

Universidad del Valle de Guatemala  
Departamento de Matemática  
Licenciatura en Matemática Aplicada

**Estudiante:** Rudik Roberto Rompich  
**E-mail:** [rom19857@uvg.edu.gt](mailto:rom19857@uvg.edu.gt)  
**Carné:** 19857

MM2030 - Ecuaciones Diferenciales 2 - Catedrático: Dorval Carías  
28 de mayo de 2021

---

## Tarea 6

Resuelva los problemas con valores en la frontera que se presentan a continuación, utilizando el método a su elección.

### 1. Problema 1.

Resuelva:

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad x > 0, t, 0$$

Sujeta a:  $u(0, t) = f(t)$ ,  $u(x, 0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ .

*Solución.* Aplicando la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t^2} \right\} &= a^2 \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} \\ s^2 \hat{u}(x, s) - su(x, 0) - u'(x, 0) &= a^2 \hat{u}''(x, s) \\ s^2 \hat{u} - 0 - 0 &= a^2 \hat{u}''(x, s) \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones:

$$\begin{aligned} s^2 \hat{u} &= a^2 \hat{u}'' \\ a^2 \hat{u}'' - s^2 \hat{u} &= 0 \\ \hat{u}'' - \left( \frac{s}{a} \right)^2 \hat{u} &= 0 \end{aligned}$$

---

Resolviendo la EDO:

$$\hat{u}(x, s) = Ae^{\frac{s}{a}x} + Be^{-\frac{s}{a}x}$$

Aplicando  $\lim_{x \rightarrow \infty} \hat{u}(x, s) = 0$ ,  $B$  se hace 0:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \hat{u}(x, s) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} (Ae^{\frac{s}{a}x} + Be^{-\frac{s}{a}x})}_{A=0, \text{ para que se cumpla la condición.}} = 0$$

Entonces

$$\hat{u}(x, s) = B e^{\frac{s}{a}x}$$

Aplicando  $\hat{u}(0, s) = \hat{f}(s)$ , tenemos:

$$\hat{u}(0, s) = B = \hat{f}(s)$$

Por lo que tenemos:

$$\begin{aligned}\hat{u}(x, s) &= \hat{f}(s) e^{-\frac{s}{a}x} \\ u(x, s) &= \mathcal{L}^{-1}[\hat{u}(x, s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\hat{f}(s) e^{-\frac{s}{a}x}\right] = f\left(t - \frac{x}{a}\right) H\left(t - \frac{x}{a}\right).\end{aligned}$$

□

## 2. Problema 2.

Resuelva:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0.$$

Sujeta a:  $u(0, t) = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = K$  y con  $u(x, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ .

*Solución.*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} &= a^2 \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} \\ s^2 \hat{u}(x, s) - su(x, 0) - u'(x, 0) &= a^2 \hat{u}''(x, s) \\ s^2 \hat{u}(x, s) - 0 - 0 &= a^2 \hat{u}''(x, s) \\ a^2 \hat{u}''(x, s) - s^2 \hat{u}(x, s) &= 0 \\ \hat{u}''(x, s) - \left(\frac{s}{a}\right)^2 \hat{u}(x, s) &= 0\end{aligned}$$

La solución de la EDO:

$$\hat{u}(x, s) = A e^{\frac{s}{a}x} + B e^{-\frac{s}{a}x}$$

Tenemos la condición  $\hat{u}(0, t) = 0$ :

$$\hat{u}(0, t) = A e^{\frac{s}{a}x} - A e^{-\frac{s}{a}x} = A \left(e^{\frac{s}{a}x} - e^{-\frac{s}{a}x}\right) = 2A \sinh\left(\frac{s}{a}x\right)$$

Aplicando la condición  $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = K$ :

$$\begin{aligned}\hat{u}'(x, t) &= A \left(\frac{s}{a} e^{\frac{s}{a}x} + \frac{s}{a} e^{-\frac{s}{a}x}\right) \\ &= \frac{2As}{a} \cosh\left(\frac{s}{a}x\right) \\ \hat{u}'(L, t) &= \frac{2As}{a} \cosh\left(\frac{s}{a}L\right) = \frac{k}{s} \\ A &= \frac{aK}{2s^2 \cosh\left(\frac{s}{a}L\right)}\end{aligned}$$

Entonces, tenemos:

$$\hat{u}(x, s) = \frac{aK}{s^2 \cosh\left(\frac{s}{a}L\right)} \sinh\left(\frac{s}{a}x\right)$$

Entonces, la solución:

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{aK \sinh \left( \frac{s}{a}x \right)}{s^2 \cosh \left( \frac{s}{a}L \right)} \right]$$

□

### 3. Problema 3.

Resuelva:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0$$

Sujeta a:  $u(0, t) = 0, u(L, t) = 0, u(x, 0) = 1$ .

*Solución.*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} &= \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} \\ s\hat{u}(x, s) - u(x, 0) &= \hat{u}''(x, s) \\ s\hat{u}(x, s) - 1 &= \hat{u}''(x, s) \\ \hat{u}''(x, s) - s\hat{u}(x, s) &= -1 \end{aligned}$$

$$\hat{u}(x, s) = \hat{u}_H(x, s) + \hat{u}_P(x, s)$$

Caso homogéneo:

$$\hat{u}_H''(x, s) - s\hat{u}_H(x, s) = 0$$

Caso particular

$$\hat{u}_P''(x, s) - s\hat{u}_P(x, s) = -1$$

Se propone con coeficientes indeterminados, se propone  $\hat{u}_P = c$

$$\frac{d}{dx^2}c - sc = -1 \implies 0 - sc = -1 \implies c = \frac{1}{s} \implies \hat{u}_P(x, s) = \frac{1}{s}.$$

Solución general:

$$\hat{u}(x, s) = Ae^{\sqrt{s}x} + Be^{-\sqrt{s}x} + \frac{1}{s}.$$

Aplicando  $\hat{u}(0, s) = 0$ , entonces:

$$\hat{u}(0, s) = A + B + \frac{1}{s} = 0 \implies B = -\left(\frac{As + 1}{s}\right)$$

Implica que

$$\hat{u}(x, s) = Ae^{\sqrt{s}x} - \left(\frac{As + 1}{s}\right)e^{-\sqrt{s}x} + \frac{1}{s} = 2A \sinh(\sqrt{s}x) + \frac{1}{s} \left(1 - e^{-\sqrt{s}x}\right).$$

Aplicando  $\hat{u}(L, s) = 0$ , entonces:

$$\hat{u}(L, s) = 2A \sinh(\sqrt{s}L) + \frac{1}{s} (1 - e^{-\sqrt{s}L}) \implies A = \frac{e^{-\sqrt{s}L} - 1}{2s \sinh(\sqrt{s}L)}.$$

Implica:

$$\hat{u}(x, s) = \left( \frac{e^{-\sqrt{s}L} - 1}{s \sinh(\sqrt{s}L)} \right) \sinh(\sqrt{s}x) + \frac{1}{s} (1 - e^{-\sqrt{s}x}).$$

Entonces, la solución es:

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1} [\hat{u}(x, s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \left( \frac{e^{-\sqrt{s}L} - 1}{s \sinh(\sqrt{s}L)} \right) \sinh(\sqrt{s}x) + \frac{1}{s} (1 - e^{-\sqrt{s}x}) \right]$$

□

## 4. Problema 4.

Resuelva:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, t > 0.$$

Sujeta a:  $u(x, 0) = e^{-|x|}$

*Solución.* Aplicando transformada de Fourier.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} &= \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} \\ \hat{u}(w, t) &= (iw)^2 \hat{u}(w, t) \\ \hat{u}(w, t) &= -w^2 \hat{u}(w, t) \end{aligned}$$

Entonces, tenemos:

$$\hat{u}'(w, t) + w^2 \hat{u}(w, t) = 0.$$

La solución de la EDO:

$$\hat{u}(w, t) = A_w \cos(wt) + B_w \sin(wt)$$

Aplicando la condición  $u(x, 0) = e^{-|x|} \implies \hat{u}(w, 0) = \frac{2}{w^2 + 1}$ :

$$\hat{u}(w, 0) = A_w = \frac{2}{w^2 + 1}.$$

Entonces, tenemos:

$$\hat{u}(w, t) = \left( \frac{2}{w^2 + 1} \right) \cos(wt) + B_w \sin(wt)$$

□