金融数学

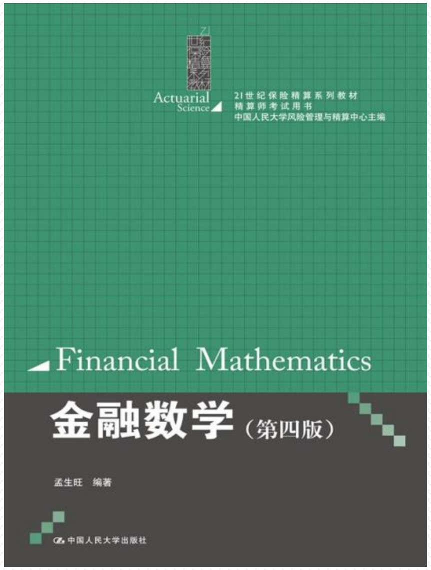
孟生旺

中国人民大学统计学院

http://blog.sina.com.cn/mengshw

课程简介

- 教材：
  - 中文（任选1本）：
    - 金融数学（第四版），中国人民大学出版社，2014
    - 金融数学基础，中国人民大学出版社，2015
  - 英文：Financial Mathematics，2005（图书馆）。



- 教学内容：基本的金融计算问题。不含BS期权定价、期权交易策略、随机利率。
- 计算工具：EXCEL
  - 金融函数，解方程
- 教学进度：每周15-18页教材
- 课外学习时间：每周至少3小时

- 练习和作业：
  - 课堂练习（英文为主）：根据情况要求提交。
  - 教材练习（中文）：自己检查核对，提供参考答案
  - 课外作业（英文）：每章安排一次，共10次作业。
- 测验和考试
  - 测验（英文）：开卷，随堂完成。
  - 期末考试（10题，2题英文，8题中文）：闭卷，2小时，可以使用计算器。
- 成绩评定：
  - 平时（课堂练习、作业、测验）：30%
  - 期末考试：70%
- 资源下载（ http://blog.sina.com.cn/mengshw ）

利息度量

- 累积函数
- 实际利率
  - 单利和复利
- 贴现函数
- 实际贴现率
- 名义利率
- 名义贴现率
- 利息力（连续复利）

几个实际问题

- 半年期的定期存款利率是2%。请问1万元存半年，到期的利息是多少？

- 三年期的定期存款利率是4.25%。请问1万元存三年，到期的利息是多少？

- 银行推出的理财产品为65天，预期年化收益率为5%，购买10万元到期可以获得多少利息？

- 如何度量速度？
  - 公里/小时，米/秒，……
  - 瞬时速度
- 如何度量利息？
  - 利率（实际，名义）
  - 贴现率（实际，名义）
  - 利息力（连续复利）

1.1 利息的基本函数

- 利息（interest）的定义：
  - 借用他人资金需支付的成本，或出让资金获得的报酬。
- 利息存在的合理性
  - 资金的稀缺性
  - 时间偏好
  - 资本也是生产力

关于利息的几个基本概念

- **本金**（principal）：初始投资的资本金额。
- **累积值**（accumulated value）：一段时期后收到的总金额。
- **利息**（interest）——累积值与本金之间的差额。

积累函数 (Accumulation function)

- 累积函数：时间零点的1元在时间 t 的累积值, 记为$a(t)$ 。
- 性质：
  - $a(0) = 1$；
  - $a(t)$ 通常是时间的增函数；
  - 当利息是连续产生时，$a(t)$ 是时间的连续函数。

  注：一般假设利息是连续产生的。

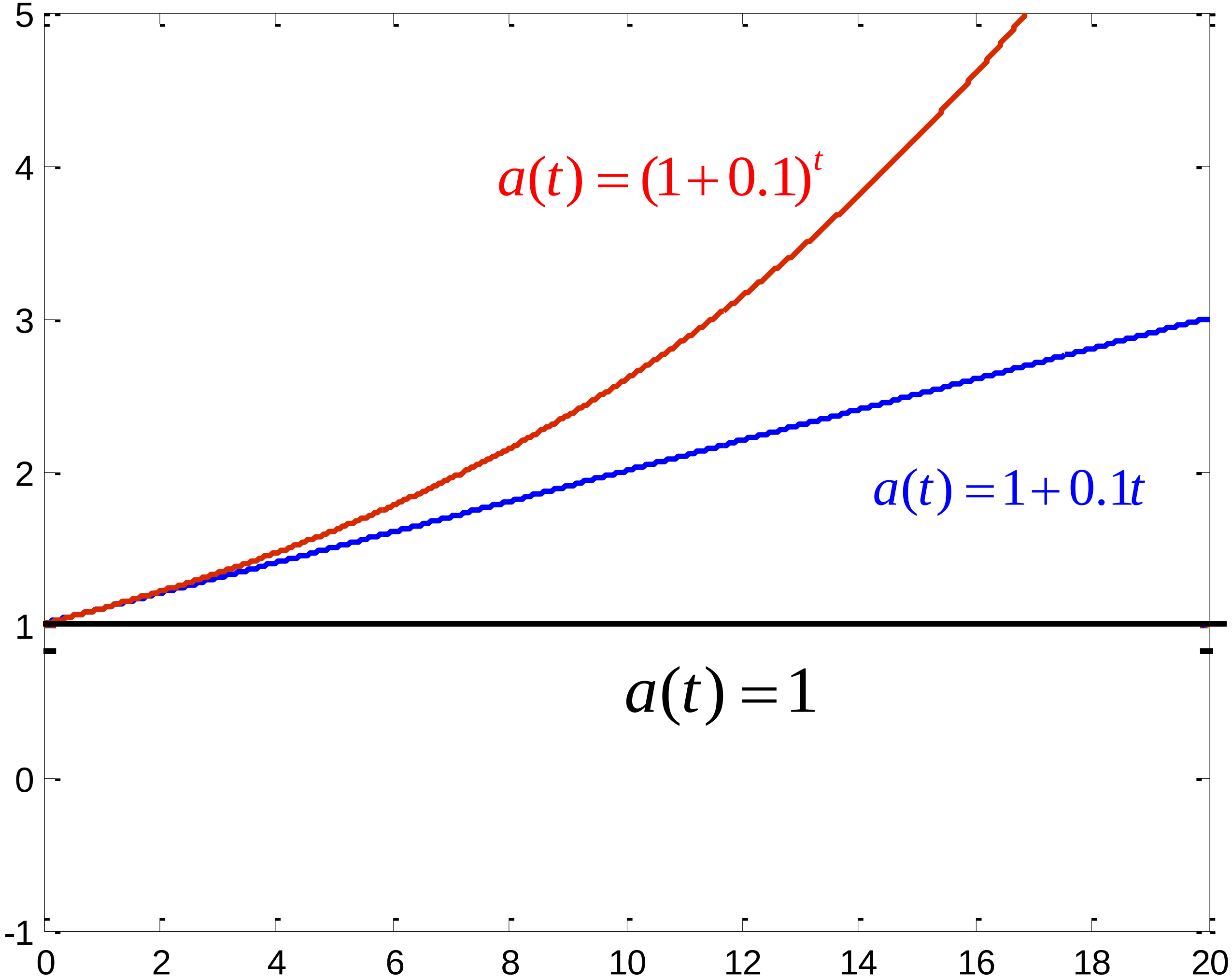
例：

常见的几个积累函数

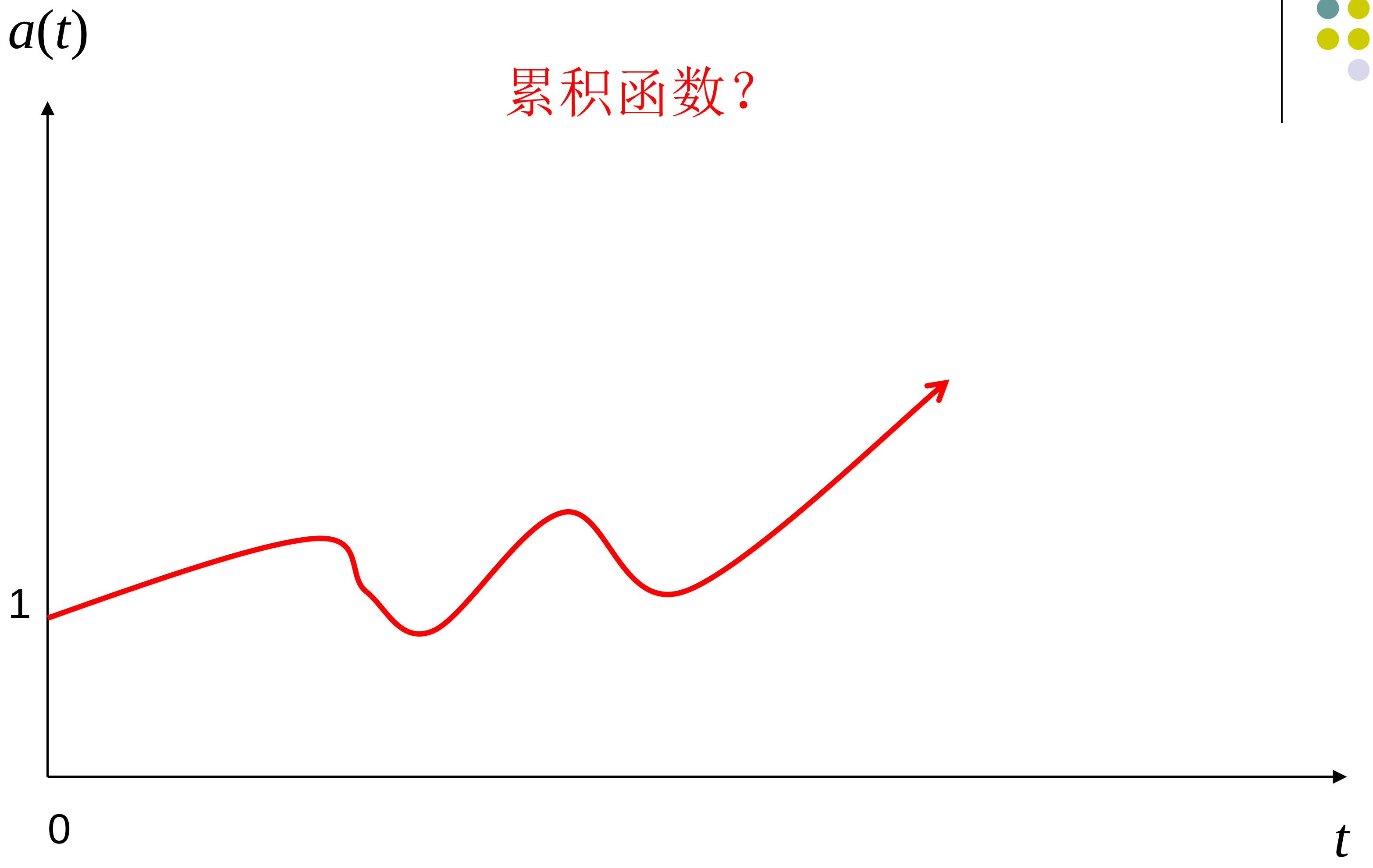
（1）常数：$a(t) = 1$

（2）线性：$a(t) = 1 + 0.1t$

（3）指数：$a(t) = (1+0.1)^{t}$



$a(t) = (1+0.1)^t$
$a(t) = 1 + 0.1t$
$a(t) = 1$
5
4
3
2
1
0
-1
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20



对应哪些实例？

例

- 假设累积函数为 $a(t)=1+t^2$

  请计计算 $t=1$ 时的500元，在 $t=2$ 的累积值是多少。

- **解:**

t	$a(t)$
0	1
1	2
2	5
3	10

$$500\times\frac{1+2^2}{1+1^2}=500\times 2.5=1250$$

1.2 实际利率（effective rate of interest）

- 实际利率 i 是时间零点的1元在期末产生的利息：

$$i = a(1) - a(0)$$

- 实际利率i 是期末获得的利息金额与期初本金之比：

$$i = \frac{\text{当期利息}}{\text{期初本金}}$$

注：

- 实际利率经常用百分比表示，如8%；
- 利息是在期末支付的；
- 本金在整个时期视为常数；
- 通常使用的时间单位是年。
- 如无特殊说明，利率是指年利率。

例：

把1000元存入银行，第1年末存款余额为1020元，第2年末存款余额为1050元，求第一年和第二年的实际利率分别是多少？

$$i_1 = \frac{20}{1000} = 2\%$$

$$i_2 = \frac{30}{1020} = 2.94\%$$

问题：整个存款期间的实际利率是多少？
整个存款期间的年平均实际利率是多少？（后面讨论）

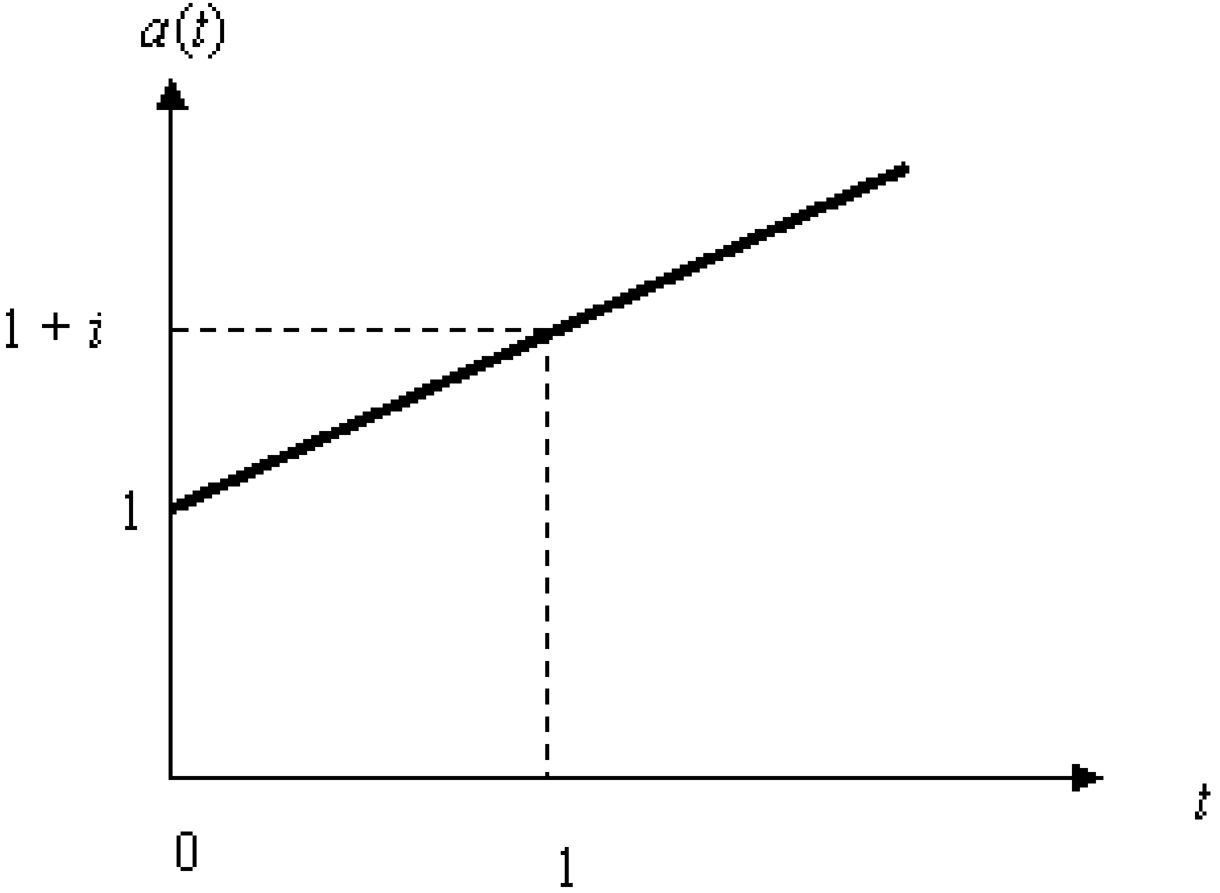
1.3 单利 (simple interest)

- 单利的积累函数：

$$a(t) = 1 + it$$

$$a(0) = 1$$

$$a(1) = 1 + i$$



单利的累积函数

单利与实际利率的关系：

- 单利对应的实际利率：

$$i_t = \frac{a(t)-a(t-1)}{a(t-1)}$$

$$= \frac{(1+it)-[1+i(t-1)]}{1+i(t-1)}$$

$$= \frac{i}{1+(t-1)i}$$

可见，实际利率是 t 的递减函数。

问题: 为什么每个时期的利息金额相等，而实际利率却越来越小呢？

单利的特点：

- 只有本金产生利息，而利息不会产生新的利息。
- 时间零点投资1元，在每年末得到完全相同的利息 i，i 称为单利率。

例

- 若年单利为8%，求投资2000元在4年后的积累值和利息。
  - 累积值为：

$$2000(1+4\times 8\%)=2640$$

  - 利息为：

$$2640-2000=640$$

或

$$2000\times 8\%\times 4=640$$

$$\boxed{\text{利息金额}=\text{本金}\times\text{利率}\times\text{时期}}$$

时间t 的确定, t = 投资天数 / 每年的天数

- （1）“实际/365”（actual/ actual）：投资天数按两个日期之间的实际天数计算，每年按365天计算。
- （2）“实际/360 ”：投资天数按两个日期之间的实际天数计算，每年按360天计算。称为行家规则 (banker’s rule)。
- （3）“ 30/360 ”规则：每月按30天计算, 每年按360天计算。两个给定日期之间的天数按下述公式计算：

$$360(Y_2 - Y_1) + 30(M_2 - M_1) + (D_2 - D_1)$$

其中起始日为Y_2年M_2月D_2日，到期日为Y_1年M_1月D_1日。

例：

- 投资者在2014年6月14日存入基金10000元，2015年2月7日取出，基金的年单利利率为8%，请分别根据下列规则计算投资者可以获得的利息金额：

（1）“实际/365”规则

（2）“实际/360”规则

（3）“30/360”规则

- （1）精确天数为238，在“实际/365”规则下，$t = 238/365$，利息金额为：

$$10000 \times 0.08 \times \frac{238}{365} = 521.6$$

- （2）在“实际/360”规则下，$t = 238/360$，利息金额为：

$$10000 \times 0.08 \times \frac{238}{360} = 528.9$$

- （3）在“30/360”规则下，两个日期之间的天数为：

$$360 \times 1 + 30 \times (2 - 6) + (7 - 14) = 233$$

故 $t = 233/360$，利息金额为：$10000 \times 0.08 \times \dfrac{233}{360} = 517.8$

单利的缺陷：不满足一致性

- 若$t = t_1 + t_2$，　　则$a(t_1)a(t_2) > a(t)$

证明：

$$a(t_1)a(t_2) = (1+it_1)(1+it_2)$$
$$= 1 + it + i^2 t_1 t_2$$
$$> (1+it)$$
$$= a(t)$$

- 含义：分两段投资将产生更多利息。
- 问题：分段越来越多，产生的利息是否会趋于无穷大?

练习

- 单利的年利率为i，当前的1元到年末的累积值为$1+i$
- 如果把1年划分为n个等间隔的时间段按单利进行投资，年末的累积值是多少？当n趋于无穷大时会怎样？

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+i/n\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\exp\left(n\ln(1+i/n)\right)$$

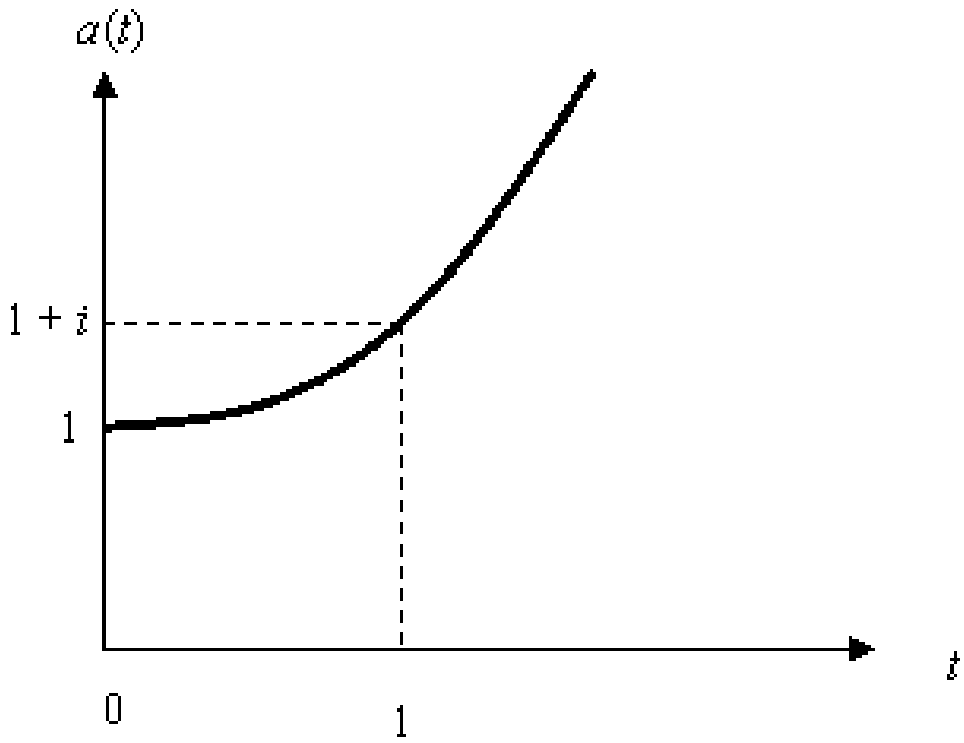
$$=\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\ln(1+ix)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{i}{1+ix}\right)=\mathrm{e}^{i}$$

1.4 复利 (compound interest)

- 单利：本金保持不变。
- 复利：前期的利息收入计入下一期的本金，即 “**利滚利**” 。
- 例：
  - 假设年初投资1000元，年利率为5%，则年末可获利50元，因此在年末有1050元可以用来投资。
  - 第二年按照1050元来计算，将在年末获得52.5元利息。
- 问题：在利率相等的情况下，复利的累积值总是大于单利吗？

复利的积累函数

$$a(t) = (1+i)^t$$



复利的实际利率

- 实际利率 = 复利利率

$$i_t = \frac{a(t) - a(t-1)}{a(t-1)}$$

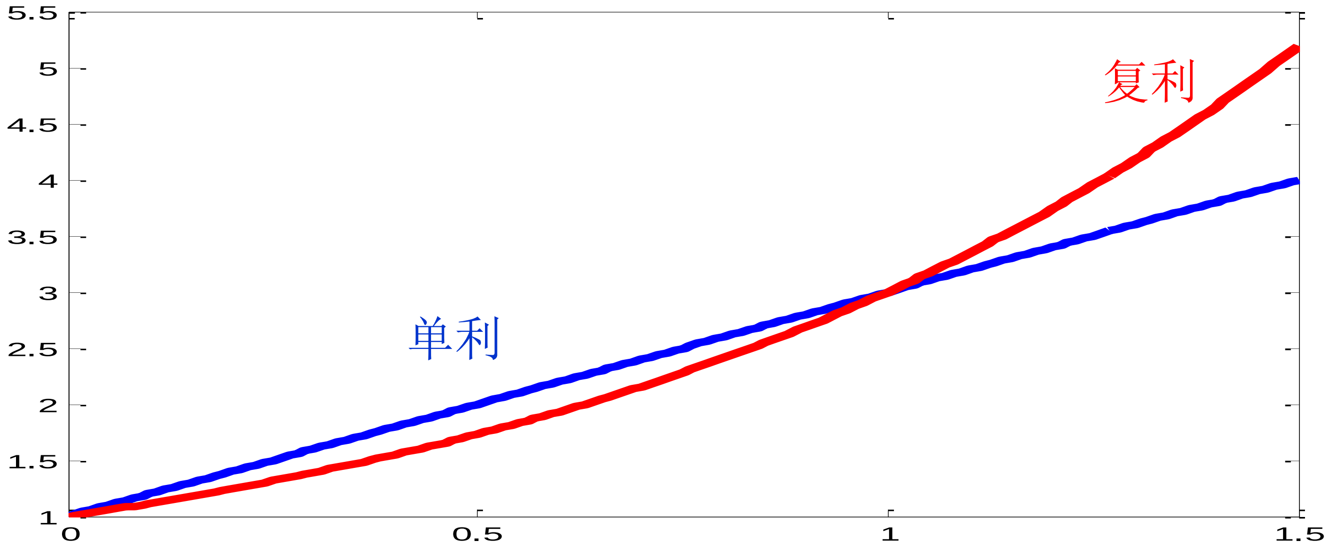
$$= \frac{(1+i)^t - (1+i)^{t-1}}{(1+i)^{t-1}}$$

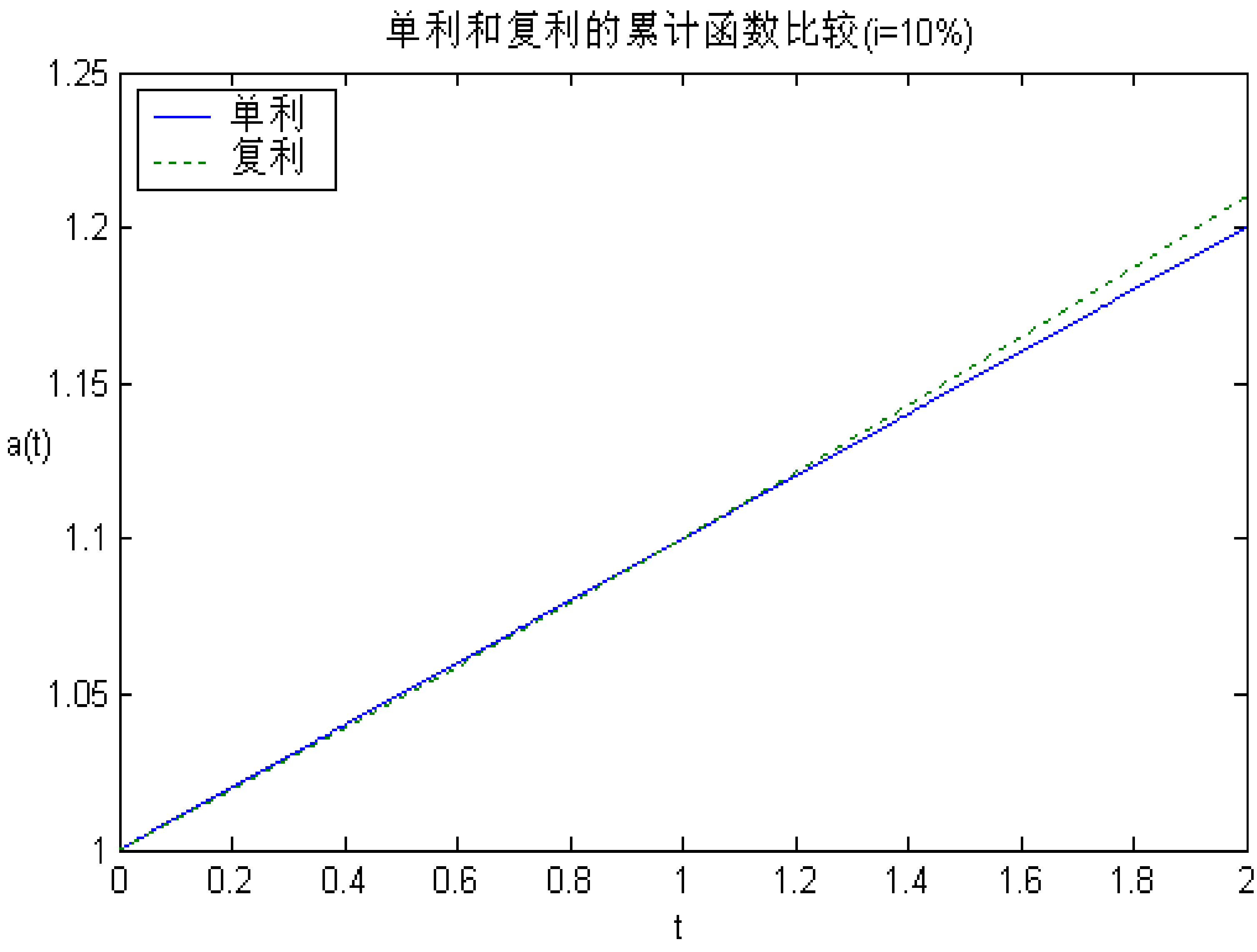
$$= \frac{(1+i) - 1}{1}$$

$$= i$$

单利与复利的比较（假设年利率相等）

- 单利的实际利率逐期递减，复利的实际利率为常数。
- 当 $0 < t < 1$ 时，单利比复利产生更大的积累值。
- 当 $t > 1$时，复利比单利产生更大的积累值。
- 当 $t = 0$ 或 1 时，单利和复利产生相同的累积值。




单利和复利的累计函数比较(i=10%)
单利
复利
a(t)
t
1.25
1.2
1.15
1.1
1.05
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

Exercise

- It is known that 1000 invested for 4 years will earn 250 in interest, i.e., that the value of the fund after 4 years will be 1250. Determine the accumulated value of 4500 invested at the same rate of compound interest for 10 years.

Solution:

$$1000(1+i)^4 = 1250$$

$$\Downarrow$$

$$4500(1+i)^{10} = 4500\left(\frac{1250}{1000}\right)^{\frac{10}{4}} = 7861.18$$

1.5 贴现（discount）

- 累积：在时间零点投资1元，在时间 t 的累积值是多少？
- 贴现：在时间零点投资多少，才能在时间 t 累积到 1元?
- 时间 t 的1元在时间零点的价值称为贴现函数，记为 $a^{-1}(t)$。

0	t
1	$a(t)$
$a^{-1}(t)$	1

贴现函数(discount function)

- 单利的贴现函数 $$a^{-1}(t)=(1+it)^{-1}$$

- 复利的贴现函数 $$a^{-1}(t)=(1+i)^{-t}$$

注：除非特别申明，今后一概使用复利。

几个术语：

$$v=\frac{1}{1+i}$$ 贴现因子： discount factor

v^t t 年贴现因子： t-year discount factor

$(1+i)$ 累积因子： accumulation factor

$(1+i)^t$ t 年累积因子：t-year accumulation factor

实际贴现率：*d*
(effective rate of discount with compound interest)

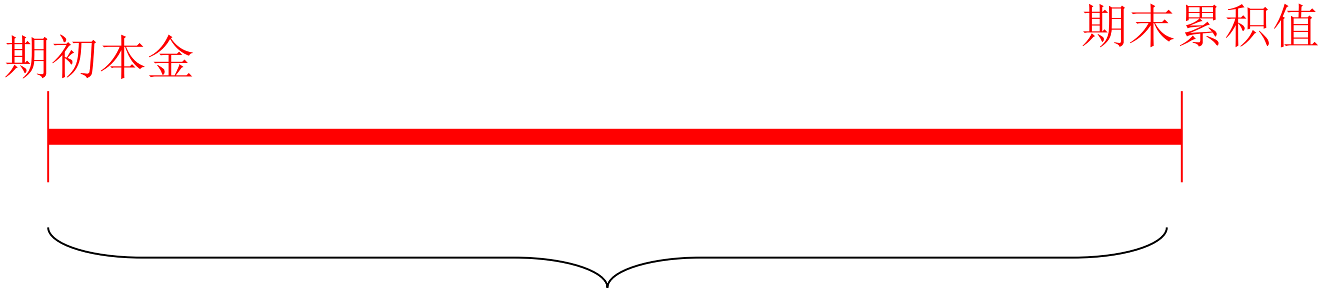
- 实际贴现率等于一个时期的利息收入与**期末**累积值之比：

$$\text{实际贴现率}(d)=\frac{\text{利息}}{\text{期末累积值}}$$

（期初比期末少百分之几？）

$$\text{实际利率}(i)=\frac{\text{利息}}{\text{期初本金}}$$

（期末比期出多百分之几？）



利息 = 期末累积值 - 期初本金

例

- 年实际贴现率为 d，请计算年末的1元相当于年初的多少？
- 解：令其等于X，则由贴现率的定义，有

$$d=\frac{1-X}{1} \qquad \Rightarrow X=1-d$$

1 - *d* **1**

0 1

实际利率 i 与实际贴现率 d 的关系（1）

当期利息：i

根据贴现率的定义：$\boxed{d=\dfrac{i}{1+i}}$

实际利率 *i* 与实际贴现率 *d* 的关系（2）

年末的1元在年初的现值为：$1 - d$

$1 - d$　　　　　　　　　　　　　　　　1

0　　　　　　　　　　　　　　　　　　1

当年利息：d

根据利率的定义：

$$\boxed{i = \frac{d}{1-d}}$$

实际利率 *i* 与实际贴现率 *d* 的关系（3）

$$\boxed{d = iv}$$

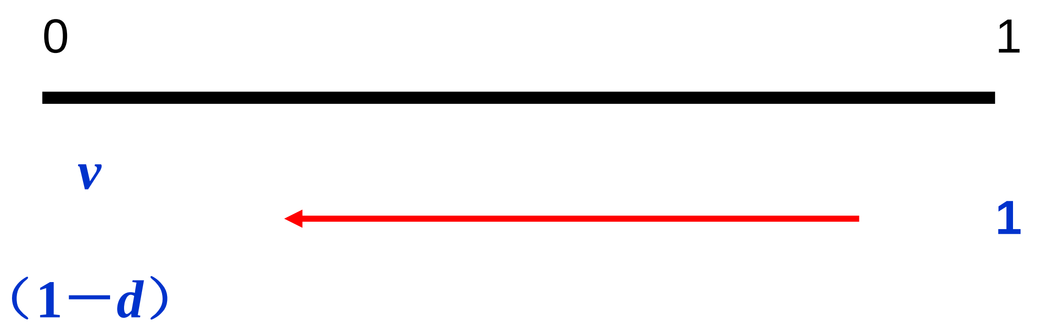
证明：$d = \dfrac{i}{1+i} = i \cdot \dfrac{1}{1+i} = i \cdot v$

注：把年末支付的利息 *i* 贴现到年初，等于在年初支付的 *d*。换言之，年末的 *i* 相当于年初的 *d*。

实际利率 *i* 与实际贴现率 *d* 的关系（4）

$\boxed{v = 1 - d}$　　证明：$d = \dfrac{i}{1+i} = 1 - \dfrac{1}{1+i} = 1 - v$

解释：年末的1在年初的现值可以表示为 v，或 $1-d$。



贴现函数可表示为 $a^{-1}(t) = v^t = (1-d)^t$

累积函数可表示为 $a(t) = v^{-t} = (1-d)^{-t}$

实际利率 i 与实际贴现率 d 的关系（5）

$\boxed{i - d = id}$ 证明： $d = \dfrac{i}{1+i} = i \cdot v = i \cdot (1-d) = i - id$

解释：1元本金在年末有 i 元利息，$(1-d)$ 元本金在年末有 d 元利息。产生$(i-d)$元利息差额。

原因：本金有 d 元差额，导致的利息差额是 id。

本金（Principal ）	利息（interest）	累积值（Accumulated value）
1	i	$1 + i$
$1 - d$	d	1

本金之差：d ⇨ 利息之差 di

利息之差：$i - d$

实际利率 *i* 与实际贴现率 *d* 的关系（6）

$$\boxed{i=\frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad d=\frac{1}{n+1}}$$

证明：

$$d=\frac{i}{1+i}=\frac{1/n}{1+1/n}=\frac{1}{n+1}$$

例：

$i = 5\% = 1/20$,

$d = 1/21$

问题：

- 已知年实际利率为5%。回答下述问题：
- （1）100万元贷款在年末的利息是多少？
- （2）如果在贷款起始日收取利息，应该收取多少利息？
- （3）年实际贴现率是多少？
- （4）写出累积函数和贴现函数。
- （5）分别用实际利率和实际贴现率计算，5年末到期的100万元在时间零点的价值是多少？

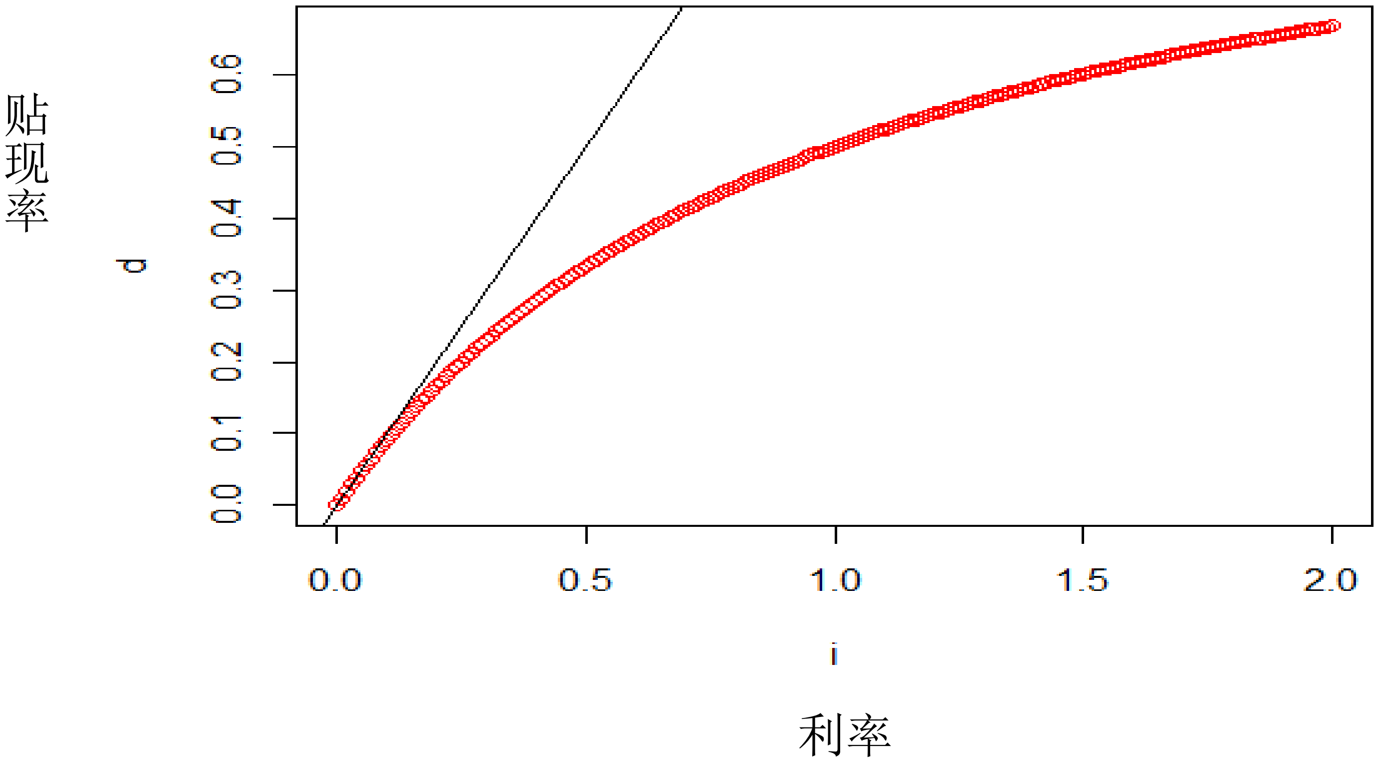
- **问题：**

（1）贴现率随着利率变化的规律？

（2）利率随着贴现率变化的规律？

利率 i 和贴现率 d 的关系

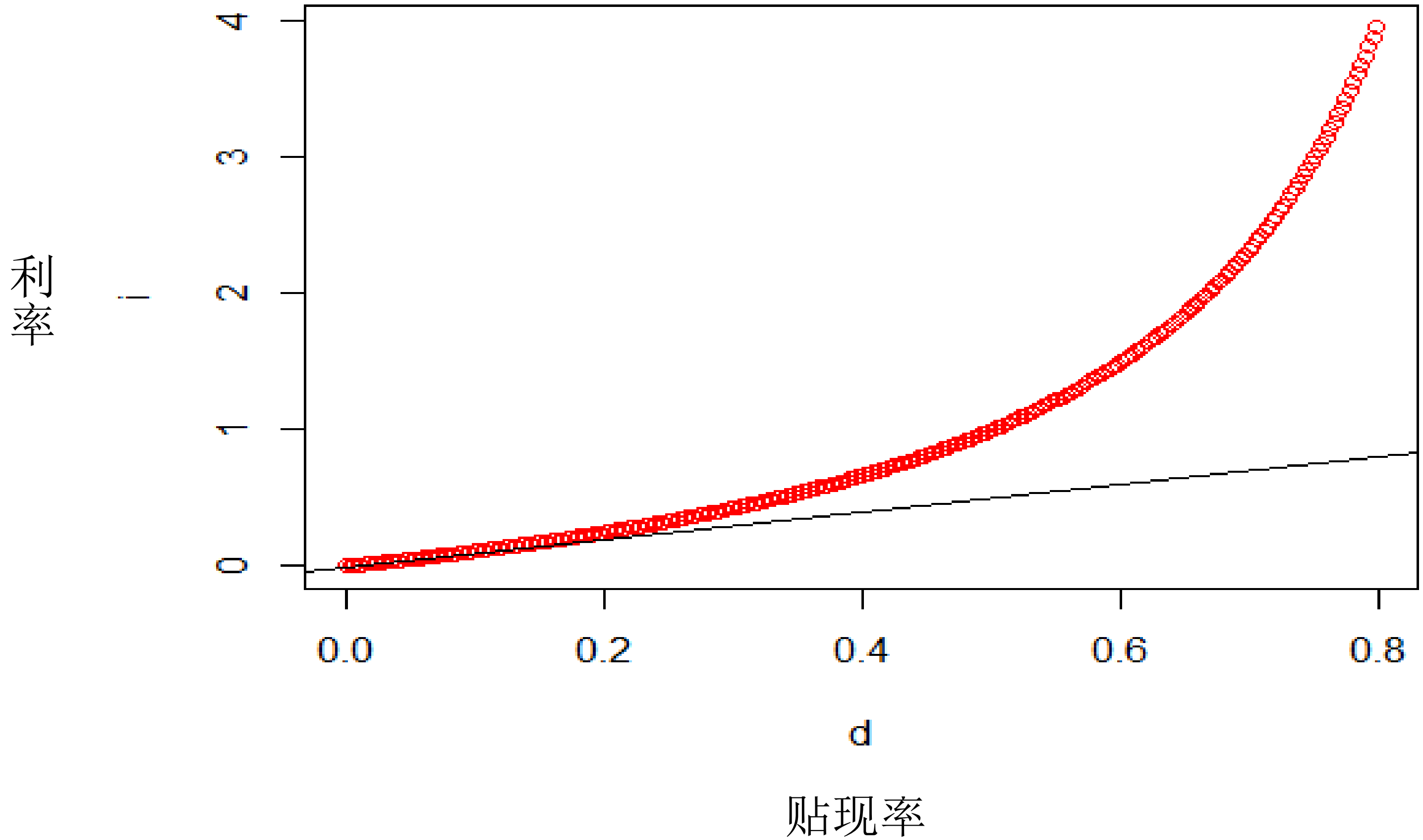
$$d = \frac{i}{1+i}$$



问题：如果利率趋于无穷？

贴现率 *d* 和利率 *i* 的关系

$$i = \frac{d}{1-d}$$



问题：如果贴现率趋于1？

例

- 面值为100元的一年期零息债券的价格为95元。
- 一年期定期储蓄存款的利率为5.25％。
- 投资者应该存款还是购买零息债券？

解：

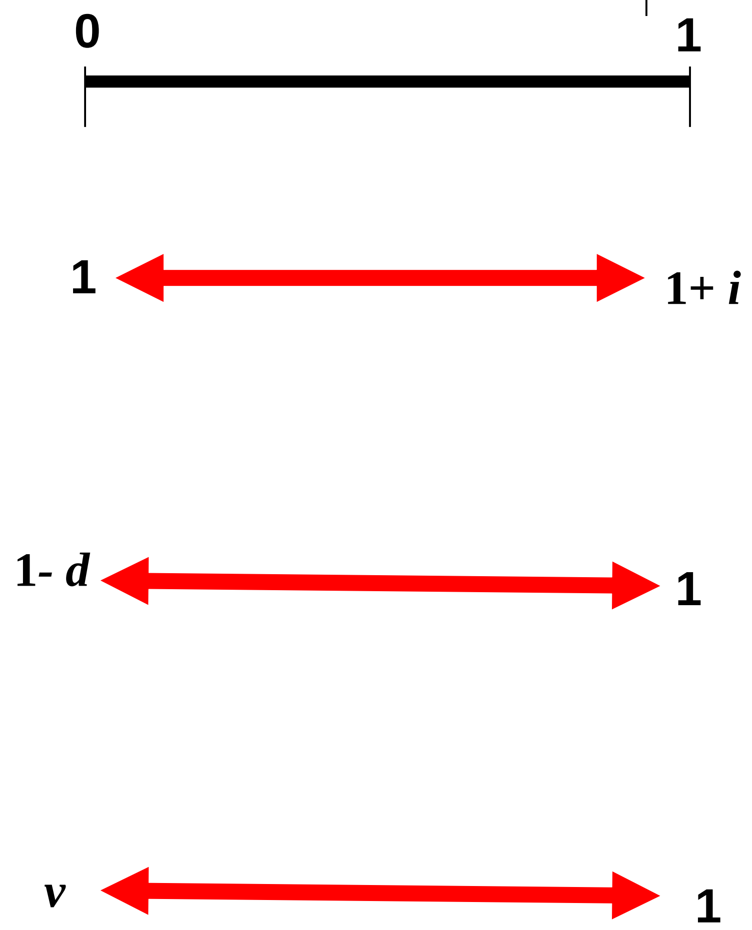
- 比较贴现率：
  - 零息债券的贴现率 $d = 5\%$
  - 储蓄的贴现率 $d = i / (1 + i) = 4.988\%$
  - 比较利率：
  - 零息债券的利率 $d = 5\% = \dfrac{1}{20} \Rightarrow i = \dfrac{1}{19} = 5.26\%$
  - 储蓄的利率为 5.25％

小结：

- 计算累积值和现值，既可以用利率，也可以用贴现率。
- **用利率计算：**
  - 累积函数：$a(t) = (1 + i)^t$
  - 贴现函数：$a^{-1}(t) =(1 + i)^{-t}$
- **用贴现率计算：**
  - 累积函数：$a(t) = (1 - d)^{-t}$
  - 贴现函数：$a^{-1}(t) = (1 - d)^{t}$

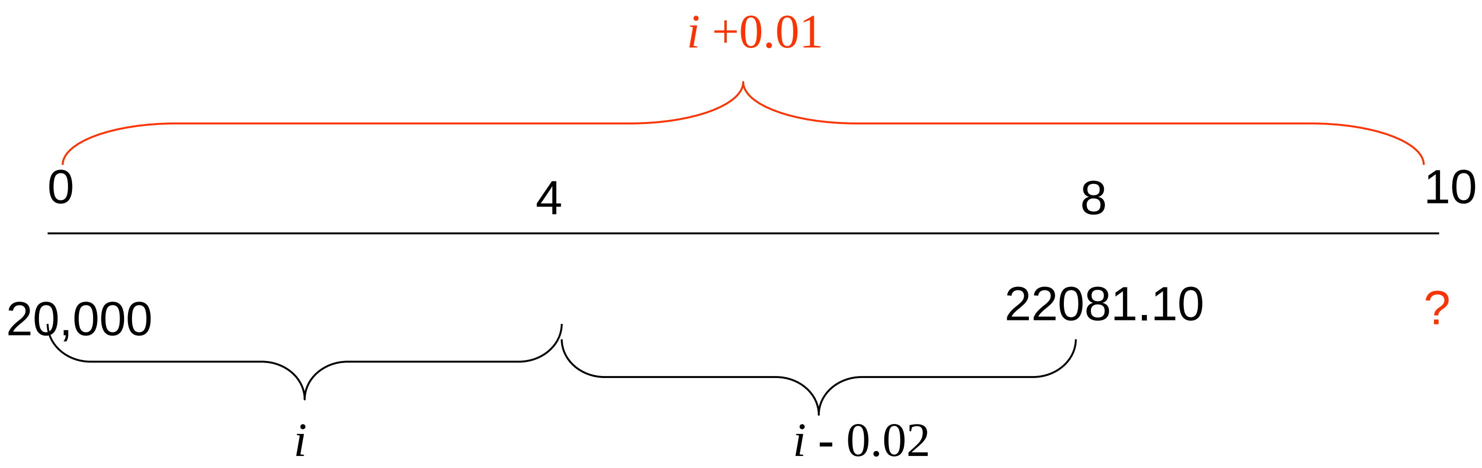
一些重要的等价关系式：

- $i = d/(1-d)$
- $d = i/(1+i)$
- $d = iv$
- $v = 1 - d$
- $i - d = id$



Exercise

- An investor deposits 20,000 in a bank.
- During the first 4 years the bank credits an annual effective rate of interest of *i*.
- During the next 4 years the bank credits an annual effective rate of interest of *i*-0.02.
- At the end of 8 years the balance in the account is 22081.10.
- What would the account balance have been at the end of 10 years if the annual effective rate of interest were *i* + 0.01 for each of the 10 years?



Solution:

The equation of value is

$$20000(1+i)^4\left(1+(i-0.02)\right)^4 = 22081.10$$

$$i = 2.25\%$$

the account balance after 10 years would be

$$20000\left(1+(2.25\%+0.01)\right)^{10} = 27737.89$$

Exercise

It is known that the accumulation function $a(t)$ is of the form $b(1.1)^t + ct^2$, where b and c are constants to be determined.

(a) If \$100 invested at time $t = 0$ accumulates to \$170 at time $t = 3$, find the accumulated value at time $t = 12$ of \$100 invested at time $t = 1$.

(b) Determine a general formula for i_n, and show that

$$\lim_{n\to\infty} i_n = 10\%$$

Solution: $a(t) = b(1.1)^t + ct^2$

(a) An accumulation function must have the property that $a(0) = 1$; this implies that

$1 = b + 0,$ so $b = 1.$

The given data imply that

$$170 = 100(a(3)) = 100(1(1.331) + c \cdot 3^2) \longrightarrow c = 0.041$$

hence $a(t) = (1.1)^t + 0.041t^2$

$$a(1) = 1.141, \quad a(12) = 9.0424$$

then

$$100 \times \frac{9.0424}{1.141} = 792.50$$

(b)

$$\boxed{a(t) = (1.1)^t + 0.041t^2}$$

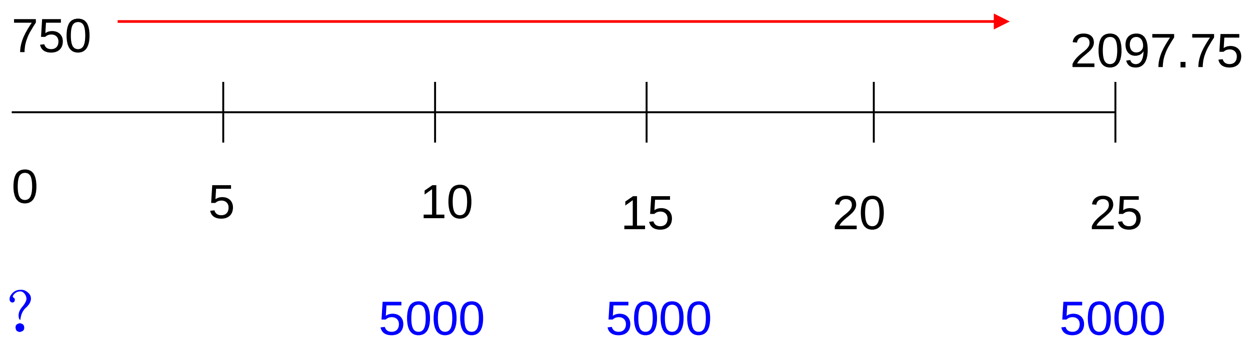
$$i_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{(1.1)^n + 0.041n^2 - (1.1)^{n-1} - 0.041(n-1)^2}{(1.1)^{n-1} + 0.041(n-1)^2}$$

$$= \frac{(0.1)(1.1)^{n-1} + (0.041)(2n-1)}{(1.1)^{n-1} - (0.041)(n-1)^2} = \frac{0.1 + 0.041\left(\frac{2n-1}{(1.1)^{n-1}}\right)}{1 - 0.041\left(\frac{(n-1)^2}{(1.1)^{n-1}}\right)}$$

hence $$\lim_{n\to\infty} i_n = \frac{0.1 + 0.041\,(0)}{1 - 0.041\,(0)} = 0.1 = 10\%.$$

Exercise

- It is known that an investment of 750 will increase to 2097.75 at the end of 25 years. Find the sum of the present values of payments of 5000 each which will occur at the ends of 10, 15, and 25 years.



Solution:

The known fact: $750(1+i)^{25} = 2097.75.$

$$(1+i)^{25} = 2.797$$

$$v^{25} = 0.3575$$

The present value of three payments of 5000 after 10, 15, and 25 years will be

$$5000(v^{10} + v^{15} + v^{25}) = 7798.73$$

第二讲

本章主要内容

- 累积函数，实际利率
- 贴现函数，实际贴现率

- 名义利率
- 名义贴现率
- 利息力（连续复利）

回顾

复利：$a(t)=(1+i)^t$，　　　单利：$a(t)=1+it$

复利：$a^{-1}(t)=(1+i)^{-t}$

$$d=\frac{i}{1+i}$$

名义利率?

- **实际利率：**一年复利一次。
- **名义利率：**一年复利多次，或多年复利一次。
  - 例：3个月期的存款年利率为1.8%
  - 例：3年期的存款年利率为4%

- **考虑下述两笔贷款：**
  - 贷款100万，年利率为12％，年末支付利息12万。
  - 贷款100万，年利率为12％，每月末支付一次利息，每次支付1万。
- 第一个12％是年实际利率，第二个是年名义利率。

名义利率的各种表述

- 季度的实际利率为3%：
  - 年利率为12%，每年结转4次利息；
  - 年利率为12%，每年复利4次；
  - 年利率为12%，每季度结转一次利息；
  - 年利率为12%，每季度复利一次。
- 相关术语
  - 利息结转期：interest conversion period；
  - 每月结转一次：convertible monthly；
  - 每月支付一次：payable monthly ；
  - 每月复利一次： compound monthly ；

名义利率的定义

- 年名义利率 $i^{(m)}$ 表示每年复利 m 次，即每 $1/m$ 年支付一次利息，每$1/m$ 年的实际利率为 $i^{(m)}/m$。
- 例：$i^{(4)} = 8\%$ 表示每季度复利1次，每季度的实际利率为2%。
- 例：$i^{(12)} = 6\%$ 表示每月复利1次，每月的实际利率为0.5%。
- 例：$i^{(1/5)} = 10\%$ 表示每5年复利1次，5年期的实际利率为50%。
- 例：$i^{(1/2)} = 9\%$ 表示每2年复利1次，2年期的实际利率为18%。

- **问题：** 三个月定期存款的年利率为1.8％，存1000元满3个月可得多少利息？

- **答案：** $i^{(4)}=1.8\%$，三个月的实际利率为$1.8\%\div 4$，存1000元满3个月可得利息 $1000\times 1.8\%/4=4.5$ 元。

- **问题：** 5年期定期存款的年利率为6％，存1000元满5年可得多少利息？

- **答案：** $i^{(1/5)}=6\%$，5年期的实际利率为$6\%\times 5$，存1000元满5年可得利息 $1000\times 6\%\times 5=300$元。

名义利率与实际利率的关系：

$$1+i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}$$

$$(1+i)^{\frac{1}{m}}=1+\frac{1}{m}i^{(m)}$$

对名义利率的一种解释：

名义利率 $i^{(m)}$ 是在 $1/m$ 时期内与实际利率（复利利率）i 等价的单利利率。

- **例**：时间零点投资100万元，年利率为12%，请在下述各种条件下计算1个月末和1年末的累积值：
  - （1）上述利率是单利利率
  - （2）上述利率是实际利率（复利利率）
  - （3）上述利率是名义利率，每年复利12次
- 解：

$$(1)\ 100\times(1+0.12\times\frac{1}{12})=101$$

$$(2)\ 100\times(1+0.12)^{\frac{1}{12}}=100.95$$

$$(3)\ 100\times(1+\frac{0.12}{12})=101$$

$$(1)\ 100\times(1+0.12\times1)=112$$

$$(2)\ 100\times(1+0.12)=112$$

$$(3)\ 100\times(1+\frac{0.12}{12})^{12}=112.68$$

Example:

- Which rate is more favorable to an investor:
  - 5% compound semi-annually
  - 4.95% compound daily
  - (note: a year is 365 days)

$$i^{(2)} = 0.05 \qquad \Rightarrow \quad 1+i = \left(1+\frac{0.05}{2}\right)^2 = 1.0506$$

$$i^{(365)} = 0.0495 \Rightarrow 1+i = \left(1+\frac{0.0495}{365}\right)^{365} = 1.0507$$

- 年利率一定的条件下，每年的复利次数越多，年实际利率越高。

年名义利率为10%时，年实际利率随复利次数的变化情况

年复利次数	年实际利率
1	10.000%
2	10.25%
4	10.38%
12	10.47%
52（每周）	10.51%
365(每天)	10.52%

- 问题：年利率$i^{(m)}$一定的情况下，如果复利次数m为无穷大，年实际利率会是多少？

$$1+i=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}=\mathrm{e}^{i^{(m)}}$$

年复利次数	年实际利率
1	**10.00%**
365(每天)	**10.52%**
∞	**10.52%**

Example

- A nominal annual rate of 6% is compounded every 8 months, what is the accumulation function?
- **Solution:**

There are m = 12/8 = 1.5 compounding periods per year, so

$$1+i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} \Rightarrow a(t)=\left(1+\frac{0.06}{1.5}\right)^{1.5t}=1.04^{1.5t}$$

- **课后练习**：银行储蓄业务的年利率如下，请计算它们等价的年实际利率。

存款年利率（%）

	活期	定期					
		3个月	6个月	1年	2年	3年	5年
	0.72	1.80	2.25	2.52	3.06	3.69	4.14

存款利率：等价的名义利率和实际利率的比较

	定　期					
	3个月	6个月	1年	2年	3年	5年
年名义利率	1.80	2.25	2.52	3.06	3.69	4.14
等价的年实际利率	1.812	2.263	2.52	3.015	3.562	3.834

- 小于1年时，实际利率大于名义利率；
- 超过1年时，实际利率小于名义利率。

Exercise：

- Eric deposits X into a savings account at time 0, which pays interest at a nominal rate of i, compounded semiannually.
- Mike deposits $2X$ into a different savings account at time 0, which pays simple interest at an annual rate of i.
- Eric and Mike earn the same amount of interest during the last 6 months of the 8th year.
- Calculate i.

Eric's interet in last 6 months of the 8th year is:

$$X\left(1+\frac{i}{2}\right)^{15}\cdot\frac{i}{2}$$

Mike's interest in the last 6 months of 8th year is

$$2X\cdot\frac{i}{2}$$

$$\Rightarrow X\left(1+\frac{i}{2}\right)^{15}\cdot\frac{i}{2}=2X\cdot\frac{i}{2} \qquad \Rightarrow \quad i=9.46\%$$

名义贴现率(nominal annual rate of discount)

- **定义**：$d^{(m)}$ 是指每 $1/m$ 时期的实际贴现率为$d^{(m)}/m$。

$$1-d=\left[1-\frac{d^{(m)}}{m}\right]^{m} \Leftrightarrow (1-d)^{\frac{1}{m}}=1-\frac{1}{m}d^{(m)}$$

对名义贴现率的一种解释：

名义贴现率 $d^{(m)}$ 是在 $1/m$ 时期内
与实际贴现率d 等价的单贴现率。

- **Example**： Find the present value of $1000 to be paid at the end of six year at 6% per annum payable in advance and convertible semiannually.
- （名义贴现率为6%，半年复利1次，第6年末的值为$1000，求现值）
- **解**： $d^{(2)} = 6\%$

$$1000\left[1-\frac{6\%}{2}\right]^{2\times 6} = 1000\times(1-3\%)^{12} = 693.84$$

名义利率与名义贴现率的关系

$$(1+i)=\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m}=\left[1-\frac{d^{(m)}}{m}\right]^{-m}=(1-d)^{-1}$$

把 $i^{(m)}/m$ 和 $d^{(m)}/m$ 看作 $1/m$ 年内的实际利率和实际贴现率，则

$$\frac{i^{(m)}}{m}-\frac{d^{(m)}}{m}=\frac{i^{(m)}}{m}\cdot\frac{d^{(m)}}{m}$$

- **例**：确定每季度复利一次的利率，使它等价于每月复利一次的6％的贴现率。
- **解**： $d^{(12)} = 6\%$

$$\left[1+\frac{i^{(4)}}{4}\right]^{4} = \left[1-\frac{0.06}{12}\right]^{-12}$$

$$i^{(4)} = 6.06\%$$

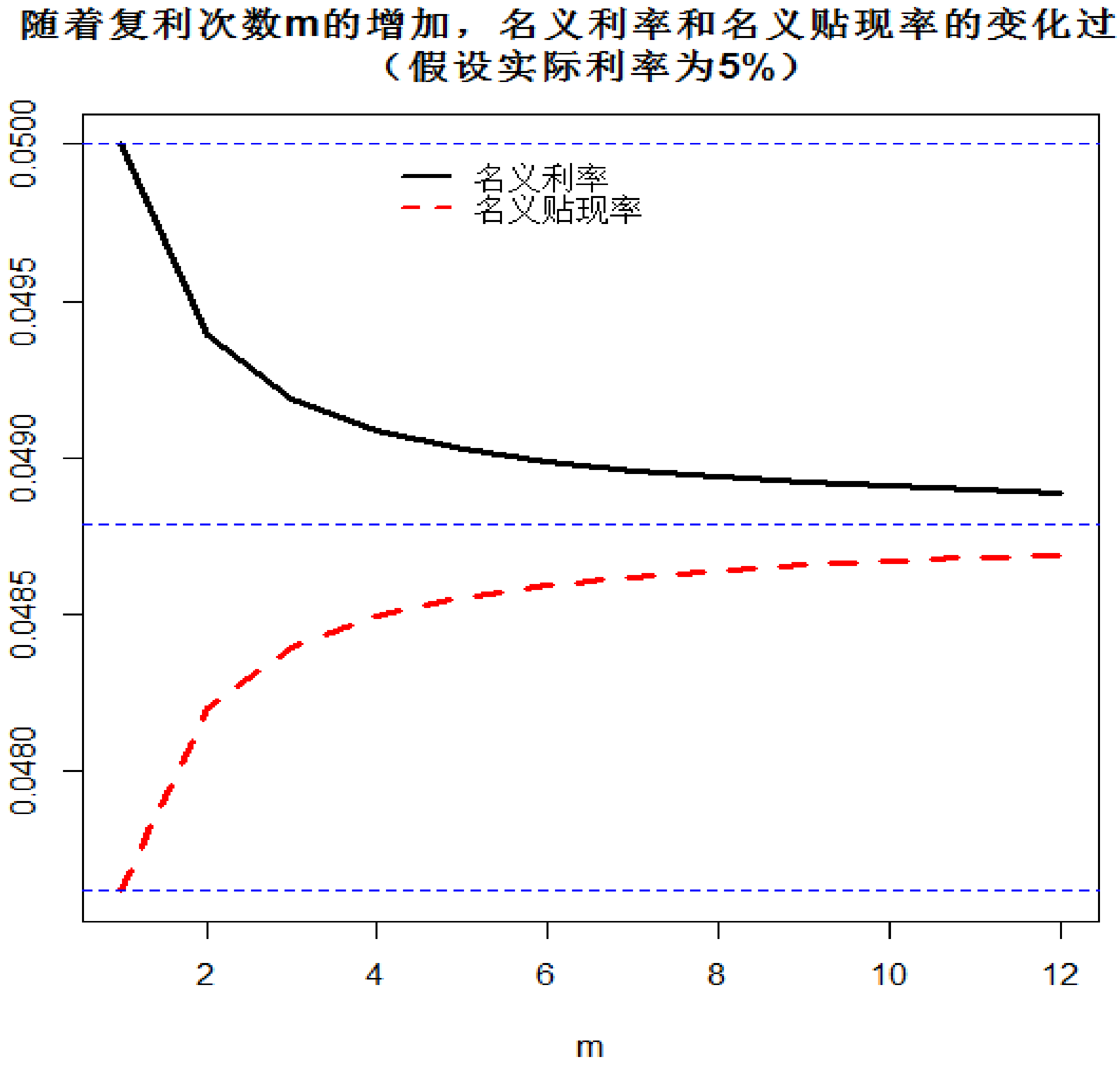
nominal annual rate of discount is 10%

Compounding times per year	Effective annual rate of discount
1(每年)	10.00%
2(每半年)	9.75%
4(每季)	9.63%
12(每月)	9.55%
52(每周)	9.53%
365(每天)	9.52%
∞	9.52%

$$1-d=\lim_{m\to\infty}\left[1-\frac{d^{(m)}}{m}\right]^m=\mathrm{e}^{-d^{(m)}}$$

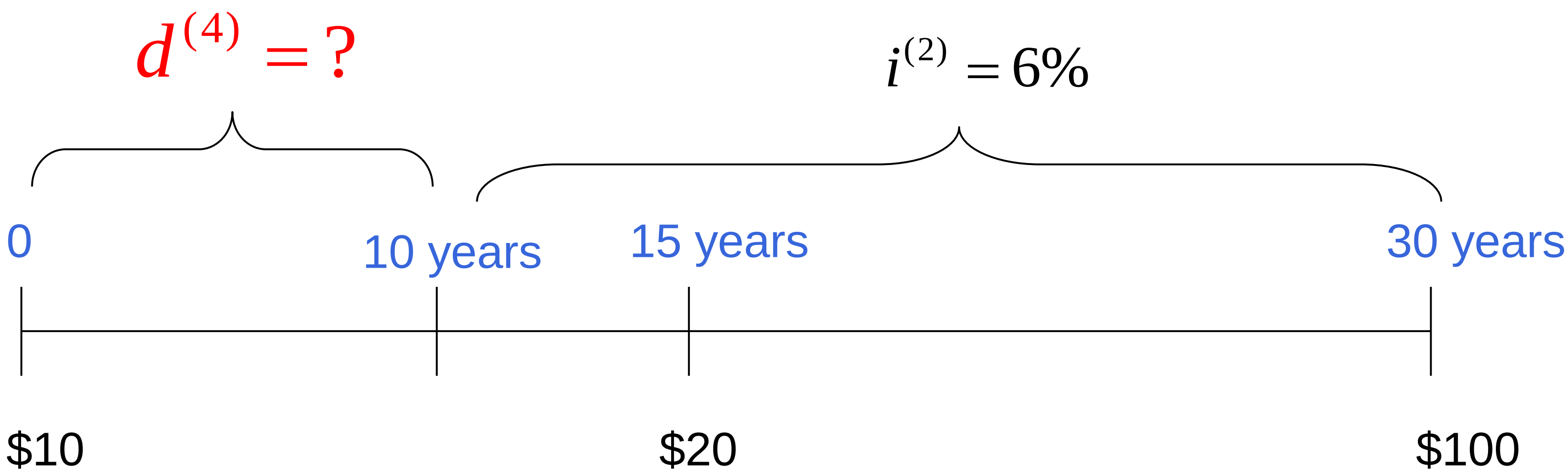
小结：各种等价度量工具之间的数值大小关系？

$$d \le d^{(2)} \le d^{(3)} \le \cdots \le \cdots \delta \cdots \le \cdots \le i^{(3)} \le i^{(2)} \le i$$

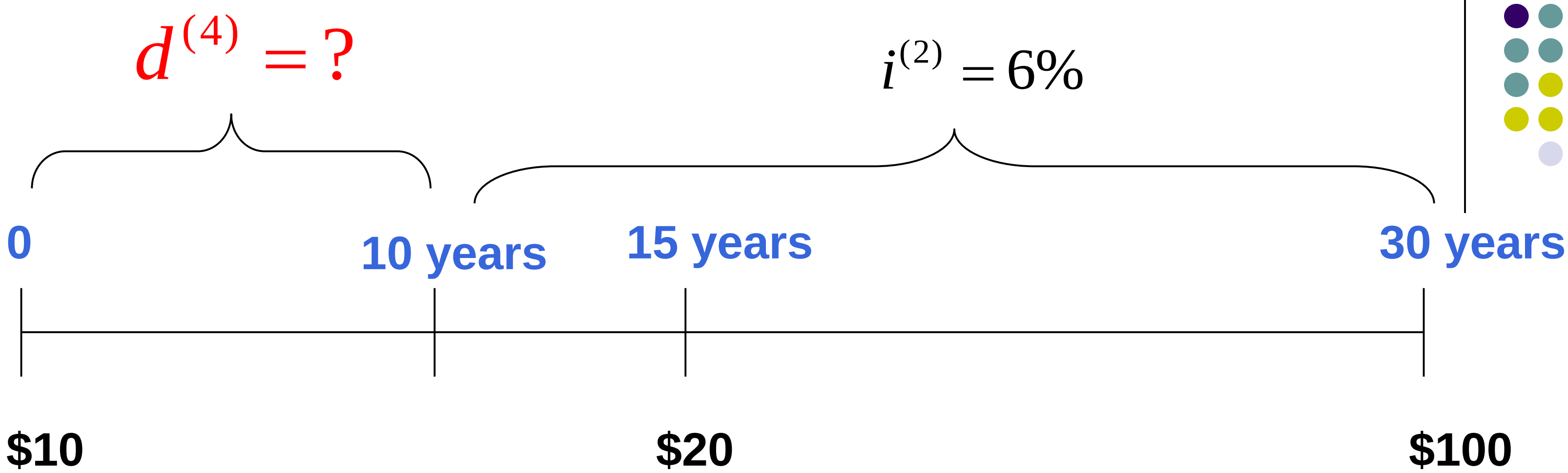


Example :

- Jeff deposits 10 into a fund today and 20 fifteen years later. Interest is credited at a nominal discount rate of *d* compounded quarterly for the first 10 years, and at a nominal interest rate of 6% compounded semiannually thereafter. The accumulated balance in the fund at the end of 30 years is 100. Calculate *d*.



Solution:



$$10\left(1-\frac{d}{4}\right)^{-40}\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{40}+20\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{30}=100$$

$$\Rightarrow d = 0.0453$$

1.8 利息力(force of interest)

- 回顾：
- 年实际利率可以度量资金在一年内的增长强度（年平均）。
- 名义利率可以度量资金在一个小区间（如一个月）的增长强度（月平均）。
- 问题：
  - 如何度量资金在每一个时点上的增长强度？
- 在名义利率中，如果时间区间无穷小，名义利率就度量了资金在一个时点上的增长强度。称作利息力。

- **定义**：利息力度量资金在每一时点上（无穷小的时间区间）增长的强度。
  - 在时间区间$[t, t+h]$的实际利率为 $\dfrac{a(t+h)-a(t)}{a(t)}$
  - 对应的年名义利率为（1年包含$1/h$个小区间）

$$\frac{a(t+h)-a(t)}{h\cdot a(t)}$$

- $\lim_{h\to 0}\frac{a(t+h)-a(t)}{h\cdot a(t)}=\frac{a'(t)}{a(t)}$ 为时刻 t 的利息增长强度（即利息力）。

- 定义：设积累函数连续可导，则时刻 t 的利息力为

$$\delta_t=\frac{a'(t)}{a(t)}=\left(\ln a(t)\right)'$$

问题：为什么不用 $a'(t)$ 直接度量利息的增长强度？

单利在 *t* 时刻的利息力

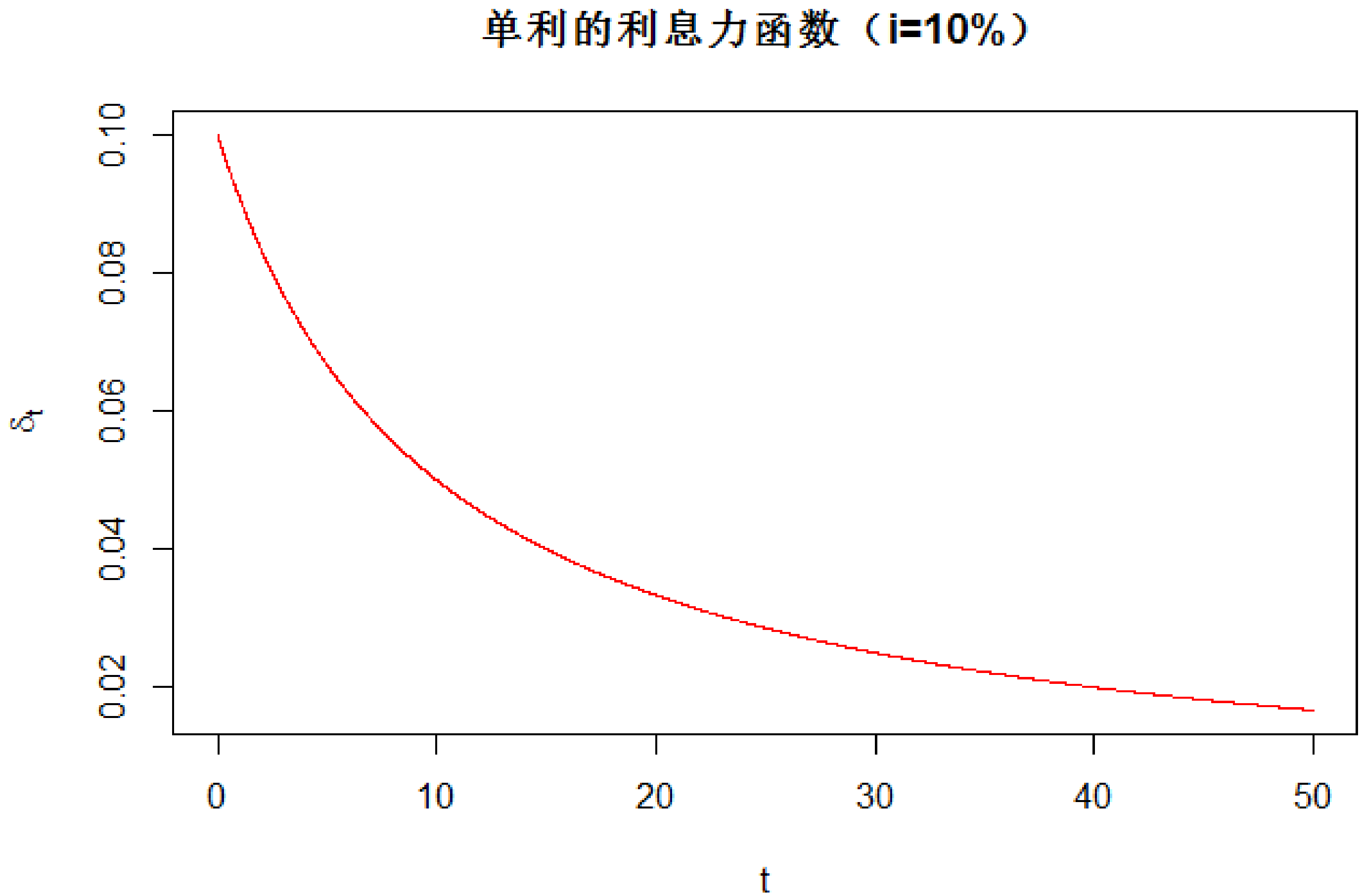
单利的累积函数

$$a(t) = 1 + it$$

- t 时 的利息力为

$$\delta_t = \frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{i}{1+it}$$

- 单利的利息力是时间的递减函数（参见下图）。


单利的利息力函数（i=10%）
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
δ_t
0
10
20
30
40
50
t

复利在时刻 t 的利息力

- 因为 $a(t)=(1+i)^t$

- 所以时刻 t 的利息力为

$$\delta_t=\left(\ln a(t)\right)'=\left(t\ln(1+i)\right)'=\ln(1+i)$$

- 复利的利息力是**常数**！与时间无关。$\delta=\ln(1+i)$ 称为复利的利息力。故累积函数可以表示为

$$a(t)=(1+i)^t=\mathrm{e}^{\delta t}$$

用利息力表示的累积函数和贴现函数：

$$\delta_s = \frac{a'(s)}{a(s)} = [\ln a(s)]'$$

两边从0到 t 积分，得

$$\int_0^t \delta_s \mathrm{d}s = \int_0^t [\ln a(s)]' \mathrm{d}s = \ln a(t)$$

故有

$$\boxed{a(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t \delta_s \mathrm{d}s}}$$

对利息力的另一个解释：

- 在复利条件下，当 m 趋于无穷时的名义利率就是利息力：

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \lim_{m\to\infty} m[(1+i)^{1/m}-1]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+i)^{x}-1}{x} \qquad （令 x = 1/m）$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+i)^{x}\ln(1+i)\right]$$

$$= \ln(1+i)$$

- **问题**：当 m 趋于无穷时的名义贴现率$d^{(m)}$与利息力有何关系？

$$d^{(m)} = m\left[1-(1-d)^{\frac{1}{m}}\right]$$

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \lim_{m\to\infty} m\left[1-(1-d)^{\frac{1}{m}}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-d)^{x}}{x}$$

$$= -\ln(1-d) = \ln(1+i) = \delta$$

- **利息力的相关概念：**
  - 连续收益率？
  - 连续复利？
  - 对数收益率？股票的日收益率？
  - 例：
    - 股价：100，101，102
    - 对数收益率：ln(101/100)，ln(102/101)

1.9 贴现力 (force of discount)

- 用贴现函数$a^{-1}(t)$ 代替累积函数，在 t 时刻的贴现力为

$$\delta_t' = -\frac{\left[a^{-1}(t)\right]'}{a^{-1}(t)}$$

增加一个负号使得贴现力为正。

- 利息力 = 贴现力：

$$\delta_t' = -\frac{\left[a^{-1}(t)\right]'}{a^{-1}(t)} = \frac{a^{-2}(t)}{a^{-1}(t)} \cdot \left[a(t)\right]' = \frac{\left[a(t)\right]'}{a(t)} = \delta_t$$

1.10 利率概念辨析

- **实际利率和名义利率**：在经济学中，实际利率是扣除了通胀率以后的利率；名义利率是包含通胀率的利率。
- 用 i 表示名义利率， r 表示实际利率， π 表示通胀率，则有

$$(1+i)=(1+r)(1+\pi)$$

$$i=r+\pi+r\pi$$ 可近似表示为

$$i\approx r+\pi$$ 或 $$r\approx i-\pi$$

- 即实际利率近似等于名义利率减去通胀率。
- 例：当前存入100元，1年后获得110元。如果通胀率为10%，则实际利率为0。

- **利率和贴现率：**在需要计算现值的场合，利率有时被误称为贴现率。
- 计算现值可以用利率、贴现率、利息力：

$$a^{-1}(t) = (1+i)^{-t} = (1-d)^{t} = \mathrm{e}^{-\delta t}$$

$$a^{-1}(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \delta_s \mathrm{d}s}$$

小结

$$(1+i) = \left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]^{m} = \left[1-\frac{d^{(m)}}{m}\right]^{-m} = (1-d)^{-1} = \mathrm{e}^{\delta}$$

$$d \le d^{(2)} \le d^{(3)} \le \cdots \le \cdots \delta \cdots \le \cdots \le i^{(3)} \le i^{(2)} \le i$$

$$\delta_t = \frac{a'(t)}{a(t)} = \left(\ln a(t)\right)' \quad \Leftrightarrow \quad a(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t \delta_s \mathrm{d}s}$$

Exercise

- A customer is offered an investment where interest is calculated according to the following force of interest:

$$\delta_t = \begin{cases} 0.02t & \text{if } 0 \le t \le 3 \\ 0.05 & \text{if } \quad t > 3 \end{cases}$$

- The customer invests 1000 at time $\boldsymbol{t} = 0$.
- What nominal rate of interest, compounded quarterly, is earned over the first four–year period?

Solution:

$$\delta_t = \begin{cases} 0.02t & \text{if } 0 \le t \le 3 \\ 0.05 & \text{if } \quad t > 3 \end{cases}$$

$$a(4) = e^{\int_0^4 \delta_t \mathrm{d}t}, \qquad \int_0^4 \delta_t \mathrm{d}t = \int_0^3 0.02t\mathrm{d}t + \int_3^4 0.05\mathrm{d}t = 0.14$$

$$\Rightarrow a(4) = e^{0.14}$$

$$a(4) = \left(1 + \frac{i^{(4)}}{4}\right)^{4\times 4}$$

$$\Rightarrow i^{(4)} = 3.52\%$$

Exercise:

- Bruce deposits 100 into a bank account. His account is credited interest at a nominal rate of interest i convertible semiannually.
- At the same time, Peter deposits 100 into a separate account. Peter's account is credited interest at a force of interest of δ.
- After 7 years, the value of each account is 200.
- Calculate $(i - \delta)$.

Bruce's account after 7 years is worth:

$$100\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2\times 7} = 200 \quad \Rightarrow \quad i = 10.15\%$$

Peter's account after 7 years is worth:

$$100e^{7\delta} = 200 \quad \Rightarrow \quad \delta = 9.90\%$$

so $\quad i - \delta = 0.25\%$

Exercise

- At time 0, K is deposited into Fund X, which accumulates at a force of interest $\delta_t = 0.006t^2$.
- At time m, $2K$ is deposited into Fund Y ,which accumulates at an annual effective interest rate of 10%.
- At time n, where $n > m$, the accumulated value of each fund is $4K$.
- Determine m.

Solution:

- For the fund X, $$K \times e^{\int_0^n 0.006t^2 \mathrm{d}t} = 4K$$

So, $n = 8.85$.

For the fund Y, $$2K \times (1+10\%)^{n-m} = 4K$$

$$n - m = \frac{\ln 2}{\ln 1.1} = 7.27$$

$m = 8.85 - 7.27 = 1.58$

Exercise

- Tawny makes a deposit into a bank account which credits interest at a nominal interest rate of 10% per annum, convertible semiannually.
- At the same time, Fabio deposits 1000 into a different bank account, which is credited with simple interest.
- At the end of 5 years, the forces of interest on the two accounts are equal, and Fabio's account has accumulated to Z .
- Determine Z.

- **Solution**: For Tawny's bank account,

$$a(t) = \left(1 + \frac{0.1}{2}\right)^{2t} = (1.05)^{2t}$$

and the force of interest is $\delta_t = \left(\ln a(t)\right)' = 2\ln(1.05)$

For Fabio's account, $a(t) = 1 + it$ and $\delta_t = i/(1 + it)$.

At time $t = 5$, $2\ln(1.05) = i / (1 + i5)$. So,

$$i = 0.1905$$

$$Z = 1000 \cdot \left(1 + 5 \times 0.1905\right) = 1952.75$$

Exercise

- Brian and Jennifer each take out a loan of X.
- Jennifer will repay her loan by making one payment of 800 at the end of year 10.
- Brian will repay his loan by making one payment of 1120 at the end of year 10.
- The nominal semi-annual rate being charged to Jennifer is exactly one–half the nominal semi–annual rate being charged to Brian.
- Calculate X. ($X = 568.14$)

解：

$$X = 800\left[1+\frac{i^{(2)}}{2}\right]^{-10\times 2}$$

$$X = 1120\left[1+\frac{j^{(2)}}{2}\right]^{-10\times 2}$$

$$2i^{(2)} = j^{(2)}$$

令 $i^{(2)}/2 = i$，即得下页的方程

$$x\,(1 + i)^{20} = 800$$

$$x\,(1 + 2i)^{20} = 1120$$

$i = 0.017259$

$x = 568.14$

- **例：**

基金A以利息力函数$\delta_t = \dfrac{1}{1+t}(t \ge 0)$ 累积；

基金B以利息力函数$\delta_t = \dfrac{4t}{1+2t^2}(t \ge 0)$ 累积。

分别用 $a_A(t)$和 $a_B(t)$ 表示它们的累积函数。

令 $h(t) = a_A(t) - a_B(t)$，计算使 $h(t)$ 达到最大的时刻T。

- **解：**

$$a_A(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{1}{1+s}\mathrm{d}s\right) = 1 + t$$

$$a_B(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{4s}{1+2s^2}\mathrm{d}s\right) = 1 + 2t^2$$

- $h(t) = t - 2t^2$，　$h'(t) = 1 - 4t$，因此当 $t = 1/4$ 时，$h(t)$ 达到最大。