Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2030 - Ecuaciones Diferenciales 2 - Catedrático: Dorval Carías
16 de mayo de 2021

Corto 3

Instrucciones: resuelva tres de los problemas que se presentan a continuación.

1. Problema 1

Una placa rectangular de metal con lados de longitudes a y b y con lados (**caras**) aislados (i.e., no hay flujo de calor) se calienta a una temperatura uniforme de u_0°C, manteniéndose tres de sus lados a 0°C y el otro aislado. Resuelva para $u(x, y, t)$ sujeta a la condición inicial $u(x, y, 0) = 100$.

Solución. Se comenzará entendiendo el problema por medio de las siguientes dos figuras:

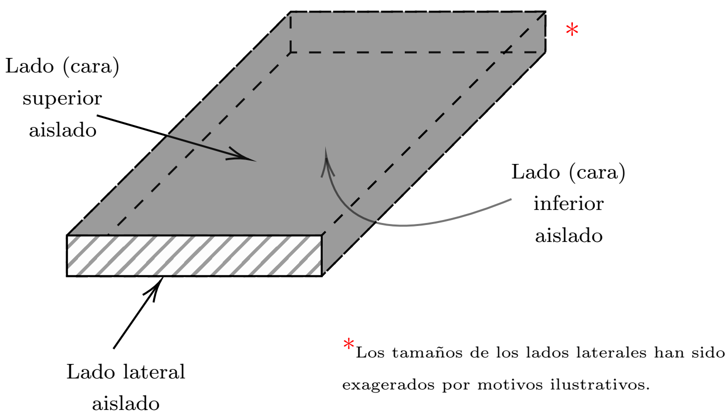

Figura 1: Placa rectangular metálica

En la Figura 1, se representan las caras y un lateral aislados. Por otra parte, en la Figura 2, es la representación en dos dimensiones del problema. Ahora bien, el planteamiento propuesto es el siguiente:

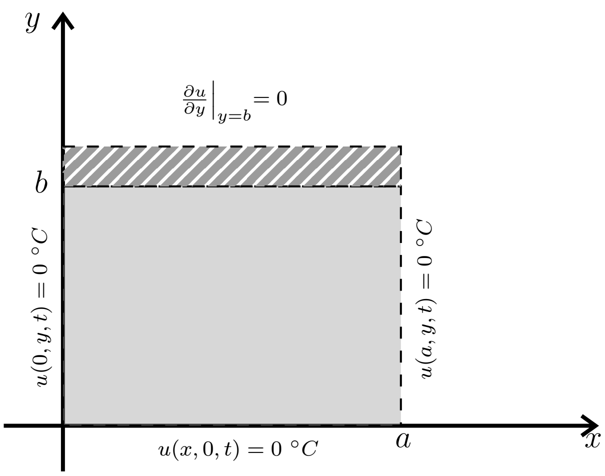

Figura 2: Placa en dos dimensiones

Condiciones - Ecuación de calor en 2D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2}\right) \implies u_t = k\nabla^2 u, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

Condiciones de frontera:

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(a, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0$$

Condición inicial:

$$u(x, y, 0) = 100$$

Se procede con el método de separación de variables:

$$u(x, y, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t) = X \cdot Y \cdot T$$

Sustituyendo en la ecuación de calor en 2D:

$$\begin{aligned} T'XY &= k\left(X''YT + Y''XT\right) \\ T'XY &= kT\left(X''Y + Y''X\right) \\ \frac{T'}{kT} &= \frac{X''Y + Y''X}{XY} \\ \frac{T'}{kT} &= \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda \end{aligned}$$

De la igualdad anterior, surgen tres ecuaciones diferenciales. Las primeras dos surgen de:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda \quad \implies \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda = -\mu$$

La primera ecuación es:

$$\frac{X''}{X} = -\mu \quad \implies \quad \boxed{X'' + \mu X = 0} \tag{1}$$

(1) Se encuentra sujeta a las condiciones:

$$X(0) = 0, \quad X(a) = 0$$

Cuando $\mu < 0$ y $\mu = 0$ las soluciones se trivializan, por lo que solo se analizará el caso en el que $\mu > 0$. Entonces, la solución de (1) es:

$$X(x) = A\cos\sqrt{\mu}x + B\sin\sqrt{\mu}x$$

Aplicando las condiciones de frontera:

$$X(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = 0 \implies A = 0$$

$$X(a) = B\sin\sqrt{\mu}a$$

Para encontrar la relación de $\sqrt{\mu}a$ se propone:

$$\sqrt{\mu}a = n\pi \implies \sqrt{\mu} = \frac{n\pi}{a}$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$\boxed{X_n(x) = \sin\tfrac{n\pi}{a}x, \qquad n = 1, 2, 3, ...}$$

La segunda ecuación:

$$-\frac{Y''}{Y} - \lambda = -\mu \quad \implies \quad Y'' + \underbrace{(\lambda - \mu)}_{P}Y = 0 \implies \boxed{Y'' + PY = 0} \tag{2}$$

(2) Se encuentra sujeta a las condiciones de frontera:

$$Y(0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0$$

Cuando $P < 0$ y $P = 0$ las soluciones se trivializan, por lo que solo se analizará el caso en el que $P > 0$. Entonces, la solución de (2) es:

$$Y(y) = C\cos\sqrt{P}y + D\sin\sqrt{P}y$$

$$Y'(y) = -\sqrt{P}C\sin\sqrt{P}y + \sqrt{P}D\cos\sqrt{P}y$$

Aplicando las condiciones de frontera:

$$Y(0) = C\cos 0 + D\sin = 0 \implies C = 0$$

$$Y'(b) = \sqrt{P}D\cos\sqrt{P}b$$

Nótese que D no puede ser 0; ya que solo nos interesan las soluciones triviales. Es decir $\cos\sqrt{P}y = 0$. Para encontrar la relación de $\sqrt{P}b$, se propone:

$$\sqrt{P}b = \pi\left(m - \frac{1}{2}\right) \implies \sqrt{P} = \frac{\pi}{b}\left(m - \frac{1}{2}\right)$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$\boxed{Y_m(y) = \sin \tfrac{\pi}{b}\left(m - \tfrac{1}{2}\right) y}$$

Por otra parte, la tercera ecuación es:

$$\frac{T'}{kT} = -\lambda \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T' + \lambda k T = 0} \tag{3}$$

La solución de la ecuación diferencial es:

$$T(t) = Ee^{-\lambda k t} \tag{4}$$

Ahora, notamos que previamente se había propuesto $P = \lambda - \mu$. Despejando para λ, se tiene $\lambda = P + \mu$. En donde $P = \left[\frac{\pi}{b}\left(m - \frac{1}{2}\right)\right]^2$ y $\mu = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$. Entonces:

$$\begin{aligned}\lambda &= \left[\frac{\pi}{b}\left(m - \frac{1}{2}\right)\right]^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \\ &= \pi^2\left[\frac{1}{b^2}\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{a^2}\right]\end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo en (4) la solución general es:

$$\boxed{T_{mn}(t) = \exp\left(-k\pi^2\left[\tfrac{1}{b^2}\left(m - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{n^2}{a^2}\right]t\right)} \tag{5}$$

Ahora, se tiene que, para $m, n = 1, 2, 3, ...$:

$$\begin{aligned}u_{mn}(x, y, t) &= X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t) \\ &= \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}\left(m - \frac{1}{2}\right)y\right) \cdot \exp\left(-k\pi^2\left[\frac{1}{b^2}\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{a^2}\right]t\right)\end{aligned}$$

Aplicando el principio de superposición:

$$\begin{aligned}u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}u_{mn}(x, y, t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}\left(m - \frac{1}{2}\right)y\right) \cdot \exp\left(-k\pi^2\left[\frac{1}{b^2}\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{a^2}\right]t\right)\end{aligned}$$

Aplicando la condición inicial en donde $t = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned}100 &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, 0) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}\left(m - \frac{1}{2}\right)y\right)\end{aligned}$$

Ahora bien, se considerará al la relación de ortogonalidad para el seno, por lo que se tiene:

$$\begin{aligned}
A_{mn} &= \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b 100\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}\left(m-\frac{1}{2}\right)y\right)dydx \\
&= \frac{400}{ab}\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx\int_0^b \sin\left(\frac{\pi}{b}\left(m-\frac{1}{2}\right)y\right)dy \\
&= \frac{400}{ab}\frac{L}{n\pi}(\cos(n\pi)-1)\frac{2b}{(2m-1)\pi}\left(\cos\left(\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi\right)-1\right) \\
&= \frac{800}{n(2m-1)\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)
\end{aligned}$$

Entonces A_{m2n} =0 y por lo tanto:

$$A_{m2n-1} = \frac{1600}{(2n-1)(2m-1)\pi^2}$$

Finalmente, el resultado:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1600}{(2n-1)(2m-1)\pi^2}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{(2m-1)\pi y}{2b}\right) \cdot\exp\left(-\left(\frac{(2m-1)^2}{4b^2}+\frac{(2n-1)^2}{a^2}\right)\kappa\pi^2 t\right)$$

□

2. Problema 2

Resuelva la ecuación diferencial $\frac{\partial u}{\partial t} = k_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, sobre el rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, sujeta a las condiciones: $u(x,y,0) = f(x,y), u(0,y,t) = 0, u(a,y,t) = 0$ $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0,t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,b,t) = 0$

Solución. Se comienza planteando la representación gráfica del problema:

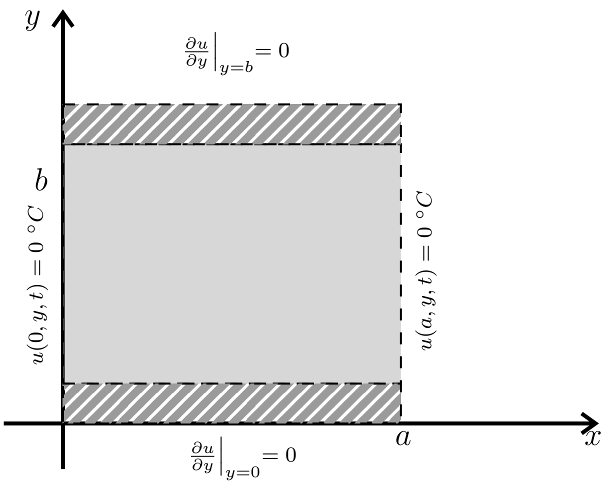

Figura 3: Placa rectangular metálica

Se propone utilizar el método de separación de variables:

$$u(x,y,t) = X(x)\cdot Y(y)\cdot T(t) = X\cdot Y\cdot T$$

Es decir, sustituyendo la ecuación diferencial se tiene:

$$XYT' = k_1X''YT + k_2Y''XT \implies XYT' = T(k_1X''Y + k_2Y''X)$$

$$\implies \frac{T'}{T} = \frac{k_1X''Y + k_2Y''X}{XY} \implies \boxed{\tfrac{T'}{T} = k_1\tfrac{X''}{X} + k_2\tfrac{Y''}{Y} = -\lambda}$$

Ahora bien, tenemos 3 casos. Dos de ellos se generan por medio de:

$$k_1\frac{X''}{X} + k_2\frac{Y''}{Y} = -\lambda \implies k_1\frac{X''}{X} = -k_2\frac{Y''}{Y} - \lambda = -\mu$$

Para la primera ecuación se tiene:

$$k_1\frac{X''}{X} = -\mu \implies k_1\frac{X''}{X} + \mu X = 0 \implies \boxed{X'' + \tfrac{\mu}{k_1}X = 0}$$

Las condiciones de frontera son:

$$X(0) = 0, \quad X(a) = 0$$

Nuevamente, se sabe que $\mu/k_1 < 0$ y $\mu/k_1 = 0$, se generan soluciones triviales. Por lo que solo se considerará el caso $\mu/k_1 > 0$. Su solución es:

$$X(x) = A\cos\sqrt{\frac{\mu}{k_1}}x + B\sin\sqrt{\frac{\mu}{k_1}}x$$

Aplicando las condiciones de frontera:

$$X(0) = A = 0$$

$$X(a) = B\sin\sqrt{\frac{\mu}{k_1}}a$$

Se propone encontrar una relación para $\sqrt{\mu/k_1}a$:

$$\sqrt{\frac{\mu}{k_1}}a = \pi n \implies \sqrt{\frac{\mu}{k_1}} = \frac{\pi n}{a}$$

Por lo que la solución general es:

$$\boxed{X_n(x) = \sin\tfrac{\pi n}{a}x, \quad n = 1, 2, 3, ...}$$

Para la segunda ecuación se tiene:

$$-k_2\frac{Y''}{Y} - \lambda = -\mu \implies \frac{-k_2Y'' - \lambda Y}{Y} = -\mu \implies -k_2Y'' - \lambda Y + \mu Y = 0$$

$$\implies k_2Y'' + \lambda Y - \mu Y = 0 \implies \boxed{Y'' + \tfrac{(\lambda-\mu)}{k_2}Y = 0}$$

Las condiciones de frontera:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0$$

Una vez más, notamos que se generan soluciones triviales si $\frac{(\lambda-\mu)}{k_2} = 0$ y $\frac{(\lambda-\mu)}{k_2} < 0$. Por lo que, $\frac{(\lambda-\mu)}{k_2} > 0$ es la única opción que no genera soluciones triviales y su solución es:

$$Y(y) = C\cos\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}}y + D\sin\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}}y$$

$$Y'(y) = -C\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}}\sin\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}}y + D\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}}\cos\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}}y$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$Y'(0) = D = 0$$

$$Y'(b) = -C\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}}\sin\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}}b = 0$$

Se propone encontrar una relación para $\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}}$:

$$\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}}b = \pi m \implies \sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}} = \frac{\pi m}{b}$$

Por lo que la solución general es:

$$Y_m(y) = \cos\frac{\pi m}{b}y, \quad m = 1, 2, 3, ...$$

Para la tercera ecuación se tiene:

$$\implies \frac{T'}{T} = -\lambda \implies \boxed{T' + \lambda Y = 0}$$

Excluyendo los casos triviales en donde $\lambda < 0$ y $\lambda = 0$, la solución para $\lambda > 0$ es:

$$Y(y) = Ee^{-\lambda y}$$

Para calcular λ se tiene de la segunda ecuación:

$$\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}} = \frac{\pi m}{b} \implies \lambda - \mu = k_2\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 \implies \lambda = \mu + k_2\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2$$

De la primera ecuación se tiene que $\mu = k_1\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2$, por lo que:

$$\lambda = k_1\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + k_2\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación es:

$$Y_{mn}(y) = \exp\left(-\left(k_1\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + k_2\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2\right)t\right)$$

$$\boxed{Y_{mn}(y) = \exp\left(-\pi^2\left(k_1\left(\tfrac{n}{a}\right)^2 + k_2\left(\tfrac{m}{b}\right)^2\right)t\right)}$$

Ahora bien, la solución general de u para $m, n = 1, 2, 3, ...$:

$$\begin{aligned} u(x,y,t)_{nm} &= X(x)\cdot Y(y)\cdot T(y) \\ &= \sin\frac{\pi n}{a}x\cdot\cos\frac{\pi m}{b}y\cdot\exp\left(-\pi^2\left(k_1\left(\frac{n}{a}\right)^2+k_2\left(\frac{m}{b}\right)^2\right)t\right) \end{aligned}$$

Aplicando el principio de superposición:

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}u_{mn}(x,y,t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{\pi n}{a}x\cdot\cos\frac{\pi m}{b}y\cdot\exp\left(-\pi^2\left(k_1\left(\frac{n}{a}\right)^2+k_2\left(\frac{m}{b}\right)^2\right)t\right) \end{aligned}$$

Aplicando la condición inicial en donde $t = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}u_{mn}(x,y,t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{\pi n}{a}x\cdot\cos\frac{\pi m}{b}y \end{aligned}$$

Ahora bien, tomando como referencia la ortogonalidad de los senos y cosenos, se propone multiplicar por $\sin(k\pi x/a)\cos(l\pi y/b)$ (considerando l y k como n y diferenciarlos) e integrar en x de 0 a a, y en y de 0 a b, es decir:

$$\begin{aligned} &\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}f(x,y)\sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{l\pi y}{b}\right)dydx \\ =&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{l\pi y}{b}\right)dydx \\ =&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\int_{x=0}^{a}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)dx\int_{y=0}^{b}\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{l\pi y}{b}\right)dy \\ =&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\frac{a}{2}\delta_{nk}\frac{b}{2}\delta_{ml} \\ =&A_{lk}\frac{ab}{4} \end{aligned}$$

Se tiene, entonces:

$$A_{mn} = \frac{4}{ab}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dydx$$

Finalmente, la solución:

$$\begin{aligned} u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{ab}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)dydx\sin\frac{\pi n}{a}x\cdot\cos\frac{\pi m}{b}y \\ \cdot\exp\left(-\pi^2\left(k_1\left(\frac{n}{a}\right)^2+k_2\left(\frac{m}{b}\right)^2\right)t\right) \end{aligned}$$

□

3. Problema 3

Si es posible, resuelva la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, 0 < x < a$, $0 < y < b, 0 < z < c$, sujeta a las condiciones $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, y, t) = 0$ $u(x, 0, z) = u(x, b, z) = u(x, y, c) = 0, u(x, y, 0) = f(x, y)$

Solución. Considérese la representación gráfica del problema:

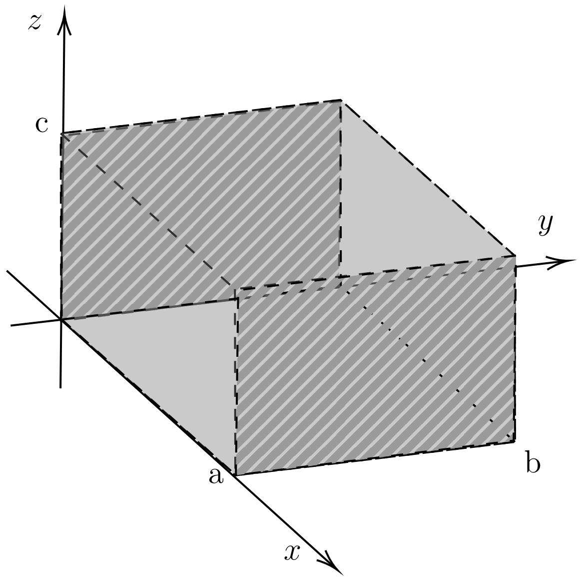

Figura 4: Representación del problema

Se propone el método de separación de variables:

$$u(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) = X \cdot Y \cdot Z$$

Entonces:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \implies X''YZ + Y''XZ + Z''XY = 0$$

$$\implies X''YZ + X(Y''Z + Z''Y) = 0 \implies X(Y''Z + Z''Y) = -X''YZ$$

$$\implies \frac{Y''Z + Z''Y}{YZ} = -\frac{X''}{X} \implies \boxed{\frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\frac{X''}{X} = -\lambda}$$

Se considera la primera ecuación:

$$-\frac{X''}{X} = -\lambda \implies \boxed{X'' - \lambda X = 0}$$

Con las condiciones de frontera:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0$$

Cuando $\lambda = 0$ y $\lambda < 0$ las soluciones son triviales. Para el caso de $\lambda > 0$, la solución es la siguiente (considerando un intervalo **finito**):

$$X(x) = A \cosh \sqrt{\lambda} x + B \sinh \sqrt{\lambda} x$$

$$X'(x) = A\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}x + B\sqrt{\lambda}\cosh\sqrt{\lambda}x$$

Aplicando las condiciones de frontera:

$$X'(0) = B = 0$$
$$X'(a) = A\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}a$$

La relación de $\sqrt{\lambda}a$ es la siguiente:

$$\sqrt{\lambda}a = \pi n \implies \sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{a}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación:

$$X_n(x) = A\cosh\frac{\pi n}{a}x, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Ahora bien, se tiene:

$$\frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\lambda \implies \boxed{\frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} - \lambda = -\mu}$$

Se considera la segunda ecuación diferencial

$$\frac{Y''}{Y} = -\mu \implies \boxed{Y'' + \mu Y = 0}$$

Con las condiciones de frontera:

$$Y(0) = 0, Y(b) = 0$$

Nuevamente, cuando $\mu = 0$ y $\mu < 0$ las soluciones son triviales. Para el caso de $\mu > 0$, la solución es la siguiente:

$$Y(y) = C\cos\sqrt{\mu}y + D\sin\sqrt{\mu}y$$

Aplicando las condiciones de frontera:

$$Y(0) = C = 0$$

$$Y(b) = D\sin\sqrt{\mu}b = 0$$

La relación de $\sqrt{\mu}b$ es la siguiente:

$$\sqrt{\mu}b = \pi m \implies \sqrt{\mu} = \frac{\pi m}{b}$$

Es decir que la solución de la ecuación es:

$$Y_m(y) = \sin\frac{\pi m}{b}, \quad m = 1, 2, 3, ...$$

La tercera ecuación es:

$$-\frac{Z''}{Z} - \lambda = -\mu \implies -Z'' - \lambda Z + \mu Z = 0 \implies \boxed{Z'' + (\lambda - \mu)Z = 0}$$

Las condiciones de frontera:

$$Z(c) = 0$$

Nuevamente, cuando $\lambda - \mu = 0$ y $\lambda - \mu < 0$ las soluciones son triviales. Para el caso de $\lambda - \mu > 0$, la solución es la siguiente:

$$Z(z) = E\cos(\lambda - \mu)z + F\sin(\lambda - \mu)z$$

Aplicando las condiciones de frontera:

$$Z(c) = E\cos(\lambda - \mu)c + F\sin(\lambda - \mu)c = 0$$

$$\implies E\cos(\lambda - \mu)c = -F\sin(\lambda - \mu)c \implies E = -\frac{F\sin(\lambda - \mu)c}{\cos(\lambda - \mu)c}$$

$$\implies E = -\tan(\lambda - \mu)c$$

Por lo que la solución es:

$$Z(z) = -\tan(\lambda - \mu)z \cdot \cos(\lambda - \mu)z + \sin(\lambda - \mu)z$$

Se nombrará $P = \lambda - \mu$, entonces:

$$P = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right)$$

$$Z_{mn}(z) = -\tan\left(\frac{n^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right)\pi^2 z \cdot \cos\left(\frac{n^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right)\pi^2 z + \sin\left(\frac{n^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right)\pi^2 z$$

Ahora, por el principio de superposición tenemos que:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}u_{mn}(x,y,z) \\ &= A\cosh\frac{\pi n}{a}x \cdot \sin\frac{\pi m}{b} \cdot \left[-\tan\left(\frac{n^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right)\pi^2 z \cdot \cos\left(\frac{n^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right)\pi^2 z + \sin\left(\frac{n^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right)\pi^2 z\right] \end{aligned}$$

Aplicando la condición inicial $z = 0$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}u_{mn}(x,y,0) \\ &= A\cosh\frac{\pi n}{a}x \cdot \sin\frac{\pi m}{b} \end{aligned}$$

□

4. Problema 4

Resuelva el problema de las vibraciones de una membrana circular de radio a. El desplazamiento vertical satisface la ecuación de onda bidimensional $c^2\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, y considere las condiciones iniciales y de frontera $u(a,\theta,t) = 0, u(r,\theta,0) = f(r,\theta)$, $\frac{\partial u}{\partial t} = g(r,\theta)$

Solución. Se deja como ejercicio al auxiliar. □

5. Problema 5

Resuelva la ecuación diferencial $k\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t}$ dentro de un círculo de radio R con temperatura cero en toda la frontera, si inicialmente $u(r,\theta,0) = f(r,\theta)$. Analice $\lim_{t\to\infty} u(r,\theta,t)$

Solución. Se deja como ejercicio al auxiliar. □