1 General optimization problems

Задача №1

Give an explicit solution of the following LP.

$$c^T x \to min_{x \in \mathbb{R}^n}$$
$$\text{s.t. } Ax = b$$

Лагранжиан этой задачи:

$$L(x, \lambda) = c^T x + \lambda^T (Ax - b)$$

Задача выпуклая (линейная, ограничения афинные). Условия Каруша-Куна-Таккера:

$$\bigtriangledown_x L : c + A^T \lambda = 0$$
$$\bigtriangledown_\lambda L : Ax = b$$

Тогда можно говорить о двух случаях для $Ax = b$:

1. Нет решения => бюджетное множество пустое, оптимальное значение $p^* = \infty$
2. Решение есть. Можно записать его через псевдообратную матрицу- $x^* = A^\dagger b$, выполнены условия Слейтера => по ККТ получили оптимальное решение x^* и значение $p^* = c^T A^\dagger b$

Задача №2

Give an explicit solution of the following LP.

$$c^T x \to min_{x \in \mathbb{R}^n}$$
$$\text{s.t. } 1^T x = 1$$
$$x \succcurlyeq 0$$

Лагранжиан этой задачи:

$$L(x, \lambda, \mu) = c^T x + \lambda(1^T x - 1) - \mu^T x$$

Задача выпуклая, так как линейная, условия линейные, выполняются условия Слейтера (существует допустимая точка, все компоненты $x = \frac{1}{n}$). Тогда получаем достаточные ККТ:

$$\bigtriangledown_x L : c + \lambda \times 1^T - \mu = 0$$
$$\bigtriangledown_\lambda L : 1^T x = 1$$
$$\mu_j \geq, \ j = [1, n]$$
$$\mu_j x_j = 0, \ j = [1, n]$$
$$x \succeq 0$$

Выбираем вектор c, где на месте минимальной компоненты c_i у $x^* = (0, 0, ..., 1, 0, ..., 0)$ стоит 1. => $\lambda^* = -c_i,\ \mu_i^* = 0, \mu_j = c_j - c_i \geq 0$.
x^*, μ^*, λ^* - решение системы, так как выполнено ККТ, x^* - решение задачи => оптимальное значение $p^* = c_i$

Задача №3

Give an explicit solution of the following LP.

$$c^T x \to min_{x \in \mathbb{R}^n}$$
$$\text{s.t. } 1^T x = \alpha$$
$$0 \preccurlyeq x \preccurlyeq 1$$

where α is an integer between 0 and n. What happens if α is not an integer? What if we change the equality to an inequality $1^\top x \leq \alpha$?

Лагранжиан этой задачи ($\lambda \in R; \quad \mu, \theta \in R^n$):

$$L(x, \lambda, \mu, \theta) = c^T x + \lambda \left(1^T x - \alpha\right) + \theta^T (x - 1) - \mu^T x$$

Задача выпуклая (аффинная функция для равенства, линейные для неравенств), выполнено условие Слейтера (существует допустимая точка, все компоненты $x = \frac{\alpha}{n},\ \alpha \leq n$). Тогда получаем достаточные ККТ:

$$\begin{cases} \nabla_x L: \ c + \lambda \cdot 1^\top - \mu + \theta = 0 \\ \nabla_\lambda L: \ 1^T x = \alpha \\ \mu_j \geqslant 0, \quad j = [1, n] \\ \theta_j \geqslant 0, \quad j = [1, n] \\ \mu_j x_j = 0, \quad j = [1, n] \\ \theta_j (x_j - 1) = 0, \quad j = [1, n] \\ 0 \preceq x \preceq 1 \end{cases}$$

Вектор $c: \ \ c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_\alpha \leqslant \ldots \leqslant c_n$ (Если не выполняется - поменять местами с компонентами для x). $x^*, \lambda^*, \mu^*, \theta^*$ - решение системы (у x^* первые α кооординат = 1, дальше - 0).

Можно рассмотреть несколько случаев:

1. Аналогично предыдущей задаче: $\lambda = -c_\alpha,\ \mu_\alpha = 0, \mu_j^* = c_j + \lambda^*, j = [\alpha + 1, n]$
   $\theta_\alpha^* = 0\ \forall \alpha = [1, \alpha],\ \theta_j^* = -c_j - c_i\ \forall j = [\alpha + 1, n]$

   Для $x^*, \lambda^*, \mu^*, \theta^*$ все условия системы выполнены, условия ККТ - достаточные => x^* - решение, оптимальное значение: $p^* = c_1 + \ldots + c_\alpha$

2. $\alpha \notin \mathbb{Z}$: делаем аналогично, но $x_i^* = 1,\ i = [1, [\alpha] - 1]\ x^*_{[\alpha]} = 1 + \alpha - [\alpha]$. Оптимальное значение: $p^* = c_1 + \ldots + c_{[\alpha]-1} + c_{[\alpha]}\left(1 + \alpha - [\alpha]\right)$

3. $1^\top x \leq \alpha$:

    1) компоненты вектора $c \geq 0 =>$ минимум при $x^* = 0$
    2) если $\exists c < 0 =>$ минимум - сумма α компонент (x^*: 1 при $c < 0$, 0 else). Выбираем компоненты так, чтобы были самые "большие"отрицательные, если их меньше, чем α, по возрастанию

Задача №4

Give an explicit solution of the following QP.

$$
\begin{aligned}
&c^T x \to min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
&x^T A x \leqslant 1
\end{aligned}
$$

where $A \in \mathbb{S}^n_{++}, c \neq 0$. What is the solution if the problem is not convex ($A \notin \mathbb{S}^n_{++}$) (Hint: consider eigendecomposition of the matrix: $A = Q\mathbf{diag}(\lambda)Q^\top = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i q_i q_i^\top$) and different cases of $\lambda > 0, \lambda = 0, \lambda < 0$?

1. матрица $A \in \mathbb{S}^n_{++}$
   Лагранжиан этой задачи ($\mu \in R$):

   $$L(x, \mu) = c^T x + \mu\left(x^T A x - 1\right)$$

   Задача выпуклая (минимизируемая функция линейная, функция для неравенств - выпуклая (парабола, благодаря положительной определенности матрицы)), выполнено условие Слейтера (вектор $x' = \frac{x}{\sqrt{2\|l\|}}$, так как матрица положительно определена $=> x'^T A x' = \frac{1}{2}$.).
   Тогда получаем достаточные ККТ:

   $$
   \begin{cases}
   \nabla_x \text{ L}(x, \mu) :\ c + \mu\left(A + A^\top\right) x = 0 \\
   \mu \geqslant 0 \\
   \mu\left(x^\top A x - 1\right) = 0 \\
   x^\top A x - 1 \leqslant 0
   \end{cases}
   $$

   Из $\nabla_x L,\ c \neq 0 => \mu \neq 0$, тогда $x^\top A x = 1$. $A \in S^n_+ \to A^T = A => c + 2\mu A x = 0$.

$$x = -\frac{A^{-1}c}{2\mu} \;\;=>\;\; x^\top Ax = \frac{c^\top A^{-1}c}{4\mu^2} = 1$$
$$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{c^T A^{-1}c}$$
$$x^* = -\frac{A^{-1}c}{\sqrt{c^T A^{-1}c}}$$

оптимальное значение: $p^* = -\sqrt{c^T A^{-1}c}$

2. Матрица А неположительно определена
   Тогда ККТ - не достаточное условие. Пользуемся спектральным разложением матрицы $A = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i q_i q_i^\top$

   1) Все собственные значения $> 0 : \exists \alpha_i > 0,\ i = [1.n]$ => матрица положительно определена => случай 1.
   2) else: соответствующую компоненту вектора принимаем бесконечно отрицательной/положительной => $x^T Ax \leq 1, min = -\infty$

Задача №5

Give an explicit solution of the following QP

$$\begin{aligned} & c^T x \to min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ & s.t.\ (x - x_c)^T A(x - x_c) \leq 1 \end{aligned}$$

where $A \in \mathbb{S}^n_{++}, c \neq 0, x_c \in \mathbb{R}^n$.

Замена: $a = x - x_c$, доказываем эквивалентность:

$$\begin{aligned} & c^T x \to min_{x \in \mathbb{R}^n} && \equiv c^T a \to min_{a \in \mathbb{R}^n} \\ & s.t.\ (x - x_c)^T A(x - x_c) \leq 1 && \equiv s.t.\ a^T Aa \leq 1 \\ & c^\top x = c^\top a + c^\top x_c => && \end{aligned}$$

=> $c^\top,\ c^\top x_c$ стремятся к минимуму вместе, зависят друг от друга => эквивалентные уравнения и получаем задачу 4:

$$a^* = -\frac{A^{-1}c}{\sqrt{c^T A^{-1}c}}$$

оптимальное значение:

$$p^* = c^T x_c - \sqrt{c^T A^{-1}c}$$

Задача №6

Give an explicit solution of the following QP

$$x^T Bx \to min_{x \in \mathbb{R}^n}$$
$$s.t.\ x^T Ax \leq 1$$

where $A \in \mathbb{S}^n_{++}, B \in \mathbb{S}^n_+$.

$B \in \mathbb{S}^n_+ =>$ положительно полуопределена, тогда $\forall x \in \mathbb{R}^n \to x^\top Bx \geq 0$. Минимальное значение - 0 достигается при $x^* = 0$, которое лежит в бюджетном множестве:
$x^{*\top} Ax^* = 0 < 1$

Оптимальное значение $p^* = 0$ при $x = 0$

Задача №7

Consider the equality constrained least-squares problem

$$\| Ax - b \|_2^2 \to min_{x \in \mathbb{R}^n}$$
$$s.t.\ Cx = d$$

where $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ with $\mathbf{rank} A = n$, and $C \in \mathbb{C}^{k \times n}$ with $\mathbf{rank} C = k$. Give the KKT conditions, and derive expressions for the primal solution x^* and the dual solution λ^*.

Лагранжиан этой задачи:

$$L(x, \lambda) = \| Ax - b \|_2^2 + \lambda^T (Cx - d)$$

Задача выпуклая (исходная задача выпуклая, ограничения линейные). Рассматриваем два случая:

1. $Cx - d$ - несовместная система: бюджетное множество пустое, оптимальное значение: $p^* = \infty$

2. else: запись через псевдообратную матрицу $x = C^\dagger d$. Тогда выполняется Слейтер ($\exists$ допустимая точка) => ККТ достаточные. ККТ:

$$\begin{cases} \nabla_x \text{ L} : 2A^T(Ax - b) + C^T\lambda = 0 \\ \nabla_\lambda \text{ L} : Cx = d \end{cases}$$

Из градиента по x:

$$2A^T Ax = 2A^T b - C^T\lambda \to x = \frac{1}{2} \left(A^T A\right)^\dagger \left(2A^T b - C^T\lambda\right)$$

Из градиента по λ:

$$x = C^{\dagger}d$$

Подставляем:

$$C^{\dagger}d = \left(A^T A\right)^{\dagger} A^T b - \frac{1}{2}\left(A^T A\right)^{\dagger} C^T \lambda$$
$$\left(A^T A\right)^{\dagger} C^T \lambda = 2\left(\left(A^T A\right)^{\dagger} A^T b - C^{\dagger}d\right)$$
$$\lambda = 2\left(C\left(A^T A\right)^{\dagger} C^T\right)^{\dagger}\left(C\left(A^T A\right)^{\dagger} A^T b - d\right)$$
$$x = \frac{1}{2}\left(AA^T\right)^{\dagger}\left(2A^T b - 2C^T\left(C\left(A^T A\right)^{\dagger} C^T\right)^{\dagger}\left(C\left(A^T A\right)^{\dagger} A^T b - d\right)\right)$$

Задача №8

Derive the KKT conditions for the problem

$$\begin{aligned}&trX - logdetX \to min_{x\in\mathbb{S}^n_{++}}\\ &s.t.\ Xs = y\end{aligned}$$

where $y \in \mathbb{R}^n$ and $s \in \mathbb{R}^n$ are given with $y^\top s = 1$. Verify that the optimal solution is given by

$$X^* = I + yy^T - \frac{1}{s^T s}ss^T$$

Лагранжиан этой задачи:

$$L(x,\lambda) = trX - logdetX + \lambda^T(Xs - y)$$

Задача выпуклая (исходная задача выпуклая, условия на равенство - ленейные), выполнены условия Слейтера ($\exists$ допустимая точка: зададим матрицу $X \in \mathbb{S}^n_{++},\ Xs = y$). Достаточные условия ККТ:

$$\begin{cases}\nabla_x \text{ L} : I - X^{-1} + \lambda s^T = 0\\ \nabla_\lambda \text{ L} : Xs = y\end{cases}$$

$$s = X^{-1}y$$
$$I - X^{-1} + \frac{1}{2}\left(\lambda s^T + s\lambda^T\right) = 0$$

Домножаем на y ($y^\top s = 1$):

$$y - s + \frac{1}{2}\left(\lambda + s\lambda^T y\right) = 0$$

Умножаем на y^T:

$$1 - y^T y = \lambda^T y$$

$$\lambda = -2y + \left(1 + y^T y\right) s$$

$$X^{-1} = I + \left(1 + y^T y\right) ss^T - ys^T - sy^T$$

$X^{-1}X^* = \mathrm{I}$:

$$X^{-1}X^* = \left(\mathrm{I} - \mathrm{ys^T} - \mathrm{sy^T} + \left(1 + \mathrm{y^T y}\right)\mathrm{ss^T}\right)\left(\mathrm{I} + \mathrm{yy^T} - \left(\frac{1}{\mathrm{s^T s}}\right)\mathrm{ss^T}\right) =$$
$$= \left(\mathrm{I} + \mathrm{yy^T} - \left(\frac{1}{\mathrm{s^T s}}\right)\mathrm{ss^T}\right) + \left(1 + \mathrm{y^T y}\right)\mathrm{ss^T} + \left(1 + \mathrm{y^T y}\right)\mathrm{sy^T} - \left(1 + \mathrm{y^T y}\right)\mathrm{ss}^\top -$$
$$- ys^\top - yy^\top + ys^\top - sy^\top - \left(y^\top y\right) sy^\top + ss^\top \left(\frac{1}{s^\top s}\right) = I$$

X^* - положительно определена => $\forall x$:

$$x^\top \left(\mathrm{I} + yy^\top - \left(\frac{1}{s^\top s}\right) ss^\top\right) x = x^\top x + \left(y^\top x\right)^\top \left(y^\top x\right) - \left(s^\top x\right)^\top \left(s^\top x\right)\left(\left(\frac{1}{s^\top s}\right)\right) =$$
$$= \|x\|^2 + (y, x)^2 - \frac{(s, x)^2}{\|s\|^2}$$

$\|x\|^2 - (s, x)^2/\|s\|^2 \geq 0$ => $\forall x : x^\top X^* x \geq 0$, значит X^* положительно определена и является решением поставленной задачи.

Задача №9

Supporting hyperplane interpretation of KKT conditions. Consider a convex problem with no equality constraints

$$f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$
$$s.t.\ f_i(x) \leq 0, \quad i = [1, m]$$

Assume, that $\exists x^* \in \mathbb{R}^n, \mu^* \in \mathbb{R}^m$ satisfy the KKT conditions

$$\begin{array}{l} \nabla_x L\left(x^*, \mu^*\right) = \nabla f_0\left(x^*\right) + \sum_{i=1}^m \mu_i^* \nabla f_i\left(x^*\right) = 0 \\ \mu_i^* \geq 0, \quad i = [1, m] \\ \mu_i^* f_i\left(x^*\right) = 0, \quad i = [1, m] \\ f_i\left(x^*\right) \leq 0, \quad i = [1, m] \end{array}$$

Show that

$$\nabla f_0\left(x^*\right)^\top \left(x - x^*\right) \geq 0$$

for all feasible x. In other words the KKT conditions imply the simple optimality criterion or $\nabla f_0(x^*)$ defines a supporting hyperplane to the feasible set at x^*

x - допустимое, используя условия ККТ: $\nabla f_0(x^*)^\top (x - x^*) \geq 0$. По первому дифференциальному критерию:

$$f_0(x) \geq f_0(x^*) + \nabla f_0^T(x^*)(x - x^*)$$

Градиент по х:

$$\nabla f_0(x^*)^\top (x - x^*) = -\sum_{i=1}^{m} \mu_i^* \nabla f_i^T(x^*)(x - x^*)$$

так как $f_i(x) \leq 0, \quad i = [1, m]$, из ККТ:
$\mu_i^* \geq 0, \quad i = [1, m]$
$\mu_i^* f_i(x^*) = 0, \quad i = [1, m]$ то:

$$\nabla f_0(x^*)^\top (x - x^*) = -\sum_{i=1}^{m} \mu_i^* \nabla f_i^T(x^*)(x - x^*) \geqslant -\sum_{i=1}^{m} \mu_i^* \nabla f_i^\top(x^*)(x - x^*) +$$
$$+\sum_{i=1}^{m} \mu_i^* (f_i(x) - f_i(x^*)) = \sum_{j=1}^{m} \mu_i^* \left((f_i(x) - f_i(x^*)) - \nabla f_i^\top(x^*)(x - x^*)\right) \geqslant 0$$

В скобках - дифференциальный критерий первого порядка для выпуклой функции =>
$\forall x$:

$$\nabla f_0(x^*)^\top (x - x^*) \geq 0$$

2 Duality

Задача №1

Fenchel + Lagrange = ♡ Express the dual problem of

$$c^T x \to \min_{x \in \mathbb{R}}$$
$$s.t.\ f(x) \leq 0$$

with $c \neq 0$, in terms of the conjugate function f^*. Explain why the problem you give is convex. We do not assume f is convex.

Лагранжиан этой задачи:

$$L(x, \lambda) = c^T x + \lambda^T f(x)$$

Рассматриваем для различных значений λ :

1. $\lambda = 0 => g(\lambda) = inf\ c^T x = -\infty$

2. $\lambda > 0 =>$ Двойственная задача по определению:

$$g(\lambda) = inf(c^T x + \lambda\ f(x)) = \lambda\ inf((\frac{c}{\lambda})^T x + \lambda f(x)) = -\lambda\ f^*(-\frac{c}{\lambda})$$

Тогда для $\forall \lambda \geqslant 0,\ -\frac{c}{\lambda} \in dom\ f^*$:

$$-\lambda\ f^*(-\frac{c}{\lambda}) \to \min_{x \in \mathbb{R}}$$
$$s.t.\ \lambda \geqslant 0$$

Задача №2

Minimum volume covering ellipsoid. Let we have the primal problem:

$$ln\ det X^{-1} \to \min_{x \in \mathbb{S}^n_{++}}$$
$$s.t.\ a_i^T X a_i \leq 1,\ i = 1, .., m$$

a. Find Lagrangian of the primal problem

b. Find the dual function

c. Write down the dual problem

d. Check whether problem holds strong duality or not

e. Write down the solution of the dual problem

Задача представляется как центрированный в начале координат эллипсоид => задача заключается в определении минимального объема.
Ограничения неравенства аффины => можно переписать в виде:

$$tr((a_i a_i^T)X) \leqslant 1$$

Лагранжиан этой задачи:

$$L(x,\lambda) = ln\ detX^{-1} + \sum_{i=1}^{\mathrm{m}} \lambda_{\mathrm{i}} \left(\mathrm{a_i^T X a_i} - 1\right)$$

Запишем через сопряженную функцию, которую уже решали в первом задании ($dom\ f^* = -\mathbb{S}^n_{++}$):

$$f^*(Y) = \log\det(-Y)^{-1} - n$$

$$\left(\begin{array}{c}
\text{Общий случай для нахождения двойственной функции через сопряженную:}\\
\\
minimize\ f_0(x)\\
s.t. \begin{array}{c} Ax \preceq b \\ Cx = d \end{array}\\
\operatorname{dom} g = \left\{(\lambda,\nu) \mid -A^T\lambda - C^T\nu \in \operatorname{dom} f_0^*\right\}\\
\\
\begin{aligned}
g(\lambda,\nu) &= \inf_x \left(f_0(x) + \lambda^T(Ax-b) + \nu^T(Cx-d)\right)\\
&= -b^T\lambda - d^T\nu + \inf_x \left(f_0(x) + \left(A^T\lambda + C^T\nu\right)^T x\right)\\
&= -b^T\lambda - d^T\nu - f_0^*\left(-A^T\lambda - C^T\nu\right)
\end{aligned}
\end{array}\right)$$

Тогда двойственная в данной задаче ($b = 1^T,\ A = a_i a_i^T$):

$$g(\lambda) = \left\{\begin{array}{ll} \log\det\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i a_i^T\right) - \mathbf{1}^T\lambda + n, & \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i a_i^T \succ 0 \\ -\infty, & \text{else} \end{array}\right.$$

=>

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \log\det\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i a_i^T\right) - \mathbf{1}^T\lambda + n \\ \text{s.t.} & \lambda \succeq 0 \end{array}$$

Есть сильная двойственность = выполняется условие Слейтера ($\exists X \in \mathbf{S}^n_{++} : a_i^T X a_i < 1,\ i = 1,\dots,m$)

Задача №3

A penalty method for equality constraints. We consider the problem of minimization

$$f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$
$$s.t.\ Ax = b$$

where $f_0(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is convex and differentiable, and $\alpha \in \mathbb{R}^{m \times n}$ with $\mathbf{rank} A = m$. In a quadratic penalty method, we form an auxiliary function

$$\phi(x) = f_0(x) + \alpha \| \ Ax - b \ \|_2^2$$

where $\alpha > 0$ is a parameter. This auxiliary function consists of the objective plus the penalty term $\alpha \|Ax - b\|_2^2$. The idea is that a minimizer of the auxiliary function, $\tilde{x}$, should be an approximate solution of the original problem. Intuition suggests that the larger the penalty weight α, the better the approximation $\tilde{x}$ to a solution of the original problem. Suppose $\tilde{x}$ is a minimizer of $\phi(x)$. Show how to find, from $\tilde{x}$, a dual feasible point for the original problem. Find the corresponding lower bound on the optimal value of the original problem.

Лагранжиан этой задачи:

$$L(x, \lambda) = f_0(x) + \lambda^T (Ax - b)$$

Если в $\tilde{x}$ минимальное $\phi(x)$ => по необходимому условию экстремума:

$$\nabla \phi(\tilde{x}) = 0 \ \ => \ \ \nabla f_0(x) + 2\alpha A^T (A\tilde{x} - b) = 0$$

Выражаем из $\nabla \phi = 0 \to \lambda :$

$$\lambda = 2\alpha (A\tilde{x} - b)$$

Тогда двойственная:

$$g(\lambda) = inf_x \ (f_0(x) + \lambda^T (Ax - b)) = f_0(\tilde{x}) + 2\alpha \| \ A\tilde{x} - b \ \|_2^2$$

=> $\forall x, Ax = b :$

$$f_0(x) \geqslant f_0(\tilde{x}) + 2\alpha \| \ A\tilde{x} - b \ \|_2^2$$

Задача №4

Analytic centering. Derive a dual problem for

$$- \sum_{i=1}^{m} log(b_i - a_i^T x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

with domain $\{x \mid a_i^\top x < b_i, i = [1, m]\}$.
First introduce new variables y_i and equality constraints $y_i = b_i - a_i^\top x$. (The solution of this problem is called the analytic center of the linear inequalities $a_i^\top x \leq b_i, i = [1, m]$. Analytic centers have geometric applications, and play an important role in barrier methods.)

Делаем замену переменных: $y_i = b_i - a_i^\top x$ $(y_i > 0)$ или $y = b - Ax,\ A \in \mathbb{R}^{nxm}$. Тогда исходная задача:

$$-\sum_{i=1}^{m} log\ y_i \to \min$$
$$y = b - Ax$$

Лагранжиан этой задачи:

$$L(x, y, \lambda) = -\sum_{i=1}^{m} log\ y_i + \lambda^T (y + Ax - b)$$

По определению двойственная функция:

$$g(\lambda) = inf_{x,y}(-\sum_{i=1}^{m} log\ y_i + \lambda^T (y + Ax - b))$$

$A^T\lambda = 0$, иначе можно взять $x = -\infty$. Тогда область определения: $A^T\lambda = 0,\ \lambda \succ 0$
Ищем минимум => приравниваем градиент к нулю:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{y_i} \geqslant 0\ \ => y_i = \frac{1}{\lambda_i}$$

Двойственная функция:

$$g(\mu) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \log \lambda_i + m - \lambda^\top b, \quad A^\top \lambda = 0,\ \lambda \succ 0 \\ -\infty, else \end{cases}$$

=>

$$\sum_{i=1}^{m} \log{(\lambda_i)} + m - \lambda^\top b \to \max_{\lambda}$$
$$s.t. \quad A^T \lambda = 0, \quad \lambda \succ 0$$