孟生旺《金融数学基础》

参考答案

（中国人民大学出版社，2015 年 2 月第一版）

第1章　利息度量

1.1　$600\times 2i=150\Rightarrow i=0.125,\quad 2000(1+i)^3=2848$

1.2　$1004v^{T/12}=314v^{1/12}+271v^{18/12}\Rightarrow T=141.6$

1.3　$A:\ \dfrac{i}{2}(2X)=i\cdot X$ ，　$B:\ X\left(1+i/2\right)^{16}-X\left(1+i/2\right)^{15}$

$X[(1+i/2)^{16}-(1+i/2)^{15}]=i\cdot X\Rightarrow i=0.09458$

1.4　$\mathrm{e}^{27.72\delta}=2\Rightarrow\delta=0.025$，当 $i^{0.5}=\delta$ 时，$(1+2\delta)^{n/2}=7.04\Rightarrow n=80$

1.5　$100\times(1-4\times 6\%)^{-1/4\times 2}=114.71$

1.6　$1+i=\left[1+i^{(m)}/m\right]^m=\left[1-d^{(m)}/m\right]^{-m}=1-d\Rightarrow m=8$

1.7　$A: a(t)=(1.01)^{12t}$，　$B: a(t)=\mathrm{e}^{t^2/12}$，$(1.01)^{12t}=\mathrm{e}^{t^2/12}\Rightarrow t=1.43$

1.8　$A: a(t)=\exp(an+bn^2/2)$，　$B: a(t)=\exp(gn+hn^2/2)$，$n=2(a-g)/(h-b)$

1.9　$a(t)=100(1-d/4)^{-8}\cdot\exp\left[\int_2^5(1+t)^{-1}\mathrm{d}t\right]=260\Rightarrow d=0.129$

1.10　$\delta_1=1/(1+t)$，$\delta_2=2t/(1+t^2)$，$t=0.41$

1.11　$a(t)=(1+t)^2$

$300\times a^{-1}(3)+600\times a^{-1}(6)=200\times a^{-1}(2)+X\times a^{-1}(5)\Rightarrow X=315.82$

1.12　$a^{-1}(3)=\exp\left(-\int_0^3 t^3/100\mathrm{d}t\right)=\mathrm{e}^{-0.2025}$.

1.13　$a(t)=0.04t^2+0.03t+1,\delta_{0.5}=a'(0.5)/a(0.5)=0.068$

1.14　$A(3)=100\cdot\exp\left(\int_0^3 t^2/100\mathrm{d}t\right)+X=109.42+X$

$A(6)=(109.42+X)\cdot\exp\left(\int_3^6 t^2/100dt\right)=1.8776(109.42+X)$

$A(6)-A(3)=(109.42+X)(0.87761)=X\Rightarrow X=784.61$

1.15　$t=4$ 时的累积值为：$1000\exp\left(\int_0^3 0.02t\mathrm{d}t\right)\cdot\mathrm{e}^{0.045}=1144.54$

令名义利率为 x，则 $1000(1+x/4)^{16}=1144.54\Rightarrow x=0.03388$

1. 16 $i^{(2)}=0.075$，$\delta+d^{(4)}=\ln\left[(1+i^{(2)}/2)^2\right]+4\left[1-(1+i^{(2)}/2)^{-1/2}\right]=0.1466$

1. 17 $\exp\left(\int_0^5 kt\mathrm{d}t\right)\cdot\exp\left(\int_5^{10} kt^2/25\mathrm{d}t\right)=2.7183\Rightarrow k=0.414$

1. 18 $a(t)=\exp\left[\int_0^t \delta_t\mathrm{d}t\right]=(2+t)/2,\ \delta=a(n)-a(0)=n/2\Rightarrow n=16$

1. 19 $1000\cdot\exp\left[\int_0^2 \delta_t\mathrm{d}t\right]=1068.94$

1. 20 $A=67.5,\ B=10(1.0915)^{10-n}+30(1.0915)^{10-2n}$，$n=2.3254$

第2章　　　　等额年金

2.1　1363 元

2.2　279430 元

2.3　26005

2.4　基金在第 30 年初的现值为 658773.91，如果限期领取 20 年，每次可以领取 57435，如果无限期地领下去，每次可以领取 39526

2.5　31941.68 元, 21738.97 元, 46319.35 元

2.6　9 年

2.7　29 月末

2.8　0.1162

2.9　8729.23

2.10　45281.05

2.11　0.2

2.12　302

2.13　4.06%

2.14　假设最后一次付款的时间为 n，则有：

$$100000=10000a_{\overline{n-4}|}(1+0.05)^{-4}\Rightarrow n=23.18$$

假设在 23 年末的非正规付款额为 X，则有

$$100000=10000a_{\overline{19}|}(1+0.05)^{-4}+X(1+0.05)^{-23}\Rightarrow X=1762.3$$

2.15　$100a_{\overline{60}|}=4495.5038=6000v^k\Rightarrow v^k=0.7493\Rightarrow k=29$

2.16　$1538a_{\overline{10}|}=1072a_{\overline{20}|}\Rightarrow 1072v^{20}-1538v^{10}+466=0\Rightarrow i=0.08688$

2.17　设 j 为等价利率，则 $j=0.040604$，累积值 $=1000(\ddot{s}_{\overline{16}|}+\ddot{s}_{\overline{8}|})=32430$

2.18　以每半年为一个时期，每个时期的实际利率为 $i/2$，两年为一个时期的实际利率为 $j=(1+i/2)^4-1$，故　$5.89=1/j\Rightarrow i=0.08$

2.19　$12\cdot i\cdot s_{\overline{20}|}+12\cdot i\cdot s_{\overline{10}|}=64\Rightarrow(1+0.75i)^{10}=2\Rightarrow i=0.09569$

2.20　$\bar{a}_{\overline{n}|}=\int_0^n\exp\left\{-\int_0^t\frac{1}{1+r}\mathrm{d}r\right\}\mathrm{d}t=\ln(1+n)$

2.21 $a(t)=\exp\left[\int_0^t \delta_r \mathrm{d}r\right]=(1+0.5t)^2$， $s_{\overline{5}|}=\dfrac{a(5)}{a(1)}+\dfrac{a(5)}{a(2)}+\ldots+\dfrac{a(5)}{a(5)}=12.828$

2.22 $\int_0^8 \bar{a}_{\overline{t}|}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\delta}\int_0^8(1-v^t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\delta}\left(8-\bar{a}_{\overline{8}|}\right)=\dfrac{1}{\delta}\left(8-\dfrac{1-v^8}{\delta}\right)=100$

$v^8=1-\left(8-100\delta\right)\cdot\delta \Rightarrow v^{10}=\left[1-\left(8-100\delta\right)\delta\right]^{5/4}$

$\bar{a}_{\overline{10}|}=\dfrac{1-v^{10}}{\delta}=\dfrac{1-\left[1-\left(8-100\delta\right)\delta\right]^{5/4}}{\delta}$

2.23 1/30

2.24 $1-[\ln(i/\delta)]/\delta$

2.25 $4\mathrm{e}^{n\delta}=12\Rightarrow \mathrm{e}^{n\delta}=3$，$\bar{s}_{\overline{n}|}=12\Rightarrow\dfrac{\mathrm{e}^{n\delta}-1}{\delta}=12\Rightarrow\delta=1/6$

第3章　　变额年金

3.1 $72.88=j\cdot\left(Is\right)_{\overline{29}|j/2}=j\cdot\left[\dfrac{\ddot{s}_{\overline{29}|j/2}-29}{j/2}\right]\Rightarrow \ddot{s}_{\overline{29}|j/2}=65.44\Rightarrow j=0.1$

3.2 $900a_{\overline{10}|}+100(Ia)_{\overline{10}|}=1088.69$

3.3 $v+2v^2+3v^3+\ldots+nv^n+nv^{n+1}+nv^{n+2}+\ldots=\dfrac{(1+i)a_{\overline{n}|}}{i}=\dfrac{a_{\overline{n}|}}{d}$

3.4 $X=2v^3+4v^5+6v^7+8v^9+\ldots=\dfrac{2v^3}{(1-v^2)^2}=49.89$

3.5 A 的现值为：$X=55a_{\overline{20}|}=55(a_{\overline{10}|}+v^{10}a_{\overline{10}|})$

B 的现值为：$X=30a_{\overline{10}|}+60v^{10}a_{\overline{10}|}+90v^{20}a_{\overline{10}|}$

故 $55(1+v^{10})=30+60v^{10}+90v^{20}\Rightarrow i=0.07177\Rightarrow X=574.74$

3.6 $(Ia)_{\overline{n}|}+v^n(Da)_{\overline{n-1}|}=a_{\overline{n}|}\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}$

3.7 $20(Da)_{\overline{7}|}+160a_{\overline{15}|}=2146.20$

3.8 11846.66

3.9 每季度复利一次的利率为 0.0194，所有存款在第八年末的终值为

$\ddot{s}_{\overline{4}|0.0194}(Is)_{\overline{8}|0.08}=183.01$，$X/0.08=183.01\Rightarrow X=14.64$

3.10 343320

3.11 16607

3.12 现值为 5197.50，累积值为 9333.98.

3.13 $930\ddot{a}_{\overline{11}|}+70(I\ddot{a})_{\overline{11}|}=9998.16$，终值为 23312.11.

3.14 现值为 $20(Da)_{\overline{11}|}+280a_{\overline{11}|}=3246.03$，在第 20 年末的终值为 10410.46.

3.15 212.34

3.16 此项投资在第 10 年末的终值为：

$$80000=(X-5000)\ddot{s}_{\overline{10}|6\%}+500(D\ddot{s})_{\overline{10}|6\%}$$

$$80000=(X-5000)(13.97164)+500(83.52247)\Rightarrow X=7736.88$$

3.17 $X=v^4\left(100(Da)_{\overline{10}|6\%}+2000a_{\overline{11}|6\%}\right)=15979.37$.

3.18 第 20 年末的终值为：$(1+i)^{16}200(Ia)_{\overline{11}|5\%}=19997.38$

3.19 前 5 年的现值为 77.79，从第 6 年开始，以后各年付款的现值为：

$20v^5(1+k)\left(\dfrac{1+0.09}{0.09-k}\right)$，总现值为 335，故 $k=3.76\%$.

3.20 $90\bar{s}_{\overline{10}|4\%}+10(I\bar{s})_{\overline{10}|4\%}=1735.96$

3.21 第 8 年的终值为：$60\bar{s}_{\overline{8}|7\%}+5(D\bar{s})_{\overline{8}|7\%}=894.48478$

第 10 年末的终值为 1024.10.

3.22 $\int_0^{10}(4t+3)\exp\left[-\int_0^t(0.03+0.04s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t=89.97$

3.23 在时刻 5 的现值为：

$$\int_5^{10}(1.2t^2+2t)\exp\left[-\int_5^t(0.0006s^2+0.001s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t=382.88$$

时刻零的现值为：$382.88\exp\left[-\int_0^5(0.004t+0.01)\mathrm{d}t\right]=346.44$

3.24 $25000=\int_0^{10}\left(9k+tk\right)\exp\left[\int_t^{10}1/(s+9)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t=190k\Rightarrow k=131.58$

第4章 收益率

4.1 0.1483

4.2 1221.99

4.3 时间加权收益率 0.5426，币值加权收益率 0.5226，两者之差 0.0236.

4.4 93000

4.5 -10%

4.6 $\dfrac{120}{100}\cdot\dfrac{100-50}{120+D}\cdot\dfrac{65}{100-50}=1\Rightarrow D=36,\ i=\dfrac{65-(100+D-50)}{100+D\times 9/12-50\times 3/12}=-0.1834$

4.7 0.1327

4.8 7.5%

4.9 236.25

4.10 0.0619

4.11 5 年末投资者共得到 56245.5 元. 设购买价格为 P，要得到 4%的收益率，有

$$P(1.04)^5=56245.5\Rightarrow P=46229.7$$

4.12 $5000\ddot{s}_{\overline{20}|.08}=100000+(5000i)(Is)_{\overline{20}|i/2}\Rightarrow\ddot{s}_{\overline{20}|i/2}=34.71\Rightarrow i=0.1$

4.13 再投资利率为 8.73%. 投资者 B 的利息再投资后的积累值为 6111.37.

4.14 $12\cdot i\cdot s_{\overline{20}|0.75i}+12\cdot i\cdot s_{\overline{10}|0.75i}=64\Rightarrow(1+0.75i)^{10}=2\Rightarrow i=0.09569$

4.15 3 项投资在 2015 年初的余额为 320.46 万元，在 2015 年末的余额为 344.56 万元，故 2015 年中所获利息为 24.10 万元.

第5章　贷款偿还方法

5.1 $X=704.06$

5.2 设每年的等额分期付款金额为 R，由已知

$R(1-v^{28})=135$，$R(1-v^{14})=108\Rightarrow R(1-v^{7})=72$

5.3 $R(1-v^{30-t+1})=R/3\Rightarrow v^{30-t+1}=2/3\Rightarrow t=22.69$

故在第 23 年分期付款中利息金额最接近于付款金额的三分之一.

5.4 $290.35=Rv^{10}+Rv^{9}+Rv^{8},408.55=Rv^{3}+Rv^{2}+Rv$

$\Rightarrow i=0.05,R=150.03,L=1158.4$. 支付的利息总金额为$10R-L=341.76$

5.5 1510.6

5.6 （1）借款人第 2 年末向偿债基金的储蓄额应为 4438.42

（2）第 2 年末的余额为 9231.91

（3）第 2 年末的贷款净额为 10768.09

5.7 $R=6104.56=L_0/a_{\overline{k}|\,i}=20000/a_{\overline{4}|\,i}\Rightarrow i=8.4911\%$

5.8 第 5 次偿还中的利息为 66.89 万元.

5.9 $125,000=Ra_{\overline{12}|i}\left[1+1.02v+(1.02v)^2+\cdots+(1.02v)^{29}\right]\Rightarrow R=526$

5.10 各期还款的积累值为 $1000s_{\overline{20}|0.05}=10000(1+i)^{20}\Rightarrow i=0.0616$

5.11 $\begin{cases}55000=500.38a_{\overline{12n}|j}\\3077.94=55000(1+j)^{12n}-500.38s_{\overline{12n-1}|j}\end{cases}\Rightarrow i=12j=0.0917$

5.12 第一笔贷款偿还的本金为 490.34，第二笔贷款偿还的本金为 243.93，两笔贷款的本金之和为 734.27.

5.13 3278.

5.14 第 3 次支付的本金金额为 784.7，第 5 次支付的利息金额为 51.4.

5.15 0.1196.

5.16 64.74.

5.17 调整后最后一次的偿还额为 1239.1.

5.18 第 11 年末.

5.19 调整后借款人增加的付款为 112.

5.20 $10000=Xa_{\overline{30}|}+1900v^{20}a_{\overline{10}|}+100v(Ia)_{\overline{19}|}\Rightarrow X=5504.7$.

5.21 11190.11.

第6章　　证券定价

6.1　价格为 957.88 元，账面值为 973.27 元.

6.2　价格为 974.82 元，账面值为 930.26 元（理论方法），929.82（半理论方法），1015（实践方法.

6.3　7.227%.

6.4　6.986%.

6.5　$P=100\times 0.1a_{\overline{10}|}+100\times 0.09v^{-10}a_{\overline{10}|}+100\times 0.08v^{-20}a_{\overline{10}|}=97.74$ 元.

6.6　债券每年末的息票收入为 80 元，故有

$$1082.27=V_5=V_4(1+i)-80=\left[(V_3)(1+i)-80\right](1+i)-80$$
$$=1099.84(1+i)^2-80(1+i)-80\Rightarrow i=6.5\%$$
$$80\cdot a_{\overline{n-3}|\,i}+1000v^{(n-3)}=1099.84\Rightarrow n=12$$
$$P=80\cdot a_{\overline{12}|\,0.065}+1000(1.065)^{-12}=1122.38\text{ 元.}$$

6.7　应用债券定价的溢价公式可以建立下述三个等式：

(1)　$-X=C\left(\dfrac{40}{C}-i\right)a_{\overline{20}|}$

(2)　$Y=C\left(\dfrac{45}{C}-i\right)a_{\overline{20}|}$

(3)　$2X=C\left(\dfrac{50}{C}-i\right)a_{\overline{20}|}$

由 $(3)/(1)$ 得：$-2=\dfrac{50-Ci}{40-Ci}\Rightarrow Ci=\dfrac{130}{3}$

由 $(1)+(3)$ 得：$X=(90-2Ci)a_{\overline{20}|}\Rightarrow a_{\overline{20}|}=\dfrac{X}{90-2Ci}$

所以有 $Y=(45-Ci)a_{\overline{20}|}=X/2=5$ 元.

6.8　$t=7/12$，理论方法的账面值为 87.35 元，实践方法的账面值为 87.35 元.

6.9　$1100v^n=190\Rightarrow v^n=19/110\Rightarrow a_{\overline{n}|}=910/33$

$$P=1100v^n+40a_{\overline{n}|\,0.03}=1293.03.$$

6.10　$P=40a_{\overline{n}|}+M\cdot v^n$，$Q=30a_{\overline{n}|}+M\cdot v^n$，令债券 C 的价格为 X，则有

$$X=80a_{\overline{n}|}+M\cdot v^n\Rightarrow X=5P-4Q.$$

6.11　$\begin{cases}P=(1000r)a_{\overline{10}|\,0.04}+1100(1.04)^{-10}\\ P-81.49=(1000r)a_{\overline{10}|\,0.05}+1100(1.05)^{-10}\end{cases}\Rightarrow r=0.035$

$$X=1000\times 0.035137a_{\overline{10}|\,0.035137}+1100\times(1.035137)^{-10}=1070.80$$

6.12 $P=1050v^{20}+50\left[v+(1.03)v^2+(1.03)^2v^3+\cdots+(1.03)^{19}v^{20}\right]=837.78$.

6.13 偿还值的现值为 $200v^5a_{\overline{5}|}=584.68(\text{元})$，未来息票收入的现值为 $60a_{\overline{5}|}+12v^5(Da)_{\overline{5}|}=355.99(\text{元})$，故债券的价格为 940.67 元. 也可以应用 Makeham 公式计算，即 $P=0.06/0.07\times(1000-584.68)+584.68=940.67$ 元.

6.14 $\begin{cases}P=40a_{\overline{20}|}+1000v^{20}\\P=40a_{\overline{10}|}+X\cdot v^{10}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P=1071.06\\X=1041.58\end{cases}$

6.15 债券每年末的息票收入为60元，修正息票率为60/1050 = 5.7143%，小于投资者所要求的收益率 8%，所以赎回越晚（即到期时赎回），债券的价格越低. 由此可得该债券的价格为 $P=1050+1050\times(5.7143\%-8\%)\times a_{\overline{10}|}=888.94$ 元.

6.16 股票在第六年的红利为 $0.5\times0.2\times(1.10)^6$，以后每年增长 10%. 应用复递增永续年金的公式，该股票的价格为 $P=0.5\times0.2\times(1.10)^6\times\dfrac{1}{0.11-0.1}\times1.11^{-5}=10.51$ 元.

6.17 投资者每个季度的实际收益率为 $j=2.47\%$，应用复递增永续年金的公式，投资者购买该股票的价格为 $P=0.3/(2.47\%-2\%)=63.83$ 元.

6.18 $i=1.5/30+5\%=10\%$.

6.19 30 元.

6.20 每股利润为 $10-9.50=0.50$ 元，保证金为 $10\times0.50=5$ 元，保证金所得利息为 $5\times0.050=0.25$ 元，每股红利为 0.1 元，卖空收益率为 $(0.5+0.25-0.1)/5=13\%$.

6.21 8.59%

第7章 利率风险

7.1 $D_{马}=15$，基于名义收益率的修正久期为 $D=15/(1+1\%)=14.85$. 年实际收益率为 $i=12.68\%$，基于实际收益率的修正久期为 $D=15/(1+12.68\%)=13.31$.

7.2 $D=P'(\delta)/P(\delta)=\dfrac{1}{\delta}-\dfrac{n}{\mathrm{e}^{n\delta}-1}$

7.3 假设债券的面值为 100，则 $P=92.64$，$D_{马}=8.02$，$D=7.57$

7.4 债券的马考勒久期可以表示为 $D_{马}=\dfrac{\ddot{a}_{\overline{nm}|j}}{m}$，其中 $j=i^{(m)}/m$. 变形可得：

$$D_{马}=(1+j)a_{\overline{nm}|j}\frac{1}{m}=(1+j)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i^{(m)}}=\frac{1-v^n}{d^{(m)}}=\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}.$$

7.5 对年金的现值关于利率 i 求导，应用修正久期的定义公式可得 $D=\dfrac{1}{i}-\dfrac{nv^{n+1}}{1-v^n}$.

7.6 对于期末付永续年金，现值为 $P(i)=1/i$，$P'(i)=-1/i^2$，所以修正久期为 $D=1/i$，马考勒久期为 $D_{马}=D(1+i)=(1+i)/i$.

7.7 对于期初付永续年金，现值为 $P(i)=(1+i)/i$，$P'(i)=-1/i^2$，所以修正久期为 $D=1/[i(1+i)]$，马考勒久期为 $D_{马}=D(1+i)=1/i$.

7.8 $P=5a_{\overline{4|}\,i/2}+100v^2=96.53 \Rightarrow P'(i)=-169.29 \Rightarrow D=-\dfrac{P'(i)}{P(i)}=1.75$

7.9 $D_{效}=7.49$

7.10 $D=\dfrac{D_{马}}{1+i}=7.886$，$\dfrac{\Delta P}{P}=-(\Delta i)\cdot D=1.18\%$

$\Rightarrow$ 新的债券价格近似为：$75.98\times 1.018=76.88$

7.11 $D_{效}=8.92$，$C_{效}=13.35$.

$\dfrac{\Delta P}{P}=-(\Delta i)\cdot D+0.5\cdot(\Delta i)^2\cdot C=-8.85\%$，债券的新价格近似为 95.59 元.

7.12 修正久期为 8.12，凸度为 101.24.

7.13 马考勒凸度为 105.15.

7.14 $P=\dfrac{1}{i}=16.67 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}i}=-\dfrac{1}{i^2} \quad \dfrac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}i^2}=\dfrac{2}{i^3}$

$\Rightarrow D=-\dfrac{P'(i)}{P(i)}=\dfrac{1}{i}=16.67$

$\Rightarrow C=\dfrac{P''(i)}{P(i)}=\dfrac{2}{i^2}=555.55$

7.15 $\dfrac{\Delta P}{P}=-(\Delta i)\cdot D+0.5\cdot(\Delta i)^2\cdot C=-4.28\%$

7.16 负债的现值为 $P_L=12418.43$，负债的马考勒久期为 $D^L_{马}=5$，负债的马考勒凸度为 $C^L_{马}=25$. 不妨假设两种零息债券的面值均为 1000 元，则

4 年期零息债券的价格为 $P_4=1000/(1+i)^4=683.01$ 元，10 年期零息债券的价格为 $P_{10}=1000/(1+i)^{10}=385.54$ 元.

假设有 $x\%$ 的债券投资 4 年期的零息债券，$(1-x\%)$ 的债券投资 10 年期的零息债券，由 $D^A_{马}=D^L_{马}$，有：$(x\%)(4)+(1-x\%)(10)=5 \Rightarrow x\%=83.33\%$

投资 4 年期零息债券的金额为 10348.28 元，投资 10 年期零息债券的金额 2070.15 元.

7.17 债券 A 的价格为 982.17 元，马考勒久期为 1.934，马考勒凸度为 3.8. 债券 B 的价格为 1039.93 元，马考勒久期为 4.256，马考勒凸度为 19.85. 在债券 A 上投资 11.02%，在债券 B 上投资 88.98%，则债券组合的马考勒久期等于负债的马考勒久期，均为 4 年，债券组合的马考勒凸度为 18.08，大于负债的马考勒凸度 16，满足免疫的条件.

7.18 各种债券的购买数量分别如下：

购买 5 年期债券的数量	80000
购买 4 年期债券的数量	300000
购买 2 年期债券的数量	600000
购买 1 年期零息债券	100000

购买各种债券以后净负债的现金流如下（单位：万元）：

年度	1	2	3	4	5
负债的现金流	1794	6744	144	3144	824
5 年期债券的现金流	24	24	24	24	824
净负债的现金流	1770	6720	120	3120	0
4 年期债券的现金流	120	120	120	3120	0
净负债的现金流	1650	6600	0	0	0
2 年期债券的现金流	600	6600	0	0	0
净负债的现金流	1050	0	0	0	0
1 年期债券的现金流	1050	0	0	0	0
净负债的现金流	0	0	0	0	0

第8章　　利率的期限结构

8.1　一年期债券的价格为 $P=102.78$；两年期债券的价格为 $P=92.96$；三年期债券的价格为 $P=112.43$.

$$102.78=\frac{111}{1+s_1}\Rightarrow s_1=8\%$$

$$92.96=\frac{5}{1+s_1}+\frac{105}{(1+s_2)^2}\Rightarrow s_2=9.03\%$$

$$112.43=\frac{15}{1+s_1}+\frac{15}{(1+s_2)^2}+\frac{115}{(1+s_3)^3}\Rightarrow s_3=10.20\%$$

8.2　现金流分别按对应的即期利率折现得债券的价格为：

$$P=\frac{10}{1.05}+\frac{10}{1.06^2}+\frac{110}{1.08^3}=105.75$$

8.3　各年远期利率分别为 8%、10.1%和 12.6%.

8.4　假设债券的面值为 100 元，计算 5 年期债券的价格：

$$\frac{10}{1.07}+\frac{10}{1.07^2}+\frac{10}{1.07^3}+\frac{10}{1.07^4}+\frac{110}{1.07^5}=\frac{10}{1+s_1}+\frac{10}{(1+s_2)^2}+\frac{10}{(1+s_3)^3}+\frac{10}{(1+s_4)^4}+\frac{110}{(1+s_5)^5}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1+s_1}+\frac{1}{(1+s_2)^2}+\frac{1}{(1+s_3)^3}+\frac{1}{(1+s_4)^4}=3.74$$

每年支付 40 元的 5 年期期初付年金按对应的即期利率折现即得其现值为：

$$40\left[1+\frac{1}{1+s_1}+\frac{1}{(1+s_2)^2}+\frac{1}{(1+s_3)^3}+\frac{1}{(1+s_4)^4}\right]=189.75$$

8.5　由远期利率计算的债券价格为：

$$\frac{10}{1.07}+\frac{10}{(1.07)(1.05)}+\frac{110}{(1.07)(1.05)(1.1)}=107.25\text{（元）}$$

8.6 假设债券的面值为 100 元，则有：$100=\dfrac{104}{(1+f_0)}\Rightarrow f_0=4\%$

$$\Rightarrow 100=\frac{6}{(1+f_0)}+\frac{106}{(1+f_0)(1+f_1)}\Rightarrow f_1=8.16\%$$

$$\Rightarrow 100=\frac{8}{(1+f_0)}+\frac{8}{(1+f_0)(1+f_1)}+\frac{108}{(1+f_0)(1+f_1)(1+f_2)}\Rightarrow f_2=12.69\%$$

8.7 应用即期利率和远期利率的关系，有

$$1+s_1=1+f_0\Rightarrow s_1=f_0=6\%$$

$$(1+s_2)^2=(1+f_0)(1+f_1)\Rightarrow s_2=5.50\%$$

$$(1+s_3)^3=(1+f_0)(1+f_1)(1+f_2)\Rightarrow s_3=6.98\%$$

8.8 用 C_t 表示债券在 t 年末的现金流入，则有：

$$\frac{C_1}{1.2}=\frac{C_1}{1+s_1}\Rightarrow s_1=20\%$$

$$\frac{C_1}{1.2}+\frac{C_2}{1.2^2}=\frac{C_1}{1.2}+\frac{C_2}{(1+s_2)^2}\Rightarrow s_2=20\%$$

$$\frac{C_1}{1.2}+\frac{C_2}{1.2^2}+\frac{C_3}{1.2^3}=\frac{C_1}{1.2}+\frac{C_2}{1.2^2}+\frac{C_3}{(1+s_3)^3}\Rightarrow s_3=20\%$$

8.9 $1+s_1=1+f_0\Rightarrow f_0=20\%$

$$1.2^2=(1.2)(1+f_1)\Rightarrow f_1=20\%,\quad f_2=\frac{1.2^3}{1.2^2}-1=20\%$$

8.10 $106=\dfrac{110}{1+f_0}\Rightarrow f_0=3.77\%$

$$95=\frac{5}{1+f_0}+\frac{105}{(1+f_0)(1+f_1)}\Rightarrow f_1=12.20\%$$

$$102=\frac{9}{1+f_0}+\frac{9}{(1+f_0)(1+f_1)}+\frac{109}{(1+f_0)(1+f_1)(1+f_2)}\Rightarrow f_2=9.37\%$$

用远期利率计算年息票率为 15%，面值为 100 元的 3 年期债券的价格：

$$P=\frac{15}{1+f_0}+\frac{15}{(1+f_0)(1+f_1)}+\frac{115}{(1+f_0)(1+f_1)(1+f_2)}=117.65$$

8.11 用远期利率分别计算 3 年期和 4 年期零息债券的价格可得：

$$82=\frac{100}{(1+f_0)(1+f_1)(1+f_2)},$$

$$75=\frac{100}{(1+f_0)(1+f_1)(1+f_2)(1+f_3)}\Rightarrow f_3=9.33\%$$

8.12 $1+s_1=1+f_0\Rightarrow s_1=5\%,\quad (1+s_2)^2=(1+f_0)(1+f_1)\Rightarrow s_2=6\%$

假设债券的面值为 100 元，则有：$100=\dfrac{8}{1.05}+\dfrac{8}{1.06^2}+\dfrac{108}{(1+s_3)^3}\Rightarrow s_3=8.2\%$

8.13 通过收益率计算的债券价格为 $P=\dfrac{6}{1.1}+\dfrac{106}{(1.1)^2}=93.06$

通过即期利率计算的债券价格为 $P=\dfrac{6}{1.07}+\dfrac{106}{(1.09)^2}=94.83$

债券价格被低估了 1.77 元，故可以按 94.83 元的价格购买一个 2 年期债券，同时按即期利率出售一个 1 年期的面值为 6 元的零息票债券和一个 2 年期的面值为 106 元的零息票债券.

8.14 与远期利率一致的债券价格为

$$P=\frac{5}{1.05}+\frac{5}{(1.05)(1.06)}+\frac{105}{(1.05)(1.06)(1.07)}=97.42\text{（元）}$$

债券的市场价格为 100 元，说明债券被高估了，因而存在套利机会.

套利者可以按 100 元的价格卖出一个三年期债券，同时将 97.42 元按 4%的利率投资一年. 在第一年末，支付已出售债券的 5 元利息后，把剩余的资金在第二年按 6%的远期利率再投资一年. 在第二年末，支付已出售债券的 5 元利息后，把剩余的资金在第三年按 8%的远期利率进行投资. 在第三年末的累积值正好用于支付套利者所售债券在第三年末的偿还值. 完成上述步骤后，套利者即可在当前时刻获得 $100-97.42=2.58$ 元的无风险收益.

第9章　远期、期货和互换

9.1 股票多头的回收和盈亏如下表所示：

1 年后的股票价格	多头的回收	多头的盈亏
50	50	−16
60	60	−6
70	70	4

如果 1 年后的股票价格为 66 元时，则股票多头的回收为 66 元. 购买股票的初始费用在 1 年后的累积值为 66 元，所以盈亏为 0 元.

9.2 股票空头的回收和盈亏如下表所示，与多头的回收和盈亏正好相反.

1 年后的股票价格	空头的回收	空头的盈亏
50	−50	16
60	−60	6
70	−70	−4

如果 1 年后股票的价格是 66 元时，则空头的回收为−66 元. 初始所得在 1 年后的累积值为 66 元，所以盈亏为 0 元.

9.3 $F=(105-\sum_{t=1}^{4}1.7\times e^{-0.06t/4})e^{0.06}=104.54$（元）

9.4 日股利为 $0.02/365\times105=0.00575$ 元. 若在年初持有一单位股票，年末将持有 $e^{0.02}=1.0202$ 单位. 若要在年末持有一单位股股票，年初应持有 $e^{-0.02}=0.9802$ 单位，故投资额为 $105e^{-0.02}=102.92$ 元.

9.5 （1）$F=70\times e^{0.06\times0.5}=72.13$ 元. （2）$70\times e^{0.06-\delta}=72\Rightarrow\delta=0.032$.

9.6 无套利的远期价格为 $F = 105e^{0.06\times0.5} = 108.20$（元）

（1）远期价格 115 > 108.20, 所以投资者可以先签出一份远期合约, 约定在 6 个月末以 115 元的价格卖出股票. 同时借入 105 元购买股票, 承诺在 6 个月末还款. 到 6 个月末, 以 115 元卖出手中的股票, 同时偿还借款 108.20 元, 最终无风险获利 6.80 元.

（2）远期价格 107 < 108.20, 所以投资者可以先签订一份远期合约, 约定在 6 个月末以 107 元购买股票. 同时将手中持有的股票卖出, 获得 105 元, 将这 105 元投资于 5% 的零息债券, 6 个月末可以获得 108.20 元. 6 个月末利用远期合约买入股票, 最终获得无风险利润 1.20 元.

9.7 $\dfrac{83}{1.05} + \dfrac{84}{1.055^2} = \dfrac{x}{1.05} + \dfrac{x}{1.055^2} \Rightarrow x = 83.49$

9.8 （1）$\dfrac{82}{1.05} + \dfrac{83}{1.055^2} + \dfrac{84}{1.06^3} = \dfrac{x}{1.05} + \dfrac{x}{1.055^2} + \dfrac{x}{1.06^3} \Rightarrow x = 82.98$

（2）$\dfrac{83}{1.055^2} + \dfrac{84}{1.06^3} = \dfrac{x}{1.055^2} + \dfrac{x}{1.06^3} \Rightarrow x = 83.50$

9.9 四个时期的浮动利率分别为 0.06、 0.07、 0.08 和 0.09. 互换利率为 0.0745.

9.10 应用债券组合的定价方法：

$$B_{固} = 4e^{-0.1\times3/12} + 4e^{-0.105\times9/12} + 104e^{-0.11\times15/12} = 98.24$$

$$B_{浮} = (5.1+100)e^{-0.1\times3/12} = 102.51$$

$$f = B_{固} - B_{浮} = 98.24 - 102.51 = -4.27$$

第10章　期权

10.1 远期多头的回收分别为−10 元、−5 元、0 元、5 元和 10 元, 空头的回收是其相反数. 看涨期权多头的回收分别为 0 元、0 元、0 元、5 元和 10 元. 看跌期权的回收分别为 10 元、5 元、0 元、0 元和 0 元.

10.2 回收分别为 0 元、0 元和 5 元. 盈亏分别为−6.01 元、−6.01 元和−1.01 元.

10.3 看跌期权的回收分别为 5 元、0 元和 0 元. 盈亏分别为 3.96 元、−1.04 元和−1.04 元.

10.4 组合的回收分别为 105 元、105 元、110 元和 115 元. 组合的盈亏分别为−7.56 元、−7.56 元、−2.56 元和 2.44 元.

10.5 组合的回收分别为−105 元、−105 元、−110 元和−115 元. 组合的盈亏分别为 12.81 元、12.81 元、7.81 元和 2.81 元.

10.6 多头的盈亏为 0.95 元, 盈亏平衡点为 42.05 元.

10.7 多头的盈亏为 3.47 元, 盈亏平衡点为 28.53 元.

10.8 看跌期权的期权费是 3.13 元.

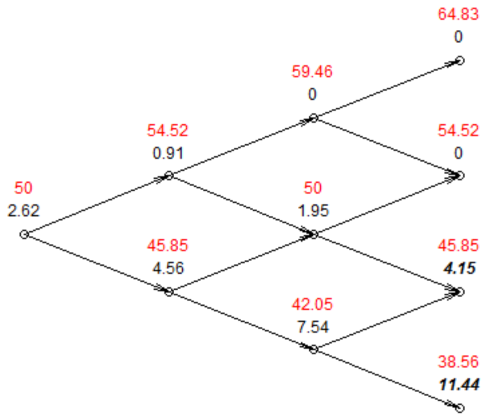
10.9 $d_1 = 0.2417$, $d_2 = 0.09167$.

根据 Black−Scholes 公式, 欧式看涨期权价格为：$C = S\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) = 3.61$

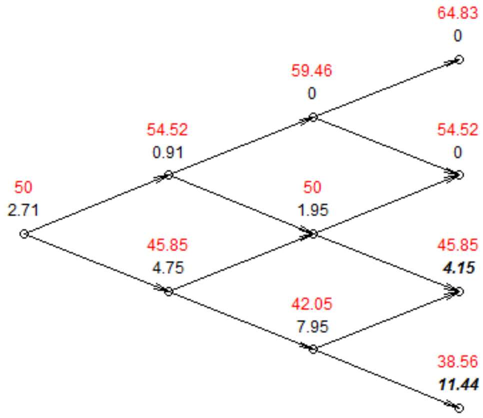
根据平价公式, 欧式看跌期权价格为 $P = C + Ke^{-rT} - S = 2.38$

10.10 $u = 1.0905$，$d = 1/u = 0.9170$，$p = \dfrac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = 0.5266$

欧式看跌期权的价值为 2.62，相应的二叉树如下：

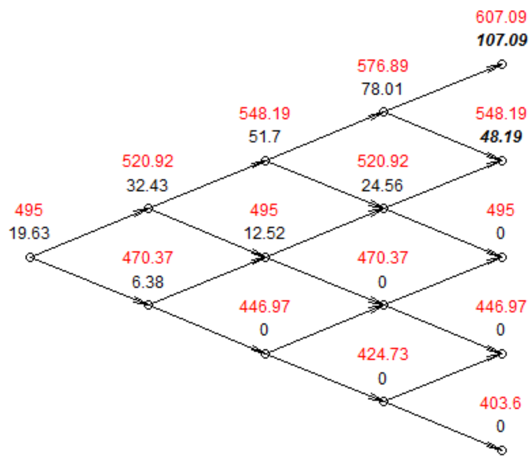


美式看跌期权的价值为 2.71，相应的二叉树如下：



10.11 $u = 1.0524$，$d = 1/u = 0.9502$，$p = \dfrac{e^{(r-\tau)\Delta t} - d}{u - d} = 0.5118$

欧式看涨期权的价值为 19.63，相应的二叉树如下：



10.12 回收和盈亏如下表：

股票价格	看跌期权回收	总回收	成本及其利息	盈亏
90	5	95	−105.98	−10.98
100	0	100	−105.98	−5.98

10.13 回收和盈亏如下表：

股票价格	看涨期权回收	股票空头回收	总回收	净收入及其利息	盈亏
90	0	−90	−90	94.03	4.03
100	5	−100	−95	94.03	−0.97

10.14 回收和盈亏如下表：

股票价格	看涨期权回收	空头回收	总回收	净收入及其利息	盈亏
100	0	−100	−100	97.44	−2.56
110	5	−110	−105	97.44	−7.56

10.15 回收和盈亏如下表：

股票价格	看涨期权回收	看跌期权回收	贷出资金回收	总回收	净成本及其利息	盈亏
90	0	−5	95	90	−105	−15
100	5	0	95	100	−105	−5

10.16 回收和盈亏如下表：

股票价格	看涨期权回收	看跌期权回收	借入资金的回收	总回收	净收入及其利息	盈亏
100	0	5	−105	−100	105	5
110	−5	0	−105	−110	105	−5

10.17 $105-(9.31-1.69)\times 1.05=97$

10.18 通过下表可以看到两种交易的盈亏相同：

股票价格	买进看涨期权的回收	卖出看涨期权的回收	总回收	净成本及其利息	盈亏
90	0	0	0	−2.46	−2.5
100	5	0	5	−2.46	2.54

10.19 通过下表可以看到两种交易的盈亏相同：

股票价格	买进看涨期权的回收	卖出看涨期权的回收	总回收	净成本及其利息	盈亏
90	0	0	0	3.41	3.41
100	0	−5	−5	3.41	−1.59

第11章　　随机利率

11.1 A_{10}的完整分布如下：

概率	A_{10}	$(A_{10})^2$
0.20	1.63	2.65
0.40	2.10	4.41
0.40	2.91	8.48

(1) 十年末累积值的期望为 2330.05 元.

(2) 十年末累积值的方差为 255027.66, 标准差为 505.

11.2 期望累积值为 2593.74 元. 累积值的方差为 83865.54, 标准差为 289.60.

11.3 期望累积值为 1560.9 元.

11.4 公式（3）和（4）是正确的.

11.5 三个投资额的期望累积值分别为 6350.4 元, 3528 元和 2240 元. 第 3 年末该账户的期望累积值为 12118.4 元.

11.6 期望累积值为 1.1449, 累积值的方差为 0.000916.

11.7 (1) $\ln(1+i_t)$ 的期望为 0.073189, $\ln(1+i_t)$ 的方差为 0.000122.

(2) $E\left[\ln\left(A_{50}\right)\right]=50\mu,\ \operatorname{var}\left[\ln\left(A_{50}\right)\right]=50\sigma^2$

$$\Pr\left(1000A_{50}>40000\right)=\Pr\left[\ln\left(A_{50}\right)>\ln\left(40\right)\right]\approx\Pr\left[Z>0.376\right]=1-\Pr\left[Z<0.376\right]$$

$$\Pr\left[Z<0.376\right]=0.65\,,\ \Pr\left(1000\,\mathrm{AV}_{50}>40000\right)=0.35$$

11.8 累积价值的 95%置信区间为（0.81, 1.34）.

11.9 $(1+i_t)$ 的期望和方差分别为 $\mathrm{E}(1+i_t)=\mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}$, $\operatorname{var}(1+i_t)=\mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1)$, 故有

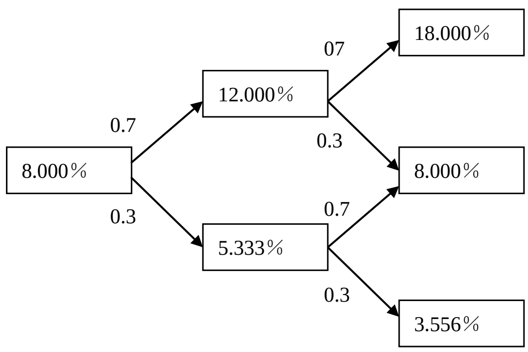
$$\mathrm{E}(i_t)=0.0844,\ \operatorname{var}(i_t)=0.00235$$

假设年收益率的中位数为 k, 则有

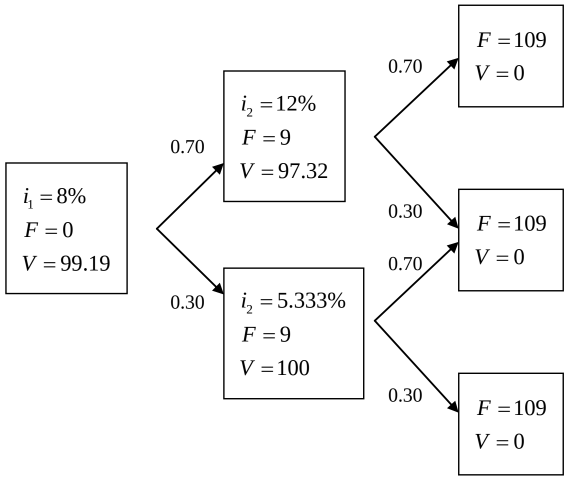
$$\Pr(i_t<k)=0.5\Rightarrow\Pr\left(\ln(1+i_t)<\ln(1+k)\right)=0.5\Rightarrow\Pr\left(Z<\frac{\ln(1+k)-\mu}{\sigma}\right)=0.5$$

$$\frac{\ln(1+k)-\mu}{\sigma}=0\Rightarrow k=8.33\%\,.$$

11.10 利率树：

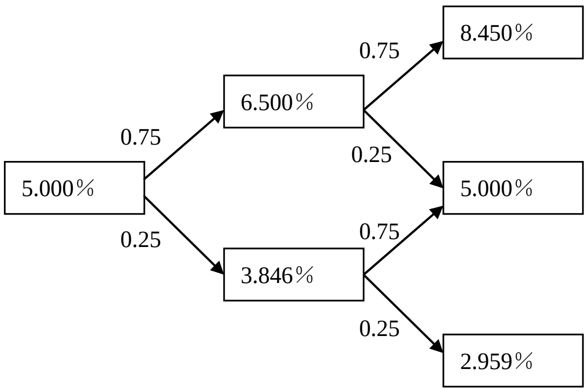


现金流和各节点的价值：



可赎回债券的价格为 99.19 元.

11.11 第 1 年末的即期利率由当前的即期利率发展而来，在当前利率水平的基础上上调 30%的概率为 0.75，下降 30%的概率为 0.25. 第 2 年末的即期利率由第 1 年末的即期利率发展而来，在第 1 年末利率水平的基础上上调 30%的概率为 0.75，下降 30%的概率为 0.25. 利率树如下：



$$\mathrm{E}[i_2]=(0.75)(0.75)(0.0845)+(0.75)(0.25)(0.05)+(0.25)(0.75)(0.05)+(0.25)(0.25)(0.02959)$$
$$=6.813\%$$