

**Задача 410(d).**

Обратить матрицу: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Решение:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1: R_1 - 3R_2 \\ R_2: R_2 - 3R_3 \\ R_3: R_3 - 2R_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 & 16 & | & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & | & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1: R_1 + 11R_3 \\ R_2: R_2 + 7R_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 16 & | & 1 & -3 & 11 & -22 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1: R_1 - 16R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Задача 410(f).**

Обратить матрицу: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

*Решение:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2: R_2 - R_1 \\ R_3: R_3 - R_1 \\ R_4: R_4 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & | & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & | & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{R_4: R_4 + R_2 + 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & | & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & | & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2: \frac{R_2}{2} \\ R_3: \frac{R_3}{2} \\ R_4: -\frac{R_4}{4}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & | & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1: R_1 - R_2 - 2R_3 - R_4 \\ R_2: R_2 + R_3 + R_4 \\ R_3: R_3 + R_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Задача 416.**

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

*Решение:*

**Задача 442(b).**

Найти ранг матрицы: 
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

*Решение:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 : R_1 - 2R_2 \\ R_3 : R_3 - 11R_2 \\ R_4 : R_3 - 2R_2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 12 & 16 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 : R_3 - 4R_1 \\ R_4 : R_4 + R_1 \\ R_1 \leftrightarrow R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг данной матрицы: 2

**Задача 442(c).**

Найти ранг матрицы: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$$

*Решение:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_4: R_4 - R_1 - 2R_2 - 3R_3 \\ R_5: R_5 - 4R_1 - 5R_2 - 6R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг данной матрицы: 3

### Задача 1033(b).

Найти собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) = 0 &\leftrightarrow \Delta_n = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ -1 & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-1}} - \\ - \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} &= -\lambda \cdot \Delta_{n-1} + \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ -1 & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-2}} = -\lambda \cdot \Delta_{n-1} + \Delta_{n-2} \end{aligned}$$

$G(z) = \Delta_0 + z \cdot \Delta_1 + z^2 \cdot \Delta_2 + \dots$  - производящая функция последовательности  $\{\Delta_i\}$

$$G(z) = \frac{1 + \lambda z - \lambda z^2}{1 + \lambda z - z^2} = \frac{1}{1 + \lambda z - z^2}$$

$$z = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$$

$$1 + \lambda z - z^2 = 0 \implies \lambda = z - \frac{1}{z} = \cos(\phi) + i \sin(\phi) - (\cos(\phi) - i \sin(\phi)) = 2i \sin(\phi)$$

$$z_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4}}{-2} = \cos(\phi) \pm i \sin(\phi)$$

$$\begin{aligned}
\frac{A}{z_1-z} + \frac{B}{z_2-z} &= \frac{1}{1+\lambda z-z^2} \leftrightarrow A(z_2-z) + B(z_1-z) = 1 \implies \begin{cases} z = z_1 : A(z_2 - z_1) = 1 \\ z = z_2 : B(z_1 - z_2) = 1 \end{cases} \leftrightarrow \\
\leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{-2i\sin(\phi)} = \frac{i}{2\sin(\phi)} \\ B = \frac{1}{2i\sin(\phi)} = -\frac{i}{2\sin(\phi)} \end{cases} \\
G(z) = \frac{\frac{A}{z_1-z}}{1-\frac{z}{z_1}} + \frac{\frac{B}{z_2-z}}{1-\frac{z}{z_2}} &= \frac{i}{2\sin(\phi) \cdot z_1} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ z^n \cdot \left(\frac{1}{z_1}\right)^n \right] + \frac{-i}{2\sin(\phi) \cdot z_2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ z^n \cdot \left(\frac{1}{z_2}\right)^n \right] = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \frac{i}{2\sin(\phi)} z^n \cdot ((\cos(\phi) + i\sin(\phi))^{-(n+1)} - (\cos(\phi) - i\sin(\phi))^{-(n+1)}) \right] = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ z^n \cdot \frac{i}{2\sin(\phi)} \cdot (\overbrace{\cos((n+1)\phi)} - i\sin((n+1)\phi) - \overbrace{\cos((n+1)\phi)} - i\sin((n+1)\phi)) \right] = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ z^n \cdot \frac{\sin((n+1)\phi)}{\sin(\phi)} \right] \implies \Delta_n = \frac{\sin((n+1)\phi)}{\sin(\phi)} \\
\Delta_n = 0 \leftrightarrow \sin((n+1)\phi) = 0 \leftrightarrow \phi = \frac{\pi k}{n+1}, k \in \mathbb{Z} \implies \lambda = 2i\sin(\phi) = 2i\sin\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

### Задача 1034.

Найти собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda E) = 0 \leftrightarrow \Delta_n &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
\Delta_n &= -\lambda \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-1}} - \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

**Задача 1035.**

Найти собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ y & 0 & x & \dots & x \\ y & y & 0 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

*Решение:*

---