精算模型

总复习

一、基本风险模型

- 理赔额
- 理赔次数
- 总理赔额模型

1.理赔额

- 理赔与损失
- 几种常见的理赔额形式
  - 免赔额
    - 固定免赔（普通免赔）
    - 递减免赔
    - Franchisee免赔
  - 比例分担免赔（与共保区分）
  - 保单限额,
    - 最大赔付额
    - 最大覆盖损失
    - 事故总限额
    - 年度限额

1.理赔额

- 如何计算理赔额的期望

$\mathrm{E}(Y^L)$

$$E(Y^*) = \alpha[E(X \wedge u) - E(X \wedge d)]$$

$$E(Y) = \frac{E(Y^*)}{1 - F(d)}$$

$$E(X \wedge d) = \int_0^d (1 - F(x))dx$$

1.理赔额

- 通货膨胀影响

$$Y^L=\begin{cases}0, & X\le d/(1+r)\\ \alpha[(1+r)X-d)], d/(1+r)<X<u/(1+r)\\ \alpha(u-d), & X\ge u/(1+r)\end{cases}$$

$$\mathrm{Y}^P=\begin{cases}\text{未定义} & X\le d/(1+r)\\ \alpha[(1+r)X-d)], d/(1+r)<X<u/(1+r)\\ \alpha(u-d), & X\ge u/(1+r)\end{cases}$$

$$E(Y^L)=a(1+r)\{E[X\wedge(u/(1+r))]\text{-}E[X\wedge(d/(1+r))]\}$$

$$E(Y^P)=\frac{a(1+r)\{E[X\wedge \mathrm{u}^*]\text{-}E[X\wedge d^*]\}}{1-F_X(d^*)}$$

$$u^*=\frac{u}{(1+r)}, d^*=\frac{d}{(1+r)}$$

$$E\left[(Y^L)^2\right]=a^2(1+r)^2\{E[(X\wedge u^*)^2]\text{-}E[(X\wedge d^*)^2]$$

$$\text{-}2d^*E(X\wedge u^*)+2d^*E(X\wedge d^*)\}$$

1.理赔额

- 损失消失率（loss elimination ratio）

$$ELR=\frac{E(X\wedge d)}{E(X)}$$

- 超额期望函数the mean excess loss

$$e_X(d)=E(X-d\mid X>d)=\int_d^{\infty}\frac{(x-d)f(x)}{1-F(d)}dx$$

- 增限因子

$$\text{限额为U的增限因子IFL(U)}=\frac{\text{限额为U的期望成本}}{\text{限额为}B\text{的期望成本}}$$

2、理赔次数

- 内容
  - （a,b,0）和（a,b,1）分布
  - 混合分布
  - 复合分布
  - 免赔额对理赔次数分布的影响
  - 风险单位数对频率分布和理赔次数的影响

2.理赔次数

- 三种常见的理赔次数分布的性质
  - 泊松分布

$$P_N(z) = \exp(\lambda(z-1))$$

  - 负二项分布、几何分布

$$p_k = P(N=k) = \binom{k+r-1}{k}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r$$

$$P_N(z) = (1-\beta(z-1))^{-r}$$

  - 二项分布

$$P_N(z) = (1+q(z-1))^m$$

2.理赔次数

- (a, b, 0)分布族

$$p_k > 0, k \geq 0, \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1,$$

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k}$$

2.理赔次数

- (a, b, 1)分布族

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k}, \qquad k = 2, 3, \cdots$$

$(a,b,1)$ class 可以分为两类，

（1） $p_0 = 0$， 则称为截断的 ZT （Z—truncated）

（2） $p_0 > 0$， 则称为 ZM (Z—modified)

$$p_k^M = cp_k = \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0} p_k, k = 1, 2, \cdots$$

$$p_k^T = \frac{1}{1 - p_0} p_k$$

2.理赔次数

- 混合分布

$$p_k = P(N = k) = \int p_k(\theta) u(\theta) d\theta$$

$$E(N) = \int_{\Theta} E(N \mid \Theta = \theta) u(\theta) d\theta$$

$$Var(N) = E[Var(N \mid \Theta)] + Var[E(N \mid \Theta)]$$

- 负二项分布是泊松与gamma分布的混合。

2.理赔次数

- 免赔额对理赔次数分布的影响
  - 假设损失次数为N^L，理赔次数为N^P，则

$$N^P = I_1 + I_2 + \cdots + I_{N^L}$$

$$P_{N^L}(M_{Y^L}(z)) = P_{N^L}(1 - v + vM_{Y^P}(z)) = P_{N^P}(M_{Y^P}(z))$$

  - （a,b,0）和（a,b,1）分布

- 风险单位数对频率分布和理赔次数的影响

总索赔额模型

- 个体风险模型
- 集体风险模型
- 保单条款对总索赔额分布的影响
- 停止损失再保险纯保费

3.总索赔模型

- 个体风险模型

$$X_j = I_j B_j = \begin{cases} 0, & 1-q_j \\ B_j, & q_j \end{cases}$$

  - 独立随机变量和的分布S=X+Y

$$P(S=s) = \sum_{x=0}^{s} p_X(x) p_Y(s-x)$$

$$f_S(s) = \int_0^s f_X(x) f_Y(s-x) dx$$

  - 中心极限定理

$$E(S) = \sum_{j=1}^{n} u_j q_j \qquad Var(S) = \sum_{j=1}^{n} \left[u_j^2 q_j (1-q_j) + \sigma_j^2 q_j \right]$$

3.总索赔模型

- 集体风险模型

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

  - 期望和方差

$$E(S) = E(E(S \mid N)) = E(NE(X)) = E(X)E(N)$$

$$\begin{aligned} Var(S) &= E(Var(S \mid N)) + Var(E(S \mid N)) \\ &= E(NVar(X)) + Var(NE(X)) \\ &= Var(X)E(N) + E(X)^2 Var(N) \end{aligned}$$

- 分布
  - 卷积法

$$f_S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_X^{*n}(x)P(N=n)=\sum_{n=0}^{\infty} f_X^{*n}(x)p_n$$

  - 矩母函数法

$$M_s(z)=E(e^{zS})=P_N(P_X(e^z))=P_N(M_X(z))$$

  - 递推法

$$f_S(x)=\sum_{y=1}^{x\wedge r}\frac{\lambda}{x}yf_X(y)f_S(x-y),$$

$$f_S(0)=P_N(f_X(0))=e^{\lambda(f_X(0)-1)}$$

  - 随机模拟

3.总索赔模型

- 复合泊松分布的性质
  - 可加性
  - 可分解性
- S的近似分布
  - 正态近似
  - 计算保费，安全系数

3.总索赔模型

- 保单条款对总索赔额影响
  - 免赔额对总索赔额的影响

- 总损失为 S，总理赔额为 S^P，则

$$
\begin{aligned}
S &= X_1 + \cdots + X_N \\
&= \underbrace{S_1 + d \cdot N^P}_{\text{投保人承担的部分}} + \underbrace{Y_1^P + \cdots + Y_{N^P}^P}_{\text{保险人承担的总理赔额}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S^P &= Y_1^L + \cdots + Y_N^L \\
&= Y_1^P + \cdots + Y_{N^P}^P
\end{aligned}
$$

3.总索赔模型

- 再保险条款对免赔额的影响
  - 比例再保险（保险金额）
    - 成数再保险
    - 溢额再保险
  - 非比例再保险（赔款）
    - 超额超赔再保险（以一次赔款为基础）
    - 停止损失再保险（以年度总赔款为基础）

$$E[(S-d)_+]$$

$$E\{[S-(j+1)h]_+\}=E[(S-jh)_+]-h[1-F_S(jh)]$$

$$E[(S-d)_+]=\frac{b-d}{b-a}E[(S-a)_+]+\frac{d-a}{b-a}E[(S-b)_+]$$

二、模型估计与选择

内容

- 保险数据的特点
- 极大似然估计
- 贝叶斯估计
- 模型的拟合优度检验
- 模型的选择

二、模型估计

- 极大似然估计

注意到$S(x)=1-F(x)$，$f(x)=h(x)S(x)$，$h(x)$是危险率函数。因此对于没有被平移的数据，可以用一个公式来表示似然函数：

$$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{S(x_i)\left[h(x_i)\right]^{\delta_i}}{S(d_i)}，\quad \delta_i=\begin{cases}1 & \text{未删失}\\ 0 & \text{在}x_i\text{删失}\end{cases} \qquad （*）$$

其中，若观测值x_i是在u_i被删失，则记$x_i=u_i$。

- 极大似然估计的方差和函数的方差

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\hat{\theta}-\theta}{[I(\theta)]^{-1/2}}<z\right)=\Phi(z) \qquad I(\theta)=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}l(\theta)\right]=E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}l(\theta)\right)^2\right]$$

$$Var(Y_n)\approx[g'(X_n)]^2Var(X_n)$$

二、模型估计

- 贝叶斯估计

$$\pi_{\Theta|\vec{X}}(\theta\,|\,\vec{x})=\frac{f_{\vec{X},\Theta}(\vec{x},\theta)}{f_{\vec{X}}(\vec{x})}=\frac{1}{f_{\vec{X}}(\vec{x})}\Big(\prod_{j=1}^{n}f_{X_j|\Theta}(x_j\,|\,\theta)\pi(\theta)\Big)$$

$$\begin{aligned}f_{X_{n+1}|\vec{X}}(x_{n+1}\,|\,\vec{x})&=\frac{1}{f_{\vec{X}}(\vec{x})}\,f_{X_{n+1},\vec{X}}(x_{n+1},\vec{x})\\&=\frac{1}{f_{\vec{X}}(\vec{x})}\int\prod_{j=1}^{n+1}f_{X_j|\Theta}(x_j\,|\,\theta)\pi(\theta)d\theta\\&=\int f_{X_{n+1}|\Theta}(x_{n+1}\,|\,\theta)\pi_{\Theta|\vec{X}}(\theta\,|\,\vec{x})d\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X_{n+1}\,|\,\vec{X}=\vec{x})&=\int x_{n+1}f_{X_{n+1}|\vec{X}}(x_{n+1}\,|\,\vec{x})dx_{n+1}\\&=\iint x_{n+1}f_{X_{n+1}|\Theta}(x_{n+1}\,|\,\theta)\pi_{\Theta|\vec{X}}(\theta\,|\,\vec{x})d\theta dx_{n+1}\\&=\int\mu_{n+1}(\theta)\pi_{\Theta|\vec{X}}(\theta\,|\,\vec{x})d\theta\end{aligned}$$

二、模型检验

- 拟合优度的检验
  - 卡方检验
  - KS检验
  - AD检验

$$Q=\sum_{j=1}^{m}\frac{(n_j-E_j)^2}{E_j}$$

已知一个样本观测值 y_1，⋯，y_n，则 Kolmogorov-Smirnov 检验统计量为

$$D=\max_{i=1,\cdots,n}\{\left|F_n(y_{i-1})-F(y_i,\hat{\theta})\right|,\left|F_n(y_i)-F(y_i,\hat{\theta})\right|\}$$

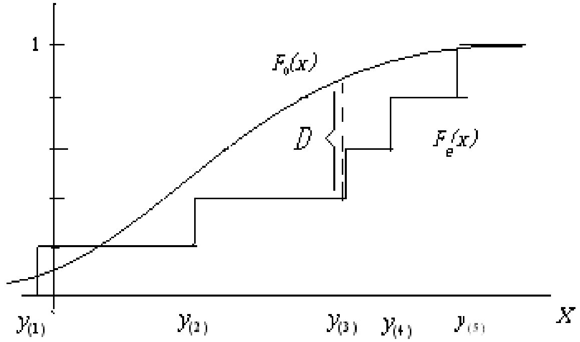

图 9.9 给定样本时 Kolmogorov-Smirnov 检验统计量

三、模型的选择

- 图像直观的选择
  - 对称、峰度、尾部
  - 理赔次数分布的选择
- 评分法
  - P值
  - 极大似然值
  - 检验统计量
- 精确度和简洁度的平衡
  - AIC、SBC
  - 似然比检验

$$T = 2\ln(L_1 / L_0) = 2(\ln L_1 - \ln L_0)$$

服从参数为 $k_1 - k_0$ 的 χ^2 分布

二、模型估计与选择

如何选取合适的理赔额分布或理赔次数的分布。

（1）构建经验模型 获得损失分布的经验分布信息，例如经验分布图、样本均值、样本方差、分位点等。

（2）选择一种概率分布作为损失的分布类型，估计所选择分布中所包含的参数；

（3）对分布进行拟合检验，以确信所选择的分布类型和参数估计是否恰当；

（4）考虑是否还有其它适合的分布，如果有，重复第（1）—（3）步;

（5）在几种合适的分布中选取一个最优的分布作为损失额的分布。选择的标准有多种，常用的方法是比较 统计量的值，比较最大似然函数的值等；

（6）模型的修正。选择模型后，要注意随时对模型修正，以反映未来发生的情况，如通货膨胀，免赔额变化等。

三、信度

- 内容
  - 有限波动信度
    - 完全可信标准
    - 有限波动信度因子
  - 贝叶斯信度模型
  - 最小二乘信度
  - 贝叶斯经验信度估计

三、信度

- 有限波动信度

表 2 索赔频率为泊松分布的完全可信标准。

	完全可信标准		
	索赔频率	索赔强度	纯保费
风险单位数（或保单期）	n_0/λ	$n_0\left(\dfrac{CV_X^2}{\lambda}\right)$	$\dfrac{n_0}{\lambda}\left(1+CV_X^2\right)$
期望索赔次数	n_0	$n_0 CV_X^2$	$n_0(1+CV_X^2)$

$$n_0=\left(y_\alpha/r\right)^2$$

三、信度

- 有限波动信度

表 3 索赔频率为非泊松分布的完全可信标准。

	完全可信标准		
	索赔次数	索赔强度	纯保费
风险单位数（保单期）	$n_0\left(\frac{\sigma_f^2}{\mu_f^2}\right)$	$n_0\left(\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2\mu_f}\right)$	$n_0\left(\frac{\sigma_f^2}{\mu_f^2}+\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2\mu_f}\right)$
期望索赔次数	$n_0\left(\frac{\sigma_f^2}{\mu_f}\right)$	$n_0 CV_X^2$	$n_0\left(\frac{\sigma_f^2}{\mu_f}+\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2}\right)$

三、信度

- 有限波动信度因子

$$z=\frac{\sigma_{\text{full}}}{\sigma_{\text{partial}}}=\frac{\mu/\sqrt{n_0}}{\mu/\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{n}{n_0}}$$ 泊松分布

$$z=\frac{\sigma_{\text{full}}}{\sigma_{\text{partial}}}=\frac{\sqrt{\mu_X^2/n_0}}{\sqrt{\sigma_X^2/m}}==\sqrt{\frac{m}{n_0(\sigma_X^2/\mu_X^2)}}=\sqrt{\frac{m}{n_F}}$$

$$z=\min\left(\sqrt{\frac{m}{\frac{n_0}{\lambda}\left(1+\sigma_X^2/\mu_X^2\right)}},\quad 1\right)=\min\left(\sqrt{\frac{m\lambda/n_0}{\left(1+\sigma_X^2/\mu_X^2\right)}},\quad 1\right)$$

三、信度

- 贝叶斯信度

$$
\begin{aligned}
E(X_{n+1} \mid \vec{X} = \vec{x}) &= \int x_{n+1} f_{X_{n+1}|\vec{X}}(x_{n+1} \mid \vec{x}) dx_{n+1} \\
&= \iint x_{n+1} f_{X_{n+1}|\Theta}(x_{n+1} \mid \theta) \pi_{\Theta|\vec{X}}(\theta \mid \vec{x}) d\theta dx_{n+1} \\
&= \int \mu_{n+1}(\theta) \pi_{\Theta|\vec{X}}(\theta \mid \vec{x}) d\theta
\end{aligned}
$$

- 最小二乘信度

三、信度

- Bühlmann信度
- **Buhlmann－Straub**

$$z=\frac{m}{m+k},k=v/a \qquad m=m_1+\cdots+m_n$$

$$\mathrm{P}C=z\bar{X}+（1-\mu） \qquad \bar{X}=\sum_{j=1}^{m}\frac{m_j}{m}X_j$$

$$k=\frac{v}{a}=\frac{E(\mathrm{var}(X_j\mid\Theta))}{\mathrm{var}(E(X_j\mid\Theta))}=\frac{EPV}{VHM}$$

- **与贝叶斯信度的关系**

三、信度

- 非参数经验贝叶斯信度
  - Bühlmann信度**
  - **Buhlmann − Straub**
- 半参数经验贝叶斯信度
  - 泊松分布$\mu = v$

$$V\hat{H}M = \hat{a} = \frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}(\bar{X}_i - \bar{X})^2 - \frac{\hat{v}}{n}$$

$$\bar{X} = r^{-1}\sum_{i=1}^{r}\bar{X}_i = (rn)^{-1}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}$$

$$= \frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}(\bar{X}_i - \bar{X})^2 - \frac{1}{rn(n-1)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

$$\hat{v} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\hat{v}_i = \frac{1}{r(n-1)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

非寿险基本知识

- 非寿险种类
  - 车险
  - 房主保险
    - 一递减免赔
    - 共保
- 保费调整
  - 平行四边形法
- 赔款的调整
  - 最终赔款预测,
    - 已付赔款（已发生赔款）*最终进展因子（链梯法）
  - 趋势的调整
    - 平均事故日期
      - 经验期(AY)的事故日期
      - 新保单的事故日期
- 费率厘定
  - 损失率法
  - 损失成本法