第三章 总理赔额模型

保单条款对总索赔额的影响 Coverage Modifications

主要内容

1. 免赔额对损失强度，损失频率和总索赔额的影响
2. 再保险的类型
3. 停止损失再保险的纯保费
4. 团体红利模型

知识点

Coverage Modifications

The Candidate will be able to, for frequency, severity, and aggregate models:

a) Evaluate the effect of coverage modifications, in particular, deductibles, limits, and coinsurance.

b) Calculate loss elimination ratios and increased limits factors.

c) Evaluate the effects of inflation on losses.

Insurance and Reinsurance Coverages

a) Describe different types of short-term insurance coverage including auto, homeowners, liability, health, disability, and dental.

b) Describe the types of policy limits and coverage modifications for short-term insurance.

c) Describe the operation of basic forms of proportional and excess of loss reinsurance.

d) Derive the distribution of claim amounts paid by the insurer and reinsurer under various forms of reinsurance.

一、免赔额对损失强度，损失频率和总索赔额的影响

例：设某保险公司承保医疗保险，X 表示一次医疗费用，N 表示看病的次数，N 服从泊松分布，参数 $\lambda = 100$，$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ 表示该医疗保险的总费用，设 X 的分布密度为

$$f_X(x) = \frac{2}{250}(1 - \frac{x}{250}) \qquad 0 \le x \le 250$$

试分析加入免赔额 $d = 50$ 后，保险公司的总理赔额的变化。

解：首先考虑无免赔额情形，此时 $d = 0$。总理赔额等于总医疗费用 S。由 X 的分布密度计算得到

$$E(X) = \int_0^{250} x \frac{2}{250}(1 - \frac{x}{250})dx = \frac{250}{3} = 83.\bar{3}$$

$$Var(X)=\frac{250^2}{18}$$

总理赔额的期望和方差为

$$E(S)=\lambda E(X)=8333.\bar{3}$$

$$Var(S)=\lambda E(X^2)=100(E(X)^2+Var(X))$$
$$=100((\frac{250}{3})^2+\frac{250^2}{18})$$
$$=1041666.\bar{6}$$

下面考虑 $d=50$ 的情形。这时将医疗费用分为两类：$C_1=(X\le 50)$,

$C_2=(X>50)$。设 N_1 表示医疗费用小于等于免赔额的次数，服从参数为

$\lambda_1 = \lambda P(X \leq 50) = 100(1-(1-\frac{50}{250})^2) = 36$ 的泊松分布。N_2 表示医疗费用大于免赔额， 服从参数 $\lambda_2 = \lambda P(X > 50) = 100(1-\frac{50}{250})^2 = 64$ 的泊松分布。设 $X^{(1)} = X \mid X \leq 50$， $X^{(2)} = X \mid X > 50$ ，则总损失额 $S = S_1 + S_2$，其中

$$S_1 = X_1{}^{(1)} + \cdots + X_{N_1}{}^{(1)}$$

$$S_2 = X_1{}^{(2)} + \cdots + X_{N_2}{}^{(2)}$$

S_1 表示医疗费小于等于免赔额的总费用，这部分费用完全由投保人承担。S_2 表示医疗费大于免赔额的总费用。由于

$X^{(2)} = X \mid X > 50 = \left[50 + (X - 50)\right] \mid X > 50$，因此

$$S_2 = X_1^{(2)} + \cdots + X_{N_2}^{(2)} = 50N_2 + (Y_1 + \cdots + Y_{N_2})$$

其中$Y_i = X_i - 50|_{X_i > 50}$表示第 i 次看病的理赔额。从上式可以看出，总费用 S_2 分为两部分，一部分由投保人承担，另一部分是总理赔额部分，由保险人来承担。我们记总理赔额为 S_3，则$S_3 = Y_1 + \cdots + Y_{N_2}$。$Y_i$ 的分布密度为

$$f_Y(y)=\frac{f_Y(50+y)}{P(X>50)}=\frac{\frac{2}{250}(1-\frac{50+y}{250})}{(1-\frac{50}{250})^2}=\frac{\frac{2}{250}(\frac{200-y}{250})}{(\frac{200}{250})^2}$$

$$=\frac{2}{200}(1-\frac{y}{200})$$

因此，$E(Y)=\frac{200}{3}$，$Var(Y)=\frac{2(200)^2}{9.4}$。可以得到总理赔额的期望和方差为

$$E(S_3)=E(N_2)E(Y)=64(\frac{200}{3})=4266.\bar{6}$$

$$Var(S_3)=E(N_2)E(Y^2)=64((\frac{200}{3})^2+\frac{200^2}{18})=426.\bar{6}$$

加入免赔额后，总理赔额比没有免赔额时减少了$\dfrac{8333.3-4266.6}{8333.3}=48.8\%$。

总结：

1、当免赔额 d 存在时，理赔次数、理赔额和总理赔额的分布

- 假设每次损失事件的损失额为 X，损失事件的实际赔偿额为Y^L，理赔事件的理赔额为 Y^P，则

$$Y^L=\begin{cases}0, & X\le d\\ X-d & X>d\end{cases},\quad Y^P=\begin{cases}未定义, & X\le d\\ X-d & X>d\end{cases},$$

$$Y^P=Y^L\mid X>d$$

- 假设损失次数为 N^L，理赔次数为 N^P，则

$$N^P=I_1+I_2+\cdots+I_{N^L}$$

其中

$$I=\begin{cases}1, & v\\ 0, & 1-v\end{cases},\quad v=P(X>d)$$

- 总损失为 S，总理赔额为 S^P，则

$$\begin{aligned}S&=X_1+\cdots+X_N\\&=\underbrace{S_1+d\cdot N^P}_{\text{投保人承担的部分}}+\underbrace{Y_1^P+\cdots+Y_{N^P}^P}_{\text{保险人承担的总理赔额}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S^P&=Y_1^L+\cdots+Y_N^L\\&=Y_1^P+\cdots+Y_{N^P}^P\end{aligned}$$

设 $P_S(z)$ 表示 S 的母函数，$M_S(z)$ 表示 S 的矩母函数

$$M_{S^P}(z) = E(e^{zS^P}) = P_{N^L}(M_{Y^L}(z)) = P_{N^P}(M_{Y^P}(z))$$

$$P_{N^L}(M_{Y^L}(z)) = P_{N^L}(1 - v + vM_{Y^P}(z)) = P_{N^P}(M_{Y^P}(z))$$

思考：当理赔次数是(a,b,0)分布时，总理赔额分布是什么？

2、同时考虑免赔、限额和比例系数以及通货膨胀

设 X 表示实际损失额，免赔额为 d，最大覆盖损失为 u 和比例分担额 α，通货膨胀率为 r，则明年每次损失赔付额为

$$Y^L=\begin{cases}0, & X\le d/(1+r)\\ \alpha[(1+r)X-d], & d/(1+r)<X<u/(1+r)\\ \alpha(u-d), & X\ge u/(1+r)\end{cases}$$

每次理赔的理赔额为

$$Y^P=\begin{cases}\text{未定义} & X\le d/(1+r)\\ \alpha[(1+r)X-d], & d/(1+r)<X<u/(1+r)\\ \alpha(u-d), & X\ge u/(1+r)\end{cases}$$

$$E(Y^L)=a(1+r)\{E[X\wedge(u/(1+r))]-E[X\wedge(d/(1+r))]\}$$

$$E(Y^P)=\frac{a(1+r)\{E[X\wedge \mathrm{u}^*]-E[X\wedge d^*]\}}{1-F_X(d^*)}$$

$$\begin{aligned}E\left[(Y^L)^2\right]=a^2(1+r)^2\{&E[(X\wedge u^*)^2]-E[(X\wedge d^*)^2]\\&-2d^*E(X\wedge u^*)+2d^*E(X\wedge d^*)\}\end{aligned},$$

其中$u^*=\dfrac{u}{(1+r)},d^*=\dfrac{d}{(1+r)}$

Proof: From the definition of Y^L,

$$Y^L = \alpha(1+r)[(X \wedge u^*) - (X \wedge d^*)]$$

and, therefore,

$$\begin{aligned}
\frac{(Y^L)^2}{[\alpha(1+r)]^2} &= [(X \wedge u^*) - (X \wedge d^*)]^2 \\
&= (X \wedge u^*)^2 + (X \wedge d^*)^2 - 2(X \wedge u^*)(X \wedge d^*) \\
&= (X \wedge u^*)^2 - (X \wedge d^*)^2 - 2(X \wedge d^*)[(X \wedge u^*) - (X \wedge d^*)].
\end{aligned}$$

The final term on the right-hand side can be written as

$$2(X \wedge d^*)[(X \wedge u^*) - (X \wedge d^*)] = 2d^*[(X \wedge u^*) - (X \wedge d^*)].$$

To see this, note that when $X < d^*$, both sides equal zero; when $d^* \leq X < u^*$, both sides equal $2d^*(X - d^*)$; and when $X \geq u^*$, both sides equal $2d^*(u^* - d^*)$. Make this substitution and take expectation on both sides to complete the proof.[2]

- 假设损失次数为 N^L，理赔次数为 N^P，则

$$N^P = I_1 + I_2 + \cdots + I_{N^L}$$

其中 $I = \begin{cases} 1, & v \\ 0, & 1-v \end{cases}$， $v = P(X > d)$

- 总损失为 S，总理赔额为 S^P，则

$$\begin{aligned} S^P &= Y_1^L + \cdots + Y_N^L \\ &= Y_1^P + \cdots + Y_{N^P}^P \end{aligned}$$

The number of ground-up losses is Poisson distributed with mean $\Lambda = 3$. The individual loss distribution is Pareto with parameters $\alpha = 4$ and $\theta = 10$. An individual ordinary deductible of 6, coinsurance of 75%, and an individual loss limit of 24 (before application of the deductible and coinsurance) are all applied. Determine the mean, variance, and distribution of aggregate payments.

$$\mathrm{E}(Y^L) = 0.75\,[\mathrm{E}(X \wedge 24) - \mathrm{E}(X \wedge 6)] = 0.75(3.2485 - 2.5195) = 0.54675.$$

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(N^L)\mathrm{E}(Y^L) = (3)(0.54675) = 1.64.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[(Y^L)^2\right] &= (0.75)^2\{\mathrm{E}\left[(X \wedge 24)^2\right] - \mathrm{E}\left[(X \wedge 6)^2\right] \\
&\qquad -2(6)\mathrm{E}(X \wedge 24) + 2(6)\mathrm{E}(X \wedge 6)\} \\
&= (0.75)^2\,[26.3790 - 10.5469 - 12(3.2485) + 12(2.5195)] \\
&= 3.98481.
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(S) = \lambda \mathrm{E}\left[(Y^L)^2\right] = 3(3.98481) = 11.9544 = (3.46)^2.$$

To compute the (approximate) distribution of S, we use the per-payment basis. First note that $v = Pr(X > 6) = [10/(10 + 6)]^4 = 0.15259$. and the number of payments N^P is Poisson distributed with mean $\mathrm{E}(N^P) = \Lambda v = 3(0.15259) = 0.45776$. Let $Z = X - 6 | X > 6$, so that Z is the individual payment random variable with only a deductible of 6. Then

$$\Pr(Z > z) = \frac{\Pr(X > z + 6)}{\Pr(X > 6)}.$$

$$F_{Y^P}(y) = 1 - \Pr(0.75Z > y) = 1 - \frac{\Pr(X > 6 + y/0.75)}{\Pr(X > 6)}.$$

$$F_{Y^P}(y) = \frac{\Pr(X > 6) - Pr(X > 6 + y/0.75)}{Pr(X > 6)}, \quad y < 13.5,$$

and $F_{Y^P}(y) = 1$ for $y \geq 13.5$. We then discretize the distribution of Y^P (we thus apply the policy modifications first and then discretize) using a span of 2.25 and the method of rounding. This approach yields $f_0 = F_{Y^P}(1.125) = 0.30124$, $f_1 = F_{Y^P}(3.375) - F_{Y^P}(1.125) = 0.32768$, and so on. In this situation care must be exercised in the evaluation of f_6, and we have $f_6 = F_{Y^P}(14.625) - F_{Y^P}(12.375) = 1 - 0.94126 = 0.05874$. Then $f_n = 1 - 1 = 0$ for $n = 7, 8, \ldots$. The approximate distribution of S may then be computed using the compound Poisson recursive formula, namely, $f_S(0) = e^{-0.45776(1-0.30124)} = 0.72625$, and

$$f_S(x) = \frac{0.45776}{x} \sum_{y=1}^{x \wedge 6} y f_y f_S(x-y), \quad x = 1, 2, 3, \ldots.$$

Thus, $f_S(1) = (0.45776)(1)(0.32768)(0.72625) = 0.10894$, for example.

练习：某保险公司承保车险业务。已知总损失额服从复合泊松分布，每年的损失次数为 30。每次损失额，无论何种车型，服从指数分布，均值为 200。为减少理赔成本，保险公司拟对保单契约作如下修改：

（1） 对某些车辆不再承保。预计这项修改将使损失次数减少 20％。

（2） 只赔偿超过 100 的部分损失额。

求经过这两项修改后该保险公司的总理赔额的期望。

【解】设 N' 为修订后新的损失次数，则由泊松分布的可分解性

$$E\left(N^{'}\right)=E\left(N\right)\cdot 0.8=24$$

加入免赔额后，每次损失事件的平均赔付额

$$\begin{aligned}E\left(X-100\right)_{+}&=E\left(X\right)-E\left(X\wedge 100\right)\\&=200-200\left(1-e^{-0.5}\right)\\&=121.306\end{aligned}$$

$$E\left(S^{'}\right)=E\left(X-100\right)_{+}\cdot E\left(N^{'}\right)=2911.35$$

二、再保险条款

1、再保险（reinsureance），也称分保，是保险公司在保险合同的基础上通过签订分保合同，转嫁所承担的风险和责任的方式，通俗的说，就是对保险人的保险。

常见的再保险形式：

- **比例再保险**

（1）成数再保险：原保险人按约定的比例，将每一个风险单位的保险金额向再保险人分保。

（2）溢额再保险：是原保险人规定一个最大保险金额（一线）作为自留额。当任何一个风险单位的保险金额小于这个金额时，原保险人自留全部责任。当保险金额超过自留额的部分时，原保险人与再保险人按自留额和分出额对总保额的比例分摊赔款责任。

2：非比例再保险

（1）超额赔偿再保险：（Excess of loss treaties）原保险人因同一原因发生的任何一次损失或因同一原因所导致的各次赔偿额的总和超过约定的自负额，其超出部分由再保险公司负责至一定额度。（**已讲**）

（2）停止损失再保险：（Stop loss treaties）以原保险人一段时间内（一般为一年）的总损失为基础，且合约中规定了自留额和赔偿限额。

再保险公司的赔付额的期望称为**停止损失净保费**。

下面我们来计算**停止损失净保费**。

停止损失再保险的数学模型如下：

记S表示损失额，S_R和$S_N = S - S_R$分别表示再保险人和原保险人承担的总损失额，设d为自留额，对于停止损失再保险可表示如下（省略了再保险的赔偿限额）

$$S_N = \begin{cases} S & S \le d \\ d & S > d \end{cases}$$

$$S_R = S - S_N = \begin{cases} 0 & S \le d \\ S - d & S > d \end{cases}$$
$$= (S-d)_+$$

净停止损失再保费为$E[(S-d)_+]$

由第二章的公式，

$$
\begin{aligned}
E((S-d)_+) &= E((S-d)\wedge 0) \\
&= \int_d^{\infty} (x-d)\, f_S(x)dx \\
or &= \sum_{x>d} (x-d)\, f_S(x)
\end{aligned}
$$

或者

$$
\begin{aligned}
E((S-d)_+) &= E(S)-E(S\wedge d) \\
&= E(S)-\int_0^{d} (1-F_S(x))dx \\
&= \int_d^{\infty} (1-F_S(x))dx
\end{aligned}
$$

当理赔S仅取非负整数值并且d也是整数时，有：

$$E[I_d]=\sum_{x=d+1}^{\infty}(x-d)f_S(x)$$

$$=f_S(d+1)+2f_S(d+2)+\ldots$$

$$=E[S]-d+\sum_{x=0}^{d-1}(d-x)f_S(x)$$

$$=\sum_{x=d}^{\infty}[1-F_S(x)]$$

下面介绍几个特殊情况下的$E((S-d)_+)$的公式：

1、**定理** 设$P(a<S<b)=0$，则对任意 $a<d<b$,

$$E[(S-d)_+]=\frac{b-d}{b-a}E[(S-a)_+]+\frac{d-a}{b-a}E[(S-b)_+]$$

证明：根据假设， $F_S(x)=F_S(a), a\le x\le b$ 。因此，对$a\le x\le b$，

$$\begin{aligned}E[(S-d)_+]&=\int_d^{\infty}[1-F_S(x)]dx\\&=\int_a^{\infty}[1-F_S(x)]dx-\int_a^{d}[1-F_S(x)]dx\\&=E[(S-a)_+]-\int_a^{d}[1-F_S(a)]dx\\&=E[(S-a)_+]-(d-a)[1-F_S(a)]\end{aligned}$$

再令 $d=b$，

$$E[(S-b)_+] = E[(S-a)_+] - (b-a)[1-F_S(a)]$$

由上述两式即得

$$E[(S-d)_+] = \frac{b-d}{b-a}E[(S-a)_+] + \frac{d-a}{b-a}E[(S-b)_+]$$

2、当 S 是离散随机变量时

定理 固定 h>0，设 $P(S=kh)=f_k \ge 0$， $k=0,1,2,\cdots$ 且对于其它 x，$P(S=x)=0$，则对 $d=jh$

$$E[(S-d)_+]=h\sum_{m=0}^{\infty}\{1-F_S[(m+j)h]\}$$

证明：

$$
\begin{aligned}
E[(S-d)_+] &= \sum_{x>d} (x-d)\, f_S(x) dx \\
&= \sum_{k=j}^{\infty} (kh - jh) f_k \\
&= h \sum_{k=j}^{\infty} \sum_{m=0}^{k-j-1} f_k \\
&= h \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=m+j+1}^{\infty} f_k \\
&= h \sum_{m=0}^{\infty} \{1 - F_S[(m+j)h]\}
\end{aligned}
$$

推论： 假设上述定理条件满足，则对 $d = jh$ 可以按下面的算法递推计算

$$E\{[S-(j+1)h]_+\} = E[(S-jh)_+] - h[1-F_S(jh)]$$

$$E\left[(S-0)_+\right] = E(S)$$

证明： 由定理知

$$
\begin{aligned}
E[(S-(j+1)h)_+] &= h\sum_{m=0}^{\infty}\{1-F_S[(m+j+1)h]\} \\
&= h\sum_{m=1}^{\infty}\{1-F_S[(m+j)h]\} \\
&= h\sum_{m=0}^{\infty}\{1-F_S[(m+j)h]\}-h\{1-F_S(jh)\}
\end{aligned}
$$

例 1： 设理赔次数 N 服从几何分布，均值为 4，个别理赔额 X 恒等于 40。S 表示聚合理赔额，求 $E\left(S-100\right)_+$。

【解】

对于均值为 4 的几何分布，可得 $p=0.2$

$$F_S(0)=P(N=0)=0.2$$

$$F_S(40)=P(N\leq 1)=0.36$$

$$F_S(80)=P(N\leq 2)=0.488$$

$$E(S)=4\times 40=160$$

由递推公式得

$$E(S-40)_+=E(S)-40\left[1-F_S(0)\right]=128$$

$$E(S-80)_+=E(S-40)_+-40\left[1-F_S(40)\right]=102.4$$

$$E(S-120)_+=E(S-80)_+-40\left[1-F_S(80)\right]=81.92$$

于是

$$E\left(S-100\right)_{+}=\frac{120-100}{120-80}E[(S-80)_{+}]+\frac{100-80}{120-80}E[(S-120)_{+}]$$
$$=\frac{81.92+102.4}{2}=92.16$$

例 2：（SOA，0501－19）For a stop-loss insurance on a three person group:

(i) Loss amounts are independent.

(ii) The distribution of loss amount for each person is:

x	p
0	0.4
1	0.3
2	0.2
3	0.1

(iii) The stop-loss insurance has a deductible of 1 for the group.

Calculate the net stop-loss premium.

解：首先计算每个人的期望损失额

$$E(X)=1\times0.3+2\times0.2+3*0.1=1$$

设 S 为总损失额，则 $S=X_1+X_2+X_3$， $E(S)=3E(X)=3$。

当自留额为 1 时，

$$\begin{aligned}E\left[(S-1)_+\right]&=E[(S-0)_+]-1(1-F_S(0))\\&=E[S]-1(1-f_S(0))\\&=3-1\times(1-0.4^3)\\&=3-0.936\\&=2.064\end{aligned}$$

练习：计算 $E[(S-2)_+]$。

例 3：考虑某公司的一项牙医保险计划，公司为员工及其家庭成员投保牙医保险，每个已婚员工，不论其家庭人数为多少，他们的保费都一样，保险公司将每个人在该保险年度花费统计如下（货币单位为 25 美元），

x	$f(x)$
1	0.15
2	0.20
3	0.25
4	0.125
5	0.075
6	0.05

7	0.05
8	0.05
9	0.025
10	0.025

此外，每个员工一年内的看牙医次数的分布如下

n	p_n
0	0.05
1	0.10
2	0.15
3	0.20

4	0.25
5	0.15
6	0.06
7	0.03
8	0.01

（1）：保险公司现在计算每个已婚的员工的一年总花费的分布。

（2）：考虑如果对每个已婚员工的一年总花费进行再保险，自留额对净停止损失保费的影响，分别计算 $d = 25, 30, 50$ 的净停止损失保费。

解： 使用

$$f_S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x)$$

得到 S 的分布如下

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
$f_S(s)$	0.05	0.015	0.023	0.035	0.033	0.036	0.40	0.044	0.048	…

$$F_S(0)=0.05, F_S(25)=0.065, F_S(50)=0.08838, F_S(75)=0.12306$$

$$E(S)=E(N)\times E(X)=25\times 12.58=314.5$$

$$E((S-25)_+)=E(S)-25(1-F_S(0))=314.5-25(1-0.05)=290.75$$

$$\begin{aligned} E((S-50)_+) &= E((S-25)_+)-25(1-F_S(25)) \\ &= 290.75-25(1-0.065)=267.375 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E((S-30)_+) &= \frac{?}{50-25}E((S-25)_+)+\frac{?}{50-25}E((S-50)_+) \\ &= \frac{?}{25}290.75+\frac{5}{25}267.375 \\ &= 286.07 \end{aligned}$$

三、团体保险的红利模型

保险业务中，尤其是团体保险业务中，常常会设置某种对投保人的红利政策，以使投保人能够分享公司的部分经营成果，同时鼓励投保人自我防范风险、减少可以避免的损失。下面考虑对实际赔付 S 低于定价假设的部分进行分红的方法，基本的做法是以所收取的保费 G 为基础，按照一定的份额设定一个额度，如果最后所发生的理赔低于这个额度，则把这部分差额作为红利返还给投保人，记此返还额为 D，故红利分配模型为：

$$D(S)=\begin{cases} kG-S, & S<kG \\ 0, & S\geq kG \end{cases} \qquad 0<k<1 \quad (*)$$

设 S 的分布函数为 $F_S(x)$，密度函数为 $f_S(x)$，有

$$E(D)=\int_0^{\infty} D(x) f_S(x)dx=\int_0^{kG}(kG-x) f_S(x)dx$$

另外，$d=kG$，容易验证：

$$S+D-kG=\begin{cases}0, & S<kG \\ S-kG, & S\geq kG\end{cases}=I_{kG}(S)\text{，}\quad 0<k<1$$

两边取期望，得

$$E(S)+E(D)-kG=\int_{kG}^{\infty}(s-kG)f(s)ds=E(I_{kG})$$

故

$$E(D)=kG-E(S)+E(I_{kG})$$

例 4 续的理赔分布 S，设保险人所收取的保费为 G=375，如果理赔总量低于 200，保险人将差额的一部分按照（*）的方式作为红利分配给投保人。试计算 $E[D]$。

解：设 25 为基本货币单位，有 $kG=8$，由于

$$E(D)=kG-E(S)+E(I_{kG}),$$

经计算得 $E(I_8)=143.988$，故

$$E(D)=200-314.5+143.988=29.4880$$

例 5: 某保单组的保费 G 等于 2，理赔总额的分布函数为 $F_S(x)=1-e^{-2x}$。

保险人的红利支付函数为

$$D=\begin{cases} kG-S & S<kG \\ 0 & S>kG \end{cases}$$

已知 $E(D)=\frac{1}{2}e^{-4k}$，则 k 等于（ ）。

A.1/2 B. 1/3 C. 1/4 D. 1/5 E.1/6

【解】根据 D 的表达式，

$$
\begin{aligned}
E(D) &= \int_0^{kG} (kG-s) f(s) ds \\
&= \int_0^{2k} (2k-s) 2e^{-2s} ds \\
&= 2k - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-4k}
\end{aligned}
$$

$$E(D) = kG - E(S) + E(I_{kG}) = 2k - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2\times 2k}$$

由因为$E(D) = \frac{1}{2} e^{-4k}$，所以$\frac{1}{2} e^{-4k} = 2k - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-4k}$

$2k - \frac{1}{2} = 0$，$k = \frac{1}{4}$。