第2讲　在险价值VaR

本讲主要内容

目录

- VaR的定义和性质
- 一些分布VaR\ES计算公式
- 历史模拟法
- 均值方差法

本讲主要内容

参考资料

- QRM第2章
- QRM第3章
- 《风险价值VaR-金融风险管理新标准》第5章
- 《风险管理与金融机构》（第2版，第8章）
- SOA考试STAM的Table

2.1 VaR的定义和性质

2.1.1 VaR的定义

- VaR的含义是处于风险中的价值，“VaR(VauleatRiks)是指在市场的正常 波动下，在给定的置信水平下，某一金融资产或者证券投资组合在未来的特定的一段时间内的最大的可能的损失。
- 更正式的讲，VaR是描述一定目标时段下资产(或资产组合)的损益分布的分位点。假设损失L~F_L，置信水平为α的在险价值VaR_α定义为

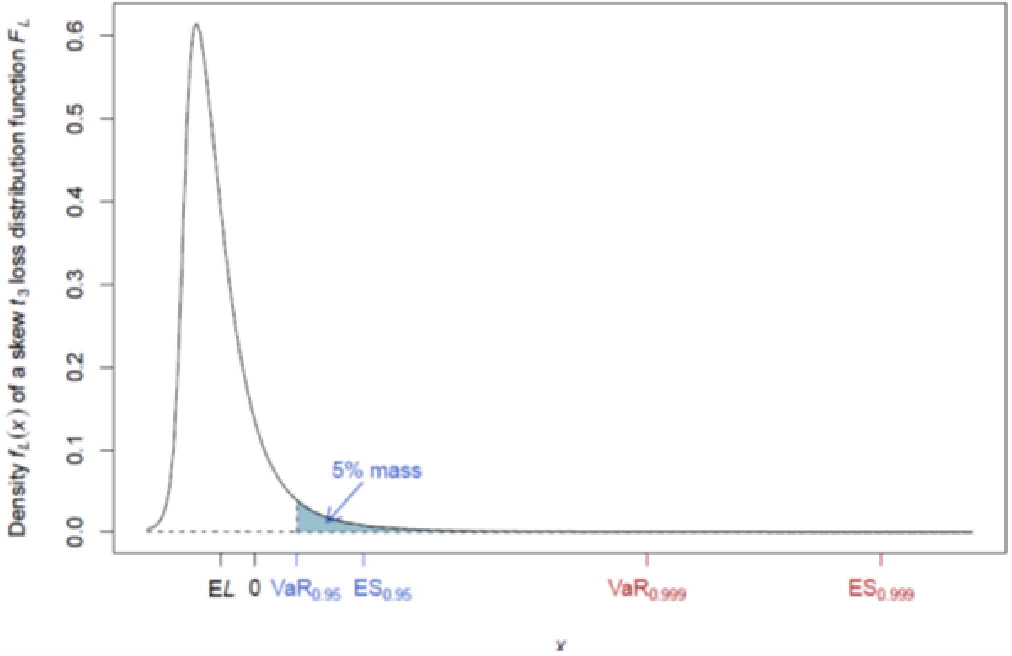
$$VaR_\alpha = VaR_\alpha(L) = F_L^{\leftarrow}(\alpha) = \inf\{x \in R: F_L(x) \geq \alpha\}$$

因此，VaR从本质上应该上损失分布的分位数，对任意$x < VaR_\alpha$，

$$F_L(x) > \alpha ,F_L(VaR_\alpha(L)) = F_L(F_L^{\leftarrow}(\alpha)) \geq \alpha.$$

- 例如：某个敞口在99%的置信水平下的日VaR值为1000万美元。

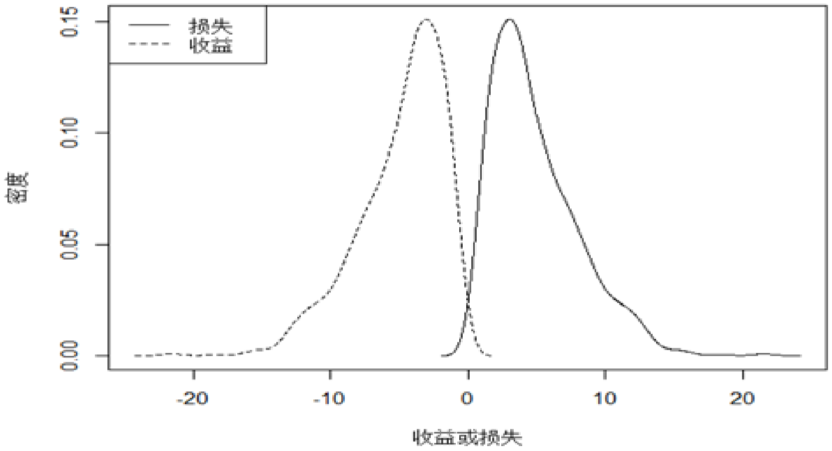
2.1 VaR的定义和性质



2.1 VaR的定义和性质

但是，有的时候，VaR_{α}是通过收益的分布来确定的。

损失和收益的关系可以由图表示，其中右侧的实线表示损失，左侧的实线表示收益。

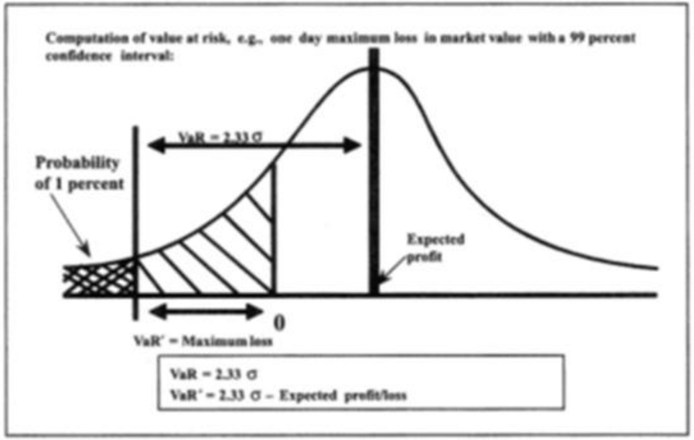


2.1 VaR的定义和性质

绝对VaR和相对VaR

绝对VaR， 给定置信水平（99%）下的最大损失，
也称VaR（零值）

$$VaR(zero) = V_0 - V^* = -V_0 R^*$$



R 表示收益率，R^*表示收益率。

相对VaR（均值）

$$VAR(mean) = E(V) - V^* = -V_0(R^* - \mu)$$

μ表示期望收益率

第二种VaR定义方式与经济资本和风险调整后资本收益率（RAROC ）计算一致。

2.1 VaR的定义和性质

2.1.2 VaR的性质

- 单调性：如果$L_1 \leq L_2$在任何情况下都成立，则

$$VaR_\alpha(L_1) \leq VaR_\alpha(L_2)$$

- 正齐次性：对于任意正数 h ，有

$$VaR_\alpha(hL) \leq hVaR_\alpha(L)$$

- 平移不变性：对于任意一个固定的常数k，有

$$VaR_\alpha(L) \leq VaR_\alpha(L) + k$$

- 但是不满足次可加性

$$VaR_\alpha(L_1 + L_2) \leq VaR_\alpha(L_1) + VaR_\alpha(L_2)(\text{次可加性})$$

2.1 VaR的定义和性质

VaR不满足次可加性的例子

假定两个独立贷款项目在1年内均有0.02的概率损失1000万美元，同时均有0.98的概率损失100万美元，任意一个单笔贷款在展望期为1年、97.5%的置信区间下VaR为100万美元。

- 将两个贷款叠加产生一个资产组合，组合有

$0.02\times0.02=0.0004$的概率损失2000万美元，
$2\times0.02\times0.98=0.0392$的概率损失1100万美元，
有$0.98\times0.98=0.9604$的概率损失200万美元。

➢ 在展望期为1年，97.5%的置信度下，组合的VaR为1100万美元

➢ 单笔贷款所对应的VaR的和为200万美元，贷款组合的VaR比贷款VaR的总和高900万美元，违反了次可加性。

思考一下：

具有哪些特征的分布，VaR不满足次可加性，也称超可加性（superadditive）

2.1 VaR的定义和性质

下面四种情形，$VaR_\alpha(L)$ is typically superadditive（超可加性）

1) $L1,L2$ have skewed distributions;

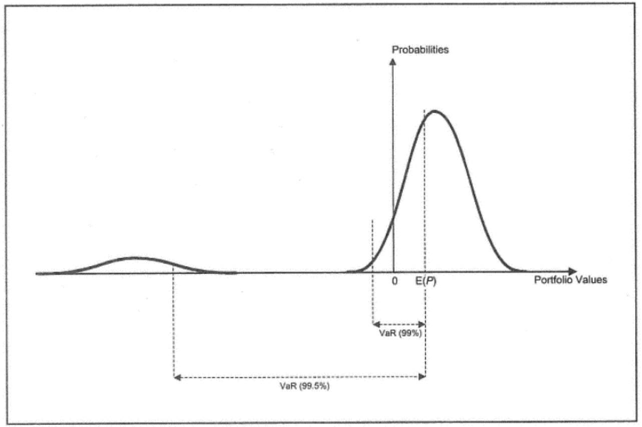
2) Independent, light-tailed $L1,L2$ and small α;

3) $L1,L2$ have special dependence;

4) $L1,L2$ have heavy tailed distributions.

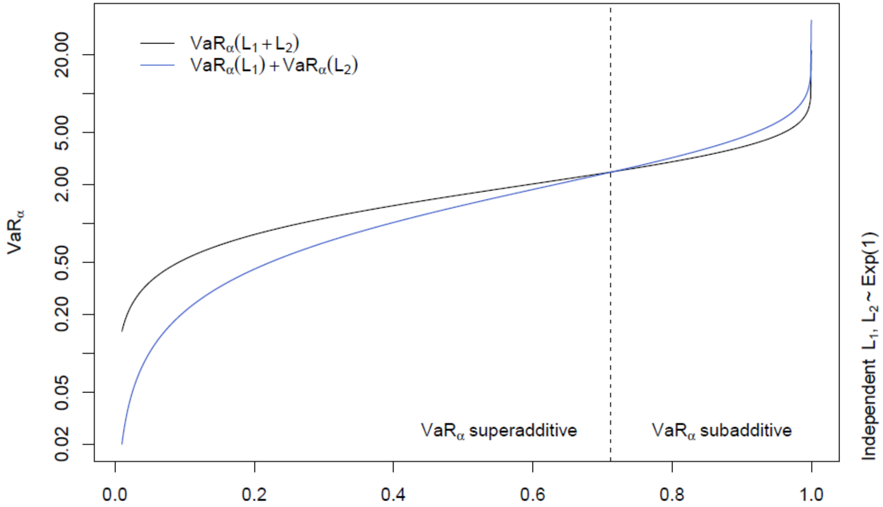
2.1 VaR的定义和性质

1)skewed distributions示例



2）Independent, light-tailed L_1,L_2 and small α

If $L_1, L_2 \overset{\text{ind.}}{\sim} \mathrm{Exp}(1)$, VaR_α is superadditive $\iff \alpha < 0.71$.



2.1 VaR的定义和性质

3）Special dependence示例

Let $\alpha \in (0,1)$, $L_1 \sim \mathrm{U}(0,1)$ and define $L_2 \overset{\text{a.s.}}{=} \begin{cases} L_1, & \text{if } L_1 < \alpha, \\ 1+\alpha-L_1, & \text{if } L_1 \geq \alpha. \end{cases}$

One can show that $L_2 \sim \mathrm{U}(0,1)$. Also, $L_1 + L_2 = \begin{cases} 2L_1, & \text{if } L_1 < \alpha, \\ 1+\alpha, & \text{if } L_1 \geq \alpha, \end{cases}$

from which one can show that

$$F_{L_1+L_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < 0, \\ x/2, & \text{if } x \in [0, 2\alpha), \\ \alpha, & \text{if } x \in [2\alpha, 1+\alpha), \\ 1, & \text{if } x \geq 1+\alpha. \end{cases}$$

For all $\varepsilon \in (0, \frac{1-\alpha}{2})$, we thus obtain that

$$\mathrm{VaR}_{\alpha+\varepsilon}(L_1+L_2) = 1+\alpha \underset{\varepsilon \in (0, \frac{1-\alpha}{2})}{>} 2(\alpha+\varepsilon) = \mathrm{VaR}_{\alpha+\varepsilon}(L_1) + \mathrm{VaR}_{\alpha+\varepsilon}(L_2).$$

2.1 VaR的定义和性质

(Heavy tailed loss distributions)示例

Let $L_1, L_2 \overset{\text{ind.}}{\sim} F(x) = 1 - x^{-1/2}$, $x \in [1, \infty)$. By deriving the distribution function

$$F_{L_1+L_2}(x) = 1 - 2\sqrt{x-1}/x, \quad x \geq 2,$$

of $L_1 + L_2$ (via the density convolution formula; tedious), one can show (via solving a quadratic equation) that VaR_α is superadditive for all $\alpha \in (0, 1)$.

2.1 VaR的定义和性质

2.1.3预期亏损ES的定义和性质

- ES（TVaR，CVaR， CED）

对于金融资产损失函数 L，在VaR的基础上，可以给出置信水平α 的ES定义如下

$$\mathrm{ES}_{\alpha} = \mathrm{ES}_{\alpha}(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} \mathrm{VaR}_{u}(L)d\,u$$

当F_L 连续时，可证明 $ES_{\alpha}(L) = E[L_t|L_t > VaR_{\alpha}(L)]$

2.1 VaR的定义和性质

- ES的性质
  - 单调性
  - 正齐次性
  - 平移不变性
  - 次可加性

（证明略，可参考QRM或其他风险管理教材）

2.2 一些分布VaR\ES计算公式

常见分布VaR ES计算公式

➢ （1）正态分布

$$VaR_\alpha(L) = F_L^{\leftarrow}(\alpha) = F_L^{-1}(\alpha) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$$

N(0,1)

$$\mathrm{ES}_\alpha(\tilde{L}) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \Phi^{-1}(u)\,du \underset{x=\Phi^{-1}(u)}{=} \frac{1}{1-\alpha}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} x\varphi(x)\,dx,$$

$L \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mu + \sigma\,\mathrm{ES}_\alpha(\tilde{L}) = \mu + \sigma\frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}.$$

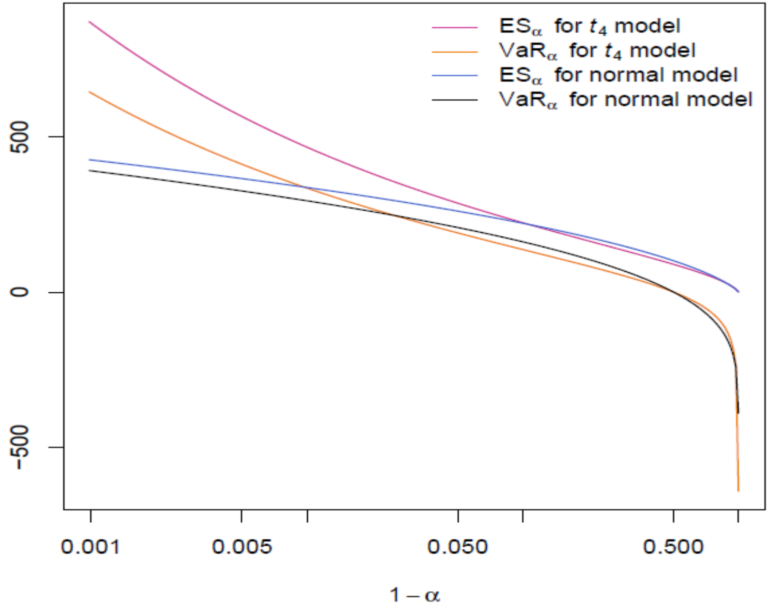
➢ （2）t分布

$$VaR_\alpha(L) = \mu + \sigma t_\nu^{-1}(\alpha)$$

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mu + \sigma\frac{f_{t_\nu}(t_\nu^{-1}(\alpha))(\nu + t_\nu^{-1}(\alpha)^2)}{(1-\alpha)(\nu-1)},$$

2.2 一些分布VaR\ES计算公式

Consider $\nu = 4$ and note that $\mathrm{VaR}_\alpha^{t4} \geq \mathrm{VaR}_\alpha^{\text{normal}}$ and $\mathrm{ES}_\alpha^{t4} \geq \mathrm{ES}_\alpha^{\text{norm}}$
only hold for sufficiently large α.



$\Rightarrow$ The t_4 model is not always "riskier" than the normal model.

2.2 一些分布VaR\ES计算公式

- （3）其他常见分布
  指数分布
  帕累托分布

。。。。。。。。。

（略）
参考Table

思考：如何用R语言求已知分布的分位数

2.2 一些分布VaR\ES计算公式

极值分布

➤ （4）极值分布

Fisher-Tippett定理：设$X_1,...,X_n$为独立同分布的随机变量序列，记$M_n = max\{X_1,\cdots,X_n\}, n > 2$，如果存在规范化常数列 {an>0},{bn}与某一非退化分布函数H(x)，使得下式成立，

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} < x\right) = H(x)$$

则H(x)可 写为如下分布函数形式

$$H_\xi(x) = \begin{cases} exp\{-e^{-x}\}, & \xi = 0;\ x \in R \\ exp\left\{-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}\right\} & \xi \neq 0;\ 1+\xi x > 0 \end{cases}$$

2.2 一些分布VaR\ES计算公式

极值分布

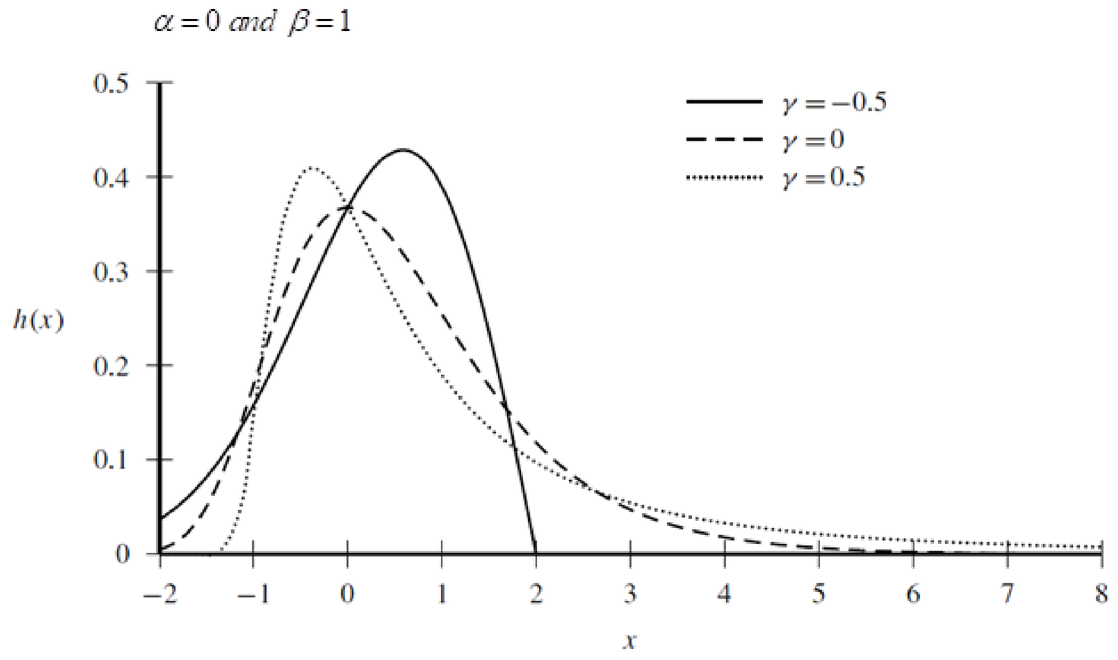
广义的极值分布GEV

$$H(x) = Pr(X_M \leq x) = \begin{cases} e^{-\left(1+\xi\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}} & if \xi \neq 0; \\ e^{-e^{-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)}} & if\ \xi = 0. \end{cases}$$

- 如果$\xi > 0$，则分布是Fr'echet型GEV分布。 Fr'echet类型的GEV分布具有遵循幂律的尾部，来自学生的t分布，帕累托分布或者L'evy分布
- 如果$\xi = 0$，则分布是Gumbel型GEV分布。 这里，尾部将是指数的，如正态分布和伽马分布及其近亲。
- 如果$\xi < 0$，则分布是威布尔型GEV分布。 这有一个快速下降尾巴，实际上有一个有限的右端点的分布，如beta，均匀和三角分布

2.2 一些分布VaR\ES计算公式

极值分布



2.2 一些分布VaR\ES计算公式

极值分布

GEV分布估计方法

块最大值法The Block Maxima Method

我们用M_{nj}表示第j个块的块最大值，所以我们的数据是

$$M_{n1},...,M_{nm}$$

GEV分布可以使用各种方法拟合，包括最大似然估计

$$l(\xi,\mu,\sigma;M_{n1},...,M_{nm})$$

$$=\sum_{i=1}^{m} ln\, h_{\xi,\mu,\sigma}\left(M_{ni}\right)$$

$$=-m\ln\sigma-\left(1+\frac{1}{\xi}\right)\sum_{i=1}^{m} ln\left(1+\xi\frac{M_{ni}-\mu}{\sigma}\right)-\sum_{i=1}^{m}\left(1+\xi\frac{M_{ni}-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}$$

注意：使用极大似然估计需满足条件： $1+\xi(M_{ni}-\mu)/\sigma>0$

2.2 一些分布VaR\ES计算公式

a) 如何确定m、n的值？
b) R软件包？ extRemes 或参考QRM的程序
c) GEV方法的主要缺点是通过在每个数据块中仅使用最大值或多个值，它忽略了许多可能有用的信息。例如，如果使用返回级别方法并且每个块有一千个观察，则99.9％的信息被丢弃。

2.2 一些分布VaR\ES计算公式

极值分布

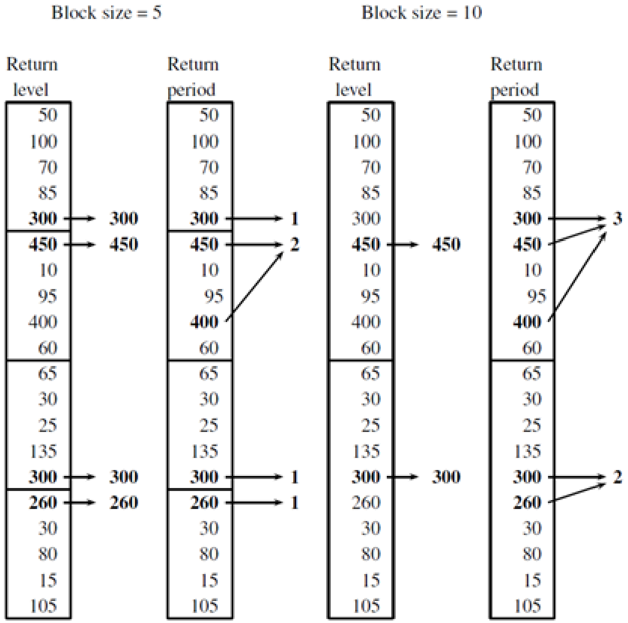


Figure 12.3 Comparison of GEV approaches and block sizes

2.2 一些分布VaR\ES计算公式

极值分布

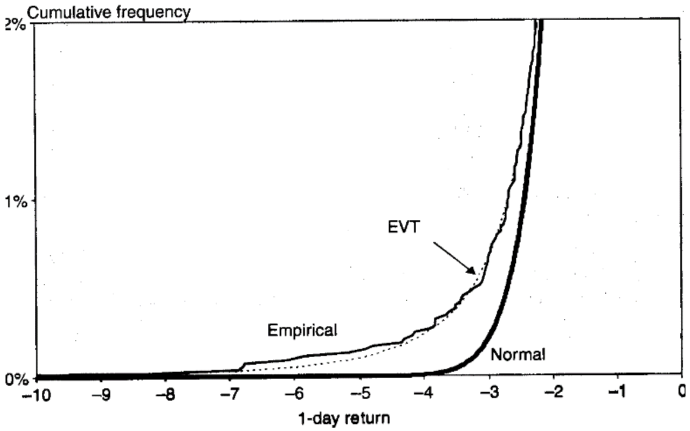


图 1984-2004的S&P 500收益率的分布拟合图

拓展思考：如果$X_1,...,X_n$为严平稳序列，极值定理是否成立？

2.2 一些分布VaR\ES计算公式

（5）广义帕累托分布

Balkema-Haan-Pickands定理:

设随机变量的分布为$F(x)$，右端点为x_F, 称分布函数

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u), x \geq 0$$

为随机变量X超出量分布函数。当u足够大，当且仅当分布F属于GEV的最大值吸引域时，$F_u(x)$可以用广义帕累托分布GPD来近似。

$$G(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \dfrac{\xi x}{\beta}\right)^{-\xi} & if\ \xi \neq 0; \\ 1 - \ exp(-x/\beta) & if\ \xi = 0. \end{cases}$$

2.2 一些分布VaR\ES计算公式

极值分布

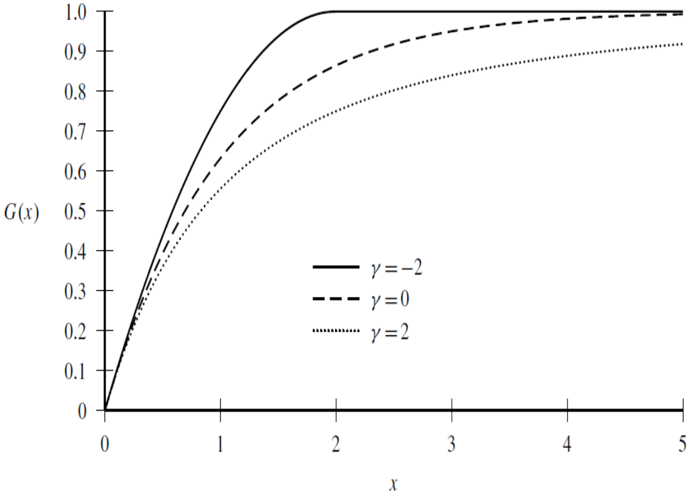


Figure 12.4 Various generalised Pareto distribution functions

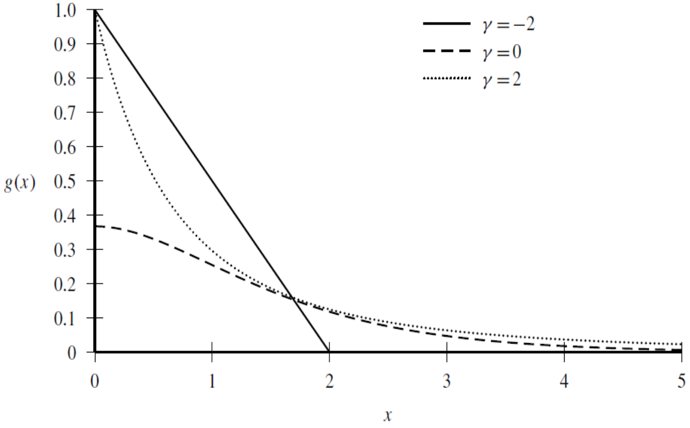


Figure 12.5 Various generalised Pareto density functions

2.2 一些分布VaR\ES计算公式

极值分布

确定阈值u的方法

确定阈值u是POT建模的前提，若阈值选取过低，超出量分布不能显著收敛于极限分布；同时u不能过大，否则落入阈值以上的数据可能很少，导致信息很少。

（1）平均超额函数法

经验超额函数：$e_n(u) = \frac{\sum_1^n (x_i - u)}{\sum_1^n I_{\{x_i > u\}}}$

GPD的超额函数：$e(u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \varepsilon}$，　for all u: $\beta + \xi u > 0$

当u达到某临界值u_0以后，若经验平均超出量函数 $e_n(u)$ 呈线性变化，则可以确定u_0为阈值。

2.2 一些分布VaR\ES计算公式

极值分布

（2）Hill图法

$$H_{k,n}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} ln\frac{x_{(i)}}{x_{(k)}}$$

$$\{(k,H_{k,n}^{-1});k=1,2,...,n\}$$

在Hill图形中，尾部稳定区域的起点横坐标k所对应的次序统计量$x_{(k)}$可以作为阈值u。

（3）经验法则：保证u近似等于实证分布中的95%的分位数。

2.2 一些分布VaR\ES计算公式

极值分布

GPD的参数估计：

假定损失$X_1,\ldots,X_n \sim F \in MDA(H_\xi)$, 定义$N_u = |\{i \in \{1,\ldots,n\} : X_i > u\}|$

$Y_i = X_i - u$,

$$g_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}(1+\xi x/\beta)^{-1/\xi-1}, & \text{if } \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\beta}\exp(-x/\beta), & \text{if } \xi = 0 \end{cases}$$

GPD的分布密度函数

$$\ell(\xi,\beta;Y_1,\ldots,Y_{N_u}) = \sum_{k=1}^{N_u} \log g_{\xi,\beta}(Y_k)$$

$$= -N_u \log(\beta) - (1+1/\xi)\sum_{k=1}^{N_u} \log(1+\xi Y_k/\beta)$$

Maximize w.r.t. $\beta > 0$ and $1 + \xi Y_k/\beta > 0$ for all $k \in \{1,\ldots,N_u\}$

2.2 一些分布VaR\ES计算公式

广义帕累托分布的VaR值

极值分布

$$
\begin{aligned}
\bar{F}(x) &= \mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(X > u)\mathbb{P}(X > x|X > u) \\
&= \bar{F}(u)\mathbb{P}(X - u > x - u|X > u) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(x-u) \\
&= \bar{F}(u)\left(1 + \xi\frac{x-u}{\beta}\right)^{-1/\xi}, \quad x \geq u
\end{aligned}
$$

假设我们已知$\bar{F}(u)$的值

$$VaR_\alpha = F^{\leftarrow}(\alpha) = u + \frac{\beta}{\xi}\left(\left(\frac{1-\alpha}{\bar{F}(u)}\right)^{-\xi} - 1\right)$$

$$\mathrm{ES}_\alpha = \frac{\mathrm{VaR}_\alpha}{1-\xi} + \frac{\beta - \xi u}{1-\xi}, \quad \xi < 1$$

因此，一旦估计出$\hat{\xi}, \hat{\beta}$我们可以利用$g(\hat{\xi}, \hat{\beta}, N_u/n)$来计算出$VaR_\alpha$和$\mathrm{ES}_\alpha$

2.2 一些分布VaR\ES计算公式

极值分布

Smith (1987)给出了

$$\hat{\vec{F}}(x)=\frac{N_u}{n}\left(1+\hat{\xi}\frac{x-u}{\hat{\beta}}\right)^{-1/\hat{\xi}},\quad x\geq u$$

对应于置信水平为α的VaR，我们对$F(VaR)=\alpha$求解

$$\alpha=1-\frac{N_u}{n}\left(1+\xi\frac{VaR_\alpha-u}{\beta}\right)^{-1/\xi}$$

因此

$$V\hat{a}R_q=u+\frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}\left\{[(n/N_u)(1-\alpha)]^{-\hat{\xi}}-1\right\}$$

$$ES_q=\frac{VaR}{1-\hat{\xi}}+\frac{\hat{\beta}-\hat{\xi}u}{1-\hat{\xi}}$$

2.2 一些分布VaR\ES计算公式

极值分布

但是

It faces a bias-variance tradeoff: If u is increased, the bias of parametrically estimating $\bar{F}_u(x-u)$ decreases, but the variance of it and the nonparametrically estimated $\bar{F}(u)$ increases.

拓展：基于Hill指标的计算GPD的VaR（略，自学QRM）

2.3 计算市场组合VaR的基本方法

2.3.1 数学表达

设投资组合的在t时刻价值为V_t，风险因子是S_t，$V_t = g(\tau_t, S_t)$

例如股票的风险因子是股票价格，债券的风险因子是利率

$X_{t+1} = S_{t+1} - S_t$ 表示随着时间的风险因子变化量

风险因子历史数据一般采用时间序列$X_{i-n}, \ldots, X_{i-1}, X_t$的形式，并且是用来预测$X_{t+1}$。

投资组合在t到t+1的损失

$$
\begin{aligned}
L_{t+1} &= -(V_{t+1} - V_t) \\
&= -\big(g(\tau_{t+1}, S_{t+1}) - g(\tau_t, S_t)\big) \\
&= -\big(g(\tau_t + \Delta t, S_t + X_{t+1}) - g(\tau_t, S_t)\big)
\end{aligned}
$$

时刻t风险因子的值S_t已知，损失L_{t+1}是由风险因子的变化X_{t+1}决定的。

2.3 计算市场组合VaR的基本方法

因此，影响时刻t+1的VaR计算的几个主要因素为

1. 置信水平α
2. 持有期Δt
3. 风险因子的变化X_{t+1}的分布函数
4. 金融头寸的资产价值V_t

2.3 计算市场组合VaR的基本方法

（1）这些因素需要根据实际情况来确定，例如

1. 公司范围内不同市场风险的比较，99%，1天
2. 潜在损失的衡量
3. 监管要求：如资本充足率
4. 回溯标准
5. 风险偏好、使用者目的

（2）当持有期较长，还有考虑无风险利率的影响 $\Delta V_{t+1} = V_{t+1}/(1+r) - V_t$ 。

2.3 计算市场组合VaR的基本方法

2.3.2 计算VaR的步骤

① 逐日盯市确认投资组合的市值

② 衡量风险因素的变化率，如波动率15%

③ 设定时间区域，样本观察时间段，如10天

④ 设定置信水平，如99%，

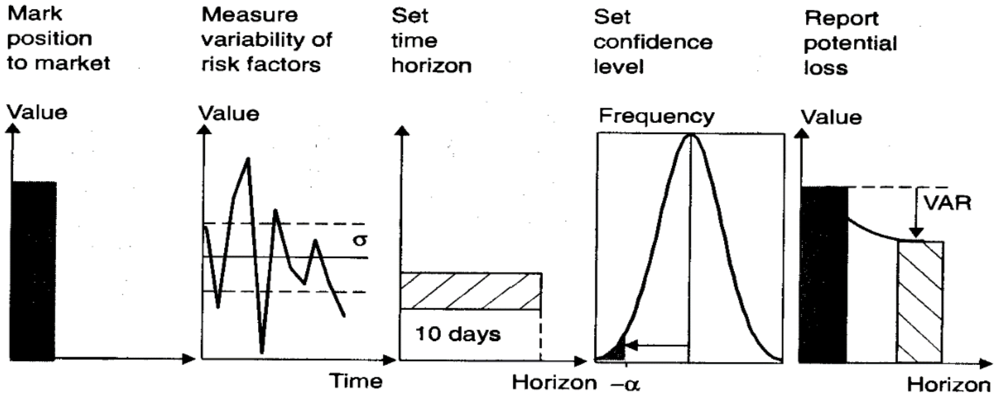
⑤ 对风险因子变化的分布进行假设，例如，正态分布，t分布

⑥ 分析前面信息数据，得出收入的分布概率，计算投资组合潜在的最大损失，综合得出 VaR。

2.3 计算市场组合VaR的基本方法

案例：假设资产组合只受一个风险因子的影响，假设风险因子的日变化服从正态分布,资产组合价值年波动率为15%，则在99%的置信水平下，资产组合在10天后VaR为700美元，即

$$\$100M \times 15\% \times \sqrt{(10/252)} \times 2.33 = \$7M$$



2.3 计算市场组合VaR的基本方法

注意：

- ✧ 不要混淆分位数和在险价值（VaR）的概念
- ✧ 在风险管理的现实中，VaR是损失金额，不是损失率也不是收益率

2.3 计算市场组合VaR的基本方法

2.3.3 VaR的计算方法

- 非参数法：使用历史数据，计算经验分布和经验分位数。
  1. 历史模拟法
- 参数法：假定收益率服从某种分布，或随机过程，估计参数，计算分布的分位数。
  1. 正态分布（均值方差法）
  2. T分布
  3. 极值分布
- 随机模拟方法

2.4 历史模拟法计算VaR

2.4.1 历史模拟法的步骤

1. 首先选择风险因子的历史数据，例如500个交易日数据。
2. 其次，用历史数据计算资产组合的价值和价值的变化.
3. 最后，构建直方图，找到1%的分位点，即第5个最坏的损失。计算VAR。

我们将某市场变量在第i天所对应的数值记为v_i，假定今天为第n天，市场变量在明天所对应的第i个情景为

$$v_n \frac{v_i}{v_{i-1}}$$

2.4 历史模拟法计算VaR

历史模拟法计算例子

考虑一个美国投资者，在2008年9月25日持有价值1000万的投资组合（如图），组合中有4个股票指数，指数价格以美元计算，下面显示了4个指数的收盘价格的历史数据（可下载）

表2-1 用于演示VaR计算过程的投资组合

指数	组合价值（以1000美元计）
DJLA	4000
FTSE 100	3000
CAC 40	1000
Nikkei 225	2000
总计	10000

资料来源：John C.Hull《风险管理与金融机构》，第2版

2.4 历史模拟法计算VaR

表2-2 采用历史模拟法计算VaR所需的股票指数数据（以美元计）

天数	日期	DJLA	FTSE 100	CAC 40	Nikkei 225
0	Aug. 7, 2006	11219.38	11131.84	6373.89	131.77
1	Aug. 8, 2006	11173.59	11096.28	6378.16	134.38

表2-3 由表2-2数据产生的对于2008年9月26日的市场变量的不同情景

情景数据	DJLA	FTSE 100	CAC 40	Nikkei 225	组合价值（千美元）	损失（千美元）
1	10977.08	9569.23	6204.55	115.05	10014.334	-14.334
2	10925.97	9676.96	6293.60	114.13	10027.481	-27.481

$$11022.06\times\frac{11173.59}{11219.38}=10977.08$$

$$4000\times\frac{10977.08}{11022.06}+3000\times\frac{9569.23}{9599.90}+1000\times\frac{6204.55}{6200.40}+2000\times\frac{115.05}{112.82}$$
$$=10014.334$$

2.4 历史模拟法计算VaR

表2-4 对应500个情景损失的排序

情景编号	损失数量（千美元）	情景编号	损失数量（千美元）
494	477.841	473	191.269
339	345.435	306	191.050
349	282.204	477	185.127
329	277.041	495	184.450
487	253.385	376	182.707
227	217.974	237	180.105
131	205.256	365	172.224
238	201.389	…	…

10天VaR 等于

$$\sqrt{10} \times 253385 = 801274$$

2.4 历史模拟法计算VaR

2.4.3历史模拟法的几种推广

1、对观察值设定权重

- 使权重随时间回望期的延伸而按指数速度递减

$$\lambda^{n-i}\frac{(1-\lambda)}{1-\lambda^{n}}$$

- 将所有观测值由最坏到最好进行排序
- 由损失最坏的情形开始，累积计算每一项权重的和，直到达到某指定分位数界限时为止。
- 可以通过回顾检验中，测试不同的λ，来选取最佳参数λ

2.4 历史模拟法计算VaR

表2-5 对于设有权重的500个情景的损失（由高到低排序）

情景编号	损失（千美元）	权重	累积权重
494	477.841	0.00528	0.00528
339	345.435	0.00243	0.00771
349	282.204	0.00255	0.01027
487	253.385	0.00510	0.01768
227	217.974	0.00139	0.01906
238	201.389	0.00146	0.02138
473	191.269	0.00476	0.02614
…	…	…	…

$$\frac{(0.995^6)\times 0.005}{1-0.995^{500}}=0.00528,\lambda=0.995$$

2.4 历史模拟法计算VaR

2、更新波动率

- 利用第i天波动率与当前波动率的不同，使用一种更新波动率的模式，并基于在第i天观测到的百分比变化来调整市场变量。例如,假定σ_{n+1}是σ_i的两倍。
- 市场变量在第i个情形会变成

$$v_n \frac{v_{i-1} + (v_i - v_{i-1})\sigma_{n+1}/\sigma_i}{v_{i-1}}$$

表2-6 利用EWMA模型计算出的波动率（%每天），$\lambda = 0.94$

天数	日期	DJLA	FTSE 100	CAC 400	Nikkei 225
0	2006年8月7日	1.11	1.42	1.40	1.38
1	2006年8月8日	1.08	1.38	1.36	1.43
2	2006年8月9日	1.07	1.35	1.36	1.41
3	2006年8月10日	1.04	1.36	1.39	1.37

2.4 历史模拟法计算VaR

计算说明：对于DJLA、FTSE 100、CAC 40和Nikkei 225指数在2008年9月26日得出的波动率（表的最后一行）与2008年8月8日得出的波动率（表的第1行）的比率分别为1.94,2.26,2.21,1.15。这些比率是作为2006年8月7日至8月8日指数变化的乘数因子；类似地，对于这些股票指数，在2008年9月26日得出的波动率（表的最后一行）与在2008年8月9日得出的波动率（表的第2行）的比率分别为2.03,2.33,2.28,1.12，这些比率是作为2006年8月8日至8月9日指数。

2.4 历史模拟法计算VaR

表2-7经波动率调节的500个情景的、由高到低进行排序后的损失

情景编号	损失（千美元）	情景编号	损失（千美元）
131	1082.969	339	546.540
494	715.512	74	492.764
227	687.720	193	470.092
98	661.221	487	458.177
329	602.968		

2.5 参数法计算VaR

均值方差法

2.5.1 均值方差法

假设资产的初始价值为W_0，资产的收益率为R，服从正态分布

$$f(R)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(R-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$Prob(R<R^*)=\int_{-\infty}^{R^*}f(R)dR=Prob(Z<\frac{R^*-\mu}{\sigma})=1-\alpha$$

$Z=(R-\mu)/\sigma$ 称为标准化收益率，服从标准正态分布 $N(0,1)$

$$-c=\frac{-|R^*|-\mu}{\sigma}$$

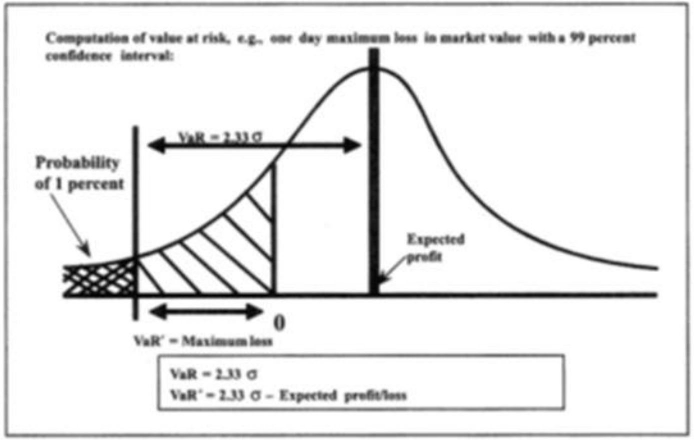
表示标准正态分布1-α的分位点

2.5 参数法计算VaR

均值方差法

表2-8不同置信水平对应的临界值

α	$c=\dfrac{R^*-\mu}{\sigma}$
99.97%	-3.43
99.87%	-3.00
99%	-2.33
95%	-1.65



设初始资产组合为W_0, 令$R^*=-c\sigma+\mu$，资产组合的在险价值为

$$VaR_\alpha\,(mean)=-W_0(R^*-\mu)=W_0c\sigma\sqrt{\Delta t}$$
$$VaR_\alpha(zero)=-W_0R^*=W_0(c\sigma\sqrt{\Delta t}-\mu\Delta t)$$

2.5 参数法计算VaR

均值方差法

10日VaR

假设市场是有效的，每日收益R_t是独立同分布的，服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则10日收益率$R(10)=\sum_{t=1}^{10} R_t$ 也是服从正态分布，均值10μ，方差是$10\sigma^2$，

$$VaR_\alpha(L_{10})=\sqrt{10}VVaR_\alpha(L_1)$$

2.5 参数法计算VaR

均值方差法

应用：计算股票组合的VaR

假设持有两种股票，价格分别为S1（持有数量n1）、 S2（持有数量n2），则股票组合的价值为

$$V = n_1 S_1 + n_2 S_2$$

(1) 风险因子选择股票价格，

$$R_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{n_1 S_1}{V}\frac{\Delta S_1}{S_1} + \frac{n_2 S_2}{V}\frac{\Delta S_2}{S_2} = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 = \sum_{i=1}^{2} \omega_i R_i$$

R_V = 资产组合收益率

R_i =第i种股票的收益率，$i = \Delta S_i / S_i$

w_i=资产组合中投资于第i种股票的比重, *I*, = 1,2, with$\Sigma w_i = 1$

2.5 参数法计算VaR

均值方差法

(2)计算风险因子 R_v的分布：假设价格服从对数正态分布，日收益率

$$R_t = ln(\frac{S_t}{S_{t-1}}) = ln(1 - \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}) \sim \frac{\Delta S_t}{S_{t-1}}$$

服从正态分布。假设股票收益率R_i服从正态分布，μ_i和σ_i相关系数为ρ。

$$R_i = \frac{\Delta S_i}{S_i} \sim N(\mu_i, \sigma_i) \ for \ i = 1,2$$

(3)计算股票i的1日和10的VAR（基于均值）

$$VaR_{0.99}(\Delta V_{t+1}^i) = 2.33 \cdot \sigma_i \cdot S_i$$
$$VaR_{0.99}(\Delta V_{t+10}^i) = \sqrt{10} \cdot VaR_{0.99}(V_1^i) = 2.33\sqrt{10}\sigma_i \cdot S_i$$

2.5 参数法计算VaR

均值方差法

(4)计算资产组合1日和10日的VaR（基于均值）

$$R_V \sim N(\mu_V, \sigma_V)$$

$$\mu_V = \sum_{i=1}^{2} \omega_i \mu_i$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2{}_V &= \omega_1{}^2\sigma_1{}^2 + \omega_2{}^2\sigma_2{}^2 + 2\omega_1\omega_2\, cov(R_1, R_2) \\
&= \omega_1{}^2\sigma_1{}^2 + \omega_2{}^2\sigma_2{}^2 + 2\omega_1\omega_2\rho\sigma_1\sigma_2 \\
&= (\omega_1 \quad \omega_2)\begin{pmatrix} \sigma_1{}^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2{}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \\
&= (\omega_1 \quad \omega_2)\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \\
&= w\Omega w^T = w\sigma C\sigma w^T
\end{aligned}$$

2.5 参数法计算VaR

$$VaR_{0.99}(\Delta V_{t+1}) = 2.33 \cdot \sigma_V V$$

$$VaR_{0.99}(\Delta V_{t+10}) = \sqrt{10} VaR_{0.99}(V_1) = 2.33 \cdot \sqrt{10} \cdot \sigma_V V$$

$$VaR_{0.99}(\Delta V_{t+1}) = 2.33[w\sigma C\sigma w^T]^{1/2} V$$

$$= [VaR \cdot C \cdot VaR^T]^{1/2}$$

均值方差法

(5)通过对这两支股票一年的历史数据，可以估计收益率的均值和方差分别为

$$\mu_1 = 0.155\%$$
$$\mu_2 = 0.0338\%$$
$$\sigma_1 = 2.42\%$$
$$\sigma_2 = 1.68\%$$
$$\rho = 0.14$$

$$V = n_1 S_1 + n_2 S_2 = \$18{,}662$$

$$\omega_1 = \frac{n_1 S_1}{V} = 0.49$$

$$\omega_2 = \frac{n_2 S_2}{V} = 0.51$$

2.5 参数法计算VaR

均值方差法

$$\mu_V = \omega_1\mu_1 + \omega_2\mu_2 = 0.093\%$$
$$\sigma_V{}^2 = \omega_1{}^2\sigma_1{}^2 + \omega_2{}^2\sigma_2{}^2 + 2\rho\omega_1\omega_2\sigma_1\sigma_2 = 0.00024$$
$$\sigma_V = 1.55\%$$

$$VaR_{0.99}(\Delta V_{t+1}^1)(mean) = 2.33\sigma_1 n_1 S_1 = \$517$$
$$VaR_{0.99}(\Delta V_{t+1}^2)(mean) = 2.33\sigma_2 n_2 S_2 = \$370$$
$$VaR_{0.99}(\Delta V_{t+1})(mean) = 2.33\sigma_V V = \$677$$

$$VaR_{0.99}(\Delta V_{t+1}^1)(zero) = (2.33\sigma_1 - \mu_1)n_1 S_1 = \$503$$
$$VaR_{0.99}(\Delta V_{t+1}^2)(zero) = (2.33\sigma_2 - \mu_2)n_2 S_2 = \$367$$
$$VaR_{0.99}(\Delta V_{t+1})(zero) = (2.33\sigma_V - \mu_V)V = \$657$$

讨论：

你认为VaR(mean)和VaR(zero)那种更方便？

ρ

2.5 参数法计算VaR

注意，资产组合的VaR小于两个资产的VaR的和，这反映了由于权益资产不完全相关而引起的资产组合效应。

均值方差法

表2-8 VaR对相关系数的敏感性

ρ	$VaR_{0.99}(\Delta V_{t+1})(mean$	分散效应
-1.0	\$887	\$0
0.5	\$772	\$115
0	\$636	\$251
-0.5	\$461	\$426
-1.0	\$146	\$741

2.5 参数法计算VaR

均值方差法计算其他金融产品的VaR

均值方差法

假设持有风险资产，价值为V，将V表述为n个风险因子f_i的函数，$i = 1, \ldots, n$.，则一阶泰勒展开近似为

$$dV = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial f_i} df_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i df_i$$

Δ_i通常称为“希腊字母”

假设风险因子都服从正态分布，则

$$\sigma(dV) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 \sigma^2(df_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \Delta_i \Delta_j cov\left(df_i, df_j\right)}$$

$$VaR_{0.99}(V) = 2.33 \cdot \sigma(dV)$$

2.5 参数法计算VaR

均值方差法

例如：欧式期权定价

$$\Delta C = f(S_{t+\Delta t}, \sigma_{t+\Delta t}, r_{t+\Delta t}, t+\Delta t) - f(S_t, \sigma_t, r_t, t)$$

$$\Delta C \approx \delta(S_{t+\Delta t} - S_t) + \frac{1}{2}\gamma(S_{t+\Delta t} - S_t)^2 + v(\sigma_{t+\Delta t} - \sigma_t) + \bar{\rho}(r_{t+\Delta t} - r_t) + \theta\Delta t$$

$$\delta = \frac{\partial f}{\partial S} \quad \gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \quad v = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad \bar{\rho} = \frac{\partial f}{\partial r} \quad \theta = \frac{\partial f}{\partial t}$$

我们将在市场风险建模一章详细介绍债券和衍生产品

2.5 参数法计算VaR

均值方差法

均值方差分析的优缺点

优点：

i. 计算方便
ii. 根据中心极限定理，风险因子不一定需要满足正态性
iii. 不需要定价模型，只需敏感因子

缺点

i. 收益正态性假设
ii. 不满足胖尾性
iii. 需要估计波动率和相关系数

2.5 参数法计算VaR

均
值
方
差
法

均值方差的推广

a) 时变方差：EWMA、GARCH，SV
b) 使用其它参数分布
   1) t 分布
   2) 椭圆分布
   3) 极值分布
   4) 广义帕累托分布

2.5 参数法计算VaR

极值分布

应用：广义帕累托分布计算VaR的例子

表2-8用于演示VaR计算过程的投资组合

指数	组合价值（以1000美元计）
DJLA	4000
FTSE 100	3000
CAC 40	1000
Nikkei 225	2000
总计	10000

表2-9 采用历史模拟法计算VaR所需要的数据

天数	日期	DJLA	FTSE 100	CAC 40	Nikkei 225
0	Aug. 7, 2006	11219.38	5828.8	4956.34	15154.06
1	Aug. 8, 2006	11173.59	5818.1	4967.95	15464.66

2.5 参数法计算VaR

极值分布

应用：广义帕累托分布计算VaR的例子

情形编号	损失数量（以1000计）
494	499.395
339	359.440
329	341.366
349	251.943
487	247.571
131	241.712
227	230.265
495	227.332
441	225.051
376	217.945
306	211.797
365	202.970
242	200.116
238	199.467
477	188.758

情形数码	损失（以1 000美元计）	排序	$\ln\left[\frac{1}{\beta}\left(1+\frac{\xi(v_i-u)}{\beta}\right)^{-1/\xi-1}\right]$
494	499.395	1	−8.79
339	359.440	2	−7.10
329	341.366	3	−6.82
299	251.943	4	−5.11
487	247.571	5	−5.01
131	241.712	6	−4.87
227	230.265	7	−4.58
495	227.332	8	−4.50
441	225.051	9	−4.43
376	217.945	10	−4.24
306	211.797	11	−4.06
365	202.970	12	−3.78
242	200.116	13	−3.69
总计			−66.98

EVT 系数试验计算估计

ξ	β
0.3	40

注：$u=200$、$\beta=40$、及 $\xi=0.3$。

2.5 参数法计算VaR

应用：广义帕累托分布计算VaR的例子

令$u = 200, n_u = 13$。采用Excel计算中的Solve程序，可求得使似然函数达到最大值的参数值为

$$\beta = 43.526$$

$$\xi = 0.371$$

在99%的置信水平下的VaR值为

$$200 + \frac{43.526}{0.371}\left[\left(\frac{500}{13}(1-0.99)\right)^{-0.371} - 1\right] = 249.9$$

2.6 蒙特卡罗模拟计算VaR

2.6.1 随机模拟

采用蒙特卡罗模拟法，计算交易组合一天展望期的VaR，计算步骤如下

i. 利用当前的市场变量对交易组合进行定价
ii. 从Δx_i服从的多元正态分布中进行一次抽样
iii. 由Δx_i的抽样计算出在交易日末的市场变量
iv. 利用新产生的市场变量来对交易组合重新定价
v. 计算ΔP
vi. 重复2-5步的计算，得出ΔP的概率分布

2.6 蒙特卡罗模拟计算VaR

应用：计算股票组合的VaR

首先，选择所有风险因子，设定其动态模型（可能需要估计均值、方差和相关系数等变量），例如股票价格服从如下随机过程

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

其次，构造价格路径，例如上述随机微分方程的解为

$$S_t = S_0\, exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right]$$

W_t 是标准布朗运动.

将上述过程离散化，

$$S_t = S_{t-1}\, exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma \Delta t Z\right]$$

Δt = t-1到t之间的时间间隔

Z = 服从标准正态分布N(0,1)的变量，$W_t = W_{t-1} + \sqrt{\Delta t} Z$

利用均匀分布随机数，可以得出构造价格路径所需要的随机数据。

2.6 蒙特卡罗模拟计算VaR

当有多个风险资产$S_t^1,...,S_t^n$服从的几何布朗运动随机过程，相关系数为ρ_{ij}，均值为μ_i，方差为σ_i可将多变量方程写为

$$E\left[W_t^i W_t^j\right]=\rho_{ij}t$$

$$S_t^i=S_0^i\,exp\left[\left(\mu_i-\frac{1}{2}\sigma_i^2\right)t+\sqrt{t}\sigma_i X_i\right]$$

最后，模拟10000次的价格路径，得到资产组合的价格经验分布，计算资产组合价值在1%的分位数和VaR。

2.6 蒙特卡罗模拟计算VaR

问题：如何产生多元正态分布的随机数

$X=(X_1,...,X_n)$是多元正态随机向量，均值等于0，方差矩阵为Σ，$\Sigma_{ij}=E(XX^T)=\rho_{ij}$产生随机向量$X=(X_1,...,X_n)$的方法

先产生n个正态随机变量随机数

计算矩阵A，使得$\Sigma=AA^T$例如

$$\sum=\begin{pmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \rho & (1-\rho^2)^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \rho\\ 0 & (1-\rho^2)^{1/2}\end{pmatrix}$$

产生随机向量

$$\begin{pmatrix}X^1\\ X^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \rho & (1-\rho^2)^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y^1\\ Y^2\end{pmatrix}$$

$$X^1=Y^1$$

$$X^2=\rho Y^1+(1-\rho^2)^{1/2}Y^2$$

2.6 蒙特卡罗模拟计算VaR

更简单的方法：

调用R程序，例如

```
library(MASS)
Sigma <- matrix(c(10,3,3,2),2,2)
Sigma
mvrnorm(n=1000, rep(0, 2), Sigma)
```

本节案例作业

假设你有100万的资产，可以投资世界各国公开市场交易的股票、基金、大宗商品、黄金和衍生品。下面按照如下步骤对你的资产组合进行如下分析

1. 用quantmod 包下载四种资产（股票，债券，ETF，贵金属、外汇均可）。计算每种资产的对数收益率序列。
2. 假定每种资产占投资组合的比例相等在过去500天的收益率。对收益率进行描述性统计分析，进行正态性检验和ARCH效应检验。
3. 用历史模拟法计算你的投资组合的99%的VaR和ES值。
4. 用极值分布计算你投资组合的99%的VaR和ES值。
5. 用均值方差法计算你的投资组合的99%的VaR和ES值。

谢 谢！