

Universidad del Valle de Guatemala  
Departamento de Matemática  
Licenciatura en Matemática Aplicada

**Estudiante:** Rudik Roberto Rompich  
**E-mail:** [rom19857@uvg.edu.gt](mailto:rom19857@uvg.edu.gt)  
**Carné:** 19857

MM2030 - Ecuaciones Diferenciales 2 - Catedrático: Dorval Carías  
22 de abril de 2021

---

## Corto 3

Instrucciones: resuelva tres de los problemas que se presentan a continuación.

### 1. Problema 1

Una placa rectangular de metal con lados de longitudes  $a$  y  $b$  y con lados (**caras**) aislados (i.e., no hay flujo de calor) se calienta a una temperatura uniforme de  $u_0^\circ\text{C}$ , manteniéndose tres de sus lados a  $0^\circ\text{C}$  y el otro aislado. Resuelva para  $u(x, y, t)$  sujeta a la condición inicial  $u(x, y, 0) = 100$ .

*Solución.* Se comenzará entendiendo el problema por medio de las siguientes dos figuras:

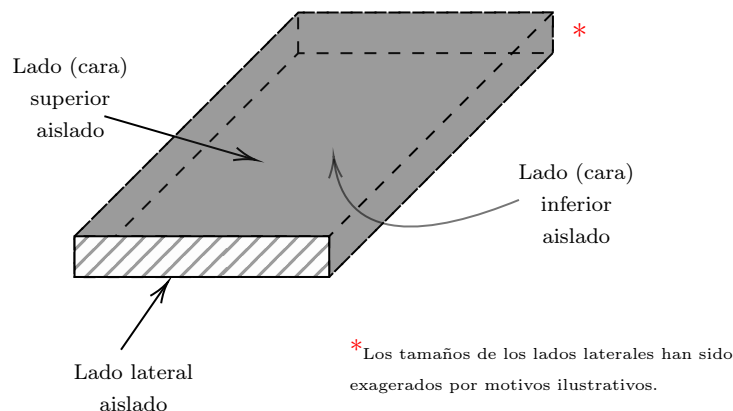


Figura 1: Placa rectangular metálica

En la Figura 1, se representan las caras y un lateral aislados. Por otra parte, en la Figura 2, es la representación en dos dimensiones del problema. Ahora bien, el plantamiento propuesto es el siguiente:

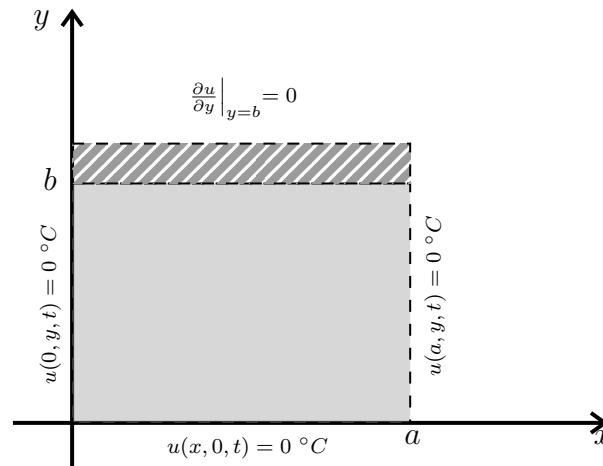


Figura 2: Placa en dos dimensiones

## Condiciones - Ecuación de calor en 2D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \implies u_t = k \nabla^2 u, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

Condiciones de frontera:

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(a, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0$$

Condición inicial:

$$u(x, y, 0) = 100$$

Se procede con el método de separación de variables:

$$u(x, y, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t) = X \cdot Y \cdot T$$

Sustituyendo en la ecuación de calor en 2D:

$$T'XY = k(X''YT + Y''XT)$$

$$T'XY = kT(X''Y + Y''X)$$

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''Y + Y''X}{XY}$$

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

De la igualdad anterior, surgen tres ecuaciones diferenciales. Las primeras dos surgen de:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda \implies \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda = -\mu$$

La primera ecuación es:

$$\frac{X''}{X} = -\mu \implies \boxed{X'' + \mu X = 0} \quad (1)$$

(1) Se encuentra sujeta a las condiciones:

$$X(0) = 0, \quad X(a) = 0$$

Cuando  $\mu < 0$  y  $\mu = 0$  las soluciones se trivializan, por lo que solo se analizará el caso en el que  $\mu > 0$ . Entonces, la solución de (1) es:

$$X(x) = A \cos \sqrt{\mu}x + B \sin \sqrt{\mu}x$$

Aplicando las condiciones de frontera:

$$X(0) = A \cos 0 + B \sin 0 = 0 \implies A = 0$$

$$X(a) = B \sin \sqrt{\mu}a$$

Para encontrar la relación de  $\sqrt{\mu}a$  se propone:

$$\sqrt{\mu}a = n\pi \implies \sqrt{\mu} = \frac{n\pi}{a}$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a}x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La segunda ecuación:

$$-\frac{Y''}{Y} - \lambda = -\mu \implies Y'' + \underbrace{(\lambda - \mu)}_P Y = 0 \implies \boxed{Y'' + PY = 0} \quad (2)$$

(2) Se encuentra sujeta a las condiciones de frontera:

$$Y(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=b} = 0$$

Cuando  $P < 0$  y  $P = 0$  las soluciones se trivializan, por lo que solo se analizará el caso en el que  $P > 0$ . Entonces, la solución de (2) es:

$$Y(y) = C \cos \sqrt{P}y + D \sin \sqrt{P}y$$

$$Y'(y) = -\sqrt{P}C \sin \sqrt{P}y + \sqrt{P}D \cos \sqrt{P}y$$

Aplicando las condiciones de frontera:

$$Y(0) = C \cos 0 + D \sin 0 = 0 \implies C = 0$$

$$Y'(b) = \sqrt{P}D \cos \sqrt{P}b$$

**Nótese** que  $D$  no puede ser 0; ya que solo nos interesan las soluciones triviales. Es decir  $\cos \sqrt{P}b = 0$ . Para encontrar la relación de  $\sqrt{P}b$ , se propone:

$$\sqrt{P}b = \pi \left( m - \frac{1}{2} \right) \implies \sqrt{P} = \frac{\pi}{b} \left( m - \frac{1}{2} \right)$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$Y_m(y) = \sin \frac{\pi}{b} \left(m - \frac{1}{2}\right) y$$

Por otra parte, la tercera ecuación es:

$$\frac{T'}{kT} = -\lambda \quad \Longrightarrow \quad T' + \lambda kT = 0 \quad (3)$$

La solución de la ecuación diferencial es:

$$T(t) = Ee^{-\lambda kt} \quad (4)$$

Ahora, notamos que previamente se había propuesto  $P = \lambda - \mu$ . Despejando para  $\lambda$ , se tiene  $\lambda = P + \mu$ . En donde  $P = \left[\frac{\pi}{b} \left(m - \frac{1}{2}\right)\right]^2$  y  $\mu = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \lambda &= \left[\frac{\pi}{b} \left(m - \frac{1}{2}\right)\right]^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \\ &= \pi^2 \left[\frac{1}{b^2} \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{a^2}\right] \end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo en (4) la solución general es:

$$T_{mn}(t) = \exp \left( -k\pi^2 \left[ \frac{1}{b^2} \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{a^2} \right] t \right) \quad (5)$$

Ahora, se tiene que, para  $m, n = 1, 2, 3, \dots$ :

$$\begin{aligned} u_{mn}(x, y, t) &= X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t) \\ &= \sin \left( \frac{n\pi}{a} x \right) \cdot \sin \left( \frac{\pi}{b} \left(m - \frac{1}{2}\right) y \right) \cdot \exp \left( -k\pi^2 \left[ \frac{1}{b^2} \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{a^2} \right] t \right) \end{aligned}$$

Aplicando el principio de superposición:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} u_{mn}(x, y, t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \left( \frac{n\pi}{a} x \right) \cdot \sin \left( \frac{\pi}{b} \left(m - \frac{1}{2}\right) y \right) \cdot \exp \left( -k\pi^2 \left[ \frac{1}{b^2} \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{a^2} \right] t \right) \end{aligned}$$

Aplicando la condición inicial en donde  $t = 0$ , se tiene:

$$\begin{aligned} 100 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, 0) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \left( \frac{n\pi}{a} x \right) \cdot \sin \left( \frac{\pi}{b} \left(m - \frac{1}{2}\right) y \right) \end{aligned}$$

Ahora bien, se considerará a la relación de ortogonalidad para el seno, por lo que se tiene:

$$\begin{aligned}
 A_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b 100 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}\left(m - \frac{1}{2}\right)y\right) dy dx \\
 &= \frac{400}{ab} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \int_0^b \sin\left(\frac{\pi}{b}\left(m - \frac{1}{2}\right)y\right) dy \\
 &= \frac{400}{ab} \frac{L}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) \frac{2b}{(2m-1)\pi} \left( \cos\left(\left(m - \frac{1}{2}\right)\pi\right) - 1 \right) \\
 &= \frac{800}{n(2m-1)\pi^2} (1 - (-1)^n)
 \end{aligned}$$

Entonces  $A_{m2n} = 0$  y por lo tanto:

$$A_{m2n-1} = \frac{1600}{(2n-1)(2m-1)\pi^2}$$

Finalmente, el resultado:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1600}{(2n-1)(2m-1)\pi^2} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{(2m-1)\pi y}{2b}\right) \\
 &\quad \cdot \exp\left(-\left(\frac{(2m-1)^2}{4b^2} + \frac{(2n-1)^2}{a^2}\right) \kappa \pi^2 t\right)
 \end{aligned}$$

□

## 2. Problema 2

Resuelva la ecuación diferencial  $\frac{\partial u}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ , sobre el rectángulo  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ , sujeta a las condiciones:  $u(x, y, 0) = f(x, y)$ ,  $u(0, y, t) = 0$ ,  $u(a, y, t) = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}(x, b, t) = 0$

*Solución.* Se comienza planteando la representación gráfica del problema:

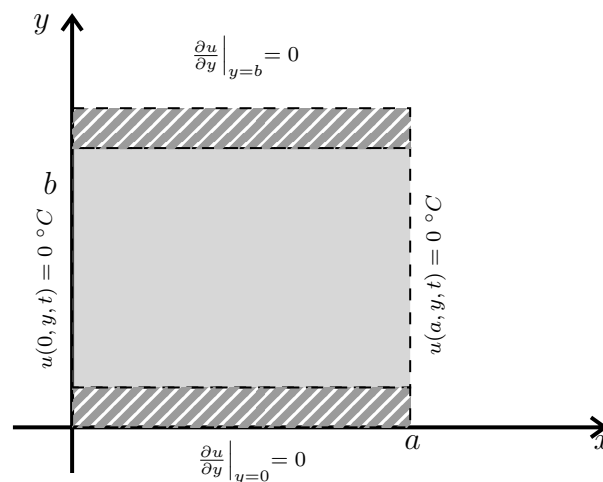


Figura 3: Placa rectangular metálica

Se propone utilizar el método de separación de variables:

$$u(x, y, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t) = X \cdot Y \cdot T$$

Es decir, sustituyendo la ecuación diferencial se tiene:

$$\begin{aligned}XYT' &= k_1 X''YT + k_2 Y''XT \implies XYT' = T(k_1 X''Y + k_2 Y''X) \\ \implies \frac{T'}{T} &= \frac{k_1 X''Y + k_2 Y''X}{XY} \implies \boxed{\frac{T'}{T} = k_1 \frac{X''}{X} + k_2 \frac{Y''}{Y} = -\lambda}\end{aligned}$$

Ahora bien, tenemos 3 casos. Dos de ellos se generan por medio de:

$$k_1 \frac{X''}{X} + k_2 \frac{Y''}{Y} = -\lambda \implies k_1 \frac{X''}{X} = -k_2 \frac{Y''}{Y} - \lambda = -\mu$$

Para la primera ecuación se tiene:

$$k_1 \frac{X''}{X} = -\mu \implies k_1 \frac{X''}{X} + \mu X = 0 \implies \boxed{X'' + \frac{\mu}{k_1} X = 0}$$

Las condiciones de frontera son:

$$X(0) = 0, \quad X(a) = 0$$

Nuevamente, se sabe que  $\mu/k_1 < 0$  y  $\mu/k_1 = 0$ , se generan soluciones triviales. Por lo que solo se considerará el caso  $\mu/k_1 > 0$ . Su solución es:

$$X(x) = A \cos \sqrt{\frac{\mu}{k_1}} x + B \sin \sqrt{\frac{\mu}{k_1}} x$$

Aplicando las condiciones de frontera:

$$X(0) = A = 0$$

$$X(a) = B \sin \sqrt{\frac{\mu}{k_1}} a$$

Se propone encontrar una relación para  $\sqrt{\mu/k_1} a$ :

$$\sqrt{\frac{\mu}{k_1}} a = \pi n \implies \sqrt{\frac{\mu}{k_1}} = \frac{\pi n}{a}$$

Por lo que la solución general es:

$$\boxed{X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{a} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots}$$

Para la segunda ecuación se tiene:

$$\begin{aligned}-k_2 \frac{Y''}{Y} - \lambda &= -\mu \implies \frac{-k_2 Y'' - \lambda Y}{Y} = -\mu \implies -k_2 Y'' - \lambda Y + \mu Y = 0 \\ \implies k_2 Y'' + \lambda Y - \mu Y &= 0 \implies \boxed{Y'' + \frac{(\lambda - \mu)}{k_2} Y = 0}\end{aligned}$$

Las condiciones de frontera:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=b} = 0$$

Una vez más, notamos que se generan soluciones triviales si  $\frac{(\lambda-\mu)}{k_2} = 0$  y  $\frac{(\lambda-\mu)}{k_2} < 0$ . Por lo que,  $\frac{(\lambda-\mu)}{k_2} > 0$  es la única opción que no genera soluciones triviales y su solución es:

$$Y(y) = C \cos \sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}} y + D \sin \sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}} y$$

$$Y'(y) = -C \sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}} \sin \sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}} y + D \sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}} \cos \sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}} y$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$Y'(0) = D = 0$$

$$Y'(b) = -C \sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}} \sin \sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}} b = 0$$

Se propone encontrar una relación para  $\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}}$ :

$$\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}} b = \pi m \implies \sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}} = \frac{\pi m}{b}$$

Por lo que la solución general es:

$$Y_m(y) = \cos \frac{\pi m}{b} y, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Para la tercera ecuación se tiene:

$$\implies \frac{T'}{T} = -\lambda \implies \boxed{T' + \lambda Y = 0}$$

Excluyendo los casos triviales en donde  $\lambda < 0$  y  $\lambda = 0$ , la solución para  $\lambda > 0$  es:

$$Y(y) = E e^{-\lambda y}$$

Para calcular  $\lambda$  se tiene de la segunda ecuación:

$$\sqrt{\frac{\lambda-\mu}{k_2}} = \frac{\pi m}{b} \implies \lambda - \mu = k_2 \left( \frac{\pi m}{b} \right)^2 \implies \lambda = \mu + k_2 \left( \frac{\pi m}{b} \right)^2$$

De la primera ecuación se tiene que  $\mu = k_1 \left( \frac{\pi n}{a} \right)^2$ , por lo que:

$$\lambda = k_1 \left( \frac{\pi n}{a} \right)^2 + k_2 \left( \frac{\pi m}{b} \right)^2$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación es:

$$Y_{mn}(y) = \exp \left( - \left( k_1 \left( \frac{\pi n}{a} \right)^2 + k_2 \left( \frac{\pi m}{b} \right)^2 \right) t \right)$$

$$\boxed{Y_{mn}(y) = \exp \left( -\pi^2 \left( k_1 \left( \frac{n}{a} \right)^2 + k_2 \left( \frac{m}{b} \right)^2 \right) t \right)}$$

Ahora bien, la solución general de  $u$  para  $m, n = 1, 2, 3, \dots$ :

$$\begin{aligned} u(x, y, t)_{nm} &= X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t) \\ &= \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot \cos \frac{\pi m}{b} y \cdot \exp \left( -\pi^2 \left( k_1 \left( \frac{n}{a} \right)^2 + k_2 \left( \frac{m}{b} \right)^2 \right) t \right) \end{aligned}$$

Aplicando el principio de superposición:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} u_{mn}(x, y, t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot \cos \frac{\pi m}{b} y \cdot \exp \left( -\pi^2 \left( k_1 \left( \frac{n}{a} \right)^2 + k_2 \left( \frac{m}{b} \right)^2 \right) t \right) \end{aligned}$$

Aplicando la condición inicial en donde  $t = 0$ , se tiene:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} u_{mn}(x, y, t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot \cos \frac{\pi m}{b} y \end{aligned}$$

Ahora bien, tomando como referencia la ortogonalidad de los senos y cosenos, se propone multiplicar por  $\sin(k\pi x/a) \cos(l\pi y/b)$  (considerando  $l$  y  $k$  como  $n$  y diferenciarlos) e integrar en  $x$  de 0 a  $a$ , y en  $y$  de 0 a  $b$ , es decir:

$$\begin{aligned} &\int_{x=0}^a \int_{y=0}^b f(x, y) \sin \left( \frac{k\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{l\pi y}{b} \right) dy dx \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \sin \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{k\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{m\pi y}{b} \right) \cos \left( \frac{l\pi y}{b} \right) dy dx \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \int_{x=0}^a \sin \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{k\pi x}{a} \right) dx \int_{y=0}^b \cos \left( \frac{m\pi y}{b} \right) \cos \left( \frac{l\pi y}{b} \right) dy \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \frac{a}{2} \delta_{nk} \frac{b}{2} \delta_{ml} \\ &= A_{lk} \frac{ab}{4} \end{aligned}$$

Se tiene, entonces:

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b f(x, y) \sin \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{m\pi y}{b} \right) dy dx$$

Finalmente, la solución:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{ab} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b f(x, y) \sin \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{m\pi y}{b} \right) dy dx \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot \cos \frac{\pi m}{b} y \\ &\quad \cdot \exp \left( -\pi^2 \left( k_1 \left( \frac{n}{a} \right)^2 + k_2 \left( \frac{m}{b} \right)^2 \right) t \right) \end{aligned}$$

□



### 3. Problema 3

Si es posible, resuelva la ecuación de Laplace  $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ ,  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ ,  $0 < z < c$ , sujeta a las condiciones  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, y, z) = 0$ ,  $u(x, 0, z) = u(x, b, z) = u(x, y, c) = 0$ ,  $u(x, y, 0) = f(x, y)$

*Solución.* Considérese la representación gráfica del problema:

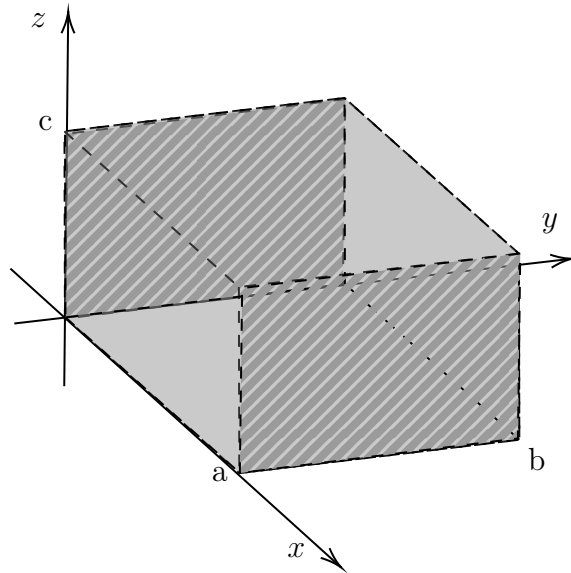


Figura 4: Representación del problema

Se propone el método de separación de variables:

$$u(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) = X \cdot Y \cdot Z$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0 \implies X''YZ + Y''XZ + Z''XY = 0 \\ \implies X''YZ + X(Y''Z + Z''Y) &= 0 \implies X(Y''Z + Z''Y) = -X''YZ \\ \implies \frac{Y''Z + Z''Y}{YZ} &= -\frac{X''}{X} \implies \boxed{\frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\frac{X''}{X} = -\lambda} \end{aligned}$$

---

Se considera la primera ecuación:

$$-\frac{X''}{X} = -\lambda \implies \boxed{X'' - \lambda X = 0}$$

Con las condiciones de frontera:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0$$

Cuando  $\lambda = 0$  y  $\lambda < 0$  las soluciones son triviales. Para el caso de  $\lambda > 0$ , la solución es la siguiente (considerando un intervalo **finito**):

$$X(x) = A \cosh \sqrt{\lambda} x + B \sinh \sqrt{\lambda} x$$

$$X'(x) = A\sqrt{\lambda} \sinh \sqrt{\lambda}x + B\sqrt{\lambda} \cosh \sqrt{\lambda}x$$

Aplicando las condiciones de frontera:

$$X'(0) = B = 0$$

$$X'(a) = A\sqrt{\lambda} \sinh \sqrt{\lambda}a$$

La relación de  $\sqrt{\lambda}a$  es la siguiente:

$$\sqrt{\lambda}a = \pi n \implies \sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{a}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación:

$$X_n(x) = A \cosh \frac{\pi n}{a}x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ahora bien, se tiene:

$$\frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\lambda \implies \boxed{\frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} - \lambda = -\mu}$$

Se considera la segunda ecuación diferencial

$$\frac{Y''}{Y} = -\mu \implies \boxed{Y'' + \mu Y = 0}$$

Con las condiciones de frontera:

$$Y(0) = 0, Y(b) = 0$$

Nuevamente, cuando  $\mu = 0$  y  $\mu < 0$  las soluciones son triviales. Para el caso de  $\mu > 0$ , la solución es la siguiente:

$$Y(y) = C \cos \sqrt{\mu}y + D \sin \sqrt{\mu}y$$

Aplicando las condiciones de frontera:

$$Y(0) = C = 0$$

$$Y(b) = D \sin \sqrt{\mu}b = 0$$

La relación de  $\sqrt{\mu}b$  es la siguiente:

$$\sqrt{\mu}b = \pi m \implies \sqrt{\mu} = \frac{\pi m}{b}$$

Es decir que la solución de la ecuación es:

$$Y_m(y) = \sin \frac{\pi m}{b}y, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

La tercera ecuación es:

$$-\frac{Z''}{Z} - \lambda = -\mu \implies -Z'' - \lambda Z + \mu Z = 0 \implies \boxed{Z'' + (\lambda - \mu)Z = 0}$$

Las condiciones de frontera:

$$Z(c) = 0$$

Nuevamente, cuando  $\lambda - \mu = 0$  y  $\lambda - \mu < 0$  las soluciones son triviales. Para el caso de  $\lambda - \mu > 0$ , la solución es la siguiente:

$$Z(z) = E \cos(\lambda - \mu)z + F \sin(\lambda - \mu)z$$

Aplicando las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} Z(c) &= E \cos(\lambda - \mu)c + F \sin(\lambda - \mu)c = 0 \\ \implies E \cos(\lambda - \mu)c &= -F \sin(\lambda - \mu)c \implies E = -\frac{F \sin(\lambda - \mu)c}{\cos(\lambda - \mu)c} \\ \implies E &= -\tan(\lambda - \mu)c \end{aligned}$$

Por lo que la solución es:

$$Z(z) = -\tan(\lambda - \mu)z \cdot \cos(\lambda - \mu)z + \sin(\lambda - \mu)z$$

Se nombrará  $P = \lambda - \mu$ , entonces:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) \\ Z_{mn}(z) &= -\tan\left(\frac{n^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) \pi^2 z \cdot \cos\left(\frac{n^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) \pi^2 z + \sin\left(\frac{n^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) \pi^2 z \end{aligned}$$

Ahora, por el principio de superposición tenemos que:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} u_{mn}(x, y, z) \\ &= A \cosh \frac{\pi n}{a} x \cdot \sin \frac{\pi m}{b} \cdot \left[ -\tan\left(\frac{n^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) \pi^2 z \cdot \cos\left(\frac{n^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) \pi^2 z + \sin\left(\frac{n^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) \pi^2 z \right] \end{aligned}$$

Aplicando la condición inicial  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} u_{mn}(x, y, 0) \\ &= A \cosh \frac{\pi n}{a} x \cdot \sin \frac{\pi m}{b} \end{aligned}$$

□

## 4. Problema 4

Resuelva el problema de las vibraciones de una membrana circular de radio  $a$ . El desplazamiento vertical satisface la ecuación de onda bidimensional  $c^2 \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ , y considere las condiciones iniciales y de frontera  $u(a, \theta, t) = 0$ ,  $u(r, \theta, 0) = f(r, \theta)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t} = g(r, \theta)$

*Solución.* Se deja como ejercicio al auxiliar.

□

## 5. Problema 5

Resuelva la ecuación diferencial  $k\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t}$  dentro de un círculo de radio  $R$  con temperatura cero en toda la frontera, si inicialmente  $u(r, \theta, 0) = f(r, \theta)$ . Analice  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(r, \theta, t)$

*Solución.* Se deja como ejercicio al auxiliar. □