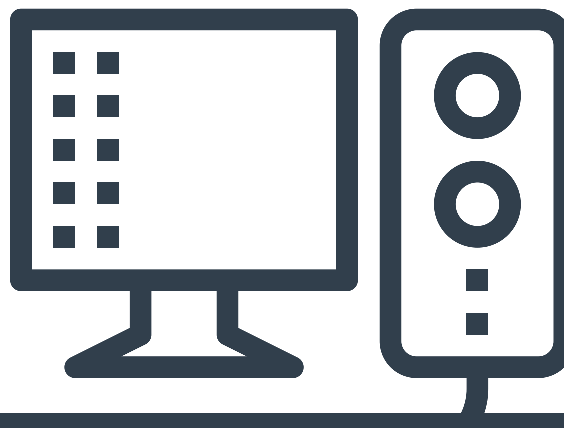
ESCUELA SUPERIOR DE COMPUTO



TEORÍA COMPUTACIONAL

EJERCICIOS 3

PROPIEDADES DE OPERACIÓN DE LENGUAJES

Rubio Haro Rodrigo R.

CDMX. OCTUBRE, 2020. 2CM10

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Conceptos Fundamentales

Lenguajes y Sublenguajes

3. Demostración de Propiedades

Elegir 2 propiedades de cada operación con lenguajes y demostrar.

Sean: ∑={a, b, c}

L = { ε , abc, aab, aabb, bbc, cb, cab}

M = {aa, ab, aabb, bab, cb, cc}

- **1.1 Unión: Conmutativa**

  Para demostrar $L1 \cup L2 = L2 \cup L1$

  Obtenemos que $L \cup M = \{\varepsilon, abc, aab, aabb, bbc, cb, cab, aa, ab, bab, cc\}$

  Obtenemos que $M \cup L = \{aa, ab, aabb, bab, cb, cc, \varepsilon, abc, aab, bbc, cab\}$

  Ordenándolos comprobamos que se cumple la ley conmutativa.

- **1.2 Unión: Idempotencia**

  Para demostrar $L \cup L = L$

  Obtenemos que $M \cup M = \{aa, ab, aabb, bab, cb, cc\} \cup \{aa, ab, aabb, bab, cb, cc\}$

  $M \cup M = \{aa, ab, aabb, bab, cb, cc\} = M$

  Comprobamos que se cumple la idempotencia.

- **2.1 Intersección: Conmutativa**

  Para demostrar $L1 \cap L2 = L2 \cap L1$

  Obtenemos que $L \cap M = \{aa, aabb, cb\}$

  Obtenemos que $M \cap L = \{aabb, cb, aa\}$

  Ordenándolos comprobamos que se cumple la ley conmutativa.

- **2.2 Intersección: Idempotencia**

  Para demostrar $L \cap L = L$

  Obtenemos que $M \cap M = \{aa, ab, aabb, bab, cb, cc\} \cap \{aa, ab, aabb, bab, cb, cc\}$

  $M \cap M = \{aa, ab, aabb, bab, cb, cc\} = M$

  Comprobamos que se cumple la idempotencia.

- **3.1 Concatenación: No es conmutativa**

  Para demostrar $\neg(\forall L1, L2: L1L2 = L2L1)$

  Sean L = { ε , abc, aab, aabb, bbc, cb, cab} y M = {aa, ab, aabb, bab, cb, cc}

  Obtenemos que $LM = \{\varepsilon aa, abcab, aabaabb, aabbbab, bbccb, cbcc, cab\}$

  Mientras que $ML = \{aa\varepsilon, ababc, aabbaab, babaabb, cbbbc, cccb, cab\}$

  Analizando el primer elemento nos damos cuenta que $\varepsilon aa \neq aa\varepsilon$

  Por tanto, la concatenación no es conmutativa.

- **3.2 Concatenación: No es idempotente**

  Para demostrar $\neg(\forall L: LL = L)$

  Sean L = { ε , abc, aab, aabb, bbc, cb, cab} y M = {aa, ab, aabb, bab, cb, cc}

  Obtenemos que $LL = \{\varepsilon, abcabc, aabaab, aabbaabb, bbcbbc, cbcb, cabcab\}$

  Mientras que $MM = \{aaaa, abab, aabbaabb, babbab, cbcb, cccc\}$

  Analizando el segundo elemento tanto en LL cómo en MM nos damos cuenta de que $abcabc \neq abc$; y $aaaa \neq aa$ respectivamente. Por tanto, comprobamos que no se cumple la ley de idempotencia para la concatenación.

- **4. Complemento**

  $\neg W(\Sigma) = \varnothing$

  Puesto que $W(\Sigma)$ representa al conjunto universo, la negación del universo es el conjunto nulo o conjunto vacío, puesto que este no contiene ningún elemento del universo. Se puede demostrar como se hace en teoría de conjuntos.

  $$U' = \varnothing;\ donde\ x \in U'$$

  $$entonces\ x \notin U\ \ y\ finalmetne\ x \in \varnothing$$

  $\neg\neg L = L$

  Siendo ∑={a, b, c} y M = {aa, ab, aabb, bab, cb, cc}, $M = \{x \mid x \in W(\Sigma)\ y\ x \in M\}$ entonces $\neg L = \{x \mid x \in W(\Sigma)\ y\ x \notin L\}$

  $\neg\neg M = \neg(\neg M);\ \neg(\neg M) = \neg\{x \mid x \in W(\Sigma)\ y\ x \notin M\}$

  $\neg\neg M = \{x \mid x \in W(\Sigma)\ y\ x \in M\},\ por\ tanto\ \neg\neg M = M$

  Demostrando que la doble negación es equivalente a no negar.

- **5. Potencia de un lenguaje**

  $L^{i+1} = L^iL = LL^i$ $(donde\ i > 0)$

  Siendo M = {aa, ab, aabb, bab, cb, cc}, entonces

  $M^3 = M^2M = \{aaaa,\ abab,\ aabbaabb,\ babbab,\ cbcb,\ cccc\}\{aa,\ ab,\ aabb,\ bab,\ cb,\ cc\}$

$$U' = \varnothing;\ donde\ x \in U'$$

$$entonces\ x \notin U\ \ y\ finalmetne\ x \in \varnothing$$

  $\neg\neg L = L$

  Siendo ∑={a, b, c} y M = {aa, ab, aabb, bab, cb, cc}, $M = \{x \mid x \in W(\Sigma)\ y\ x \in L\}$ entonces $\neg L = \{x \mid x \in W(\Sigma)\ y\ x \notin L\}$

  $\neg\neg M = \neg(\neg M);\ \neg(\neg M) = \neg\{x \mid x \in W(\Sigma)\ y\ x \notin L\}$

  $\neg\neg M = \{x \mid x \in W(\Sigma)\ y\ x \in L\},\ por\ tanto\ \neg\neg M = M$

  Demostrando que la doble negación es equivalente a no negar.

- **6. Inverso o Reflexión**

  Cerrada: L⊆W(Σ) ⇒ L^{-1}⊆W(Σ)

  sea M = {aa, ab, aabb, bab, cb, cc}, entonces

  $M^{-1} = \{aa,\ ba,\ bbaa,\ bab,\ bc,\ cc\}\ y\ vemos\ que\ x \in W(\Sigma),$

  por tanto, se cumple que L⊆W(Σ) ⇒ L^{-1}⊆W(Σ)

- **7.1 Diferencia: No asociativa**

  No es asociativa: $(\forall\ L_1, L_2 :\ (L_1 - L_2) - L_3 = L_1 - (L_2 - L_3))$

  Sea un nuevo lenguaje N = {aa, ab, aab, bca}, M = {aa, ab, aabb, bab, cb, cc} y L = { ε , abc, aab, aabb, bbc, cb, cab}, entonces

  $(N - M) - L \neq N - (M - L)$
  $(N - M) - L = \{aab,\ bca\} - \{\varepsilon,\ abc,\ aab,\ aabb,\ bbc,\ cb,\ cab\} = \{bca\}$, mientras que
  $N - (M - L) = \{aa,\ ab,\ aab,\ bca\} - \{aa,\ ab,\ bab,\ cb,\ cc\} = \{aab,\ bca\}$

  demostrando que no hay asociatividad para la diferencia.

- **7.2 Diferencia: No idempotente**

  No es idempotente: ∀ L: L-L=∅, sea M = {aa, ab, aabb, bab, cb, cc}

  $M - M = \{aa,\ ab,\ aabb,\ bab,\ cb,\ cc\} - \{aa,\ ab,\ aabb,\ bab,\ cb,\ cc\} = \varnothing$

- **8.1 Clausura:**

$L^* = L_0 \cup (U_{i=1}\ L\ ) = L_0 \cup L^+ = \{\lambda\} \cup L^+$**,** sea M = {aa, ab, aabb, bab, cb, cc}

$M^* = M_0 \cup (U_{i=1}\ M\ ) = M_0 \cup M^+ = \{\lambda\} \cup M^+$

$M^* = \{aa,\ ab,\ cb,\ cc,\ bab,\ aaab,\ aabb, aacb,\ aacc,\ abaa,\ abcb, ...\}$

$M^* = M_0 \cup (U_{i=1}\ M\ ) = \{\varepsilon\} \cup \{aa,\ ab,\ cb,\ cc,\ bab,\ aaab,\ aabb,\ aacb,\ aacc,\ abaa, ...\}$

$M^* = M_0 \cup M^+ = \{\lambda\} \cup M^+ = \{\varepsilon\} \cup \{aa,\ ab,\ cb,\ cc,\ bab,\ aaab,\ aabb,\ aacb,\ aacc,\ abaa, ...\}$

- **8.2 Clausura:**

$L^+ = LL^* = L^*L$**,** sea M = {aa, ab, aabb, bab, cb, cc}

$MM^* = \{aa,\ ab,\ aabb,\ bab,\ cb,\ cc\}\{aa,\ ab,\ cb,\ cc,\ bab,\ aaab,\ aabb, aacb,\ aacc,\ abaa,\ abcb, ...\}$

$MM^* = \{aaaa,\ abab,\ cbaabb,\ cccb,\ babbab,\ aaabcc,\ aabb, aacb,\ aacc,\ abaa,\ abcb, ...\}$

$MM^* = \{aaaa,\ abab,\ cbaabb,\ ccbab,\ babcb,\ aaabcc,\ aabb, aacb,\ aacc,\ abaa,\ abcb, ...\}$

A pesar de que no hay concatenación conmutativa, esta se presenta solamente por que tenemos la Clausura de Kleene, lo cual generará las cadenas que la concatenación conmutativa por si sola hace diferencia dependiendo el orden.

- **Leyes de Morgan, Complemento...**

Las leyes de Morgan, así como las del complemento, se pueden demostrar, de igual manera con teoría de conjuntos. Se obviarán.