Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2030 - Ecuaciones Diferenciales 2 - Catedrático: Dorval Carías
20 de mayo de 2021

Tarea 3

Utilice la transformada de Laplace para resolver el problema con valores en la frontera dado.

1. Problema 1.

Resuelva:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} - 2u$$

Con las condiciones:

$$t > 0, \qquad x > 0, \qquad u(x,0) = 10e^{-x} - 6e^{-4x}$$

Solución. Aplicando la transformada de Laplace (en términos de $f(t)$), tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} - 2\mathcal{L}\left\{u\right\} \\ s\breve{u}(x,s) - u(x,0) &= \breve{u}'(x,s) - 2\breve{u}(x,s) \\ s\breve{u}(x,s) - (10e^{-x} - 6e^{-4x}) &= \widehat{u}'(x,s) - 2\breve{u}(x,s) \end{aligned}$$

Usando una notación más cómoda, tenemos:

$$\begin{aligned} s\breve{u} - (10e^{-x} - 6e^{-4x}) &= \breve{u}' - 2\breve{u} \\ -(10e^{-x} - 6e^{-4x}) &= \widehat{u}' - 2\widehat{u} - s\breve{u} \end{aligned}$$

Que implica:

$$\widehat{u}' - (2+s)\widehat{u} = 6e^{-4x} - 10e^{-x}$$

Identificamos que se trata de una ecuación de primer order, con $P(x) = -(2+s)$. Entonces,

$$\mu = e^{\int P(x)dx} = e^{-\int(2+s)dx} = e^{-(2+s)x}$$

Por lo cual,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[e^{-(2+s)x}\breve{u}\right] &= \left(6e^{-4x} - 10e^{-x}\right)e^{-(2+s)x} \\
\int d\left[e^{-(2+s)x}\breve{u}\right] &= \int \left(6e^{-4x} - 10e^{-x}\right)e^{-(2+s)x}dx \\
e^{-(2+s)x}\breve{u} &= \int \left(6e^{-4x-(2+s)x} - 10e^{-x-(2+s)x}\right)dx \\
e^{-(2+s)x}\breve{u} &= \int \left(6e^{-x(6+s)} - 10e^{-x(3+s)}\right)dx \\
e^{-(2+s)x}\breve{u} &= -\frac{6e^{-x(6+s)}}{6+s} + \frac{10e^{-x(3+s)}}{3+s} \\
\breve{u} &= -\frac{6e^{-x(6+s)}e^{(2+s)x}}{6+s} + \frac{10e^{-x(3+s)}e^{(2+s)x}}{3+s} \\
\breve{u} &= -\frac{6e^{-x(6+s)+(2+s)x}}{6+s} + \frac{10e^{-x(3+s)+(2+s)x}}{3+s} \\
\breve{u} &= -\frac{6e^{-4x}}{6+s} + \frac{10e^{-x}}{3+s}
\end{aligned}$$

La solución es:

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[u(x,s)\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10e^{-x}}{3+s} - \frac{6e^{-4x}}{6+s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10e^{-x}}{3+s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6e^{-4x}}{6+s}\right] =$$

$$= 10e^{-x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-(-3)}\right] - 6e^{-4x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-(-6)}\right] = 10e^{-x}e^{-3t} - 6e^{-4x}e^{-6t} =$$

$$= 10e^{-x-3t} - 6e^{-4x-6t} = 10e^{-(x+3t)} - 6e^{-2(2x+3t)}$$

□

2. Problema 2.

Encuentre la solución acotada de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Con las condiciones: $x > 0, t > 0$, y tal que

$$u(0,t) = 1, \qquad u(x,0) = 0$$

Nota 1

Debido a que no hay ninguna cota en x, se impondrá una nueva condición (basado en los principios físicos que gobiernan la ecuación de calor):

$$\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0, \quad t > 0.$$

Solución. Aplicando la transformada de Laplace (en términos de $f(t)$), tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} \\
s\breve{u}(x,s) - u(x,0) &= \breve{u}''(x,s)
\end{aligned}$$

Aplicando $u(x,0) = 0 \implies \breve{u}(x,0) = 0$:

$$s\breve{u}(x,s) = \breve{u}''(x,s)$$

Implica:

$$\breve{u}''(x,s) - s\breve{u}(x,s) = 0$$

Con una notación más cómoda:

$$\breve{u}'' - s\breve{u} = 0$$

Resolviendo la EDO:

$$\breve{u}(x,s) = Ae^{(-\sqrt{s}x)} + Be^{(\sqrt{s}x)}$$

Por la **Nota 1**, sabemos $\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0 \implies \lim_{x\to\infty} \breve{u}(x,s) = 0$. Por lo tanto, B debe ser 0:

$$\breve{u}(x,s) = Ae^{(-\sqrt{s}x)}$$

Aplicando la condición $u(0,t) = 1 \implies \breve{u}(0,s) = 1/s$:

$$\breve{u}(0,s) = A = \frac{1}{s}$$

Entonces:

$$\breve{u}(x,s) = \frac{1}{s}e^{(-\sqrt{s}x)}$$

La solución es:

$$\begin{aligned}
u(x,t) = &\ \mathcal{L}^{-1}\left[u(x,s)\right](t) \\
= &\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}e^{(-\sqrt{s}x)}\right]
\end{aligned}$$

□

3. Problema 3.

Resuelva:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0$$

Con las condiciones:

$$u(0,t) = 0, \quad u(3,t) = 0, \quad u(x,0) = 10\,\text{sen}\,2\pi x - 6\,\text{sen}\,4\pi x$$

Solución. Aplicando la transformada de Laplace (en términos de $f(t)$), tenemos:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = 4\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}$$
$$s\breve{u}(x,s) - u(x,0) = 4\breve{u}''(x,s)$$

Aplicando una de las condiciones iniciales:

$$s\breve{u}(x,s) - (10\,\text{sen}\,2\pi x - 6\,\text{sen}\,4\pi x) = 4\breve{u}''(x,s)$$
$$4\breve{u}''(x,s) - s\breve{u}(x,s) = 6\,\text{sen}\,4\pi x - 10\,\text{sen}\,2\pi x$$
$$\breve{u}''(x,s) - \frac{s}{4}\breve{u}(x,s) = \frac{3}{2}\,\text{sen}\,4\pi x - \frac{5}{2}\,\text{sen}\,2\pi x$$

Usando una notación más cómoda:

$$\breve{u}'' - \frac{s}{4}\breve{u} = \frac{3}{2}\,\text{sen}\,4\pi x - \frac{5}{2}\,\text{sen}\,2\pi x$$

Se propone tratar el problema por el método del caso homógeneo y caso particular:

$$\breve{u}(x,s) = \breve{u}_H(x,s) + \breve{u}_P(x,s)$$

Caso homógeneo :

$$\breve{u}'' - \frac{s}{4}\breve{u} = 0$$

Haciendo una sustitución:

$$m^2 - \frac{s}{4} = 0 \implies m = \pm\sqrt{\frac{s}{4}}$$

La solución del caso homógeneo:

$$\breve{u}(x,s) = Ae^{+\sqrt{s/4x}} + Be^{-\sqrt{s/4x}}$$

Caso particular:

$$\breve{u}'' - \frac{s}{4}\breve{u} = \frac{3}{2}\,\text{sen}\,4\pi x - \frac{5}{2}\,\text{sen}\,2\pi x$$

Se propone tratar el problema por el método de coeficientes indeterminados, proponiendo:

$$\breve{u}_P(x,s) = A\,\text{sen}\,4\pi x + B\cos 4\pi x + C\,\text{sen}\,2\pi x + D\cos 2\pi x$$

En donde,

$$\breve{u}_P'(x,s) = 4\pi A\cos 4\pi x - 4\pi B \operatorname{sen} 4\pi x + 2\pi C\cos 2\pi x - 2\pi D \operatorname{sen} 2\pi x$$

$$\breve{u}_P''(x,s) = -16\pi^2 A\operatorname{sen} 4\pi x - 16\pi^2 B\cos 4\pi x - 4\pi^2 C\operatorname{sen} 2\pi x - 4\pi^2 D\cos 2\pi x$$

Haciendo una sustitución en la expresión propuesta:

$$\begin{aligned}
\breve{u}'' - \frac{s}{4}\breve{u} &= (-16\pi^2 A\operatorname{sen} 4\pi x - 16\pi^2 B\cos 4\pi x - 4\pi^2 C\operatorname{sen} 2\pi x - 4\pi^2 D\cos 2\pi x) - \\
&- \frac{s}{4}(A\operatorname{sen} 4\pi x + B\cos 4\pi x + C\operatorname{sen} 2\pi x + D\cos 2\pi x) \\
&= -\left(16\pi + \frac{s}{4}\right) A\sin 4\pi x - \left(16\pi + \frac{s}{4}\right) B\cos 4\pi x - \\
&- \left(4\pi + \frac{s}{4}\right) C\operatorname{sen} 2\pi x - \left(4\pi + \frac{s}{4}\right) D\cos 2\pi x
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
-\left(16\pi^2 + \frac{s}{4}\right) A\operatorname{sen} 4\pi x - \left(16\pi^2 + \frac{s}{4}\right) B\cos 4\pi x - \\
-\left(4\pi^2 + \frac{s}{4}\right) C\operatorname{sen} 2\pi x - \left(4\pi^2 + \frac{s}{4}\right) D\cos 2\pi x
\end{aligned} = \frac{3}{2}\operatorname{sen} 4\pi x - \frac{5}{2}\operatorname{sen} 2\pi x$$

Que es lo mismo que:

$$\begin{aligned}
-\left(64\pi^2 + s\right) A\operatorname{sen} 4\pi x - \left(64\pi^2 + s\right) B\cos 4\pi x - \\
-\left(16\pi^2 + s\right) C\operatorname{sen} 2\pi x - \left(16\pi^2 + s\right) D\cos 2\pi x
\end{aligned} = \frac{3}{2}\operatorname{sen} 4\pi x - \frac{5}{2}\operatorname{sen} 2\pi x$$

Nos damos cuenta que podemos asumir: $B = 0 = D$, entonces:

$$-\left(64\pi^2 + s\right) A\operatorname{sen} 4\pi x - \left(16\pi^2 + s\right) C\operatorname{sen} 2\pi x = \frac{3}{2}\operatorname{sen} 4\pi x - \frac{5}{2}\operatorname{sen} 2\pi$$

Es decir,

$$-\left(64\pi^2 + s\right) A = \frac{3}{2} \qquad \text{y} \qquad -\left(16\pi^2 + s\right) C = -\frac{5}{2}$$

Entonces:

$$A = -\frac{3}{2(64\pi^2 + s)} = -\frac{6}{64\pi^2 + s} \qquad \text{y} \qquad C = \frac{5}{2(16\pi^2 + s)} = \frac{10}{16\pi^2 + s}$$

Por lo tanto, la solución del caso particular es:

$$\breve{u}_P(x,s) = -\left(\frac{6}{64\pi^2 + s}\right)\operatorname{sen} 4\pi x + \left(\frac{10}{16\pi^2 + s}\right)\operatorname{sen} 2\pi x$$

La solución general:

$$\begin{aligned}
\breve{u}(x,s) &= \breve{u}_H(x,s) + \breve{u}_P(x,s) \\
&= Ae^{+\sqrt{s/4}x} + Be^{-\sqrt{s/4}x} + \left(\frac{10}{16\pi^2 + s}\right)\operatorname{sen} 2\pi x - \left(\frac{6}{64\pi^2 + s}\right)\operatorname{sen} 4\pi x
\end{aligned}$$

Considerando las condiciones, $\breve{u}(0,s) = 0$ y $\breve{u}(3,s) = 0$, tenemos:

$$\breve{u}(0,s) = A + B = 0 \implies B = -A$$

Es decir:

$$\breve{u}(x,s) = C\cosh\sqrt{\frac{s}{4}}x + \left(\frac{10}{16\pi^2+s}\right)\operatorname{sen}2\pi x - \left(\frac{6}{64\pi^2+s}\right)\operatorname{sen}4\pi x$$

Aplicando la última condición:

$$\breve{u}(3,s) = C\cosh\sqrt{\frac{s}{4}}\cdot 3 = 0 \implies C = 0$$

Por lo tanto, la solución general final es:

$$\breve{u}(x,s) = \left(\frac{10}{16\pi^2+s}\right)\operatorname{sen}2\pi x - \left(\frac{6}{64\pi^2+s}\right)\operatorname{sen}4\pi x$$

Aplicando la transfromada inversa de Laplace:

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[u(x,s)\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{10}{16\pi^2+s}\right)\operatorname{sen}2\pi x - \left(\frac{6}{64\pi^2+s}\right)\operatorname{sen}4\pi x\right] =$$

$$= 10\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{s-(-16\pi^2)}\right)\right]\operatorname{sen}2\pi x - 6\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{s-(-64\pi^2)}\right)\right]\operatorname{sen}4\pi x =$$

$$= 10e^{-16\pi^2 t}\operatorname{sen}2\pi x - 6e^{-64\pi^2 t}\operatorname{sen}4\pi x$$

□

4. Problema 4.

Resuelva:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{F_o}{\rho}$$

Con las condiciones: $0 < x < L, t > 0$, sujeta a

$$y(0,t) = y(L,t) = y(x,0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$$

Solución. Aplicando la transformada de Laplace (en términos de $f(t)$), tenemos:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right\} = c^2\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right\} + \frac{F_o}{\rho}\mathcal{L}\{1\}$$

$$s^2\breve{y}(x,s) - sy(x,0) - y'(x,0) = c^2\breve{y}''(x,s) + \frac{F_o}{\rho}\cdot\frac{1}{s}$$

$$s^2\breve{y}(x,s) = c^2\breve{y}''(x,s) + \frac{F_o}{\rho}\cdot\frac{1}{s}$$

Implica:

$$\begin{aligned} c^2\breve{y}''(x,s) - s^2\breve{y}(x,s) &= -\frac{F_o}{\rho}\cdot\frac{1}{s} \\ \breve{y}''(x,s) - \frac{s^2}{c^2}\breve{y}(x,s) &= -\frac{F_o}{c^2\rho s} \end{aligned}$$

Substituimos $k_1 = s^2/c_2$ y $k_2 = -F_o/c^2\rho s$:

$$\breve{y}''(x,s) - k_1\breve{y}(x,s) = k_2$$

Usamos una notación más cómoda:

$$\breve{y}'' - k_1\breve{y} = k_2$$

La forma de la solución es la siguiente:

$$\breve{y}(x,s) = \breve{y}_H(x,s) + \breve{y}_P(x,s)$$

Caso homógeneo

$$\breve{y}_H'' - k_1\breve{y}_H = 0$$

En donde su solución es:

$$\breve{y}_H(x,s) = Ae^{\sqrt{k_1}x} + Be^{-\sqrt{k_1}x}$$

Caso particular

$$\breve{y}_P'' - k_1\breve{y}_P = k_2$$

Por el método de coeficientes intedeterminados, se propone $\breve{y}_P(x,s) = c$. Es decir:

$$\breve{y}_P'' - k_1\breve{y}_P = \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}c - k_1(c) = 0 - k_1 c.$$

Por lo que, implica:

$$-k_1 c = k_2 \implies c = -\frac{k_2}{k_1}.$$

Es decir, la solución del caso particular:

$$\breve{y}_P(x,s) = -\frac{k_2}{k_1}.$$

La solución del caso general:

$$\begin{aligned} \breve{y}(x,s) &= \breve{y}_H(x,s) + \breve{y}_P(x,s) \\ &= Ae^{\sqrt{k_1}x} + Be^{-\sqrt{k_1}x} - \frac{k_2}{k_1}. \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones, $\breve{y}(0,s) = 0 = \breve{y}(L,s)$, entonces:

$$\breve{y}(0,s) = A + B - \frac{k_2}{k_1} = 0 \implies B = \frac{k_2}{k_1} - A.$$

Lo que quiere decir:

$$\breve{y}(x,s) = Ae^{\sqrt{k_1}x} + \left(\frac{k_2}{k_1} - A\right)e^{-\sqrt{k_1}x} - \frac{k_2}{k_1}$$

Ahora notamos que, mientras $e^{\sqrt{k_1}x} \to \infty$ y $x \to \infty$, entonces $A = 0$. Por lo tanto:

$$\breve{y}(x,s) = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)e^{-\sqrt{k_1}x} - \frac{k_2}{k_1}$$

Sustituyimos a sus variables originales k_1 y k_2:

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{-F_o/(c^2\rho s)}{s^2/c^2}\right)e^{-\sqrt{s^2/c^2}x} - \frac{-F_o/(c^2\rho s)}{s^2/c^2} \\
&= -\left(\frac{F_o}{\rho s^3}\right)e^{-\frac{s}{c}x} + \left(\frac{F_o}{\rho s^3}\right)
\end{aligned}$$

Aplicando la trasnformada inversa de Laplace, se tiene:

$$\begin{aligned}
y(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\breve{y}(x,s)\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{F_o}{\rho s^3}\right) - \left(\frac{F_o}{\rho s^3}\right)e^{-\frac{s}{c}x}\right] = \\
&= \frac{F_o}{\rho}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] - \frac{F_o}{\rho}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\cdot e^{-\frac{s}{c}x}\right] = \\
&= \frac{F_o}{\rho}\cdot\frac{t^2}{2} - \frac{F_o}{2\rho}\left(t - \frac{x}{c}\right)^2 H\left(t - \frac{x}{c}\right)
\end{aligned}$$

$\square$