Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2030 - Ecuaciones Diferenciales 2 - Catedrático: Dorval Carías
16 de mayo de 2021

Tarea 3

1. Problema 1

1.1.

Escriba la solución del problema de Dirichlet para el primer cuadrante si

$$u(x,0) = 0, x > 0$$
$$u(0,y) = g(y), y > 0$$

Solución. El problema de Dirichlet en el primer cuadrante hace referencia a:

$$\nabla^2(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad x > 0, y > 0$$

Procedemos por separación de variables:

$$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y) = X \cdot Y$$

$$\implies X''Y + Y''X = 0 \implies X''Y = -Y''X \implies \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \omega^2$$

Por lo tanto,

$$X'' - \omega^2 X = 0 \tag{1}$$

$$Y'' + \omega^2 Y = 0 \tag{2}$$

Para (1) la solución de la EDO es,

$$X_\omega(x) = A_\omega e^{-\omega x} + B_\omega e^{\omega x}$$

Nótese para que se generen soluciones cuando $x \to \infty$ (que se mantenga acotado), es necesario eliminar el término B. Por lo tanto,

$$X_\omega(x) = A_\omega e^{-\omega x}$$

Para (2) la solución de la EDO es,

$$\begin{gathered} Y_\omega(y) = C_\omega \cos(\omega y) + D_\omega \sin(\omega y), \qquad u(x,0) = 0 \\ \implies Y_\omega(0) = C_\omega \cos(0) + D_\omega \sin(0) = 0 \implies C_\omega = 0 \\ \implies Y_\omega(y) = D_\omega \sin(\omega y) \end{gathered}$$

Es decir que tenemos,

$$X_\omega(x) \cdot Y_\omega(y) = A_\omega e^{-\omega x} \cdot D_\omega \sin(\omega y) = F_\omega e^{-\omega x} \sin(\omega y), \quad \omega > 0$$

Por el principio de superposición,

$$u(x,y) = \int_0^\infty F_\omega e^{-\omega x} \sin(\omega y) d\omega$$

Aplicando la condición $u(0,y) = g(y)$,

$$u(0,y) = g(y) = \int_0^\infty F_\omega \sin(\omega y) d\omega$$

En donde F_ω es,

$$F_\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty g(\psi) \sin(\psi y) d\psi$$

La solución,

$$u(x,y) = \int_0^\infty \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\infty g(\psi) \sin(\psi y) d\psi \right] e^{-\omega x} \sin(\omega y) d\omega$$

□

1.2.

Escriba la solución del problema de Dirichlet para el primer cuadrante si

$$\begin{gathered} u(x,0) = f(x), x > 0 \\ u(0,y) = g(y), y > 0 \end{gathered}$$

Solución. El problema de Dirichlet en el primer cuadrante hace referencia a:

$$\nabla^2(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad x > 0, y > 0$$

Nos damos cuenta que tenemos dos casos, que en el resultado final se sumarán:

1. $$u(x,0) = 0, x > 0$$
   $$u(0,y) = g(y), y > 0$$

   Nos damos cuenta que este caso es el del inciso **1.1**. Así que no lo resolveremos.

2. $$u(x,0) = f(x), x > 0$$
   $$u(0,y) = 0, y > 0$$

Procedemos por separación de variables:

$$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y) = X \cdot Y$$

$$\implies X''Y + Y''X = 0 \implies X''Y = -Y''X \implies -\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \omega^2$$

Por lo tanto,

$$Y'' - \omega^2 Y = 0 \tag{1}$$

$$X'' + \omega^2 X = 0 \tag{2}$$

Para (1) la solución de la EDO es,

$$Y_\omega(y) = A_\omega e^{-\omega y} + B_\omega e^{\omega y}$$

Nótese para que se generen soluciones cuando $y \to \infty$ (que se mantenga acotado), es necesario eliminar el término B. Por lo tanto,

$$Y_\omega(y) = A_\omega e^{-\omega y}$$

Para (2) la solución de la EDO es,

$$X_\omega(x) = C_\omega \cos(\omega x) + D_\omega \sin(\omega x), \qquad u(0,y) = 0$$
$$\implies X_\omega(0) = C_\omega \cos(0) + D_\omega \sin(0) = 0 \implies C_\omega = 0$$
$$\implies X_\omega(x) = D_\omega \sin(\omega x)$$

Es decir que tenemos,

$$X_\omega(x) \cdot Y_\omega(y) = A_\omega e^{-\omega y} \cdot D_\omega \sin(\omega x) = F_\omega e^{-\omega y} \sin(\omega x), \quad \omega > 0$$

Por el principio de superposición,

$$u(x,y) = \int_0^\infty F_\omega e^{-\omega y} \sin(\omega x) d\omega$$

Aplicando la condición $u(x,0) = f(x)$,

$$u(x,0) = f(x) = \int_0^\infty F_\omega \sin(\omega x) d\omega$$

En donde F_ω es,

$$F_\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\psi) \sin(\psi x) d\psi$$

La solución del **segundo caso**,

$$u(x,y) = \int_0^\infty \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\psi) \sin(\psi x) d\psi \right] e^{-\omega y} \sin(\omega x) d\omega$$

La solución final, sumando los 2 casos:

$$u(x,y) = \int_0^\infty \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\infty g(\psi) \sin(\psi y) d\psi \right] e^{-\omega x} \sin(\omega y) d\omega +$$
$$+ \int_0^\infty \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\psi) \sin(\psi x) d\psi \right] e^{-\omega y} \sin(\omega x) d\omega$$

$\square$

Problema 2 $\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$

$y(x,0) = \begin{cases} 2-|x|, & -2 \le x \le 2 \\ 0 & |x|>2 \end{cases}$

$2-x$ ó $2+x$

SV: $\quad X''T = T''X \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -w^2$

$X'' + w^2 X = 0$

$X(x) = A\cos wx + B\,\text{sen}\,wx$

$T'' + w^2 T = 0$

$T(t) = C\cos wt + D\,\text{sen}\,wt$

$T'(t) = -Cw\,\text{sen}\,wt + Dw\cos wt$

$T'(0) = 0 + Dw = 0$

$D = 0$

$T_w = C_w \cos wt$

$X(x)T(t) = \cos wt\,[A\cos wx + B\,\text{sen}\,wx]$

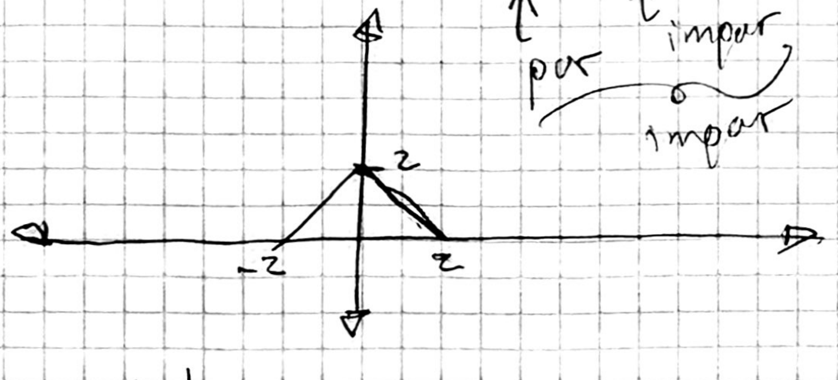
Por superposición:

$U(x,y) = \int_0^\infty \cos wt\,[A\cos wx + B\,\text{sen}\,wx]\,dw$

$U(x,0) = \int_0^\infty [A\cos wx + \cancel{B\,\text{sen}\,wx}^{\,0}]\,dw = \begin{cases} 2-|x|, & -2\le x\le 2 \\ 0, & |x|>2 \end{cases}$

par $\quad$ impar

impar



$\begin{cases} 2-|x|, & -2 \le x \le 2 \\ 0 & |x|>2 \end{cases}$ es par

$f(x) = \int_0^\infty [A\cos wx + \cancel{B\,\text{sen}\,wx}]\,dw$

$\Rightarrow \quad = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty A_w \cos wx\,dw$

$A_w = \int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\,dx = \int_0^2 (2-x)\cos\alpha x\,dx$

$+$	$2-x$	$\cos\alpha x$
$-$	-1	$\frac{1}{\alpha}\,\text{sen}\,\alpha x$
$+$	0	$-\frac{1}{\alpha^2}\cos\alpha x$

$\Rightarrow \quad \cancel{\frac{2-x}{\alpha}\,\text{sen}\,\alpha x\Big|_0^2} - \frac{1}{\alpha^2}\cos\alpha x\Big|_0^2 =$

$= -\frac{1}{\alpha^2}[\cos 2x - 1]$

$f(x) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi w^2}[1-\cos 2x] \cdot \cos wx\,dw$

$\Rightarrow$ Reemplazando en $*$

$* \quad u(x,y) = \int_0^\infty \cos wt \left[\left(\frac{2}{\pi w^2}[1-\cos 2x]\right)\cos wx\right] dw$

$\cancel{= \int_0^\infty \left(\frac{2}{\pi w^2}\right.}$

posicion

Problema 3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k\frac{\partial u}{\partial t} \qquad -\infty < x < \infty,\ t>0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & -\pi \le x \le \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$$

$\Rightarrow$ SPV.

$$X''T = kT'X \qquad (\sqrt{k})^2 w^2 \quad (\sqrt{k}w)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{X''}{kX} = \frac{T'}{T} = -w^2$$

$\Rightarrow$

$X'' + kw^2 X = 0$	$T' + w^2 T = 0$
$X(x) = A\operatorname{sen}(\sqrt{k}wx) + B\cos(\sqrt{k}wx)$	$T(t) = Ce^{-w^2 t}$

$$X(x)\cdot T(t) = e^{-w^2 t}\left[A\operatorname{sen}(\sqrt{k}wx) + B\cos(\sqrt{k}wx)\right]$$

Por superposición:

$$u(x,t) = \int_0^\infty e^{-w^2 t}\left[A\operatorname{sen}\sqrt{k}wx + B\cos\sqrt{k}wx\right]dw$$

Condición:

$$u(x,0) = f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[A\operatorname{sen}\sqrt{k}wx + \cancel{B\cos\sqrt{k}wx}^{\,0}\right]dw$$

$f(x)$ impar $\quad A(w) = \int_0^\infty f(x)\operatorname{sen}\sqrt{k}wx\,dx =$

$$= \int_0^\pi \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\sqrt{k}w x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[\cos\left((1-\sqrt{k}w)x\right) - \cos\left((1+\sqrt{k}w)x\right)\right]dx$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\sqrt{K}W}\cancel{\operatorname{sen}}\overset{0}{((1-\sqrt{K}W)x)}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{1+\sqrt{K}W}\operatorname{sen}((1+\sqrt{K}W)x)\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\sqrt{K}W}\operatorname{sen}(1-\sqrt{K}W)\pi-\frac{1}{1+\sqrt{K}W}\operatorname{sen}(1+\sqrt{K}W)\pi\right]$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(1-\sqrt{K}W)\pi\left[\frac{1}{1-\sqrt{K}W}-\frac{1}{1+\sqrt{K}W}\right]$$

$$\Rightarrow f(x)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}((1-\sqrt{K}W)\pi)\left[\frac{1}{1-\sqrt{K}W}-\frac{1}{1+\sqrt{K}W}\right]\operatorname{sen}\sqrt{K}W\,dw$$

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}e^{-w^2t}\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}((1-\sqrt{K}W)\pi)\right)\left[\frac{1}{1-\sqrt{K}W}-\frac{1}{1+\sqrt{K}W}\right]\operatorname{sen}\sqrt{K}Wx\,dW$$
