Практическая работа №10
«Решение матричной игры методом итераций»

Цель работы:

Краткие теоретические основания выполнения задания

Заинтересованность игроков в тех или иных ситуациях проявляется в том, что каждому игроку P_i в каждой ситуации $\bar{S}$ приписывается число, выражающее степень удовлетворения его интересов в данной ситуации. Это число называется *выигрышем* игрока P_i и обозначается через $H_i(\bar{S})$, а само соответствие между множеством ситуаций и выигрышем игрока P_i называется *функцией выигрыша* (*платежной функцией*) этого игрока.

Таким образом, формальное определение игры сводится к заданию трех классов множеств:

а) множества игроков;
б) совокупности множеств стратегий каждого из игроков $\{S_i\}_{i \in I}$;
в) совокупности функций выигрыша каждого из игроков $\{H_i\}_{i \in I}$.

При этом предполагается, что функции выигрыша и множества стратегий игроков общеизвестны. В соответствии с этой информацией каждый из участников игры и организует свое поведение, стремясь обеспечить себе максимально возможный выигрыш при любых действиях партнеров.

Содержательный анализ игры в такой обобщенной постановке весьма затруднителен. Методы анализа игр значительно различаются в зависимости от числа игроков, от количества стратегий, от свойств платежных функций, а также от характера предварительной договоренности между игроками. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь одного, наиболее изученного класса игр, а именно класса *матричных игр*.

Матричная игра описывается следующим образом.

- В игре участвуют 2 игрока: допустим, игроки А и В.
- Каждый из игроков располагает конечным набором стратегий: $A_1,\dots,A_m$ и $B_1,\dots,B_n$ - возможные стратегии игроков А и В (в этом случае говорят, что игра имеет размерность mxn).
- Значения функций выигрыша H_A и H_B игроков в каждой ситуации (A_i,B_j) равны по величине и противоположны по знаку, то есть

$H_A(A_i,B_j)=-H_B(A_i,B_j)= a_{ij}$

для всех i=1,…,m, j=1,…,n (выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого).

Очевидно, задание такой игры эквивалентно заданию всех значений функции выигрыша одного из игроков (например, игрока А) в виде так называемой *платежной матрицы* или матрицы игры:

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Строки этой матрицы соответствуют стратегиям игрока A, а столбцы - стратегиям игрока B; элементы a_{ij} задают выигрыш игрока A в ситуации, когда A выбирает стратегию A_i, а B – стратегию B_j.

Итерационный метод Брауна – Робинсон.

Основная идея метода состоит в следующем.

Разыгрывается «мысленный» эксперимент, в котором игроки A и B поочередно применяют друг против друга свои стратегии, стремясь выиграть побольше. При этом каждый игрок при выборе очередной стратегии ориентируется не на оптимальный выигрыш относительно последней стратегии противника, а на оптимальный «накопленный» выигрыш за все предыдущие ходы. Приближенные оптимальные стратегии игроков определяются относительными частотами применения ими чистых стратегий.

Рассмотрим реализацию этого метода на примере.

Пример 1. Найти приближенное решение игры, заданной матрицей, методом итераций:

	B1 B2 B3	
A1	3 6 8	3
A2	9 4 2	2
A3	7 5 4	4 МАКС = 4 (стратегия A3)
	9 6 8	МИН = 6

.

Игра не имеет доминируемых стратегий и поэтому не может быть сведена к игре меньшей размерности. Нижняя цена игры α=4, A_3 - соответствующая максиминная стратегия игрока A; верхняя цена игры β=6, B_2 – соответствующая минимаксная стратегия игрока B. Оформим расчеты методом Брауна в виде таблицы.

k	A_i	B_1	B_2	B_3	B_j	A_1	A_2	A_3	v_*	v^*	v_S
1	A_3	7	5	4_*	B_3	8^*	2	4	4.00	8.00	6.00
2	A_1	10_*	11	12	B_1	11^*	11	11	5.00	5.50	5.25
3	A_1	13_*	17	20	B_1	14	20^*	18	4.33	6.67	5.55
4	A_2	22	21_*	22	B_2	20	24^*	23	5.25	6.00	5.63

5	A_2	31	25	24$_*$	B_3	28*	26	27	4.80	5.60	5.20
6	A_1	34	31$_*$	32	B_2	34*	30	32	5.17	5.67	5.32
7	A_1	37$_*$	37	40	B_1	37	39*	39	5.29	5.86	5.58
8	A_2	46	41$_*$	42	B_2	43	43	44*	5.13	5.50	5.31
9	A_3	53	46$_*$	46	B_2	49*	47	49	5.11	5.37	5.24
10	A_1	56	52$_*$	54	B_2	55*	51	54	5.20	5.50	5.35
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Здесь:

- k – номер партии (пары выборов игроками своих стратегий);
- A_i – стратегия, выбранная игроком А в этой партии;
- в следующих трех столбцах – «накопленный выигрыш» за первые k партий при тех стратегиях, которые применяли игроки в предыдущих партиях и при стратегиях B_1, B_2, B_3 в данной партии (получается прибавлением элементов соответствующей строки к тому, что было строкой выше);
- из этих накопленных выигрышей выделяется минимальный (если их несколько, то – любой из них), выделенное число определяет ответный выбор игрока В в данной партии – он выбирает ту стратегию, которая соответствует выделенному числу; таким образом, определяется оптимальная в данной партии стратегия B_j игрока В;
- в следующих трех столбцах дается накопленный выигрыш за k партий соответственно при стратегиях A_1, A_2, A_3 игрока А (получается прибавлением столбца B_j к тому, что было строкой выше); из этих значений выделяется максимальное; оно определяет выбор стратегии игрока А в следующей партии;
- v_* - нижняя оценка цены, равная минимальному накопленному выигрышу, деленному на k;
- v^* - верхняя оценка цены игры, равная максимальному накопленному выигрышу, деленному на k;
- v_S – среднее арифметическое v_* и v^*.

Рассмотрим подробно несколько шагов методом Брауна в данной игре.

В *1-й партии* игрок А может выбрать любую из своих чистых стратегий, но лучше, если это будет максиминная стратегия A_3 (вносим это выражение во 2-й столбец). Этой стратегии соответствует 3-я строка матрицы выигрышей (7 5 4), соответствующих стратегиям B_1, B_2, B_3 игрока В (заносим их в 3-й, 4-й и 5-й столбцы). Среди этих чисел выделяем значком "$_*$" минимальное. Оно соответствует наиболее выгодной для игрока В стратегии B_3 в этой партии. Этой стратегии соответствует 3-й столбец платежной матрицы $(8\ 2\ 4)^T$. Заносим эти значения в 7-й, 8-й и 9-й столбцы, выделяя среди них значком * максимальное, соответствующее наибольшему выигрышу игрока А.

Поэтому в начале *2-й партии* игрок А выбирает стратегию A_1, которой соответствует 1-я строка (3 6 8) матрицы H. «Накопленный выигрыш» при этой и предыдущей стратегиях равен (3 6 8) + (7 5 4) = (10 11 12). Именно эти значения и заносим в 3-й, 4-й и 5-й столбцы. Минимальному из них значению соответствует стратегия B_1, т. е. 1-й столбец $(3\ 9\ 7)^T$. С учетом предыстории «накопленный выигрыш» игрока А равен $(3\ 9\ 7)^T + (8\ 2\ 4)^T = (11\ 11\ 11)^T$. Заполняем этими значениями 7-й, 8-й и 9-й столбцы таблицы и т. д.

В таблице приведены первые 10 шагов методом Брауна-Робинсон. В результате игрок А применял 5 раз стратегию A_1, 3 раза - стратегию A_2, 2 раза – стратегию A_3; игрок В – 3 раза стратегию B_1, 5 раз – стратегию B_2, 2 - раза стратегию B_3. Поэтому оптимальные стратегии игроков, приближенно вычисленные по относительным частотам использования своих чистых стратегий, имеют вид: S_A^{π}=(0.5, 0.3,0.2), S_B^{π}=(0.3,0.5,0.2).

Нижняя и верхняя оценки цены игры равны соответственно v_*=5.2 и v^*=5.5 (вычисляются делением соответственно минимального и максимального накопленных выигрышей (52 и 55) на количество сыгранных партий (10)). Приближенная цена игры v_S^{π}=(5.2+5.5)/2=5.35.

После 20-ти шагов методом Брауна аналогичные результаты выглядят следующим образом: приближенные оптимальные стратегии S_A^{π}=(0.4,0.1,0.5), S_B^{π}=(0.25,0.6,0.15), приближенная цена игры v_S^{π}=5.275. При этом точное решение игры, которое может быть получено методом сведения игры к задаче линейного программирования, имеет вид: S_A*=(0.4,0,0.6), S_B*=(0.2,0.8,0), v_S=5.4.

Исходя из рассмотренного примера и некоторых теоретических выкладок, которые мы опускаем, можно сделать два вывода:

1) Метод Брауна позволяет сравнительно просто находить приближенные решения матричных игр, причем трудоемкость метода с увеличением размерности игры возрастает незначительно (в отличие от метода сведения игры к задаче линейного программирования).
2) Сходимость приближенных решений, рассчитанных методом Брауна, к точному решению происходит довольно медленно.

Порядок выполнения задания

Пример 1 Решение матричной игры 2*2 аналитическим методом.

Создайте в MS Excel модуль для решения матричных игр 2*2 аналитическим методом. Вы можете размещать ячейки и формулы удобным для вас способом, так чтобы в созданном модуле было легко ориентироваться человеку, умеющему решать матричные игры 2*2. Пример модуля изображен на рисунке ниже.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Задание	6				
2								
3			0	-1	-1	бетта	0	нет седловой точки
4			-3	0	-3	альфа	-1	
5			0	0				
6			первый игрок					
7			p1	0,75		q1	0,250	
8			p2	0,25		q2	0,750	
9			v	-0,75				
10			Ответ: V = -0,75 P = (0,75; 0,25) Q = (0,25; 0,75)					

*Рисунок 1 – Модуль для решения матричных игр 2*2 аналитическим методом*

В данном модуле в область, отмеченную желтой заливкой, вводятся элементы матрицы, после чего автоматически формируется решение игры, заданное с помощью формул в MS Excel.

Рассмотрим более подробно шаги по созданию данного модуля.

Шаг 1. Проверка наличия седловой точки.

- Ячейки E3 и E4 – это минимальные элементы по строкам матрицы. Здесь можно воспользоваться функцией =МИН(…).
- Ячейки C5 и D5 – это максимальные элементы по столбцам матрицы. Соответственно следует воспользоваться функцией = МАКС(…).
- Ячейка G4 – это α (альфа) – нижняя цена игры или максимин. Его можно найти двумя способами: как максимальный элемент из E3 и E4, как максимальный из минимальных элементов по каждой из строк матрицы =МАКС(МИН(C3:D3);МИН(C4:D4)).
- Ячейка G3 – это β – верхняя цена игры. Находится аналогичным образом.
- Ячейка H3 – решение о наличии седловой точки. Здесь следует использовать функцию = ЕСЛИ(). По следующей схеме: в случае равенства верхней и нижней цены игры «седловая точка есть», а иначе «нет седловой точки».

Шаг 2. Получение решения игры.

Ячейка D7 – p1 – вероятность, с которой первый игрок выбирают свою первую чистую стратегию. Способ расчета p1 зависит от того есть или нет седловая точка. Если седловой точки нет, то данная вероятность рассчитывается по формуле. Если седловая точка есть, то p1 принимает значение 0 или 1 в зависимости от того, является ли A1 чистой стратегией первого игрока (p1 = 1) или нет (p1 = 0).

Формулу в ячейке D7 можно создать по следующей схеме с использованием двух функций =ЕСЛИ(…).

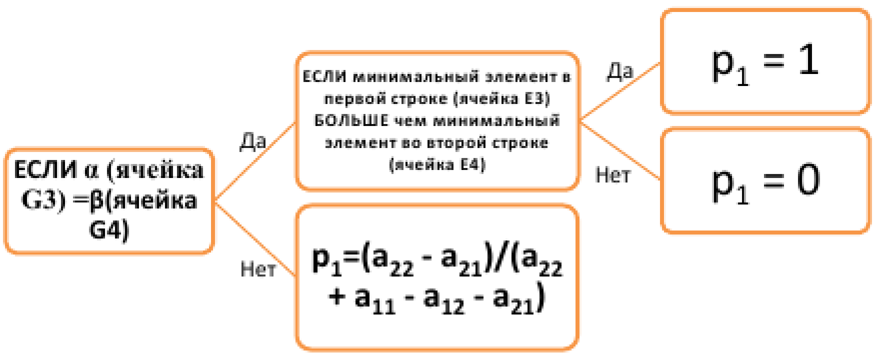

Рисунок 2 – Схема для формулы в ячейке D7

Ячейка D8 – вероятность с которой первый игрок выберет свою вторую чистую стратегия (p2) всегда равна (1 – p1), так как p1 и p2 – это вероятности и в сумме дают единицу.

Ячейки G7 и G8 вероятности, с которыми второй игрок выбирает свои чистые стратегии, находятся аналогичным образом.

Ячейка D9 – цена игры V также зависит от того, есть седловая точка или нет. Если седловая точка есть (α=β), то V=α. Если седловой точки нет, то цена игры находится аналитически, по формуле:

$$\nu = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

Шаг 3. Формирование ответа.

Чтобы записать ответ в одно строку нужно воспользоваться функцией = СЦЕПИТЬ(…).

Поскольку значения вероятностей и цены игры могут содержать сколько угодно знаков после запятой и ответ может в этом случае может получиться слишком длинным лучше округлить значение вероятностей и цены игры. Для это нужно воспользоваться функцией =ОКРУГЛ(Ячейка с числом; количество знаков после замятой). Достаточно оставить три знака после запятой для каждого числа в ответе.

Пример 2. Решение матричной игры 3*3 методом Робинсона-Брауна.

Создайте в MS Excel модуль для решения матричных игр 3*3 методом Робисона-Брауна. Вы можете размещать ячейки и формулы удобным для вас способом, так чтобы в созданном модуле было легко ориентироваться человеку, умеющему решать матричные игры 3*3. Пример модуля изображен на рисунке ниже.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		α	β	γ									
2	A	2	3	0	0		альфа	1	нет седловой точки				
3	B	2	1	3	1		бетта	2					
4	C	1	5	0	0								
5		2	5	3									
6				A	B	C	α	β	γ		Vi/i(1)	Vi/i(2)	
7	1	A	α	2	2	1	2	3	0		2	0	
8	2	A	γ	2	5	1	4	6	0		2,5	0	
9	3	B	γ	2	8	1	6	7	3		2,666667	1	
10	4	B	γ	2	11	1	8	8	6		2,75	1,5	
11	5	B	γ	2	14	1	10	9	9		2,8	1,8	
12	6	B	β	5	15	6	12	10	12		2,5	1,666667	
13	7	B	β	8	16	11	14	11	15		2,285714	1,571429	
14	8	B	β	11	17	16	16	12	18		2,125	1,5	
15	9	B	β	14	18	21	18	13	21		2,333333	1,444444	
16	10	C	β	17	19	26	19	18	21		2,6	1,8	
17	11	C	β	20	20	31	20	23	21		2,818182	1,818182	
18	12	C	α	22	22	32	21	28	21		2,666667	1,75	
19	13	C	α	24	24	33	22	33	21		2,538462	1,615385	
20	14	C	γ	24	27	33	23	38	21		2,357143	1,5	
21	15	C	γ	24	30	33	24	43	21		2,2	1,4	
22	16	C	γ	24	33	33	25	48	21		2,0625	1,3125	
23	17	B	γ	24	36	33	27	49	24		2,117647	1,411765	
24	18	B	γ	24	39	33	29	50	27		2,166667	1,5	
25	19	B	γ	24	42	33	31	51	30		2,210526	1,578947	
26	20	B	γ	24	45	33	33	52	33		2,25	1,65	
27		0,1	0,15								2	1,818	
28		0,550	0,3										
29		0,350	0,55										
30					1,818 < V < 2 P = (0,1; 0,55; 0,35) Q = (0,15; 0,3; 0,55)								

В данном модуле в область, отмеченную желтой заливкой, вводятся элементы матрицы, после чего автоматически формируется решение игры, заданное с помощью формул в MS Excel.

Рассмотрим создание данного модуля более подробно.

Сначала необходимо организовать проверку наличия седловой точки. Это делается как в примере 1.

Далее перейдем к заполнению основной таблицы.

В ячейки А7:А26 необходимо введи числа от 1 до 20 – это номера партий игры.

В ячейку В7 ввести символ А, а в ячейку С7 – символ α – это выбор игроков в первой партии игры, который всегда одинаковый.

Выигрыши первого игрока в первой партии соответствуют стратегии α, которую выбрал второй игрок и равны числам стоящим соответственно в ячейках В2, В3 и В4.

Обратите внимание, что в ячейки В7:F7 необходимо ввести не числа, а ссылки на ячейки в которых находятся эти числа (элементы первого столбца матрицы), чтобы модули работал для любых матриц.

Выигрыши второго игрока в первой партии задаются аналогичным образом – это ссылки на элементы первой строки матрицы.

Выбор стратегии первого игрока для второй и последующих партий (ячейки В8:В26) – это стратегия (А, В или С), которой соответствует максимальный выигрыш в предыдущей партии игры. Данное условие задается с помощью функции =ЕСЛИ(…):

=ЕСЛИ(МАКС(D7:F7)=D7;$A$2; ЕСЛИ(МАКС(D7:F7)=E7;$A$3;$A$4))

Обратите внимание, ссылки на ячейки А2, А3 и А4 являются абсолютными, это необходимо для того, чтобы при копировании формулы из ячейки В8 в ячейки В9:В26 ссылки на эти ячейки не изменялись. В самих ячейках А2:А4 находятся символы А, В и С. С одной стороны эти символы можно было просто ввести с клавиатуры, не создавая ссылки на ячейки, но в этом случае могут возникать ошибки из-за схожего написания латинских и русских букв.

Выбор стратегии второго игрока для второй и последующих партий осуществляется аналогично, но второй игрок выбирает не максимальный выигрыш, а минимальный проигрыш. Формулу для ячеек С8:С26 создайте самостоятельно.

Расчет выигрыша первого игрока для второй и последующих партий. Сумма выигрыша первого игрока во второй партии зависит от того какую стратегию выбрал второй игрок.

Если второй игрок выбрал на предыдущем шаге стратегию α (т.е. α находится в ячейке С8), то в ячейках D8, E8 и F8 будет соответственно сумма чисел содержащихся в ячейках D7, E7 и F7 (выигрыши первого игрока в предыдущей партии) и в ячейках В2, В3 и В4 (соответствующих стратегии второго игрока α).

Если второй игрок выбрал на предыдущем шаге стратегию β (т.е. β находится в ячейке С8), то в ячейках D8, E8 и F8 будет соответственно сумма чисел содержащихся в ячейках D7, E7 и F7(выигрыши первого игрока в предыдущей партии) и в ячейках С2, С3 и С4 (соответствующих стратегии второго игрока β).

И наконец, если второй игрок выбрал на предыдущем шаге стратегию ϒ (т.е. ϒ находится в ячейке С8), то в ячейках D8, E8 и F8 будет соответственно сумма чисел содержащихся в ячейках D7, E7 и

F7(выигрыши первого игрока в предыдущей партии) и в ячейках D2, D3 и D4 (соответствующих стратегии второго игрока ϒ).

Это можно реализовать с помощью следующей формулы для ячейки D8:
=ЕСЛИ(C8=$B$1;D7+$B$2;ЕСЛИ(C8=$C$1;D7+$C$2;D7+$D$2))

Обратите внимание на использование абсолютных ссылок на ячейки. Формулы для ячеек E8, F8, G8, H8 и I8 создайте самостоятельно аналогичным образом. Не забудьте, что выигрыш второго игрока зависит от того какую стратегию выбрал первый игрок.

Скопируйте полученные формулы до 26 строки.

Для наглядности можно также организовать подсветку ячеек с максимальными и минимальными выигрышами. Чтобы в каждой строке подствечивался максимальный элемент нужно:

Шаг 1. Выделить ячейки D7:F7

Шаг 2. Нажать кнопку «Условное форматирование» выбрать пункт «Правила отбора первых и последних значений», затем пункт «10 первых элементов» и исправить число 10 на 1. Таким образом, будет подсвечен максимальный выигрыш первого игрока в первой партии.

Шаг 3. Еще раз выделить ячейки D7:F7 и нажать дважды кнопку «формат по образцу». Она находится на вкладке «Главная» и выглядит как кисть для краски . При это кнопка станет оранжевой.

Шаг 4. Выделить ячейки D8:F8. При этом на них распространится заданное форматирование.

Шаг 5. Выделить ячейки D9:F9. При этом на них распространится заданное форматирование, т.к. кнопка «форматирование по образцу остается нажатой.

И так далее до 26 строки.

Подсветку ячеек второго игрока создайте самостоятельно.

Далее рассчитаем средние выигрыши для каждой из партий. Для первого игрока в ячейке K7 будет находиться число, которое является максимальным из D7, E7 и F7, деленное на номер партии (он находится в ячейке A7). Создайте формулу, реализующую данный алгоритм для первого и второго игрока (используйте функцию +ЕСЛИ(…)) и скопируйте ее до 26 строки.

В ячейках K27 и L27 соответственно рассчитываются верхняя и нижняя цена игры как минимальный (K27) и максимальный (L27) элементы в столбцах. Подсветку максимального и минимального элементов в столбцах организуйте самостоятельно с помощью условного форматирования.

Осталось найти смешанные стратегии игроков.

Вероятность, с которой первый игрок выбирает свою первую чистую стратегию, (ячейка B27) находится с помощью функции =СЧЕТЕСЛИ(…):

=СЧЁТЕСЛИ(B7:B26;D6)/20, которая считает количество ячеек, удовлетворяющих заданному условию. В данном случае тех, в которых находится символ А.

Аналогично найдите вероятность выбора первым игроков второй стратегии.

Вероятность выбора первым игроком третьей стратегии можно найти, если из единицы вычесть вероятность, с которыми он выбирает сои первую и втору. Стратегии. Для второго смешанная стратегия находится таким же образом в ячейках C27:C29.

Ответ можно записать в ячейке E30 с помощью функции =СЦЕПИТЬ.

Задания для самостоятельной работы

Задача 1. Решить матричную игру 2х2 аналитическим методом.

Задача 2. Решить матричную игру 3х3 итерационным методом Робинсона-Брауна.

1 вариант	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 5 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 7 & 1 \\ \hline\end{array}$
2 вариант	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 0 & 5 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 8 & 6 \\ \hline 9 & 5 & 8 \\ \hline 1 & 0 & 7 \\ \hline\end{array}$
3 вариант	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 4 & 3 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 4 & 1 & 1 \\ \hline 7 & 0 & 5 \\ \hline 4 & 8 & 8 \\ \hline\end{array}$
4 вариант	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1 & 3 \\ \hline 0 & 6 \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 8 & 4 & 2 \\ \hline 2 & 8 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 8 \\ \hline\end{array}$

5 вариант	$\begin{matrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 & 6 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{matrix}$
6 вариант	$\begin{matrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 & 1 & 7 \\ 4 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{matrix}$
7 вариант	$\begin{matrix} 5 & 7 \\ 2 & 6 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 7 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 4 \end{matrix}$
8 вариант	$\begin{matrix} 6 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 8 \end{matrix}$
9 вариант	$\begin{matrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 5 \\ 4 & 8 & 8 \end{matrix}$
10 вариант	$\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 & 6 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{matrix}$

<table>
<tr><td>11 вариант</td><td><table><tr><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td></tr></table></td><td><table><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>7</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>12 вариант</td><td><table><tr><td>0</td><td>5</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td></tr></table></td><td><table><tr><td>1</td><td>8</td><td>6</td></tr><tr><td>9</td><td>5</td><td>8</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>7</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>13 вариант</td><td><table><tr><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td></tr></table></td><td><table><tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>5</td><td>0</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>8</td><td>8</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>14 вариант</td><td><table><tr><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td></tr></table></td><td><table><tr><td>7</td><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>7</td></tr><tr><td>2</td><td>7</td><td>4</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>15 вариант</td><td><table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr></table></td><td><table><tr><td>3</td><td>6</td><td>0</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>6</td></tr></table></td></tr>
</table>

16 вариант	$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 1 & 7 \\ \hline 4 & 6 & 2 \\ \hline 4 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$
17 вариант	$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 2 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 7 & 5 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 7 \\ \hline 2 & 7 & 4 \\ \hline \end{array}$
18 вариант	$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 4 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 0 & 1 \\ \hline 6 & 6 & 8 \\ \hline 6 & 8 & 8 \\ \hline \end{array}$
19 вариант	$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 5 & 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 1 & 1 \\ \hline 7 & 0 & 5 \\ \hline 4 & 8 & 8 \\ \hline \end{array}$
20 вариант	$\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 6 & 0 \\ \hline 5 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 6 \\ \hline \end{array}$
21 вариант	$\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 5 \\ \hline 1 & 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 7 & 1 \\ \hline \end{array}$

<table>
<tr><td>22 вариант</td><td><table><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td></tr></table></td><td><table><tr><td>3</td><td>0</td><td>7</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>0</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>3</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>23 вариант</td><td><table><tr><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td></tr></table></td><td><table><tr><td>7</td><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>7</td></tr><tr><td>2</td><td>7</td><td>4</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>24 вариант</td><td><table><tr><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>6</td></tr></table></td><td><table><tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>5</td><td>0</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>8</td><td>8</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>25 вариант</td><td><table><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td></tr></table></td><td><table><tr><td>2</td><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td></tr></table></td></tr>
</table>