第三章 总理赔额模型

第三节 复合泊松分布及其性质

称随机变量$S=\Sigma_{i=1}^{N}X_i$服从参数为λ的复合泊松分布，如果满足

1．随机变量N, $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$是相互独立

2．若$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$具有相同的分布，且分布与$X$相同

3． N服从泊松分布，参数为$\lambda>0$

$$E(S)=E(X)E(N)=\lambda E(X)$$

$$\begin{aligned}Var(S)&=Var(X)E(N)+E(X)^2Var(N)\\&=\lambda Var(X)+\lambda E(X)^2\\&=\lambda E(X^2)\end{aligned}$$

$$F_S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)F^{*n}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}F^{*n}(x)$$

$$f_S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}f^{*n}(x)$$

或

$$f_S(x)=\sum_{y=1}^{x\wedge r}\frac{\lambda}{x}yf_X(y)f_S(x-y)$$

$$f_S(0)=P_N(f_X(0))=e^{\lambda(f_X(0)-1)}$$

定理 3.1 设$S_1, S_2, \cdots, S_n$为相互独立的随机变量，且S_i为参数为λ_i，个体理赔分布为$f_{X_i}(x)$的复合泊松分布，$i = 1, 2 \cdots m$，则$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$服从参数为$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$，且$f_X(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} f_{X_i}(x)$的复合分布。

背景:

m可看成m个保险保单组合，S 则是这m个保单组合的总理赔额。

S 也可以看作同一个保单组合在m个不同年度内的总理赔额

证明： 设 S_i 为参数为 λ_i 的复合泊松分布，S_i 的矩母函数为 $M_{S_i}(t)=\exp[\lambda_i(M_{X_i}(t)-1)]$。由于 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 为相互独立的随机变量，因此 S 的矩母函数为：

$$
\begin{aligned}
M_S(t) &= E(e^{ts}) = E(e^{t\sum_{i=1}^{m} s_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{m} E(e^{ts_i}) = \prod_{i=1}^{m} M_{S_i}(t) \\
&= \exp(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i M_{X_i}(t) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i) \\
&= \exp(\lambda(\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} M_{X_i}(t) - 1))
\end{aligned}
$$

设 $M_X(t)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{\lambda}M_{X_i}(t)$ ，由矩母函数的定义知，$M_X(t)$ 为 $f_X(t)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{\lambda}f_{X_i}(t)$ 的矩母函数，因此

$$M_S(t)=\exp(\lambda(M_X(t)-1))$$

所以 S 为参数为 λ，个体理赔分布为 $f_X(x)$ 的复合泊松分布。

例 3.18： 设 S_1 服从复合泊松分布，$\lambda_1=10, f_{X_1}(1)=0.7, f_{X_1}(2)=0.3$，$S_2$ 也服从复合泊松分布，$\lambda_2=15, f_{X_2}(1)=0.5, f_{X_2}(2)=0.2, f_{X_2}(3)=0.2$，若 S_1 和 S_2 相互独立，求 $S=S_1+S_2$ 的分布。

解： S 服从复合泊松分布，$\lambda = 10 + 15 = 25$，个体理赔 X 的分布为

$$f_X(k) = \frac{10}{25} f_{X_1}(k) + \frac{15}{25} f_{X_2}(k)$$

$$f_X(1) = \frac{10}{25} 0.7 + \frac{15}{25} 0.5 = 0.58$$

$$f_X(2) = \frac{10}{25} 0.3 + \frac{15}{25} 0.3 = 0.30$$

$$f_X(3) = \frac{15}{25} 0.2 = 0.12$$

可分解性

定理：设总理赔额 S 是一个复合泊松分布，其中个体保单的理赔额 X 的分布 $f_X(x)$。假设 X 的取值可以分为 m 种类型：$C_1, C_2, \cdots, C_m$，其中 $\pi_i = P(X \in C_i)$。设 N 表示理赔发生总次数，$N_1, N_2, \cdots, N_m$ 分别表示 $C_1, C_2, \cdots, C_m$ 类型理赔发生的次数，$N = N_1 + N_2 + \cdots + N_m$。下面结论成立：

（1）随机变量 $N_1, N_2, \cdots, N_m$ 相互独立，N_i 服从参数为 $\lambda_i = \lambda\pi_i$ 的泊松分布。

（2）设 $X^{(i)}$ 表示当第 i 类理赔事件发生时的理赔额，即 $X^{(i)} = X \mid X \in C_i$，令 $S_i = X_1^{(i)} + \cdots + X_{N_i}^{(i)}, i = 1, \cdots m$，则 $S_1, \cdots, S_m$ 都是相互独立且 S_i 服从参数为 $\lambda_i = \lambda\pi_i$ 的复合泊松分布，个体理赔额为 $X^{(i)}$。

例 3.19： 设 S 服从复合泊松分布，$\lambda = 10,\quad f_X(1) = 0.5,$ $f_X(2) = 0.3,\ f_X(3) = 0.2$。令 $C_1 = (X \le 2), C_2 = (X > 2)$，求 $X^{(1)}, X^{(2)}$ 的分布和 S_1, S_2 的分布。

解： 令 $p_1 = P(X \le 2) = 0.5 + 0.3 = 0.8$，$p_2 = P(X > 2) = 0.2$

则 $X^{(1)}, X^{(2)}$ 的分布为

X	$f_X(x)$	$f_{X^{(1)}}(x)$	$f_{X^{(2)}}(x)$
1	0.5	$0.5/0.8$	0
2	0.3	$0.3/0.8$	0
3	0.2	0	$0.2/0.2$

设 N_i 表示第 i 类理赔事件发生的次数，则 N_i 是泊松分布，$\lambda_i = \lambda P(x \in C_i) = 10 p_i$。于是计算得到 $\lambda_1 = 10 \times 0.8 = 8$，$\lambda_2 = 10 \times 0.2 = 2$，因此，$S_1$ 是复合泊松分布，$\lambda = 8$，个体理赔分布为 $f_{X^{(1)}}(1) = \dfrac{5}{8}, f_{X^{(2)}}(2) = \dfrac{3}{8}$。$S_2$ 是复合泊松分布，$\lambda = 2$，个体理赔分布为 $f_{X^{(2)}}(3) = 1$。

例 3.20 设理赔次数 N 服从λ＝2的泊松分布，个体理赔额的分布 $f_X(x) = 0.1x, \quad x = 1, 2, 3, 4$，试计算总理赔额 S 等于 1，2，3，4 时的概率。

解：

设 N_i 表示个体理赔额为 i 的理赔事件次数，则 N_i 服从参数为 $\lambda\pi_i$ 的泊松分布，总理赔额 $S = 1N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4$，其中，$\pi_1 = 0.1, \pi_2 = 0.2, \pi_3 = 0.3, \pi_4 = 0.4$，利用独立随机变量和的卷积公式得到下表。

x	$1N_1$	$2N_2$	$3N_3$	$4N_4$	$f_S(x)$
0	$e^{-0.2} = 0.8187$	$e^{-0.4} = 0.6703$	0.5488	0.4493	0.1353
1	0.16375	0	0	0	0.02705
2	0.016375	0.2681	0	0	0.05683
3	0.00109	0	0.3293	0	0.0922
4	0.000055	0.0536	0	0.3595	0.1364

练习： 假设个别理赔事件可分为 2 种类型，类型 I 和类型 II，$P(\text{类型I}) = 1 - P(\text{类型II}) = 1/3$。类型 I 的理赔额恒等于 10。理赔次数 N 服从泊松分布，满足 $\lambda = 3000$，设 S，S_I, S_{II} 分别为总理赔额，类型 I 的理赔额，类型 II 的总理赔额。$Var(S) = 2100000$。求 $Var(S_{II})$。

【解】聚合理赔量 S 服从复合泊松分布。根据复合泊松分布的可分解性，S＝$S_I + S_{II}$，其中 S_I, S_{II} 相互独立，S_I 服从复合泊松分布，理赔次数 N_I 服从泊松分布，参数 $\lambda_I = \frac{1}{3} \times 3000 = 1000$。于是有

$$Var(S_I) = \lambda_I E(X_I^2) = 1000 \times 10^2 = 100000$$

由于 S_I, S_{II} 相互独立，因此

$$Var(S) = Var(S_I) + Var(S_{II}) = 2100000$$

从而，$Var(S_{II}) = 2000000$。

例 3.21：设某保险公司承保医疗保险，X 表示一次医疗费用，N 表示看病的次数，N 服从泊松分布，参数 $\lambda=100$，$S=X_1+X_2+\cdots+X_N$ 表示该医疗保险的总费用，设 X 的分布密度为

$$f_X(x)=\frac{2}{250}(1-\frac{x}{250}) \qquad 0\le x\le 250$$

试分析加入免赔额 $d=50$ 后，保险公司的总理赔额的变化。

解：首先考虑无免赔额情形，此时 $d=0$。总理赔额等于总医疗费用 S。由 X 的分布密度计算得到

$$E(X)=\int_0^{250} x\frac{2}{250}(1-\frac{x}{250})dx=\frac{250}{3}=83.\bar{3}$$

$$Var(X)=\frac{250^2}{18}$$

总理赔额的期望和方差为

$$E(S)=\lambda E(X)=8333.\bar{3}$$

$$Var(S)=\lambda E(X^2)=100(E(X)^2+Var(X))$$

$$=100((\frac{250}{3})^2+\frac{250^2}{18})$$

$$=1041666.\bar{6}$$

下面考虑 $d=50$ 的情形。这时将医疗费用分为两类：$C_1=(X\le 50)$, $C_2=(X>50)$。设 N_1 表示医疗费用小于等于免赔额的次数，服从参数为 $\lambda_1=\lambda P(X\le 50)=100(1-(1-\frac{50}{250})^2)=36$ 的泊松分布。N_2 表示医疗费用大于免赔额，服从参数 $\lambda_2=\lambda P(X>50)=100(1-\frac{50}{250})^2=64$ 的泊松分

布。设 $X^{(1)} = X \mid X \le 50$， $X^{(2)} = X \mid X > 50$ ，则总损失额 $S = S_1 + S_2$，其中

$$S_1 = X_1^{(1)} + \cdots + X_{N_1}^{(1)}$$

$$S_2 = X_1^{(2)} + \cdots + X_{N_2}^{(2)}$$

S_1 表示医疗费小于等于免赔额的总费用，这部分费用完全由投保人承担。 S_2 表示医疗费大于免赔额的总费用。由于 $X^{(2)} = X \mid X > 50 = \left[50 + (X - 50)\right] \mid X > 50$，因此

$$S_2 = X_1^{(2)} + \cdots + X_{N_2}^{(2)} = 50N_2 + (Y_1 + \cdots + Y_{N_2})$$

其中 $Y_i = X_i - 50 |_{X_i > 50}$ 表示第 i 次看病的理赔额。从上式可以看出，总费用 S_2 分为两部分，一部分由投保人承担，另一部分是总理赔额部分，由保险人来承担。我们记总理赔额为 S_3，则 $S_3 = Y_1 + \cdots + Y_{N_2}$。$Y_i$ 的分布

密度为

$$f_Y(y)=\frac{f_Y(50+y)}{P(X>50)}=\frac{\frac{2}{250}(1-\frac{50+y}{250})}{(1-\frac{50}{250})^2}=\frac{\frac{2}{250}(\frac{200-y}{250})}{(\frac{200}{250})^2}$$

$$=\frac{2}{200}(1-\frac{y}{200})$$

因此，$E(Y)=\frac{200}{3}$，$Var(Y)=\frac{2(200)^2}{9.4}$。可以得到总理赔额的期望和方差为

$$E(S_3)=E(N_2)E(Y)=64(\frac{200}{3})=4266.\bar{6}$$

$$Var(S_3)=E(N_2)E(Y^2)=64((\frac{200}{3})^2+\frac{200^2}{18})=426.\bar{6}$$

加 入 免 赔 额 后 ， 总 理 赔 额 比 没 有 免 赔 额 时 减 少 了 $\frac{8333.3\text{-}4266.6}{8333.3}=48.8\%$ 。

总结：当免赔额 d 存在时，

- 假设每次损失事件的损失额为 X，损失事件的实际赔偿额为Y^L，理赔事件的理赔额为 Y^P，则

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X \le d \\ X-d & X > d \end{cases}, \quad Y^P = \begin{cases} \text{未定义}, & X \le d \\ X-d & X > d \end{cases},$$

$$Y^P = Y^L \mid X > d$$

- 假设损失次数为 N^L，理赔次数为 N^P，则

$$N^P = I_1 + I_2 + \cdots + I_{N^L}$$

其中

$$I = \begin{cases} 1, & v \\ 0, & 1-v \end{cases}, \quad v = P(X > d)$$

- 总损失为 S，总理赔额为 S^{P}，则

$$S = X_1 + \cdots + X_N$$
$$= \underbrace{S_1 + d \cdot N^P}_{\text{投保人承担的部分}} + \underbrace{Y_1^P + \cdots + Y_{N^P}^P}_{\text{保险人承担的总理赔额}}$$

$$S^P = Y_1^L + \cdots + Y_N^L$$
$$= Y_1^P + \cdots + Y_{N^P}^P$$

$$M_S(z) = \mathrm{E}\left(e^{zS}\right) = P_{N^L}\left[M_{Y^L}(z)\right],$$

$$M_S(z) = \mathrm{E}\left(e^{zS}\right) = P_{N^P}\left[M_{Y^P}(z)\right].$$

$$P_{N^L}\left[M_{Y^L}(z)\right] = P_{N^L}\left[1 - v + vM_{Y^P}(z)\right] = P_{N^P}\left[M_{Y^P}(z)\right].$$

The number of ground-up losses is Poisson distributed with mean $\Lambda = 3$. The individual loss distribution is Pareto with parameters $\alpha = 4$ and $\theta = 10$. An individual ordinary deductible of 6, coinsurance of 75%, and an individual loss limit of 24 (before application of the deductible and coinsurance) are all applied. Determine the mean, variance, and distribution of aggregate payments.

$$\mathrm{E}(Y^L) = 0.75\,[\mathrm{E}(X \wedge 24) - \mathrm{E}(X \wedge 6)] = 0.75(3.2485 - 2.5195) = 0.54675.$$

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(N^L)\mathrm{E}(Y^L) = (3)(0.54675) = 1.64.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[(Y^L)^2\right] &= (0.75)^2\{\mathrm{E}\left[(X \wedge 24)^2\right] - \mathrm{E}\left[(X \wedge 6)^2\right] \\
&\qquad -2(6)\mathrm{E}(X \wedge 24) + 2(6)\mathrm{E}(X \wedge 6)\} \\
&= (0.75)^2\,[26.3790 - 10.5469 - 12(3.2485) + 12(2.5195)] \\
&= 3.98481.
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(S) = \lambda \mathrm{E}\left[(Y^L)^2\right] = 3(3.98481) = 11.9544 = (3.46)^2.$$

To compute the (approximate) distribution of S, we use the per-payment basis. First note that $v = Pr(X > 6) = [10/(10 + 6)]^4 = 0.15259$. and the number of payments N^P is Poisson distributed with mean $E(N^P) = \Lambda v = 3(0.15259) = 0.45776$. Let $Z = X - 6 | X > 6$, so that Z is the individual payment random variable with only a deductible of 6. Then

$$\Pr(Z > z) = \frac{\Pr(X > z + 6)}{\Pr(X > 6)}.$$

$$F_{Y^P}(y) = 1 - \Pr(0.75Z > y) = 1 - \frac{\Pr(X > 6 + y/0.75)}{\Pr(X > 6)}.$$

$$F_{Y^P}(y) = \frac{\Pr(X > 6) - Pr(X > 6 + y/0.75)}{Pr(X > 6)}, \quad y < 13.5,$$

and $F_{Y^P}(y) = 1$ for $y \geq 13.5$. We then discretize the distribution of Y^P (we thus apply the policy modifications first and then discretize) using a span of 2.25 and the method of rounding. This approach yields $f_0 = F_{Y^P}(1.125) = 0.30124$, $f_1 = F_{Y^P}(3.375) - F_{Y^P}(1.125) = 0.32768$, and so on. In this situation care must be exercised in the evaluation of f_6, and we have $f_6 = F_{Y^P}(14.625) - F_{Y^P}(12.375) = 1 - 0.94126 = 0.05874$. Then $f_n = 1 - 1 = 0$ for $n = 7, 8, \ldots$. The approximate distribution of S may then be computed using the compound Poisson recursive formula, namely, $f_S(0) = e^{-0.45776(1-0.30124)} = 0.72625$, and

$$f_S(x) = \frac{0.45776}{x} \sum_{y=1}^{x \wedge 6} y f_y f_S(x-y), \quad x = 1, 2, 3, \ldots.$$

Thus, $f_S(1) = (0.45776)(1)(0.32768)(0.72625) = 0.10894$, for example.

练习：某保险公司承保车险业务。已知总损失额服从复合泊松分布，每年的损失次数为 30。每次损失额，无论何种车型，服从指数分布，均值为 200。为减少理赔成本，保险公司拟对保单契约作如下修改：

（1） 对某些车辆不再承保。预计这项修改将使损失次数减少 20％。

（2） 只赔偿超过 100 的部分损失额。

求经过这两项修改后该保险公司的总理赔额的期望。

【解】设N'为修订后新的损失次数，则由泊松分布的可分解性

$$E\left(N^{'}\right)=E\left(N\right)\cdot 0.8=24$$

加入免赔额后，每次损失事件的平均赔付额

$$\begin{aligned} E\left(X-100\right)_{+} &= E\left(X\right)-E\left(X\wedge 100\right) \\ &= 200-200\left(1-e^{-0.5}\right) \\ &= 121.306 \end{aligned}$$

$$E\left(S^{'}\right)=E\left(X-100\right)_{+}\cdot E\left(N^{'}\right)=2911.35$$

S 的近似分布

1、 正态近似

定理 设个别理赔额分布函数为 $f(x)$，$u_1 = E(X)$，$u_2 = E(X^2)$。

（1）如果 S 是复合泊松分布，参数为 λ，则当 $\lambda \to \infty$ 时 $Z = \dfrac{S - \lambda u_1}{\sqrt{\lambda u_2}}$ 的分布趋于标准正态分布。

（2）如果 S 是复合负二项式分布，参数为 r, β，

$$P(N = k) = \binom{k + r - 1}{r} \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right)^k \left(\frac{1}{1 + \beta} \right)^r, k = 0, 1, 2, \cdots$$

个别理赔额分布函数为 $f(x)$，则

$$Z=\frac{S-r\beta u_1}{\sqrt{r\beta u_2+r\beta^2u_1^2}}$$

的分布在$r\to\infty$时趋于标准正态分布。

证明：我们将利用$\lim\limits_{\lambda\to\infty}M_Z(t)=e^{\frac{t^2}{2}}$来证明（1）和（2）。对于泊松分布情形，由$Z=\frac{S-E(S)}{\sqrt{Var(S)}}=\frac{S-\lambda u_1}{\sqrt{\lambda u_2}}$得到

$$M_Z(t)=E(\exp(t\frac{S-\lambda u_1}{\sqrt{\lambda u_2}}))=M_S(\frac{t}{\sqrt{\lambda u_2}})\exp\{-\frac{\lambda u_1 t}{\sqrt{\lambda u_2}}\}$$

由公式（5）知$M_S(t)=\exp[\lambda(M_X(t)-1)]$，因此

$$M_Z(t)=\exp\{\lambda[M_X(\frac{t}{\sqrt{\lambda u_{_2}}})-1]-\frac{\lambda u_1 t}{\sqrt{\lambda u_{_2}}}\}$$

由矩母函数的级数展开式

$$M_X(t)=E(e^{tX})=1+E(X)t+\frac{E(X^2)}{2}t^2+\cdots+\frac{E(X^n)}{n!}t^n+\cdots,$$

我们可以得到，

$$M_Z(t)=\exp(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{u_3^{'}}{(u_2)^{3/2}}t^3+\cdots)$$

当$\lambda\to\infty$，$M_Z(t)\to e^{\frac{t^2}{2}}$，即$\lim\limits_{\lambda\to\infty}M_Z(t)=e^{\frac{t^2}{2}}$。从而，Z 分布在$r\to\infty$时

趋于标准正态分布。

对于负二项分布，令

$$Z=\frac{S-E(S)}{\sqrt{Var(S)}}=\frac{S-E(N)E(X)}{\sqrt{E(N)Var(X)+Var(N)E(X)^2}}$$

$$=\frac{S-r\beta u_1}{\sqrt{r\beta u_2+r\beta^2u_1^2}}$$

再用类似的方法证明 Z 分布在$r\to\infty$时趋于标准正态分布。此处不再叙述。

例 3.22： (SOA 2001-11 30) The claims department of an insurance company receives envelopes with claims for insurance coverage at a Poisson rate of $\lambda = 50$ envelopes per week. For any period of time, the number of envelopes and the numbers of claims in the envelopes are independent. The numbers of claims in the envelopes have the following distribution:

Number of Claims	Probability
1	0.20
2	0.25
3	0.40
4	0.15

Using the normal approximation, calculate the 90th percentile of the number of claims received in 13 weeks.

解：设Y_i表示第 i 个信封中的索赔数。设$X(13)$表示 13 周内收到的总索赔数。

$$E(Y_i)=1\times0.2+2\times0.25+3\times0.4+4\times0.15=2.5$$

$$E(Y_i^2)=1\times0.2+4\times0.25+9\times0.4+16\times0.15=7.2$$

$$E(X(13))=50\times13\times2.5=1625$$

$$Var(X(13))=50\times13\times7.2=4680$$

由 $P(X(13)\le Z)=0.9=\Phi(1.282)$

$$=>P(\frac{X(13)-1625}{\sqrt{4680}}\le1.282)$$

因此， $X(13)\le1712.7$

2、平移 gamma 近似

设 $G(x;\alpha,\beta)=\int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt$ 为 gamma 分布，对任意一点 x_0 ，定义一个新的分布函数 $H(x,\alpha,\beta,x_0)=G(x-x_0;\alpha,\beta)$ 。若设 $h(x)$ 和 $g(x)$ 分布为 $H(x,\alpha,\beta,x_0)$ 和 $G(x,x_0,\alpha,\beta)$ 的分布函数密度，则从图形上 H 和 G 只差了一个平移变换。

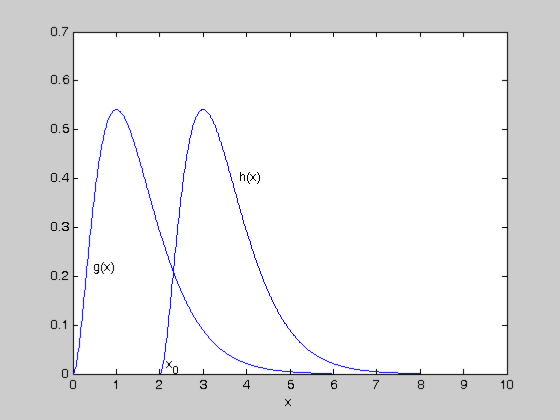

图 5.1 H 和 G 的分布密度图

下面我们用$h(x)$来描述总理赔额S的分布密度。因为$h(x)$有三个参数，所以只需根据 S 的均值、方差和三阶中心矩来定出$h(x)$的形状和位置。又因为H的均值，方差和三阶中心矩分别为$x_0+\dfrac{\alpha}{\beta}$，$\dfrac{\alpha}{\beta^2}$，$\dfrac{2\alpha}{\beta^3}$，所以用$h(x)$来描述 S 的分布时，下面三个等式近似成立。

$$\begin{cases} E(S)=x_0+\dfrac{\alpha}{\beta} \\ Var(S)=\dfrac{\alpha}{\beta^2} \\ E\left[(S-E(S))^3\right]=\dfrac{2\alpha}{\beta^3} \end{cases} \tag{7}$$

这是一方程组，解出x_0,α,β有

$$\begin{cases} x_0 = E(S) - \dfrac{2Var(S)^2}{E((S-E(S))^3)} \\ \alpha = \dfrac{4Var(S)^3}{\left[E((S-E(S))^3)\right]^2} \\ \beta = \dfrac{2Var(S)}{E((S-E(S))^3)} \end{cases}$$

这样就可以得到一个平移 gamma 分布。当S为复合泊松分布时，（7）可简化为

$$x_0 = \lambda u_1 - 2\lambda \frac{u_2^2}{u_3};\quad \alpha = \frac{4\lambda u_2^3}{u_3^2};\quad \beta = \frac{2u_2}{u_3}$$

其中$u_3 = E(X^3)$，这是因为$E((S-E(S))^3) = \lambda E(X^3)$。

若 $x_0+\dfrac{\alpha}{\beta}=u \quad \dfrac{\alpha}{\beta^2}=\sigma^2$，当 $x\to-\infty,\alpha\to\infty,\beta\to\infty$ 时，可以证明 $H(x,\alpha,\beta,x_0)$ 趋于正态分布 $N(u,\sigma^2)$。因此，正态分布可以看作是这种三参数分布的一种极限情况。从这个意义上来说，平移 gamma 分布近似是正态近似的推广。

例 3.23： 设 S 为复合泊松分布，$\lambda=12$，当个体理赔额分布为 $[0,1]$ 上的均匀分布时，试分别用（1）正态近似 （2）平移 gamma 近似计算 $P(S<10)$。

解：（1）由条件易知 $u_1=E(X)=\dfrac{1}{2}$，$u_2=E(X^2)=\dfrac{1}{3}$，于是得到

$$E(S)=\lambda u_1=6,\quad Var(S)=\lambda u_2=4$$

所以，$P(S<10)=P(\frac{S-6}{2}<2)=\Phi(2)=0.9772$

（2）令$u_3=E(X^3)=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}$，则$E(S-E(S))^3=\lambda u_3=3$ ，解方程组

$$\begin{cases}6=x_0+\alpha/\beta\\4=\alpha/\beta^2\\3=2\alpha/\beta^3\end{cases}$$

得 $x_0=-4.67,\alpha=28.44,\beta=2.67$ 。因此 S 的分布函数为 $G(x+4.67;28.44,2.67)$，

$$P(S<10)=G(14.67,28.44,2.67)=0.9683$$

3、对数正态近似

此外，实际中还使用对数正态分布 $\ln(u,\sigma^2)$ 来近似 S 的分布，即考虑方程组

$$\begin{aligned} E(S) &= \exp(u + \sigma^2/2) \\ E(S^2) &= \exp(2u + 2\sigma^2) \end{aligned} \tag{3.41}$$

解出 u,σ^2，然后用 $\ln(u,\sigma^2)$ 来描述 S 的分布。

当 $E(N)$ 的值较大时，正态分布近似的效果不错，特别是当 N 为泊松分布，二项式分布和负二项式分布时，由中心极限定理知，当 λ, m, r 趋于无穷时，S 的分布将趋于正态分布。而当 $E(N)$ 的值较小时，S 的分布是有偏斜的，这时使用平移 gamma 和对数正态近似可能更为恰当。

例 3.24：在过去的 10 个月里每月某险种的理赔次数和个体损失额的样本均值（和标准差）分别为 $6.7(2.3)$，$179747(52,141)$。

(1)　计算每个月总损失额的样本均值和方差。

（2）分别用正态近似和对数正态近似计算损失额超过期望的140% 的概率 $P(S > 1.40E(S))$。

解：（1）由公式（1）和（2）得到 S 的样本均值和样本方差为

$$E(S) = E(X)E(N) = 6.7\times 179747 = 1200955$$

$$\begin{aligned} Var(S) &= E(Var(S \mid N)) + Var(E(S \mid N)) \\ &= 6.7\times 52,141^2 + 2.3^2\times 179747^2 \\ &= 188180\times 10^{11} \end{aligned}$$

若使用正态近似计算，则

$$
\begin{aligned}
P(S > 1.40E(S)) &= P(S > 1681337) \\
&= P\left(\frac{S - E(S)}{\sqrt{Var(S)}} > \frac{1681337 - 1200955}{433791}\right) \\
&= P(Z > 1.107) \\
&= 1 - \Phi(1.107) \\
&= 0.134
\end{aligned}
$$

若使用对数正态近似，则解下列方程

$$u + \sigma^2/2 = \ln(E(S)) = \ln(1.200955 \times 10^6) = 13.99863$$

$$2u + 2\sigma^2 = \ln(E(S^2)) = \ln(1.63047 \times 10^{12}) = 28.11989$$

得到 $u = 13.93731, \sigma^2 = 0.1226361$。因此

$$P(S > 1681337) = 1 - \Phi\left(\frac{\log 1681337 - 13.93731}{0.1226361^{0.5}}\right)$$

$$= 1 - \Phi(1.135913)$$

$$= 0.128$$