Домашняя работа №7 Дата: XX.YY.2021

Задача 256(c).

Вычислить определитель: c) $\begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & 2 & a & \dots & a \\ 0 & 0 & 3 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & 2 & a & \dots & a \\ 0 & 0 & 3 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

Задача 276.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \underset{\substack{S_2 - S_1 \\ S_3 - S_1 \\ S_4 - S_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} \underset{\substack{S_3 - 2S_2 \\ S_4 - 3S_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 1$$

Задача 295.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} \underset{\substack{S_3 - S_2 \\ \dots \\ S_n - S_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} \underset{S_2 - 2S_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-2) = -2(n-2)!$$

Задача 323.

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} \underset{\substack{S_2 - S_1 \\ \dots \\ S_{n-1} - S_n}}{=} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & a_2 & 1 & \dots & 0 & -a_n \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & -a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} \underset{S_n - S_1}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & -a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix} = (1+a_1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 0 & a_3 & \dots & 0 & -a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}}_{a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} +$$

$$+ (-1)^{n+1} \cdot a_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_2 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 0 & a_3 & \dots & 0 & -a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_2 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 0 & a_3 & \dots & 0 & -a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \end{vmatrix} \underset{S_2 - a_2 S_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -a_2 & \dots & -a_2 & -a_n - a_2 \\ 0 & a_3 & \dots & 0 & -a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & -a_n \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \end{vmatrix} \underset{S_3 + S_2 \frac{a_3}{a_2}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -a_2 & -a_2 & \dots & -a_2 & -a_n - a_2 \\ 0 & 0 & -a_3 & \dots & -a_3 & -\frac{a_n a_2 + a_n a_3 + a_2 a_3}{a_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \end{vmatrix} \underset{S_4 + S_3 \frac{a_4}{a_3}}{=} \dots = $$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -a_2 & \dots & -a_2 & -(a_n + a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -a_{n-2} & -\frac{a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} + \ldots + a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}{a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-4} \cdot a_{n-3}} \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \end{vmatrix} \underset{S_n + \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} S_{n-1}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -a_2 & \dots & -(a_n + a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{\prod\limits_{2 <= i_1 <= \ldots <= i_{n-2} <= n} a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_{n-2}}}{a_2 \cdot \ldots a_{n-1}} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot a_2 \cdot \ldots a_{n-2} \cdot \frac{\prod\limits_{2 <= i_1 <= \ldots <= i_{n-2} <= n} a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_{n-2}}}{a_2 \cdot \ldots a_{n-1}} =$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot \prod_{2 <= i_1 <= \ldots <= i_{n-2} <= n} a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_{n-2}}$$

$$\Delta = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n + a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} + a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_n + \ldots + a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Задача 306.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}$$

Решение:
