Logistic 模型与混沌现象

钮博恒*1)

*（兰州大学物理科学与技术学院，兰州 730000）

摘要 Logistic 模型是一种研究昆虫种群数量变化的数学模型，当改变其中的增殖系数μ时，种群数量随时间的变化可能出现周期性的分岔现象，当μ持续增加时，会出现“混沌”现象。这种非线性的混沌现象，表现出对初始数值的敏感性，这种敏感性使得初值的微小变化将引起完全不同的结果。它说明混沌现象的不可预测性。我们可以利用计算机强大的计算能力，来帮助我们了解混沌现象。

关键词 Logistic 模型，混沌，分岔，非线性，计算机模拟

LOGISTIC MODEL AND CHAOS

Niu Boheng*1)

*(*School of Physical Science and Technology Lanzhou University*，*Lanzhou* 730000，*China*)

Abstract Logistic model is a kind of mathematical model researching the quantity of species. When the multiplication coefficient changed, the quantity of the population will change periodically. With the increase of the multiplication coefficient, we would observe the *chaos.* The nonlinear phenomena of chaos show that it's sensible to the original value, and the tiny change will lead to a totally different result.

Key words Logistic model，chaos，bifurcation, nonlinearity, computational simulation

引 言

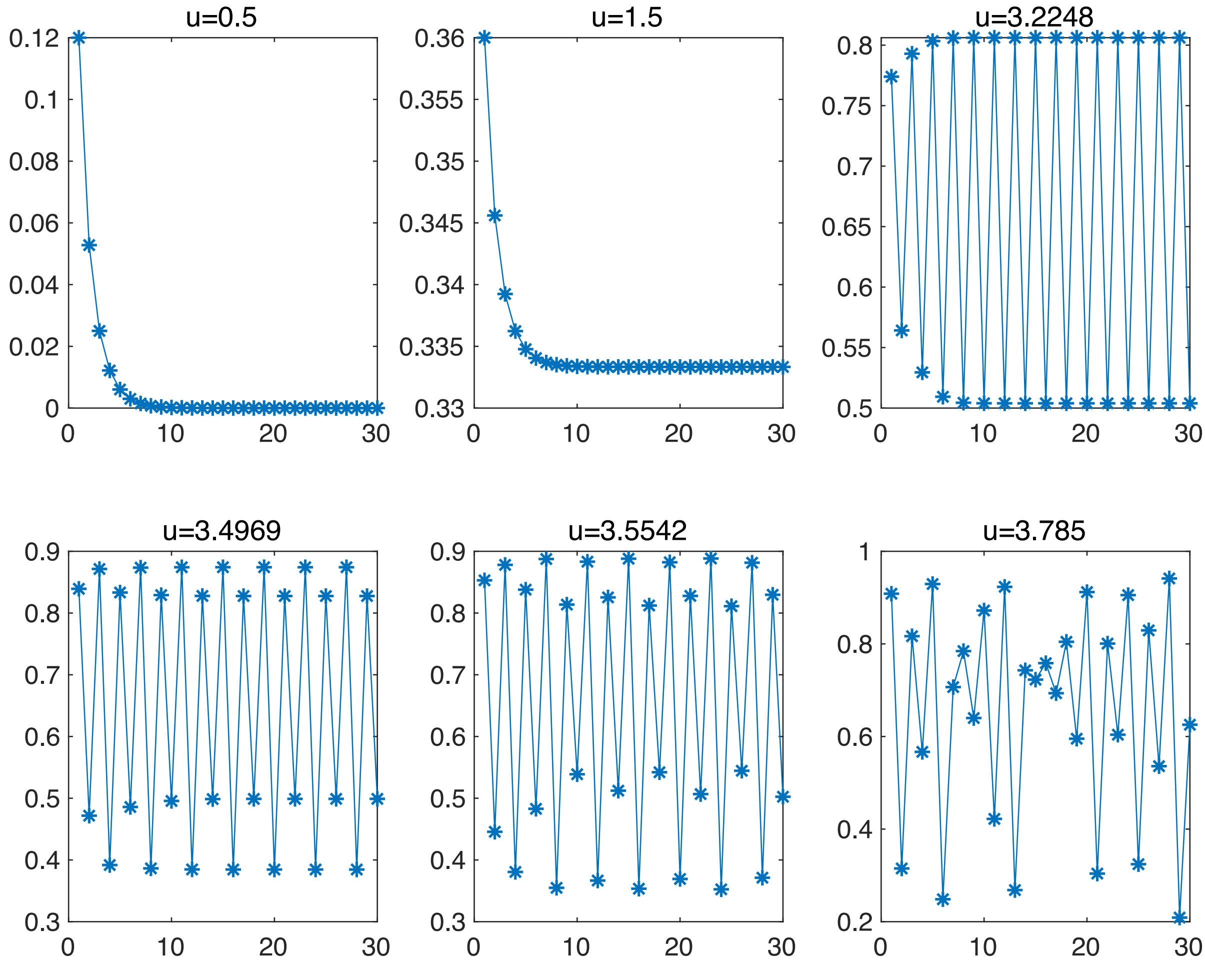
由于混沌现象对初值的敏感性及其不可预测性，一般不能给出系统达到混沌时的解析公式，所以，利用计算机来模拟计算混沌的过程，可视化分岔的节点、分岔数，就成了一个有效的手段。采用不同的增殖系数μ，绘制对应的数量-时间序列，可以初步观察模型随着μ的周期变化行为，一直到混沌。还可以直接作出以μ为变量的分岔图，即费根鲍姆图。利用分岔点的μ值，计算相邻分岔点的间距之比，所得极限值叫费根鲍姆δ常数。

1 周期迭代和混沌的初步观察

Logistic 模型最初是一个描述自然界生物种群中昆虫数目变化的数学模型，它由上一年的昆虫数目x_n以及增殖系数μ来预测次年的昆虫数目x_{n+1}。其数学递推式为

$$x_{n+1} = \mu(x_n - x_n^2) \quad (0 < \mu < 4, 0 < x < 1)$$

下面来研究这个模型反映出来的生物繁殖规律先选定一个固定的初始值$x_0 = 0.6$，再分别选择六个分布在区间(3.4496,3.5441)(3.5441,3.5644)(3.56994762,4)上的增殖系数μ，由迭代关系式得到六幅种群数x与迭代次数的分布图。



其作图程序代码如下

迭代并作图的主函数：

```
function logistic(mu,j)
x = 0.6;
x_store = 1:30;
for i = 1:30
    x = mu.*(x-x.^2);
    x_store(i) = x;
end
i = 1:30;
subplot(2,3,j);
plot(i,x_store,'*-');
title(['u=',num2str(mu)]);
end
```

储存μ的数值并且循环调用主函数以绘图的函数：

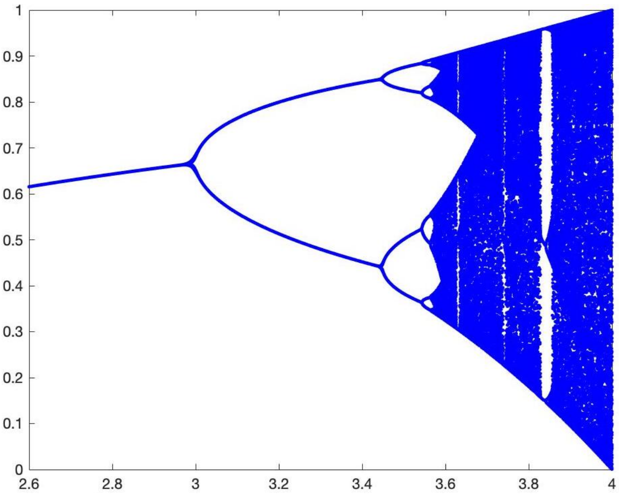
```
mu = [0.5;1.5;3.2248;3.4969;3.5542;3.7850];
for n = 1:6
logistic(mu(n),n);
end
```

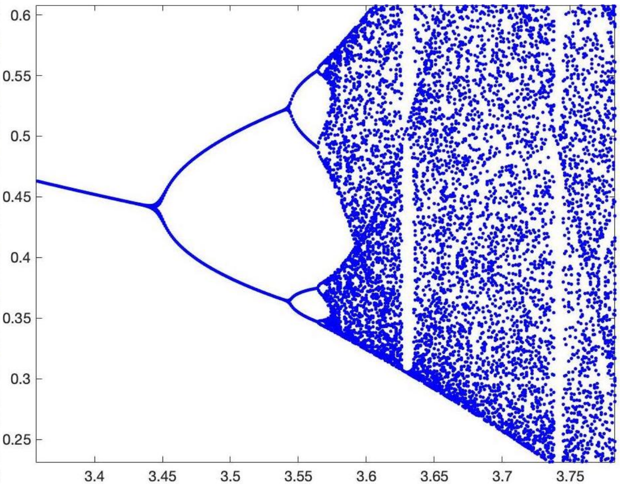
从绘制的种群数-迭代次数图中我们可以看到，对于给定的初始值$x_0 = 0.6$，当μ分别取0～4的不同值时，得到的结果往往有很大的不同：

$\mu = 0.5$,x趋于0。无分岔，这种情况下种群灭亡。
$\mu = 1.5$,x趋于0.334。无分岔，数量趋于稳定。
$\mu = 3.2248$,x出现二分岔。
$\mu = 3.4969$,x出现四分岔。
$\mu = 3.785$,x呈现混沌，无明显的周期分岔现象。

2 费根鲍姆图

以上对于图像的初步观察可以发现，μ值决定了系统的周期性分岔或混沌的行为，为了研究这种规律，以μ值为变量，x的数值为因变量，作图并观察其周期分岔行为





放大其局部，观察周期分岔处

可以较为明显地看到，随着μ的改变，对应着不同的周期分岔，直至混沌。下面是使用矢量化编程的绘图代码

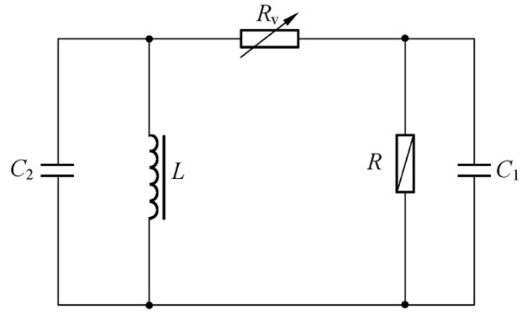
```
function feigenbam()
u = 2.6:0.001:4;
X = ones(250,length(u));
X(1,:) = 0.6.*X(1,:);
for i = 1:250
X(i+1,:) = u.*(X(i,:)-X(i,:).^2);
end
plot(u,X(150:end,:),'b.')
end
```

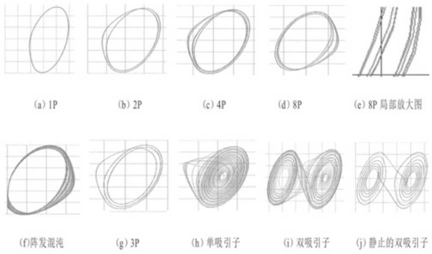
其中u是一个长度为 1401 的行向量，用来更新μ
的数值。X 为一个 250 行 1401 列的矩阵，用来存储 250 次迭代，对应不同的μ的迭代结果。

3 费根鲍姆常数

费根鲍姆常数是指：

$F_{\delta} = lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n-\mu_{n-1}}{\mu_{n+1}-\mu_n}$这是一个普适常数，实验上可以对其进行测量





该电路含有一种非线性元件 R，在该非线性因素的影响下，可以观察到由周期分岔到混沌的现象通过测量电压，可以由费根鲍姆常数的定义式，取到第 n 项计算，便可以得到其近似值。

4　混沌下初值的敏感性

当μ值较大时，系统进入混沌状态。对于种群初始值x_0，每次只改变一个小量，观察在混沌状态下种群群数量变化规律。

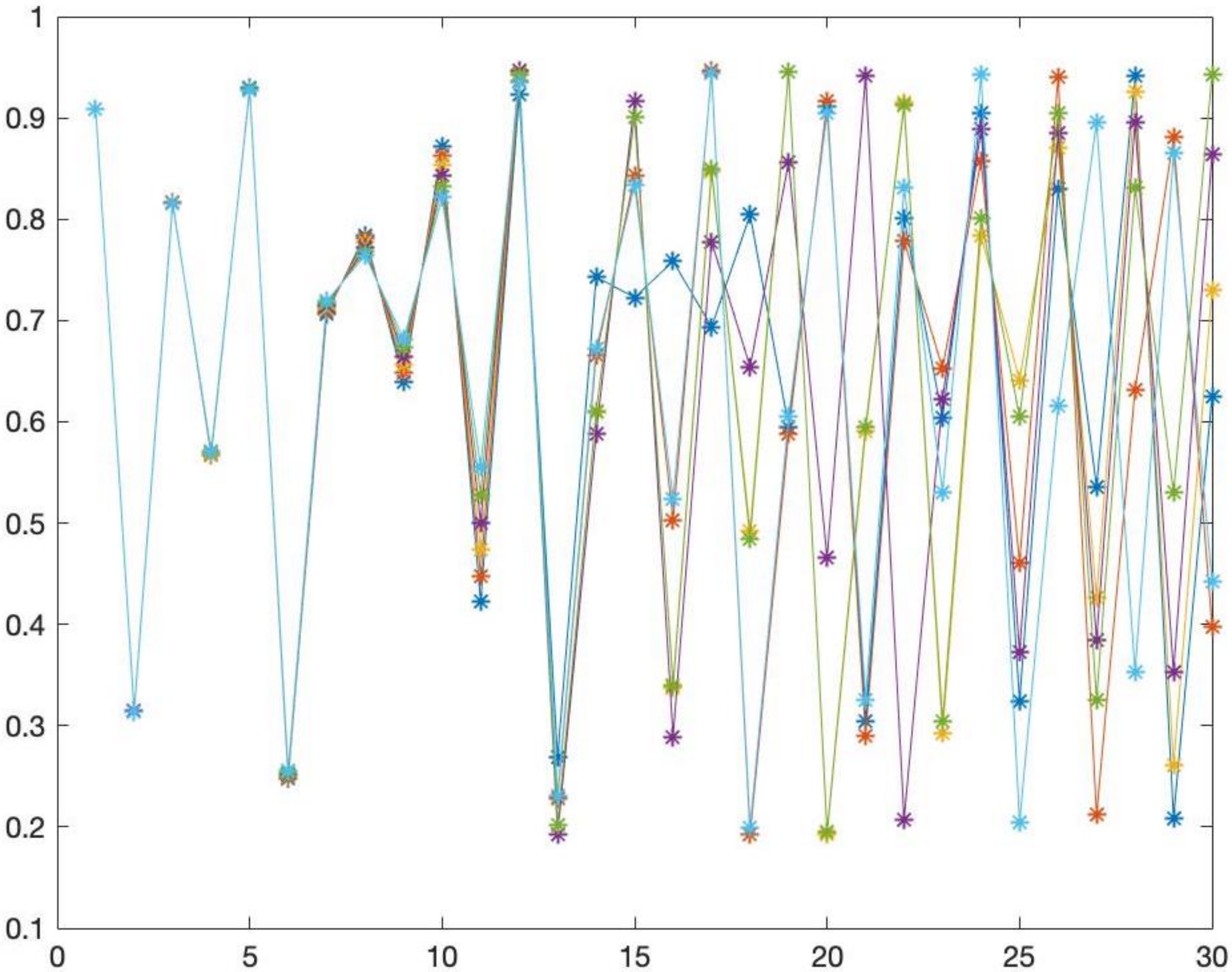


图 5

下面改写之前的作图代码，将绘制子图部分改为重叠绘制，以更加清楚地观察变化，将改变μ值改写为变化x_0的值。可以看到，虽然初始值每次只改变 0.0001，种群的变化趋势只在最初的 10 次迭代保持一致，之后的变化相互之间没有明显规律，表现出混沌下系统对初值的敏感性。

```
function logistic_test(mu,x)
x_store = 1:30;
for i = 1:30
    x = mu.*(x-x.^2);
    x_store(i) = x;
end
i = 1:30;
plot(i,x_store,'*-');
hold on;
end
```

循环调用函数，实现绘图：

```
mu = 3.785;
x0 = [0.4,0.4001,0.4002,0.4003,0.4004,0.4005];
for j = 1:6
    logistic_test(mu,x0(j))
end
```

参考文献

1 彭芳麟，计算物理基础，北京，高等教育出版社 2010

2 许成伟.费根鲍姆常数的实验测量[J].物理实验,2008(05):34-36.