



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

---

# **Estudio de las aplicaciones de las cónicas mediado por la modelación desde una visión analítica**

**Isabel Pérez Gutiérrez**

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de ciencias

Bogotá D.C., Colombia

2012



# **Estudio de las aplicaciones de las cónicas mediado por la modelación desde una visión analítica**

**Isabel Pérez Gutiérrez**

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales**

Director:

Crescencio Huertas Campos  
Matemático, Magister en educación

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de ciencias

Bogotá D.C., Colombia

2012



*A mis hijos Sofía Carolina y Fabián Felipe*

*“La imagen de la matemática se enmarca dentro de la imagen del mundo, la imagen del matemático dentro de la del hombre y la imagen de la enseñanza de la matemática dentro de la de la sociedad.”*

**Freudenthal 1991**



## **Agradecimientos**

A la Universidad Nacional de Colombia que decidió recibirme en sus aulas y dispuso de los mejores profesionales para mi formación.

Al profesor Crescencio Huertas Campos por las acertadas y pertinentes observaciones para el desarrollo de este trabajo.

A la profesora Clara Helena Sánchez, tanto por su preocupación por la formación docente y su compromiso con la Universidad así como por su decidido empeño en perfeccionar esta Maestría de manera continua.

A mis grandes amigos y compañeros de estudio: Elizabeth Zambrano Llovera, Alberto Vera Tapias y Alexis Pinzón Castro, por su apoyo incondicional y continuo durante estos dos años.

A los estudiantes de grado décimo en el 2011 de la escuela Normal Superior de Villavicencio, por permitirme desarrollar la propuesta y colocar buen ánimo durante las sesiones de clase.

A mi familia que siempre ha confiado en mí, a Sofy por soportar mis largas ausencias aun estando en casa y a Pipe por ser mi ángel en esas extenuantes jornadas de estudio.

A todas las personas que de forma directa o indirecta contribuyeron a la realización de este trabajo y a mi crecimiento profesional.





## Resumen

El presente trabajo muestra el diseño y la aplicación de una Unidad Didáctica para conceptualizar las cónicas elipse, parábola e hipérbola desde una versión geométrica hacia una analítica dirigida a estudiantes de décimo grado que empiezan su educación media técnica. La Unidad Didáctica está pedagógicamente enmarcada dentro de la Educación Matemática Realista (EMR), presenta tres situaciones 1. Cortes a un cono. 2. Capturando cónicas y 3. Cónicas desplazadas, con sus actividades así como observaciones durante su diseño y aplicación.

**Palabras clave:** Educación matemática Realista, educación media, didáctica, modelación, geometría analítica, cónicas.

## Abstract

The present work shows the design and the application of a Didactic Unit to conceptualize the conical ellipse, parable and hyperbola from a geometric version towards the analytical one directed students of tenth degree that they begin his average technical education. The Didactic Unit is pedagogically framed inside the Mathematical Realistic Education (EMR), 1 presents three situations. Spanish Parliament to a cone. 2. Capturing conical and 3. Conical displaced, with his activities as well as observations during his design and application.

**Keywords:** Realistic mathematics education, secondary education, teaching, modeling, analytic geometry, conics.



# Contenido

Contenido	Pág.
<b>1. Identificación del problema.....</b>	<b>3</b>
Objetivos.....	4
Objetivo general .....	4
Objetivos específicos .....	4
<b>2. Aspectos históricos sobre las cónicas .....</b>	<b>5</b>
<b>3. Aspectos disciplinares.....</b>	<b>11</b>
3.1 Cónicas en la vida real .....	11
3.1.1 La parábola.....	12
3.1.2 La elipse .....	12
3.1.3 La hipérbola.....	12
3.2 Expresión analítica de las cónicas .....	13
3.2.1 Ecuación general de segundo grado en dos variables .....	13
3.2.2 Ecuación general de una cónica desplazada.....	13
3.2.3 Identificación de cónicas mediante el discriminante.....	14
3.3 Definición de conceptos .....	14
3.3.1 Tangente a una curva.....	14
3.3.2 Definición de una recta tangente .....	15
3.3.3 Ley de reflexión .....	16
3.3.4 Propiedad óptica de la parábola: .....	18
3.3.5 Propiedad óptica de la elipse.....	18
3.3.6 Propiedad óptica de la hipérbola .....	19
3.3.7 La parábola .....	20
3.3.8 La elipse.....	21
3.3.9 La hipérbola.....	22
<b>4. Fundamentación pedagógica.....</b>	<b>23</b>
4.1 Documentos del Ministerio de Educación Nacional.....	23
4.2 Los libros de texto y las propuestas de enseñanza de las cónicas.....	26
4.3 Plan de área institucional .....	28
4.4 Proceso general: modelación.....	28
<b>5. Propuesta didáctica.....</b>	<b>31</b>
5.1 Generalidades sobre la propuesta .....	31
5.1.2 Grupo de trabajo .....	31
5.1.3 Tiempo de estructuración de la propuesta .....	32
5.1.4 Estructura de la propuesta.....	32

---

<b>5.2 Diseño e implementación de la propuesta.....</b>	<b>34</b>
5.2.1 Situación No.1: Cortes a un cono .....	35
5.2.2 Situación No.2: Capturando cónicas .....	42
5.2.3 Situación No. 3: Cónicas desplazadas .....	49
<b>6. Conclusiones y recomendaciones .....</b>	<b>55</b>
Conclusiones.....	55
Recomendaciones.....	57
<b>A. Anexo: Matriz de contenidos grado décimo.....</b>	<b>59</b>
<b>B. Anexo: <i>Plan estratégico del área de matemáticas</i> para grado 10°, cuarto período.....</b>	<b>61</b>
<b>C. Anexo: Los principios de la educación matemática realista .....</b>	<b>63</b>
<b>D. Anexo: Actividades Situación 1: Cortes a un cono.....</b>	<b>77</b>
<b>E. Anexo: Actividades Situación: Capturando cónicas.....</b>	<b>81</b>
<b>F. Anexo: Actividades Situación 3: cónicas desplazadas.....</b>	<b>87</b>
<b>G. Anexo: Patrones de Moiré .....</b>	<b>95</b>
<b>Bibliografía .....</b>	<b>97</b>

## Lista de figuras

	Pág.
<b>Figura 2-1:</b> Secciones cónicas según Mecnemo y Apolonio .....	8
<b>Figura 3-1 :</b> Tangente a una curva.....	15
<b>Figura 3-2 :</b> Recta tangente a la curva $C$ .....	16
<b>figura 3- 3 :</b> ley de reflexión .....	16
<b>Figura 3-4 :</b> Superficies cónicas.....	17
<b>Figura 3-5 :</b> Propiedad reflexiva de la parábola.....	18
<b>Figura 3-6 :</b> Propiedad reflexiva de la elipse .....	18
<b>Figura 3-7 :</b> Propiedad reflexiva de la hipérbola.....	19
<b>Figura 3-8 :</b> Definición analítica de la parábola .....	20
<b>Figura 3-9:</b> Definición analítica de la elipse.....	21
<b>Figura 3-10:</b> Definición analítica de la hipérbola .....	22
<b>Figura 4-1:</b> Portadas de libros universitarios.....	26
<b>Figura 4-2:</b> Portadas de textos para grado 10° .....	27
<b>Figura 5- 1:</b> Conos moldeados por los grupos del grado 10-4 .....	36
<b>Figura 5-2:</b> Cortes al cono y planos de corte .....	37
<b>Figura 5-3:</b> Reproducción de cónicas. ....	38
<b>Figura 5-4:</b> Fotocopia de las curvas obtenidas del cono de Apolonio.....	40
<b>Figura 5-5:</b> Fotografías de chorros de agua lanzados con ángulos de elevación. ....	44
<b>Figura 5-6:</b> Gráfico en Graph datos situación 1 grado 10-2 (tabla 5 -1) .....	50

## Lista de tablas

	Pág.
<b>Tabla 3- 1:</b> Ecuaciones de la parábola con vértice en el origen .....	20
<b>Tabla 3- 2:</b> Ecuaciones de la elipse con centro en el origen .....	21
<b>Tabla 3- 3:</b> Ecuaciones de la hipérbola con centro en el origen .....	22
<b>Tabla 4- 1:</b> Complejidad conceptual y la gradualidad del aprendizaje del tema las cónicas.....	25
<b>Tabla 5- 1:</b> Datos obtenidos en la situación 1 grado 10-2 .....	49

# Introducción

Unas de las dificultades en la enseñanza de la matemática en grado décimo de Educación Básica Secundaria es que el docente presenta los contenidos aislados de su desarrollo histórico y social, es decir descontextualizados de la realidad y no se utilizan recursos que permitan un acercamiento a los conceptos mediante la interacción de los diferentes procesos que desarrollan la competencia matemática en los estudiantes.

En Colombia desde 1988 en los Lineamientos curriculares de Matemáticas [11], documento del Ministerio de educación Nacional MEN, se propone como uno de los procesos transversales al currículo el de modelación. Se observa que los docentes de matemáticas poco lo incluyen en sus clases. Al respecto Villa [15] comenta que “La modelación es uno de los procesos que al incorporarse en las clases de matemáticas ofrece diversas ventajas debidas a las relaciones que establece entre las matemáticas y la “realidad” asociada a los contextos extraescolares”. Por tanto se hace necesario que los docentes al tener una actitud reflexiva y crítica sobre sus prácticas incluyan contextos en que se da la “realidad” matematizable para aproximar a los estudiantes a los conceptos matemáticos.

Por otra parte, en los estándares básicos de Competencias en matemáticas [10], documento del MEN subtitulado Potenciar el pensamiento matemático ¡un reto escolar!, se hace referencia a que *“Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos”*. Es así que el docente de matemáticas, en sus clases para el desarrollo de una unidad temática durante un período académico, tiene la tarea de integrar los contextos, los tipos de pensamiento con sus sistemas conceptuales y simbólicos más afines y los procesos generales de la actividad matemática. A través de

estas actividades se intenta colocar tanto al profesor como al estudiante en una situación de mutuo aprendizaje y de construcción de pensamiento matemático generando en el primero competencias pedagógicas y disciplinares y en el otro, una visión diferente del uso de la matemática dadas las necesidades actuales de esta sociedad, surge entonces como resultado de la reflexión y exploración en este ámbito una unidad didáctica que plantea tres situaciones problema diseñadas desde los principios de la educación matemática realista.

La situación 1 contiene dos actividades que recrean aspectos históricos del tratamiento de las cónicas, para conceptualizar según Alegría[1] “una definición de las cónicas, desde el punto de vista clásico donde una cónica es la sección obtenida al cortar un cono por un plano”.

La situación 2 consta de tres actividades que permiten observar las cónicas y algunos elementos mediante la reproducción de situaciones reales capturadas mediante la fotografía y el dibujo en el plano, utilizando los procedimientos de tabulación y medición a partir de la observación de los gráficos, como mediadores entre el paso de la geometría sintética y la geometría analítica (sistema cartesiano).

La situación 3 se compone de cinco actividades que permiten la interacción entre la geometría sintética y la analítica, al transformar, establecer relaciones, propiedades y ecuaciones de las cónicas utilizando como recurso el programa Graph para la representación visual de las secciones cónicas, modificando parámetros y observando regularidades, atendiendo a las necesidades de las comunidades de aprendizaje (estudiantes y docentes) a través de las tecnologías de la información y la comunicación.



# 1. Identificación del problema

Tradicionalmente en las instituciones educativas de la ciudad de Villavicencio- Meta, el tratamiento para el estudio de las cónicas en el grado décimo de Educación Media Técnica se hace por medio del sistema de representación algebraico mediante las transformaciones de las ecuaciones canónicas que determinan las curvas, para hallar los elementos o a partir de los elementos hallar las ecuaciones; el sistema de representación visual se utiliza para ubicar los elementos. Se ha observado que se resuelven problemas donde el estudiante ejercita procedimientos algebraicos para el manejo de ecuaciones y desarrolla estrategias para memorizar los contenidos.

La propuesta de diseño e implementación de una unidad didáctica, explora a partir del estudio de las aplicaciones de las cónicas y de formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana de la ciencia y la tecnología mediante el proceso modelación, a través del análisis de la situación, identificar lo relevante en ella, establecer relaciones entre sus componentes y traducir entre los sistemas de representación, permitiendo establecer relaciones entre los sistema verbal, sistema visual-gráfico, sistema algebraico y el sistema numérico; para la observación, determinación de regularidades y de propiedades como la reflexión y excentricidad de las curvas, como parte fundamental del proceso tendiente a dar significado a los conceptos matemáticos que el estudio de éstas conlleva desde una visión analítica.

## Objetivos

### Objetivo general

Estudiar algunas aplicaciones de la parábola, elipse e hipérbola y a partir de procesos de modelación conceptualizar las curvas como lugares geométricos y obtener la representación analítica.

### Objetivos específicos

Revisar aplicaciones de la parábola, la elipse e hipérbola en contextos reales como la medicina, ingeniería, navegación y astronomía, entre otros.

Estudiar documentos sobre el proceso de modelización matemática.

Estudiar desde la geometría analítica las cónicas y profundizar en la correspondencia entre las propiedades geométricas de las curvas y las propiedades algebraicas de la ecuación correspondiente.

Estructurar una propuesta didáctica para la enseñanza-aprendizaje de las cónicas para estudiantes de grado décimo de la Escuela Normal Superior de Villavicencio (ENSV), que permita fortalecer el desarrollo de los pensamientos variacional, geométrico y métrico y desarrolle competencia matemática mediante los procesos de modelación y resolución de problemas

## 2. Aspectos históricos sobre las cónicas

Al hablar sobre las cónicas nos referirnos a las cónicas de Apolonio para exaltar el trabajo de "Apolonio de Perga (262-190 A.C) uno de los tres grandes matemáticos del helenismo" junto con Euclides y Arquímedes, reconocido como el geómetra de la Antigüedad.

Antes de Apolonio las curvas matemáticas cónicas fueron estudiadas por Menecmo matemático griego que vivió sobre el 350 A.C, al tratar de solucionar uno de los tres grandes problemas clásicos irresolubles de la geometría griega La duplicación del cubo(construir un cubo de doble volumen que otro dado). Al respecto Carl Boyer [3] comenta que durante un siglo y medio aproximadamente estas curvas no tuvieron otro nombre específico más que descripciones triviales de la manera como habían sido descubiertas: secciones de un cono agudo (u oxitoma), secciones de un cono rectángulo (u ortoma) y secciones de un cono obtuso (o amblitoma). Las secciones en aquellos tiempos se consideraban perpendiculares a la generatriz.

Apolonio en su obra maestra Las cónicas es quien acuña los nombres que se utilizan hoy día, Al respecto González Urbaneja [5] comenta que los nombres de elipse, parábola e hipérbola, son procedentes del lenguaje pitagórico de la Aplicación de las Áreas. En el cambio de denominación de las cónicas por Apolonio subyace un cambio conceptual, toda vez que una vez construidas a través del cono, Apolonio maneja las cónicas mediante relaciones de áreas y longitudes, que expresan en cada caso la propiedad característica de definición de la curva de la que se obtienen sus propiedades intrínsecas. Apolonio fue capaz de vincular los aspectos estereométricos y planos de las cónicas, al mostrar que las secciones de los conos tenían importantes propiedades como lugares planos, traducibles en básicas expresiones geométricas –equivalentes a nuestras ecuaciones–, que permitían deducir, a su vez, otras innumerables propiedades de las cónicas".

Apolonio organiza su obra en ocho libros de los que conservamos siete gracias a los trabajos de Thabit ibn Qurra (hacia 856 d.C.) y de Edmond Halley (1656-1742). Al respecto Miguel de Guzmán Ozamiz [7] en su sección de historia de las matemáticas denominada Apolonio en su apartado *Las Cónicas de Apolonio* hace una descripción de la obra indicando que hasta el IV libro organiza lo que existía y del V en adelante describe sus hallazgos. Su índice, con palabras nuestras, se puede proponer más o menos así:

- I. Modos de obtención y propiedades fundamentales de las cónicas.
- II. Diámetros, ejes y asíntotas.
- III. Teoremas notables y nuevos. Propiedades de los focos.
- IV. Número de puntos de intersección de cónicas.
- V. Segmentos de máxima y mínima distancia a las cónicas. Normal, evoluta, centro de curvatura.
- VI. Igualdad y semejanza de las secciones cónicas. Problema inverso: dada la cónica, hallar el cono.
- VII. Relaciones métricas sobre diámetros.
- VIII. (Se desconoce su contenido. Tal vez problemas sobre diámetros conjugados).

El libro I comienza con la generación del cono circular oblicuo de dos hojas que, seccionado por un plano, dará lugar a los diferentes tipos de cónicas. Introduce el parámetro lado recto establece las propiedades de ordenada y abscisa de las cónicas, considera el centro, ejes, diámetros conjugados, tangentes.

El libro II estudia fundamentalmente las propiedades de las asíntotas de la hipérbola.

El libro III se dedica primero a estudiar las relaciones de triángulos y cuadriláteros determinados por tangentes y diámetros conjugados. Obtiene la relación armónica sobre los cuatro puntos determinados en una secante a la cónica que pasa por un punto, su polar y los dos de intersección de la secante con la cónica. En la proposición 41 se establece cómo tres tangentes a la parábola se cortan en la misma razón y así resulta la parábola como envolvente de las rectas con esta propiedad. En la proposición 43 aparece la hipérbola como lugar de puntos tales que  $xy = \text{constante}$ , siendo  $x$  e  $y$  abscisa y ordenada respecto a los ejes constituidos por las asíntotas. Desde la

proposición 45 a la 52 aparecen propiedades interesantes sobre los focos. La proposición 49 afirma esencialmente que la podaria (Se llama podaria de la curva  $C$  con respecto al punto  $P$  al lugar geométrico de las proyecciones ortogonales de  $P$  sobre las tangentes de la curva  $C$ ) del foco es el círculo de diámetro  $AA'$  en la elipse e hipérbola. La 52 contiene lo que hoy solemos tomar a veces como definición de elipse ( $PF+PF'=2a$ ).

Los focos, en Apolonio, son  $\tau\alpha\ \epsilon\kappa\ \epsilon\eta\varsigma\ \pi\alpha\rho\alpha\beta\omicron\lambda\eta\varsigma\ \gamma\epsilon\upsilon\eta\theta\epsilon\upsilon\tau\alpha\ \sigma\eta\mu\epsilon\iota\alpha$  es decir, "los puntos que surgen de la aplicación" de áreas.

El libro IV es de bastante menos valor. En él estudia el número de puntos de intersección de las cónicas.

El libro V, que consta de 77 proposiciones es, con gran diferencia, el más sorprendente de todos. Se puede decir que en él Apolonio, 20 siglos antes que Huygens (en su *Horologium Oscillatorium*, 1673) introduce ya, a su modo, con instrumentos puramente sintéticos, nociones tales como normal a una curva, evoluta, centro de curvatura, etc. y logrando obtener estos elementos para las cónicas de la manera más rigurosa.

En el libro VI, dedicado fundamentalmente a la igualdad y semejanza de cónicas.

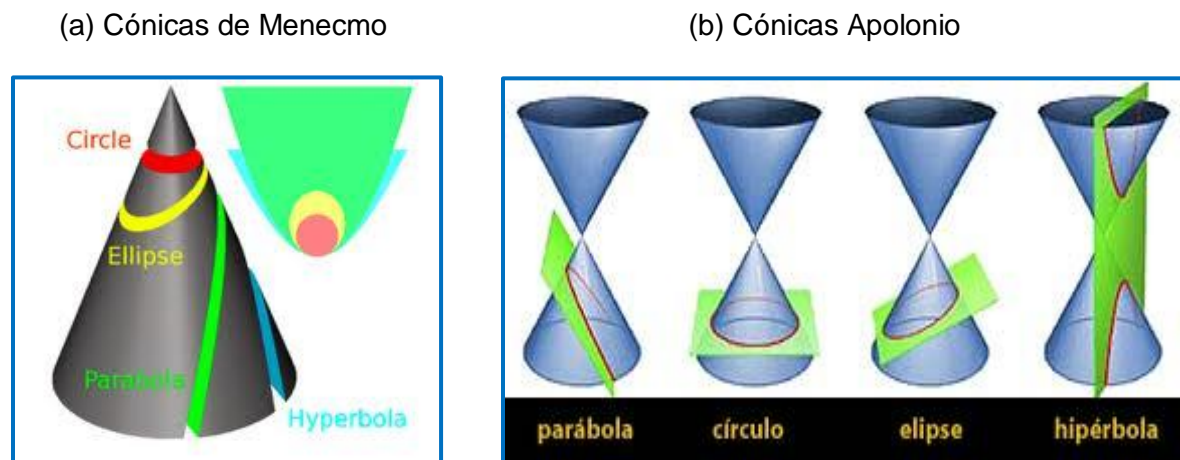
En el libro VII, en su mayor parte, contienen numerosas relaciones métricas entre diámetros conjugados, áreas, etc...

El lenguaje de Apolonio es, por supuesto, el lenguaje de la geometría sintética, utilizando a la perfección los viejos procedimientos pitagóricos de la aplicación de áreas. Los resultados sin embargo son fácilmente traducibles al lenguaje de la geometría analítica dado que su método de coordenadas guarda una gran similitud con los de la geometría analítica.

Se observa que Menecmo trabaja las secciones utilizando un cono recto mientras que Apolonio demostró que el cono no necesita ser recto y consideró, asimismo, el cono con

dos hojas por lo cual avanza al reconocer las dos ramas de la hipérbola, como se ilustra en la figura 2-1 (a) y (b)

**Figura 2-1:** Secciones cónicas según Mecnemo y Apolonio



Apolonio logra determinar la mayoría de las propiedades que se conocen y con las cuales se definen hoy las cónicas como lugares geométricos, ejes, centros, diámetros, asíntotas, focos, tangentes y normales entre otros. Su obra fue el referente sobre las cónicas durante varios siglos hasta que en el siglo XVII los matemáticos Fermat y Descartes con el concurso del Arte Analítica de Vieta (dispone del instrumento algorítmico del Álgebra simbólica que aplicaba a problemas geométricos, pero no llegó a utilizar coordenadas, es un estudio intermedio esencial en el camino que arranca del álgebra Geométrica de los griegos y confluye en la geometría analítica de Descartes), establecen que una ecuación arbitraria de dos cantidades indeterminadas determina, con respecto a un sistema dado de coordenadas, una curva. Al respecto González Urbaneja [6] en *Coordenadas en Las Cónicas de Apolonio* escribe que en “la Geometría griega, las coordenadas, variables y ecuaciones no eran elementos de partida, sino conceptos subsidiarios derivados de situaciones geométricas concretas de curvas que determinan las ecuaciones sin que se dé la situación inversa, es decir, que las ecuaciones determinen las curvas, ya que éstas siempre se producían mediante una construcción estereométrica como secciones de un sólido –tal es el caso de las propias cónicas de

Apolonio". Y en *La proyección histórica de la Geometría Analítica cartesiana* "La Geometría Analítica de Descartes permite utilizar la expresión algebraica de la ecuación de una curva para encontrar sus elementos geométricos más notables –diámetros, ejes, centros, etc.... Es decir, la ecuación de la curva es un elemento esencial para esclarecer las propiedades y encontrar los elementos relevantes de la curva". Lo anterior permite dar cuenta del cambio histórico que se da en cuanto al estudio de las cónicas se pasa de la geometría griega (álgebra geométrica o sintética) a la geometría analítica (álgebra simbólica).

Años mas tarde, el matemático neerlandés Johan de Witt (1629-1672) escribió "*Elementa Curvarum Linearum*" donde demostró que toda ecuación de segundo grado describe una cónica. Y luego Leonhard Paul Euler (1707- 1783) matemático suizo según comenta González Urbaneja [7] en su artículo LA GEOMETRÍA ANALÍTICA DE LA 31 INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM DE EULER "Euler da un gran paso de gigante en la sistematización de la Geometría Analítica plana y tridimensional. Buena parte de lo que hoy se enseña en los cursos de Geometría Analítica se debe prácticamente a Euler, en particular, la teoría de secciones cónicas y las superficies cuadráticas, desde el punto de vista unificado proporcionado por la ecuación general de segundo grado con seis términos para las cónicas y con diez términos para las cuádricas. Sobre las cónicas realiza un tratamiento analítico general libre de referencias al cono e incluso a diagramas; refiere la cónica a sus ejes principales, realiza la clasificación de cónicas, encuentra los puntos, líneas y razones notables y demuestra con sorprendente pericia numerosas propiedades de la geometría de estas curvas. Si en el caso de las cónicas, Euler amplía y perfecciona los trabajos anteriores al normalizar de forma definitiva y programática su estudio, para las cuádricas es un auténtico pionero en la investigación de los elementos geométricos y propiedades de estas superficies. Y todo ello con una habilidad magistral en el manejo del cambio de coordenadas.





### **3. Aspectos disciplinares**

A continuación se detalla los elementos teóricos estudiados y utilizados para el diseño e implementación de una propuesta didáctica para estudiantes de grado décimo, tales estudios están enmarcados en aspectos como: La aplicación de las cónicas en la vida real conduce a la búsqueda de contextos con una relación cercana a la vida extraescolar y sociocultural de los estudiantes; la representación analítica de las cónicas para orientar los procedimientos algebraicos a ejercitar, al pasar de la representación gráfica a la algebraica y viceversa ; conceptos que permiten visualizar las curvas mediante el análisis de sus propiedades geométricas, reconociendo los elementos y verificando propiedades de las cónicas que conllevan secuencialmente a avances en niveles de complejidad que desarrollan cada situación problema.

#### **3.1 Cónicas en la vida real**

Las formas de las secciones cónicas están ocultas en la estructura de muchas cosas, en las estructuras de diseños arquitectónicos, fabricación de objetos pequeños, en el funcionamiento de instrumentos tecnológicos útiles en medicina, ingeniería, navegación y astronomía entre otros, en la descripción del movimiento de objetos y en las formas generadas por situaciones ópticas entre otras.

A continuación se relacionan algunos eventos que involucran el uso de las cónicas.

### 3.1.1 La parábola

La trayectoria de un proyectil como un cohete, una pelota de baloncesto o el agua que brota de una fuente (descubierta por Galileo).

En Reflectores para lámparas y telescopios.

En detectores de radar.

En antenas receptoras de señales de radio y televisión

### 3.1.2 La elipse

En formas de las cubiertas de mesas, formas de ventanas, formas de marcos para encuadrar retratos y fotografías, formas de las bases de envases.

En Litotricia para el tratamiento de cálculos renales.

En la construcción de capsulas susurrantes y cámaras de eco.

En la forma de las órbitas de los planetas que giran alrededor del sol (descubierto por Kepler).

### 3.1.3 La hipérbola

En la Trayectoria de cometas como el cometa Halley.

En el funcionamiento del sistema de navegación LORAN.

Para el diseño de telescopio reflector.

Al observar las aplicaciones se eligen tres eventos que son posibles de reproducir en el aula, teniendo en cuenta el contexto institucional y sociocultural de los estudiantes.

1. La trayectoria de un proyectil como el agua que brota de una fuente (Parábola).
2. En formas de las cubiertas de mesas, formas de ventanas, formas de marcos para encuadrar retratos y fotografías, formas de las bases de envases (elipse).
3. Las sombras proyectadas por una lámpara sobre una pared (círculo, parábola, elipse e hipérbola)

## 3.2 Expresión analítica de las cónicas

### 3.2.1 Ecuación general de segundo grado en dos variables

Una expresión algebraica de la forma  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$   $B \neq 0$

Se llama ecuación de segundo grado, donde los términos  $A, B$  y  $C$  no son simultáneamente cero.

Las cónicas se pueden representar algebraicamente mediante una ecuación de segundo grado en dos variables para ello hay que tener en cuenta los coeficientes  $A$  y  $C$  de la ecuación ó el discriminante o indicador  $I = B^2 - 4AC$  si la ecuación no es degenerada, entonces se puede decir si representa una parábola, una elipse o una hipérbola, simplemente examinando los signos de  $A$  y  $C$ . Si la ecuación es degenerada la gráfica de la ecuación resulta ser un par de líneas, un solo punto, o bien, podría no haber una gráfica en absoluto.

Al respecto en Lehmann [9] en los Art 71 y 72 y en Stewart [12] en el capítulo 10 en 10.4 y 10.5 se define:

### 3.2.2 Ecuación general de una cónica desplazada

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde  $A$  y  $C$  No son cero, es una cónica o una cónica degenerada. En los casos no degenerados, la gráfica es:

1. Una parábola si  $A$  o  $C$  es 0
2. Una elipse si  $A$  y  $C$  tienen el mismo signo (o un círculo si  $A = C$ )
3. Una hipérbola si  $A$  y  $C$  tienen signos opuestos.

### 3.2.3 Identificación de cónicas mediante el discriminante

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una cónica o cónica degenerada. En Los casos no degenerados, la gráfica es

1. una parábola si  $B^2 - 4AC = 0$
2. una elipse si  $B^2 - 4AC < 0$
3. una hipérbola si  $B^2 - 4AC > 0$

La cantidad  $B^2 - 4AC$  se llama discriminante de la ecuación.

## 3.3 Definición de conceptos

### 3.3.1 Tangente a una curva

En los textos de Precálculo como en Stewart [12] se define la tangente  $T$  como la recta que pasa por  $P$  con pendiente  $m$  así:

“ Si se tiene una curva general  $C$  con ecuación  $y = f(x)$  y se quiere hallar la tangente a  $C$  en el punto  $P(a, f(a))$ , entonces se considera un punto cercano  $Q(x, f(x))$ , donde  $x \neq a$ , y se calcula la pendiente de la secante  $PQ$ :

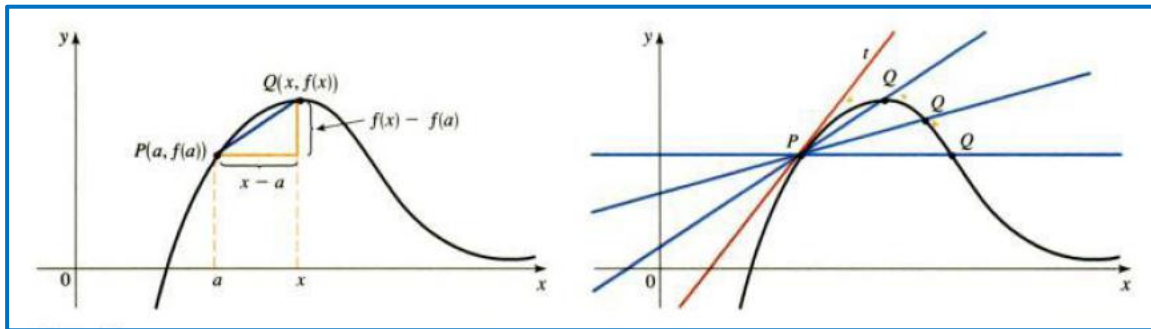
$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Entonces se permite que  $Q$  se aproxime a  $P$  a lo largo de la curva  $C$  permitiendo que  $x$  se aproxime al valor  $a$ . Si  $m_{PQ}$  se aproxima a un número  $m$ . Entonces se define la

tangente  $T$  como la recta que pasa por  $P$  con pendiente  $m$  (esto equivale a decir que la tangente es la posición limitante de la secante  $\overleftrightarrow{PQ}$  cuando  $Q$  se aproxima a  $P$ ).

(Figura 3-1)

**Figura 3-1** : Tangente a una curva



### 3.3.2 Definición de una recta tangente

La recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $P(a, f(a))$  es la recta que pasa por  $P$  con pendiente

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

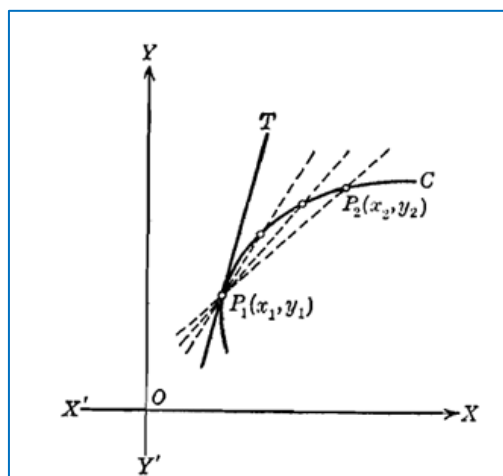
siempre que este límite exista.

Como se trata de la construcción geométrica del trazo de la tangente a una curva se tiene en cuenta la definición que se propone en Lehmann [9]:

*“Tangente a una curva:* Sean  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_1, y_1)$  figura 3-2. Dos puntos diferentes cualesquiera de  $C$  tales que el arco de curva que los une sea continuo; es decir  $P_2$ , puede moverse hacia  $P_1$  permaneciendo siempre sobre la curva. La recta que pasa por  $P_1$  y  $P_2$  se llama secante. Consideraremos que  $P_1$  es un punto fijo mientras que  $P_2$  se mueve a lo largo de  $C$  hacia  $P_1$ . Entonces, a medida que  $P_2$  se aproxima a  $P_1$ , la secante gira en el sentido contrario al de las manecillas de un reloj en torno a  $P_1$  y, en general, tiende a una posición límite representada por la recta  $P_1T$  que se define como la tangente

a la curva  $C$  en el punto  $P_1$ . El punto  $P_1$  se llama punto de tangencia o punto de contacto de la tangente.

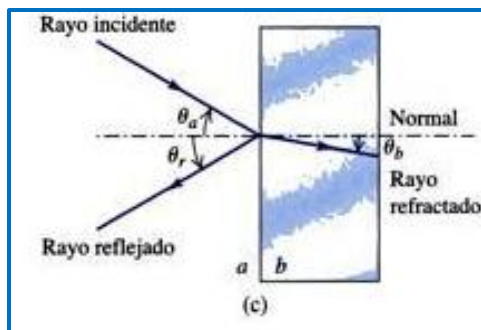
**Figura 3-2** : Recta tangente a la curva  $C$



### 3.3.3 Ley de reflexión

Una de las leyes básicas de la óptica geométrica es la ley de reflexión, ley que se debe a la naturaleza ondulatoria de la luz y fue descubierta por el matemático holandés Willebrord Snel van Royen conocido como Snellius en 1621 y conocida hasta 1703 cuando Huygens la publicó en su libro Dióptrica.

**figura 3-3** : ley de reflexión



La ley de reflexión se enuncia en el en el capítulo 33 del texto de la física de Sears [13] así:

*“El ángulo de reflexión  $\theta_r$  es igual al ángulo de incidencia  $\theta_a$  para todas las longitudes de onda y para cualquier par de materiales.*

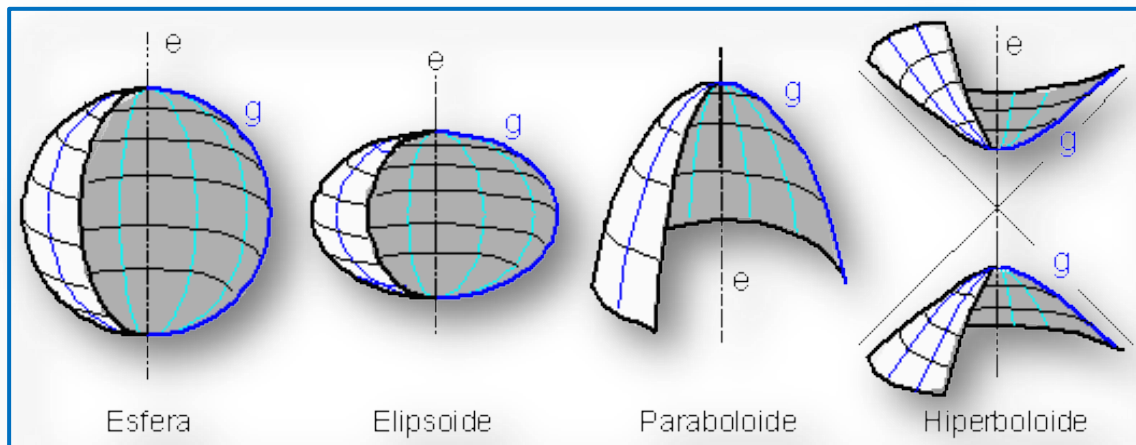
$$\theta_r = \theta_a$$

*Los rayos incidente, reflejado, y la normal yacen todos en el mismo plano.”*

La ley de reflexión reconocida como una de la ley de reflexión de Snell, tiene su uso en el estudio de espejos y lentes. Los espejos y lentes pueden ser superficies curvas que son esféricas o cónicas, las superficies cónicas cuya ecuación analítica es una cuádrica según Euler, son llamadas esfera, elipsoides, paraboloides o hiperboloides de revolución las cuales tienen aplicaciones en la construcción y funcionamiento de herramientas de uso tecnológico a saber y se obtienen al girar la curva cónica entorno a su eje mayor como se ilustra en la figura 3-4.

Las Antenas parabólicas y lámparas sordas o faros de automóviles (Paraboloides), El litriptor aparato utilizado en medicina para la desintegración de cálculos renales (elipsoide), El sistema de navegación LORAN (Hiperboloides).

**Figura 3-4:** Superficies cónicas

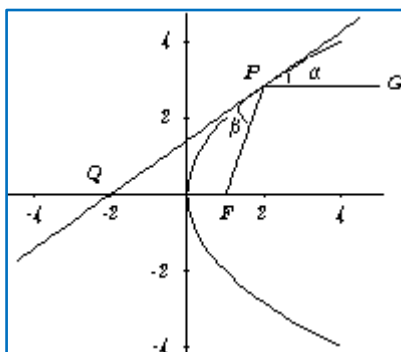


A continuación se presenta la propiedad óptica de cada una de las cónicas como lo define en PUEMAC el recurso de matemáticas: las curvas cónicas [9].

### 3.3.4 Propiedad óptica de la parábola:

Consideremos una parábola y un punto  $P$  de ella. Tracemos la recta tangente a la parábola en el punto  $P$ . (figura 3-5)

**Figura 3-5:** Propiedad reflexiva de la parábola

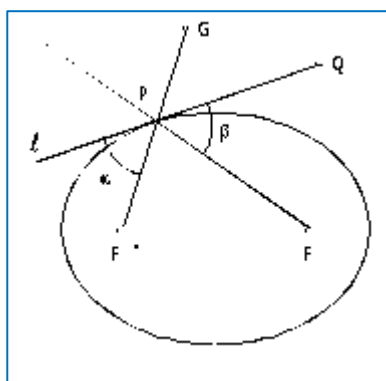


Tracemos la recta que une a  $P$  con el foco  $F$  de la parábola y la recta  $\overrightarrow{GP}$  paralela al eje de simetría. Entonces, la tangente en  $P$  forma ángulos iguales con  $\overrightarrow{FP}$  y con  $\overrightarrow{GP}$ .

### 3.3.5 Propiedad óptica de la elipse

Consideremos una elipse y un punto  $P$  de ella. Tracemos la recta tangente a la elipse en el punto  $P$ .

**Figura 3-6:** Propiedad reflexiva de la elipse



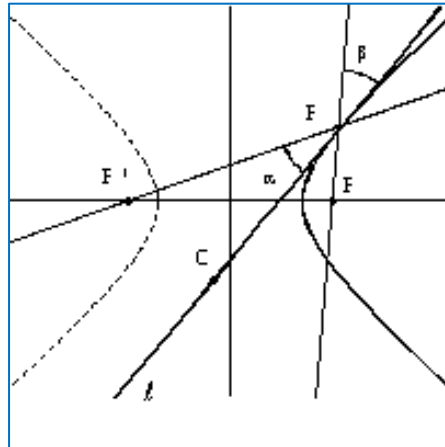
Tracemos las rectas que unen a  $P$  con cada uno de los focos  $F_1$  y  $F_2$  de la elipse. Entonces, la tangente en  $P$  forma ángulos iguales con  $\overrightarrow{F_1P}$  y con  $\overrightarrow{F_2P}$ .



### 3.3.6 Propiedad óptica de la hipérbola

Consideremos una hipérbola y un punto  $P$  de ella. Tracemos la recta tangente a la hipérbola en el punto  $P$ . Veamos la siguiente figura 3-7

**Figura 3-7:** Propiedad reflexiva de la hipérbola



Tracemos las rectas que unen a  $P$  con cada uno de los focos  $F_1$  y  $F_2$  de la hipérbola. Entonces, la tangente en  $P$  forma ángulos iguales con  $F_1P$  y con  $F_2P$ .

En los textos de geometría analítica se utiliza el punto  $P$  que se refiere al plano cartesiano, la propiedad de reflexión permite un conocimiento de las curvas cónicas desde lo sintético para luego observar la definición de cada una de las curvas cónicas desde la concepción analítica.

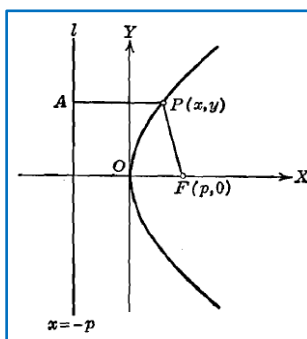
A continuación se definen de las cónicas parábola, elipse e hipérbola según Lehmann [9] a partir de las cuales se encuentran las ecuaciones canónicas de cada una de las cónicas mediante el análisis gráfico y la realización de cálculos algebraicos se llega a deducir el cuadro resumen de la ecuación y grafica de cada cónica como lo propone Stewart [13], según sea el eje de la cónica.

### 3.3.7 La parábola

#### Definición

Una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta. El punto fijo se llama **foco** y la recta fija **directriz** de la parábola. Sea  $P(x,y)$  un punto cualquiera de la parábola (figura 3-8). Por  $P$  tracemos el segmento  $\overline{PA}$  perpendicular a  $l$ , entonces, por la definición de parábola, el punto  $P$  debe satisfacer la condición geométrica  $|\overline{FP}| = |\overline{FA}|$ .

**Figura 3-8:** Definición analítica de la parábola



#### Ecuaciones canónicas

**Tabla 3- 1: Ecuaciones de la parábola con vértice en el origen**

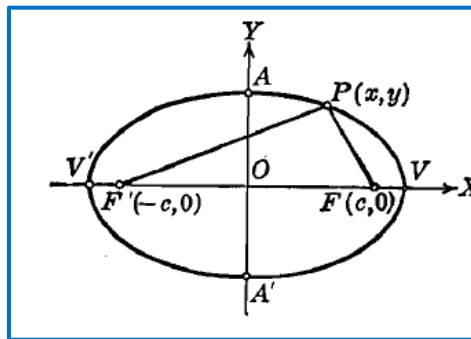
Parábola con eje vertical	Parábola con eje horizontal
<b>Ecuación</b> $x^2 = 4py$	$y^2 = 4px$
<b>Propiedades:</b> Vértice $V(0,0)$ Foco $F(p, 0)$ Directriz $x = -p$	Vértice $V(0,0)$ Foco $F(0, p)$ Directriz $y = -p$

### 3.3.8 La elipse

#### Definición

Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos, los dos puntos fijos se llaman **focos** de la elipse). Sea  $P(x, y)$  un punto cualquiera de la elipse (figura 3-9). Por la definición de la curva, el punto  $P$  debe satisfacer la condición geométrica  $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$ , donde  $a$  es una constante positiva mayor que  $c$ .

**Figura 3-9:** Definición analítica de la elipse



#### Ecuaciones canónicas de la elipse

**Tabla 3- 2: Ecuaciones de la elipse con centro en el origen**

Elipse con centro en el origen	
<b>Ecuación</b> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a > b > 0$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ $a > b > 0$
<b>Propiedades</b> <b>Vértices</b> $(\pm a, 0)$ <b>Eje Mayor</b> Horizontal, longitud $2a$ <b>Eje Menor</b> Vertical, longitud $2b$ <b>Focos</b> $(\pm c, 0)$ , $c^2 = a^2 - b^2$	$(0, \pm a)$ Vertical, longitud $2a$ Horizontal, longitud $2b$ $(0, \pm c)$ , $c^2 = a^2 - b^2$

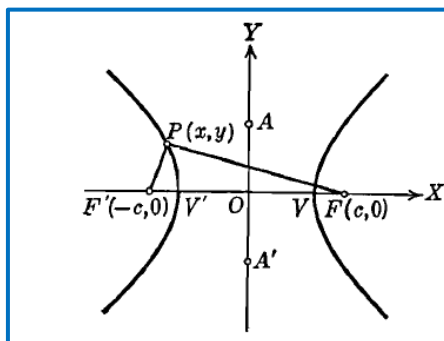
### 3.3.9 La hipérbola

#### Definición

Una hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos. Sea  $P(x, y)$  un punto cualquiera de la hipérbola (figura3-10). Por la definición de la curva, el punto  $P$  debe satisfacer la condición geométrica el valor absoluto de la diferencia de las distancias del punto a los focos es una cantidad constante

$$|\overline{FP} - \overline{F'P}| = 2a, \text{ en donde } a \text{ es una constante positiva y } 2a < 2c.$$

**Figura 3- 11** Definición analítica de la hipérbola



#### Ecuaciones canónicas

**Tabla 3- 3:** Ecuaciones de la hipérbola con centro en el origen

Hipérbola con centro en el origen	
<b>Ecuación</b>	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a > 0, b > 0$
<b>Propiedades</b>	
<b>Vértices</b>	$(\pm a, 0)$
<b>Eje Transversal</b>	Horizontal, longitud $2a$
<b>Asíntotas</b>	$y = \pm \frac{b}{a}x$
<b>Focos</b>	$(\pm c, 0), c^2 = a^2 + b^2$

## 4. Fundamentación pedagógica

A continuación se detalla el proceso seguido para obtener información con miras al diseño e implementación de la propuesta didáctica dirigida a estudiantes de grado décimo. Tales estudios se han focalizado en cuatro elementos: los documentos del MEN, Los libros de texto y las propuestas de enseñanza de las cónicas, El plan de área institucional y El proceso general: modelación.

### 4.1 Documentos del Ministerio de Educación Nacional

El documento Lineamientos curriculares de matemáticas [11] plantea dentro de la estructura curricular en el numeral 2.4.2 Conocimientos básicos orienta el Pensamiento espacial y sistemas geométricos plantea *“el enfoque de la geometría activa como alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio, ..., en la que se da prioridad a la actividad sobre la contemplación pasiva de figuras y símbolos, a las operaciones sobre las relaciones y elementos de los sistemas y a la importancia de las transformaciones en la comprensión aun de aquellos conceptos que a primera vista parecen estáticos”*.

Por otra parte en las orientaciones para el manejo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos plantea que *“otra herramienta necesaria para iniciar el estudio de la variación desde la primaria la constituye el estudio de los patrones. Éstos incluyen escenarios en la vida práctica como fotografías y representaciones pictóricas e icónicas. En las matemáticas los escenarios geométricos o numéricos también deben ser utilizados para reconocer y describir regularidades o patrones presentes en las transformaciones,..., las tablas se pueden usar posteriormente para llevar a los estudiantes a la **graficación** de situaciones problema de tipo concreto, aunque quede restringida al primer cuadrante. La identificación de la variable independiente y dependiente es más significativa cuando se inicia desde la*

*representación de situaciones concretas. Más adelante se formaliza el **sistema cartesiano** con el aprendizaje de su sintaxis”.*

Lo anteriormente expuesto se evidencia en la propuesta didáctica como parte esencial del desarrollo de las situaciones problema reales.

Para la elaboración de la propuesta pedagógica es necesario elegir contextos y situaciones que permitan el diseño de las actividades pedagógicas de aula apropiadas para desarrollar las competencias matemáticas orientadas por el MEN para el proceso de estudio para la enseñanza y aprendizaje de las secciones cónicas en la Educación Media Técnica. Por tanto es se plantea la necesidad de hacer una revisión al documento del MEN Estándares básicos de competencias en matemática [10].

La tabla 5-1 ilustra la complejidad conceptual dada por la relación de los estándares del Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos con los demás estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados (coherencia vertical) y la gradualidad del aprendizaje que esta dada por la relación que tienen los estándares a evaluar con los estándares de los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados (Coherencia horizontal).

Al realizar el seguimiento de la temática a estudiar, las secciones cónicas en los Estándares [10], desde el grado primero hasta grado once se observa que los contenidos relacionados con este tópico de estudio, están propuestos para grado decimo y once. Igualmente se observa coherencia horizontal y vertical con otros estándares propuestos, lo que posibilita conocer los conocimientos matemáticos que se pueden integrar en las actividades, al diseñar los momentos de aprendizaje.

**Tabla 4- 1: Complejidad conceptual y la gradualidad del aprendizaje del tema las cónicas.**

Coherencia vertical	<b>De 1° a 3°:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Reconozco y valoro simetrías en distintos aspectos del arte y el diseño.</li><li>• Reconozco congruencia y semejanza entre figuras (ampliar, reducir).</li></ul>		
	<b>De 4° a 5°:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Utilizo sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales.</li><li>• Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.</li><li>• Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.</li></ul>		
	<b>De 6° a 7°:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Identifico y describo figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales.</li><li>• Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.</li></ul>		
	<b>De 8° a 9°:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.</li></ul>		
	<b>De 10° a 11°</b> <b>PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.</li><li>• Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.</li><li>• Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.</li><li>• Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.</li><li>• Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos.</li></ul>		
Coherencia horizontal			
<b>Pensamiento Numérico Y Sistemas Numéricos</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Establezco relaciones y diferencias entre notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.</li></ul>	<b>Pensamiento Métrico Y Sistemas De Medidas</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.</li><li>• Justifico resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.</li></ul>	<b>Pensamiento Aleatorio Y Sistemas De Datos</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Diseño experimentos aleatorios (de las ciencias físicas, naturales o sociales) para estudiar un problema o pregunta.</li><li>• Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación</li></ul>	<b>Pensamiento Variacional Y Sistemas Algebraicos Y Analíticos:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.</li></ul>

## 4.2 Los libros de texto y las propuestas de enseñanza de las cónicas.

En Libros de texto de enseñanza universitaria para el estudio de procesos algebraicos de las curvas se toman como referentes los libros Geometría Analítica de Charles Lehmann [9] y Precálculo: Matemáticas para el Cálculo de Stewart [13]. El libro de Lehmann enfatiza más sobre la noción de lugar geométrico y le da un carácter dinámico a sus definiciones propicias para trabajarlo en un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) tal como Cabri Geometre<sup>1</sup>. Del Precálculo de Stewart se estudia su propuesta de enseñanza, en el capítulo 10 se encuentra el tema, para cada curva presenta *su definición geométrica, Cuadro resumen de ecuación, propiedades y gráficas*, en todos los capítulos tiene secciones como: *Aplicaciones* y en la sección de ejercicios contiene una sección de preguntas sobre *Descubrimiento* y *Debate* que estimulan al estudiante a experimentar en grupo y *proyecto para un descubrimiento* que ayudan al estudiante a que aprenda en forma activa, estimulándolo a utilizar sus habilidades matemáticas y *el enfoque de modelado* donde se señala la pertinencia del pensamiento matemático para modelar situaciones de la vida cotidiana.

**Figura 4-2:** Portadas de libros universitarios

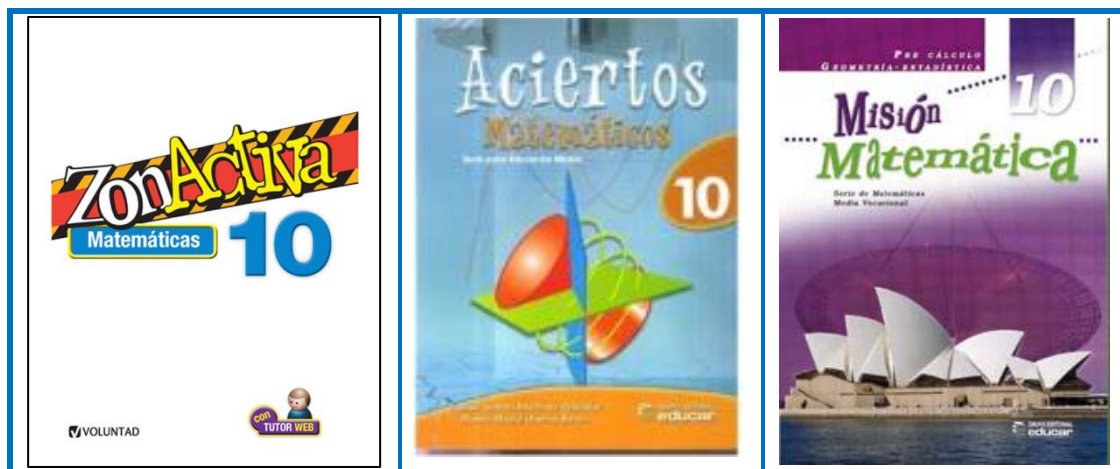


<sup>1</sup> FERNÁNDEZ E. Y MEJÍA M. Análisis de Textos Escolares para el Diseño de Situaciones de Enseñanza. Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa 2010. Pág. 6



De los libros de texto de Matemáticas para enseñanza Media Técnica se eligen los libros de texto: ZonActiva Matemáticas 10, Aciertos Matemáticos 10 y Misión Matemática 10. Los cuales actualmente se encuentran en el Catalogo de Libros de texto escolar del MEN<sup>2</sup> y son empleados en la institución, tienen en su contenido una unidad que desarrolla el tema Geometría Analítica. Los textos encierran cada uno propuestas de enseñanza y tienen en común, el tratamiento que dan a la temática permiten reconocer los elementos de la curva a través de su ecuación. Las ecuaciones son presentadas de forma algebraica, en algunos casos se muestran la grafica, la gráfica no aporta elementos para su construcción, presentan las ecuaciones canónicas y paramétricas sin explicar el proceso por el cual se llega a ellas. Los ejercicios que se plantean y desarrollan promueven la mecanización de los procedimientos algebraicos de cálculo y transformación de ecuaciones.

**Figura 4-13:** Portadas de textos para grado 10°



---

<sup>2</sup>La página esta ubicada en: [www.textos Escolares.gov.co](http://www.textos Escolares.gov.co) y en <http://www.colombiaaprende.edu.co/html/home/1592/article-99610.html>

### 4.3 Plan de área institucional

Para obtener información con miras al diseño e implementación de una propuesta didáctica para estudiantes de grado décimo, se hace necesario conocer el Plan de estudios de matemáticas de la institución en la cual se realiza la propuesta didáctica La Escuela Normal Superior de Villavicencio, ya que a partir de éste se pueden identificar las competencias y conocimientos que los estudiantes deben alcanzar y adquirir al finalizar cada uno de los periodos del año escolar, según hayan sido definidos en el Proyecto Educativo Institucional, PEI, en el marco de las normas técnicas curriculares que expide el Ministerio de Educación Nacional.

En la matriz de contenidos para grados décimo y once (Anexo A) se indican los estándares para el desarrollo de pensamiento geométrico y los temas correspondientes, en el plan estratégico del área de matemáticas del grado 10° se plantea el tema de estudio en el cuarto período académico (Anexo B). Se observa que el tratamiento que se da a la temática es algebraico por tanto se hace la representación analítica (ecuación) y a partir de ésta la gráfica, desconociendo el desarrollo histórico de las cónicas.

### 4.4 Proceso general: modelación

Para el diseño e implementación de la propuesta se tomará como referente Los principios de la Educación Matemática Realista [2] (Anexo C) propuestos por el matemático holandés Hans Freudenthal quien según lineamientos [11] *“considera que el núcleo básico del currículo de matemáticas en la escuela debe ser el aprendizaje de las estrategias de matematización”*. El punto de partida de la modelación es una situación problemática real”. Por otra parte en los estándares [10] se afirma que *“en la didáctica de las matemáticas se ha hablado también con frecuencia desde 1977 de “la matematización” de una situación problema, con un término introducido por Hans Freudenthal. Esta expresión se suele tomar como sinónimo de “la modelación” y ambas pueden entenderse en formas más y más complejas, que van desde una forma muy*

*elemental, como simplificación y restricción de la complejidad de una situación real para reducirla a una situación ya conocida, de tal manera que se pueda detectar fácilmente qué esquema se le puede aplicar, cómo se relaciona con otras y qué operaciones matemáticas pueden ser pertinentes para responder a las preguntas que suscita dicha situación, hasta una forma muy avanzada, como creación de nuevos modelos y teorías matemáticas que permitan simular la evolución de una situación real en el tiempo".* Es por ello, que en esta propuesta se eligen tres situaciones como punto de partida de los procesos de matematización o modelación propuestos en las actividades que desarrollan los estudiantes.



## **5. Propuesta didáctica**

### **5.1 Generalidades sobre la propuesta**

A continuación se detallan algunos elementos básicos tenidos en cuenta en el diseño e implementación la propuesta.

#### **5.1.2 Grupo de trabajo**

La institución educativa Escuela Normal Superior de Villavicencio cuenta con cuatro grados décimo de 42 estudiantes cada uno, con edades que oscilan entre 14 y 16 años de edad cuya formación académica está enfocada hacia el modelo pedagógico de la acción y la construcción que contempla como dispositivos de la acción el juego, el taller y el proyecto.

El diseño de las experiencias se realizó con la colaboración de 12 estudiantes voluntarios de grado 10° que trabajaron en jornada contraria.

La implementación de las situaciones se realizó con los estudiantes de los grados décimo 101, 102, 103 y 104.

### 5.1.3 Tiempo de estructuración de la propuesta

El tiempo previsto para la estructuración de la propuesta fue de ocho semanas durante los meses de Septiembre y Octubre. Sin embargo, debido a que el tema cónicas está planeado en el desarrollo curricular del área de matemáticas para el cuarto período académico (Septiembre 9 a Noviembre 18) y para su diseño e implementación se contó con la participación de un grupo de estudiantes, fue necesario ajustar el cronograma. Se trabajó en cada grado 4 horas semanales durante el cuarto período según el horario institucional y en la jornada contraria-tardes, 6 horas semanales con los estudiantes voluntarios (Agosto 22 a Octubre 7).

### 5.1.4 Estructura de la propuesta

En la organización de la propuesta se toma de los cinco procesos generales de la actividad matemática: *La formulación, tratamiento y resolución de problemas* contenidos en los lineamientos curriculares [11] y Los Estándares Básicos de Competencias para el área de Matemáticas[10] dado que permite involucrar otros procesos como la modelación, la comunicación, el razonamiento y la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos con distinta intensidad en diferentes momentos de la actividad matemática, es por ello que se diseñaron e implementaron tres situaciones problema: **Situación 1: Cortes a un cono, situación 2: Capturando cónicas y situación 3: Cónicas desplazadas.** Teniendo en cuenta lo proyectado en los estándares [10] “*las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los alumnos.*”

Una **situación problema** se compone de una secuencia de actividades en el aula para posibilitar que mediante ellas los estudiantes accedan a conocimientos sobre las cónicas, mejoren sus destrezas en el manejo de la geometría, las medidas y el álgebra y su disposición hacia la actividad matemática; diseñen estrategias y tengan la necesidad de utilizar herramientas matemáticas para encontrar soluciones. Cada situación se ejecutó

en forma grupal (grupos de 5 estudiantes), promoviendo la discusión y la obtención de conclusiones mediante acuerdos obtenidos a partir de los aportes individuales de cada uno de los estudiantes.

En el diseño de cada situación se tienen en cuenta los principios de la educación Matemática Realista (Anexo C) Hans Freudenthal. Por ello se componen de actividades en el aula. Cada actividad contiene:

**a. Una finalidad:** plantea los mínimos alcances que se espera de los estudiantes obtengan una vez vivencien la actividad. (el principio de actividad) se retoma la idea de que la matemática es una actividad humana a la que todo estudiante puede acceder y que la mejor forma de aprenderla es haciéndola.

**b. Una experiencia:** permite la conexión de la matemática al mundo real o existente (*principio de realidad*) para lo cual se identifican contextos reales de aula, escolar y extraescolar<sup>3</sup> que permitieron abordar la modelación. Una secuencia de acciones propuestas en una guía para el grupo de estudiantes. Durante el desarrollo de dicha secuencia el rol del docente es el de mediador entre los estudiantes y las situaciones propuestas, entre los estudiantes entre sí, entre los resultados y las herramientas matemáticas utilizadas para obtenerlos y el de orientador al anticipar, observar y reflexionar acerca de los aprendizajes de los estudiantes, lo cual le permite organizar la secuencia de actividades en el aula en cada situación y los avances al pasar de un nivel otro.

El rol del estudiante es reinventar modelos, conceptos, estrategias matemáticas (*principio de reinención*). El contexto y el modelo en cada situación determinan niveles de desarrollo de los pensamientos matemáticos espacial, métrico y variacional que conllevan a conceptualizar las curvas parábola y elipse como lugares geométricos y obtener la representación analítica. Al realizar el proceso de reinención se abordó “*La de matematización horizontal, que consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación*

---

<sup>3</sup> Ministerio de Educación Nacional. Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. MEN. Bogotá. 2006. Pág. 70-71.

*empírica, la observación, la experimentación inductiva.*"<sup>4</sup> el diseño e implementación de las situaciones con la secuencia de actividades propende por el paso del estudiante por los distintos niveles de comprensión situacional, referencial, general y formal (*principio de Niveles*)

**c.** *Socialización de resultados* a cargo de los relatores de cada grupo: con ello se promueve la discusión, el uso de estrategias matemáticas, se facilita la reflexión colectiva que se constituye en un elemento indispensable para que los estudiantes alcancen niveles más elevados. (*Principio de interacción*). La ejecución de cada situación permite fortalecer el desarrollo de los diferentes pensamientos matemáticos y el dominio de los sistemas conceptuales y simbólicos a través de la ejecución de los procesos generales. (*El principio de interconexión*). Para facilitar el diseño de cada experiencia se creó una experimentación previa o prueba piloto con estudiantes voluntarios a los cuales se les propuso realizar la experiencia con el objetivo de elaborar preguntas provocadoras y plantear las actividades en un lenguaje claro para los estudiantes y determinar la secuencia de las mismas.

## 5.2 Diseño e implementación de la propuesta

A continuación se abordan los aspectos particulares sobre el diseño e implementación de cada una de las actividades en el aula que conforman cada situación problema que se desarrolló.

**a.** *Generalidades:* incluye aspectos que permitieron el diseño de la situación.

**b.** *Observaciones de las actividades en el aula:* se incluyen algunas producciones de los estudiantes obtenidas de diferentes formas: registro y fotos de clase realizados por observadores del grupo, fotocopias de reportes escritos y narraciones producidas por los estudiantes de lo que acontece en las sesiones de clase.

---

<sup>4</sup>BRESSAN Ana. *Los principios de la Educación Matemática Realista*. Libros del Zorzal. Buenos Aires.2005.Pág 82-.



c. *Resumen de resultados:* Se incluye un resumen de lo expuesto en la socialización de resultados realizada por el relator de cada uno de los grupos que se conformaron en cada curso.

d. *Comentarios:* se incluyen referencias del docente desde su experiencia.

## 5.2.1 Situación No.1: Cortes a un cono

### Actividad 1: Cortes al cono de Menecmo

#### a. Generalidades

Para la búsqueda del contexto en esta situación se recurre a la historia de la matemáticas desde allí se aportan elementos sobre el origen de los nombres elipse, hipérbola y parábola como consecuencia del uso que hicieron los pitagóricos en la solución de ecuaciones cuadráticas por el método de aplicación de áreas<sup>5</sup>. Se tiene en cuenta el primer estándar del pensamiento espacial y sistemas geométricos<sup>6</sup> de ahí que se permite la identificación visual y gráfica de las curvas obtenidas por cortes en un cono. Para ello se observan las curvas Elipse, hipérbola y parábola, a partir de los bordes obtenidos por cortes del cono recto ó oblicuo; se observó y verificó la propiedad geométrica simetría de la curva mediante el trazo de ejes de simetría a cada una de ellas. Se toman como objeto a matematizar conos como lo estudiado por Menecmo.

#### b. Observaciones de las actividades en el aula

Los estudiantes, llegaron animados con el material previsto, manifestaron que hace mucho tiempo no trabajaban con plastilina, logrando una alta concentración con afán de lograr una perfecta modelación del cono.

---

<sup>5</sup> BOYER. Carl.

<sup>6</sup> Ministerio de Educación Nacional. Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. MEN. Bogotá. 2006. Pág. 88.

Al construir el cono se observó trabajo en equipo, cada estudiante tomó su barra de plastilina, la amasó entre sus manos y sobre la tabla del pupitre, para ello la pellizcaron, estiraron, hicieron bolitas, palitos... y los aplastaron, hasta que la masa absorbió el calor de las manos y se fue volviendo elástica y maleable, luego mezclaron las partes y moldearon el cono.

**Figura 5- 14**Conos moldeados por los grupos del grado 10-4

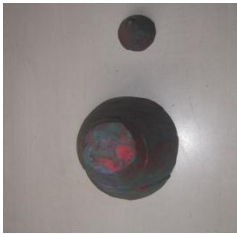





Al medir, sólo se presenta dificultad al tomar la medida de la altura  $h$  del cono, por ello fue necesario explicar el procedimiento para medir alturas a cuerpos geométricos. Al calcular la altura y comparar los resultados, se observa que la diferencia entre la altura calculada y la medida varía entre 0mm a 3mm, por tanto concluyen que el cono construido es recto ó oblicuo y que la diferencia se debe a errores en la medición o el molde del cono.

En la realización de los cortes el tercer y cuarto corte fueron los que representaron mayor dificultad sin embargo los grupos generaron estrategias que les permitió perfeccionar cada corte, de forma intuitiva los estudiantes buscaban la simetría de las curvas, compararon sus logros con los de los otros grupos.

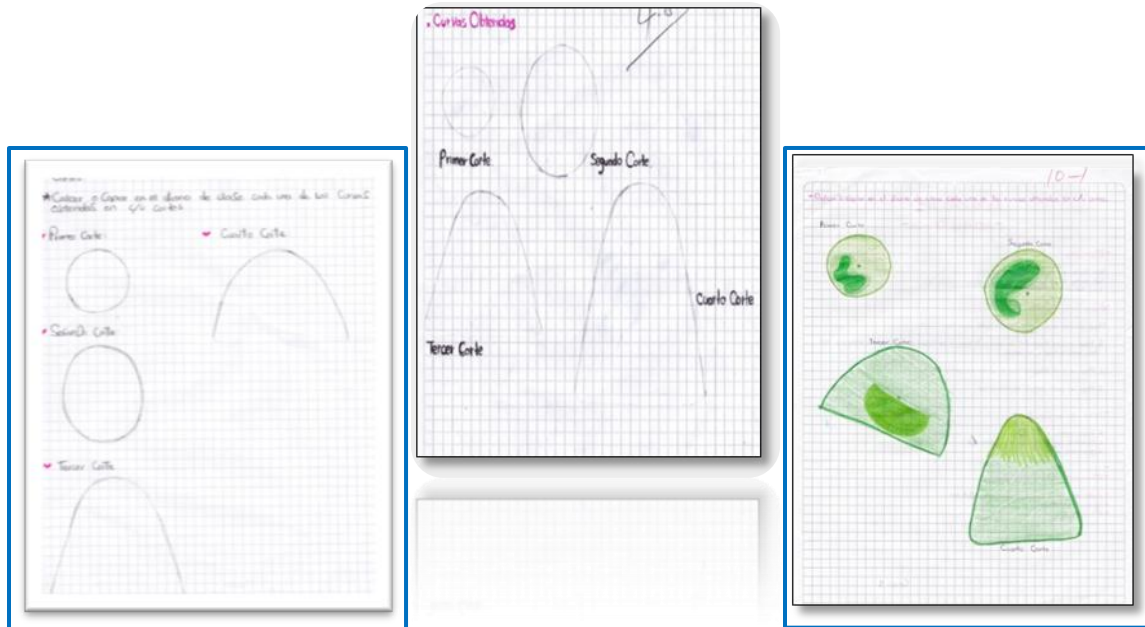
Al realizar los cortes se obtienen resultados como los que se muestran en la figura 5-2:

**Figura 5-2** : Cortes al cono y planos de corte**Continua Figura 5-2:** Cortes al cono y planos de corte

Primer corte	Segundo corte
	
Tercer corte	Cuarto corte
	

Al calcar las figuras planas obtenidas por los cortes se realiza la reproducción de las curvas al dibujar el contorno de cada una de ellas.

La mayoría de los ocho grupos que se conformaron en cada grado presentaron registros como los observados en las imágenes (figura 5-3). Para los grupos que presentaron registros coloreados o sombreados fue necesario observar la diferencia entre perímetro y área de la figura geométrica.

**Figura 5-3** : Reproducción de cónicas.

## c. Resumen de Socialización de resultados.

- La curva que se obtiene en el primer corte es una curva cerrada reconocida con el nombre de circunferencia, a la cual se le pueden trazar muchísimos diámetros.
- La curva que se obtiene en el segundo corte es una curva cerrada su forma es:  
 Ovalada parecida a la forma de algunas hojas de plantas  
 Ovoide porque tiene forma parecida a un huevo de gallina  
 Elíptica porque se parece a la órbita que describen los planetas de nuestro sistema solar.

A esta curva se le pueden trazar únicamente “dos diámetros” dos líneas obtenidas al determinar los ejes de simetría vertical y horizontal, estas líneas unen dos puntos de la curva, pasan por el centro y determinan dos regiones planas congruentes o mitades iguales.

- Las curvas que se obtienen en el cuarto y quinto corte son abiertas, su forma es parecida una es más abierta que la otra.

- A cada curva sólo se le puede trazar un "diámetro" una línea recta que las divida en dos mitades iguales.
- Dos grupos de los ocho afirman que las dos tienen forma de parábola, la trayectoria de un proyectil o balón al ser lanzado.
- Un grupo de los ocho afirma que la obtenida por el tercer corte se llama hipérbola y la que se obtiene en el cuarto corte se llama parábola porque consultaron o había algunos integrantes que eran repitentes.

#### d. Comentarios

La primera conclusión corresponde a conceptos geométricos trabajados en el área de matemáticas que los estudiantes han adquirido en los grados cursados.

La segunda conclusión corresponde a la asociación de la información que han recibido en las áreas de ciencias naturales (biología), y ciencias sociales.

La tercera conclusión corresponde a información recibida en la asignatura de física.

Es de observar que los estudiantes de la E.N.S.V en grado noveno durante el segundo período académico trabajan el tema: Funciones Cuadráticas donde realizan procesos rutinarios como tabular y graficar por tanto obtienen la curva llamada Parábola. Pero no asocian este conocimiento al dar su respuesta.

Se observa que los estudiantes no establecen diferencias entre las curvas de la parábola e hipérbola.

### **Actividad 2: Cortes en el cono en Madera o de Apolonio**

#### a. Descripción

El docente relata a los estudiantes apartes históricos que permitieron que se denominaran estas curvas desde los griegos hasta Descartes.

Se introduce el uso de lenguaje algebraico para nombrar elementos de las curvas como radio  $r$ , diámetro  $d$ , longitud del eje mayor  $2a$ , longitud del eje menor  $2b$  y distancia focal. Teniendo en cuenta que *"En la Geometría griega, las coordenadas, variables y ecuaciones no eran elementos de partida, sino conceptos subsidiarios derivados de*

*situaciones geométricas concretas de curvas que determinan las ecuaciones sin que se dé la situación inversa, es decir, que las ecuaciones determinen las curvas, ya que éstas siempre se producían mediante una construcción estereométrica como secciones de un sólido*".<sup>7</sup> Se propuso a los estudiantes construcciones geométricas para encontrar aproximaciones de las medidas de los elementos de las curvas como radio, eje mayor, eje menor y focos  $F$  al trazar perpendiculares, rectas tangentes a una curva, paralelas y ángulos.

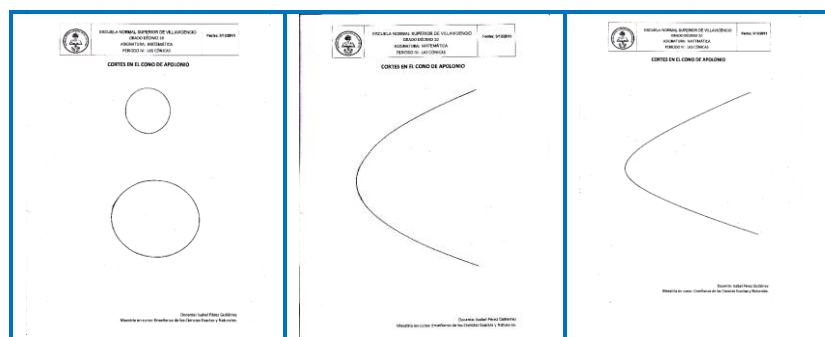
#### b. Observaciones de las actividades en el aula

Se entrega a cada estudiante fotocopia de las curvas obtenidas por los cortes del cono Apolonio en madera y la guía cortes en el cono de Apolonio.

Los estudiantes superponen a trasluz los lados apuestos de la curva y trazan los ejes de simetría mostrando facilidad al hacerlo.

Para desarrollar las construcciones geométricas, fue necesario recrear el trazo de una recta tangente a una curva<sup>8</sup>, trazo de paralelas y perpendiculares, medida de ángulos; se observa poca destreza en manejo de instrumentos como el transportador, la escuadra y el compás al realizar construcciones geométricas.

**Figura 5-4** : Fotocopia de las curvas obtenidas del cono de Apolonio



<sup>7</sup> González Urbaneja. Pedro Miguel, Estudio crítico de tres obras cumbres de la literatura matemática: Los Elementos de Euclides, El Método de Arquímedes y La Geometría de Descartes. Pág. 292.

<sup>8</sup> LEHMANN Charles, Geometría analítica, Limusa, México, 1990. Definición 44 Pág. 120

En cuanto a las mediciones realizadas en cada curva los estudiantes deciden la medida determinada por el grupo a partir del promedio de las mediciones realizadas por cada integrante.

d. Resumen de Socialización de resultados.

Cada grupo de estudiantes presenta los datos obtenidos los cuales se tabulan para la circunferencia la medida del radio  $r$  y el diámetro  $d$ , para la elipse las medidas del eje mayor  $2a$ , eje menor  $2b$  y la distancia focal  $c$ , para la parábola la distancia focal  $p$  y en la rama de la hipérbola la distancia focal  $c$ .

La mayoría de grupos comentan que se les dificultó el trazo de la recta tangente a un punto en las curvas especialmente en la de la hipérbola por que las ramas o brazos de la curva son casi rectos, que para esta curva los puntos que se deben elegir son los cercanos al vértice.

Al observar los datos obtenidos por los ocho grupos de cada grado se concluye que la medida de estos elementos no es exacta, que se obtienen diferentes resultados aunque las condiciones de cada grupo son similares.

Las causas de error en los estudiantes son la agudeza visual, la exactitud en la lectura de la escala de los instrumentos y en la destreza al utilizar los instrumentos. En los instrumentos los defectos en precisión debido a los fabricantes.

e. Comentarios

Al trazar la tangente a un punto en la curva “hipérbola” realizan el procedimiento sugerido para la parábola( persiste la idea de que ésta curva es una parábola más abierta), los estudiantes observan una diferencia entre el trazo de la curva de una “hipérbola” y una parábola, (al colocar la regla para el trazo observan que cada una de las ramas casi coinciden con el borde “la recta tangente a trazar) lo que los acerca al concepto de asíntotas de una hipérbola de manera intuitiva.

Se plantea a los estudiantes construcciones geométricas para contribuir al desarrollo de la intuición espacial y a la construcción del pensamiento espacial, se realizan trazos y mediciones mediante el uso de instrumentos como la escuadra, el compás y el transportador con el propósito de obtener con un grado de aproximación bastante aceptable los focos de las curvas cónicas.

Al comparar la medida de cada parámetro obtenida por los integrantes de cada grupo y entre grupos, los estudiantes observan que no tienen una medida exacta de cada parámetro, por tanto surge la necesidad de complementar la actividad propuesta con una charla sobre el error de la medida cuando ésta es directa y cómo al no poder controlarse de forma experimental se puede estimar su influencia mediante cálculos numéricos. Es por ello que con las mediciones directas de elementos de las curvas se utilizan procedimientos numéricos para el tratamiento del error, el uso de cifras significativas así como la expresión de medidas pequeñas por medio de la notación científica para obtener el valor más probable de los elementos de las curvas, se orienta la estimación del error por lo cual los resultados del grado para cada uno de los elementos se expresan de la forma  $x = \bar{x} \pm \Delta\bar{x}$

### 5.2.2 Situación No.2: Capturando cónicas

En los estándares para grado décimo a undécimo en el Pensamiento espacial y Sistemas Geométricos<sup>9</sup> se plantea como segundo estándar la identificación de características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana de las curvas cónicas.

Tradicionalmente para graficar se sigue el recorrido fórmula (representación algebraica), tabla de valores (representación numérica), marcado de puntos en un sistema de ejes cartesianos y dibujo de un gráfico aproximado uniendo los puntos (representación visual), Con esta situación se plantea el proceso contrario a partir de la representación visual

---

<sup>9</sup> Ministerio de Educación Nacional. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas MEN Bogotá. Pág. 88



(gráfica) determinar la representación numérica (tabla de valores) como aproximación a la representación algebraica. Es por ello que en esta situación se plantean actividades donde el estudiante realiza procedimientos como tabular datos a partir de mediciones permitiendo que explore un sistema de coordenadas y observe regularidades en los datos obtenidos.

### **Capturando Las Cónicas 1: Parábola.**

#### **a. Descripción:**

Retomando expresiones como la de Galileo Galilei hacia el siglo XVII “*La naturaleza está escrito en lenguaje matemático*” quien defendió la experimentación y determinó acertadamente que la trayectoria de un proyectil determinaba una curva que los griegos llamaron parábola se propuso a los estudiantes voluntarios la experiencia: Crear y observar un chorro de agua teniendo en cuenta el contexto escolar pues la institución cuenta con jardines internos e instalaciones para proveer agua, mangueras para regarlos en épocas de sequía.

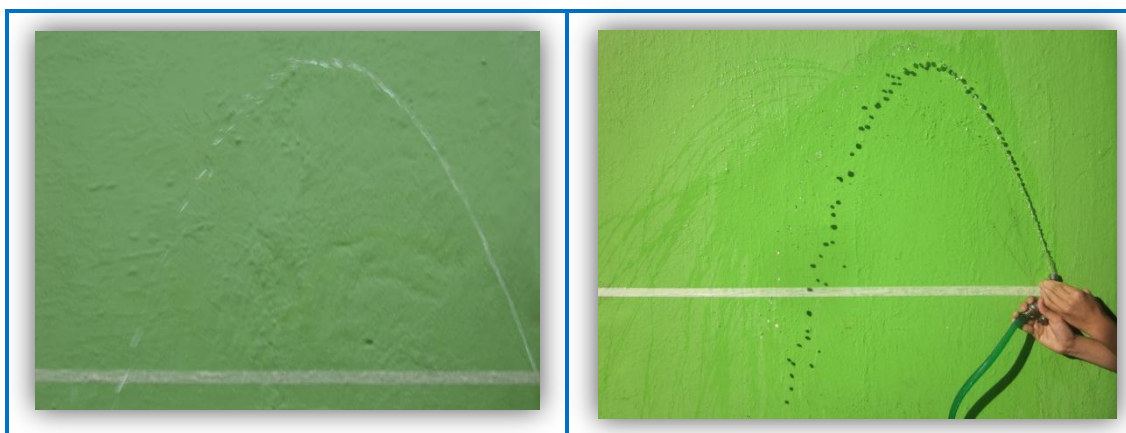
La idea inicial consistió en generar el chorro de agua con un ángulo de elevación de  $45^\circ$  dado que se podía tener el mayor alcance horizontal, pero al generar el chorro se observa que la curva es difícil de capturar por su tamaño, que el color de la pared no favorece el fondo de la fotografía. Se realizan mediciones de las diferentes alturas (y) que alcanza el chorro de agua para cada valor horizontal (x) de 10cm en 10cm.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos y las dificultades se decide buscar otro lugar. Se escogieron 2 paredes de color verde, se decide colocar una cinta de enmascarar como guía horizontal, tanto como para generar la curva como para alinear la cámara. Se realizan lanzamientos a diferentes ángulos, se concluye que para ángulos cuya elevación oscila entre los  $60^\circ$  a  $80^\circ$  se obtiene mejores curvas es decir más simétricas y hay menos distorsión del chorro de agua (figura 6.2-5). Además se logra un manejo en el flujo del agua en la manguera y la llave. Se determina que es mejor tomar el eje de simetría como eje (y) y medir valores(x) a la derecha y  $(-x)$  a la izquierda. Se considera el punto donde la curva cambia de sentido como el punto de partida para la medición.

Teniendo en cuenta la experiencia realizada con el grupo prueba se, diseñó e implementó la guía para estudiantes. Capturando las cónicas1: Parábola, la cual consiste en capturar mediante fotografías la curva que describe un chorro de agua al ser lanzado con un ángulo de elevación entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$  y caer.

b. Observaciones de las actividades en el aula

**Figura: 5-5** : Fotografías de chorros de agua lanzados con ángulos de elevación.



Se toma como base la experiencia en el manejo de llave y manguera del grupo prueba, los trazos horizontales y los ángulos que el grupo realizó en las paredes para generar el chorro, lo cual facilitó el trabajo de los distintos grupos de cada grado. Los estudiantes por grupos, distribuyen responsabilidades. Los fotógrafos capturan imágenes del chorro de agua, seleccionan las fotografías e imprimen.

Para cada fotografía determinan el trazo de la curva realizan un promedio visual de datos en la parte de la curva donde partes del chorro de agua se capturan separadas.

Trazan el eje de simetría perpendicular a la línea guía horizontal.

Miden el eje de simetría, trazan perpendiculares al eje de simetría que tocan la curva y elaboran tablas de datos.

c. Resumen de Socialización de resultados.

- La curva que genera el chorro de agua es una parábola, el chorro de agua está formado por gotas de agua que se asemejan a proyectiles.

- Algunas de las curvas no son simétricas entonces la imagen capturada no corresponde a una parábola.
- Las curvas cuyos valores en  $x$  y  $(-x)$  son aproximadamente iguales, la imagen capturada es aproximadamente una parábola
- Los puntos que determinan las curvas, se dispersan cuando la curva cambia de sentido, lo que posiblemente se debe a efectos del viento, de la gravedad, entre otros.
- Se observan mejor los puntos de la curva cuando el chorro sube que cuando cae.
- Para ángulos menores  $60^\circ$  como  $45^\circ$ ,  $30^\circ$  se dispersan más los puntos que determinan la curva, que para ángulos mayores de  $60^\circ$  y menores de  $90^\circ$ .
- Algunos grupos concluyen que las curvas más abiertas son parábolas y las más cerradas son hipérbolas.
- Las curvas capturadas que no son simétricas, son fotografías que se tomaron en perspectiva con un ángulo y no frente al chorro. La toma debe realizarse frente al chorro.
- Para los datos a partir del eje  $y$  a medida que el valor de la medida  $y$  disminuye en 1cm, el valor de la medida  $x$  aumenta en 0,4mm aproximadamente.

d. Comentarios:

Se observa que algunos grupos nombran a las curvas más cerradas hipérbola y la más abierta parábola, lo cual indica que aún no diferencian las curvas parábola e hipérbola. Hacer una tabla de datos no permite que el estudiante establezca la variación cuadrática, para ello se propone el análisis sobre la tabla que le permitan observar características de la variación.

Los estudiantes afirman que una curva capturada es parábola a partir de su simetría, falta observar otros parámetros que la determinan.

**Situación No.2: Capturando Las Cónicas 2: Elipse.****a. Descripción**

El primero en dar a conocer la utilidad de la elipse en la ciencia fue Johannes Kepler en 1609 en su publicación La nueva astronomía “*Los planetas describen órbitas elípticas en uno de cuyos focos está el Sol*” La propiedad focal <sup>10</sup>de la elipse se utiliza para el diseño de objetos elípticos.

La propiedad óptica o reflexiva<sup>11</sup>Conduce a varias aplicaciones prácticas, en la actualidad esta propiedad se emplea en la construcción de cápsulas susurrantes y se usa en litotricia un tratamiento para cálculos renales<sup>12</sup>.

**b. Observaciones de las actividades en el aula**

Los estudiantes tomaron las fotografías a objetos aparentemente elípticos, capturaron imágenes de objetos utilizados para decoración, bases de envases de líquidos y enlatados, símbolos de empresas como Toyota, Ford entre otros.

Para realizar los trazos, se remarcaron los bordes de la imagen y se realizaron en la marca de la curva obtenida al respaldo de la fotografía impresa.

**c. Resumen de Socialización de resultados**

- La elipse en nuestro contexto es muy común ya que la encontramos en objetos de para decoración, bases de envases, accesorios.
- Se consideran imágenes elípticas a las fotografías donde se cumple que los ángulos que forma la tangente con los segmentos trazados  $\overline{F_1P}$  y  $\overline{F_2P}$ . Tienen la misma medida en grados y la suma de los segmentos  $\overline{F_1P}$  y  $\overline{F_2P}$ ;  $\overline{F_1Q}$  y  $\overline{F_2Q}$  son aproximadamente iguales a la longitud del eje mayor  $2a$ .

<sup>10</sup> STEWART James. Precálculo: Matemáticas para el Cálculo. Thomson. México. 2007. Pág.174

<sup>11</sup> LEHMANN Charles, Geometría analítica, Limusa, México, 1990. Pág. 188

<sup>12</sup> STEWART James. Precálculo: Matemáticas para el Cálculo. Thomson. México. 2007. Pág 759.

- Hay objetos que a simple vista pueden considerarse elípticos pero al realizar mediciones se puede determinar que no lo son. Un objeto puede ser elíptico pero la imagen capturada no necesariamente lo es.

#### d. Comentarios

Como actividad complementaria se invita a los estudiantes a ver la película ÁGORA, en la jornada contraria.

### **Situación No.2: Capturando Cónicas y Reproduciendo cónicas**

#### a. Descripción

En el conjunto de ejercicios llamado *Descubrimiento- Debate*<sup>13</sup> para estimular al estudiante a experimentar, de preferencia en grupos plantea ejercicios que llama **cono de luz de una linterna** que plantea la situación: se sostiene una linterna para formar un área iluminada sobre el suelo ¿Es posible orientar la linterna de manera que el límite del área sombreada sea una parábola? ¿Es posible orientar la linterna de manera que el límite del área sombreada sea una elipse? ¿Es posible orientar la linterna de manera que el límite del área sombreada sea una hipérbola? Al plantear esta situación el grupo de estudiantes voluntarios obtuvo las curvas cónicas, los focos de la elipse y la parábola esta actividad, genera la elaboración de la guía: Reproduciendo cónicas.

#### b. Observaciones de las actividades en el aula

Los estudiantes realizaron el reconocimiento visual de cada una de las cónicas, circunferencia, elipse, parábola e hipérbola.

Dibujaron las curvas, a partir del límite del área iluminada sobre la cartulina que pegaron a la pared o en el piso.

---

<sup>13</sup> STEWART James. Precálculo: Matemáticas para el Cálculo. Thomson. México. 2007. Pág 752-761-770.

Realizaron marcas para indicar el lugar donde se concentra el haz de luz (foco) y determinan el foco.

Al realizar los trazos del eje mayor y del menor, recortaron las figuras y ejecutaron dobleces para verificar la simetría de la curva.

Algunos grupos para trazar el segmento  $\overline{LR}$  perpendicular al eje que pasa por el foco  $F$  Utilizan la escuadra y otros el doblez.

#### c. Resumen de Socialización de resultados.

- En la circunferencia el diámetro es aproximadamente dos veces el radio.
- En la elipse la medida del segmento  $\overline{LR}$  es aproximadamente igual a  $\frac{2b^2}{a}$ .
- En la parábola la medida del segmento  $\overline{LR}$  es aproximadamente igual a 4 veces la distancia focal  $p$ .
- En la hipérbola no fue posible establecer un resultado debido a que no se observa un punto donde se concentra el haz de luz.
- Los valores difieren en 1mm, 2mm y hasta 3mm. Argumentan que es un error debido a que no se cuenta con un aparato que permita graduar la inclinación de la linterna y dejarla fija para trazar las curvas y determinar los focos. Además se puede cometer errores de paralaje en la lectura de la escala de la regla.

#### d. Comentarios

Se observa un uso adecuado de términos asociados a las cónicas como vértice  $V$ , centro  $C$ , eje de simetría, foco  $F$ , distancias focales  $c$  ó  $p$ , semieje mayor  $a$ , semieje menor  $b$ , radio  $r$  y se introduce el termino lado recto  $\overline{LR}$ .

En el experimento a medida que se inclina el haz de luz (es decir se varia el ángulo de inclinación del haz de luz, de perpendicular a paralelo a la superficie iluminada) se observa que el foco se aleja del vértice de la curva, determinándose una familia de parábolas cada vez mas abiertas que tienden a ser posiblemente una hipérbola.

Como actividad complementaria se invita a los estudiantes a ver el video publicado en YouTube como: Capitulo 05 - Mas por menos - Cónicas, del baloncesto a los cometas<sup>14</sup>

### 5.2.3 Situación No. 3: Cónicas desplazadas

Para el desarrollo de las actividades en la situación se utiliza el programa Graph 4.3 el cual plasma funciones matemáticas en gráficos de coordenadas el cuál se ha utilizado en el segundo período para graficar funciones trigonométricas. Graph es una sencilla herramienta matemática que nos ayuda a llevar funciones desde su versión analítica al plano visual, permitiendo realizar distintas operaciones de edición sobre esa misma gráfica resultante.

#### Cónicas desplazadas: Comprobando mediciones

##### a. Descripción

Las situaciones 1 y 2 han orientado a los estudiantes hacia la conceptualización de algunos los parámetros de las curvas circunferencia, elipse, parábola e hipérbola. Se realizó una explicación sobre la deducción de las ecuaciones canónicas de la circunferencia y elipse con centro en el origen y focos en los ejes, parábolas con vértice en el origen y focos sobre los ejes e hipérbola con centro en el origen y focos en los ejes.

**Tabla 5- 1: Datos obtenidos en la situación 1 grado 10-2**

CURVA	PARAMETROS
<b>CIRCUNFERENCIA</b>	$r = 1,99\text{cm}$
<b>ELIPSE</b>	$a = 3,835\text{cm}$ $b = 3,305\text{cm}$ y $c = 1,38\text{cm}$
<b>PARÁBOLA</b>	$P = 1,53\text{cm}$
<b>HIPERBOLA</b>	$c = 1,22\text{cm}$ , $a = ?$

<sup>14</sup> Se encuentra en <http://www.youtube.com/watch?v=KSJposN6NuQ>

La tabla 5-1 muestra los resultados obtenidos por un grupo del grado 102. Se registraron los datos obtenidos en la situación 1: Cortes en el cono de Apolonio que se utilizaran para generar las curvas utilizando el programa Graph y escribir las ecuaciones que representan las curvas.

b. Observaciones de las actividades en el aula

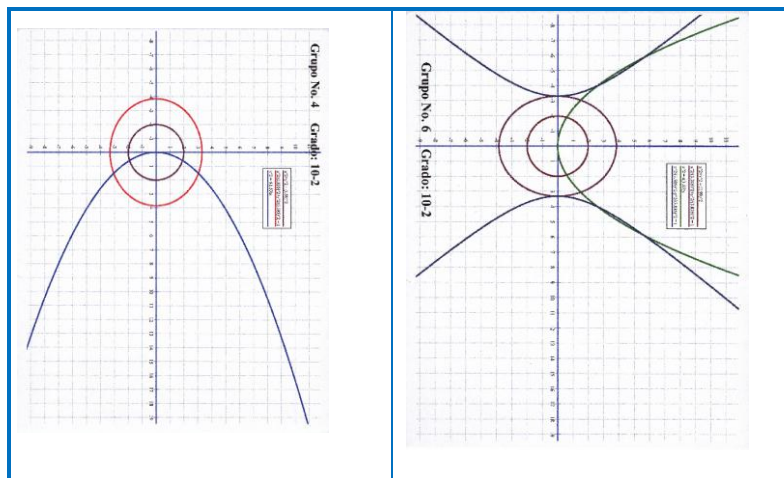
Cada grupo trabaja en el aula con dos computadores portátiles. Fue necesario indicar a los estudiantes como se escribe en Graph una expresión cuadrática y expresiones decimales.  $x^2$  se escribe  $x^2$ , 5,21 se escribe (5.21).

Los grupos dedican tiempo a sus diseños, eligiendo el color, grosor entre otras herramientas que les ofrece Graph. Cada grupo presenta impresas las curvas generadas en Graph e impresas en cuadrícula de 1cm. Figura 5-6

c. Resumen de Socialización de resultados

- Las curvas circunferencia y elipse son aproximadamente congruentes.
- La parábola es congruente en la curva cercana al vértice más no a lo largo de toda las “ramas”.
- La hipérbola no la generaron porque no tenían los parámetros. Algunos grupos la generaron utilizando los parámetros de la elipse pero se dan cuenta de que no coincide en ninguno de los puntos.

**Figura 5-6** : Gráfico en Graph datos situación 1 grado 10-2 (tabla 5 -1)





## d. comentarios

Al comparar a trasluz las curvas impresas con las curvas calcadas en la actividad cortes del cono de Apolonio, el estudiante elabora estrategias para verificar sus resultados.

Como actividad complementaria se invita a los estudiantes a ver la aplicación web: Curvas cónicas para dibujo y matemáticas<sup>15</sup>

## Cónicas desplazadas: La circunferencia y la parábola; La elipse y la hipérbola

## a. Descripción

En estas actividades se consideran las cónicas cuyos vértices y centros no necesariamente están en el origen, y se determina cómo esto afecta sus ecuaciones.

## b. Observaciones de las actividades en el aula

Durante la ejecución de estas actividades los estudiantes observaron que “si  $h$  y  $k$  son números reales positivos, entonces al remplazar  $x$  por  $x - h$  ó  $x + h$  y reemplazar  $y$  por  $y - k$  ó  $y + k$  tiene los efectos sobre la gráfica de cualquier ecuación en  $x$  y  $y$ .

**Remplazo**

1.  $x$  se sustituye por  $x - h$
2.  $x$  se sustituye por  $x + h$
3.  $y$  se sustituye por  $y - k$
4.  $y$  se sustituye por  $y + k$

**Cómo se desplaza la gráfica**

- $h$  unidades a la derecha  
 $h$  unidades a la izquierda  
 $k$  unidades hacia arriba  
 $k$  unidades hacia abajo”<sup>16</sup>

<sup>15</sup> Se localiza en:

[http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2006/curva\\_conicas/index.html](http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2006/curva_conicas/index.html)

<sup>16</sup> STEWART James. Precálculo: Matemáticas para el Cálculo. Thomson. México. 2007. Págs. 775y 776.

Estas actividades permitieron la representación gráfica de cada una de las cónicas, el reconocimiento y verificación de las longitudes los parámetros de cada una.

c. Resumen de Socialización de resultados

Cada grupo presenta un gráfico diseñado en Graph de cada una de las cónicas.

d. Comentarios

- Las cónicas se pueden representar algebraicamente mediante una ecuación de segundo grado en dos variables. Al obtener la ecuación general de la curva a partir de la ecuación canónica se solicita a los estudiantes que las visualicen en Graph y comparen, acción que permitió verificar a cada grupo si los procedimientos algebraicos realizados eran los apropiados.
- Para realizar el proceso algebraico de transformación de la ecuación general a la ecuación canónica se recordó el procedimiento de factorización de trinomios cuadrados perfectos por adición o sustracción.

**Verificación de la definición geométrica de las cónicas y de la excentricidad.**

a. Descripción

Para estas actividades el estudiante maneja el programa Graph y representa las cónicas a partir de ecuaciones.

b. Observaciones de las actividades en el aula

Se observa que los estudiantes identifican las ecuaciones y los elementos de las curvas que representan y manejan el programa Graph para representarlas gráficamente.

### c. Resumen de Socialización de resultados

En la elipse la excentricidad es una medida entre 0 y 1 que permite determinar cuando una elipse es más alargada que otra, si el valor de la razón  $\frac{c}{a}$  es cercano a cero tiende a ser redonda por que  $c$  tiende a ser cero de tal forma que al coincidir los focos la elipse corresponde a la circunferencia y si  $c$  tiende a ser igual a  $a$  la elipse es más alargada y  $\frac{c}{a}$  es aproximadamente igual a 1.

En la hipérbola la razón  $\frac{c}{a}$  es un valor mayor que 1, permite determinar que tan abiertas o cerradas son las ramas de la hipérbola, si el valor de  $\frac{c}{a}$  es cercano a 1 las ramas son más puntiagudas y si es más grande las ramas son casi planas o rectas.

### d. Comentarios

Para cada una de las cónicas parábola, elipse e hipérbola, se verifica la definición geométrica.

Se realizaron cálculos con la información que aporta el grafico realizado.



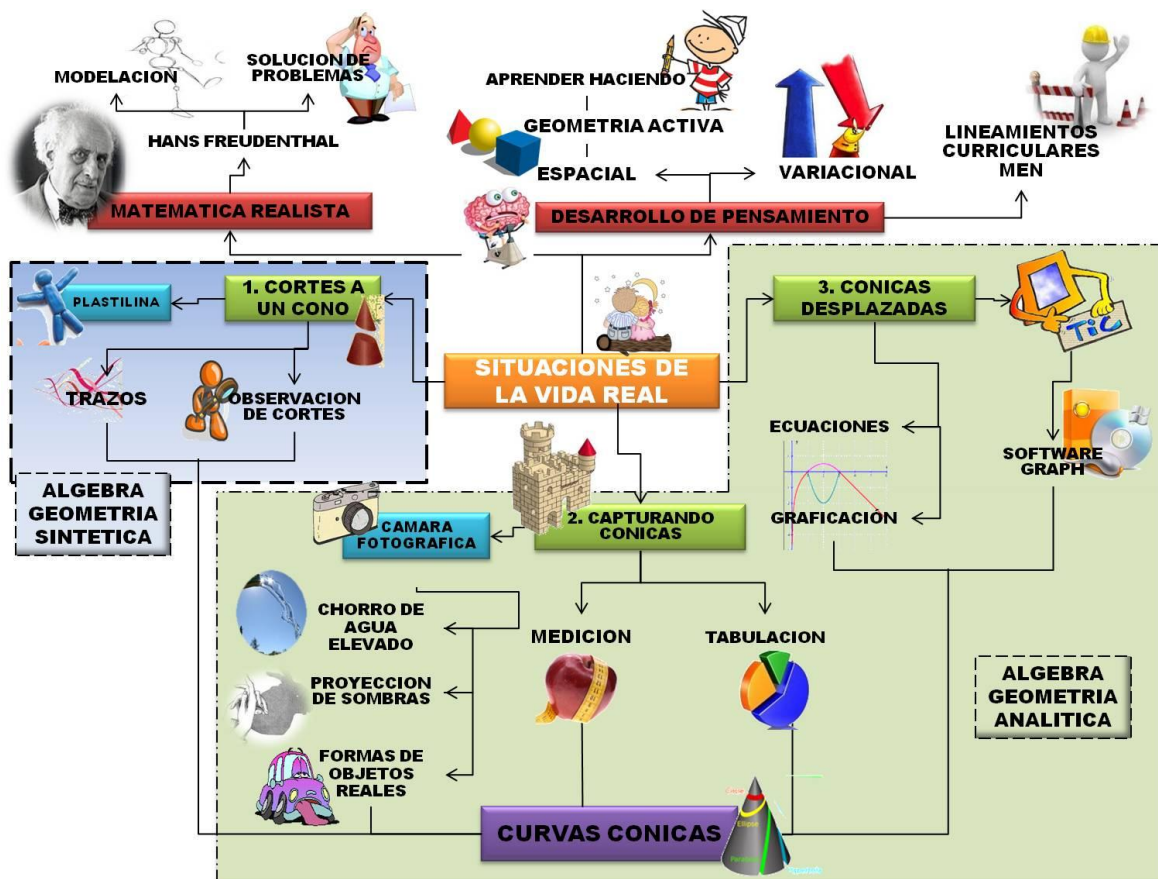
## 6. Conclusiones y recomendaciones

### Conclusiones

- El proceso de estructuración de la propuesta didáctica para la enseñanza de las cónicas, favoreció la comprensión de este tema a través de la visualización, construcción, explicación y formalización de los aspectos gráfico y analítico de estas curvas geométricas.
- La revisión de los aspectos históricos que contribuyeron a la conceptualización que hoy se conoce de las cónicas, permite observar la riqueza de los procesos de construcción de este conocimiento matemático que surge en el intento de dar solución a problemas irresolubles como la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo que son de tan variada aplicación en ámbitos de la ciencia y la tecnología en esta época.
- Mediante el uso del proceso de modelación o matematización se da la reinención guiada del conocimiento matemático, lo que permite que el estudiante cambie la visión de una matemática prefabricada por otra donde es posible “hacerla”, por tanto puede constituirse en una herramienta motivadora en el aula de clase, al igual que potencia el desarrollo de las competencias en los estudiantes promoviendo un cambio de actitud hacia el aprendizaje de la matemática.
- Llevar al aula situaciones problema tomadas de la realidad, implica a los docentes explorar ideas, la utilización de recursos, búsqueda de soluciones para integrar lo práctico y lo formal y sobre todo tener la disposición y actitud necesarias para querer hacerlo, sentirse bien haciéndolo y determinar lo pertinente para hacerlo, de tal manera que transforme la situación real en una situación de aprendizaje colaborativo, a medida que se apropia de recursos teóricos y prácticos que contribuyen al mejoramiento continuo de su desempeño como docente .
- Utilizar el software Graph, permite integrar la tecnología con el proceso de modelación al realizar procedimientos de visualización acompañados de

medición, verificación de propiedades y traducción del lenguaje gráfico al algebraico o viceversa.

- Generar una actividad didáctica no es un proceso mecánico, ni simple, puesto que se requiere de un conocimiento adecuado tanto en lo histórico, el conocimiento situado, lo pedagógico y lo disciplinar.
- Mapa mental: Estudio de las aplicaciones de las cónicas mediado por la modelación desde una visión analítica.



## Recomendaciones

Una de las cónicas, la hipérbola con sus dos ramas es poco observable desde la realidad, el presente trabajo puede complementarse tomando como situación real las ondas en un estanque al crearse patrones de interferencia, utilizando patrones de Moiré<sup>17</sup>, (Anexo G).

Para profundizar en la temática, explorar y generar las superficies cónicas al rotar cada curva cónica utilizando las potencialidades que ofrece el programa para cálculo matemático avanzado Derive u otro que esté al alcance en la institución educativa.

---

<sup>17</sup> **Patrones de Moiré** (Cuando las rejillas (llamamos rejillas a una serie de líneas igualmente espaciadas que forman un patrón) se superponen, los puntos de intersección de las líneas de las dos rejillas forman otra secuencia repetitiva de líneas (el patrón de Moiré). Ver figura 1. Este fenómeno se verá siempre que dos patrones con algún grado de periodicidad (es decir que una característica se repite varias veces) se superpongan: mallas, rejas de ventana, etc. Tomado de Revista Museolúdica No.6, artículo: El taller de re-creo: Los patrones de Moiré. [http://www.cienciayjuego.com/jhome/index.php?option=com\\_content&view=article&id=271:el-taller-de-re-creo-los-patrones-de-moire&catid=38:06](http://www.cienciayjuego.com/jhome/index.php?option=com_content&view=article&id=271:el-taller-de-re-creo-los-patrones-de-moire&catid=38:06)





ESTANDARES	CONTENIDOS	
	GRADO 10º	GRADO 11º
<p><b>PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS.</b></p> <p>Análizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales.</p> <p>Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos.</p> <p>Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.</p> <p>Utilizo argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucren números naturales.</p> <p>Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.</p>	<p>Sistemas de los números reales R.</p> <p>Conjuntos numéricos</p> <p>Características y propiedades de los números reales</p> <p>La recta numérica real.</p> <p>relaciones de orden y desigualdades</p> <p>Intervalos reales.</p> <p>Valor absoluto.</p> <p>Sucesiones.</p> <p>Serie aritméticas y geométricas</p>	<p>Sistema de los números reales R.</p> <p>Conjuntos numéricos</p> <p>Características y propiedades de los números reales</p> <p>La recta numérica real.</p> <p>relaciones de orden y desigualdades</p> <p>Intervalos reales.</p> <p>Valor absoluto.</p> <p>Sucesiones.</p> <p>Serie aritméticas y geométricas</p>
<p><b>PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS.</b></p> <p>Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.</p> <p>Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.</p> <p>Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.</p> <p>Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.</p> <p>Describo y modeló fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.</p>	<p>Cónicas: (parábola, elipse, hipérbola, representaciones simbólicas y gráficas)</p> <p>Circunferencias: (rectas tangentes, arcos, cuerdas, ángulos centrales e inscritos)</p> <p>Otros ángulos</p>	<p>Máximos y mínimos.</p> <p>Sumas de Riemann</p> <p>Áreas y volúmenes de sólidos, aplicaciones con integrales.</p> <p>Funciones de variable real.</p> <p>Elaboración de la gráfica de una función.</p>



## B. Anexo: Plan estratégico del área de matemáticas para grado 10°, cuarto período

# Escuela Normal Superior de Villavicencio

PLANTE OFICIAL, APROBADO SEGUN RESOLUCION N° 000 DE AGOSTO 07 DE 1999  
NIT: 892.099.1094 REGISTRO EDUCATIVO N° 0002 CODIGO CPES 010394 CODIGO DANE 1500100396

## PLAN ESTRATEGICO DE AREA

AREA: MATEMATICAS. GRADO: DECIMO. PERIODO: CUARTO. DOCENTE: ISABEL PÉREZ GUTIÉRREZ

COMPETENCIA DEL AREA: Soluciona situaciones matemáticas y de otras ciencias que involucren las funciones trigonométricas y las cónicas utilizando los procedimientos matemáticos rutinarios (calcular, graficar, medir, tabular entre otros), demostrando el uso adecuado del lenguaje escrito, oral, gráfico y algebraico al traducir de uno a otro y al generalizar propiedades y relaciones.

PREGUNTA PROBLEMA: ¿Será la matemáticas una herramienta, un medio o un proceso para la solución de las distintas situaciones problemas que se presentan en nuestro entorno, y como la emplearemos de la mejor forma?

Factor o componente	Indicador de desempeño	DESEMPEÑO(S)			CRITERIOS DE EVALUACION				INTER DISC
		Saber	Saber Hacer	Ser	B.AJO	BASICO	ALTO	SUPERIOR	
PENSAMIENTO S: Métrico y Sistema de medidas.	ANALIZA ECUACIONES GENERALES DE SEGUNDO GRADO E IDENTIFICA LA CONICA	Cónicas: Representaciones simbólicas y gráficas. Circunferencias: (rectas, tangentes, arcos, cuerdas y ángulos centrales e inscritos) Parábola (elementos, ecuación, determinación de los elementos.). Elipse: (elementos, ecuación) Hiperbola: (elementos, ecuación)	Traza y reconoce lugares geométricos, tales como rectas, curvas a partir de las expresiones algebraicas. -Reconoce las cónicas a partir de sus expresiones algebraicas y viceversa. -Establece diferencias y semejanzas entre las diferentes cónicas. Construyo las cónicas con regla y compás. -Reconoce los elementos básicos de la geometría analítica y su aplicación en la solución de problemas	Trabaja de manera organizada y sistemática. Es perseverante en la búsqueda de soluciones. Hace buen uso de los laptops disponibles por cada dos estudiantes. Realiza tareas y consultas referentes a las cónicas	Construye las gráficas de las cónicas con regla y compás	Identifica las cónicas sus elementos y sus ecuaciones al construir las cónicas correctamente utilizando instrumentos geométricos.	Construye y determina los elementos y la ecuación de cada sección cónica	Analiza ecuaciones generales de segundo grado e identifica la cónica a la que corresponde.	
Espacial y sistemas geométricos y Variacional y sistemas algebraicos y analíticos	LA CONICA CORRESPONDE				Presenta las gráficas de las cónicas construidas con regla y compás teniendo en cuenta procedimientos dados.	Presenta las gráficas de cada cónica, indicando en cada uno de ellas los elementos y la ecuación que la generó.	Establece la correspondencia entre gráficas de secciones cónicas y ecuaciones y viceversa.		
					INDICADOR DE EVALUACION				



## C. Anexo: Los principios de la educación matemática realista

Ana Bressan

En este artículo nos centraremos en una línea didáctica que se identifica con el nombre de Educación Matemática Realista y reconoce como fundador al Dr. Hans Freudenthal (1905-1990). Esta corriente nace en Holanda como reacción frente al movimiento de la Matemática Moderna de los años 70 y al enfoque mecanicista de la enseñanza de la matemática, generalizado en ese momento en las escuelas holandesas.

Hans Freudenthal, matemático y educador de origen alemán, doctorado en la Universidad de Berlín, desarrollo su carrera académica y sus teorías pedagógicas en Holanda. Fue un incansable propulsor de un cambio en la enseñanza tradicional de la matemática y mucha de su popularidad proviene de su amplia actuación como fundador y participante activo en el Grupo Internacional de Psicología y Educación Matemática (PME) y la Comisión Internacional para el Estudio y el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática (CIEAEM) en cuyas reuniones manifestaba oposición a las corrientes pedagógico-didácticas y a las “innovaciones” en la enseñanza vinculadas a la matemática que se propiciaban a mediados del siglo pasado, tales como la teoría de los objetivos operacionales, los test estructurados de evaluación, la investigación educativa estandarizada, la aplicación directa del estructuralismo y el constructivismo de Piaget en el aula, la separación entre investigación educativa, desarrollo curricular y práctica docente y la matemática “moderna” en la escuela.

A pesar de sus escasas referencias a autores no matemáticos, Freudenthal reconoce influencias de Decroly, de quien valoriza sus centros de interés (que se asemejan a su propia teoría de aprendizaje de la matemática en el contexto de la vida real), de Dewey, a quien también reconoce similitudes con su idea de reinención guiada, de Pierre y Dina Van Hiele de los cuales toma los niveles de matematización en función de su trabajo de tesis acerca del Desarrollo del Pensamiento Geométrico y su Didáctica (1957). También se notan en él influencias de las ideas pedagógicas de Lagenveld (pedagogía fenomenológica), Castelnuovo E. (didáctica intuitiva), Petersen (educación progresiva), Kry Van Perreren y las teorías socioculturales de la Europa del Este. Sus publicaciones sobre Educación matemática se remontan a 1948 y en el curso del tiempo desarrolla a través de ellas, junto con otros colaboradores del Instituto para el desarrollo de la Educación Matemática, IOWO, fundado por él en 1870 en la Universidad de Utrech, renombrado hoy como Instituto Freudenthal, las bases sobre las que hoy trabaja la corriente conocida como Educación Matemática Realista (EMR).

## LOS PRINCIPIOS DE LA EDUCACION MATEMÁTICA REALISTA

La EMR no pretende ser una teoría general del aprendizaje (como lo es, por ejemplo, el constructivismo), sino que más bien se trata de una teoría global que se basa en las siguientes ideas centrales:

- Pensar la matemática como una *actividad humana* (a la que Freudenthal denomina matematización), de modo tal que debe existir una *matemática para todos*.
- Aceptar que el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos *niveles* donde los *contextos* y los *modelos* poseen un papel relevante y que ese desarrollo se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado *reinención guiada* en un ambiente de *heterogeneidad* cognitiva.
- Desde el punto de vista curricular, la reinención guiada de la matemática en tanto actividad de matematización requiere de la *fenomenología didáctica* como metodología de la investigación, esto es, la búsqueda de contextos y situaciones que generen la necesidad de ser organizados matemáticamente, siendo las dos fuentes principales de esta búsqueda la *historia de la matemática* y las *invenciones y producciones matemáticas espontáneas de los estudiantes*.

A continuación se detallan estos conceptos que suelen ser presentados bajo el nombre de Principios de la Educación Matemática Realista, que se encuentran profundamente relacionados entre sí.

### PRINCIPIO DE ACTIVIDAD

La idea fundamental de Freudenthal es que la matemática debe ser pensada como una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder y la mejor forma de aprenderla es haciéndola.

Dice Freudenthal (1993: IX): “*Las cosas están al revés si se parte de enseñar el resultado de una actividad más que de enseñar la actividad misma (hecho que caracteriza como inversión antdidáctica)*”.

Como matemático-investigador, hacer matemática (*metematizar*) es más importante que aprenderla como producto terminado. El énfasis no está en aprender algoritmos, sino en el proceso de *algoritmización*, no en el álgebra sino en la actividad de *algebrizar*, no en las abstracciones sino en la acción de *abstraer*, no en la forma y la estructura sino en *formalizar y estructurar* (1991).

En la perspectiva realista, se propone que la matemática posee valor educativo en la medida en que permite comprender y participar de los modos en que esta disciplina organiza distintas esferas de nuestro entorno social y natural.

Freudenthal entiende que el término “educación” encierra tanto el logro de los objetivos de la instrucción formal como el desarrollo de actitudes de toda clase: morales, sociales, emocionales, religiosas y cognitivas. Todo esto hará del ser humano un hombre culto, formado, que es uno de los objetivos más relevantes de la educación (Freudenthal, 1980: 35-38)

Asimismo, propicia una matemática para todos, reconociendo que no todos los estudiantes han de llegar a ser matemáticos, y que para una mayoría la matemática a utilizar será la que les ayude a resolver los problemas de la cotidianidad.

Por otro lado, también plantea que los niños no pueden matematizar la matemática, ya que, en un principio, no hay objeto matemático que sea de su experiencia real. Por lo tanto, se trata de posibilitar el acceso a conocimientos, destrezas y disposiciones mediante situaciones problemáticas que generen en los estudiantes la necesidad de utilizar herramientas matemáticas para su organización y solución (1973: 134).

#### PRINCIPIO DE REALIDAD

Si la matemática surge como *matematización* (organización) de la realidad, el aprendizaje matemático debe originarse también en esa realidad. Esto no sólo significa mantener a esta disciplina conectada al mundo real o existente sino también a lo realizable, imaginable o razonable para los alumnos.

Dice Freudenthal: *“Yo prefiero aplicar el término ‘realidad’ a lo que la experiencia del sentido común toma como real en un cierto escenario”* (1991: 17).

Desde este punto de vista, resultará tan “real” para un estudiante de primer ciclo trabajar sobre el colectivo al que diariamente aborda para venir a la escuela, como, posteriormente, hacerlo sobre el lenguaje de flechas que representa lo que en el colectivo acontece, o en estudiantes más avanzados, recurrir a lo que se sabe sobre números y operaciones para resolver mentalmente problemas tales como  $39 \times 41$ ,  $252 \div 12$  ó  $60 \div$

O inventar un método para predecir las dos últimas cifras de una potencia de 7 dado el exponente.

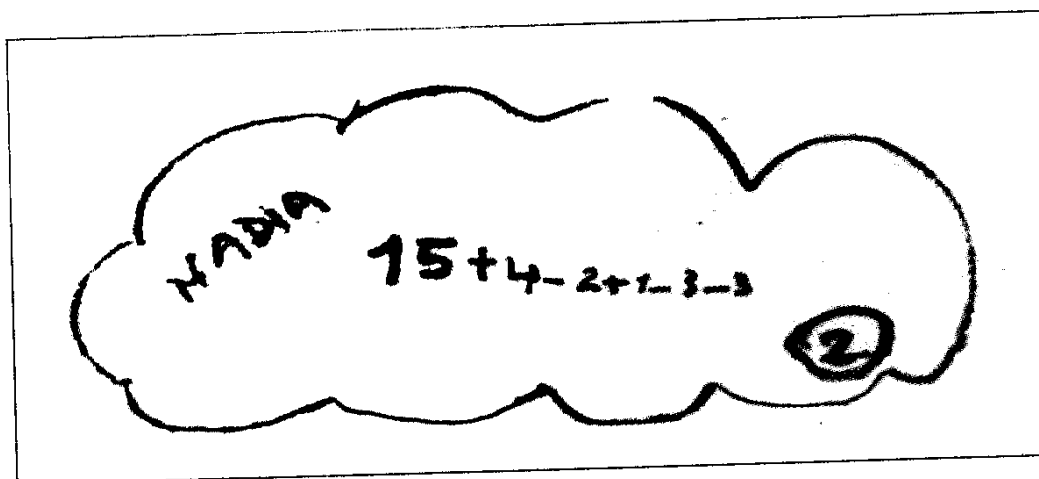
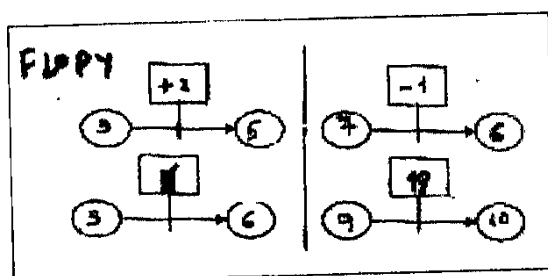
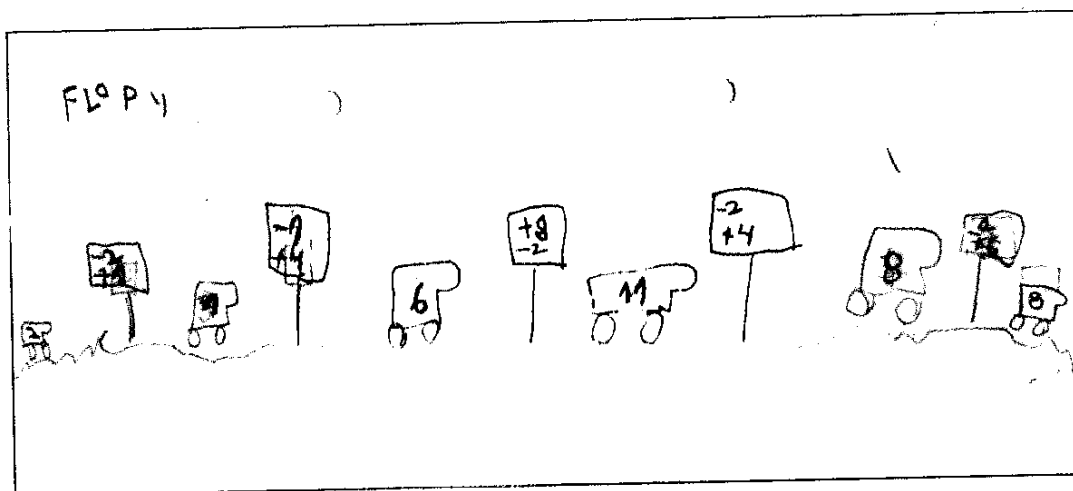
De lo que se trata es de presentar los problemas, en principio en contextos de la vida diaria, de modo tal que los alumnos puedan imaginar las situaciones en cuestión y, a partir de ahí, utilizar su sentido común y poner en juego los procedimientos de cálculo, las estrategias de resolución y los modelos matemáticos que mejor sirvan para organizarlas. En la búsqueda de estos problemas, el contexto debe ser considerado como un aspecto intrínseco a los mismos y no como un mero ropaje a eliminar:

*“Enfocar el contexto como un ruido, susceptible de perturbar la claridad del mensaje matemático, es un error; el contexto por sí mismo constituye el mensaje, siendo las matemáticas un medio para decodificarlo”* (Freudenthal, 1973).

Al ser significativos para el estudiante (Freudenthal, 1981), los contextos en la EMR se constituyen en puntos de partida de su actividad matemática, promoviendo el uso de su sentido común y de sus estrategias informales, permitiéndoles luego avanzar por sí mismos hacia niveles de mayor formalización.

A continuación se presentan producciones de distintos niveles de matematización a partir del trabajo con el contexto del colectivo, una situación paradigmática de la didáctica realista holandesa. Se trata del recorrido de un colectivo en el que se van subiendo y bajando pasajeros, trabajándose así simultáneamente la suma y la resta. Cuando describen diferentes trayectos de colectivos, los niños reconocen fácilmente los cambios en el número de pasajeros en cada parada y dan naturalmente sentido a

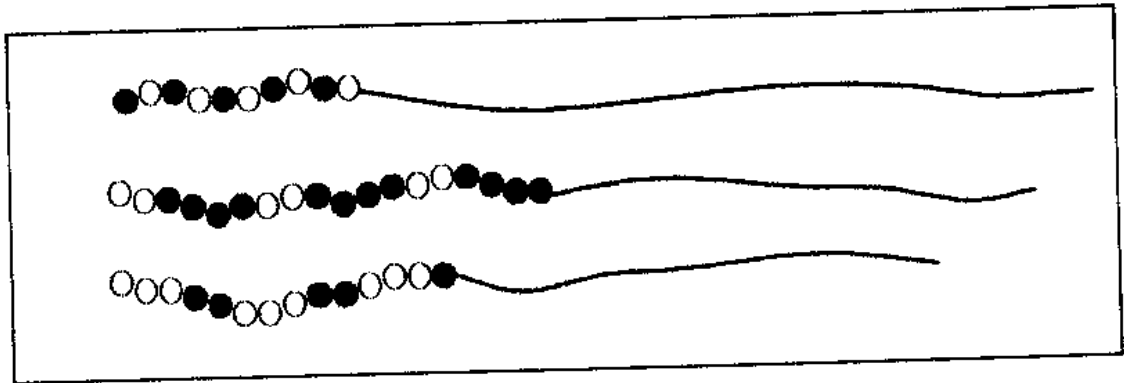
los signos de más (+) y de menos (-). Con preguntas del docente se van desprendiendo de los detalles irrelevantes desde el punto de vista matemático, se centran en los cambios de pasajeros que vienen, que suben o bajan y que siguen viaje y crean formas de representación con mayor nivel de esquematización, como se puede apreciar en los trabajos de Flopy, quien, partiendo de un nivel gráfico icónico, llega a interpretar el lenguaje de flechas mientras, que Nadia trabaja ya a nivel numérico puro (ambas alumnas de primer grado, Esc. 71, Bariloche, 2001).



Otros contextos propuestos por la Educación Matemática Realista son:



- Los patrones en los collares para trabajar regularidades,



- La distribución de embaldosados o plantas en un vivero (arreglos rectangulares) para abordar la enseñanza de la multiplicación,
- Las situaciones de reparto equitativo para el tratamiento de las fracciones,
- La notación de libreta (usada en los restaurantes) para sistemas de ecuaciones,
- Los empaquetados en la fábrica de caramelos para comprender las propiedades del sistema de numeración decimal,
- La conformación de distintos menús o los recorridos posibles entre varios puntos de un plano para trabajar combinatoria,
- Las formas de las cajas de empaque para estudiar prismas,
- La ubicación de un incendio desde distintos miradores, para trabajar coordenadas, rectas y pendientes, etc.

Además de estos contextos situacionales, vinculados a la cotidianeidad, Freudenthal considera contextos también a aquellos puramente matemáticos (contextos desnudos o puros), en tanto sean significativos para los niños presentándose a ellos como juegos o desafíos: buscar regularidades en tablas y tableros, construir pirámides numéricas trabajando operaciones inversas, completar cadenas de operaciones buscando relaciones entre los números que las integran, etc.

Para no generalizar y banalizar el concepto de contexto realista es importante tener en cuenta el carácter *relativo* del mismo, pues un contexto, sea o no realista, depende de la experiencia previa de los alumnos y/o de su capacidad para imaginarlo o visualizarlo.

Muchos de estos contextos se tomarán modelos mentales a los cuales los alumnos podrán acudir para recordar estrategias de solución utilizadas en ellos.

### PRINCIPIO DE REINVENCIÓN

Para Freudenthal, la matemática no es otra cosa que una forma de sentido común, sólo que más organizada.

*“Para transformarlo en matemática genuina y para progresar, el sentido común debe ser sistematizado y organizado. Las experiencias del sentido común cristalizan en reglas (por ejemplo, la conmutatividad de la suma) y estas reglas se transforman de nuevo en*

*sentido común, pero a un nivel más alto, constituyendo así la base para una matemática de orden aún mayor, una jerarquía tremenda, construida gracias a un notable interjuego de fuerzas” (1991).*

Este proceso se realiza en las aulas conjugando los roles y responsabilidades del docente y del alumno a través de una forma de interacción que Freudenthal denomina “reinención guiada” y la entiende como “...un balance sutil entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar” (1991).

La educación matemática debe dar a los alumnos la oportunidad *guiada* por el maestro de reinventar la matemática (no crean, ni descubren, sino que reinventan modelos, conceptos, operaciones y estrategias matemáticas con un proceso similar a los que usan los matemáticos al inventarlas). Aquí el docente posee un papel bien definido en tanto sujeto que media entre los alumnos y las situaciones problemáticas en juego, entre los alumnos entre sí, entre las producciones informales de los alumnos y las herramientas formales, ya institucionalizadas, de la matemática como disciplina.

Para orientar adecuadamente este proceso es importante la capacidad de anticipación, observación (y auto-observación) y reflexión del docente acerca de los aprendizajes a corto y largo plazo de sus alumnos. Esto le permitirá conocer las comprensiones y habilidades de los mismos, para organizar la actividad en el aula y dar lugar a esta reinención y a los cambios de nivel -esto se explica en el siguiente apartado- que pretende lograr en esas comprensiones (Freudenthal, 1991).

Para Freudenthal (1991), el aprendizaje, lejos de ser continuo y gradual, presenta discontinuidades, es decir, saltos repentinos de reinención (evidenciados por los alumnos en las “experiencias de ajá”, en la toma de atajos en sus estrategias, los cambios de puntos de vista, el uso de modelos de distintos niveles de formalización), y va de estructuras complejas y ricas del mundo real a las más generales, abstractas y formales de la matemática.

## PRINCIPO DE NIVELES

Freudenthal completa entonces el proceso de reinención con lo que Treffers (1987) llama “matematización progresiva”. Los alumnos deben comenzar por matematizar un contenido o tema de la realidad para luego analizar su propia actividad matemática.

Este proceso de matematización fue profundizado por Treffers (1978, 1987) y retomado por Freudenthal (1991) bajo dos formas:

- *La de matematización horizontal, que consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación, la experimentación inductiva.*
- *La de matematización vertical, ya dentro de la matemática misma, que conlleva estrategias de reflexión, esquematización, generalización, prueba, simbolización y rigorización (limitando interpretaciones y validez), con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática.*

En este proceso de matematización progresiva, la EMR admite que los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión. Estos niveles (Freudenthal, 1971, 1991;

Gravemeijer, 1994, 2002) son: *situacional*, *referencial*, *general* y *formal*, y están ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva, sin constituir una jerarquía estrictamente ordenada.

En el nivel situacional, el conocimiento de la situación y las estrategias es utilizado en el contexto de la situación misma apoyándose en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia.

En el nivel referencial aparecen los modelos gráficos, materiales o rotacionales y las descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referidos a la situación particular.

El nivel general se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias, que supera la referencia al contexto.

En el nivel formal se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales.

Retomando la situación del colectivo, los niños se encuentran en el nivel situacional cuando reconstruyen trayectos en los que suben y bajan pasajeros. Cuando pasan al dibujo y representan dichos trayectos usando el lenguaje de flechas, estarían en el nivel referencial. Paulatinamente, la situación del colectivo evoluciona como modelo de situaciones de subida y bajada (entrada o salida) de personas a otras de la misma naturaleza matemática (nivel general), o donde aparecen operaciones secuenciadas –por ejemplo, los viajes en el ascensor, la confitería, el juego de bolos, etc.-; llegando luego el alumno a interpretar y resolver aritméticamente otras situaciones de suma y resta a nivel enteramente formal.

La evolución entre niveles se da cuando la actividad en un nivel es sometida a análisis en el siguiente, el tema operatorio en un nivel se torna objeto del siguiente nivel (Freudenthal, 1971).

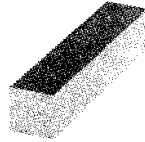
Estos niveles son dinámicos y un alumno puede funcionar en diferentes niveles de comprensión para contenidos distintos o partes de un mismo contenido. Más que describir en forma exacta qué puede hacer el alumno en cada uno sirven para seguir sus procesos globales de aprendizaje.

Veamos algunas producciones notacionales de diferente nivel de formalización realizados por alumnos de tercer año trabajando con un sistema de ecuaciones. Aquí se aprecian escrituras convencionales, como en el caso de Cintia, María y Santiago, que utilizan distinto grado de explicitación; escrituras intermedias, como Romina, que usa el modelo de “notación de libreta” trabajado en la primera clase del tema, y hasta el uso de visualización directa para resolver el problema, como en el caso de Vanesa.

El problema planteado fue el siguiente:

Ramona quiere renovar los senderos de su jardín usando un diseño hecho con baldosones individuales como estos:

$75\text{ cm} \times 25\text{ cm} \times 25\text{ cm}$

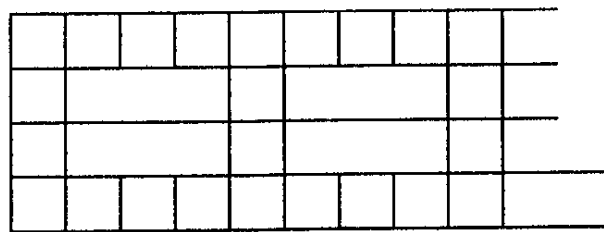


$25\text{ cm} \times 25\text{ cm} \times 25\text{ cm}$



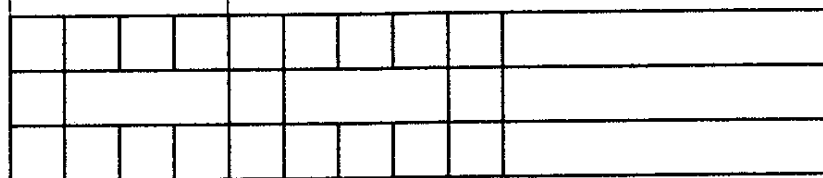
A continuación se muestran dos modelos hechos con estos baldosones.

← 1m →



**A**

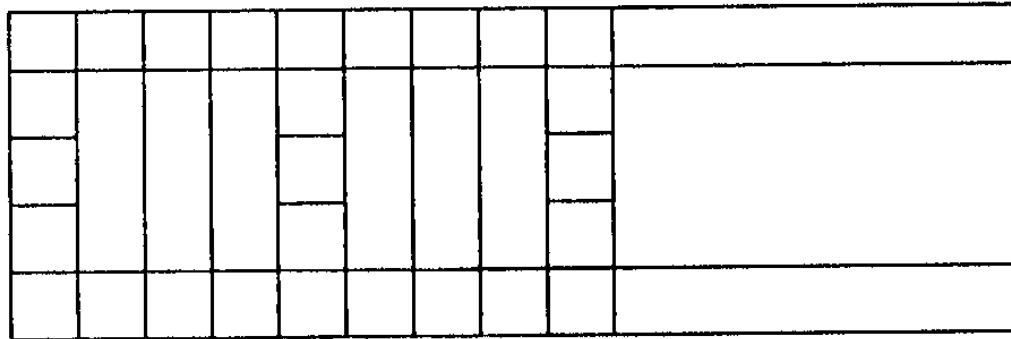
← 1m →



**B**

El modelo A cuesta \$10 lineal. El modelo B cuesta \$7,80 por metro lineal.

Ramona creó su propio diseño de baldosas, como se muestra a continuación.



Encontrar el costo del metro lineal para el diseño de Ramona. Muestra tu resolución.

Estrategias que utilizaron:

- Resolución de un sistema de ecuaciones (sumas y restas) buscando primero precios unitarios: 6 alumnos (20,68%);
- Resolución de un sistema de ecuaciones sin pasar por los precios unitarios, esto es, buscando la ecuación que se adecue al nuevo diseño: 10 alumnos (34,48%);
- Por sustitución y proporciones: 3 alumnos (10,34%);
- Por igualación: 1 alumno (3,44%);
- Por notación de libreta: 6 alumnos (20,68%).

En el recuadro siguiente se pueden apreciar algunas de las distintas escrituras y estrategias utilizadas por los alumnos.

**Cintia -**

①  $10bc + 2bg = \$10$   
 $9bc + 1bg = \$7,80$   
 $1bc + 1bg = \$2,20$   
 $8bc = \$5,60$   
 $1bc = \$0,70$

②  $9bc + 1bg = \$7,80$   
 $6,30 + 1bg = \$7,80$   
 $1bg = \$1,50$

③  $11bc + 3bg = \$x$   
 $(11 \cdot 0,70) + (3 \cdot 1,50) = \$x$   
 $\$12,20 = x$   
 Ramona  $\$12,20$

**María**

$10A + 2B = \$10$   
 $9A + 1B = \$7,80$   
 $1A + 1B = \$2,2$   
 $11A + 5B = \$12,20$

**Ramona**


n°	Grandes	Chicos	Total
1	2	10	\$10
2	1	9	\$7,80
3	1	1	\$2,20
4	3	11	\$12,20

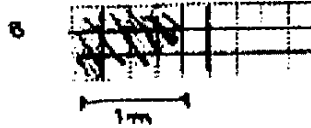
+2  
+3

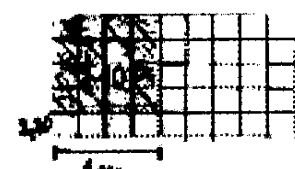
**Santiago**

①  $10g + 5b = \$10$   
 ②  $9g + 3b = \$7,80$   
 ③  $1g + 3b = \$2,20 \rightarrow ① - ②$   
 $= 5,6 \rightarrow ② - ③$   
 $= 0,7 \rightarrow ③ \cdot 4$   
 $= 1,5 \rightarrow ③ - ⑤ : 3 \text{ (error)}$   
 $= 7,7 \rightarrow ⑤ = 11$   
 $= 18,5 \quad ⑥ - 9$   
 Metro lineal =  $21,2 \text{ \$}$

**Vanessa**

A 

B 



$A - B = \$2,20$   
 $\$10 + \$2,20 = \$12,20$

**CINTIA:** En A plantea el sistema de ecuaciones (usando ambos modelos) y resta la segunda ecuación a la primera obteniendo el valor de un "bc" (baldosón chico), luego en B reemplaza 9 bc por su costo y extrae el costo de un "bg" (baldosón grande). En C obtiene el valor del modelo elegido por Ramona.

**MARÍA:** Elige trabajar directamente con los baldosones, a los que distingue entre A (los más pequeños) y B (los más grandes). Plantea el sistema en términos del número de baldosones de cada clase. Resta la segunda ecuación de la primera y, utilizando el esquema unitario obtenido, saca el valor del modelo de Ramona.

**SANTIAGO:** Muestra paso por paso cómo combina las ecuaciones iniciales o las resultantes para extraer los costos unitarios. En el paso 6 resta mal, debiendo obtener 0,70 en lugar de 1,5, lo que ocasiona un resultado final incorrecto.

**ROMINA:** Utiliza el modelo de notación libreta que se le ha enseñado, haciendo las combinaciones necesarias que le permiten llegar a la combinación de Ramona.

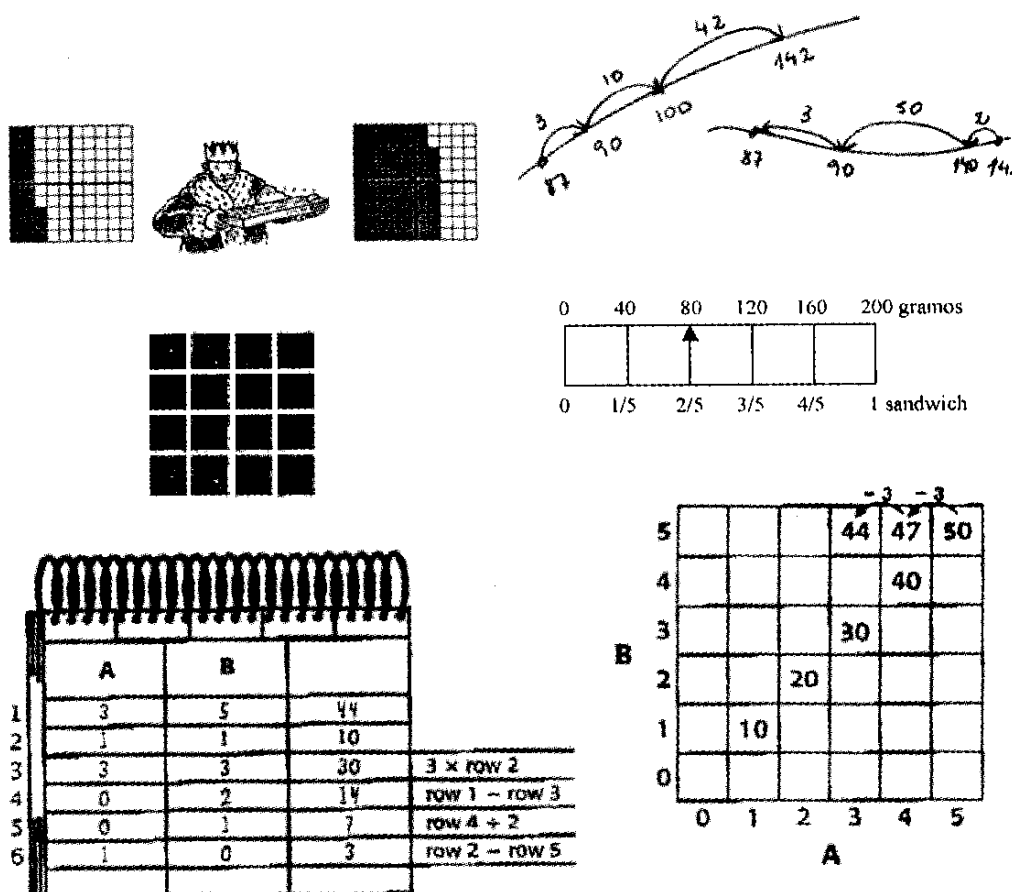
**VANESA:** Se ayuda directamente del dibujo y obtiene que el baldosón mayor equivale a tres baldosones pequeños, lo cual simplifica enormemente su trabajo, eliminando una incógnita. Así, 4 baldosones pequeños cuestan \$2,20 (diferencia de costos entre el modelo A y B) y dado que el modelo de Ramona equivale al costo del modelo A más el costo de 4 baldosones pequeños, suma y obtiene el resultado correcto de \$12,20.

Los modelos y la reflexión colectiva son los instrumentos básicos para el cambio de nivel. Ellos constituyen representaciones de las situaciones donde se reflejan aspectos esenciales de los conceptos y relaciones matemáticas que son relevantes para solucionar la situación dada. El uso de modelos en la EMR dista del concepto generalizado de modelización matemática, como traducción de situaciones problemáticas a expresiones matemáticas que pueden funcionar como modelos. En esta corriente, el modelo es el resultado de organizar una actividad por parte del sujeto, sosteniendo una profunda implicación constitutiva entre modelo y situación (Gravemeijer, 2002). En la EMR se respetan los modelos que surgen de los propios alumnos y se acercan otros inspirados en las estrategias informales, ya sean utilizadas por los estudiantes, ya sea que aparecen en la historia de la matemática (estudiados a partir de la fenomenología didáctica).

Entre los modelos trabajados en la EMR se destacan:

- Las situaciones paradigmáticas: como la del autobús (Van den Brink, 1984, 1991), para operar con la suma y la resta y sus propiedades, o la de la fábrica de caramelos o el tesoro del sultán (Gravemeijer, 1991), para introducir el sistema decimal, o la redistribución de mesas en la casa de los panqueques (Streefland, 1991), para trabajar fracciones como razones y relación parte-todo.;
- Los materiales físicos como el rekenrek (contador 10-10), el collar de bolitas bicolor, estructurado de 5 en 5 o de 10 en 10 (Treffers, 1991), o la moneda corriente, para expresar números bajo distintas formas (dobles, dobles más uno, en base a grupos de 5 o diez, etc.) y operar, los tableros para la combinatoria;
- Los esquemas notacionales tales como el lenguaje de flechas (Van den Brink, 1984, 1991) en lugar de utilizar el signo igual en operaciones combinadas, la notación de libreta o la tabla de combinaciones para plantear y resolver sistemas de ecuaciones, el modelo abierto de área para la multiplicación, la línea numérica abierta simple para apoyar las estrategias secuenciales de cálculo mental y la recta doble (Treffers, 1991), el modelo circular; la tabla de razones y la barra de porcentajes (Middleton y otros, 1995, 1999) para el trabajo de proporcionalidad.

En la siguiente figura se representan algunos de los modelos citados:



Ellos sirven como puente para sortear la distancia entre la matemática contextualizada e informal y la formal, permitiendo, por su flexibilidad, avanzar en los distintos niveles, cambiar en el tiempo e integrar contenidos. Los modelos que aparecen en el nivel situacional (modelos de situaciones particulares) van extendiéndose a otras situaciones y generalizándose con otros lenguaje, tornándose entidades en sí mismos, como herramientas (modelos para) para resolver situaciones variadas, posibilitando un razonamiento matemático más formal.

Los modelos así pensados favorecen la matematización vertical sin obstruir, si es necesario, la vuelta a la situación que les da origen.

Este proceso de matematización debe basarse en el análisis reflexivo del trabajo oral y escrito de los alumnos, con particular atención a los momentos claves (búsqueda de atajos, cambios de puntos de vista, creación o apropiación de modelos más elaborados, etc.) en los procesos de esquematización o formalización progresivas, y en organizar o estructurar las discusiones en torno a las soluciones propuestas por los mismos, de modo tal de hacer visible y explícita la trayectoria hacia niveles de generalización más formales, eficientes y sofisticados.



La historia de la matemática en los orígenes de cada conocimiento ejemplifica y brinda situaciones que dan pie tanto a este proceso de reinención y matematización como a las producciones libres de los alumnos con sus procedimientos informales.

### PRINCIPIO DE INTERACCIÓN

En la EMR, se considera al aprendizaje de la matemática como una actividad social. La discusión sobre las interpretaciones de la situación problema, de las distintas clases de procedimientos y justificaciones de solución y de la adecuación y eficiencia de los mismos tiene un lugar central en la EMR. La interacción lleva a la reflexión y a capacitar a los alumnos para llegar a niveles de comprensión más elevados. No se piensa en una clase homogénea en sus trayectos de aprendizaje, sino en individuos que siguen senderos propios. Sin embargo, esto no lleva a partir la clase en grupos con procesos similares, sino más bien a mantener toda la clase junta, como una unidad de organización, o al trabajo cooperativo en grupos heterogéneos –cuestión que fue defendida por Freudenthal desde los años 40 (Freudenthal, 1987, 1991). Dado que los problemas se seleccionan de manera que den lugar a soluciones apelando a diferentes niveles de comprensión, todos los alumnos pueden trabajar en ellos.

### PRINCIPIO DE INTERCONEXIÓN (ESTRUCTURACIÓN)

La EMR no hace profundas distinciones entre los ejes curriculares, lo cual da una mayor coherencia a la enseñanza y hace posibles distintos modos de matematizar las situaciones bajo diferentes modelos y lenguajes, logrando alta coherencia a través del currículo. Freudenthal propicia la interrelación entre ejes tan pronto, tan fuertemente y con tanto tiempo como sea posible (Freudenthal, 1991). Justamente la resolución de situaciones problemáticas realista a menudo exige establecer conexión y reclama la aplicación de un amplio rango de comprensiones y herramientas matemáticas.

*“Lo que realmente importa es saber cómo encaja el tema en todo el cuerpo de la enseñanza matemática, si se puede o no integrar con todo, o si es tan estrafulario o aislado que, finalmente, no dejaría ninguna huella en la educación” (Freudenthal, 1982).*

### EL CURRÍCULO, LA INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA Y LA CAPACITACIÓN DESDE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

Esta corriente concibe al currículo como un proceso que requiere del diseño de secuencias didácticas que, lejos de ser elaboraciones académicas restringidas a objetivos instruccionales, se enmarquen dentro de una filosofía educativa que busca explícitamente promover cambios en la enseñanza formalista y algorítmica (top-down) de la matemática en las aulas. El motor de este proceso es la investigación para el desarrollo (educativo), una metodología cualitativa/interpretativa basada en experiencias de aulas en las cuales se implementan secuencias didácticas y se observan, registran y analizan hitos, saltos y discontinuidades en el aprendizaje de los alumnos. Su objetivo es llevar a la conciencia el proceso de desarrollo y explicarlo.

*“Volver consciente mediante la experiencia el proceso cíclico de desarrollo e investigación. E informarlo tan claramente que se justifique por sí mismo, y que esta experiencia pueda ser transmitida a otros como para que la hagan propia” (Freudenthal, 1991).*


La reflexión conjunta de investigadores, diseñadores curriculares y profesores acerca de estos fenómenos lleva a mejorar las secuencias didácticas, con miras a guiar de modo efectivo los procesos de matematización generándose así desarrollos educativos. Mientras que el desarrollo curricular, según Freudenthal, se centra en el desarrollo de materiales curriculares, el desarrollo educativo constituye mucho más que un diseño instruccional; es una innovación estratégica total que, por una parte, se funda en una filosofía educativa explícita y, por otra, incorpora el desarrollo de toda clase de materiales (adaptándolos) como parte de esa estrategia (Freudenthal, 1991, Gravemeijer, 1994).

La didáctica realista invita a reemplazar la visión del alumno como receptor pasivo de una matemática prefabricada, por la de un sujeto que participa, junto con otros, en la organización matemática de fenómenos imaginables. Si la actividad primordial de los alumnos consiste en matematizar, ¿cuál es la actividad primordial de los profesores? Según Freudenthal (1991), es la de didactizar, entendida ésta como una actividad organizadora que se da tanto a nivel horizontal como a nivel vertical. Horizontalmente, los docentes trabajan en torno a fenómenos de enseñanza-aprendizaje que emergen en sus aulas y en las de otros; verticalmente, reflexionan y generalizan a partir de estas situaciones hasta reinventar su propia caja de herramientas didácticas para facilitar la matematización.

Se subraya aquí la contradicción de pedir a los profesores que den a sus alumnos oportunidades para experimentar la matemática como actividad de reinención, mientras que, en cursos de formación y capacitación, se les presentan teorías, propuestas y materiales didácticos prefabricados. Esto los priva de la oportunidad de apropiarse de herramientas fundamentales para el ejercicio de la profesión, incluidos los recursos teóricos y prácticos para didactizar a nivel horizontal y vertical.

La EMR está lejos de ser un paradigma acabado; se trata de una propuesta en estado permanente de desarrollo y transformación (Van den Heuvel-Panhuizen, 1999).

## D. Anexo: Actividades Situación 1: Cortes a un cono

	ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE VILLAVICENCIO GRADO DÉCIMO 10____ ASIGNATURA: MATEMÁTICA PERIODO IV: LAS CÓNICAS	Fecha: __/__/2011  Grupo No. _____
---	--	--

### CORTES A UN CONO

**Finalidad:** Explorar cortes en un cono para determinar las figuras planas cuyos bordes corresponden a las curvas circunferencia, elipse, parábola e hipérbola.

#### ¿Qué necesitamos?

- Una barra de plastilina por estudiante
- Un metro de nylon para pescar o seda dental
- Una escuadra



#### ¿Qué vamos a hacer?

- Construir un cono en plastilina.

#### ¿Qué vamos medir?

- El radio de la base del cono  $r=$
- La generatriz  $g=$
- La altura del cono  $h=$

#### ¿Qué vamos a calcular?

- Utilice el teorema de Pitágoras para determinar si el cono construido es recto o oblicuo, para ello calcule  $h$  ( $g^2 = r^2 + h^2$ ). Compare su resultado con el obtenido al medir.
- Halle el volumen del cono construido.  $V_c = \frac{\pi r^2 h}{3}$

#### Realiza cortes al cono construido

Use nylon para pescar o seda dental para hacer cada uno de los siguientes cortes.

1. Haga un corte horizontal paralelo a la base del cono a una distancia aproximadamente igual a la cuarta parte de la altura a partir del vértice del cono.
  2. Haga un corte diagonal respecto al eje horizontal del cono.
  3. Haga un corte vertical paralelo al eje vertical del cono.
  4. Haga un corte diagonal paralelo a la generatriz de los lados del cono.
- NOTA: Cada corte no debe partir otro corte.


**Y ahora a calcar y doblar**

- Copie cada una de las curvas obtenidas en los cortes realizados al cono en el diario de clase.
- Realiza un doblar a cada una de las curvas calcadas de tal forma que una mitad coincida con la otra mitad y marca el doblar obtenido con un trazo. Para ello superponer (a trasluz) dos lados opuestos de la curva. ¿Que concluye?

**Observar y registrar características de cada curva obtenida.**

**A Socializar conclusiones:** Cada grupo elije un relator, quien presenta en plenaria los resultados obtenidos.

*Docente: Isabel Pérez Gutiérrez*  
*Maestría en curso: Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.*

	ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE VILLAVICENCIO GRADO DÉCIMO 10____ ASIGNATURA: MATEMÁTICA PERIODO IV: LAS CÓNICAS	Fecha: __/__/2011 Grupo No. _____
---	--	--

## CORTES EN EL CONO DE APOLONIO

**Finalidad:** Observar y redescubrir el foco de la parábola y de la elipse a partir de construcciones geométricas.

**¿Qué necesitamos?**

Fotocopias de las curvas obtenidas del cono de Apolonio

**¿Qué vamos a hacer?**

Construcciones geométricas, para ello sigue las instrucciones.

1. Nombra cada una de las cónicas y traza los ejes de simetría.



- ◆ Ubique el centro de la circunferencia y mida las longitudes del radio  $r$  y el diámetro  $d$
- ◆ Ubique el centro de la elipse, mida eje mayor  $2a$ , el eje menor  $2b$

## 2. Construcción geométrica 1: Foco de la parábola

- ◆ Toma un punto cualquiera B de la parábola. Traza la recta  $l_1$  tangente en ese punto B.
- ◆ Traza una recta  $l_2$  paralela al eje de la parábola que pasa por el punto B.
- ◆ Mide el ángulo  $\theta$  que forma la recta  $l_1$  con  $l_2$ . Traza una recta  $l_3$  que forme un ángulo de igual medida  $\theta$  y que corte el eje de simetría y tenga como vértice B.
- ◆ Realiza el mismo procedimiento para otro punto C cualquiera sobre la parábola, ¿Qué observa?
- ◆ Si ubicáramos más puntos y realizáramos el procedimiento para B, Las rectas que pasan por los puntos B y C de la parábola cortan el eje de simetría, lo intersecan en el mismo punto?
- ◆ ¿Cuál es la medida  $p$  del punto vértice V al punto F.

## 3. Construcción geométrica 2: Focos de la elipse


- ◆ Toma con el compás la medida  $a$ , (la distancia que hay desde el centro de la elipse a uno de los vértices ubicado en el eje mayor de la elipse).
- ◆ Haga centro en uno de los vértices menor de la elipse y con una abertura de medida  $a$  traza un arco que corte al eje mayor.
- ◆ Marca los puntos de corte con el eje mayor como  $F_1$  y  $F_2$
- ◆ ¿Cuál es la medida  $c$  desde cada punto F al centro C de la elipse?

**A Socializar conclusiones:** Cada grupo elige un relator, quien presenta en plenaria los resultados obtenidos.

*Docente: Isabel Pérez Gutiérrez*  
*Maestría en curso: Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.*



## E. Anexo: Actividades Situación: Capturando cónicas

	<p>ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE VILLAVICENCIO GRADO DÉCIMO 10____ ASIGNATURA: MATEMÁTICA PERIODO IV: LAS CÓNICAS</p>	<p>Fecha: __/__/2011  Grupo No. _____</p>
---	--	---

### Capturando Cónicas 1: La Parábola

Finalidad: observar la cónica parábola a partir de la curva que describe un chorro de agua al ser lanzado con un ángulo de elevación entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$  y caer.

#### ¿Qué necesitamos?

- Una cámara fotográfica por grupo de estudiantes
- Cinta de enmascarar
- Una escuadra
- Un transportador
- Una manguera de jardín con boquillas.

#### ¿Qué vamos a hacer?

1. Generar un chorro de agua: para ello utilice la manguera de jardín con boquillas, previamente marque una línea horizontal con la cinta de enmascarar sobre una pared, y coloque la boquilla de la manguera formando un ángulo entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$  con la horizontal.
2. Capturar mediante una fotografía la representación en el plano a escala del recorrido que describe un chorro de agua al ser lanzado con un ángulo de elevación entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$  y caer.
2. Seleccionar fotografías e imprimir la toma del chorro de agua que permita visualizar la curva “parábola”
3. Trazar el eje de simetría de cada curva.

#### ¿Qué vamos a medir en cada fotografía?

1. El ángulo a que aproximadamente fue lanzado el chorro de agua.
2. Medir el eje horizontal a partir del corte con el eje de simetría, en unidades de igual longitud según sea el tamaño de la fotografía, registre cómo mínimo ocho datos.


3. Trazar líneas perpendiculares al eje horizontal, que pasen por las marcas realizadas en el eje horizontal  $x$  y medir la longitud desde este eje a la curva
4. Registra las mediciones en una tabla.
5. ¿Qué se puede decir de la curva con respecto a las distancias tomadas .

### ¿Qué vamos a calcular?

Para todos los valores de  $x_i$  registrados en la tabla determinar los valores de  $y_i - y_{i-1}$  ¿Qué puede decir de los resultados?

**Socializar conclusiones:** Cada grupo elige un relator, quien presenta en plenaria los resultados obtenidos.

*Docente: Isabel Pérez Gutiérrez*  
*Maestría en curso: Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.*

	<p style="text-align: center;">ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE VILLAVICENCIO GRADO DÉCIMO 10____ ASIGNATURA: MATEMÁTICA PERIODO IV: LAS CÓNICAS</p>	<p>Fecha: __/__/2011</p> <p>Grupo No. _____</p>
--	--	---

## Capturando Cónicas 2: La Elipse

Finalidad: observar la cónica: Elipse a partir de la representación en el plano a escala de un objeto considerado elíptico.

### ¿Qué necesitamos?

- Una cámara fotográfica por grupo de estudiantes
- Una escuadra
- Objetos de forma elíptica.

### ¿Qué vamos a hacer?

1. Tomar fotografías a objetos de forma elíptica
2. Trazar los ejes de simetría de cada curva capturada mediante la fotografía y verificar su simetría.
3. Tomar como centro  $C(0,0)$  el punto de corte de los ejes mayor y menor. Trazar los focos de La “elipse”.
4. Ubicar un punto  $P$  sobre la elipse y trazar la recta  $l_1$  tangente a  $P$

### ¿Qué vamos a medir en cada fotografía impresa?



1. La longitud del eje mayor  $2a=$
2. La longitud del eje menor  $2b=$
3. La distancia focal  $c$  (longitud desde el Centro  $C$  al Foco  $F$ )
4. Ubica un punto  $P$  cualquiera sobre la elipse. Traza y mide los segmentos  $\overline{F_1P}$  y  $\overline{F_2P}$ .
5. Mide los ángulos que forma la tangente con los segmentos trazados  $\overline{F_1P}$  y  $\overline{F_2P}$ . ¿Qué concluye?
6. Ubica un punto  $Q$  cualquiera diferente a  $P$  sobre la elipse. Traza y mide los segmentos  $\overline{F_1Q}$  y  $\overline{F_2Q}$ .


### ¿Qué vamos a calcular?

1. Suma geoméricamente los segmentos  $\overline{F_1P}$  y  $\overline{F_2P}$ ;  $\overline{F_1Q}$  y  $\overline{F_2Q}$ . ¿Qué observa?
2. Suma las longitudes de los segmentos  $\overline{F_1P}$  y  $\overline{F_2P}$ ;  $\overline{F_1Q}$  y  $\overline{F_2Q}$ . ¿Qué observa?
3. ¿Qué puede decir de la suma de los segmentos  $\overline{F_1P}$  y  $\overline{F_2P}$ ;  $\overline{F_1Q}$  y  $\overline{F_2Q}$ ?

**A Socializar conclusiones:** Cada grupo elige un relator, quien presenta en plenaria los resultados obtenidos.

*Docente: Isabel Pérez Gutiérrez*

*Maestría en curso: Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.*

	<p>ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE VILLAVICENCIO GRADO DÉCIMO 10____ ASIGNATURA: MATEMÁTICA PERIODO IV: LAS CÓNICAS</p>	<p>Fecha: __/__/2011</p> <p>Grupo No. _____</p>
---	--	---

### Capturando cónicas 3: Reproduciendo cónicas

Finalidad: Observar las cónicas a partir de la sombras que se producen con una lámpara al proyectarlas sobre una superficie plana.

#### ¿Qué necesitamos?

- Cartulina adherida a pared o piso en cuarto oscuro
- Cinta de enmascarar, Tiza, marcador.
- Una escuadra
- Una linterna cuyo punto emisor de luz este situado en el foco.



### ¿Qué vamos a hacer?

1. Colocar la lámpara encendida perpendicular, inclinada, más inclinada y paralela al plano que forma la pared.
2. Para cada una de las posiciones de la lámpara marcar el punto donde se concentra el haz de luz y nombrar la curva que forma la sombra que se observa.
3. Trazar el eje de simetría de cada curva y verificar su simetría para ello recorta cada una de las curvas.

### ¿Qué vamos a medir en cada curva?

1. En la circunferencia: diámetro  $d$  y el radio  $r$
2. En la elipse: semieje mayor  $a$ , semieje menor  $b$  y La distancia  $c$  desde el centro hasta el foco y la distancia  $\overline{LR}$
3. En la parábola: La distancia  $p$  del vértice al foco y la distancia  $\overline{LR}$
4. En la hipérbola: La distancia  $c$  desde el centro hasta el foco y la distancia  $\overline{LR}$

### ¿Qué vamos a trazar en cada curva?

1. En la circunferencia una línea perpendicular al radio  $r$  que pase por el centro  $C$  y toque la curva.
2. En la elipse: Una cuerda perpendicular al eje de simetría que pase por cada foco y toque la curva en los puntos  $L$  y  $R$ .
3. En la parábola: Una cuerda perpendicular al eje de simetría que pase por el foco y toque la curva en los puntos  $L$  y  $R$ .
4. En la hipérbola una cuerda perpendicular al eje de simetría que pase por el foco y toque la curva en los puntos  $L$  y  $R$ .

### ¿Que vamos a calcular?

1. En la circunferencia  $2r$  ¿Cuántas veces cabe  $r$  en  $d$
2. En la elipse  $\frac{2b^2}{a}$  ¿Es  $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$ ?
3. En la parábola  $4p$  ¿Cuántas veces cabe la distancia focal  $p$  en la longitud  $\overline{LR}$ .
4. En la hipérbola  $\frac{2b^2}{a}$  ¿Es  $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$ ?

**Socializar conclusiones:** Cada grupo elije un relator, quien presenta en plenaria los resultados obtenidos.

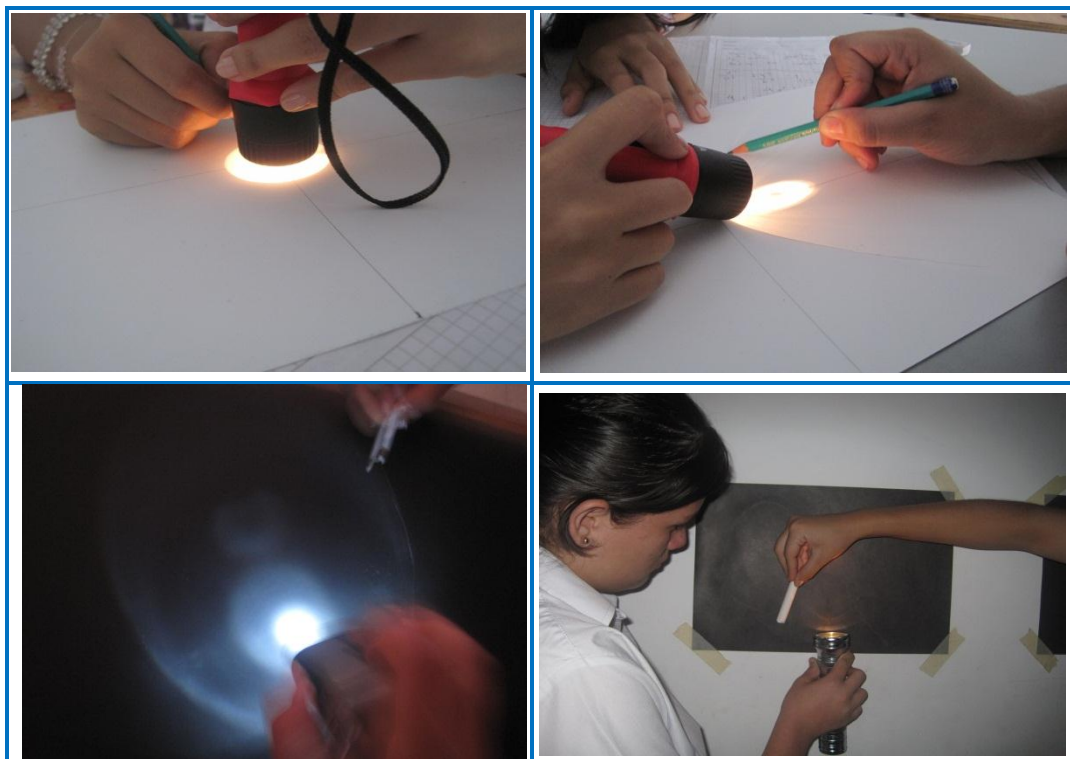
**Figura E-1:** Capturando parábolas



**Figura E-2:** Capturando elipses




**Figura E-3:** Cónicas a partir de las sombras que se producen con una lámpara





## F. Anexo: Actividades Situación 3: cónicas desplazadas

	<p>ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE VILLAVICENCIO GRADO DÉCIMO 10____ ASIGNATURA: MATEMÁTICA PERIODO IV: LAS CÓNICAS</p>	<p>Fecha: ____/____/2011 Grupo No. _____</p>
---	--	--

### Cónicas desplazadas: Comparando mediciones

Finalidad: Generar en el programa Graph las curvas cónicas a partir de las mediciones realizadas en la situación No.1 Cortes en el cono de Apolonio. Y comparar a trasluz las curvas generadas y las calcadas.

#### ¿Qué necesitamos?

- Una tabla de datos No.1

CURVA	PARAMETROS
<b>CIRCUNFERENCIA</b>	Radio $r =$
<b>ELIPSE</b>	Semieje mayor $a =$ semieje menor $b =$ y distancia focal $c =$
<b>PARÁBOLA</b>	Distancia focal $P =$
<b>HIPERBOLA</b>	Distancia focal $c =$

- Un computador portátil con el programa



Graph

#### ¿Qué vamos a hacer?

- Recordar los pasos para insertar los elementos de un gráfico en el programa Graph.  
Editar ejes: en el menú editar/ejes.

Insertar la ecuación canónica o general de la curva: en el menú función /insertar relación.

Insertar puntos: en el menú función/insertar puntos/marcador.

Escribir texto: en el menú función/ insertar cuadro de texto.

Insertar líneas: en el menú función/ insertar relación y escribir la ecuación lineal.

Insertar segmentos de recta: en el menú función /insertar puntos/línea.

- Insertar las ecuaciones canónicas de cada cónica, remplazando los parámetros dados en la tabla No.1.

CURVA	ECUACION CANÓNICA
<b>CIRCUNFERENCIA</b>	$x^2 + y^2 = r^2$
<b>ELIPSE</b>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ó $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
<b>PARÁBOLA</b>	$x^2 = 4py$ ó $y^2 = 4px$
<b>HIPERBOLA</b>	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ó $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$

- Imprimir las curvas generadas en Graph, verificar que la cuadrícula mida  $1\text{cm}^2$

### ¿Qué vamos a medir en cada curva?

- Compara a trasluz las curvas obtenidas en Graph con las curvas que obtuvo en la actividad el cono de Apolonio. ¿Qué puede decir de cada una de ellas?

**A Socializar conclusiones:** Cada grupo elige un relator, quien presenta en plenaria los resultados obtenidos.

## CÓNICAS DESPLAZADAS: LA CIRCUNFERENCIA Y LA PARÁBOLA

Finalidad: Trasladar las curvas de la circunferencia y la parábola y encontrar a partir de la ecuación canónica de cada curva con centro o vértice  $(h, k)$  la ecuación general.

### ¿Qué necesitamos?

- Un computador portátil que tenga instalado el programa Graph .
- Recordar el desarrollo del cuadrado de un binomio suma o diferencia.



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{ó} \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

### ¿Qué vamos a hacer?

Crear una circunferencia de radio  $r =$  y centro  $C(0,0)$

Crear una parábola de distancia focal  $p=$  y vértice  $V (0,0)$

### ¿Qué vamos a realizar en cada curva?

1. Trasladar el centro  $C (0,0)$  de la circunferencia de radio  $r$  a un centro  $C (h,k)$ . Para ello disminuye y/o aumenta un valor  $h$  a la coordenada  $x$  y un valor  $k$  a la coordenada  $y$ , en la ecuación canónica de la circunferencia. ¿Qué observa en la gráfica de la curva? ¿Qué observa en la ecuación de la curva?
2. Trasladar el vértice  $V (0,0)$  de la parábola de distancia focal  $p$  a un vértice  $V (h,k)$ . Para ello disminuye y/o o aumenta un valor  $h$  la coordenada  $x$  y un valor  $k$  la coordenada  $y$  en la ecuación canónica ¿Qué observa en la gráfica de la curva?. ¿Qué observa en la ecuación de la curva?

### ¿Qué vamos a hallar para cada curva?

A partir de la ecuación de la circunferencia de radio  $r$  y centro  $C (h,k)$  encontrar la ecuación general de la circunferencia construida.

A partir de la ecuación de la parábola de distancia focal  $p$  y vértice  $V (h,k)$  encontrar la ecuación general de la parábola construida.

### ¿Qué vamos a trazar en cada curva?


En la circunferencia el radio  $r$ , el centro  $C$  y un punto  $P$ .

En la parábola la línea recta que determina el eje de simetría o eje de la parábola, el foco  $F$ , el vértice  $V$  y la línea recta que determina la directriz (línea recta fija  $l$  que esta a la misma distancia del vértice que el foco, pero en sentido opuesto) y la cuerda focal (Lado recto)

**Socializar conclusiones:** Cada grupo elige un relator, quien presenta en plenaria los resultados obtenidos.

*Docente: Isabel Pérez Gutiérrez*

*Maestría en curso: Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.*

	<p>ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE VILLAVICENCIO</p> <p>GRADO DÉCIMO 10____</p> <p>ASIGNATURA: MATEMÁTICA</p> <p>PERIODO IV: LAS CÓNICAS</p>	<p>Fecha: ____/____/2011</p> <p>Grupo No. _____</p>
---	---	---

## CÓNICAS DESPLAZADAS: LA ELIPSE y LA HIPÉRBOLA

Finalidad: Trasladar las curvas de la elipse e hipérbola y encontrar a partir de la ecuación canónica de cada curva con centro o vértice  $(h,k)$  la ecuación general.

### ¿Qué necesitamos?

- Un computador portátil que tenga instalado el programa Graph.



- Recordar el desarrollo del cuadrado de un binomio suma o diferencia.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{ó} \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

### ¿Qué vamos a hacer?

Crear una elipse de semieje mayor  $a =$  y semieje menor  $b =$  con centro  $C(0,0)$   
Crear una hipérbola de semieje mayor  $a =$  y semieje menor  $b =$  con centro  $C(0,0)$

### ¿Qué vamos a realizar en cada curva?

1. Trasladar el centro  $C(0,0)$  de la elipse a un centro  $C(h,k)$ . Para ello disminuye y/o aumenta un valor  $h$  a la coordenada  $x$  y un valor  $k$  a la coordenada  $y$ , en la ecuación canónica de la elipse. ¿Qué observa en la gráfica de la curva?  
¿Qué observa en la ecuación de la curva?

2. Trasladar el centro  $C(0,0)$  de la hipérbola a un centro  $C(h,k)$ . Para ello disminuye y/o o aumenta un valor  $h$  la coordenada  $x$  y un valor  $k$  la coordenada  $y$  en la ecuación canónica ¿Qué observa en la gráfica de la curva?. ¿Qué observa en la ecuación de la curva?

### ¿Qué vamos a hallar para cada curva?

A partir de la ecuación de la elipse de centro  $C(h,k)$  encontrar la ecuación general de la elipse construida.

A partir de la ecuación de la hipérbola de centro  $C(h,k)$  encontrar la ecuación general de la hipérbola construida.


### ¿Qué vamos a trazar en cada curva?

En la elipse el centro  $C$ , el eje mayor, el eje menor, los vértices, los focos, los lados rectos y las directrices.

En la hipérbola el centro  $C$ , el eje transversal  $2a$ , focos, vértices y asíntotas.

**Socializar conclusiones:** Cada grupo elige un relator, quien presenta en plenaria los resultados obtenidos.



	<p>ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE VILLAVICENCIO GRADO DÉCIMO 10____ ASIGNATURA: MATEMÁTICA PERIODO IV: LAS CÓNICAS</p>	<p>Fecha: ____/____/2011  Grupo No. _____</p>
---	--	---

## CÓNICAS DESPLAZADAS: VERIFICACIÓN DE LA PROPIEDAD GEOMÉTRICA DE LAS CÓNICAS

Finalidad: Verificar la propiedad geométrica de cada una de las cónicas parábola, elipse e hipérbola.

### ¿Qué necesitamos?


Una impresión de cada una de las gráficas obtenidas en las guías La circunferencia y la parábola; la elipse y la hipérbola.

### ¿Qué vamos a medir?

- En la circunferencia marcar los puntos P, Q y M y medir la distancia del centro a cada uno de ellos. ¿Qué concluye?
- En la parábola marcar los puntos P, Q y M y medir la distancia del foco al punto P, Q ó M y la distancia del segmento paralelo al eje de simetría que une el punto P, Q ó M con la directriz. ¿Que concluye?
- En la elipse marcar los puntos P, Q y M, medir la distancias  $\overline{F_1P}$  y  $\overline{F_2P}$  y sumarlas, las distancias  $\overline{F_1Q}$  y  $\overline{F_2Q}$  y sumarlas, la distancias  $\overline{F_1M}$  y  $\overline{F_2M}$  y sumarlas ¿Que concluye? ¿Cuál es la relación entre la suma de las distancias y la longitud del eje mayor  $2a$ ? ¿Cuál es la relación entre la suma de las distancias y la longitud del eje menor  $2b$ ? ¿Cuál es la relación entre la suma de las distancias y la longitud de la distancia focal  $2c$ ?
- En la hipérbola marcar los puntos P, Q, M y medir la distancias  $\overline{F_1P}$  y  $\overline{F_2P}$  y hallar la diferencia, las distancias  $\overline{F_1Q}$  y  $\overline{F_2Q}$  y hallar la diferencia, la distancias  $\overline{F_1M}$  y  $\overline{F_2M}$  y hallar la diferencia ¿Que concluye? ¿Cuál es la relación entre la diferencia de las distancias y la longitud del eje transversal  $2a$ ? ¿Cuál es la relación entre la diferencia de las distancias y la longitud del eje conjugado  $2b$ ? ¿Cuál es la relación entre la diferencia de las distancias y la longitud de la distancia focal  $2c$ ?

**Socializar conclusiones:** Cada grupo elije un relator, quien presenta en plenaria los resultados obtenidos.

Docente: Isabel Pérez Gutiérrez  
Maestría en curso: Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.

	<p>ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE VILLAVICENCIO GRADO DÉCIMO 10____ ASIGNATURA: MATEMÁTICA PERIODO IV: LAS CÓNICAS</p>	<p>Fecha: ____/____/2011 Grupo No. _____</p>
---	--	--

## CÓNICAS DESPLAZADAS: VERIFICACIÓN DE LA EXCENTRICIDAD DE LAS CÓNICAS

Finalidad: Verificar la excentricidad de cada una de las cónicas elipse e hipérbola.

### ¿Qué necesitamos?

Generar en Graph elipses e hipérbolas.

### ¿Qué vamos a trazar?

- Cinco elipses
- Cinco hipérbolas

### ¿Qué vamos a calcular?

- Completa los datos de las elipses que trazaron en la siguiente tabla.

Elipses	$a$	$b$	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$\frac{c}{a}$
Primera elipse	3	2		
Segunda elipse	4	2		
Tercera elipse	5	2		
Cuarta elipse	6	2		
Quinta elipse	7	2		

- Completa los datos de las hipérbolas que trazaron en la siguiente tabla.

Hipérbolas	$a$	$b$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\frac{c}{a}$
Primera hipérbola	3	2		
Segunda hipérbola	4	2		
Tercera hipérbola	5	2		
Cuarta hipérbola	6	2		
Quinta hipérbola	7	2		

**Qué vamos a analizar?**

- En las elipses que sucede con las curvas y la razón  $\frac{c}{a}$  a medida que  $a$  aumenta. Explique.
- En las hipérbolas que sucede con las curvas y la razón  $\frac{c}{a}$  a medida que  $a$  aumenta. Explique.

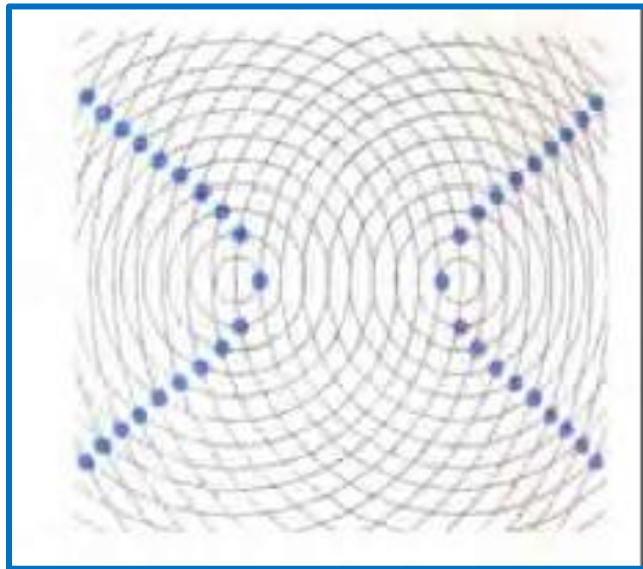
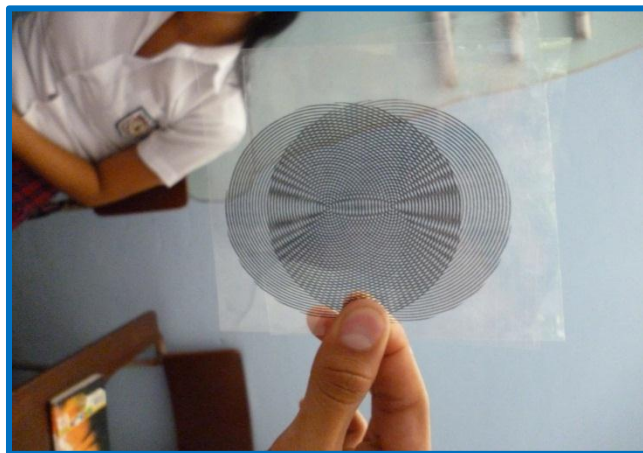
**Socializar conclusiones:** Cada grupo elige un relator, quien presenta en plenaria los resultados obtenidos.



## G. Anexo: Patrones de Moiré

**Fotografía: Intersección de las líneas de dos rejillas (patrón circular)**

**Autor: Lic. Alberto Vera Tapias**



Tomado de [13] Capítulo 10, aplicaciones.



## Bibliografía

- [1] ALEGRIA Pedro, Utilidad de las matemáticas. Capitulo: Las cónicas y sus aplicaciones. Editor: Antonio Vera López, Madrid, 2003.
- [2] ALAGIA, BRESSAN Y SADOVSKY, Reflexiones teóricas para la Educación Matemática: Los principios de la Educación Matemática Realista. Libros del Zorzal. Buenos Aires 2005.
- [3] BOYER Carl, Historia de las matemáticas.
- [4] FERNÁNDEZ E. Y MEJÍA M. Análisis de Textos Escolares para el Diseño de Situaciones de Enseñanza. Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. 2010.
- [5] GONZÁLEZ URBANEJA. Pedro Miguel, Estudio crítico de tres obras cumbres de la literatura matemática: La geometría de Descartes.  
<http://www.xtec.es/sgfp/licencias/200304/memories/geometriadescartes.pdf>
- [6] GONZÁLEZ U. Pedro Miguel, La geometría analítica de la Introductio in Analysin Infinitorum de Euler. Sigma 31. 2007. Se encuentra en: [http://www.izenpe.com/s15-4812/es/contenidos/informacion/dia6\\_sigma/es\\_sigma/adjuntos/sigma\\_31/13\\_geo\\_analitica.pdf](http://www.izenpe.com/s15-4812/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_31/13_geo_analitica.pdf)
- [7] GUZMÁN O Miguel. Legado: Historia de las matemáticas. Apolonio.1986. Se encuentra :<http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/historia/apolonio/>
- [8] Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora P.U.E.M.A.C. Recursos de Matemáticas. UNAM. Se encuentra en: [http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC\\_2008/conicas/html/conicas\\_m.html](http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/conicas/html/conicas_m.html)
- [9] LEHMANN Charles, Geometría analítica, Limusa, México, 1990.
- [10] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, Matemáticas, Estándares Básicos de Competencias, MEN, Bogotá, 2006.

[11] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, Matemáticas, Lineamientos curriculares, MEN, Bogotá, 1998.

[12] SADOVSKY Patricia, Enseñar matemáticas hoy: miradas, sentidos y desafíos. Libros del Zorzal, Argentina, 2005.

[13] STEWART James. Precálculo: Matemáticas para el Cálculo. Thomson. México. 2007.

[14] SEARS Francis y Freedman. Física universitaria con física moderna: Volumen 2. Pearson Educación, México, 2005.

[15] VILLA Rojas Jhon y Cuartas, ¿Realidad en las matemáticas escolares?: reflexiones acerca de la “realidad” en modelación en educación matemática, Revista Virtual Universidad Católica del Norte, Colombia, 2010.