债务偿还方法
Repaying Loans

孟生旺

中国人民大学统计学院

http://blog.sina.com.cn/mengshw

主要内容

- 分期偿还法（**amortization method**）
  - 等额
  - 变额
- 偿债基金法（**sinking fund method**）
  - 等额
  - 变额
- 抵押贷款（略）

债务偿还的两种方法

- 分期偿还法（**amortization method**）：借款人分期偿还贷款，在每次偿还的金额中，包括：
  - 当期利息
  - 一部分本金
- 偿债基金法（**sinking fund method**）：借款人在贷款期间：
  - 分期偿还利息
  - 积累偿债基金，到期时一次性偿还贷款本金。

一、等额分期偿还(level installment payments)

- 在等额分期偿还法中，需要解决的问题包括：
  - （1）每次偿还的金额(loan payments)是多少？
  - （2）未偿还的本金余额（loan balance，loan outstanding, principal outstanding）是多少？
  - （3）在每次偿还的金额中，利息和本金分别是多少？

1．每次偿还的金额

- 贷款的本金是 L_0
- 期限为 n 年
- 年实际利率为 i
- 每年末等额偿还 R
- 则每次偿还的金额 R 可表示为（**level loan payment**）

$$Ra_{\overline{n}|i} = L_0 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{L_0}{a_{\overline{n}|i}}$$

2．未偿还本金余额

- **问题：** 每年偿还 R，第 k 年末的贷款余额？

- 方法：
  - 将来法（**prospective method**）
  - 过去法（**retrospective method**）

- 方法一：将来法（prospective method）
  - 把将来需要偿还的金额折算成计算日的现值，即得未偿还本金余额。
  - 第 k 年末，将来还需偿还 $(n-k)$ 次，故未偿还本金余额为

$$L_k = R a_{\overline{n-k}|}$$

- 方法二：过去法（retrospective method）
  - 从原始贷款本金的累积值中减去过去已付款项的累积值。
  - 原始贷款本金累积到第 ***k*** 年末的价值：$L_0(1+i)^k$
  - 已偿还的款项累积到第 ***k*** 年末的价值：$Rs_{\overline{k}|}$
  - 未偿还本金余额：

$$L_k = L_0(1+i)^k - Rs_{\overline{k}|}$$

- **证明：**将来法与过去法等价。

$$L_k = L_0(1+i)^k - Rs_{\overline{k|}} \qquad \text{（过去法）}$$

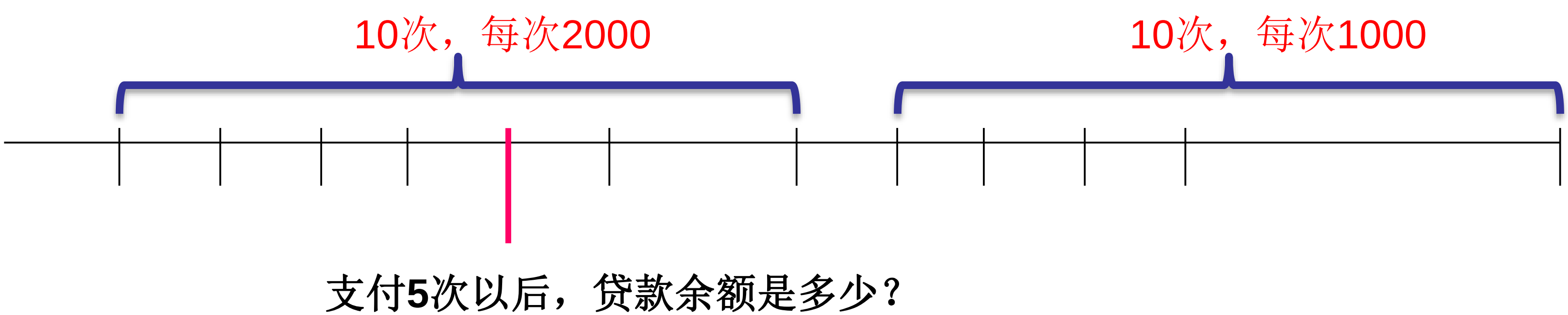
$$= (1+i)^k Ra_{\overline{n|}} - Rs_{\overline{k|}}$$

$$= R\left[(1+i)^k \cdot \frac{1-v^n}{i} - \frac{(1+i)^k - 1}{i}\right] \qquad = R \cdot \frac{1-v^{n-k}}{i}$$

$$= Ra_{\overline{n-k|}i} \qquad \text{（将来法）}$$

Example：

- **A loan is being repaid with 10 payments of \$2000 followed by 10 payments of \$1000 at the end of each half-year. If the nominal rate of interest convertible semiannually is 10%, find the outstanding loan balance immediately after five payments have been made by both the prospective method and the retrospective method.**



解：

每半年的实际利率为5%；

（1）将来法：未偿还贷款余额为

$$L_5 = 1000(a_{\overline{15|}} + a_{\overline{5|}}) = 14709$$

贷款本金为

$$L_0 = 1000(a_{\overline{20|}} + a_{\overline{10|}}) = 20184$$

（2）过去法：未偿还贷款余额为

$$L_5 = 20184(1.05)^5 - 2000 s_{\overline{5|}} = 14709$$

Example:

- A loan is being repaid with 20 annual payments of $1000 each.
- At the time of the fifth payment, the borrower wishes to pay an extra $2000 and then repay the balance over 12 years with a revised annual payment.
- If the effective rate of interest is 9%, find the amount of revised annual payment.

- **解：** 由将来法，5年后的余额为

$$L_5 = 1000a_{\overline{15|}} = 8060.70$$

如借款人加付2000，则余额成为6060.70。

假设修正付款额为 X，价值方程为

$$Xa_{\overline{12|}} = 6060.70$$

故

$$X = \frac{6060.70}{7.1607} = 846.38$$

3、每期偿还的本金和利息：本息分解

- **基本原理：**还款额优先支付利息，剩余部分偿还本金。
- 设第 t 年末的还款额为 R，利息部分为 I_t，本金部分为P_t，记 L_{t-1}为第 t - 1年末的未偿还贷款余额，则有

$$I_t = iL_{t-1} = iRa_{\overline{n-t+1}|i} = R(1-v^{n-t+1})$$

t 的减函数

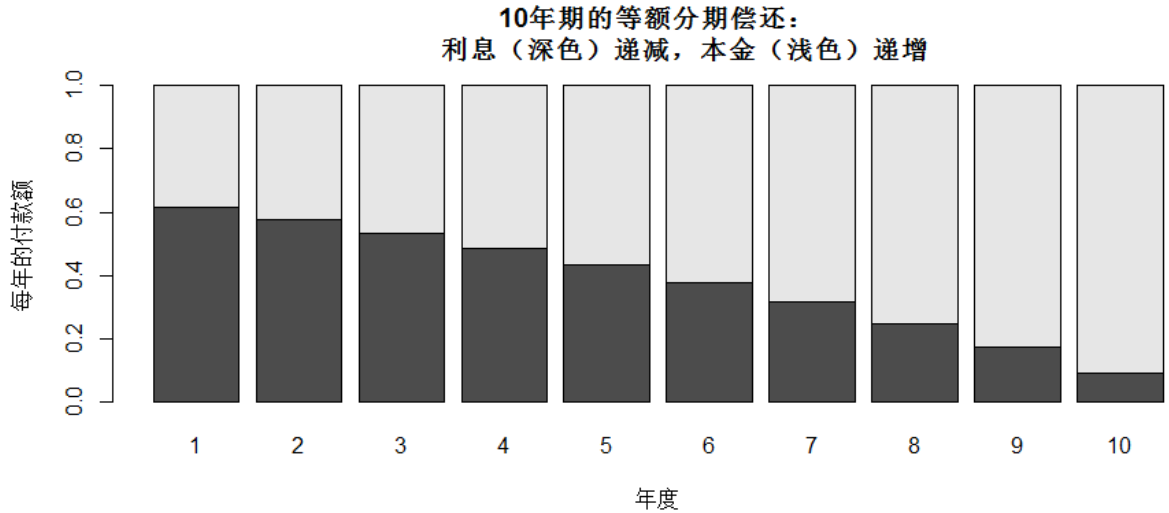
$$P_t = R - I_t = R \cdot v^{n-t+1}$$

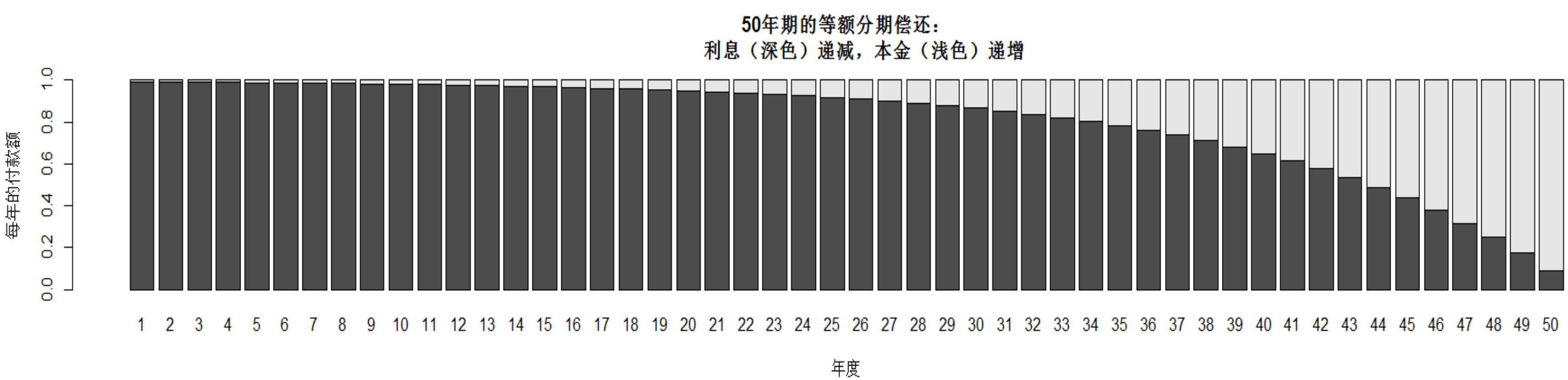
t 的增函数

分期偿还表

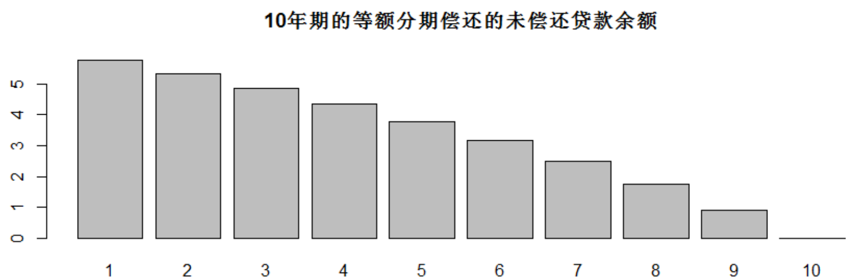
时间 t	还款额	利息 I_t	本金 P_t	未偿还贷款余额
0				$a_{\overline{n}\rvert i}$
1	1	$ia_{\overline{n}\rvert i}=1-v^n$	v^n	$a_{\overline{n-1}\rvert i}$
2	1	$ia_{\overline{n-1}\rvert i}=1-v^{n-1}$	v^{n-1}	$a_{\overline{n-2}\rvert i}$
…	…	…	…	…
t	1	$ia_{\overline{n-t+1}\rvert i}=1-v^{n-t+1}$	v^{n-t+1}	$a_{\overline{n-t}\rvert i}$
…	…	…	…	…
$n-1$	1	$ia_{\overline{2}\rvert i}=1-v^2$	v^2	$a_{\overline{1}\rvert i}$
n	1	$ia_{\overline{1}\rvert i}=1-v$	v	0
总和	n	$n-a_{\overline{n}\rvert i}$	$a_{\overline{n}\rvert i}$	

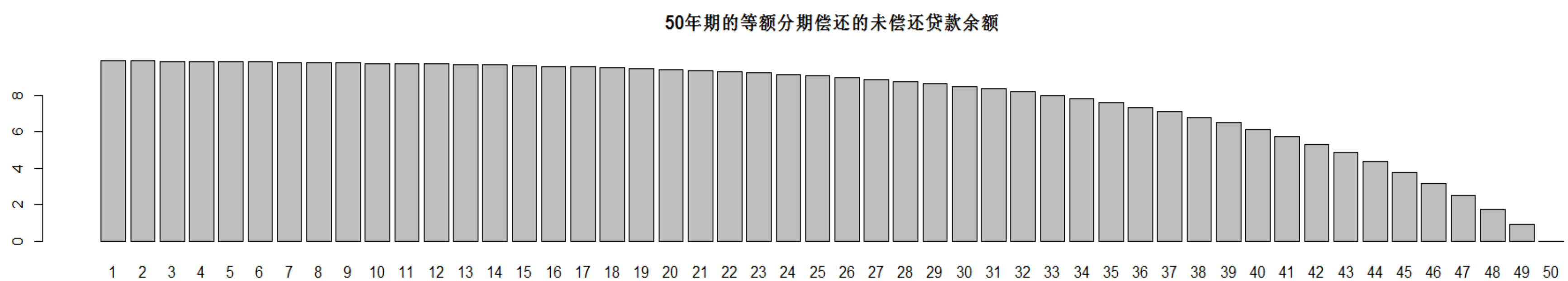
递减　　几何递增　　将来法






```
i=0.1
n=20
v=(1+i)^(-1)
I=P=B=NULL
for (k in 1:n){
  I[k]=1-v^(n-k+1)
  P[k]=v^(n-k+1)
  B[k]=(1-v^(n-k))/i
}
dat=rbind(interest=I,principal=P)
barplot(dat,names.arg=1:20,main='20年期的等额分期偿还：
      利息（深色）递减，本金（浅色）递增',xlab='年度',ylab='每年的付款额')
```






```
i=0.1
n=20
v=(1+i)^(-1)
I=P=B=NULL
for (k in 1:n){                    B[k]=(1-v^(n-k))/i}
barplot(B,names.arg=1:20,main='20年期的等额分期偿还的未偿还贷款余额')
```

例：一笔贷款的期限为2年，每季度末等额偿还一次，每年复利4次的年贷款利率为6%，如果第一年末偿还的本金为2000元，请计算在第二年末应该偿还的本金。

解：季度实际利率为 $i = 1.5\%$

第1年末（第4次）偿还的本金：$P_4 = Rv^{8-4+1} = Rv^5$

第2年末（第8次）偿还的本金：$P_8 = Rv^{8-8+1} = Rv$

所以$P_8 / P_4 = v^{-4} = (1 + i)^4$，即

$$P_8 = P_4\,(1 + i)^4 = 2000(1.015)^4 = 2122.73\text{（元）}$$

Example:

- A $1000 loan is being repaid by payments of $100 at the end of each **quarter** for as long as necessary, plus a smaller final payment. If the nominal rate of interest **convertible quarterly is 16%**, find the amount of **principle and interest** in the fourth payment.

- **解：** 第三次还款后的未偿还贷款余额为

$$L_3 = 1000(1.04)^3 - 100 s_{\overline{3}|0.04} = 812.70$$

- 从而有

$$I_4 = 0.04 \times 812.70 = 32.51$$

$$P_4 = 100 - 32.15 = 67.49$$

- **注意：** 此例无需算出最后一次付款的时期与金额。
- 注：另一种解法（了解）

$$1000 = 100 a_{\overline{n}|0.04} \Rightarrow n = 13.02392$$

$$P_t = 100 v^{n-t+1} \quad \Rightarrow P_4 = 100 v^{13.02392-4+1} = 67.49$$

Exercise：

- A loan is being amortized by means of level monthly payments at an annual effective interest rate of 8%. The amount of principal repaid in the 12-th payment is 1000 and the amount of principal repaid in the t-th payment is 3700. Calculate t.

- 月实际利率为 $j=(1+8\%)^{1/12}-1=0.006434$

- 第**12**次付款中的本金为（***R***为每次的付款额，***n***为付款总次数）

$$1000=R(1+0.006434)^{-(n-12+1)}$$

- 第***t***次付款中的本金为

$$3700=R(1+0.006434)^{-(n-t+1)}$$

- 解上述方程组即得 ***t* =216**

Exercise:

- A borrows $10,000 from B and agrees to repay it with equal **quarterly** installment of principle and interest at **8%, convertible quarterly** over six years.
- At the end of two years B sells the right to receive future payments to C at a price, which produces a yield rate of 10% convertible quarterly for C.
- Find the total amount of interest received: (1) by C, and (2) by B.

				2年，8次			4年，16次	
A	收入	10000						
	支出		528.71	…	528.71	528.71	…	528.71
B	收入		528.71	…	528.71 X			
	支出	10000						
C	收入					528.71	…	528.71
	支出				X			

$$R = \frac{10000}{a_{\overline{24}|0.02}} = 528.71$$

$$X = 528.71 a_{\overline{16}|0.025} = 6902.31$$

解：

- 六年中A的每次还款额为

$$\frac{10,000}{a_{\overline{24}|0.02}}=\frac{10,000}{18.9139}=528.71$$

- C的利息

C的总收入： 16(528.71)＝8459.36

C的买价（支出）： $X=528.71a_{\overline{16}|0.025}=6902.31$

从而C的利息为：

8459.36–6902.31=1557.05

- **B的利息**

B在前2年的总收入为

8×528.71=4229.68（A偿还的金额）

6902.31（从C获得的资金，卖价）

B在期初借出的资金为10000元

故B的利息收入为

4229.68 + 6902.30-10000 = 1131.99

Exercise：

- **An amount is invested at an annual effective rate of interest i which is just sufficient to pay 1 at the end of each year for n years. In the first year the fund actually earns rate i and 1 is paid at the end of the first year. However, in the second year the fund earns rate j, where $j > i$. Find the revised payment which could be made at the ends of year 2 through n;**
  - **(1) Assuming the rate earned reverts back to i again after this one year;**
  - **(2) Assuming the rate earned remains j for the rest of n-year period.**

第1年初的投资额为： $a_{\overline{n}|i}$

- **（1）第2年末，在付款发生前，下述两种方法计算的余额相等**

左边：未来n-1次付款的现值（含第2年末 的1次支付）

$$X\ \ddot{a}_{\overline{n-1}|i} = a_{\overline{n-1}|i} \times (1+j)$$

右边：第1年末的价值按j累积1年，即为第2年末的累积值

$$X(1+i)a_{\overline{n-1}|i} = (1+j)a_{\overline{n-1}|i}$$

$$X = \frac{1+j}{1+i} > 1$$

- (2)第1年末，下述两种方法计算的余额相等

$$Ya_{\overline{n-1|}\, j} = a_{\overline{n-1|}\, i}$$

即有

$$Y = \frac{a_{\overline{n-1|}i}}{a_{\overline{n-1|}j}}$$

***Y*大于1还是小于1？与*X* 比较哪个大？**

二、等额偿债基金

- **含义：** 借款人分期偿还贷款利息(service payment of the loan, generally equals the amount of interest due)，同时积累一笔偿债基金，用于到期时偿还贷款本金。
- **例：** 假设某人从银行获得10000元的贷款，期限为 5 年，年利率为 6 %。双方约定：

（ 1 ）借款人每年末向银行支付600元利息；

（ 2 ）借款人在银行开设一个存款帐户，每年末向该帐户存入1791.76元，该帐户按5.5％的利率计算利息。到第 5 年末，该帐户的累计余额正好是10000元，用于偿还贷款本金。

  - 借款人在银行开设的该帐户就是**偿债基金（sinking fund）**。

等额偿债基金法需要解决的问题

- 借款人在每年末的付款总金额，包括：
  - 向偿债基金的储蓄额
  - 支付的贷款利息
- 每年末的贷款净额。

符号:

L_0　原始贷款本金

i　贷款年利率

n　贷款期限

I　借款人在每年末名义上支付的利息，即

$$I = iL_0$$

j　偿债基金的利率

D　借款人每年末向偿债基金的储蓄额

借款人在每年末的付款总额：

假设借款人每年末向偿债基金的储蓄额为***D***，则

$$Ds_{\overline{n}|j} = L_0 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{L_0}{s_{\overline{n}|j}}$$

因此，借款人在每年末的付款总金额为

$$I + D$$

每年末的贷款净额：

偿债基金在第 ***k*** 年末的累积值为

$$D \cdot s_{\overline{k|}j}$$

第 ***k*** 年末的贷款净额为

$$L_0 - Ds_{\overline{k|}j}$$

特例：偿债基金利率 j = 贷款利率 i

当 $j = i$ 时，借款人在每年末支付的总金额为

$$I + D = L_0\left(i + \frac{1}{s_{\overline{n}|i}}\right) = \frac{L_0}{a_{\overline{n}|i}} = R$$ （等额分期偿还金额）

因为 $$\boxed{\left(i + \frac{1}{s_{\overline{n}|i}}\right) = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}}$$

结论：当 $j = i$ 时，等额分期偿还法 = 等额偿债基金法

- 问题：对借款人而言，下列哪种贷款的成本低？
  - 分期偿还法：贷款利率为 i
  - 偿债基金法：贷款利率为 i，偿债基金利率为 j，$i > j$

例

- 假设：两笔贷款的本金均为10000元，期限均为5年，但偿还方式不同：
  - 第一笔：采用偿债基金方法偿还，贷款利率为6%，偿债基金利率为5%。
  - 第二笔：采用等额分期方法偿还。
- 问题：当第二笔贷款的利率为多少时，两笔贷款对借款人而言是等价的。

对于第一笔贷款（偿债基金法），借款人在每年末需要支付的金额为

$$I + D = L_0\left(i + \frac{1}{s_{\overline{n|}j}}\right) \quad = 10000\left(0.06 + \frac{1}{s_{\overline{5|}0.05}}\right) = 2409.75$$

对于第二笔贷款（分期偿还法），假设其利率为r，则借款人在每年末需要支付的金额为

$$R=\frac{L_0}{a_{\overline{n}|r}}=\frac{10000}{a_{\overline{5}|r}}$$

令此式等于2409.75，则有

$$a_{\overline{5}|r}=\frac{10000}{2409.75}=4.1498 \Longrightarrow r=6.552\%$$

注：在两种方法等价的情况下，等额分期偿还法的贷款利率（6.552%）大于偿债基金法中的贷款利率（6%）。

Sinking fund loan general equation of value

$$L_0(1+i)^n = S \times s_{\overline{n}|i} + D \times s_{\overline{n}|j}$$

S: **service payment, may not equal the amount of interest due.**

D: **sinking fund payment**

i: **loan interest rate**

j: **sinking fund interest rate**

Example (FM, example5.22, P156)

- **A loan of $10000 is repaid annually over 10 years using the sinking fund method. Interest on the loan is charged at an annual effective rate of 5%, but the lender requires a service payment of $600 at the end of each year. Determine the level annual sinking fund payment if the sinking fund credits interest at an annual effective interest rate of 4%.**

$$10000(1+0.05)^{10} = 600 s_{\overline{10}|5\%} + D \times s_{\overline{10}|4\%} \Rightarrow D = \$728.15$$

```
## 该笔贷款的实际利率为 5.52%:
f = function(i)  1328.15 * (1 - (1 + i)^(-10))/i - 10000
uniroot(f, c(-0.05, 0.08))$root
## [1] 0.0552217
```

注：服务费增加，实际利率会降低。如：增加到 ***800，D = 518.62，****实际利率为* ***5.37%***

等额分期偿还与等额偿债基金的比较

- 相同点：定期、等额。
- 不同点：已偿还本金的计息方式不同。
  - **等额分期偿还法：** 已经偿还的本金按贷款利率 i 计息。

$$L_k = L_0(1+i)^k - Rs_{\overline{k|}\,i}$$

  - **等额偿债基金法：** 已经偿还的本金（即存入偿债基金的金额）按利率 j 计息。$L_k = L_0 - Ds_{\overline{k|}j}$
- 关系：当贷款利率 = 偿债基金的利率时，等额偿债基金法 = 等额分期偿还法。

Exercise:

- A 20-year loan of 20,000 may be repaid under the following two methods:
  - i) amortization method with equal annual payments at an annual effective rate of 6.5%
  - ii) sinking fund method in which the lender receives an annual effective rate of 8% and the sinking fund earns an annual effective rate of j. Both methods require a payment of X to be made at the end of each year for 20 years.

  Calculate j.

- **Solution:**
  - $20000 = X\, a_{\overline{20}|0.065}$ ，

    每年支付的金额：$X = 1815.13.$
  - 偿债基金法中每年支付的利息：$0.08\,(20000) = 1600$

    每年向偿债基金支付：$X - 1600 = 215.13.$
  - $215.13 s_{\overline{20}|j} = 20000.$

    $j = 14.18.$

Exercise：

- John borrows 10,000 for 10 years at an annual effective interest rate of 10%. He can repay this loan using the amortization method with payments of 1,627.45 at the end of each year.
- Instead, John repays the 10,000 using a sinking fund that pays an annual effective interest rate of 14%. The deposits to the sinking fund are equal to 1,627.45 minus the interest on the loan and are made at the end of each year for 10 years.
- Determine the balance in the sinking fund immediately after repayment of the loan.

- **Solution:**
  - 已知每年支付额为1627.45
  - 每年支付的利息为： $0.10(10000) = 1000.$
  - 因此向偿债基金支付： $1627.45 - 1000 = 627.45$
  - 偿债基金在10年末的价值为（扣除本金10000之后）：
  - $627.45\, s_{\overline{10}|0.14} - 10000 = 2133$

四、变额分期偿还

假设贷款金额为L_0，每期末偿还R_t（$t = 1$，2，…，n）则有

$$L_0 = \sum_{t=1}^{n} v^t R_t$$

变额分期偿还方法：

（1）等额本金

（2）还款额 算术级数变化

（3）还款额 几何级数变化

例（等额本金偿还）：一笔10000元的贷款，期限为5年，年实际利率为5%，每年末偿还2000元本金。请构造分期偿还表（amortization schedule）。

年份	偿还本金	未偿还本金余额	支付当年利息（5%）	每年末偿还的总金额
(1)	(2)	(3)	(4)	(5) = (2) + (4)
0		10000		
1	2000	8000	500	2500
2	2000	6000	400	2400
3	2000	4000	300	2300
4	2000	2000	200	2200
5	2000	0	100	2100

Exercise:

- A 10-year loan of 2000 is to be repaid with payments at the end of each year.
- It can be repaid under the following two options:
  - (i) Equal annual payments at an annual effective rate of 8.07%.
  - (ii) Installments of 200 each year plus interest on the unpaid balance at an annual effective rate of i.
- The sum of the payments under option (i) equals the sum of the payments under option (ii).
- Determine i.

- **Solution:**
  - Option 1: $Ra_{\overline{10}|0.0807} = 2000$

    $R = 299 \Rightarrow \text{Total payments} = 2990$
  - Option 2:

    Interest needs to be $2990 - 2000 = 990$

    $990 = i[2000 + 1800 + 1600 + \ldots + 200]$

    $= i\,[11{,}000\,]$

    $i = 0.09$

例（偿还额按算术级数变化）：假设贷款期限为5年，年实际利率为6%。借款人在每年末分期偿还，每年末的偿还金额依次为2000元，1800元，1600元，1400元，1200元。请计算

（1）贷款本金为多少？

（2）第三年末偿还的利息和本金分别为多少？

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i}$$

$$(Da)_{\overline{n}|} = \frac{n - a_{\overline{n}|}}{i}$$

时期：	0	1	2	3	4	5
偿还金额：		2000	1800	1600	1400	1200
等额年金：		1000	1000	1000	1000	1000
递减年金：	200×	[5	4	3	2	1]

贷款本金L_0应该等于上述年金的现值，因此有

$$L_0 = 1000a_{\overline{5}|} + 200(Da)_{\overline{5}|} = 6837.82$$

第三年初（即第二年末）未偿还的本金为（将来法）

$$L_2 = 1000a_{\overline{3}|} + 200(Da)_{\overline{3}|} = 3762.97$$

第三年末支付的利息为 $I_3 = iL_2 = 0.06 \times 3762.97 = 225.78$

第三年末偿还的本金为 $P_3 = R_3 - I_3 = 1600 - 225.78 = 1374.21$

$$(Da)_{\overline{n}|} = \frac{n - a_{\overline{n}|}}{i}$$

- 偿还额按几何级数变化

$$\mathrm{PV}_{初} = \ddot{a}_{\overline{n|}j}$$

$$j = \frac{i - r}{1 + r}$$

$$\mathrm{PV}_{末} = \frac{\mathrm{PV}_{初}}{1+i}$$

例（还款额按几何级数变化）：一笔10000元的贷款，年实际利率为10%，期限为6年，每年末偿还一次，每次的偿还金额以50%的速度递增。请构造分期偿还表。

解：假设第一年末的偿还金额为R_1，则有

$$10000 = R_1 \frac{1}{1+i}\ddot{a}_{\overline{n}|j} = R_1 \frac{1}{1+10\%}\ddot{a}_{\overline{6}|j} = 13.57428\ R_1$$

其中

$$j = \frac{i-r}{1+r} = \frac{10\%-50\%}{1+50\%} = -0.2667$$

所以 $R_1 = 736.69$元。

第一年末应该支付的利息为

$$I_1 = 10000 \times 0.1 = 1000\text{（元）}$$

显然，第一年偿还的总金额736.69元还不足以支付当年的利息1000元，故第一年偿还的本金为负

$$P_1 = R_1 - I_1 = 736.69 - 1000 = -263.31\text{（元）}$$

第一年末的未偿还本金余额将会增加，即增加为

$$L_1 = L_0 - P_1 = 10000 + 263.31 = 10263.31\text{（元）}$$

第二年应该支付的利息为

$$I_2 = iL_1 = 0.1 \times 10263.31 = 1026.33\text{（元）}$$

按照几何级数计算，借款人在第二年末偿还的总金额为

$$R_2 = 1.5R_1 = 736.69 \times 1.5 = 1105.04\text{（元）}$$

所以第二年偿还的本金为

$$P_2 = R_2 - I_2 = 1105.04 - 1026.33 = 78.71\text{（元）}$$

第二年末的未偿还本金余额为

$$L_2 = L_1 - P_2 = 10263.31 - 78.71 = 10184.6\text{（元）}$$

依此类推，其他各年的计算结果如下表所示。

变额分期偿还表　　（单位：元）

年份	偿还总金额	利息	本金	未偿还本金余额
0				10000
1	736.69	1000	–263.31	10263.31
2	1105.04	1026.33	78.71	10184.60
3	1657.55	1018.46	639.09	9545.51
4	2486.33	954.55	1531.78	8013.73
5	3729.49	801.37	2928.12	5085.61
6	5594.24	508.56	5085.68	–0.07*

注：最后结果有0.07的舍入误差。

参见excel表的计算过程

Exercise:

- A loan is amortized over five years with monthly payments at a nominal interest rate of 9% compounded monthly.
- The first payment is 1000 and is to be paid one month from the date of the loan.
- Each succeeding monthly payment will be 2% lower than the prior payment.
- Calculate the outstanding loan balance immediately after the 40th payment is made.

- **Solution:**
  - 共60次付款。第41次的付款额 = $1000(1+r)^{40}$
  - 计算剩余20次付款的现值：

$$i = 0.09/12 = 0.0075$$

$$r = -2\%$$

$$j = (i-r)/(1+r)$$

$$PV = 1000(1+r)^{40} \times \frac{1}{1+i}\ddot{a}_{\overline{20}|j} = 6889$$

五、变额偿债基金

- 借款人每期支付的总金额 R_t 由两部分构成：
  - 当期的利息： iL_0
  - 向偿债基金的储蓄：$R_t - iL_0$
- 偿债基金在第 n 期末的累积值必须等于贷款本金L_0，故有

$$L_0 = (R_1 - iL_0)(1+j)^{n-1} + (R_2 - iL_0)(1+j)^{n-2} + \ldots + (R_n - iL_0)$$

$$\Rightarrow \qquad L_0 = \sum_{t=1}^{n} R_t (1+j)^{n-t} - iL_0 s_{\overline{n}|j}$$

贷款本金 L_0 为

$$L_0 = \frac{\sum_{t=1}^{n} R_t (1+j)^{n-t}}{1+is_{\overline{n}|j}} = \frac{\sum_{t=1}^{n} R_t (1+j)^{-t}}{1+(i-j)a_{\overline{n}|j}}$$

前一式的分子和分母分别乘以 $(1+j)^{-n}$ 即得第 2 式（请练习）。

在上式中，如果 $j=i$，则有

$$L_0 = \sum_{t=1}^{n} v^t R_t$$

例： 一笔贷款的期限为5年，用偿债基金方法偿还，贷款利率为10%，偿债基金利率为8%。如果借款人每年末的总付款金额（包括支付当期利息和向偿债基金的储蓄）分别为：1000元，2000元，3000元，4000元，5000元，请计算原始贷款本金为多少？

解：每年的利息为$0.1L_0$，每年末向偿债基金的储蓄额为：

$1000-0.1L_0$，$2000-0.1L_0$，$3000-0.1L_0$，$4000-0.1L_0$，$5000-0.1L_0$

故有

$$1000\times(Is)_{\overline{5}|0.08}-0.1L_0\times s_{\overline{5}|0.08}=L_0$$

$$\Downarrow$$

$$L_0=\frac{1000(Is)_{\overline{5}|0.08}}{1+0.1s_{\overline{5}|0.08}}=10524.69$$

问题：第 1 年末向偿债基金的储蓄额为负 = 1000 – 10524.69×0.1 = – 52.47

- 注意：上述结果存在问题
  - 向偿债基金的储蓄为–52.47元，意味着借款人从偿债基金中借走52.47元。偿债基金的利率是8%，小于贷款利率10%。
- 若用 L_0'表示合理的贷款本金，则第一年末的贷款净额为

$$L_1 = 1.1L_0' - 1000$$

- L_1应该在今后的4年由偿债基金积累。
- 今后4年，借款人每年末向偿债基金的储蓄额分别为：$(2000 - iL_1)$，$(3000 - iL_1)$，$(4000 - iL_1)$，$(5000 - iL_1)$。
- 这些储蓄额的累积值应该正好等于L_1，所以有

$$1000 \times (Is)_{\overline{4}|0.08} + (1000 - 0.1L_1) \times s_{\overline{4}|0.08} = L_1$$

$$\Rightarrow \quad L_1 = \frac{1000(Is)_{\overline{4}|0.08} + 1000 s_{\overline{4}|0.08}}{1 + 0.1 s_{\overline{4}|0.08}} = 10573.9$$

$$\Rightarrow \quad L_0' = (L_1 + 1000)/1.1 = 10521.73\text{（元）}$$

变额偿债基金表　（单位：元）

参见excel表的计算过程

年份	每年末支付的金额	支付当年利息	向偿债基金储蓄	偿债基金余额	贷款净额
0				0	10521.73
1	1000	1000	0	0	10573.90
2	2000	1057.39	942.61	942.61	9631.29
3	3000	1057.39	1942.61	2960.63	7613.27
4	4000	1057.39	2942.61	6140.09	4433.81
5	5000	1057.39	3942.61	10573.90	0

- 第1年末的贷款净额为 10521.73 * 1.1 – 1000 = 10573.90

讨论：一场官司

- 问题：贷款本金20万，年利率10%，期限2年。借款人第1年末偿还了10万，第2 年末应该偿还多少?
- 借款人认为：还13万
  - 本金：第1年末还10万，第2年末还10万
  - 利息：第1年末利息2万，第2年末利息1万
- 银行认为：还13.2万
  - 利息：第1年末2万，第2年末(20 - 8) * 0.1 = 1.2万
  - 本金：第1年末8万，第2年末12万