利率的期限结构
term structure of interest rate

孟生旺

中国人民大学统计学院

- **本章主要内容:**
  - 到期收益率(yield to maturity)和收益率曲线
  - 远期利率(forward rate)
  - 即期利率(spot rate)
  - 套利(arbitrage)

到期收益率和收益率曲线

- 到期收益率（yield to maturity）：资产的内部报酬率，是使得该项资产未来现金流的现值与其价格相等的利率。

$$P=\sum_{t>0}\frac{C_t}{(1+y)^t}$$

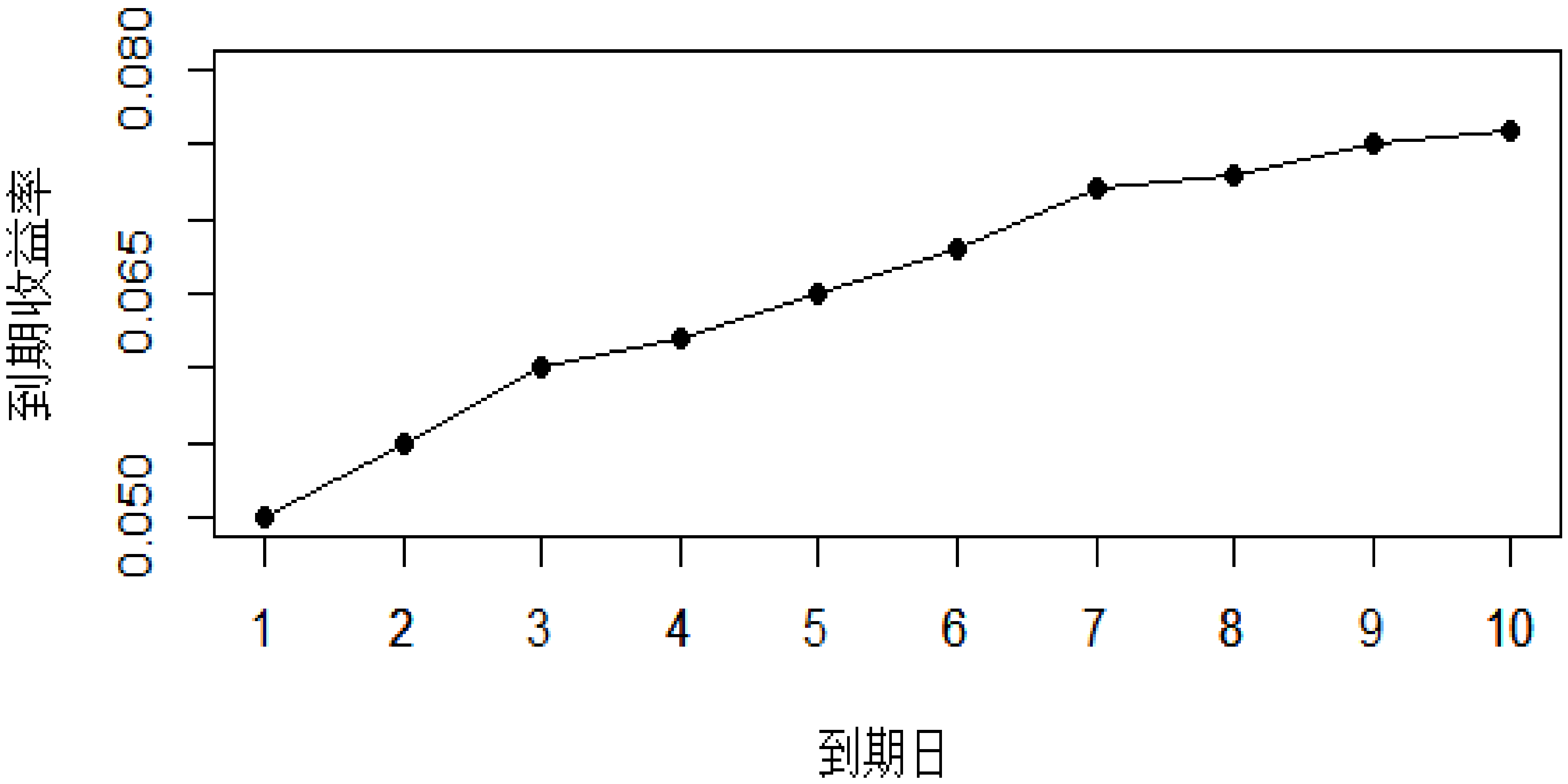
表1　利率的期限结构（由10种不同到期日的债券组成）

期限	年息票率	债券的价格	到期收益率
1	2%	97.1429	5.0%
2	5%	99.0768	5.5%
3	6%	100.0000	6.0%
4	10%	113.1073	6.2%
5	4%	89.6108	6.5%
6	12%	124.9398	6.8%
7	0%	61.4662	7.2%
8	7%	98.2293	7.3%
9	4%	77.6739	7.5%
10	8%	102.7331	7.6%

注：假设所有债券的面值和偿还值都等于100

利率的期限结构（term structure of interest rate）：利率和与之相联系的到期日之间的关系。表现形式：收益率曲线。

收益率曲线



即期利率

- **即期利率（spot rate）**：从当前时点开始计算的未来一定限期的利率水平。
- 用即期利率计算债券的价格：

$$P = \sum_{t>0} \frac{C_t}{(1+r_t)^t}$$

例： 1年期的即期利率为5.2%，2年期的即期利率为5.5%。请计算一个年息票率为15%的两年期债券的价格，假设债券的面值为100元。

解：该债券的价格为

$$P=\sum\frac{C_t}{(1+r_t)^t}=\frac{15}{1+r_1}+\frac{115}{(1+r_2)^2}=\frac{15}{1.052}+\frac{115}{1.055^2}=117.5802$$

- **如何求得即期利率？两种方法**

1. 通过市场上零息债券的价格计算：

   n 年期的即期利率＝ n 年期零息债券的收益率

2. 自助法（bootstrapping）：

   - 由一年期债券的价格计算1年期的即期利率
   - 利用这个信息及两年期债券的价格，计算2年期的即期利率
   - 依次类推 ……

例： 假设1年期和2年期的即期利率分别为5％和5.5126％。3年期债券的价格为100，面值为100，息票率为6％。求3年期的即期利率。

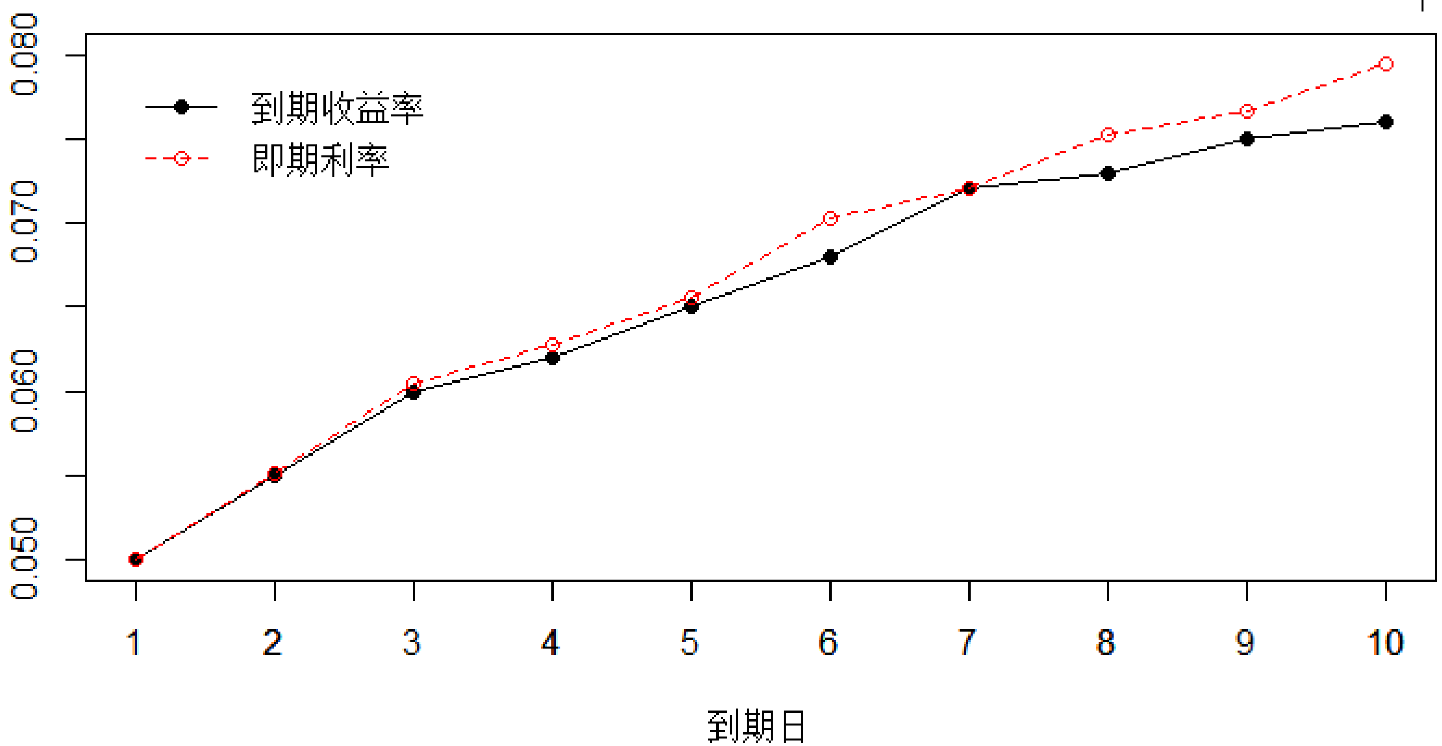
解： 3年期的即期利率满足下述方程：

$$100 = \frac{6}{1+r_1} + \frac{6}{(1+r_2)^2} + \frac{106}{(1+r_3)^3}$$

$$= \frac{6}{1.05} + \frac{6}{1.055126^2} + \frac{106}{(1+r_3)^3}$$

$$\Rightarrow r_3 = 6.0411\%$$

即期利率曲线



到期收益率可以看做是不同即期利率的一种加权平均。在该例中，收益率曲线是递增的，因此即期利率也是递增的。

远期利率

- **远期利率（forward rate）：** 未来两个时点之间的利率水平，由即期利率推出。

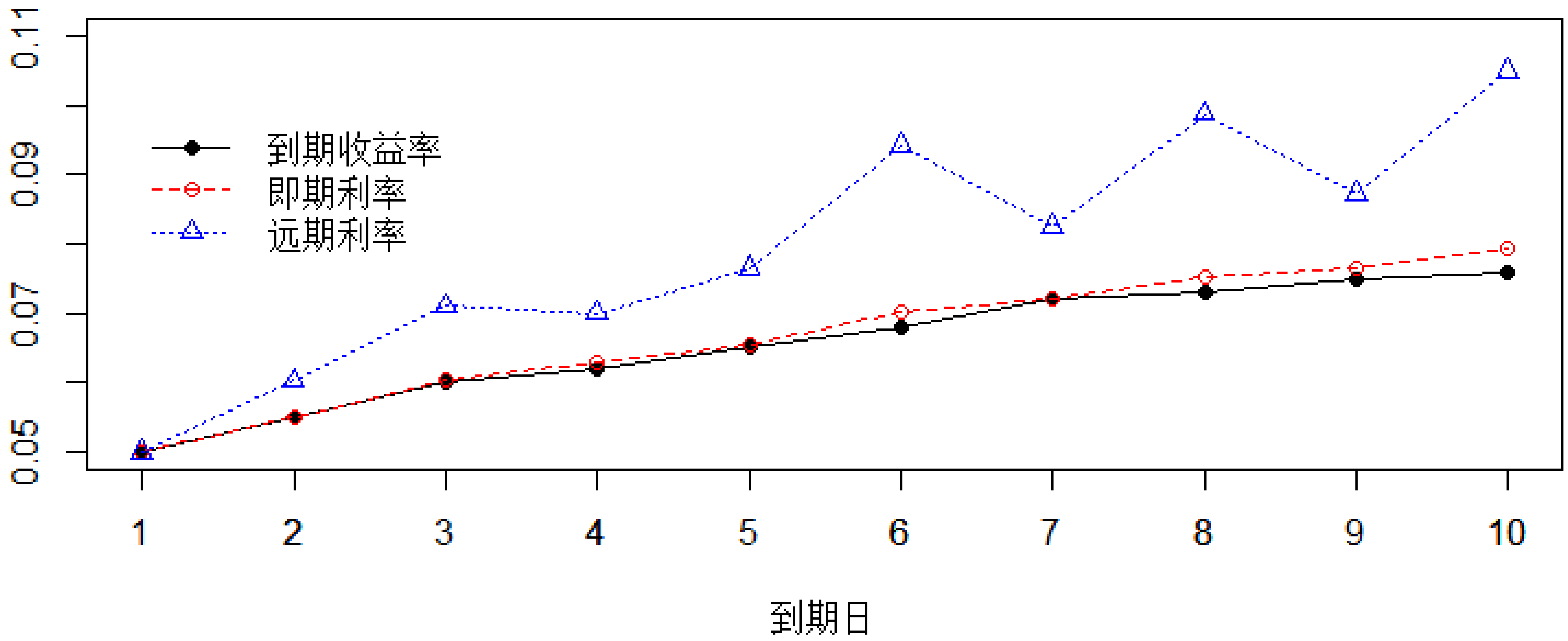
例： 如果1年期的即期利率是5%，2年期的即期利率是5.2%，求其隐含的第一年末到第二年末的远期利率 f？

解：

$$(1 + 5\%)(1 + f) = (1 + 5.2\%)^2$$

$$f = 5.4\%$$

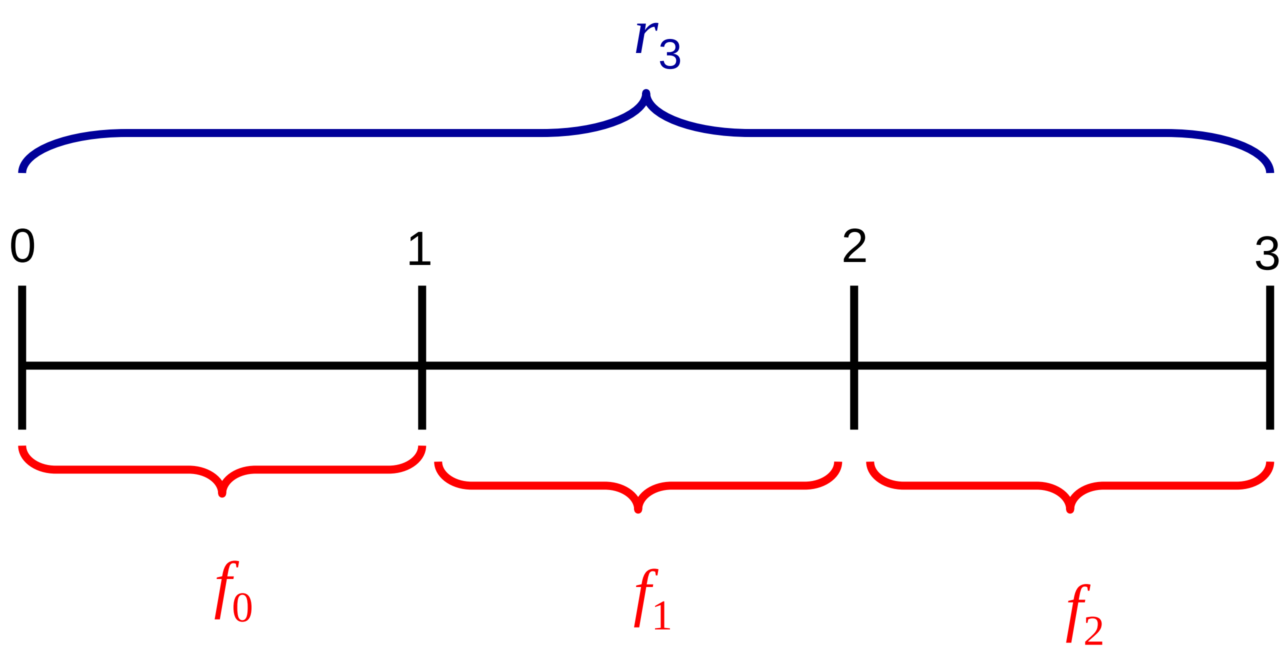
远期利率曲线



在本例中，远期利率均大于相应的即期利率和到期收益率。但在现实市场中，远期利率小于即期利率和到期收益率的情况也是可能的。

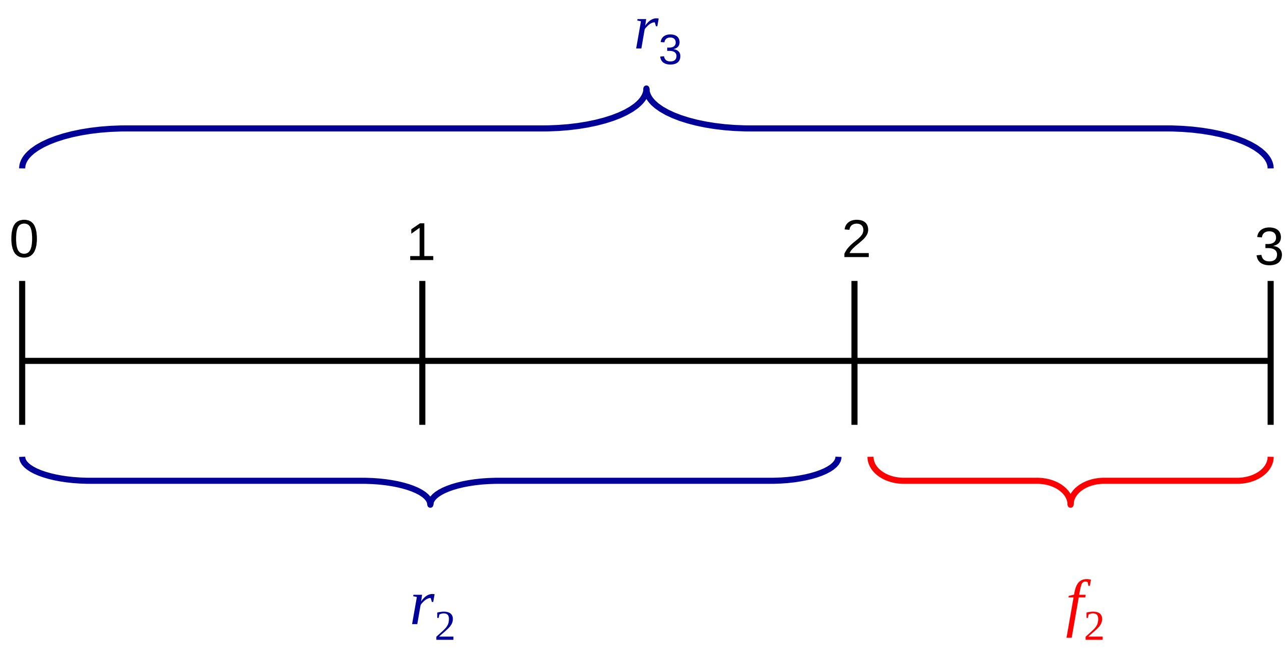
例：求即期利率 r_3

$$(1+r_3)^3=(1+f_0)(1+f_1)(1+f_2)$$



例：求远期利率 f_2

$$(1+r_3)^3=(1+r_2)^2(1+f_2)$$



套利

- **套利机会：** 当资产的定价不一致时，就可能存在套利机会。
- **例：** 一个年息票率为5%的两年期债券的市场价格为101元，面值为100元。1年期的即期利率为4.5%，2年期的即期利率为5%。请确定是否存在套利机会。

解： 按即期利率计算的债券价格为：

$$P = \frac{5}{1.045} + \frac{105}{1.05^2} = 100.0228$$

与市场价格101元不一致，故存在套利机会。

- 如何套利?
- 债券价格被高估，故可以通过以下策略获利：
  - 卖出一个两年期债券，获得101元。
  - 购买一个在第1年末偿还5元的零息票债券，以及一个在第2年末偿还105元的零息票债券。购买价格为

$$P=\frac{5}{1.045}+\frac{105}{1.05^2}=100.0228$$

  - 套利者在0时刻获得101-100.0228 = 0.9772的无风险收益，而未来的现金流正好可以对冲。

卖出债券的现金流	**101**	**-5**	**-105**
买入债券的现金流	**100.02**	**5**	**105**

小结

- 到期收益率为 y
- 即期利率为 r_t
- 远期利率为 f_t

$$P=\sum_{t>0}\frac{C_t}{(1+y)^t}$$

$$=\sum_{t>0}\frac{C_t}{(1+r_t)^t}$$

$$=\sum_{t>0}\frac{C_t}{(1+f_0)(1+f_1)\ldots(1+f_{t-1})}$$

Exercise

- Consider a yield curve defined by the following equation:

$$i_k = 0.09 + 0.002k - 0.001k^2$$

- Where i_k is the annual effective rate of return for zero coupon bonds with maturity of k years.
- Let j be the one year effective rate during year 5 that is implied by this yield curve.
- Calculate j.

4年期的即期利率为

$$r_4 = 0.09 + 0.002 \times 4 - 0.001 \times 4^2 = 0.082$$

5年期的即期利率为

$$r_5 = 0.09 + 0.002 \times 5 - 0.001 \times 5^2 = 0.075$$

$$(1 + r_5)^5 = (1 + r_4)^4 (1 + j)$$

$$\Rightarrow \quad (1 + 0.075)^5 = (1 + 0.082)^4 (1 + j)$$

$$\Rightarrow \quad j = 0.047$$

练习

- 请根据下表的数据构造收益率曲线，即期利率曲线和远期利率曲线。（注：所有债券的面值和偿还值都是100）

期限	年息票率	债券的价格
1	2%	95
2	5%	98
3	6%	100