sin(x) - \sin(y)| = 2|\cos(\frac{x+y}{2}) \cdot \sin(\frac{x-y}{2})| \leq 2|\sin(\frac{x-y}{2})|$$

$y = x$ - касательная к $y = \sin(x)$ в $x = 0$. Т. к. $\sin(x)$

выпукла вверх, то $\sin(x) < x \implies |\sin(x) - \sin(y)| =$
 $= 2|\sin(\frac{x-y}{2})| \leq x - y$

b)

$$|\arctg(x) - \arctg(y)| \leq |x - y|$$

$$z = \arctg(x) - \arctg(y) \implies \tg(z) =$$

$$= \tg(\arctg(x) - \arctg(y)) = \frac{\tg(\arctg(x)) - \tg(\arctg(y))}{1 + \tg(\arctg(x)) \cdot \tg(\arctg(y))} = \frac{x-y}{1+xy} \implies$$

$$|\arctg(x) - \arctg(y)| = |\arctg(\frac{x-y}{1+xy})| \leq |x - y|$$

$$\text{Если } xy < 0 \implies |\frac{x-y}{1+xy}| \leq |x - y|$$

3.3 Правило Лопиталья

26.11.2021

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}, \left[\frac{0}{0} \right] \text{ или } \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P'(x)}{Q'(x)}$$

№ 1320

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg(x) - x}{x - \sin(x)} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)} - 1}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{(1 - \cos(x))} (1 + \cos(x))}{\cancel{(1 - \cos(x))} \cos^2(x)} = 2$$

№ 1321

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3tg(4x) - 12tg(x)}{3\sin(4x) - 12\sin(x)} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{12}{\cos^2(4x)} - \frac{12}{\cos^2(x)}}{12\cos(4x) - 12\cos(x)} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{(\cos(4x) - \cos(x))} (\cos(4x) + \cos(x))}{\cancel{(\cos(4x) - \cos(x))} \cos^2(4x) \cos^2(x)} =$$

$$= -2$$

№ 1323

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xctg(x) - 1}{x^2} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ctg(x) - \frac{x}{\sin^2(x)}}{2x} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} f \frac{-\sin^2(x) + \cos^2(x) - 1}{\sin^2(x) + 2x\sin(x)\cos(x)} \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin(x)\cos(x) - 2\cos(x)\sin(x)}{2\sin(x)\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x) + 2x(\cos^2(x) - \sin^2(x))} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\sin(x)}{\sin(x)\cos(x) + x\cos(2x)} \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2\cos(2x) - 2x\sin(2x)} = -\frac{1}{2}$$

№ 1324

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{tg(x)} - 1}{2\sin^2(x) - 1} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{tg^2(x)\cos^2(x)}}}{4\sin(x)\cos(x)} = \frac{1}{3}$$

№ 1325

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3} \stackrel{[0]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+xe^x-e^x}{3x^2} \stackrel{[0]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{e^x}}{6\cancel{x}} = \frac{1}{6}$$

№ 1327

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(2x)-2\arcsin(x)}{x^3} \stackrel{[0]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2} = \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x^2(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4x^2})} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1 \end{aligned}$$

№ 1343

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x^{x^x-1} &= \lim_{e^{(x^x-1)\ln(x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (x^x-1)\ln(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{(x^x-1)^{-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{(x^x-1)^{-2}x^x(1+\ln(x))}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^x-1)^2}{x(1+\ln(x))}} \\ (x^x)' &= (e^{x\ln(x)})' = x^x(1+\ln(x)) \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^x &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x^{-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}} = 1 \end{aligned}$$

ДЗ: 1329, 1330

29.11.2021

№ 1345

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^{\frac{k}{1+\ln(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{k\ln(x)}{1+\ln(x)}} = e^{k \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(x)}{1+\ln(x)} \stackrel{[\infty]}{=}} = e^{k \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}} = e^k$$

№ 1351

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \left(tg\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right) \right)^{\frac{1}{x}} &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(tg(\frac{\pi x}{2x+1}))}{x} \left[\frac{\infty}{\infty} \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{tg(\frac{\pi x}{2x+1}) \cdot \cos^2(\frac{\pi x}{2x+1}) \cdot (2x+1)^2}} = \\
&= e^{2\pi \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(2x+1)^2 \sin(\frac{2\pi x}{2x+1})}} = e^{2\pi \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(2x+1)^2}}{\sin(\frac{2\pi x}{2x+1})}} = e^{2\pi \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 \cdot (2x+1)^{-3}}{\cos(\frac{2\pi x}{2x+1}) \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{(2x+1)^2}}} = \\
&= e^{-4 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(2x+1) \cos(\frac{2\pi x}{2x+1})}} = e^0 = 1
\end{aligned}$$

№ 1353

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - x \ln(a)}{b^x - x \ln(b)} \right)^{\frac{1}{x^2}} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \ln\left(\frac{a^x - x \ln(a)}{b^x - x \ln(b)}\right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \ln\left(\frac{a^x - x \ln(a)}{b^x - x \ln(b)}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a^x - x \ln(a)) - \ln(b^x - x \ln(b))}{x^2} \left[\frac{0}{0} \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(b^x - x \ln(b)) \cdot (a^x \ln(a) - \ln(a)) - (a^x - x \ln(a)) \cdot (b^x \ln(b) - \ln(b))}{2x(a^x - x \ln(a))(b^x - x \ln(b))} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (b^x - x \ln(b)) \cdot \frac{\ln(a)(a^x - 1)}{x} - \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (a^x - x \ln(a)) \ln(b) \cdot \frac{b^x - 1}{x} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot (\ln^2(a) - \ln^2(b)) = \frac{\ln(\frac{a}{b}) \cdot \ln(ab)}{2} \\
L &= e^{\frac{\ln(\frac{a}{b}) \cdot \ln(ab)}{2}} = (ab)^{\frac{1}{2} \ln(\frac{a}{b})}
\end{aligned}$$

№ 1354

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x(x+1) - 1} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x(x+2)} = \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

№ 1357

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(x+1)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - \ln(x + \sqrt{x^2+1})}{\ln(x+1) \cdot \ln(x + \sqrt{x^2+1})} \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot (1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}})}{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - (x+1)}{(x+1)\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2} \cdot \left[\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{1+x} + \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{1+x^2}} \right])} = \\
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - (x+1)}{\sqrt{1+x^2} \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + (1+x) \ln(1+x)} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^2+1} \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + (1+x) \ln(1+x)} = \\
&-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

№ 1359

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e^{\left[\frac{0}{0}\right]}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} \cdot \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)}}_{e^{\ln((1+x)^{\frac{1}{x}})} = e} \cdot \frac{x - (x+1) \ln(x+1)}{x^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x+1) \ln(x+1)}{x^2} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - [\ln(x+1) + 1]}{2x} = \\
&= -\frac{e}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = -\frac{e}{2}
\end{aligned}$$

ДЗ: 1355, 1356

3.4 Экстремум функции

06.12.2021

$$y = f(x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}$$

Определение: Говорят, что $f(x)$ принимает в точке $x = x_0 \in \Omega$ минимальное (максимальное) значение, если $\exists \epsilon > 0$ - такое, то в ϵ окрестности: $|x - x_0| < \epsilon$ имеет место неравенство: $f(x) > f(x_0)$

Теорема: Если $x = x_0$ - точка экстремума $y = f(x)$, то необходимо выполнение условия: $f'(x_0) = 0$ (*)

Теорема 2: При этом если $f''(x_0) > 0$, то $f(x_0) = \min_{|x-x_0|<\epsilon} f(x)$

$$\left[f''(x_0) > 0, \text{ то } f(x_0) = \min_{|x-x_0|<\epsilon} f(x) \right]$$

№ 1414

$$\left. \begin{array}{l} y = 2 + x - x^2 \\ y' = 1 - 2x = 0 \leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\ y'' = -2 \end{array} \right\} \implies x = \frac{1}{2} - \text{точка максимума}$$

№ 1474

$$y = \frac{2-x^2}{1+x^4}$$

1. $D = \mathbb{R}$

2. Функция четна

3. Экстремум

$$y' = \frac{-2x(1+x^4)-4x^3(2-x^2)}{(1+x^4)^2} = \frac{2x \cdot (x^4-4x^2+1)}{(1+x^4)^2}$$

4. $y' = 0 \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{2 + \sqrt{5}} \end{cases}$

5. $y'' = \frac{-2(x^2+1)(3x^6+11x^2+1)}{(1+x^4)^3}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-x^2}{1+x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x^2}{1+x^4} = 0$$

10.12.2021

№ 2

$$y = \frac{x^3}{(1+x)(1-x^2)}$$

1. $D = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{2(1+x)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4(1-x)} = \infty$$

2. $y' = \frac{3x^2(1+x)^2(1-x) - x^3(1-x^2-2x(1+x))}{(1+x)^4(1-x)^2} = \frac{x^2(3+3x-3x^2-3x^3+3x^3+2x^2-x)}{(1+x)^4(1-x)^2} =$

$$= \frac{-x^2(x^2-2x-3)}{(1+x)^4(1-x)^2} = -\frac{x^2(x-3)}{(1+x)^3(1-x)^2} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$y(0) = 0$$

$$y(3) = -\frac{27}{32}$$

$$3. \quad y''(x) = \dots \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y''(x_k) > 0 &\Rightarrow x = x_k - \text{точка } \min f(x) \\ y''(x_k) < 0 &\Rightarrow x = x_k - \text{точка } \max f(x) \end{aligned}$$

13.12.2021