ESCUELA SUPERIOR DE COMPUTO

TEORÍA COMPUTACIONAL

EJERCICIOS 4

UNIDAD 1

Rubio Haro Rodrigo R.

CDMX. OCTUBRE, 2020. 2CM10

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Conceptos Fundamentales

Lenguajes y Sublenguajes

3. Demostración de Propiedades

Elegir 2 propiedades de cada operación con lenguajes y demostrar.

- **1. ¿Qué propiedades verifica la concatenación de cadenas?**

  La concatenación de cadenas presenta la propiedad asociativa, sin embargo no presenta la conmutativa. Además, la longitud de las cadenas concatenadas será igual a la suma de las longitudes de ambas cadenas. La última propiedad que presenta es la del elemento neutro, la cadena vacía que no modifica nuestra cadena.

- **2. Para todo lenguaje A se tiene que ε ∈ A*, ¿Cuándo ε ∈ A?**

  Si, puesto que la definición de la clausura de Kleen presentada por **A*** nos dice que se incluye ε, lo que sería independiente de si ε ∈ A.

- **3. La cadena vacía ε ¿es un prefijo propio de sí misma?**

  Si tenemos un lenguaje L, que tiene como elemento **ε,** entonces **ε** es un prefijo.

- **4. La inversa o transpuesta de una palabra ω es la imagen reflejada de ω. Probar formalmente que $(\omega y)^{-1} = y^{-1}\ \omega^{-1}$**

$$w^{I} = \begin{cases} w, & \text{si } w = \varepsilon \\ y^{I}a, & \text{si } w = ay \text{ por tanto } a \in \Sigma \text{ e } y \in \Sigma^{*} \end{cases}$$

$$(wy)^{-1} = y^{-1}w^{-1} \ , (w)^{I} = y^{I}a$$

$$y^{-1}w^{-1} = \ y^{I}a; \ \textit{puesto que } w = ay$$

- **5. Para el ∑= {a,b} y usando la aplicación ∑*→∞ dada la demostración del Teorema: "El número de lenguajes sobre un alfabeto es infinito no numerable" ¿Cuántas palabras de longitud 3 hay? ¿Y de longitud 5?**

  Hacemos las combinaciones para longitud de 3.

$$\{aaa, aab,\ aba,\ abb,\ baa,\ bab,\ bba,\ bbb\} \ = 2^{3} = \ 8$$

  Mientras que para una longitud de 5

$$\{aaaaa, aaaab,\ aaaba,\ aaabb,\ aabaa,\ aabab,\ aabba,\ aabbb,\ abaa, \ldots ,\ bbbbb\ \} \ = 2^{5} \ = 32$$

- **6. Dados los lenguajes A, B y C sobre un alfabeto ∑, demostrar que se cumple lo siguiente:**

  A· (B ∪ C) = A· B ∪ A· C

  Sean L = {a, b}, M={c, d} y N = {e, f} lenguajes,

  entonces $L\cdot (M \cup N) = L\cdot\ M \cup L\cdot N\ (distributiva)$

  $\{a,\ b\}\ (\{c,\ d\} \cup \{e,\ f\}) = \{a,\ b\}\{c,\ d\} \cup \{a,\ b\}\{e,\ f\}$

  $\{a,\ b\}\ \{c,\ d,\ e,\ f\} = \{ac,\ bd\} \cup \{ae,\ bf\}$

  $\{ac,\ bd,\ ae,\ bf\} = \{ac,\ bd, ae,\ bf\},\ entonces\ se\ cumple\ la\ propiedad\ distributiva$

  (B ∪ C)· A = B· A ∪ C· A

  $Puesto\ que\ se\ cumple\ la\ propiedad\ distributiva,\ se\ cumple\ que\ (B \cup C)\cdot A = B\cdot A \cup C\cdot A$

  (A ∪ B)-1 = A^{-1} ∪ B^{-1}

  Sean L = {ab, cd} y M = {ef, gh} lenguajes, entonces $(L \cup M)^{-1} = L^{-1} \cup M^{-1}$

  $(\{ab,\ cd\} \cup \{ef,\ gh\})^{-1} = \{ab,\ cd\}^{-1} \cup \{ef,\ gh\}^{-1}$

  $\{ab,\ cd,\ ef,\ gh\}^{-1} = \{ba,\ dc\} \cup \{fe,\ hg\}$

  $\{ba,\ dc,\ fe,\ hg\}^{-1} = \{ba,\ dc,\ fe,\ hg\},\ donde\ vemos\ que\ se\ cumple\ que\ (L \cup M)^{-1} = L^{-1} \cup M^{-1}$

  $Por\ tanto,\ se\ cumplirá\ que\ (A \cup B)^{-1} = A^{-1} \cup B^{-1}$

- **7. ¿ ε , es un espacio en blanco? Justifique su respuesta.**

  La cadena vacía no es un espacio en blanco, puesto que "el espacio en blanco" es considerado un símbolo, entonces formaría parte de nuestro alfabeto como un símbolo más. La cadena vacía es la ausencia de algún elemento, se distingue más fácil esta diferencia con una propiedad.

  $$L\varepsilon = \varepsilon L = L$$

  donde la cadena vacía ε no agrega un espacio en blanco, sino que al no tener ningún símbolo el lenguaje queda igual.

- **8. El conjunto Σ^0 es especial, tiene un solo elemento llamado ε , que corresponde a la cadena vacía. Si una cadena x ∈ Σ^k entonces decimos que su largo es |x| = k (por ello |ε| = 0). Demostrar que ∑ + = ∑* − {ε} obtener las cadenas sobre ∑={a,b} para Σ^0, Σ^1, Σ^2, Σ^3.**

  $\sum^0 = \{\varepsilon\}$

  $\sum^1 = \{a, b\}$

  $\sum^2 = ZZ = \{a, b\}\{a, b\} = \{aa,\ ab,\ ba,\ bb\}$

$\sum^3 = ZZZ = \{a,b\}\{a,b\}\{a,b\} = \{aa,\ ab,\ ba,\ bb\}\{a,b\} = \{aaa,\ aba,\ baa,\ bba,\ aab,\ abb,\ bab,\ bbb\}$

$\sum^+ = \sum^* - \{\varepsilon\}$

Siendo $\sum^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L$, $\sum^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L$

Entonces para demostrar $\sum^+ = \sum^* - \{\varepsilon\}$

basta con $\bigcup_{i=0}^{\infty} L - \{\varepsilon\},\ y\ puesto\ que\ el\ primer\ elemento\ i = 0\ es\ \{\varepsilon\},\ entonces$

$\bigcup_{i=0}^{\infty} L - \{\varepsilon\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} L = \sum^+$

- **9. Llamaremos alfabeto a cualquier conjunto finito no vacío. Usualmente lo denotaremos como ∑. ¿Los elementos de ∑ se llamarán?**

  Los llamaremos símbolos.

  Alfabeto: conjunto de **símbolos** finito y no vacío

- **10. El conjunto de todas las palabras Σ* es un lenguaje. ¿El conjunto vacío ∅ es un lenguaje, y el conjunto L = { ε } es un lenguaje? ¿Por qué?**

  Σ*. Debido a que un alfabeto puede ser considerado un lenguaje formado por palabras de un solo símbolo.

  Conjunto ∅. El conjunto vacío Ø y el conjunto formado por la cadena vacía { **ε** } son lenguajes . La cadena vacía se considera un elemento del lenguaje.