Домашняя работа №8 Дата: 28.10.2021

Задача 293.

Вычислить определитель порядка $2n$ $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

Решение:

Докажем с помощью метода матиматической индукции, что
$(1)\Delta_{2n} = (a-b)\cdot(a+b)^{2n-1}$

База: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)^{2-1}$

Индукционный переход: Пусть для некоторого $k = 2n$ верно утверждение (1). Докажем его для $k = 2n+2$:

$$\Delta_k = a \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}}_{(k-1)\times(k-1)} + b\cdot(-1)^{(2n)} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}}_{(k-1)\times(k-1)} = \Delta_{k-1}\cdot(a+b)$$

Тогда: $\Delta_{2n+2} = (a+b)\cdot\Delta_{2n+1} = (a+b)^2\cdot\Delta_{2n} = (a+b)^2\cdot(a+b)^{2n-1}\cdot(a-b) = $
$= (a+b)^{2(n+1)-1}\cdot(a-b)$

Таким образом $\Delta_{2n} = (a-b)\cdot(a+b)^{2n-1}$

Задача 296.

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{V_n - V_1 \\ \dots \\ V_2 - V_1}}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots \\ 1 & -n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{\Delta_n}$$

Чтобы не запутаться, заменим $-n$ на $-a$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots \\ 1 & -a & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -a & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}}_{\alpha_{n-1}}{}_{(n-1)\times(n-1)} +$$

$$+ (-1)^{n+1} \cdot a \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & -a & \dots & 0 \\ 1 & -a & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-1}}$$

$$\alpha_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -a & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{n\times n} = \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & -a \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -a & \dots & 0 \\ -a & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}}_{(-a)^{n-1}} +$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -a & \dots & 0 \\ -a & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & -a \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -a & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}}_{0} = (-a)^{n-1} \quad \Longrightarrow$$

$\implies \Delta_n = (-1)^{n+1} \cdot a \cdot \Delta_{n-1} + (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{n-2} \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} = (-1)^{n+1} \cdot a \cdot \Delta_{n-1} - (n-1) \cdot a^{n-2} = (-1)^{n+1} \cdot a \cdot ((-1)^n \cdot a \cdot \Delta_{n-2} - (n-2) \cdot a^{n-3}) - (n-1) \cdot a^{n-2} = -a^2 \cdot \Delta_{n-2} - a^{n-2} \cdot (n - 1 + (-1)^{n+1} \cdot (n-2))$

1. $n \mod 4 = 0 \implies n = 4k, \quad k \in \mathbb{N}$
   $\Delta_{4k} = -a^2 \cdot \Delta_{4k-2} - a^{4k-2} = -a^2 \cdot (-a^2 \cdot \Delta_{4k-4} - a^{4k-4}) - a^{4k-2} = a^4 \cdot \Delta_{4k-4}$
   $\Delta_{4k} = a^4 \cdot \Delta_{4(k-1)} = a^8 \cdot \Delta_{4(k-2)} = \ldots = a^{k-1} \cdot \Delta_4$
   $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -a \\ 1 & -a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -a & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 2a - a = -a^2 + a$
   $\Delta_4 = (-1)^5 \cdot a \cdot (a - a^2) - 3a^2 = a^3 - 4a^2$
   $\Delta_{4k} = (a)^{k-1} \cdot (a^3 - 4a^2) = a^{k+1} \cdot (a - 4) = n^{\frac{n}{4}+1} \cdot (n-4)$

2. $n \mod 2 = 1$

Задача 297.

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \ldots & n-1 \end{vmatrix}$

Решение:

Задача 374(b).

Вычислить определитель Δ посредством умножения на определитель δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}; \delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение:

Задача 391.

Доказать, что $\det \begin{pmatrix} E_m & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(D - CB)$. Здесь B и C – произвольные $m \times n$- и $n \times m$-матрицы, D – квадратная матрица порядка n.

Решение: