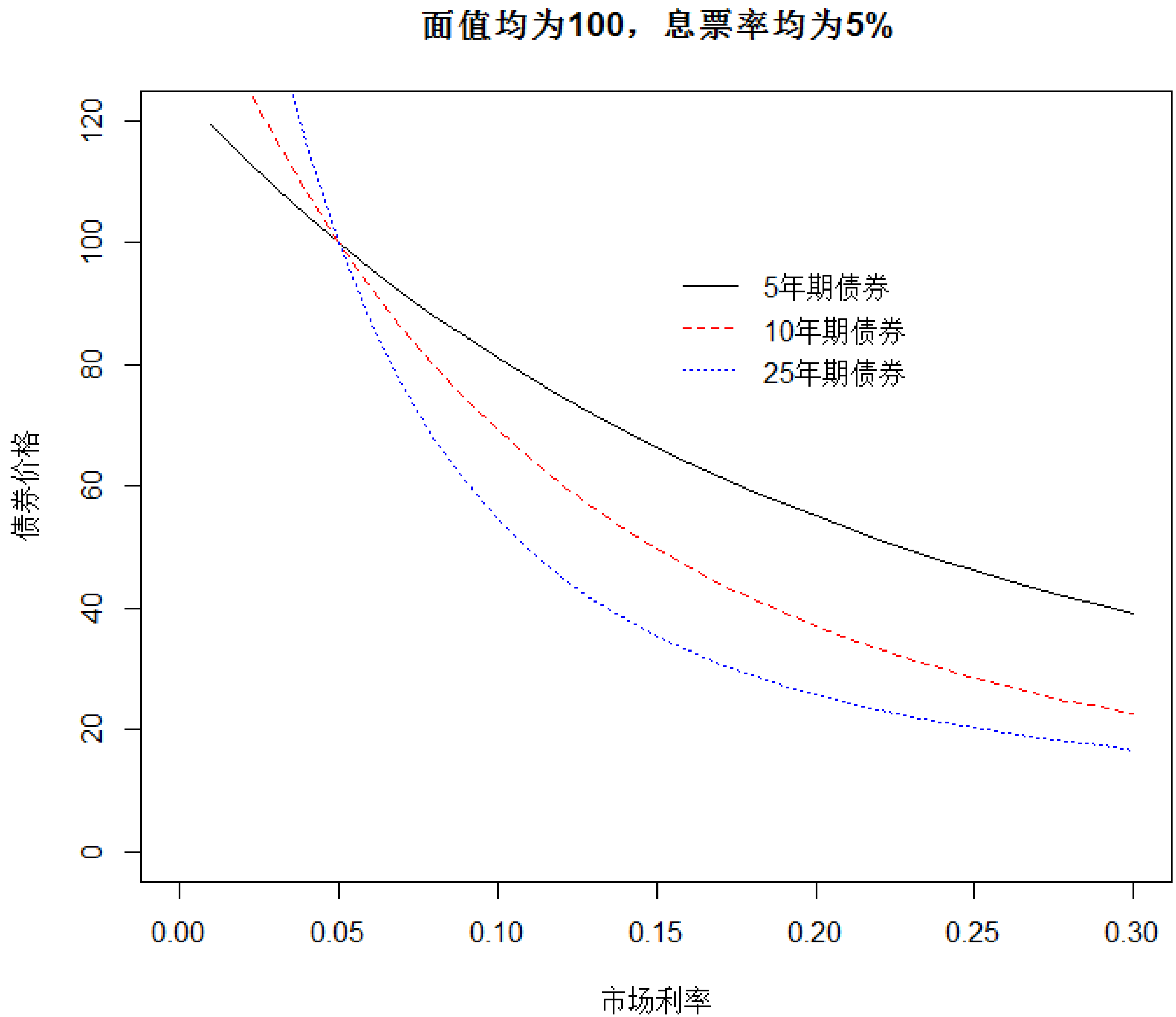
利率风险
Interest rate risk

孟生旺

中国人民大学统计学院

http://blog.sina.com.cn/mengshw


面值均为100，息票率均为5%
5年期债券
10年期债券
25年期债券
债券价格
市场利率
0
20
40
60
80
100
120
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30

主要内容：

- 久期（duration）：马考勒久期，久期，有效久期
- 凸度（convexity）：马考勒凸度，凸度，有效凸度
- 免疫（immunization）: 久期和凸度的应用
- 现金流配比（cash flow matching）

马考勒久期（Macaulay duration）

- 假设资产未来的现金流为 R_t ，则资产的价格：

$$P = \sum_{t>0} R_t \mathrm{e}^{-\delta t}$$

- **马考勒久期：** 现金流到期时间的加权平均数。

$$D_{马} = \frac{\sum\limits_{t>0} t \cdot R_t \mathrm{e}^{-\delta t}}{P}$$

- 马考勒久期越大，资产价格对利率越敏感，利率风险越高。
- 马考勒久期是一个时间概念。
- 使用等价的名义利率代替利息力，马考勒久期不变。

- 马考勒久期的另一种表示：

$$D_{马} = \frac{\sum_{t>0} t \cdot R_t e^{-\delta t}}{P(\delta)} = -\frac{P'(\delta)}{P(\delta)}$$

$$P(\delta) = \sum_{t>0} R_t e^{-\delta t}$$

注：表示资产价格关于利息力的单位变化速率。

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

- **利息力对马考勒久期的影响**

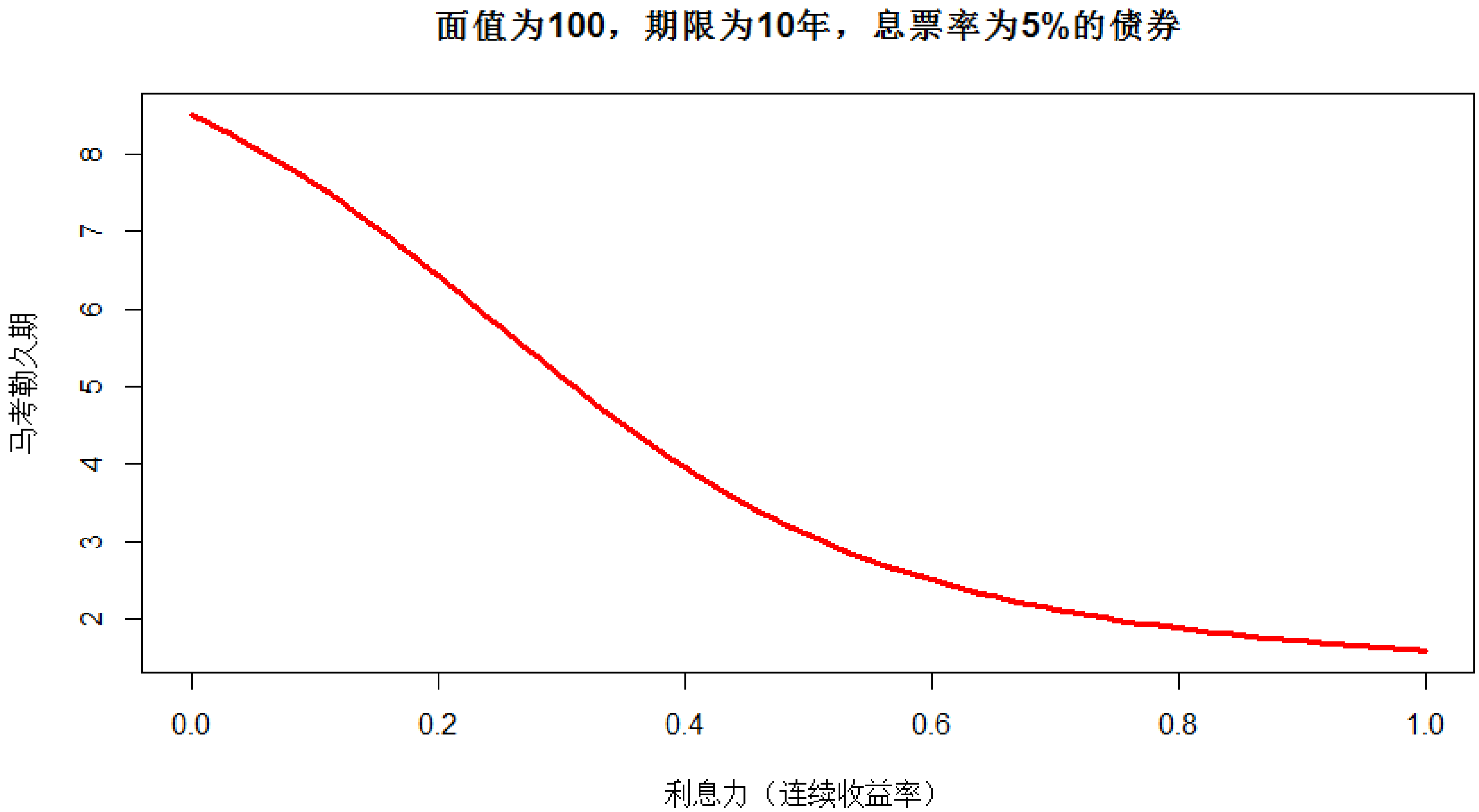
将马考勒久期对δ 求导可得（请检验）

$$\frac{\partial D_{马}}{\partial \delta} = \frac{\partial}{\partial \delta} \frac{\sum_{t>0} tR_t e^{-\delta t}}{\sum_{t>0} R_t e^{-\delta t}} = \frac{-\left[\sum_{t>0} t^2 R_t e^{-\delta t}\right]\left[\sum_{t>0} R_t e^{-\delta t}\right] + \left[\sum_{t>0} tR_t e^{-\delta t}\right]^2}{\left[\sum_{t>0} R_t e^{-\delta t}\right]^2}$$

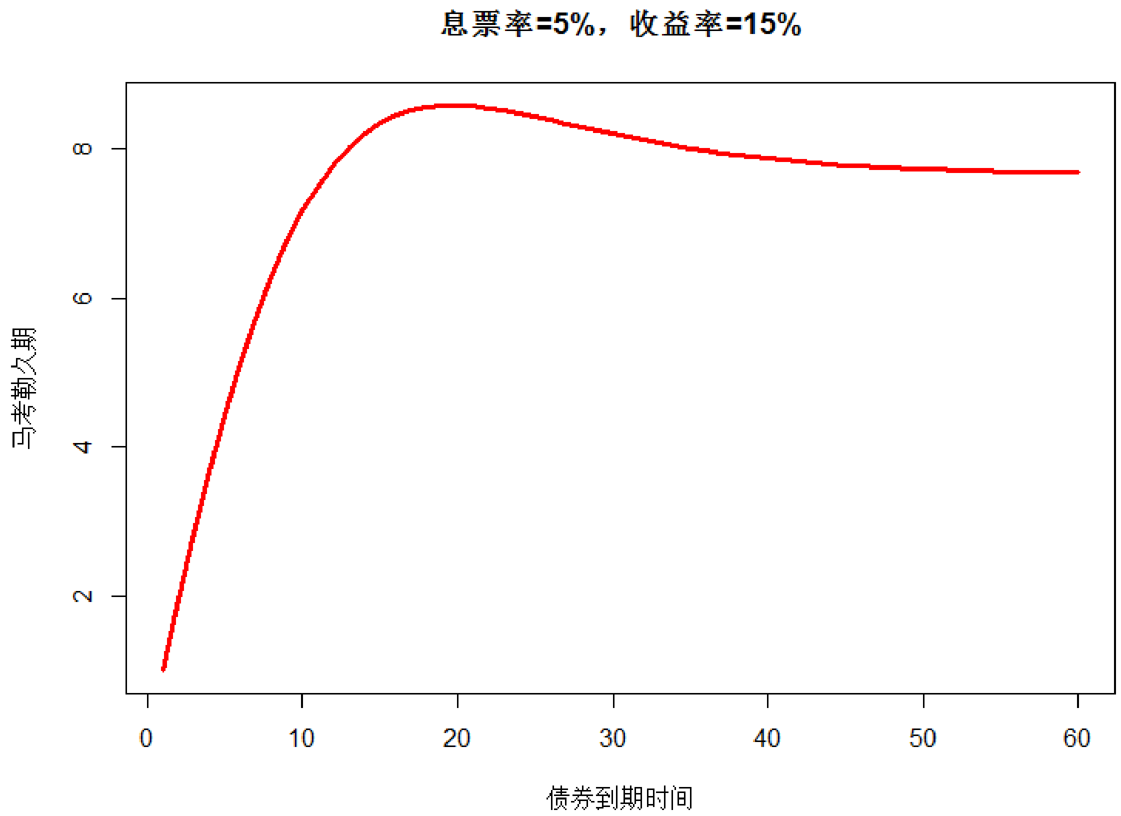
$$= -\left[\frac{\sum_{t>0} t^2 R_t e^{-\delta t}}{\sum_{t>0} R_t e^{-\delta t}} - \left(\frac{\sum_{t>0} tR_t e^{-\delta t}}{\sum_{t>0} R_t e^{-\delta t}}\right)^2\right] = -\sigma^2$$

（t 的方差）

注： 是利息力的减函数。如何直观解释？


面值为100，期限为10年，息票率为5%的债券
马考勒久期
2
3
4
5
6
7
8
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
利息力（连续收益率）

- **债券到期时间对马考勒久期的影响（一个反例）**



注：用债券的到期时间衡量利率风险可能出现误导。

（修正）久期

- **修正久期（modified duration）：** 名义收益率变化时资产价格的单位变化速率。

$$D = -\frac{P'(y)}{P(y)}$$

$$P = \sum_{t>0} R_t \left(1 + \frac{y}{m}\right)^{-mt}$$

- y 表示每年复利 m 次的年名义收益率
- 修正久期越大，价格波动幅度越大，利率风险越高。

- 资产价格对名义收益率y（假设每年复利m次）求导可得：

$$P'(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sum_{t>0}R_t\left(1+y/m\right)^{-mt}=-\sum_{t>0}tR_t\left(1+y/m\right)^{-mt-1}$$

$$=-\frac{\sum_{t>0}tR_t\left(1+y/m\right)^{-mt}}{1+y/m}\qquad=-\frac{D_{马}\cdot P}{1+y/m}$$

分子上除以价格 P 就是到期时间的加权平均数，即马考勒久期

$$\boxed{\Rightarrow D=\frac{D_{马}}{1+y/m}}$$

注意：使用不同的名义收益率（即 m 不同），修正久期不同。

- 修正久期与马考勒久期的关系：

$$D = \frac{D_{马}}{1 + y/m}$$

- 当 $m \to \infty$ 时，　$\lim\limits_{m \to \infty} D = D_{马}$

- 另一种解释：当$m \to \infty$时，$y \to \delta$，故有

$$\lim_{m \to \infty} D = \lim_{m \to \infty} -\frac{P'(y)}{P(y)} = -\frac{P'(\delta)}{P(\delta)} = D_{马}$$

- 资产价格与修正久期的关系：

$$D=-\frac{P'(y)}{P(y)} \quad \Leftrightarrow \quad D=-\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial y}\approx-\frac{1}{P}\frac{\Delta P}{\Delta y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta P}{P}\approx -D\cdot(\Delta y)$$

注： △y 表示名义收益率的变化，用基点（base points）表示。一个基点为 0.01%。

问题：资产价格与马考勒久期的关系？

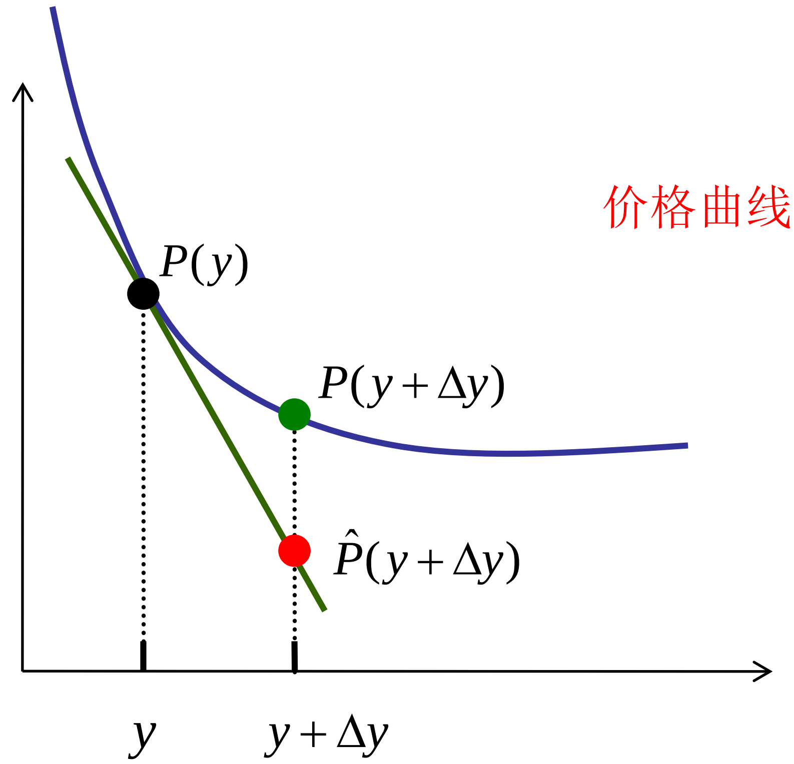
- **例**：已知某债券的价格为115.92元，到期收益率为7%，修正久期为8.37。请计算当到期收益率上升为7.05%时，债券的价格为多少。
- **解**：当收益率上升时，债券价格下降的百分比为：

$$\frac{\Delta P}{P} = -(\Delta y) \cdot D_{修} = -(7.05\% - 7\%) \times 8.37 = -0.42\%$$

- 所以新的债券价格近似为：

$$115.92 \times (1 - 0.42\%) = 115.43$$

资产价格随收益率变动的近似线性关系



价格曲线越弯曲，误差越大

$$\frac{\Delta P}{P}=\frac{P(y+\Delta y)-P(y)}{P(y)}\approx\frac{\hat{P}(y+\Delta y)-P(y)}{P(y)}=\frac{P'(y)}{P(y)}\cdot\Delta y=-D\cdot\Delta y$$

Exercise：

- The current price of a bond is100. The derivative of the price with respect to the yield to maturity is –700. The yield to maturity is 8%.
- Calculate the Macaulay duration of that bond.

Solution：

$$P = 100$$

$$P'(y) = -700$$

$$y = 8\%$$

$$D = -\frac{P'(y)}{P(y)} = 7$$

$$D_{\text{马}} = (1 + y)D = 1.08 \times 7 = 7.56$$

有效久期（effective duration）

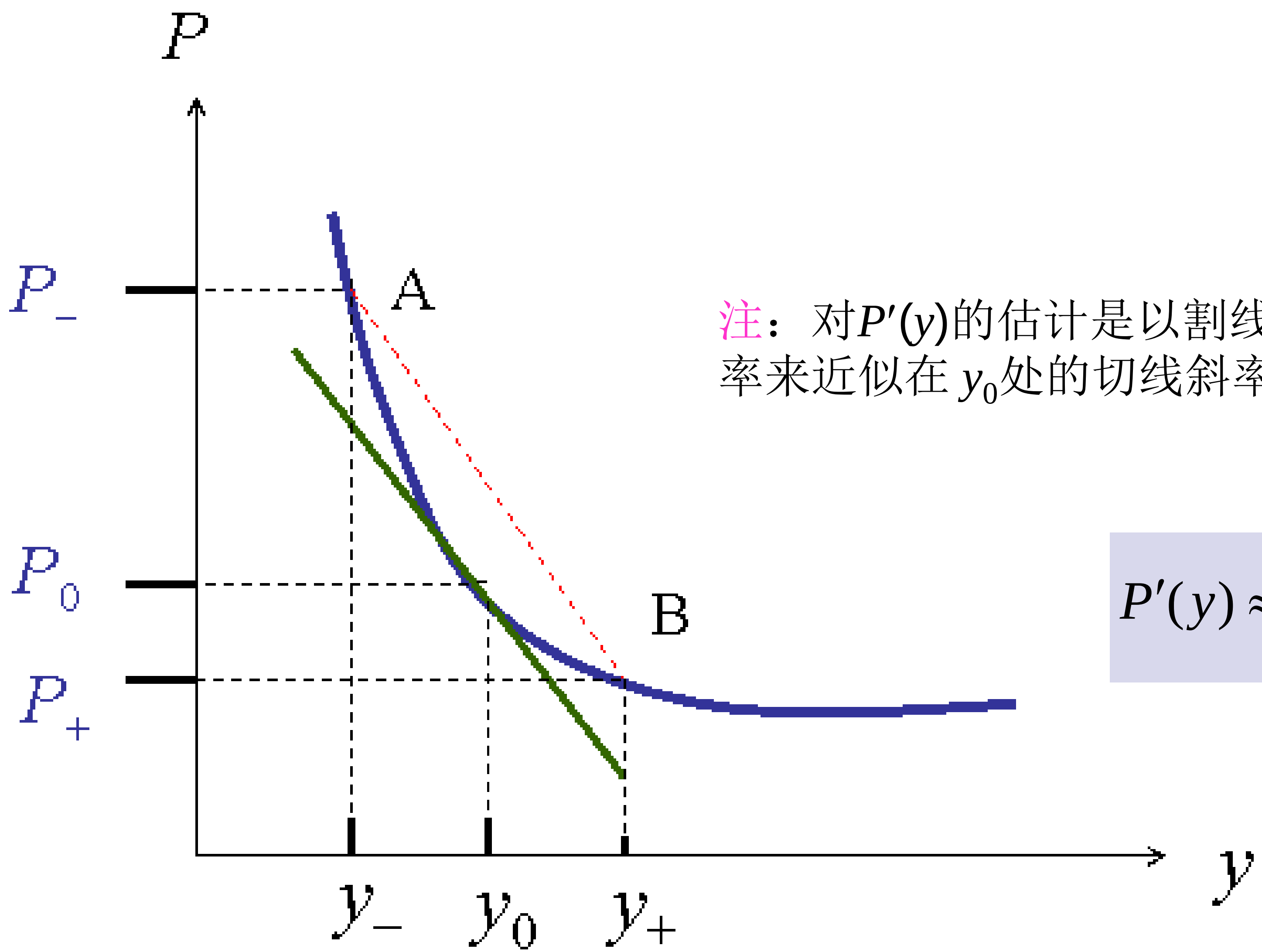
- 如果现金流是确定的，可以计算资产价格对收益率的一阶导数$P'(y)$，从而计算修正久期。
- 如果未来的现金流是不确定的（如可赎回债券），估计：

$$P'(y) \approx \frac{P_+ - P_-}{2\Delta y}$$

- 符号：

P_+ 收益率上升Δy 时的债券价格

P_- 收益率下降 Δy时的债券价格



注：对$P'(y)$的估计是以割线AB的斜率来近似在 y_0处的切线斜率。

$$P'(y) \approx \frac{P_+ - P_-}{2\Delta y}$$

资产价格随到期收益率变动的近似线性关系

- 在修正久期中，$P'(y)$ 用近似值代替，得有效久期：

$$D=-\frac{P'(y)}{P(y)}\approx\frac{P_{-}-P_{+}}{P\left(2\Delta y\right)}=D_{效}$$

- 即

$$D_{效}=\frac{P_{-}-P_{+}}{P\left(2\Delta y\right)}$$

例： 已知一个6年期可赎回债券的现价为100元，当收益率上升100个基点时，该债券的价格将降为95.87元。当收益率下降100个基点时，该债券的价格将升至104.76元。请计算该债券的有效久期。

解：

$$P = 100 \qquad P_{+} = 95.87$$

$$P_{-} = 104.76 \qquad \Delta y = 0.01$$

$$D_{\text{效}} = \frac{P_{-} - P_{+}}{P(2\Delta y)} = \frac{104.76 - 95.87}{100 \times 2 \times 0.01} = 4.45$$

凸度 (convexity)

- 基于名义收益率的凸度C:

（修正）久期：$$D = -\frac{P'(y)}{P(y)}$$

凸度：$$C = \frac{P''(y)}{P(y)}$$

资产价格对名义收益率求二阶导数：

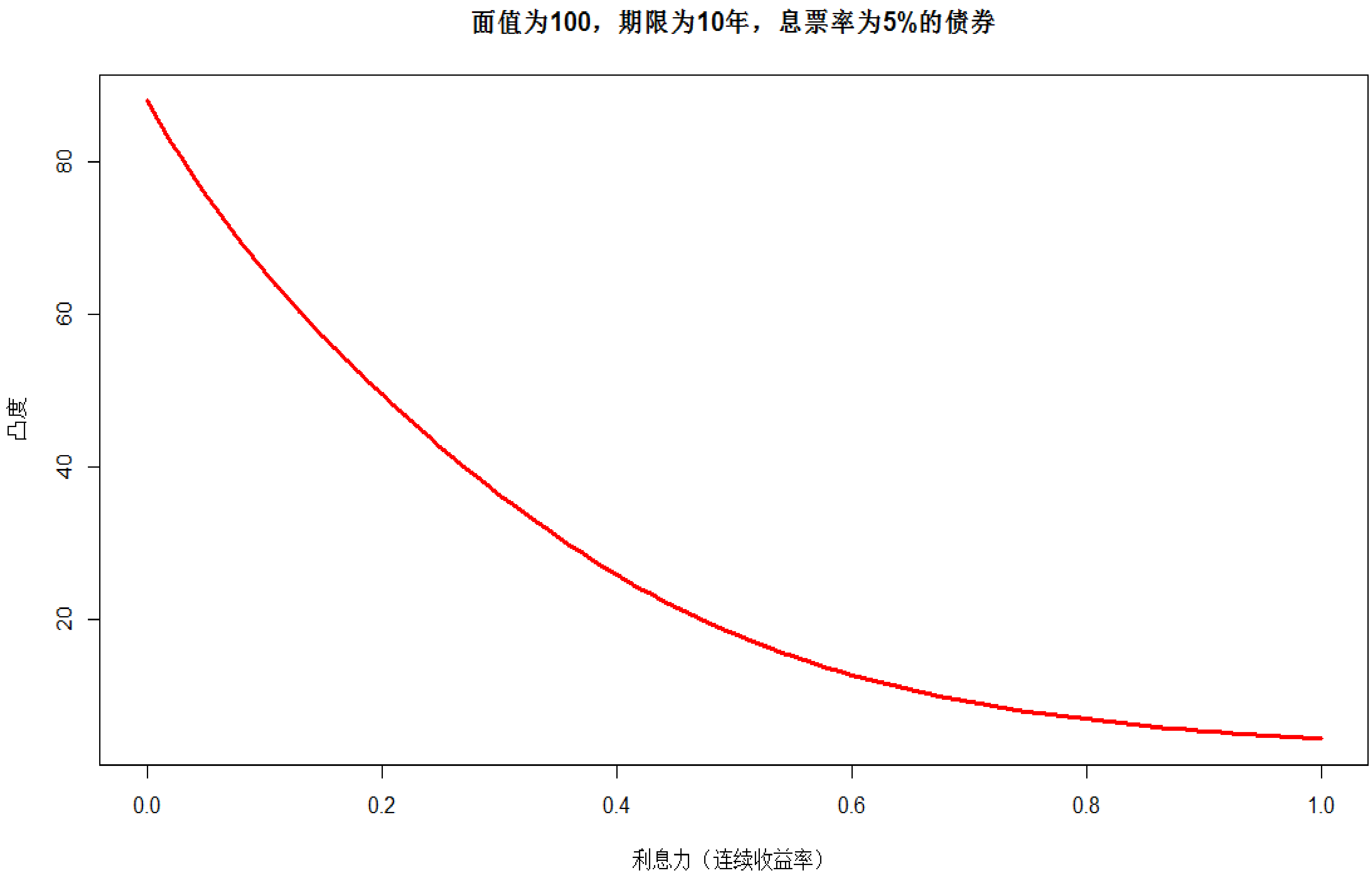
$$P'(y)=\frac{\partial}{\partial y}\sum_{t>0}R_t\left(1+\frac{y}{m}\right)^{-mt}=-\sum_{t>0}tR_t\left(1+\frac{y}{m}\right)^{-mt-1}$$

$$P''(y)=\sum_{t>0}t\left(\frac{mt+1}{m}\right)R_t\left(1+\frac{y}{m}\right)^{-mt-2}$$

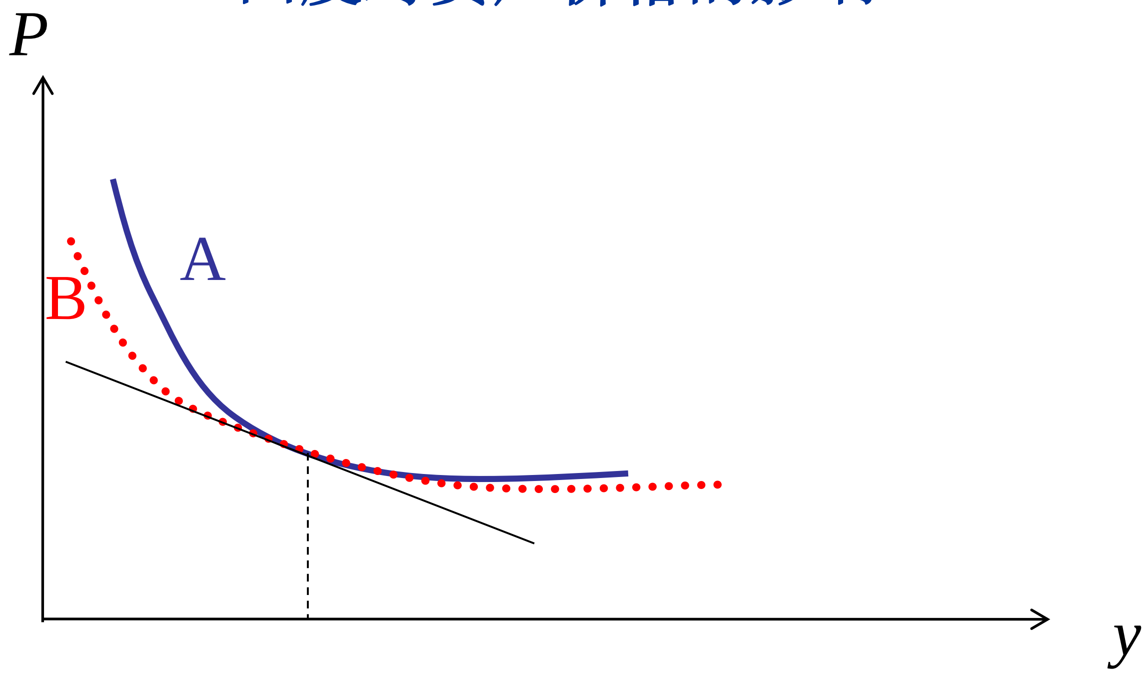
凸度的计算公式：

$$C=\frac{P''(y)}{P(y)}=\frac{1}{P(y)}\left[\sum_{t>0}t\left(t+\frac{1}{m}\right)R_t\left(1+\frac{y}{m}\right)^{-mt-2}\right]$$

可以证明，凸度是收益率 y 的减函数（见下图，课后练习）。


面值为100，期限为10年，息票率为5%的债券
凸度
20
40
60
80
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
利息力（连续收益率）

凸度对资产价格的影响



凸度是对资产价格曲线的弯曲程度的一种度量。

债券**A**的凸度大于债券**B**的凸度：

当利率下降时，**A**的价格上升快

当利率上升时，**A**的价格下降慢

马考勒凸度

- 用连续收益率δ代替名义收益率 y，即得马考勒凸度：

$$C_{马} = \frac{P''(\delta)}{P} = \frac{\frac{\partial^2}{\partial \delta^2}\left(\sum_{t>0} R_t e^{-\delta t}\right)}{P} = \frac{\sum_{t>0} t^2 R_t e^{-\delta t}}{P}$$

注：马考勒久期是 t 的加权平均数。
　　马考勒凸度是 t^2 的加权平均数。

- 马考勒久期与马考勒凸度的关系

马考勒久期：t 的平均数

马考勒凸度：t^2 的平均数

$$t \text{ 的方差} \sigma^2 = C_{马} - D_{马}^2$$

$$C_{马} = \sigma^2 + D_{马}^2$$

结论：现金流的时间越分散，马考勒凸度越大。

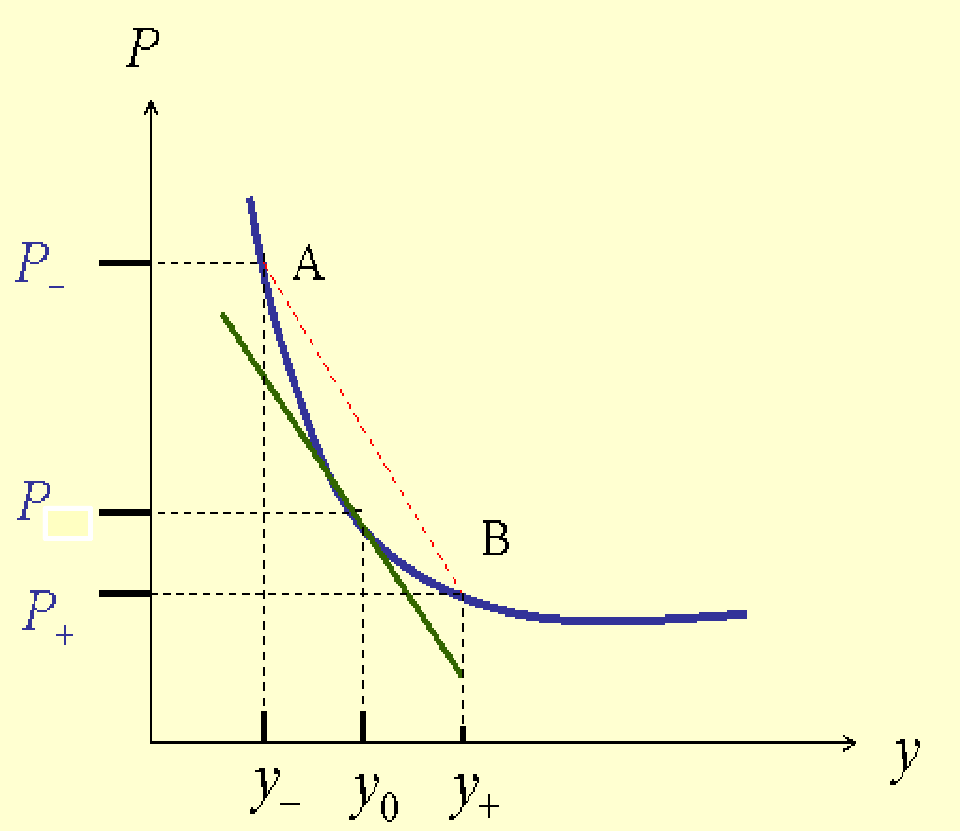
有效凸度

- $P''(y)$ 的近似计算：

$$P''(y)=\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}y^2}\approx\frac{\Delta(\Delta P)}{(\Delta y)^2}$$

$$=\frac{(P_- - P)-(P-P_+)}{(\Delta y)^2}$$

$$=\frac{(P_+ + P_- - 2P)}{(\Delta y)^2}$$



- 有效凸度 是对凸度C的近似计算：

$$C = \frac{P''(y)}{P} \approx \frac{\left(P_+ + P_- - 2P\right)}{\left(\Delta y\right)^2 P} = C_{效}$$

- 即

$$C_{效} = \frac{\left(P_+ + P_- - 2P\right)}{\left(\Delta y\right)^2 P}$$

注： 上式也可以应用于马考勒凸度的近似计算

例（略）： 已知一个6年期可赎回债券的现价为100元，当收益率上升100个基点时，该债券的价格将降为95.87元。当收益率下降100个基点时，该债券的价格将升至104.76元。请计算该债券的有效凸度。

解： 该债券的有效凸度为：

$$C_{效} = \frac{P_{+} + P_{-} - 2P}{(\Delta y)^2 P} = \frac{95.87 + 104.76 - 2 \times 100}{(0.01)^2 (100)} = 63$$

Exercise

- A 3-year bond paying 8% coupons semiannually has a current price of $97.4211 and a current yield of 9% compounded semiannually. If the bond's yield increases by 100 basis points, then the price will be $94.9243. if the bond's yield decreases by 100 basis points, then the price will be $100. calculate the effective convexity of the bond.
- Solution:

$$C_{效} = \frac{\left(P_{+} + P_{-} - 2P\right)}{\left(\Delta y\right)^2 P} = \frac{94.9243 + 100 - 2 \times 97.4211}{(0.01)^2 \times 97.4211} = 8.4273$$

资产组合的久期和凸度:

- 计算组合中每种证券的久期和凸度。
- 以每种证券的市场价值为权数计算久期和凸度的加权平均数。

例： 假设某证券组合由 n 种债券构成，债券 k 的现值 P_k，久期D_k，则证券组合的价格为：

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

该证券组合的久期为：

$$D = -\frac{P'}{P} = -\frac{\sum_{k=1}^{n} P_k'}{P} \qquad = \sum_{k=1}^{n} \frac{-\left(\frac{P_k'}{P_k}\right) P_k}{P} \qquad = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{P} D_k$$

类似地，假设债券 k 的凸度为C_k，则证券组合的凸度为：

$$C = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{P} C_k$$

例： 一个债券组合由两种面值均为100的债券构成，两种债券到期后均按面值偿还，且到期年收益率均为5%。第一种债券的年息票率为6%，期限为5年。第二种债券为10年期的零息债券。请计算该债券组合的修正久期。

解： 第一种债券的价格为 $P_1 = 6a_{\overline{5}|5\%} + 100(1+5\%)^{-5}$=104.33

马考勒久期是到期时间的加权平均数

$$D_{马1} = \left[6(1.05^{-1} + 2\times1.05^{-2} + \ldots + 5\times1.05^{-5}) + 5\times100\times1.05^{-5}\right] / P_1$$

$$= 6(Ia)_{\overline{5}|} + 100\times5\times1.05^{-5} = 4.48$$

修正久期 D_1= 4.48/(1+0.05) = 4.26

第二种债券的价格为：

$$P_2 = 100(1+y)^{-10} = 61.39$$

该债券的马考勒久期：10（零息债券的到期时间）

修正久期 D_2 = 10/(1+0.05)=9.52

债券组合的价格为： $P = P_1 + P_2 = 165.72$

债券组合的修正久期为： $D = \frac{P_1}{P} D_1 + \frac{P_2}{P} D_2 = 6.21$

Exercise:

- You are managing a bond portfolio of $1,000,000. You decide that the Macaulay duration of your portfolio should be exactly 10.
- You have only two securities to choose from for your investments: a zero-coupon bond of maturity 5 years, and a continuous perpetuity paying at the rate of $1 per year.
- Current force of interest is 5%.
- How much will you invest in each of these securities in order to have the desired Macaulay duration?

说明：

零息债券：马考勒久期 $= 5$

永续年金：$P = 1/\delta$， $P' = -1/\delta^2$

马考勒久期 $= -P'/P = 1/\delta = 1/0.05 = 20$

$w * 5 + (1 - w) * 20 = 10$

$w = 2/3$

久期和凸度的比较

$$D_{马} = -\frac{P'(\delta)}{P(\delta)} = E(t)$$

$$D = -\frac{P'(y)}{P(y)} = \frac{D_{马}}{1+y/m}$$

$$D_{效} = \frac{P_{-} - P_{+}}{P_0\left(2\Delta y\right)}$$

$$C_{马} = \frac{P''(\delta)}{P(\delta)} = E(t^2)$$

$$C = \frac{P''(y)}{P(y)}$$

$$C_{效} = \frac{\left(P_{+} + P_{-} - 2P_0\right)}{\left(\Delta y\right)^2 P_0}$$

久期和凸度的关系（了解，令m = 1，m不等于1的情况参见教材）

$$1+y=e^{\delta} \qquad \frac{\partial y}{\partial \delta}=e^{\delta}$$

$$P'(\delta)=\frac{\partial P}{\partial \delta}=\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \delta}=P'(y)e^{\delta}$$

两边分别除以资产价格P

$$\Downarrow$$

两边关于δ再求导

$$D_{马}=De^{\delta}$$

$$P''(\delta)=P''(y)e^{2\delta}+P'(y)e^{\delta}$$

$$\Downarrow$$

两边分别除以资产价格 P

$$C_{马}=C\cdot e^{2\delta}-D\cdot e^{\delta}$$

$$C=(C_{马}+D_{马})\cdot e^{-2\delta}$$

久期和凸度的应用

- 债券价格的二阶泰勒近似：

$$P(y) \approx P(y_0) + P'(y_0)(y - y_0) + \tfrac{1}{2} P''(y_0)(y - y_0)^2$$

由此可得债券价格变化的近似公式：

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -久期 \cdot (\Delta y) + \frac{1}{2} \cdot 凸度 \cdot (\Delta y)^2$$

- **注意久期和凸度的配比：**
  - 久期和凸度。
  - 马考勒久期和马考勒凸度。
  - 有效久期和有效凸度。

例： 某债券的面值是1000元，期限为15年，年息票率为11%，到期时按面值偿还。如果到期年收益率为12%，请计算其价格、马考勒久期、修正久期和凸度。当到期年收益率上升至12.5%时，债券的价格将如何变化？

解：

$$P = 110a_{\overline{15}|0.12} + 1000(1+0.12)^{-15} = 931.89$$

$$D_{马} = t\text{的加权平均数} = 7.7486, \qquad D = \frac{D_{马}}{1+y} = 6.9184$$

$$C_{马} = t^2\text{的加权平均数} = 85.9193, \qquad C = \left(C_{马} + D_{马}\right)(1+y)^{-2} = 74.6716$$

利率上升50个基点所导致的价格变动幅度

- 真实值：–3.3674%。
- 用修正久期作近似计算：–6.9184×0.5% = –3.4592%
- 考虑凸度的影响，凸度引起的价格变化为

$$\tfrac{1}{2}\cdot C\cdot(\Delta y)^2=\tfrac{1}{2}\times 74.6716\times(0.5\%)^2\ =0.0933\%$$

- 故市场利率上升50个基点所导致的价格变动幅度为

$$-3.4592\%\ +0.0933\%\ =-3.3659\%$$

```
R=c(rep(110,14),1110)   #债券的现金流
t=1:15
i=0.12
P=sum(R*(1+i)^(-t))   #债券价格
macD=sum(t*R*(1+i)^(-t))/P   #马考勒久期
D=macD/(1+i)      #久期
macC=sum(t^2*R*(1+i)^(-t))/P   #马考勒凸度
C=(macC+macD)*(1+i)^(-2)   #凸度
di=0.5/100   #收益率的变化
dP1=-D*di   #基于久期计算债券价格变化
dP2=-D*0.5/100+0.5*C*(di)^2   #基于久期和凸度计算债券价格变化
dP1;dP2
```

回顾

$$D_{马} = -\frac{P'(\delta)}{P(\delta)} = E(t)$$

$$D = -\frac{P'(y)}{P(y)}$$

$$C_{马} = \frac{P''(\delta)}{P(\delta)} = E(t^2)$$

$$C = \frac{P''(y)}{P(y)}$$

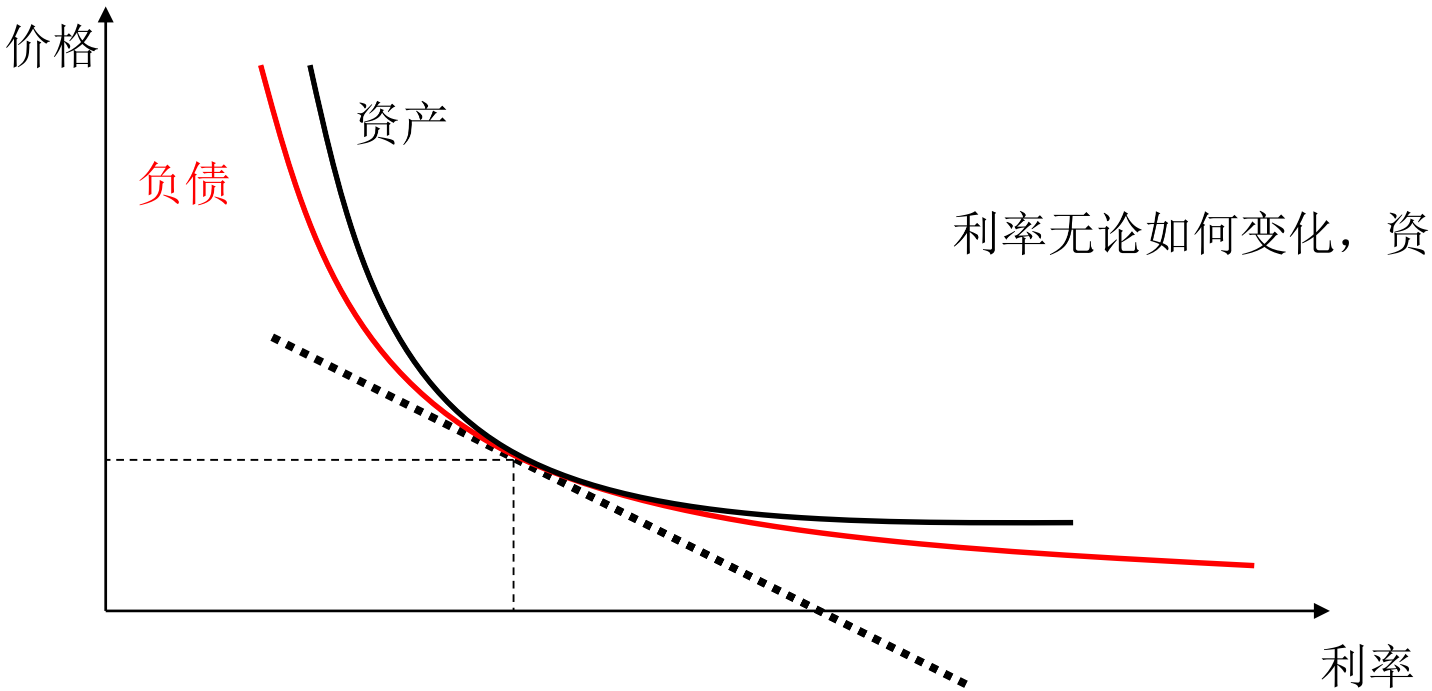
关系：$D = \dfrac{D_{马}}{1+y/m}$， $C = (C_{马} + D_{马}/m)\cdot \mathrm{e}^{-2\delta/m}$

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -久期\cdot(\Delta y) + \frac{1}{2}\cdot凸度\cdot(\Delta y)^2$$

利率风险管理：免疫（immunization）

- 假设未来的负债为 L_1，L_2，…，L_n，安排一系列资产A_1，A_2，…，A_n，以偿付未来到期的债务。
- 如何安排资产的结构，使得无论利率如何变化，盈余总是非负？ 盈余 = 资产 – 负债
- **Redington免疫的条件（下图）：**

- 现值相等
- 久期相等
- 资产的凸度 ≥ 负债的凸度



利率无论如何变化，资产 > 负债

证明： 下页

- 盈余：　　$S(y) = P_A - P_L$
- 对盈余求一阶导数：

$$S'(y) = \left(P_A\right)' - \left(P_L\right)' = -D_A \times P_A + D_L \times P_L$$

- 对盈余求二阶导数：

$$S''(y) = \left(P_A\right)'' - \left(P_L\right)'' = C_A \times P_A - C_L \times P_L$$

- 如果免疫的三个条件得以满足，就有

$$S(y) = 0, \qquad S'(y) = 0, \qquad S''(y) \geq 0$$

$$S(y)=0,\quad S'(y)=0,\quad S''(y)\geq 0$$

假设收益率的变化为Δy，应用级数展开，可得

$$S(y+\Delta y)\approx S(y)+\Delta y S'(y)+\frac{(\Delta y)^2 S''(y)}{2}\geq 0$$

结论： 收益率的微小变化，不会导致盈余减少。

注： 上述三个条件只在特定时点上成立，随着时间的推移，资产和负债的久期（或凸度）会发生不同的变化。

例：某公司在10年末需要偿还一笔1790.85万元的债务，按当前的利率6%计算，这笔债务的现值为1000万元。为了防范利率风险，债务人希望购买价值1000万元的债券实施免疫策略，假设可供选择的债券有如下三种，面值均为1000元：

- A：10年期，息票率为6.7%。
- B：15年期，息票率为6.988%。
- C：30年期，息票率为5.9%。

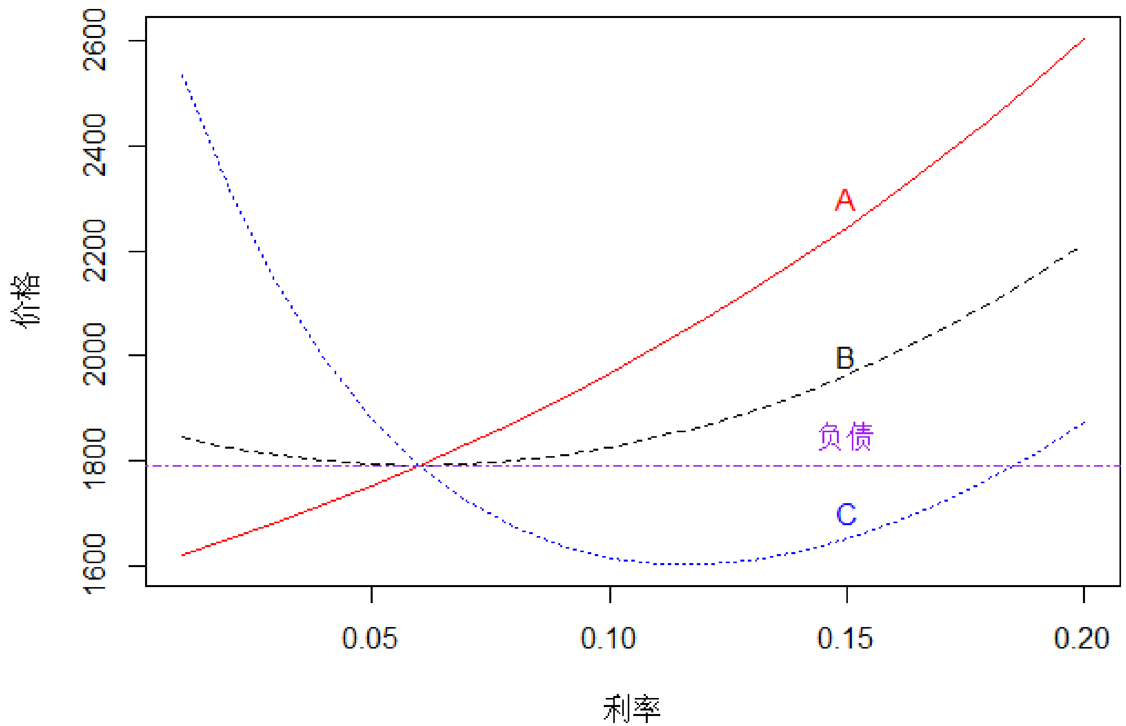
请问债务人应该如何选择上述三种债券？

- **计算马考勒久期：**
  - 负债：10
  - 债券A：7.6655
  - 债券B：10（与负债相同）
  - 债券C：14.6361

- **计算马考勒凸度：**
  - 负债：10^2= 100
  - 债券A：68.7346
  - 债券B：126.4996
  - 债券C：318.1085

资产和负债在第10年末的价格（累积值）。

当前利率 = 6%



结论：B的凸度大于负债，购买B可以实现免疫。

问题：有更好的选择吗？

- **免疫策略的另一种选择**：构造一个债券组合。
- 在A上的投资p，在C上的投资$(1-p)$。
- 组合的马考勒久期为

$$7.6655p + 14.6361(1-p)$$

令其等于负债的马考勒久期 10，即可求得

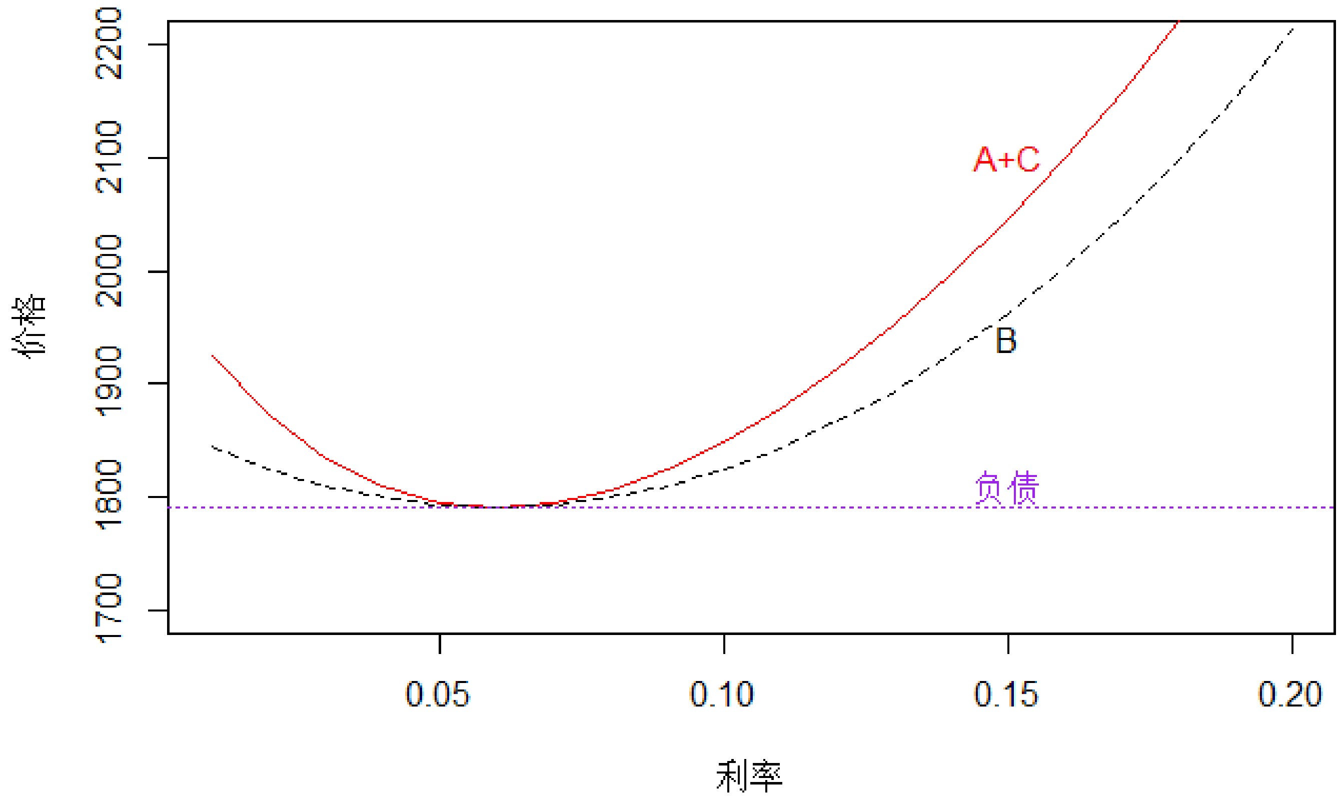
  - 在债券A上的投资：66.509%
  - 在债券C上的投资：33.491%

- 组合的马考勒凸度为(大于B的马考勒凸度126.4996)：

$$68.7346 * 66.59\% + 318.1085 * 33.491\% = 152.31$$

- （见下图）

在不同利率条件下，第10年末的价格（累积值）

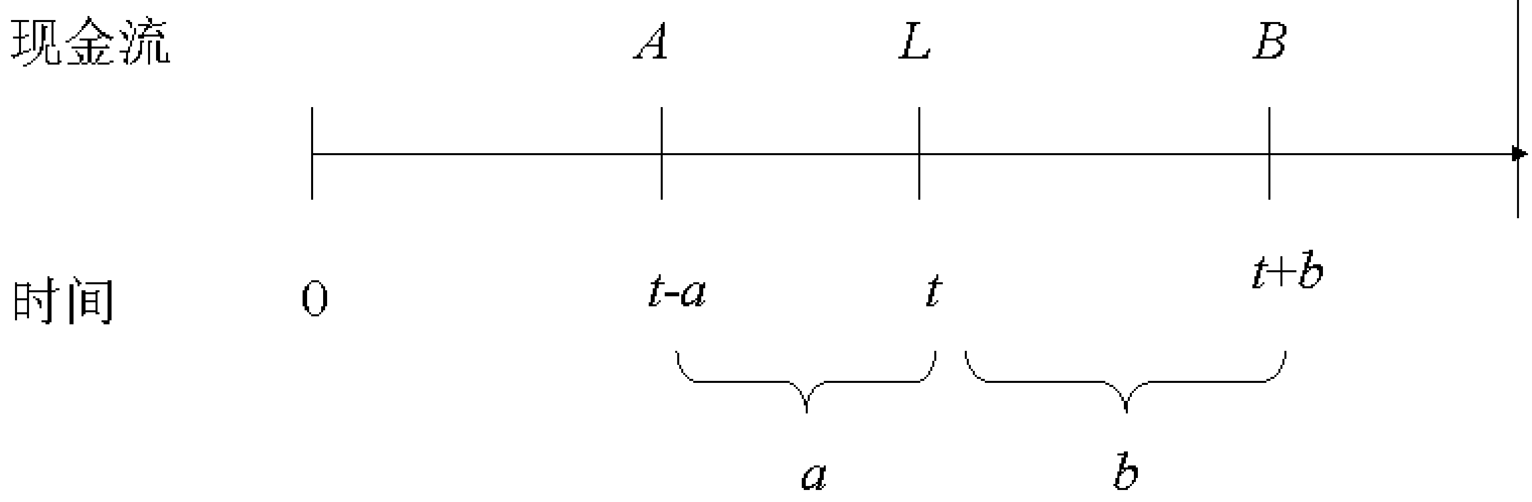


结论：组合的凸度更大，免疫能力更强。

完全免疫

- **Redington免疫：** 只有当平坦的收益率曲线发生微小的平移时，才能保证盈余不会减少。
- **完全免疫（full immunization）：** 在某些情况下，即使当平坦的收益率曲线发生较大的平移，盈余也不会减少。

例： 假设某机构在未来需要支付一笔负债 L，支付时间为 t，同时在未来有两笔资产现金流，金额分别为 A 和 B，到期时间分别为 $t-a$ 和 $t+b$。它们的关系如下图所示。



完全免疫需要满足下述三个条件：

（1）资产的现值＝负债的现值

（2）资产的久期＝负债的久期

（3）资产到期时间处于负债到期时间之前和之后，即：

$$t-a<t<t+b$$

证明（课后阅读教材）

结论： 满足完全免疫的条件时，必满足Redington免疫的条件。

证明： 资产和负债的马考勒久期都为 t

- 对于负债：

$$\sigma^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{马} = \sigma^2 + \left(D_{马}\right)^2 = t^2$$

- 对于资产：

$$\sigma^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad C_{马} = \sigma^2 + \left(D_{马}\right)^2 = \sigma^2 + t^2 > t^2$$

- 即：

$$资产的C_{马} > 负债的C_{马}$$

例：某保险公司在10年末需要支付一笔2000万元的债务，它现在拥有5年期的零息债券6209213.23元（到期价值），15年期的零息债券16105100元（到期价值）。假设市场利率为10％。

- 请判断保险公司是否处于完全免疫状态？
- 如果市场利率变为 20％，保险公司的盈余将如何变化？

解:

- 负债的现值: $$P_L = \frac{20000000}{1.10^{10}} = 7710865.79$$

- 资产的现值: $$P_A = \frac{6209213.23}{1.10^5} + \frac{16105100}{1.10^{15}} = 7710865.79$$

- 负债的马考勒久期: 10

- 资产的马考勒久期:

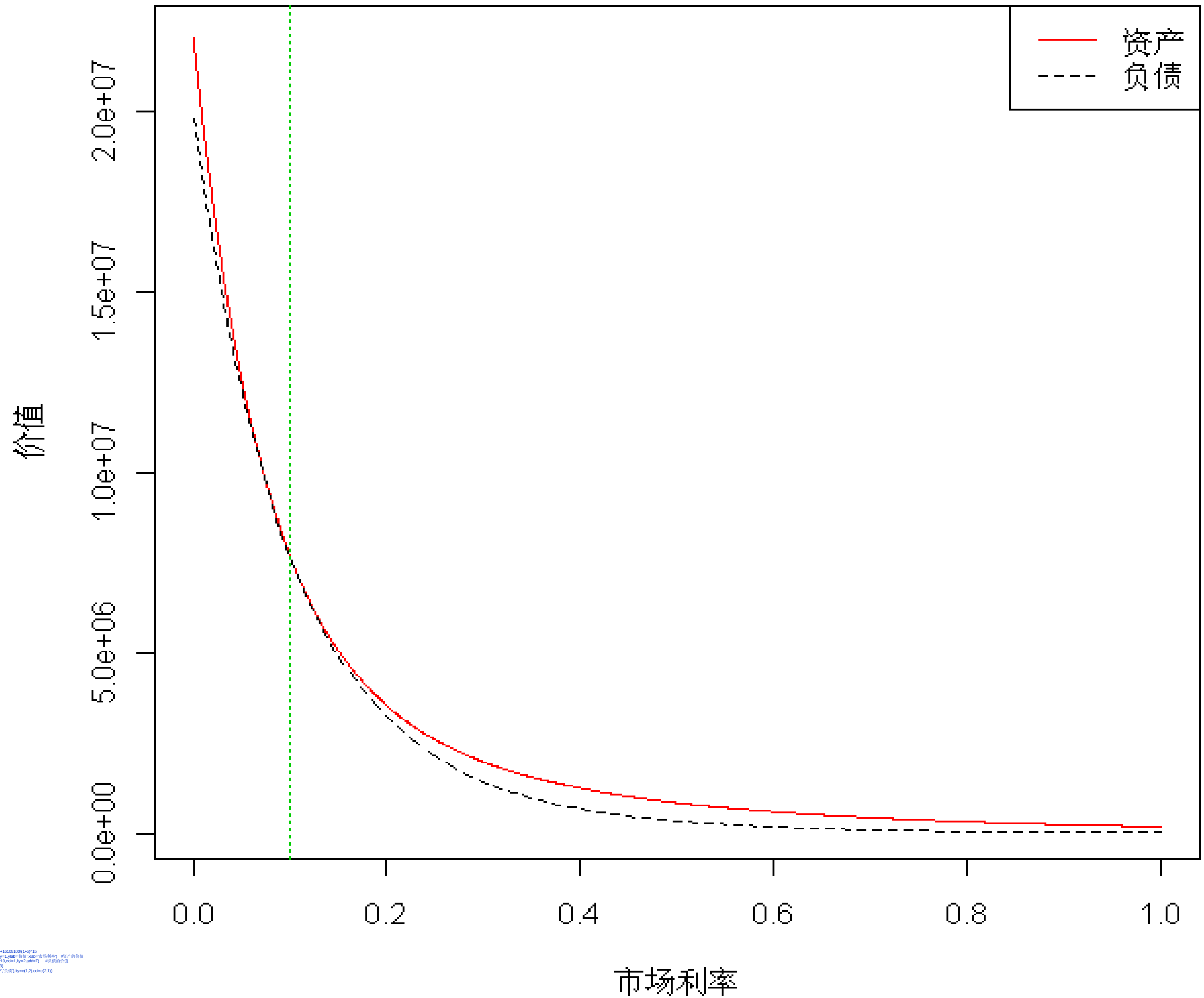
$$D_{马}^{A} = \frac{6209213.23 \times (1.10)^{-5} \times 5 + 16105100 \times (1.10)^{-15} \times 15}{7710865.79} = 10$$

完全免疫的第三个条件显然是满足的：$5 < 10 < 15$

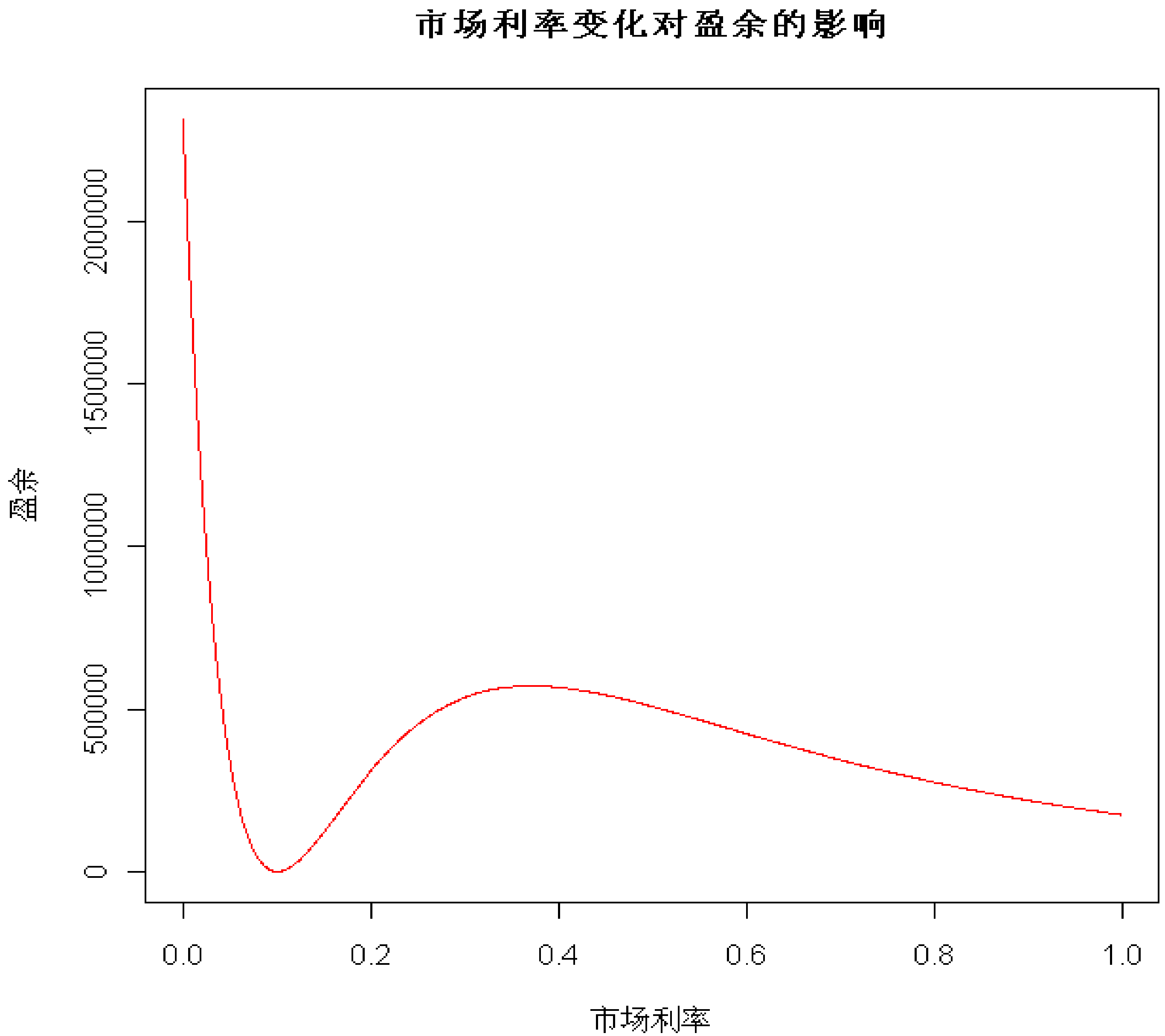
- 如果收益率从10%变为20％，则盈余为：

$$P_A - P_L = \frac{6209213.23}{1.2^5} + \frac{16105100}{1.2^{15}} - \frac{20000000}{1.2^{10}} = 310540.99(\text{元})$$

- 可见，由于保险公司处于完全免疫状态，所以市场利率的较大变化仍然会导致盈余增加（参见下图）。




```
x=seq(0.001,1,0.001)
A=6209213.23/(1+x)^5+16105100/(1+x)^15
plot(x,A,type='l',col=2,lty=1,ylab='价值',xlab='市场利率')   #资产的价值
curve(20000000/(1+x)^10,col=1,lty=2,add=T)     #负债的价值
abline(v=0.1,col=3,lty=3)
legend('topright',c('资产','负债'),lty=c(1,2),col=c(2,1))
```




```
x=seq(0.001,1,0.001)
S=6209213.23/(1+x)^5+16105100/(1+x)^15-20000000/(1+x)^10
plot(x,S,type='l',col=2,ylab='盈余',xlab='市场利率')
```

Exercise:

- An actuarial department needs to set-up an investment program to pay for a loan of \$20000 due in 2 years. The only available investments are:
  - a money market fund paying the current rate of interest,
  - 5–year zero–coupon bonds earning 4%.
- Assume that the current rate of interest is 4%.
- Develop an investment program satisfying the theory of immunization.

Solution ：

$$\left.\begin{array}{ll} a+b=20000(1+0.04)^{-2} & \text{PV相等} \\ \dfrac{a\times 0+b\times 5}{a+b}=2 & D_{\text{马}}\text{相等} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow a=11094.67, \quad b=7396.45$$

利率风险管理：
现金流配比（cash flow matching or Dedication）

例：假设某公司未来3年的现金流出和三种可投资资产的现金流如下。如果实施现金流匹配策略，投资在这三种资产上的资金分别应为多少？

	第1年末	第2年末	第3年末	
现金流出	1000	1000	1000	
资产1	50	50	500	x
资产2	100	300		y
资产3	200			z

令：投资比例为 x、y、z，则有

$$\begin{cases} 500x = 1000 \\ 50x + 300y = 1000 \\ 50x + 100y + 200z = 1000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 3 \end{cases}$$

- 现金流匹配策略的特点：
  - 彻底消除了利率风险
  - 不容易实现：可能没有所需期限的资产（债券）
  - 可调空间小，一旦实施，就很难调整债券组合。

例：某公司未来负债的现金流如下表所示：

年度	1	2	3	4	5
负债的现金流	4090	6790	3550	36550	5250

可投资的资产如下：

（1）年息票率为20％的2年期债券；

（2）年息票率为10％的4年期债券；

（3）年息票率为5％的5年期债券；

每种债券的面值均为100元，到期年收益率为5％。

如果该公司打算通过现金流匹配策略管理利率风险，请计算应该如何购买这三种债券？

负债的现金流：

年度	1	2	3	4	5
负债的现金流	4090	6790	3550	36550	5250

可投资债券的现金流：

年度	1	2	3	4	5
5年期债券	5	5	5	5	105
4年期债券	10	10	10	110	
2年期债券	20	120			

现金流匹配策略的计算过程

（1）	年度	1	2	3	4	5
（2）	负债的现金流	4090	6790	3550	36550	5250
（3）	5年期债券的现金流	250	250	250	250	5250
（4）	剩余负债的现金流	3840	6540	3300	36300	0
（5）	4年期债券的现金流	3300	3300	3300	36300	0
（6）	剩余负债的现金流	540	3240	0	0	0
（7）	2年期债券的现金流	540	3240	0	0	0
（8）	剩余负债的现金流	0	0	0	0	0

- 5年期债券到期时的本息之和为105元，故需购买： 5250÷105 = 50
- 4年期债券到期时的本息之和为110元，故需购买：36300÷110 = 330
- 2年期债券到期时的本息之和为120元，故需购买：3240÷120 = 27