

# 证券定价

## Pricing of Bonds and stocks

孟生旺

中国人民大学统计学院

<http://blog.sina.com.cn/mengshw>



# 主要内容

- 债券价值分析
  - 债券定价原理
  - 债券在任意时点上的价格和账面值
  - 分期偿还债券的价格
  - 可赎回债券的价格
- 股票价值分析
- 卖空



- 金融市场（financial market）：资金供求双方借助**金融工具**进行资金交易活动的场所，分为：
  - 货币市场（money market）：融资期限在一年以下
  - 资本市场（Capital market）：股票市场、债券市场...

# 债券(bond)



- 含义：由筹资者向投资者出具的在一定时间还本付息的债权债务凭证。

- 种类：
  - 政府债券
    - 国债
    - 地方政府债券
  - 金融债券
  - 公司债券





- 债券的基本要素：
  - 票面价值（面值）：**100或1000元。**
  - 价格：平价，溢价，折价
  - 偿还期限：长期（**10年以上**），中期（**1—10**），短期（**1年以内**）。
  - 票面利率。根据利息支付方式，可分为附息债券（**coupon**）和零息债券（**zero-coupon**）。



## 债券定价的基本原理

- $P$  — 债券的价格(bond price)
- $i$  — 债券的到期收益率 (yield-to-maturity rate, internal rate of return)。
- $F$  — 债券的面值 (par value, face amount, nominal value)
- $r$  — 债券的息票率 (coupon rate per payment period)
- $rF$  — 息票收入(coupon)



- $C$  — 债券的偿还值 (redemption payment), 通常等于债券的面值, 即  $C = F$ 。例外: 提前偿还时, 偿还值不等于债券的面值。
- $n$  — 息票的支付次数(number of coupon payments)。



# 定价公式

- 基本公式
- 溢价公式
- 基价公式（了解）
- **Makeham**公式（了解）





## (1) 基本公式

债券的价格等于未来息票收入的现值与偿还值的现值之和，即

$$P = \sum_{t=1}^n rF \cdot v^t + C \cdot v^n$$
$$= rFa_{\overline{n}|} + Cv^n$$

$F$  — 债券的面值

$C$  — 债券的偿还值

$r$  — 债券的息票率

注：债券的价格与到期收益率  $i$  成反比。

$$P = \sum_{t=1}^n rF \cdot v^t + C \cdot v^n$$

- 对  $P$  求关于  $i$  的一阶和二阶导数，可得

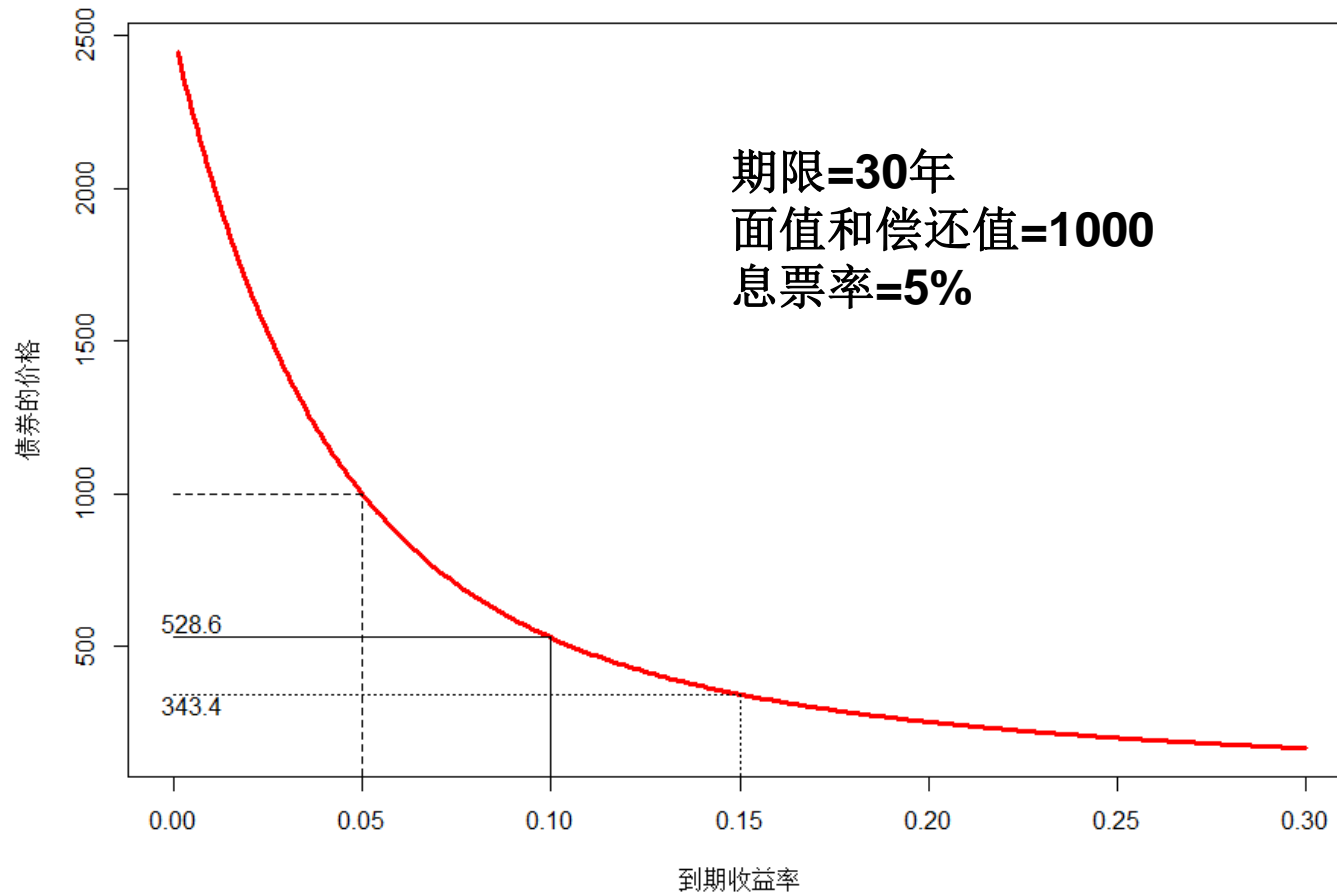
$$\frac{\partial P}{\partial i} = -\left(\sum_{t=1}^n rF t v^{t+1} + C n v^{n+1}\right) < 0$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial i^2} = \sum_{t=1}^n rF t(t+1) v^{t+2} + C n(n+1) v^{n+2} > 0$$

- 一阶导数小于零，说明  $P$  是  $i$  的减函数。
- 二阶导数大于零，说明  $P$  是  $i$  的凸函数，如下图。



# 债券价格与到期收益率的关系



到期收益率下降时，债券价格以加速度上升；  
到期收益率上升时，债券价格以减速度下降。



**Example:** A 30-year bond with a par value of 1000 and 12% coupons payable quarterly is selling at 850. Calculate the annual nominal yield rate convertible quarterly.

• **Solution:**

$$P = rFa_{\overline{n}|} + Cv^n$$

$$850 = 1000 \left( \frac{0.12}{4} \right) a_{\overline{120}|i} + 1000v^{120}$$

$$850 = 30a_{\overline{120}|i} + 1000v^{120} \Rightarrow i = 3.54\%$$

**The answer is 14.16% (3.54% × 4) .**

```
f=function(i) 850-30*(1-(1+i)^(-120))/i-1000*(1+i)^(-120)
uniroot(f,c(0.01,0.1))$root
```

思考：其他条件不变，债券期限变化对债券价格的影响？

$$P = \frac{rF}{i} + (C - \frac{rF}{i})v^n$$

$$P' = (C - \frac{rF}{i}) \cdot v^n \ln v$$

$$P'' = (C - \frac{rF}{i}) \cdot v^n (\ln v)^2$$

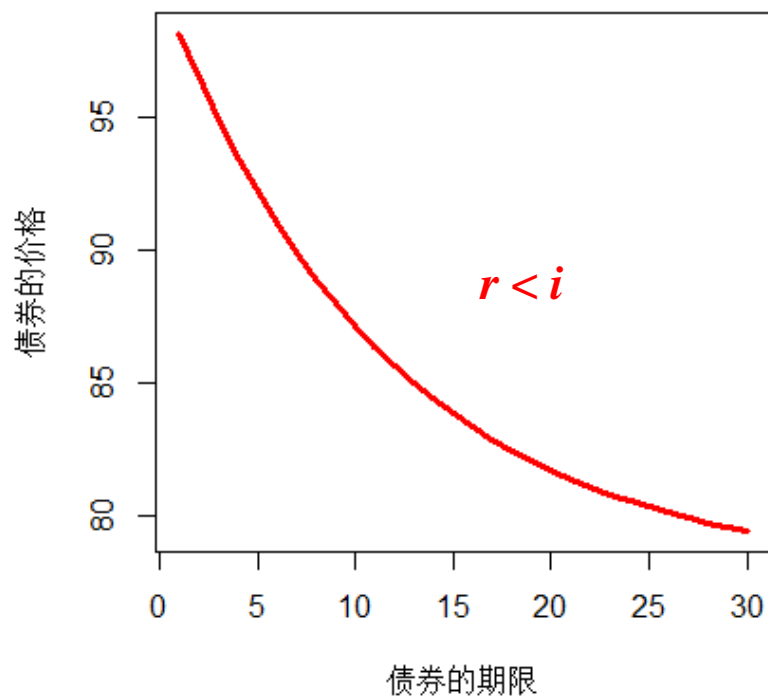
$$\text{if } C > \frac{rF}{i}, \quad \begin{cases} P' < 0 \\ P'' > 0 \end{cases}$$

$$\text{if } C < \frac{rF}{i}, \quad \begin{cases} P' > 0 \\ P'' < 0 \end{cases}$$

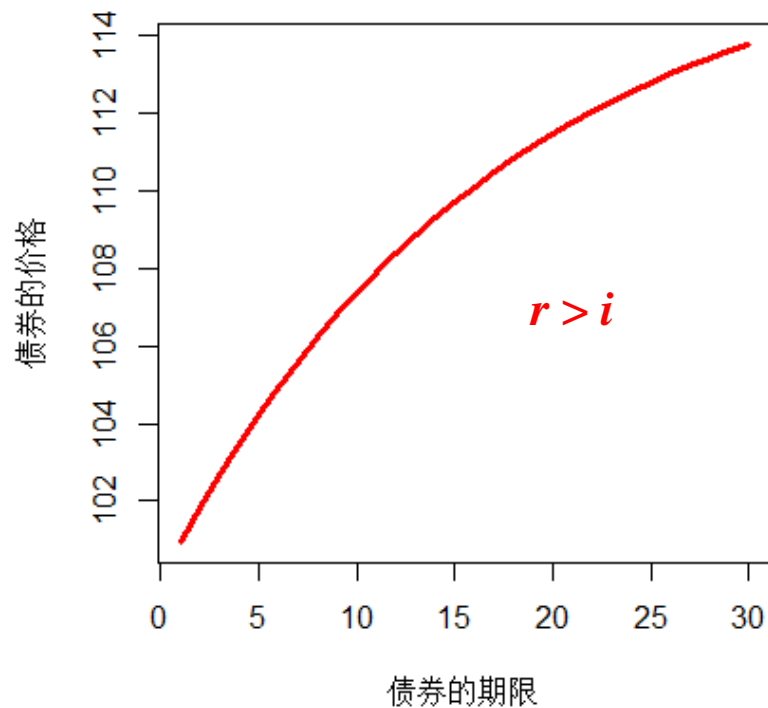


## 债券期限对债券价格的影响

$C=100 > rF/i=77.8$



$C=100 < rF/i=116.6$



注：若  $C = F$ ，则  $r < i$  时，价格随着  $n$  的增加而递减；反之，递增。

## (2) 溢价公式 (premium/discount formula)

- $r$  — 息票率, 息票收入与面值之比
- $g$  — 修正息票率 (modified coupon rate)  
息票收入与偿还值 $C$ 的比率, 即

$$g = \frac{rF}{C} \quad \Leftrightarrow \quad gC = rF$$

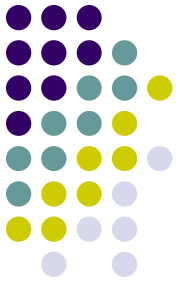


## 溢价公式 (premium/discount formula)

$$\begin{aligned} P &= rFa_{\overline{n}|} + Cv^n \\ &= rFa_{\overline{n}|} + C(1 - ia_{\overline{n}|}) \\ &= C + (rF - iC)a_{\overline{n}|} \\ &= C + (gC - iC)a_{\overline{n}|} \\ &= C + C(g - i)a_{\overline{n}|} \end{aligned}$$

见下页解释





溢价公式的解释:

$$P = C + C(g - i) a_{\overline{n}|i}$$

$C$



$C$

$P$



$C$



$$P = C + C(g - i)a_{\overline{n}|}$$

- 若  $P > C$ ，就称按溢价(**premium**)出售

$$\text{溢价} = C(g - i)a_{\overline{n}|}$$

- 若  $P = C$ ，平价出售，修正息票率  $g =$  到期收益率  $i$ 。
- 若  $P < C$ ，折价 (**discount**) 出售，即负的溢价。



## 溢价公式的常见形式

- 当  $C = F$  时,  $g = r$

$$\begin{aligned} P &= C + C(g - i)a_{\overline{n}|} \\ &= F + F(r - i)a_{\overline{n}|} \end{aligned}$$

- 平价发行时,  $r = i$
- 溢价发行时,  $r > i$
- 折价发行时,  $r < i$



## Exercise

- A 5-year bond with semiannual coupons is redeemable at par. The annual effective yield is 7% and the coupons are 5% a year. Find the price of the bond per \$100 par value. **Is it sold at a premium or a discount?**



**Solution:**  $n = 10$

$$F = C = 100$$

$$r = g = 0.05 / 2 = 2.5\%$$

$$i = 1.07^{0.5} - 1 = 3.441\% \quad (\text{semiannual effective yield})$$

基本公式:  $P = 2.5a_{\overline{10}|} + 100v^{10} = 92.15$

溢价公式:  $P = 100 + 100(2.5\% - 3.441\%)a_{\overline{10}|3.441\%} = 92.15$

The bond is sold at a discount.

## 账面值 (book value):

在时点  $t$ , 持有人在债券上的投资余额。记为  $V_t$

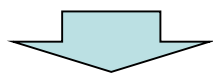
- 基于购买债券时的到期收益率  $i$  计算。
- 不是市场价格。
- 不随市场利率变化。

$t$  为整数时：价格与账面值 相等

（注意：假设到期收益率  $i$  保持不变）

将来法( prospective method)

$$P = rFa_{\overline{n}|} + Cv^n = C + C(g - i)a_{\overline{n}|} \quad (\text{已知})$$



$$V_t = rFa_{\overline{n-t}|} + Cv^{n-t} = C + C(g - i)a_{\overline{n-t}|}$$



## 过去法( retrospective method)

$$V_t = P(1+i)^t - rF \cdot s_{\overline{t}|}$$

$$= (rFa_{\overline{n}|} + Cv^n)(1+i)^t - rF \cdot s_{\overline{t}|}$$

$$= rF(a_{\overline{n}|} - a_{\overline{t}|})(1+i)^t + Cv^{n-t}$$

$$V_t = rFa_{\overline{n-t}|} + Cv^{n-t}$$

等价于将来法



计算账面值的递推公式（解释，证明参加教材）：

$$V_t = V_{t-1}(1+i) - rF$$



**例：**债券的面值为1000元，年息票率为6%，期限为3年，到期按面值偿还。投资者所要求的年收益率为5%，请计算债券的价格以及投资者在各年末的账面值。

**解：**用溢价公式：

$$P = C + C(g - i)a_{\overline{n}|i} = 1000 + 1000(0.06 - 0.05)a_{\overline{3}|0.05} = 1027.23$$

● 溢价金额为27.23元。



- 下面分析溢价将在以后各期如何获得补偿。
  - 投资者在第一年应该得到的利息收入为

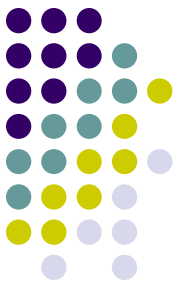
$$1027.23 \times 0.05 = 51.36 \text{ (元)}$$

- 第一年实际得到的息票收入为

$$1000 \times 0.06 = 60 \text{ (元)}$$

- 息票收入大于应得利息收入，差额称作**溢价分摊金额 (premium amortization amount)**。第一年的溢价分摊金额为

$$60 - 51.36 = 8.64 \text{ (元)}$$



- 应用递推公式，第1年末的账面值为

$$1027.23 (1+5\%) - 60 = 1018.59 \text{ (元)}$$

以后各年的账面值和溢价分摊金额如下表所示。

年份	息票收入 Coupon	应得利息收入 Interest earned	溢价分摊金额 Amortization of premium	账面值 Book value
0				1027.23
1	60	51.36	8.64	1018.59
2	60	50.93	9.07	1009.52
3	60	50.48	9.52	1000
合计	180	152.77	27.23	

注：溢价分摊金额的总和正好等于**溢价(premium)**。



# 任意时点上的价格和账面值

任意时点上债券的价格（假设到期收益率  $i$  保持不变）

● 设：

- 债券在上一个息票支付日期的价格为  $P_0$
- 下一个息票支付日期的价格为  $P_1$
- 用  $P_t$  表示在两个息票支付日期之间的价格（ $0 < t < 1$ ）





- 债券在时点  $t$  的价格可用两种方法计算：

$$P_t = (1 + i)^t P_0 \quad (\text{过去法})$$

$$P_t = (rF + P_1) (1 + i)^{-(1-t)} \quad (\text{将来法})$$

- 两式是等价的，因为：

- $P_0$ 和 $P_1$ 存在下述关系：

$$P_1 = P_0(1 + i) - rF \quad \text{或} \quad rF + P_1 = P_0(1 + i)$$

代入将来法公式，即证。

注：  $P_t$ 中包含在时间1到期的部分息票收入，  $P_1$ 不包含。



## 任意时点上债券的账面值（假设到期收益率 $i$ 保持不变）

- **账面值**：实际投资余额。在息票支付日，账面值等于债券价格，在其他时点，要从价格中扣除应计息票收入。
- 在时间  $t$  ( $0 < t < 1$ ) 的价格为

$$P_t = (1 + i)^t P_0$$

- 扣除应计息票收入，即得在时间  $t$  的账面值 为

$$V_t = (1 + i)^t P_0 - (rF)_t$$

其中  $(rF)_t$  表示从时间 0 到时间  $t$  的**应计息票收入**。



- 应计息票收入可以有两种计算方法：
  - 按复利计算。如果期末的利息收入为 $rF$ ，则期初的本金应为  $rF/i$ ，故在  $t$  时应获得的利息为：

$$(rF)_t = \frac{rF}{i} \left[ (1+i)^t - 1 \right]$$

- 按单利近似计算。

$$(rF)_t = trF$$





- 账面值可按下述三种方法计算：

- **理论方法：**按复利精确计算

$$V_t = (1+i)^t P_0 - \frac{rF}{i} \left[ (1+i)^t - 1 \right]$$

- **半理论方法：**将应计息票收入按单利近似计算

$$V_t = (1+i)^t P_0 - trF$$

- **实践方法：**用单利近似计算

$$V_t = (1+ti) P_0 - trF$$



**例：**债券的面值为1000元，年息票率为6%，每年末支付一次利息，期限为3年，到期按面值偿还。债券的到期收益率为8%，试计算债券在购买6个月后的价格和账面面值。

**解：**债券在购买日的价格为

$$P_0 = C + C(g - i)a_{\overline{n}|i} = 1000 + 1000(0.06 - 0.08)a_{\overline{3}|0.08} = 948.46$$

在购买6个月后的价格为

$$P_t = (1 + i)^t P_0 = 948.46(1 + 0.08)^{0.5} = 985.67 \text{ (元)}$$



- 购买6个月后的账面值等于价格扣除应计息票收入：

- 理论方法：

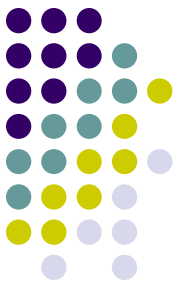
$$\begin{aligned} V_t &= (1+i)^t P_0 - \frac{rF}{i} \left[ (1+i)^t - 1 \right] \\ &= 985.67 - \frac{0.06 \times 1000}{0.08} [(1+0.08)^{0.5} - 1] = 956.25 \end{aligned}$$

- 半理论方法：

$$V_t = (1+i)^t P_0 - trF = 985.67 - 0.5 \times 0.06 \times 1000 = 955.67$$

- 实践方法：

$$V_t = (1+ti) P_0 - trF = 956.40$$



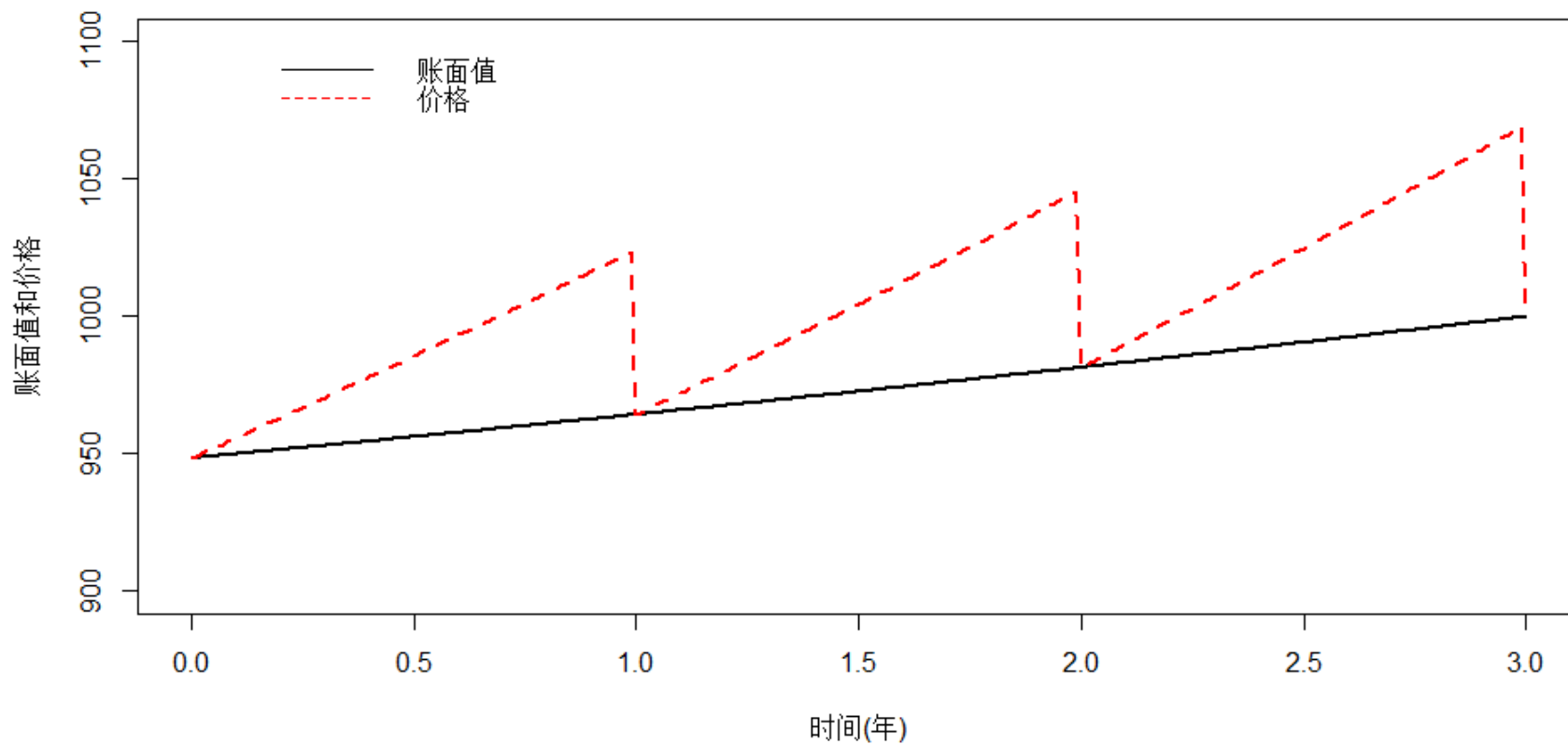
## 债券在每个季度末的价格和账面值表（单位：元）

季度	价格	账面值		
		理论方法	半理论方法	实践方法
<b>0</b>	<b>948.46</b>	<b>948.46</b>	<b>948.46</b>	<b>948.46</b>
1	966.89	952.32	951.89	952.43
2	985.67	956.25	955.67	956.4
3	1005	960.25	959.82	960.37
<b>4</b>	<b>964.34</b>	<b>964.34</b>	<b>964.34</b>	<b>964.34</b>
5	983.07	968.50	968.07	968.63
6	1002.17	972.75	972.17	972.91
7	1021.64	977.07	976.64	977.20
<b>8</b>	<b>981.48</b>	<b>981.48</b>	<b>981.48</b>	<b>981.48</b>
9	1000.55	985.98	985.55	986.11
10	1019.98	990.56	989.98	990.74
11	1039.80	995.24	994.80	995.37
<b>12</b>	<b>1000</b>	<b>1000</b>	<b>1000</b>	<b>1000</b>

账面值 = 价格 - 应计息票收入



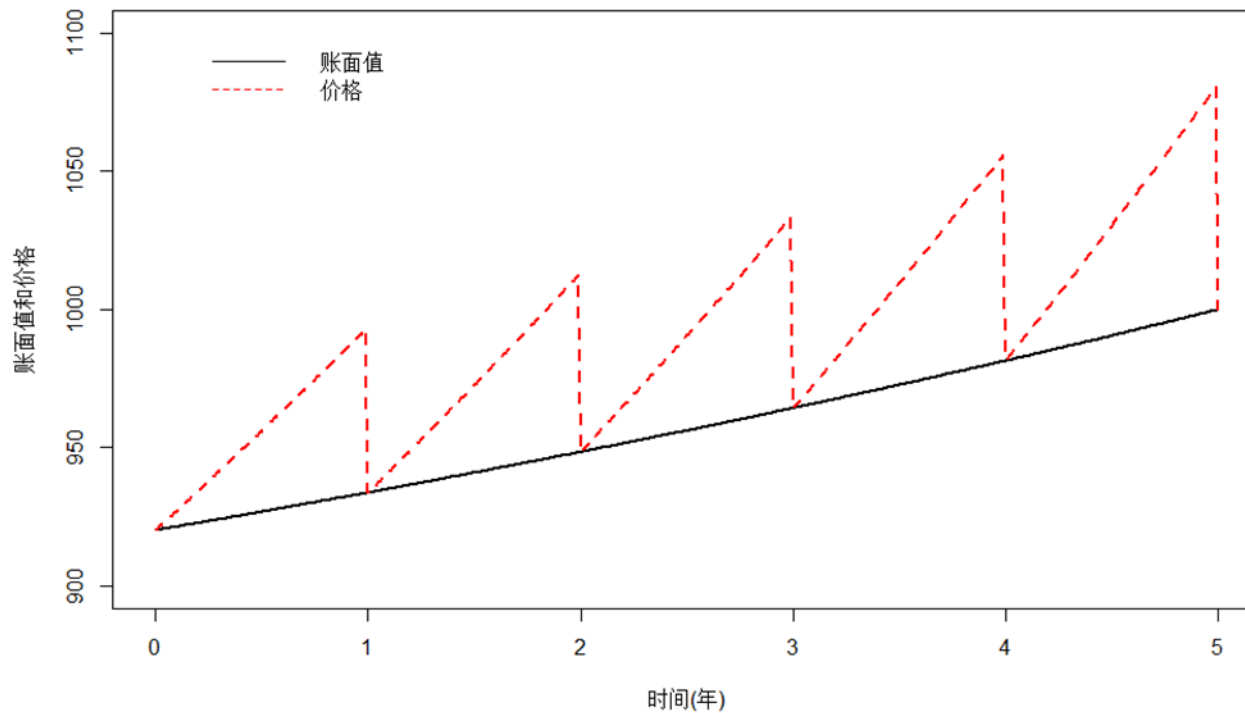
## 价格和账面值的变化过程





例1：债券的面值为1000元，年息票率为6%，每年末支付一次利息，期限为5年，到期按面值偿还。到期收益率为8%。

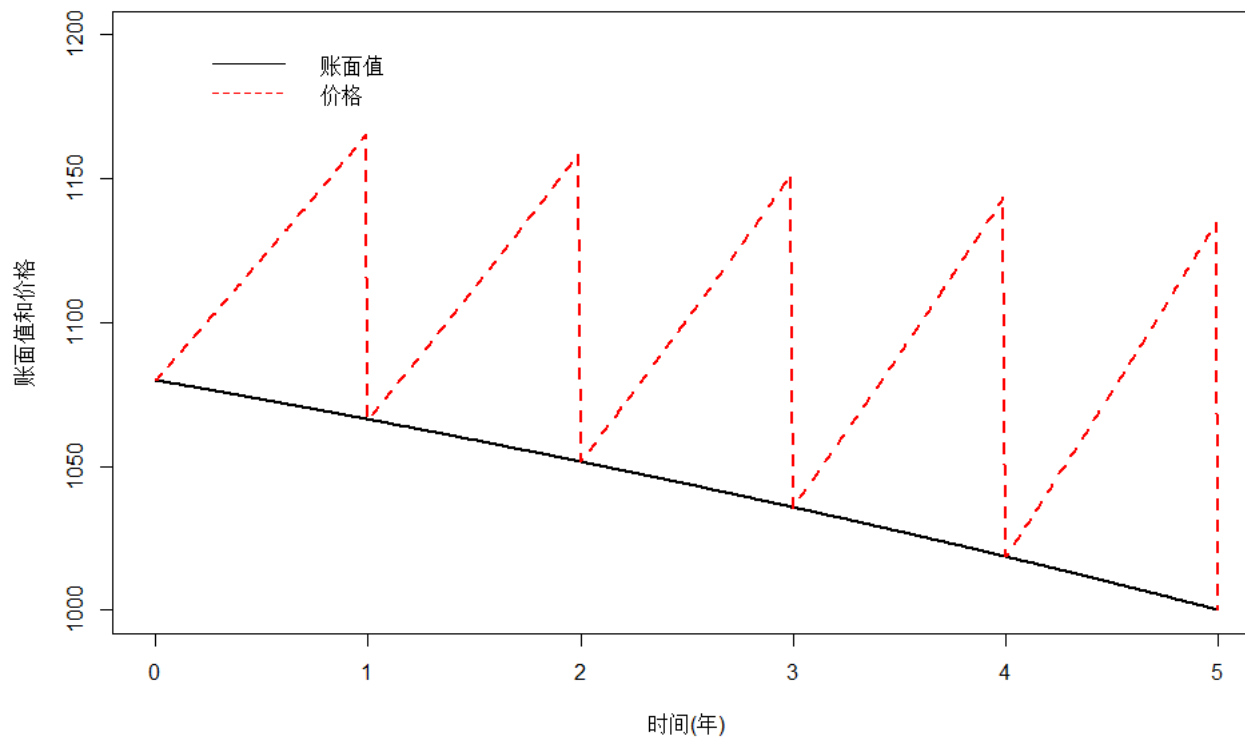
问题：溢价还是折价发行？





例2：债券的面值为1000元，年息票率为10%，每年末支付一次利息，期限为5年，到期按面值偿还。到期收益率为8%。

问题：溢价还是折价发行？

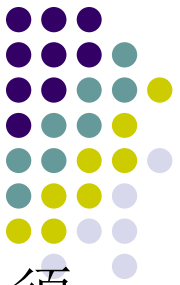




## 基价公式和Makeham公式（了解）

- $G$  —基价（base amount of a bond）。把基价按收益率  $i$  投资，每期产生的利息收入将等于息票收入，即  $iG = rF$ 。
- 息票收入：  $rF = gC = iG$ 。





### ● (3) 基价公式 (base amount formula)

基价是投资者为了获得与息票 $rF$ 相等的周期性收益所必须的投资额，即 $iG = rF$ 。基价公式的推导：

$$P = rFa_{\overline{n}|} + Cv^n$$

$$= iGa_{\overline{n}|} + Cv^n$$

$$= G(1 - v^n) + Cv^n$$

$$= G + (C - G)v^n$$

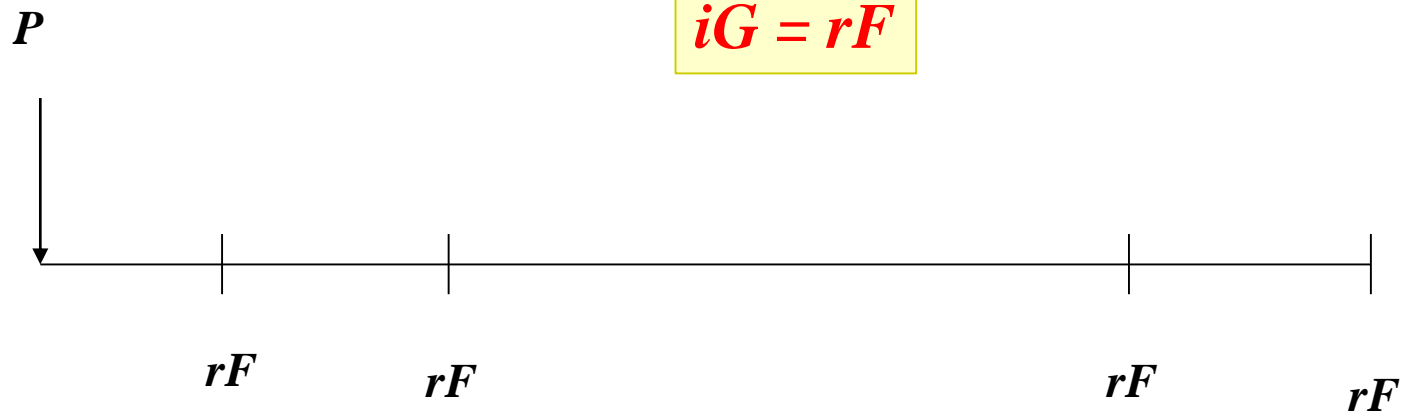
解释（下页）



基价公式的解释:  $P = G + (C - G) v^n$



$G$



$$iG = rF$$

$C$

购买债券多获得  $(C - G)$  的偿还值, 其现值为  $(C - G)v^n$

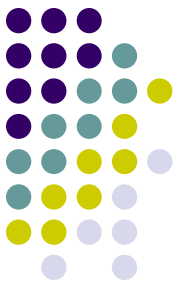


#### ● (4) Makeham公式

息票收入  $rF = gC$ ，故由基本公式得

$$\begin{aligned} P &= gCa_{\overline{n}|i} + Cv^n = gC \frac{1-v^n}{i} + Cv^n = g \frac{C - Cv^n}{i} + Cv^n \\ &= \frac{g}{i}(C - K) + K \quad (K = Cv^n) \end{aligned}$$

- $K$ 是偿还值  $C$  的现值， $\frac{g}{i}(C - K)$  是息票收入的现值。
- 如  $g = i$ ，则  $P = C$ 。



## 分期偿还债券的价格（**Makeham** 公式的应用）

- **分期偿还债券**：在不同的时间分期进行偿还。
- **例**：假设某债券的面值为1000元，年度息票率为5%，从第6年末开始，发行人分5次偿还，每次偿还1/5，每年末的偿还额为205元，第10年末还清。假设到期收益率为6%，求该债券的价格。

时期	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
息票收入		50	50	50	50	50	50	40	30	20	10
偿还值							205	205	205	205	205



- 如果到期收益率为6%，则偿还值的现值为

$$205v^5a_{\overline{5}|} = 645.28$$

- 未来息票收入的现值为

$$50a_{\overline{5}|} + 10v^{-5}(Da)_{\overline{5}|} = 308.71$$

- 因此上述债券的价格为

$$645.28 + 308.71 = 953.99 \text{ (元)}$$

时期	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
息票收入		50	50	50	50	50	50	40	30	20	10
偿还值							205	205	205	205	205



- 应用Makeham公式可以简化计算过程：

- 应用该公式，只需要：偿还值及其现值，修正息票率 $g$ ，利率 $i$ 。

$$P = \frac{g}{i}(C - K) + K$$

- 将上述债券分解为5种面值均为200元，偿还值均为205元，偿还期分别为6，7，...，10的债券。

时期	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
面值	1000										
偿还值							205	205	205	205	205



- 如果分解后的每种债券具有相同的修正息票率 $g$ ，第 $s$ （ $s = 1, 2, 3, 4, 5$ ）个债券的价格可表示为

$$P_s = \frac{g}{i}(C_s - K_s) + K_s$$

- 则原债券的价格为

$$P = \sum_{s=1}^5 P_s = \frac{g}{i} \left( \sum_{s=1}^5 C_s - \sum_{s=1}^5 K_s \right) + \sum_{s=1}^5 K_s$$



- 在上例中，每个债券的修正息票率均为

$$g = 200 \times 5\% \div 205 = 0.04878$$

- 5种债券的偿还值之和为

$$\sum_{s=1}^5 C_s = 205 \times 5 = 1025$$

- 5种债券的偿还值的现值之和为

$$\sum_{s=1}^5 K_s = 205v^5 a_{\overline{5}|} = 645.28$$

- 所以原债券的价格为

$$P = \frac{g}{i} \left( \sum_{s=1}^5 C_s - \sum_{s=1}^5 K_s \right) + \sum_{s=1}^5 K_s = 953.99$$





## 债券价格的计算公式（小结）：

$$P = rFa_{\overline{n}|} + Cv^n$$

基本公式

$$= C + C(g - i)a_{\overline{n}|}$$

溢价公式

$$= G + (C - G)v^n$$

基价公式

$$= \frac{g}{i}(C - K) + K$$

**makeham**公式



## 衡量债券收益水平的指标:

$$\text{息票率 } (r) = \frac{\text{息票收入}}{\text{面值 } (F)}$$

$$\text{修正息票率 } (g) = \frac{\text{息票收入}}{\text{偿还值 } (C)}$$

$$\text{到期收益率 } (i) = \frac{\text{息票收入}}{\text{基价 } (G)}$$

$$\text{当期收益率 (current yield)} = \frac{\text{息票收入}}{\text{债券价格}}$$



# 可赎回债券的价格

- 可赎回债券(callable bonds)：发行人有权赎回的债券。
- 为什么发行可赎回债券？
- 通常有赎回保护期（call protection period），有相对较高的收益率补偿赎回风险（call risk）。
- 赎回价格（call price）：大于到期偿还值。差额称作赎回溢价（call premium）



**例：**一种8年期的可赎回债券的息票率为12%，按面值1000元发行，若到期偿还，则按面值偿还。赎回保护期为5年。

- 如果发行人在第5年末赎回，赎回价格为1050元
- 如果在第6年末赎回，赎回价格为1030元
- 如果在第7年末赎回，赎回价格为1010元

假设债券发行人从第5年末开始可以在任何一年末行使赎回权，如果投资者所要求的收益率为10%，那么投资者愿意支付的购买价格应为多少？

● **投资者的购买价：**在各种赎回日期下，债券的最低价格。



- 如果在第5年末赎回，债券价格应为

$$P = 120a_{\overline{5}|} + 1050v^5 = 1106.86$$

- 如果在第6年末赎回，债券价格应为1104.04
- 如果在第7年末赎回，债券价格应为1102.50
- 如果债券到期时偿还，债券价格应为1106.70
- 投资者的购买价格应为1102.50元。



## 特殊情况：可赎回债券的偿还值不变

如果偿还值不变，由溢价公式可知：

- 按溢价发行，即  $g - i > 0$ ，偿还期  $n$  越短，债券价格越低
- 按折价发行，即  $g - i < 0$ ，偿还期  $n$  越长，债券价格越低

$$P = C + C(g - i)a_{\overline{n}|i}$$



- **Example:**

An investor buys a 10-year callable bond with semiannual coupons of 6%. The par value of the bond is 100. The bond is callable after 5 years at a call price of \$102.

- (1) Determine the price of the bond to yield 7% compound semiannually.
- (2) Determine the price of the bond to yield 5% compound semiannually.

## Solution:



(1)  $rF = 3$ ,  $g = 3/102 = 2.94\%$ ,  $i = 3.5\%$

折价发行,  $n$  越大, 价格越低, 故  $n = 20$

$$P = 102 + 102 \times (2.94\% - 3.5\%) \times a_{\overline{20}|3.5\%} = 93.90$$

(2)  $i = 2.5\%$

溢价发行,  $n$  越小, 价格越低, 故  $n = 10$

$$P = 102 + 102 \times (2.94\% - 2.5\%) \times a_{\overline{10}|2.5\%} = 105.94$$





## Exercise

- An investor borrows an amount at an annual effective interest rate of 5% and will repay all interest and principal in a lump sum at the end of 10 years. She uses the amount borrowed to purchase a 1000 par value 10-year bond with 8% semiannual coupons bought to yield 6% convertible semiannually. All coupon payments are reinvested at a nominal rate of 4% convertible semiannually.
- Calculate the net gain to the investor at the end of 10 years after the loan is repaid.



Price of a bond:  $1000 \cdot \left[ (1.03)^{-20} + 0.04a_{\overline{20}|3\%} \right] = 1148.77 = \text{loan principal}$

Loan principal and interest paid:  $1148.77 \cdot (1.05)^{10} = 1871.23$

Accumulated bond payments:  $1000 \cdot \left( 1 + 0.04s_{\overline{20}|2\%} \right) = 1971.89$

Net gain = 100.66

解释：借入**1148.77**购买债券并将息票收入再投资，到期的累积价值为**1971.89**；到期偿还借款和利息为**1871.23**。



## 问题

有位朋友面临如下问题：有100万元资金需要投资5年，在下述两种投资中如何选择？

- **选择1**：银行5年期定期存款，年利率为5.5%。
- **选择2**：5年期债券。债券的年息票率为5.2%，每年末支付一次利息，平价发行，到期按面值偿还。



$n=5$

$r=0.052$  #息票率

$i=0.055$  # $n$ 年期银行存款的年名义利率

$f1=function(x) 1000*(1+x)^n-1000*(1+n*i)$  #银行存款的收益率函数

$f2=function(x) 1000-1000*(1+x)^{-n}-r*1000*(1-(1+x)^{-n})/x$  #债券的收益率函数

$A1=uniroot(f1,c(0.001,1)) \$root$  #银行存款的收益率

$A2=uniroot(f2,c(0.001,1)) \$root$  #债券的收益率

$A1-A2$

$A1-A2 = -0.002228912$

上述结果的合理性？



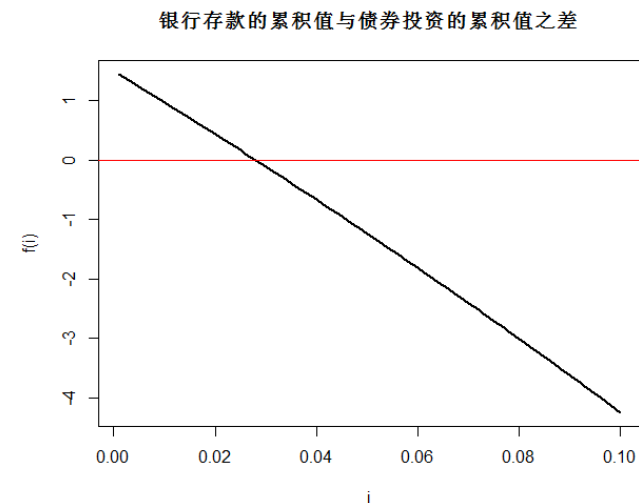
● 另一种思路:

# 假设息票收入的再投资利率为 $i$ , 计算银行存款的累积值与债券投资的累积值之差:

```
f=function(i) 100*(1+5*5.5/100)-(100+5.2*((1+i)^5-1)/i)
```

```
uniroot(f,c(0.0001,0.4))$root
```

```
[1] 0.02804747
```



# 股票



## ● 什么是股票？

股票是股份公司在筹集资本时向出资人发行的、用以**证明出资人的股本身份和权利**，并根据持有人所持有的股份数享有权益和承担义务的**凭证**。

## ● 股票的分类一：

- A股，人民币普通股票。
- B股，人民币特种股票，以人民币标明面值，以外币认购和买卖，在境内（上海、深圳）证券交易所上市交易。
- H股，即注册地在内地、上市地在香港的外资股。



## ● 股票的分类之二

- **优先股：**股息优先，剩余资产分配优先。与债券类似，获得固定比例的回报。
- **普通股：**清偿所有债务，且优先股的分红完成之后，才能参与分红。红利水平是不确定的。



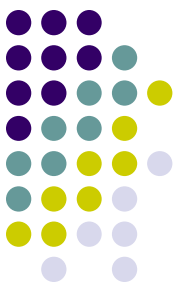
# 股票的价格

- **优先股：** 价格完全由息票收入或分红决定，现值为

$$P = \frac{D}{i}$$

- **普通股：** 红利水平是不确定的，价格也是多变的。





## 普通股的价格：

(1) 股票上市时的价格——也称“理论价” (theoretical price) 。

- 由今后可能的分红与收益率决定
- 称之为分红贴现模型 (dividend discount model) 。

$$P = \sum_{t=1}^{\infty} v^t D_t$$

## (2) 股票市场价

随着股票进入市场后的买卖情况，随时波动。



# 普通股的理论定价模型：

## 1. 零增长模型 (level dividend)

假设股息的增长率为零，即每期的股息均为 $D$ ，即

$$D_t = D \quad (t = 1, 2, \dots)$$

则普通股的价格与优先股类似，也可以表示为

$$P = \frac{D}{i}$$



## 2. 常数增长模型(constant dividend growth)

假设股息的增长率是一个常数  $r$ 。如果第一年末的股息为  $D_1$ ，股票的理论价格为（复递增年金）

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_1}{1+r} a_{\overline{n}|j} = \frac{D_1}{1+r} \frac{1+r}{i-r} = \frac{D_1}{i-r}$$

$$j = \frac{i-r}{1+r}$$

（假设  $r < i$ ，否则不收敛）



## Exercise

- A stock is expected to pay a dividend of \$10 next year. The required market return is 15% for similarly risky stocks. The dividend are expected to grow 3% per year. Calculate the expected stock price.

- **Solution:**

$$\text{PV of dividends} = 10 / (15\% - 3\%) = \$83.33$$



## Exercise

- A stock is currently trading at \$50. it is expected to pay a dividend of \$5 next year. Dividends are expected to grow by 3% each year thereafter. Calculate the required return for this stock.
- **Solution:**

$$P = \frac{D_1}{i - r} \Rightarrow 50 = \frac{5}{i - 3\%} \Rightarrow i = \frac{5}{50} + 3\% = 13\%$$



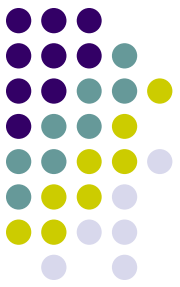
### 3. 通过市盈率（**price-to-earnings ratio**）计算股价

$$\text{市盈率} = \frac{\text{每股股价}}{\text{每股收益}}, \quad \text{P/E ratio} = \frac{\text{stock price per share}}{\text{earnings per share}}$$

$$\text{股价} = \text{市盈率} \times \text{每股收益}$$

例：A公司去年一年的收益为25万元。B公司去年一年的收益为100万元，股价为30元，股票数量为10万。B公司与A公司很相似，请计算A公司的市场价值(market capitalization)。

$$\frac{X}{25} = \frac{30 \times 10}{100} = 3 \Rightarrow X = 75$$



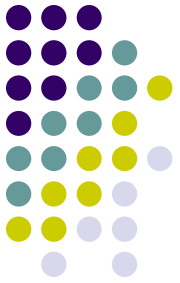
# 卖空（short sale）

**卖空：** 出售某项当前并非属于其所有的资产。相当于借入股票然后卖出。

**保证金（Margin deposit）：**

通常为初始股价的一个百分比。

**红利（Dividend）：** 卖空期间股票所产生的红利，由卖空者支付给经纪人。



$$\begin{aligned}\text{卖空利润} &= \text{份数} \times (\text{出售价格} - \text{购买价格}) \\ &\quad + \text{保证金利息} \\ &\quad - \text{红利}\end{aligned}$$

$$\text{卖空收益率} = \text{卖空利润} / \text{保证金}$$



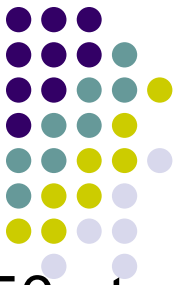


**例：**某投资者以每股5元的价格卖空X 股票1000股，一年后以每股4.5元的价格购入1000股 X 股票偿还给交易商。交易商要求的交易保证金为30%，交易保证金帐户的年利率为6%，假设每股X股票在每年的红利为0.2元，请计算该投资者的卖空收益率。

**解：**交易保证金为：  $0.3 \times 1000 \times 5 = 1500$

卖空利润为：  $1000 \times (5 - 4.5) + 0.06 \times 1500 - 0.2 \times 1000 = 390$

收益率为：  $390 / 1500 = 26\%$



- **Exercise:**

Fred sells a share of ABC stock short. It is worth \$3.50 at that time. He pays a margin of 50% of the price of the share. He buys a share of ABC stock a year later when the price has fallen to \$2.90. the margin deposit does not earn interest. What is Fred's yield on his transaction, assuming that the share pays no dividends in the year.

- **Solution:**

Fred margin deposit is  $0.5 \times 3.50 = 1.75$

The yield on his deposit is  $(3.50 - 2.90) / 1.75 = 34.3\%$