Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2030 - Ecuaciones Diferenciales 2 - Catedrático: Dorval Carías
20 de mayo de 2021

Tarea 3

Utilice la transformada de Laplace para resolver el problema con valores en la frontera dado.

1. Problema 1.

Resuelva:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} - 2u$$

Con las condiciones:

$$t > 0, \qquad x > 0, \qquad u(x,0) = 10e^{-x} - 6e^{-4x}$$

Solución. Aplicando la transformada de Laplace (en términos de $f(t)$), tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} - 2\mathcal{L}\{u\} \\ s\breve{u}(x,s) - u(x,0) &= \breve{u}'(x,s) - 2\breve{u}(x,s) \\ s\breve{u}(x,s) - (10e^{-x} - 6e^{-4x}) &= \widehat{u}'(x,s) - 2\breve{u}(x,s) \end{aligned}$$

Usando una notación más cómoda, tenemos:

$$\begin{aligned} s\breve{u} - (10e^{-x} - 6e^{-4x}) &= \breve{u}' - 2\breve{u} \\ -(10e^{-x} - 6e^{-4x}) &= \widehat{u}' - 2\widehat{u} - s\breve{u} \end{aligned}$$

Que implica:

$$\widehat{u}' - (2+s)\widehat{u} = 6e^{-4x} - 10e^{-x}$$

Identificamos que se trata de una ecuación de primer order, con $P(x) = -(2+s)$. Entonces,

$$\mu = e^{\int P(x)dx} = e^{-\int (2+s)dx} = e^{-(2+s)x}$$

Por lo cual,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[e^{-(2+s)x}\breve{u}\right] &= \left(6e^{-4x} - 10e^{-x}\right) e^{-(2+s)x} \\
\int d\left[e^{-(2+s)x}\breve{u}\right] &= \int \left(6e^{-4x} - 10e^{-x}\right) e^{-(2+s)x} dx \\
e^{-(2+s)x}\breve{u} &= \int \left(6e^{-4x-(2+s)x} - 10e^{-x-(2+s)x}\right) dx \\
e^{-(2+s)x}\breve{u} &= \int \left(6e^{-x(6+s)} - 10e^{-x(3+s)}\right) dx \\
e^{-(2+s)x}\breve{u} &= -\frac{6e^{-x(6+s)}}{6+s} + \frac{10e^{-x(3+s)}}{3+s} \\
\breve{u} &= -\frac{6e^{-x(6+s)}e^{(2+s)x}}{6+s} + \frac{10e^{-x(3+s)}e^{(2+s)x}}{3+s} \\
\breve{u} &= -\frac{6e^{-x(6+s)+(2+s)x}}{6+s} + \frac{10e^{-x(3+s)+(2+s)x}}{3+s} \\
\breve{u} &= -\frac{6e^{-4x}}{6+s} + \frac{10e^{-x}}{3+s}
\end{aligned}
$$

La solución es:

$$
u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[u(x,s)\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10e^{-x}}{3+s} - \frac{6e^{-4x}}{6+s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10e^{-x}}{3+s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6e^{-4x}}{6+s}\right] =
$$

$$
= 10e^{-x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-(-3)}\right] - 6e^{-4x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-(-6)}\right] = 10e^{-x}e^{-3t} - 6e^{-4x}e^{-6t} =
$$

$$
= 10e^{-x-3t} - 6e^{-4x-6t} = 10e^{-(x+3t)} - 6e^{-2(2x+3t)}
$$

□

2. Problema 2.

Encuentre la solución acotada de

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}
$$

Con las condiciones: $x > 0, t > 0$, y tal que

$$
u(0,t) = 1, \qquad u(x,0) = 0
$$

Nota 1

Debido a que no hay ninguna cota en x, se impondrá una nueva condición (basado en los principios físicos que gobiernan la ecuación de calor):

$$
\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0, \quad t > 0.
$$

Solución. Aplicando la transformada de Laplace (en términos de $f(t)$), tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\\ s\breve{u}(x,s) - u(x,0) &= \breve{u}''(x,s)\end{aligned}$$

Aplicando $u(x,0) = 0 \implies \breve{u}(x,0) = 0$:

$$s\breve{u}(x,s) = \breve{u}''(x,s)$$

Implica:

$$\breve{u}''(x,s) - s\breve{u}(x,s) = 0$$

Con una notación más cómoda:

$$\breve{u}'' - s\breve{u} = 0$$

Resolviendo la EDO:

$$\breve{u}(x,s) = Ae^{(-\sqrt{s}x)} + Be^{(\sqrt{s}x)}$$

Por la **Nota 1**, sabemos $\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0 \implies \lim_{x\to\infty} \breve{u}(x,s) = 0$. Por lo tanto, B debe ser 0:

$$\breve{u}(x,s) = Ae^{(-\sqrt{s}x)}$$

Aplicando la condición $u(0,t) = 1 \implies \breve{u}(0,s) = 1/s$:

$$\breve{u}(0,s) = A = \frac{1}{s}$$

Entonces:

$$\breve{u}(x,s) = \frac{1}{s}e^{(-\sqrt{s}x)}$$

La solución es:

$$\begin{aligned}u(x,t) = &\ \mathcal{L}^{-1}\left[u(x,s)\right](t)\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}e^{(-\sqrt{s}x)}\right]\end{aligned}$$

□

3. Problema 3.

Resuelva:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0$$

Con las condiciones:

$$u(0,t) = 0, \quad u(3,t) = 0, \quad u(x,0) = 10 \operatorname{sen} 2\pi x - 6 \operatorname{sen} 4\pi x$$

Solución. Aplicando la transformada de Laplace (en términos de $f(t)$), tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} &= 4\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} \\ s\breve{u}(x,s) - u(x,0) &= 4\breve{u}''(x,s) \end{aligned}$$

Aplicando una de las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} s\breve{u}(x,s) - (10 \operatorname{sen} 2\pi x - 6 \operatorname{sen} 4\pi x) &= 4\breve{u}''(x,s) \\ 4\breve{u}''(x,s) - s\breve{u}(x,s) &= 6 \operatorname{sen} 4\pi x - 10 \operatorname{sen} 2\pi x \\ \breve{u}''(x,s) - \frac{s}{4}\breve{u}(x,s) &= \frac{3}{2} \operatorname{sen} 4\pi x - \frac{5}{2} \operatorname{sen} 2\pi x \end{aligned}$$

Usando una notación más cómoda:

$$\breve{u}'' - \frac{s}{4}\breve{u} = \frac{3}{2} \operatorname{sen} 4\pi - \frac{5}{2} \operatorname{sen} 2\pi x$$

□

4. Problema 4.

Resuelva:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{F_o}{\rho}$$

Con las condiciones: $0 < x < L, t > 0$, sujeta a

$$y(0,t) = y(L,t) = y(x,0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$$

Solución. Aplicando la transformada de Laplace (en términos de $f(t)$), tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right\} &= c^2\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right\} + \frac{F_o}{\rho}\mathcal{L}\{1\} \\ s^2\breve{y}(x,s) - sy(x,0) - y'(x,0) &= c^2\breve{y}''(x,s) + \frac{F_o}{\rho}\cdot\frac{1}{s} \\ s^2\breve{y}(x,s) &= c^2\breve{y}''(x,s) + \frac{F_o}{\rho}\cdot\frac{1}{s} \end{aligned}$$

Implica:

$$\begin{aligned} c^2\breve{y}''(x,s) - s^2\breve{y}(x,s) &= -\frac{F_o}{\rho}\cdot\frac{1}{s} \\ \breve{y}''(x,s) - \frac{1}{c^2}\breve{y}(x,s) &= -\frac{F_o}{c^2\rho}\cdot\frac{1}{s} \end{aligned}$$

Substituimos $k_1 = 1/c_2$ $k_2 = F_o/c^2\rho$:

$$\breve{y}''(x,s) - k_1 \cdot s^2\breve{y}(x,s) = -k_2 \cdot \frac{1}{s}$$

Usamos una notación más cómoda:

$$\breve{y}'' - k_1 \cdot s^2\breve{y} = -k_2 \cdot \frac{1}{s}$$

$\square$