远期、期货和互换

forwards，futures & swaps

孟生旺

中国人民大学统计学院

http://blog.sina.com.cn/mengshw

主要内容

- 远期（forward）和期货（futures）的基本概念
- 远期和期货的定价
- 合成远期（synthetic forward）
- 套保（hedge）和套利（arbitrage）
- 互换（swap）的基本概念及其定价

- **衍生产品（derivative instrument）**：一种金融工具，其价值依赖于其他产品（如证券、商品、利率或指数）的价格。
- 常见的衍生产品：
  - **远期（forwards）**
  - **期货（futures）**
  - **互换（swaps）**
  - **期权（options）**

一、远期(forward)

- 远期合约（forward contract）：双方约定在未来某一个确定的时间，按照某一确定的价格买卖一定数量的某种资产的协议。**例**：小麦，石油
- 标的资产（underlying asset）：双方约定买卖的资产。
- 交割价格（delivery price）：约定的成交价格。
- 空头（short forward, short position）：卖出标的资产的一方。
- 多头（long forward, long position）：买入标的资产的一方。

- 回收（payoff）：持有人在满期时实现的现金价值。
  - 多头的回收 ＝ 满期时的即期价格 – 交割价格
  - 空头的回收 ＝ –多头的回收
- 盈亏（net payoff，profit），从回收中扣除初始费用的终值。
    - 盈亏 ＝ 回收－初始费用的终值
  - 注：远期合约的初始费用为零，故 盈亏 = 回收。

例：假设股票当前的价格是100元，一年后到期的远期价格为105元，没有分红。年实际利率为5％。

- 股票多头：立即购买，当前支付100元。
- 远期多头：通过远期合约购买，当前支出为零，一年后支付105元。

解：如果一年后股票的即期价格为115元，则

- 股票多头：
  - 回收 = 115，盈亏 = 115－100×1.05 = 10
- 远期多头：
  - 回收 = 115－105 ＝ 10，盈亏 = 10－0 = 10

例： 投资100元购买了一种1年期的零息债券，到期的偿还值为105元。1年期的实际利率为5％。请计算投资者购买这种债券的回收和盈亏。

解： 购买这种债券的回收为105元。购买债券的成本为100元，因此购买债券的盈亏为：

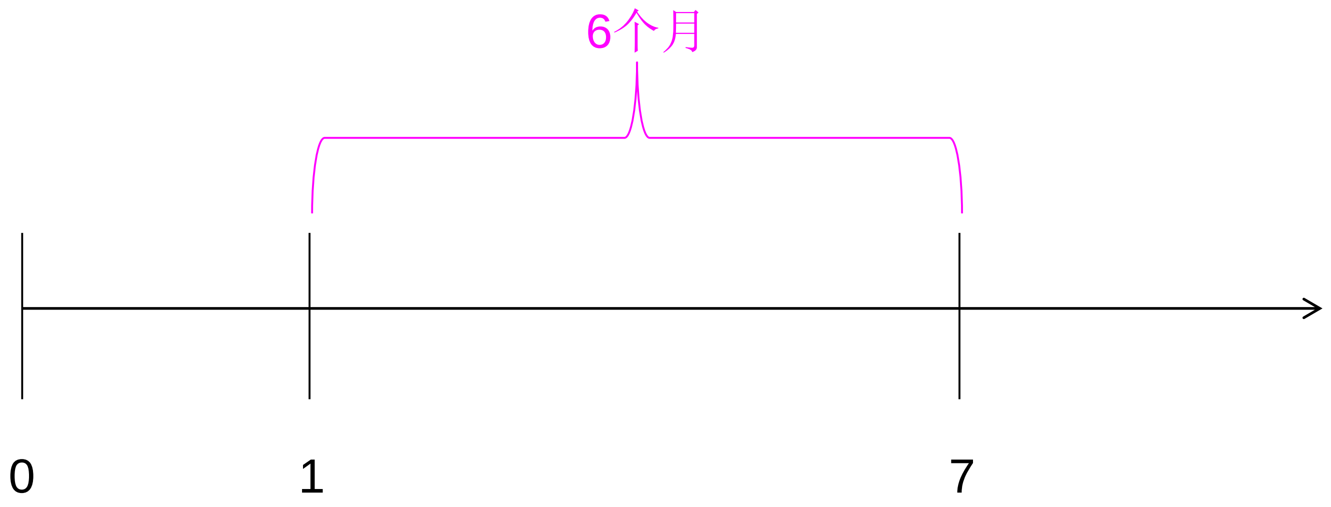
$$105 - 100 \times (1 + 5\%) = 0。$$

- **注：零息债券的盈亏为零，但利息收入大于零！**

- **问题：如果债券的到期偿还值为106元，结果如何？**

- **远期合约的类型：**
  - 商品远期合约
  - 金融远期合约
    - 远期利率协议
    - 远期外汇合约
    - 远期股票合约
- 例：远期利率协议（中国人民银行2007年第20号公告）

- 远期利率（**Forward Rate** ）：将来某个时点开始的一定期限的利率。
- **例：**1×7远期利率：1个月之后开始的期限为6个月的远期利率



- 远期利率由一系列即期利率决定，例：
  - 一年期的即期利率为8%
  - 二年期的即期利率为9%
  - 则从第一年末到第二年末的远期利率为i = 10.01%，即

$$(1 + 8\%)(1 + i) = (1 + 9\%)^2 \Rightarrow i = 10.01\%$$

- 远期利率协议（**Forward Rate Agreements，FRA**）：买卖双方同意从未来某一时点开始，在某一特定时期内按协议利率借贷一笔名义本金的协议。
- 买卖双方订立远期利率协议的目的
  - 买方（借入）——规避利率上升的风险
  - 卖方（贷出）——规避利率下降的风险。
- 不必交换本金，只需支付结算金(cash settlement)。
- 若 参照利率 > 协议利率，买方获益，由卖方付给买方结算金。

借入方获得的补偿：

$$\text{结算金}=\frac{\left(\text{参照利率}-\text{协议利率}\right)\times\text{名义本金}\times\dfrac{\text{贷款天数}}{\text{年天数}}}{1+\left(\text{参照利率}\times\dfrac{\text{贷款天数}}{\text{年天数}}\right)}$$

- **分子——**协议利率与参照利率之差所造成的额外利息支出，发生在贷款到期之时。
- **分母——**用参照利率对分子折现至当前时点。
- 用**单利**计算。
- 协议中的参照利率常常选择那些不太容易被操纵的有明确定义的利率，譬如 LIBOR、短期国库券利率等。

LIBOR

- 伦敦银行间同业拆借利率**(London InterBank Offered Rate,**简写**LIBOR)**，是大型国际银行愿意向其他大型国际银行借贷时所要求的利率。
- 它是在伦敦银行内部交易市场上的商业银行对存于非美国银行的美元进行交易时所涉及的利率。
- **LIBOR**常常作为商业贷款、抵押、发行债务利率的基准。同时，浮动利率长期贷款的利率也会在**LIBOR**的基础上确定。
- **LIBOR**也是很多合同的参考利率。

SHIBOR

- 上海银行间同业拆放利率（**Shanghai Interbank Offered Rate**，简称**Shibor**），从**2007**年**1**月**4**日开始正式运行，是由信用等级较高的银行组成报价团自主报出的人民币同业拆出利率计算确定的算术平均利率，是单利、无担保、批发性利率。

- 目前，对社会公布的**Shibor**品种包括隔夜、**1**周、**2**周、**1**个月、**3**个月、**6**个月、**9**个月及**1**年。

- **Shibor**报价银行团现由**18**家商业银行组成。

2015-06-01 09:30

	期限	Shibor(%)		涨跌(BP)
⇨	O/N	1.0270	▼	1.20
⇨	1W	1.9630	▼	0.90
⇨	2W	2.2540	▲	0.30
⇨	1M	2.2900	▲	1.40
⇨	3M	2.8565	▼	0.75
⇨	6M	3.1970	▼	1.40
⇨	9M	3.3560	▼	2.00
⇨	1Y	3.4300	▼	1.40

注：O/N = over night

- **例：** 假设A公司在6个月末需要一笔1000万元的资金，为期3个月，为了锁定资金成本，该公司与某银行签订了一份6×9的远期利率协议，协议利率为4%，名义本金为1000万元。如果3月末市场利率上升为4.5%对A公司有何影响。

- **解：** 在远期利率协议的结算日，A公司可以从银行获得：

$$\frac{(4.5\% - 4\%) \times 1000 \times \frac{90}{360}}{1 + 4.5\% \times \frac{90}{360}} = 1.2361(\text{万元})$$

- A公司按照市场利率4.5%借入一笔1000万元的资金，到期时的利息支出为：

$$1000 \times 4.5\% \times 90/360 = 11.25(\text{万元})$$

- 扣除结算金的累积值，其实际的资金成本（表示为年利率）为

$$\frac{11.25 - 1.2361 \times (1 + 4.5\% \times \frac{90}{360})}{1000} \times \frac{360}{90} = 4\%$$

二、 期货（futures）

- **期货合约**（Futures Contract）：双方同意在将来某个日期按约定的条件（包括价格、交割地点、交割方式等）买卖一定数量标的资产的标准化协议。按标的物的不同，期货合约可以分为
  - **商品期货**：标的物为实物商品(pork bellies, live cattle, sugar, wool, lumber, copper, aluminum, gold, tin……)
  - **金融期货**：标的物为金融工具(stock indices, currencies, Treasury bonds……)

中国期货品种

（1）上海期货交易所：铜、铝、锌、天然橡胶、燃油、黄金、螺纹钢、线材

（2）大连商品交易所：大豆、豆粕、豆油、塑料、棕榈油、玉米、PVC

（3）郑州商品交易所：硬麦、强麦、棉花、白糖、pta、菜籽油、籼稻

（4）中国金融期货交易所：股指期货

- **期货的基本概念：**
  - **标准化：**合约规模，交割地点，交割日期
  - **初始保证金**（initial margin）：（5% - 20%）
  - **维持保证金**（maintenance margin）：
  - **盯市**（mark to market）：每天交易结束时，根据期货价格的涨跌调整保证金账户。

期货交易示例

- 投资者与一家期货经纪公司签订合同后，他以56500元/吨的价格买入20手上海铜（1手为5吨）。合同规定维持保证金为初始保证金的75%，假设这家期货经纪公司上海铜的保证金比率为10%（通常为5-20%之间）。请回答下列问题：

  (1) 初始保证金和维持保证金各是多少?

  (2) 如价格跌至56000元/吨，这时的浮动亏损是多少?需要追加多少保证金?

- 答：

  (1) 初始保证金=56500×5×20×10%=565000

  维持保证金=56500×5×20×10%×75%=423750

  (2) 浮动亏损=(56500-56000)×5×20=50000

- 保证金账户余额为565000-50000=515000。大于维持保证金，故无需追加保证金。

期货与远期的区别

- 远期到期结算，大多数现货。
  - 期货每日反映盈亏状况，大多数对冲平仓。
- 期货具有流动性。
- 期货只适用于特定资产。
- 远期存在信用风险。

三、远期和期货的定价

- 期货的定价与远期的定价相同。
- 远期的定价：计算资产的远期价格
- 远期价格（Forward Price）： 标的物在未来某个时点上的理论价格。
- 定价方法：无套利定价法
- Arbitrage（套利）：低价买入，高价卖出。
- 套利类型：
  - 跨期套利、跨市套利、跨品种套利
  - 正向套利，反向套利

- 正向套利（cash-and-carry arbitrage）：
  - 远期价格 < 交割价格：买入现货，卖出远期。
    - 注：远期价格的高低取决于现价（见后文）。上式表明现价偏低。
- 反向套利（reverse cash-and-carry arbitrage）：
  - 远期价格 > 交割价格：卖空现货，买入远期。
    - 上式表明现价偏高。

- **无套利定价法**的基本思路：构建两种投资组合，若其终值相等，则其现值也一定相等，否则就存在套利机会：
  - 卖出现值较高的投资组合
  - 买入现值较低的投资组合，并持有到期末
  - 赚取无风险利润。

A=1
B=2

A=3
B=3

符号

远期价格 F

多头的价值 f

交割价格 K

股票在当前时间 的价格 S

股票在到期时间 T 的价格 S_T

$t = 0$

T

注：在合约签订之日，$f = 0$，$F = K$

- 远期合约中标的资产的类型：
  - 到期前不产生收益的资产：零息债券
  - 到期前产生已知收益的资产：附息债券
  - 到期前连续产生收益的资产：股票指数

- 到期前不产生收益的资产（r 为无风险利息力）
  - 考虑两种组合：
    - **组合A**：一份远期合约多头，加上现金 Ke^{-rT}
    - **组合B**：一单位标的资产。
  - 在组合A中，现金累积到时间 T 的金额为 K，刚好可用来交割，以换取一单位标的资产。
  - 在时间 T，两个组合都等于一单位标的资产。
  - 根据**无套利原理**：

$$f + Ke^{-rT} = S$$

- 根据**无套利原理**：

$$f + Ke^{-rT} = S$$

- 在合约签订之日，$f = 0$，且 $F = K$，故有：

$$F = Se^{rT}$$

= **现价**的累积值

例： 考虑一份股票远期合约，标的股票不支付红利。假设合约的期限是3个月，股票现在的价格是50元，连续复利的无风险年利率为10%，请计算远期价格。

解： 这份远期合约的合理价格应该为

$$F = 50\mathrm{e}^{0.10\times 0.25} = 51.27$$

- Example: A stock that pays no dividends has a current price of $50. The annual effective risk free rate of return is 5%. Calculate the forward price for purchasing the stock in one year.
- Solution:

$$F = S(1+r) = 50(1.05) = \$52.50$$

例： 考虑一份远期合约多头，其标的证券是剩余期限为6个月的一年期零息债券，交割价格为\$960。

6个月期的无风险年利率（连续复利）为10%。

该债券的现价为\$940。 请计算远期合约多头的价值。

解： 该远期合约多头的价值为

$$f = 940 - 960\,e^{-0.5\times 0.1} = \$26.82$$

当前的卖价　　未来的买价

到期前产生已知收益的资产

- 令已知收益的现值为D，并构建如下两个组合：
  - **组合A**：一份远期合约多头＋现金 Ke^{-rT} 。
  - **组合B**：一单位标的资产＋借款 D。
- 组合A：在时间 T 的价值＝单位标的资产。
- 组合B：标的资产的收益D刚好可以偿还借款D，因此在时间 T，该组合也等于单位标的资产。

$$f + Ke^{-rT} = S - D$$

- 根据**无套利原理**

$$f + Ke^{-rT} = S - D$$

- 在合约签订之日，$f = 0$， 且 $F = K$， 故有：

$$F = (S - D)e^{rT}$$

= 现价的累积值 —收益的累积值

- **Example:** A stock has a current price of $50 and pay a dividend of $2 one year from now. if the annual effective risk-free rate of return is 5%, then what is the forward price for purchasing the stock in one year (just after the dividend is paid)?

- Solution:

$$F = S(1+i) - D_T = 50(1.05) - 2 = \$50.50$$

- **Example**: consider a 10-month forward contract on a stock with a price of \$50. we assume that the risk free interest rate (continuously compounded) is 8% per annum for all maturities. We also assume that the dividends of \$0.75 per share are expected after three months, six months, and nine months. Calculate the forward price.

- **Solution:** The forward price is :

$$F = 50e^{0.08\times 10/12} - 0.75\,(e^{0.08\times(10-3)/12} + e^{0.08\times(10-6)/12} + e^{0.08\times(10-9)/12}) = 51.13$$

例： 一种债券的现货价格为950元，该债券一年期远期合约的交割价格为960元，该债券在6个月末和12个月末都将收到50元的利息，且第二次付息日在远期合约交割日之前。假设6个月期和12个月期的无风险年利率（连续复利）分别为9%和10%，求该远期合约多头的价值。

解： 债券利息的现值为：

$$D = 50e^{-0.09\times 0.5} + 50e^{-0.10\times 1} = 94.79\text{元}$$

该远期合约**多头**的价值为：

$$f = 950 - 94.79 - 960e^{-0.1\times 1} = -13.43\text{元}$$

卖价 - 损失利息 - 支付买价

- 到期前产生连续收益率的资产
  - 假设资产的连续收益率为δ，构建如下两个组合：
    - **组合A：** 一份远期合约多头 + 现金 Ke^{-rT}
    - **组合B：** $e^{-\delta T}$ 单位的资产，且资产的所有收益都再投资于该资产。
  - 组合A在时间 T 的价值等于单位标的资产的价值。
  - 组合B的资产数量在时刻 T 也等于单位标的资产。

- 根据**无套利原理**:

$$f + Ke^{-rT} = Se^{-\delta T}$$

- 在合约签订之日，$f = 0$，且 $F = K$，故有

$$F = Se^{(r-\delta)T}$$

= 现价按净利率计算的累积值

例： 股票现在的市场价格是30元，年平均连续红利率为5%，无风险连续复利为10%，若该股票6个月期的远期合约的交割价格为35元，求远期价格和该远期合约的价值。

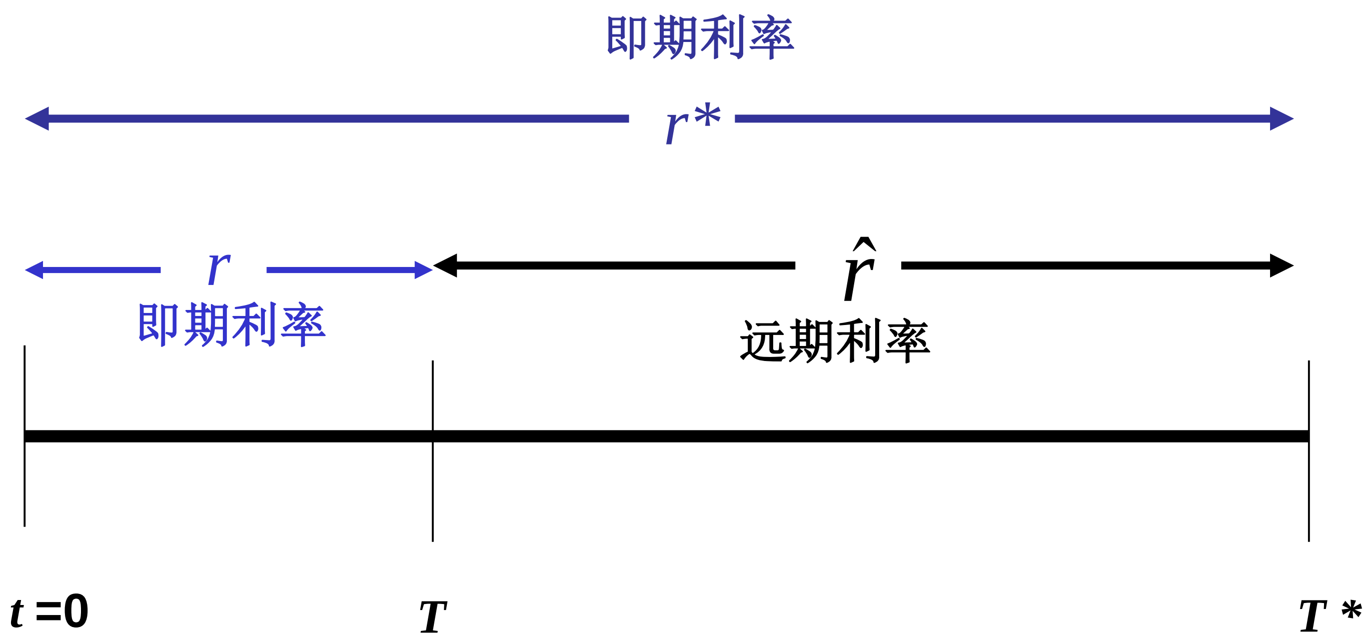
解： 远期价格为：

$$F = Se^{(r-\delta)T} = 30e^{(0.1-0.05)\times 0.5} = 30.76$$

多头的价值 f 为（把T时的价值折现到 0 时）：

$$f = (F-K)e^{-rT} = (30.67-35)e^{-0.10\times 0.5} = -4.03$$

- 例：远期利率协议的定价：利率均为连续复利。



$$e^{r^* T^*} = e^{rT} e^{\hat{r}(T^* - T)} \quad \Rightarrow \quad \hat{r} = \frac{r^* T^* - rT}{T^* - T}$$

例： 假设2年期的即期年利率为10%，3年期的即期年利率为11%，均为连续复利。本金为100万元的2年×3年远期利率协议的合同利率为12%，请计算该远期利率协议在理论上的合同利率以及多头的价值。

解： 理论上的合同利率应为：

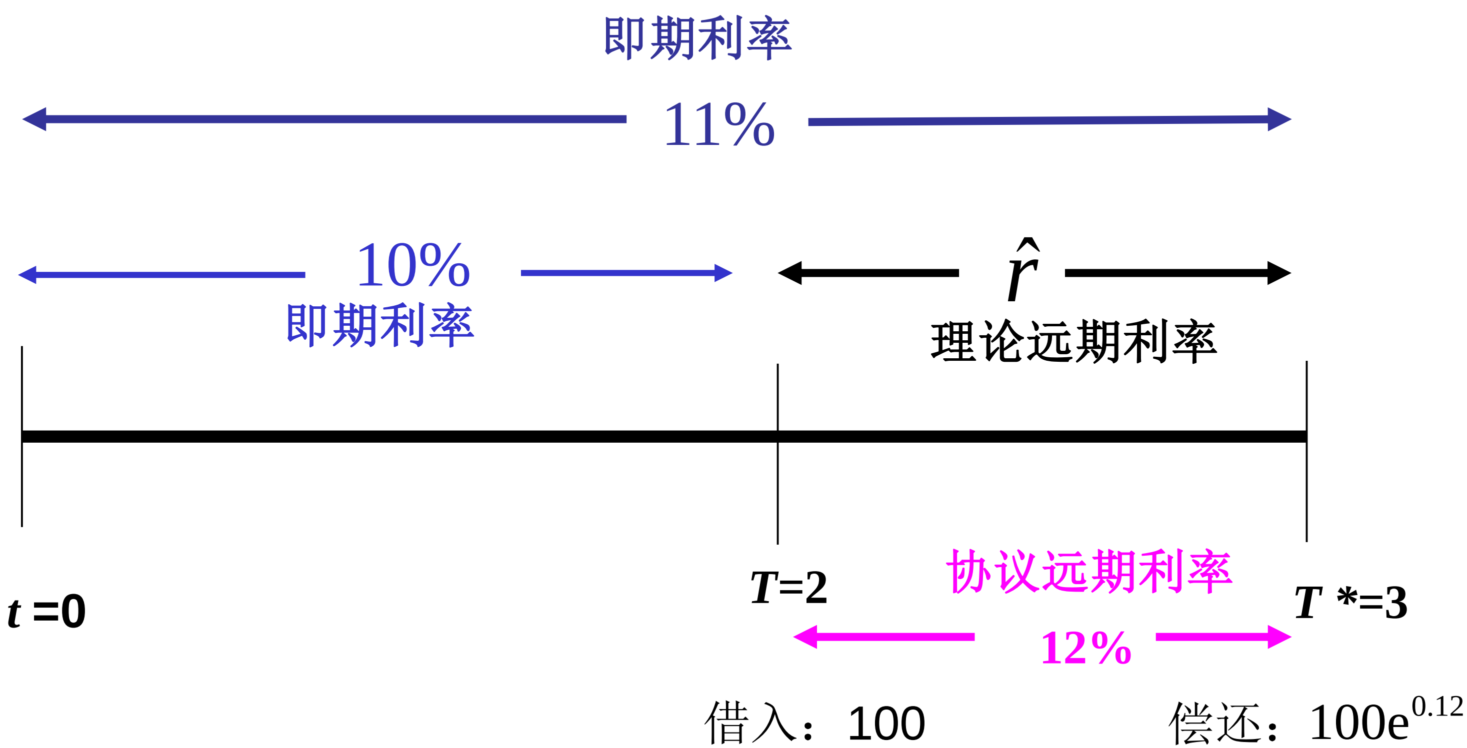
$$r_F = \hat{r} = \frac{0.11\times 3 - 0.10\times 2}{3-2} = 13\%$$

该合约的价值为（见下页）：

该合约多头的价值为：

$$f=100万\times e^{-0.10\times 2}-100万\times e^{0.12}e^{-0.11\times 3}=8146.51元$$

借入金额的现值　　　偿还金额的现值



Exercise

- Suppose that the three-month LIBOR rate is 5% and six-month LIBOR rate is 5.5% with continuous compounding. Consider an FRA (forward rate agreement) where we will receive a rate of 7%, measured with quarterly compounding, on a principal of 1 million between the end of month 3 and the end of month 6. calculate the value of the FRA.

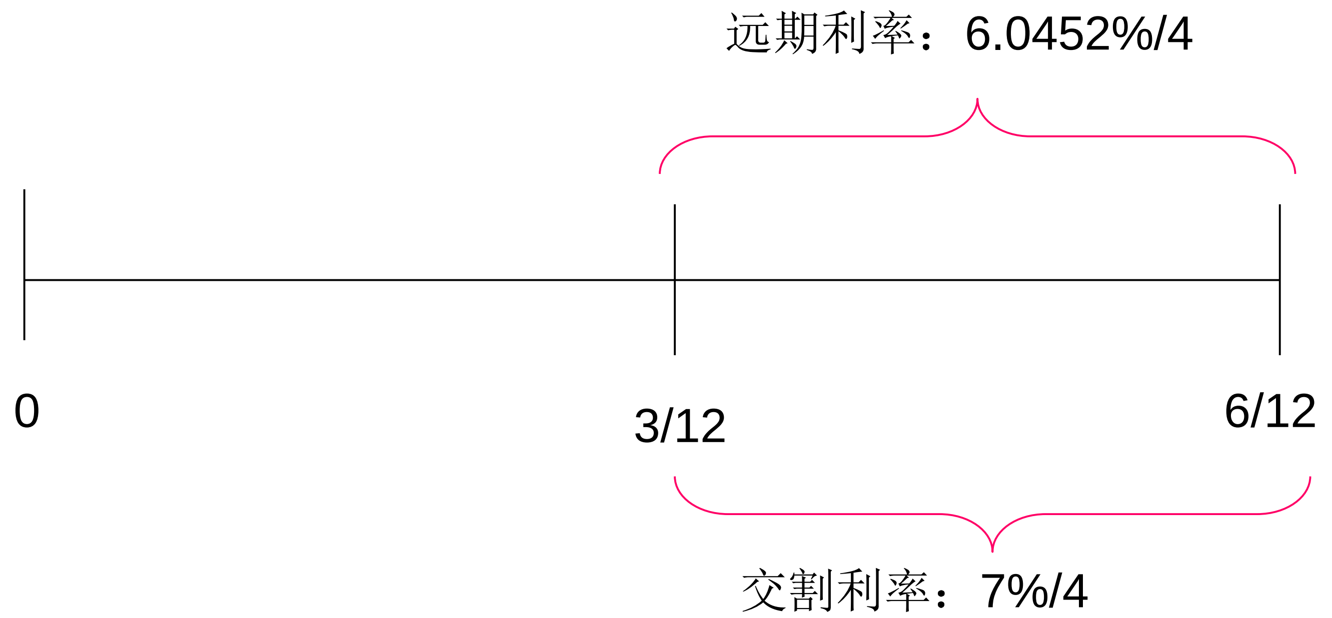
- **Solution**: the forward rate is

$(5.5\% \times 6/12 - 5\% \times 3/12)/(6/12 - 3/12) = 6\%$ with continuous compounding, or 4*((exp(0.06))^(1/4)-1) = 6.0452% with quarterly compounding.

- The value of FRA is

$$1000000\times\left(\frac{7\%}{4}-\frac{6.0452\%}{4}\right)\times e^{-0.5\times5.5\%}=2322$$

注：（1）用季度实际利率，FRA的期限为1个季度
（2）括号中表示6个月末的价值，最后一项表示折现到当前时间



四、合成远期

1、合成远期

注：假设股票到期前不产生收益，与教材使用的假设不同

现价：100

远期价格：$100 \times 1.05 = 105$

0　　　　　　　　　　　　　　　　1

假设：无风险年实际利率5%。想在 T 时拥有单位股票，两种方法：

（1）**远期：**在 1 时支付 105 获得单位股票

（2）**合成远期：**在 0 时借款 100购买单位股票，在1 时偿还105，获得单位股票

远期＝股票－零息债券

2、正向套保（cash and carry hedge）：买入标的资产，卖出远期（对远期空头进行套保）。

- **假设投资者是一个股票远期空头**，即同意在时间 T 按远期价格105出售股票。（面临的风险：股价上升）
- 为了对此空头进行套保，可以生成一个合成远期多头（出售零息债券（即借钱100）买入股票）：

合成远期＝股票－零息债券

- 一多一空，风险为零（下页图示）。

正向套保图示：无论股价如何变化，均无风险

合成远期多头

借款100
购买股票

拥有单位股票，
偿还借款：105

0 1

卖出单位股票，
获得：105

远期空头

假设：无风险年实际利率5%

3、反向套保（reverse cash and carry hedge）：卖出标的资产，买入远期（对远期多头套保）。

- **假设投资者是一个股票**远期多头，即同意在时间 T 按远期价格105买入股票。（面临的风险：股价下跌）。
- 为了对此多头进行套保，可以生成一个**合成远期空头**（出售股票，并用所得资金购买零息债券）：

$$-\text{远期} = -\text{股票} + \text{零息债券}$$

- 一空一多，风险为零（下页图示）。

反向套保图示：无论股价如何变化，均无风险

合成远期空头

卖空股票，并投资于零息债券：100

零息债券到期，获得：105

0 1

购买股票支付105

远期多头

假设：无风险年实际利率5%

4、正向套利（假设股票到期前不产生收益）

现价：100　　　　　　　　　　　　远期价格：105

0　　　　　　　　　　　　　　　　1

套利机会：交割价格 $K = 110 > $ 远期价格 $F = 105$

假设：无风险年实际利率5%

套利：

在 0 时，借款100，低价购买单位股票（合成远期多头）

在 1 时，高价卖出股票远期（远期空头），获得110；偿还借款105

在 1 时，利润 = 110 – 105 = 5

5、反向套利（假设股票到期前不产生收益）

股票现价：100

远期价格：105

0

1

套利机会：交割价格 K =102 < 远期价格F = 105

假设：无风险年实际利率5%

套利：

在 0 时，高价卖空股票，获得 100，并投资于零息债券（合成远期空头）。

在 1 时，低价买入股票远期（远期多头），支付102，零息债券到期获得105

在 1 时，利润 = 105 – 102 = 3

五、互换（Swap）

- **互换：**交易双方在约定的时间内交换一系列现金流的合约。
  - 注：远期只交换一次现金流。
- **作用：**为一系列不确定的现金流进行套保。

例：假设W公司计划在未来两年购买10000桶石油，石油的远期价格和即期利率如下：

年度	1	2
远期价格	80	82
即期利率	5%	5.6%

- 为了锁定石油价格，W公司可以购买两份远期合约：
  - 在第一年末每桶支付80美元
  - 在第二年末每桶支付82美元。
- 石油价格的现值为 $\frac{80}{1.05}+\frac{82}{1.056^2}=149.7241$
  - 此即预付互换的价格
- **预付互换（prepaid swap）**——当前时刻一次性支付石油的价款，在未来交割一系列的石油。

- 为避免信用风险，W公司希望在交割时再支付石油价款。通常采取**等额支付**的方式，即每年支付的价款相等。此价款即为**互换的价格**。假设为 X，则

$$\frac{X}{1.05}+\frac{X}{1.056^2}=149.7241 \Rightarrow \quad X=80.97$$

- 这种结算方式为**实物结算**。

- **现金结算：**假设现货价格为 X
  - W公司从市场购买石油，并获得石油公司的补偿

    X－ 80.97
  - W公司的实际成本 = $X-(X-80.97) = 80.97$

- 如果把互换价格 80.97 美元与两个远期价格（80美元和85美元）比较：
  - 在第一年末，W公司多支付了0.97美元
  - 在第二年末，W公司少支付了1.03美元。
- 故互换等价于两个远期多头，并附加一个远期利率协议，该协议：
  - 第一年末向石油公司支付0.97美元
  - 第二年末获得1.03美元的补偿。

- 该协议隐含的一年期远期利率为

$$1.03/0.97 - 1 = 6.2\%$$

- 此利率实际上是两个即期利率所隐含的远期利率
  - 1年期的即期利率为5％，2年期的即期利率为6％
  - 故1年后的远期利率 i 应该满足下述关系式：

$$(1+0.05)(1+i)=(1+0.056)^2$$

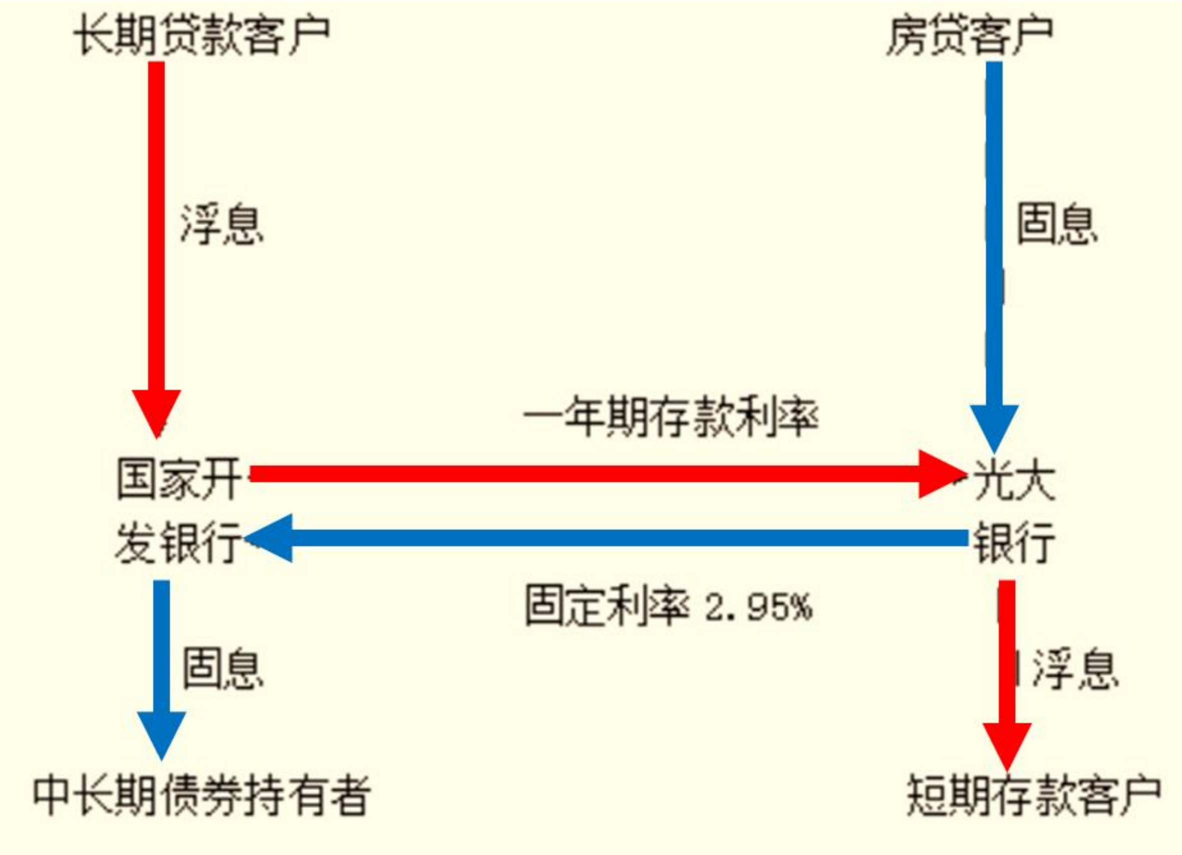
$$i=6.2\%$$

- **结论：**
  - 互换等价于若干个远期，并附加一个远期利率协议。
  - 远期合约和远期利率协议的初始价值为零，故互换的初始价值也为零。
  - 当市场条件发生变化，互换合约的价值将不再等于零。

- **利率互换（ Interest Rate Swaps:）**：双方同意在未来的 一定期限内根据相同的名义本金交换现金流。
  - 一方的现金流根据浮动利率计算。
  - 另一方的现金流根据固定利率计算。
- 原因：双方在固定利率和浮动利率市场上具有比较优势 (comparative advantage)。

利率互换案例：

2006 年 2 月，国家开发银行与光大银行完成第一笔人民币利率互换交易，协议的名义本金为 50 亿，期限十年，光大向国开行支付 2.95%的固定利率，国开行向光大支付浮动利率（一年期定存利率）。



- 例：A、B公司都想借入5年期的100万元的借款，A想借入浮动利率借款，B想借入固定利率借款。由于信用等级不同，故市场向它们提供的利率也不同：

	固定利率	浮动利率
A公司	10%	6个月期LIBOR + 1%
B公司	12%	6个月期LIBOR + 2%

  - 不互换：A和B的利息成本为 (LIBOR+1%) +12％。
  - 互换：A和B的利息成本为10% + (LIBOR + 2%)。

- 通过互换，双方的总利息成本可以降低 1％

- 假设互换所带来的利益双方各分享一半，则双方都将使筹资成本降低 0. 5%。
  - A的最终利息成本为

    （LIBOR + 1%）－ 0.5% = LIBOR + 0.5％

  - B的最终利息成本为

    12％－0.5% ＝ 11.5％

利率互换的定价：

- 在第 i 个利息支付日（即在时间t_i），公司收取浮动利息 k_i^*，支出固定利息 k，该现金流的现值为：

- $$(k_i^* - k)e^{-r_i t_i}$$ （远期利率协议的价值）

- 互换的价值就是上述现金流的现值之和：$\sum_{i=1}^{n}(k_i^* - k)e^{-r_i t_i}$

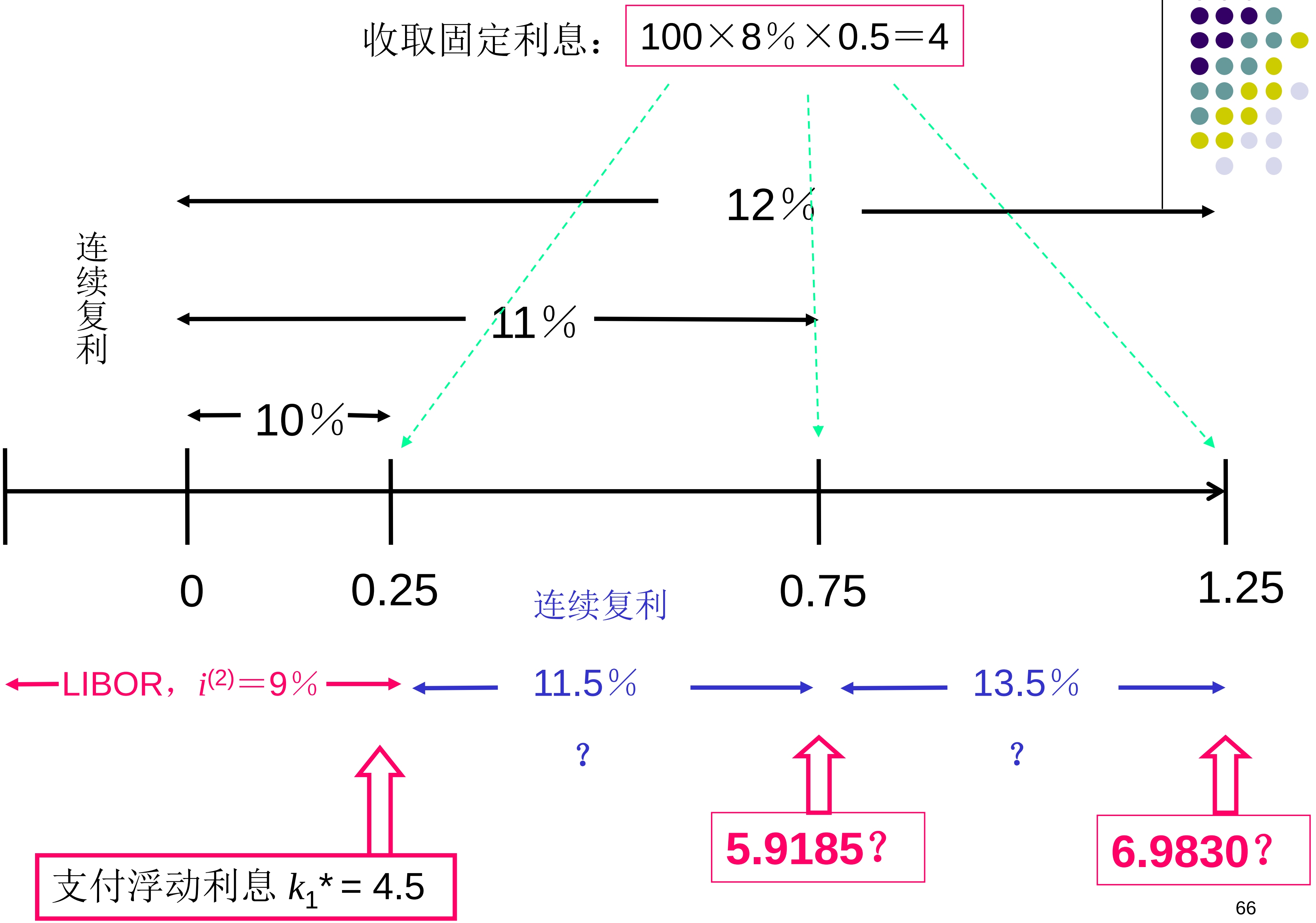
- 合约在生效之时的价值为零，由此得**互换利率**：

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i^* e^{-r_i t_i}}{\sum_{i=1}^{n} e^{-r_i t_i}}$$

例：

- 一笔互换合约中，某银行支出6个月期的LIBOR，同时收取8％的年固定利率（每半年支付一次利息），名义本金为100万元。
- 互换还有1.25年的时间到期，其中3个月、9个月和15个月期的即期利率（连续复利）分别为10％、11％和12％。
- 上一次利息支付日的6个月LIBOR为9％（每半年支付一次利息）。

请计算该利率互换对银行而言，当前的价值是多少。


收取固定利息：100×8%×0.5=4
12%
连续复利
11%
10%
0
0.25
0.75
1.25
连续复利
LIBOR，$i^{(2)}$=9%
11.5%
13.5%
?
?
5.9185?
6.9830?
支付浮动利息 k_1^* = 4.5

解：第一笔交换对银行的价值：

$$\left(4-4.5\right)e^{-0.1\times 0.25}=-0.4877$$

- 第二笔交换对银行的价值:
  - 3个月到9个月的远期利率为

$$R_2=\frac{0.11\times0.75-0.10\times0.25}{0.75-0.25}=0.115$$

  - 9月后银行支付的浮动利息为 $100(e^{0.115\times0.5}-1)=5.9185$
  - 9个月后第二笔交换对银行的价值为

$$\left[4-5.9185\right]e^{-0.11\times0.75}=-1.7666$$

- 第三笔交换对银行的价值:
  - 从9个月末到15个月末的远期利率为

$$R_3 = \frac{0.12\times1.25-0.11\times0.75}{1.25-0.75} = 0.135$$

  - 15个月后银行支付的浮动利息为 $100(e^{0.135\times0.5}-1) = 6.9830$
  - 15个月后第三笔交换的价值为 $[4-6.9830]e^{-0.12\times1.25} = -2.5675$
  - 上述三笔现金流的价值之和就是利率互换的价值，即为

$$-0.4877-1.7666-2.5675=-4.8218$$

例（问题与上例相同，但解法简单，了解）

- 一笔互换合约中，某银行支付6个月期的LIBOR，同时收取8%的年固定利率（每半年支付一次利息），名义本金为100万元。

- 互换还有1.25年的时间到期。3个月、9个月和15个月期的即期利率（连续复利）分别为10%、11%和12%。

- 上一次利息支付日的6个月LIBOR为9%（每半年支付一次利息）。

请计算该利率互换对银行而言的当前价值 。

解：银行每次收取的固定利息为：

$$k = 100 \times 8\% \times 0.5 = 4$$

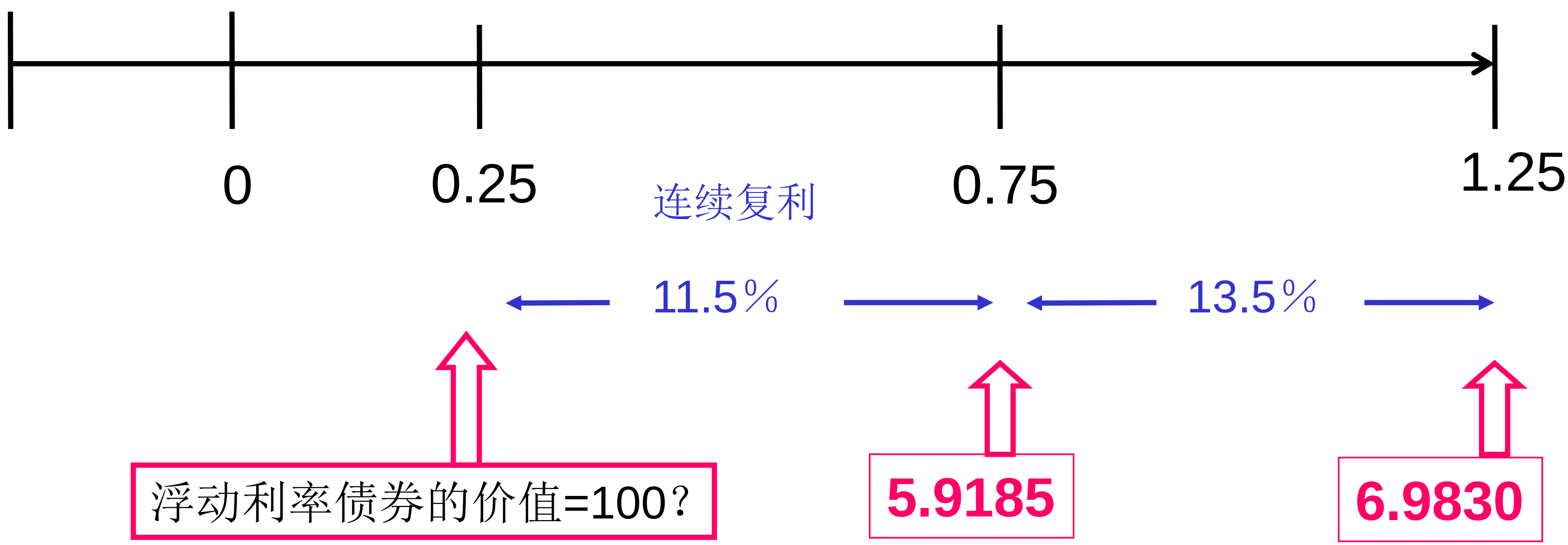
- 与该固定利息收入所对应的固定利率债券的价值为：

$$B_{固} = 4e^{-0.1\times0.25} + 4e^{-0.11\times0.75} + 104e^{-0.12\times1.25} = 97.09812$$

- 在下一个利息支付日，银行支付的浮动利息为：

$$k_1^* = 100 \times 9\% \times 0.5 = 4.5$$

验证：在3个月末（利息支付之后），浮动利率债券的价值为100



$$5.9185 \times e^{-0.5\times 0.115} + (100 + 6.9830) \times e^{-0.5\times 0.135} e^{-0.5\times 0.115} = 100$$

- 故浮动利率债券当前的价值为：

$$B_{浮}=(100+4.5)\mathrm{e}^{-0.1\times0.25}=101.91989$$

- 利率互换对银行的价值为：

$$\mathrm{B}_{固}-\mathrm{B}_{浮}=97.09812-101.91989=-4.8218$$

Exercise

- Suppose that a financial institution pays six-month LIBOR and receives 8% per annum (with semiannual compounding) on a swap with notional principal of $100 million and the remaining payment date are in 3, 9, and 15 months. The swap has a remaining life of 15 months. The LIBOR rates with continuous compounding for 3-month, 9-month, and 15-month maturities are 10%, 10.5% and 11%, respectively. The 6-month LIBOR rate at the last payment date was 10.2% with semiannual compounding. Calculate the value of the swap.

Solution

- k=\$4 million and k^*=\$5.1 million, so that

$$B_{\text{fix}} = 4e^{-0.1\times 3/12} + 4e^{-0.105\times 9/12} + 104e^{-0.11\times 15/12} = 98.24$$

$$B_{\text{floating}} = (5.1+100)e^{-0.1\times 3/12} = 102.51$$

$$\text{value of the swap} = 98.24 - 102.51 = -4.27$$