ASPECTOS DE LA TEORÍA EUCLIDIANA DE LA PROPORCIÓN QUE FAVORECEN LA EDUCACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Edgar Alberto Guacaneme Suárez
guacaneme@pedagogica.edu.co
Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), Universidad del Valle (Colombia)
Avance de investigación
Superior

Resumen
En un intento de identificar y caracterizar el papel de la Historia de las Matemáticas (HM) en el conocimiento del profesor de Matemáticas (CPM), hemos desarrollado un estudio sobre el potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción e identificado usos no instrumentales de la HM en el CPM. Para dar cuenta de algunos aspectos de tales usos, se presentan algunos de los resultados de la investigación histórica-epistemológica sobre las ideas matemáticas de razón y proporción expuestas el Libro V de *Elementos* de Euclides; asimismo se reseñan posibles usos de tales planteamientos.

Palabras Clave: *Historia, matemáticas, conocimiento, profesor, razón, proporción.*

1. INTRODUCCIÓN

A través del proyecto de tesis doctoral *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de matemáticas,* orientado en el marco del Doctorado Interinstitucional en Educación – Énfasis en Educación Matemática (Sede Universidad del Valle – Colombia) por el doctor Luis Carlos Arboleda, nos hemos interesado por el estudio de la relación "Historia de las Matemáticas – Educación Matemática" (HM-EM) (Guacaneme, 2007). Bajo este interés y a partir del estudio de una amplia gama de documentos que abordan tal relación, hemos advertido una tradición en innovación e investigación en torno al uso de la HM en la enseñanza de las matemáticas, en la investigación en EM y en la formación de conocimiento de los profesores de matemáticas. Sin embargo, hemos reconocido en éste último (*i.e.*, el relativo a la relación Historia de las Matemáticas - Conocimiento del profesor de Matemáticas (HM-CPM)) un potente ámbito de investigación y de intervención, en tanto que consideramos que el conocimiento del profesor constituye una de las variables fundamentales que orientan la acción educativa de las clases, las instituciones y la sociedad, y que la HM merece ocupar un lugar destacado en la constitución de dicho conocimiento (Guacaneme, 2008b), lugar un tanto subvalorado en algunos programas de formación inicial de profesores de Matemáticas (Torres & Guacaneme, 2011a, 2011b).

Ahora bien, dado que la HM resulta tan extensa y profunda, y guiados por trabajos investigativos y de innovación previos (Guacaneme, 2001, 2002; Perry, Guacaneme, Andrade, & Fernández, 2003), hemos optado por asumir el estudio de la historia de la razón y la proporción y, dentro de los múltiples hitos que esta devela, hemos escogido el contexto griego clásico y, de este, la teoría euclidiana de la proporción expresada en el Libro V de *Elementos* (Guacaneme, 2008a). La elección responde, entre otras justificaciones, a la abundante investigación histórica sobre este libro, al hecho de que en sí mismo el Libro V es una teoría matemática y a lo exótico que resulta un discurso general sobre magnitudes geométricas que no incorpora tratamiento numérico alguno de las mismas.

2. UN MARCO DE REFERENCIA EN CONSTRUCCIÓN Y USO

Ubicar el asunto de la potencialidad de la historia de un objeto matemático a favor del conocimiento del profesor de Matemáticas conlleva a intentar identificar un campo que le acoja como problema de investigación. Si bien la Educación Matemática aparece inicialmente como campo de investigación natural, pues su carácter interdisciplinar incluye la HM y, hasta cierto punto, el asunto del CPM ha sido atendido por esta, nos ha parecido más apropiado ubicar la problemática en cuestión en el campo de investigación de la Educación del profesor de Matemáticas, el cual distinguimos de la EM misma, aunque le reconocemos proveniente de ésta, pero no agotada por ella (Guacaneme & Mora, 2012).

En efecto, desde una aproximación a este campo advertimos que existe una línea de investigación que aborda el asunto de la constitución del conocimiento del profesor y, particularmente, de lo que, siguiendo la línea de acción clásica propuesta por Shulman (1986, 1987), se ha dado en llamar los componentes del conocimiento del profesor. Entendemos que para el caso de la educación de los profesores de Matemáticas, hoy en día esta línea aún acoge el estudio de, entre otros, el conocimiento disciplinar (*subjetc matter knowledge*) y del conocimiento didáctico del contenido (*pedagogical content knowledge*) incluso bajo nuevas conceptualizaciones y denominaciones (*v.g.*, *Mathematics for teaching*, o *Knowledge Quartet*). Sin embargo, aún en las propuestas más innovadoras (v.g., Stacey, 2009), si bien la HM se tiene en cuenta como un meta-discurso matemático, nos parece que ésta, figura de manera poco trascendente; además, y quizá como causa y evidencia de ello, no hemos encontrado un marco de referencia adecuado para la problemática que abordamos.

Bajo tal condición, nos hemos dado a la tarea de ir decantando unos marcos de referencia que de manera dialéctica estamos construyendo y usando. De manera particular, hemos caracterizado diez tipologías de la HM (Guacaneme, 2010) y para cada una de ellas hemos establecido categorías descriptivas; así, por ejemplo, una de las tipologías reseña las fuentes primarias, secundarias y terciarias de la HM y estamos discutiendo si las fuentes primarias son Historia de las Matemáticas o Matemáticas en la historia, o si las terciarias no son otra cosa que el resultado de la transposición didáctica de las primarias o secundarias. Asimismo, hemos sintetizado la racionalidad e intencionalidades de la apropiación de la HM por parte de los profesores de Matemáticas (Guacaneme, 2011). La racionalidad alude a: la existencia personas con interés de integrar el conocimiento histórico a la educación del profesor, la valoración social de la historicidad de las Matemáticas y el reconocimiento de la Historia de las Matemáticas como una fuente de “artefactos” para la actividad docente. La intencionalidad se refiere a potenciar el recurso a “instrumentos” que puedan participar del ejercicio docente; la mayoría de éstos se relaciona con los “artefactos” y los otros con la transformación de la enseñanza de las matemáticas a través de la participación de la Historia, la potencialidad de ésta como fuente de recursos para la enseñanza y las posibilidades de fortalecer la concepción de la profesión docente.

3. ALGUNOS ASPECTOS METODOLÓGICOS DEL ESTUDIO

De manera un tanto simultánea a la ubicación de la problemática en el campo de investigación y la construcción de los estados de arte sobre la relación general HM-EM y la particular HM-CPM y la construcción de los marcos teóricos alrededor de las respuestas a las preguntas sobre la racionalidad (los por qué), las intenciones (los para qué) y los objetos (los qué) de la HM en el CPM, hemos ido identificando y seleccionando documentos, resultados de la investigación histórica en Matemáticas, que versan sobre la teoría euclidiana de la razón y la proporción. Igualmente nos hemos dado a la tarea de estudiarlos para decantar sus contenidos, a partir de lo cual estamos clasificándolos en las tipologías y categorías que hemos establecido respecto de la pregunta sobre el qué y hemos desarrollado parcialmente la tarea de identificar los potenciales usos que tales contenidos pueden llegar a tener en relación con los para qué. Como es natural suponer, esta actividad está realimentando la configuración de los marcos de referencia y sus resultados constituirán elementos resultados específicos de la tesis doctoral.

4. ALGUNAS REFLEXIONES/CONCLUSIONES

En lo que sigue, presentaremos algunos aspectos de la historia de la teoría euclidiana de la proporción, que pueden resultar pertinentes para la educación del profesor de matemáticas, en una dirección que pretende superar el ámbito de utilidad pragmática del conocimiento exigido a alguien que asume la educación como un *oficio* y llevar la discusión al ámbito de funcionalidad del conocimiento del profesor, entendido como *profesional* de la educación.

Un ΑΒΓΔ de la teoría euclidiana de la proporción

Acorde con la época histórica de la Grecia dorada, a continuación presentaremos brevemente y ordenados con literales griegos, algunos de los aspectos que hemos considerado importantes de la teoría euclidiana de la proporción, en relación con el CPM.

Α. Señalemos que los Libros V y VI de *Elementos* de Euclides pueden ser entendidos como hito del desarrollo histórico de una teoría hipotética-deductiva de la proporción para magnitudes geométricas, desde su particularidad cuantitativa no numérica, en tanto que los Libros VII y X de la obra clásica citada, abordan aspectos de la teoría de la proporción para números. La anterior declaración deja entrever algunos resultados interesantes. De un lado, permite reconocer que no sólo existe (o existió) una teoría de la proporción en donde las razones se dan entre números o medidas de magnitudes, sino que además pueden establecerse razones entre cantidades de una misma magnitud geométrica, sin que se requiera medir dichas cantidades (aunque sí a su tamaño) y sin que la razón exprese la medida de una cantidad respecto de la otra. Este hecho puede sorprender al profesor de Matemáticas, en tanto que el discurso escolar reconoce en esencia sólo la teoría aritmética de la proporción, pero no la proporcionalidad geométrica (Quintero & Molavoque, 2012), conllevando la idea de que no puede existir proporcionalidad estrictamente geométrica, sino, en el mejor de los casos, proporcionalidad aritmética que refiere a medidas de magnitudes geométricas. Este resultado puede llevar al profesor de matemáticas a reconocer la existencia de un razonamiento cuantitativo no numérico (usual y erróneamente identificado como razonamiento cualitativo), de presencia exigua en las matemáticas escolares, cuya constitución a través de las matemáticas escolares constituye un nuevo reto para la comunidad de educadores matemáticos.

Por otra parte, el tratamiento euclidiano diferenciado para magnitudes y números, evidencia que la propuesta euclidiana no logra solucionar el problema de la inconmensurabilidad que afectó a la teoría pitagórica de la proporción, sino que quizá sencillamente lo soslaya. Este hecho puede permitir que el profesor de Matemáticas reconozca que la vía de *solución* de un problema no siempre ha sido la única transitada por los matemáticos, o que existen teorías matemáticas cuya respuesta a un problema es *esquivarlo*, a la vez que lo enfrenta a la pregunta de si el problema de la inconmensurabilidad se ha resuelto y a indagar por la manera en que se hizo.

B. Una mirada a lo expresado por los historiadores de las Matemáticas respecto de las dieciocho definiciones de la teoría del Libro V, revela que asignan un lugar notable a la definición 5 (proporción), y junto con ella a las definiciones 3 (razón) y 7 (desproporción). Observemos una traducción de dos de ellas:

> Definición V.3: Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas. (Puertas, 1994, p. 9)
>
> Definición V.5: Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente. (Puertas, 1994, pp. 11-12)

Ahora bien, a pesar de que coinciden en que la definición de razón es general, vaga y sólo precisa que las magnitudes geométricas implicadas deben ser del mismo tipo, los historiadores reportan varias interpretaciones de este concepto en una gama de acepciones que incluyen concebir la razón como: una cantidad (adicional a los números y las magnitudes), una comparación o relación binaria de primer orden, o bien un número real.

Las interpretaciones de la definición de proporción tampoco generan mucho consenso pues las opiniones se dividen entre: una relación binaria de segundo orden, un número real y hasta un arreglo o secuencias ordenadas de magnitudes. Veamos esta última:

> Ya que según la Definición 5 la condición para que A, B, X, Y sean proporcionales es que: Si los múltiplos A, 2A, 3A, … y B, 2B, 3B, … son dispuestos en un arreglo en una sola secuencia en el orden de tamaño, y de la misma manera se disponen los múltiplos X, 2X, 3X, … y Y, 2Y, 3Y, …, la ley de distribución de los múltiplos de A entre aquellos de B debe ser la misma que la de los múltiplos de X entre aquellos de Y. De ahí que "la identidad" de las razones A:B y X:Y significa la identidad de estas dos leyes de distribución, y la razón A:B en sí misma significa la relación de tamaño entre A y B que es indicada por la manera en que los múltiplos de A están distribuidos entre aquellos de B. (Fine, 1917, p. 73)

Otro aspecto que genera diversidad de opiniones se refiere a la expresión simbólica implicada en la definición 5. Así, se proponen, entre otras, las siguientes, no equivalentes desde la lógica:

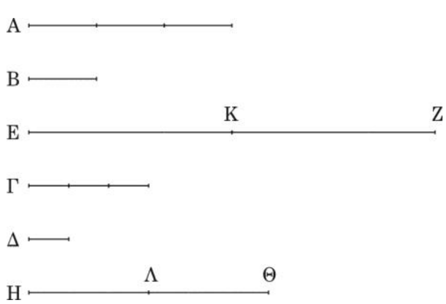
> $a:b=c:d$, si para todo par de enteros m, n, se tiene $ma>nc$ (o $ma<nc$, o $ma=nc$) si y solo si $mb>nd$ (o $mb<nd$, o $mb=nd$), respectivamente). (Corry, 1994, p. 3)
>
> siendo a, b, c, d unas magnitudes del dominio de la teoría y m y n unos números naturales cualesquiera, se da una proporción $a:b$□$c:d$ si y sólo si: o (($ma>nb$) y ($mc>nd$)) o (($ma=nb$) y ($mc=nd$)) o (($ma<nb$) y ($mc<nd$)). (Puertas, 1994, p. 12)
>
> siendo a, b, c, d unas magnitudes del dominio de la teoría y m y n unos números naturales cualesquiera, se da una proporción $a:b$□$c:d$ si y sólo si: (si $ma>nb$, entonces $mc>nd$) y (si $ma=nb$, entonces $mc=nd$) y (si $ma<nb$, entonces $mc<nd$). (Puertas, 1994, p. 12)

No obstante esta condición sobre lo impreciso y nebuloso de las definiciones centrales de la teoría euclidiana de la proporción, nadie desconoce su hegemonía durante muchos siglos. En consecuencia, puede resultar extraño para el profesor de Matemáticas, la posibilidad de existencia de una robusta teoría matemática, descansado sobre objetos matemáticos difusos. La causa de tal extrañeza puede radicar en la concepción acerca del rigor intrínseco a las teorías matemáticas y la sobrevaloración de las definiciones como garantes de la inexistencia de ambigüedad o como enunciados que capturan plenamente al objeto.

Γ. Varios historiadores coinciden en reconocer un casi inquebrantable *estilo de prueba* en la obra euclidiana, caracterizado no solo por el carácter sintético del razonamiento, sino adicionalmente por la existencia de seis etapas, a saber: enunciado (*prótasis*), exposición (*ékthesis*), determinación o delimitación (*diorismós*), preparación o construcción (*kataskeué*), demostración (*apódeixis*) y conclusión (*sympérasma*).

A los ojos de un profesor de Matemáticas, quien como parte de su conocimiento de la prueba posee el esquema de dos columnas (proposición | justificación), este esquema puede mostrarse novedoso, pues ordena y estructura la prueba de una proposición o teorema, haciendo evidentes los momentos de enunciación y argumentación empleados. Ello tiene el suficiente potencial para constituirse en una herramienta para aportar a la comprensión de la actividad demostrativa desplegada en los libros de texto, en las clases de Matemáticas y en las tareas de los estudiantes.

Δ. Si bien se cuestiona que *Elementos* sea un objeto de la Historia de las Matemáticas y se prefiere referir como una obra Matemática en la historia (Vardi, 1999) (y en consecuencia que el estudio del contenido del Libro V pueda concebirse como un estudio matemático y no histórico), no deja de ser interesante avivar, con las reflexiones históricas, la experiencia de un lector que aborda la lectura de un discurso esencialmente retórico, alimentado de una notación y unos diagramas o dibujos aparentemente elementales, como el extractado de la prueba de la proposición V.3. (Puertas, 1994)



En esta figura se advierten hechos que han sido discutidos por quienes se dedican al análisis histórico-epistemológico. Señalemos, en primer lugar, que las letras griegas mayúsculas se usan aparentemente para representar lo que llamaremos un segmento (preferimos referirlo como *trazo*); sin embargo ese uso es dual pues en ocasiones se emplea un par de letras para nombrar una magnitud (*v.g.*, EK, KZ, EZ, HΛ, ΛΘ, HΘ), en cuyo caso parecería que cada letra representa el extremo del segmento, o una sola para nombrar otra magnitud (*v.g.*, A, B, Γ, Δ). A propósito de esto, advertimos que "tal uso está relacionado con la operatoria de las magnitudes; así, Euclides nota una magnitud con una letra cuando ésta será multiplicada o constituye un múltiplo de otra magnitud, en tanto que usa las dos letras, cuando la magnitud será dividida en sus partes o cuando ésta será objeto de una resta (o será restada de otra)" (Guacaneme, 2008a). Bajo esta consideración emerge el hecho de que la notación tiene una intención adicional a la de nominar.

Un segundo hecho no menos interesante se refiere a la discusión de si los *trazos* (*i.e.*, los trazos rectilíneos con pequeños trazos en sus extremos o en su interior) representan únicamente segmentos. A propósito de esta discusión y atendiendo a que coincidimos con el matemático italiano/argentino, recapitulemos una de sus citas:

> … y el hecho de que la figuración que acompaña las demostraciones se hace todavía exclusivamente por segmentos, mientras que los comentaristas se esfuerzan frecuentemente en acentuar el nuevo punto de vista con el dibujo de objetos diferentes, sólo demostrará más claramente el pensamiento más puramente abstracto del autor antiguo, desvinculado de la representación material; pues estos segmentos no tienen diferente significación que las letras en nuestras demostraciones algebraicas (Levi, 2003).

En efecto, entendemos que una expresión de la generalidad del tratamiento euclidiano del Libro V se expresa en los dibujos usados, pues a través de ellos se habla de todos los tipos de magnitudes geométricas (longitudes, superficies, volúmenes y amplitudes angulares).

Un tercer hecho se refiere a la ausencia de notación para las razones y proporciones; en efecto, en ninguna parte del Libro V, y por tanto tampoco en las figuras, aparece una notación como $a\colon b :: c\colon d$ o $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ cuyo uso es relativamente reciente, pues, por ejemplo se reseña que el símbolo "::" procede de William Oughtred, en el siglo XVII, ministro anglicano a quien se le atribuye el invento de la *regla de cálculo* y de otros símbolos matemáticos (H, π, *sin*, *cos*). A pesar de la ausencia de una notación, el autor euclideo se las arregla para presentar retóricamente una teoría que incluye pruebas altamente rigurosas.

Estos tres hechos pueden llegar a ser llamativos a un profesor de Matemáticas quien reconoce la notación algebraica convencional como la única en la que los símbolos son operables u orientan una operación y mucho más para quien sólo advierte en el uso de la notación el carácter nominativo o de designación de la misma. Igualmente a quien a pesar de haber dibujado un sinnúmero de planos cartesianos para representar funciones entre dos magnitudes (no necesariamente lineales o geométricas) no ha advertido la *linealización* de la magnitud que esta representación implica.

Por otra parte, si el profesor se da a la tarea de enfrentar el estudio de un discurso matemático expresado de manera inusual, como el Libro V de *Elementos*, encontrará que ello le ofrece una experiencia sin igual de lectura de un lenguaje diferente al suyo, hecho que constituye una referencia para entender de mejor manera lo que le sucede a sus estudiantes cuando se sumergen en un proceso de enculturación del lenguaje matemático, usual para el profesor, pero nada natural para el estudiante; en últimas, le ofrece la posibilidad de descentrarse o, en términos coloquiales, *ponerse en los zapatos del otro*.

¿La otra cara de la moneda?

El estudio de los aspectos históricos relacionados con el Libro V, puede llegar a generar una cierta sensación de frustración o de decepción, sobre todo si éste se efectúa para procurar herramientas que orienten de manera directa e inmediata la enseñanza de la proporcionalidad. Veamos de manera breve algunas posibles limitaciones del uso efectivo de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de la proporcionalidad.

Recordemos, en primer lugar, que la teoría euclidiana de la proporción del Libro V no refiere a las cantidades numéricas sino a las no numéricas y que en la escuela la proporcionalidad tiene en esencia un tratamiento numérico. Señalemos adicionalmente que en el Libro VII y X sí se aborda el estudio de la teoría de la proporción para números. Parecería entonces que estos dos últimos libros citados son más propicios que el V e incluso el VI. Pues bien, desde nuestra perspectiva el estudio de lo que se ha dado en llamar la teoría de la proporcionalidad geométrica (Libro V y VI) ofrece la posibilidad de: evidenciar que el pensamiento cuantitativo no numérico se ha desterrado de las intenciones curriculares, experimentar las demandas cognitivas que un discurso no numérico hace al razonamiento matemático, disponer de un ámbito legítimamente matemático que oriente la innovación curricular, entre otras. Ello seguramente será valorado positivamente por un profesor que procura lograr una conciencia profesional sobre sus objetos y objetivos de trabajo y por quién esté dispuesto a afrontar el reto del diseño curricular desde la innovación.

En segundo lugar, resaltemos que la definición de razón excluye la posibilidad de que se puedan poner en relación dos magnitudes de diferente tipo; este hecho riñe con la naturalidad escolar al trabajar razones como la velocidad o la aceleración, y de efectuar la razón entre el círculo y el radio (o debiéramos decir entre la superficie del círculo y la longitud de su radio). Tal naturalización del trabajo de magnitudes heterogéneas, particularmente en las ciencias naturales, puede ubicarse históricamente de manera tardía en los siglos XVI y XVII. Desde nuestra perspectiva, este asunto debería llamar la atención del profesor de Matemáticas pues la restricción impuesta en la definición de razón debe tener una racionalidad que luego se muestra anacrónica; o si se prefiere, la racionalidad que permite las razones entre magnitudes heterogéneas, soluciona un problema anclado en el tiempo de los griegos clásicos. Consustancialmente, le permite al profesor cuestionarse acerca de su conocimiento de tales racionalidades y, probablemente, le ponga en evidencia es estado de su conocimiento respecto de lo que enseña y del sustento de ello.

En tercer y último lugar, el estudio de la obra euclidiana muestra un tratamiento discreto para las razones y una exigua o inexistente relación con las funciones de proporcionalidad, lo cual genera una cierta sensación de frustración, la cual quizá se incrementa cuando se observa que hace algunas décadas el estudio de las razones y proporciones desapareció del currículo escolar y aunque aún se identifica como títulos en los libros de texto, lo que hay es un trabajo con fracciones y con fracciones equivalentes (Guacaneme, 2001). Lo anterior seguramente se convierte en acicate para la curiosidad que acompañe al docente de matemáticas al permitirse el placer de plantearse preguntas sobre la diferencia fundamental entre las razones y las fracciones, o sobre la relación efectiva entre la teoría de la proporción y la proporcionalidad, entendida esta última desde la perspectiva funcional. Pero sobre todo al permitirse el placer de no conformarse con las respuestas inmediatas y, en una actitud más profesional, cuestionar la validez de éstas.

5. APERTURA A UNA REFLEXIÓN. UNA INVITACIÓN

Si bien el estudio de la Historia de la Matemática se muestra muy potente para la configuración del conocimiento del profesor de Matemáticas, existen en Colombia algunos programas de formación inicial y continuada de profesores que se resisten a asignarle *de facto* el lugar que parece merecer (Torres & Guacaneme, 2011a, 2011b). Tal resistencia obedece a una variedad de tensiones (Vasco, 2002) que una vez identificadas, se convierten en un reto para las instituciones y profesionales formadores de profesores. La invitación es entonces a asumir el reto y cohesionar los esfuerzos para que cada vez más y de mejor manera los profesores de Matemáticas incorporen la Historia de las Matemáticas como parte sustancial de su formación profesional.

6. REFERENCIAS

Corry, L. (1994). La teoría de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind. *Mathesis. Filosofía e Historia de las Matemáticas, 10*(1), 1-24.

Fine, H. (1917). Ratio, Proportion and Measurement in the Elements of Euclid. *The Annals of Mathematics, Second Series, 19*(1), 70-76.

Guacaneme, E. A. (2001). *Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas.* Magister en Educación - Énfasis en Educación Matemática, Universidad del Valle, Cali.

Guacaneme, E. A. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en los textos escolares de matemáticas. *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática, 7*(1), 3-42.

Guacaneme, E. A. (2007). *Una aproximación a la relación "Historia de las Matemáticas – Educación Matemática"*. Essay.

Guacaneme, E. A. (2008a). *Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los Elementos*. Essay.

Guacaneme, E. A. (2008b). *Una aproximación a la relación Historia de las Matemáticas - Conocimiento del profesor de matemáticas*. Paper presented at the Tercer Encuentro de Programas de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas, Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional.

Guacaneme, E. A. (2010). ¿Qué tipo de Historia de las Matemáticas debe ser apropiada por un profesor? *Revista Virtual Educyt, 2*(2).

Guacaneme, E. A. (2011). *La Historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones*. Paper presented at the XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife – Brasil.

Guacaneme, E. A., & Mora, L. C. (2012). *La educación del profesor de Matemáticas como campo de investigación*. Paper presented at the Primer Simposio Internacional de Educación en competencias docentes, Bogotá, D.C.

Levi, B. (2003). *Leyendo a Euclides* (Tercera ed.). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Perry, P., Guacaneme, E. A., Andrade, L., & Fernández, F. (Eds.). (2003). *Transformar la proporcionalidad en la escuela: Un hueso duro de roer*. Bogotá: una empresa docente.

Puertas, M. L. (1994). *Euclides. Elementos. Libros V-IX*. Madrid: Editorial Gredos S.A.

Quintero, A. L., & Molavoque, M. J. (2012). *Análisis de las tareas asociadas a la proporcionalidad geométrica y la semejanza, presentes en libros de texto de Matemáticas.* Maestría en Docencia de la Matemática, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching. Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Stacey, K. (2009). Mathematics for Secondary Teaching. Four Components of Discipline Knowledge for a Changing Teacher Workforce. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (Vol. 1, pp. 87-113). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Torres, L. A., & Guacaneme, E. A. (2011a). *Aproximación a las estrategias curriculares de formación en Historia de las Matemáticas en programas de formación inicial de profesores de matemáticas* Paper presented at the XVIII Congreso Colombiano de Matemáticas, Bucaramanga.

Torres, L. A., & Guacaneme, E. A. (2011b). *Caracterización de las estrategias curriculares de formación en historia de las matemáticas en programas de formación inicial de profesores de matemáticas*. Paper presented at the IV Encuentro de programas de formación inicial de profesores de Matemáticas & V Seminario de Matemática Educativa. Fundamentos de la Matemática Universitaria, Bogotá, Escuela Colombiana de Ingeniería "Julio Garavito".

Vardi, I. (1999). What is ancient mathematics? *Mathematical Intelligencer, 21*(3), 38-47.

Vasco, C. E. (2002). *Siete tensiones irresolubles en la articulación de la historia de las matemáticas con la enseñanza de las matemáticas*. Paper presented at the Primera Escuela Latinoamericana de Historia y Epistemología de las Matemáticas - ELHEM 1, Cali, Colombia.