COMPLEJOS

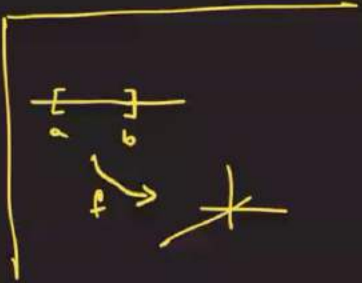
Rudik Rompich

June 2, 2021

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{x}{r^2} + i\left(-\frac{y}{r^2}\right) = \frac{x-iy}{r^2}$$

$$= \frac{\cancel{\bar{z}}}{z\cdot\cancel{\bar{z}}} = \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz}\log(z) = \frac{1}{z}.$$



Integración en $\mathbb{C}$

Def: Sea $h:[a,b]\longrightarrow \mathbb{C} \ni h(t) = u(t) + i\,v(t)$, y suponga que $u(t)$ y $v(t)$ son continuas.

Entonces:

$$\int_a^b h(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

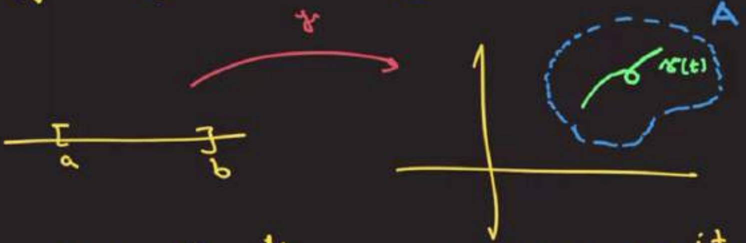
Def: una <u>curva</u> (trayectoria o contorno) en $\mathbb{C}$, es cualquier función $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ que es diferenciable en (a,b) y $\gamma'(t)$ continua en $[a,b]$.

Nota: $\gamma \left\langle \begin{array}{l} \text{diferenciable} \\ \gamma' \text{ continua} \end{array} \right. \Rightarrow \gamma$ es C^1 o γ es suave

Def: Suponga que f es continua y definida sobre un abierto de $A \subseteq \mathbb{C}$ y $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es una curva suave y que cumple $\gamma($

$\gamma([a,b]) \subset A$. La integral de f a lo largo de γ se define:

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$



Ej: 1) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$, si $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Nota: $\gamma(t) = z_0 + r[\cos t + i \operatorname{sen} t] \leftarrow$ círculo centrado en z_0 y radio r.

$\Rightarrow \gamma'(t) = rie^{it}$. Entonces:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{(\cancel{z_0}+re^{it})-\cancel{z_0}}}_{f(\gamma(t))} \cdot \underbrace{rie^{it}}_{\gamma'(t)}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cancel{r}ie^{\cancel{it}}}{\cancel{r}e^{\cancel{it}}}\, dt = \int_0^{2\pi} i = it\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i$$

Ej: Calcule $\int_\gamma \bar{z}$, donde γ es la recta que une 0 con $1+i$.

$$\Rightarrow \gamma(t) = \overbrace{(1+i)t}^{t+it}, \quad 0 \le t \le 1$$

$$\gamma'(t) = (1+i)$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \bar{z}\, dz = \int_0^1 \overline{(t+it)} \cdot (1+i)\, dt =$$

$$= \int_0^1 (t-it)(1+i)\, dt = \int_0^1 \underbrace{(1-i)(1+i)}_{1^2-(i)^2 = 1+1=2} t\, dt$$

$$= 2\int_0^1 t\, dt = t^2 \Big|_0^1 = 1$$

Teorema (Fundamental del cálculo para integral de línea).

Si $f(z)$ es analítica sobre una región $A \subseteq \mathbb{C}$ y γ es una curva suave sobre A y que une z_0 con z_1, entonces:

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(z_1) - f(z_0).$$

Nota: 1) Si f' tiene antiderivada $\Rightarrow$ la integral es independiente de la curva.

2) Si γ es una curva cerrada, entonces:

$$\oint_\gamma f' = 0$$

Ej: ① Calcule $\int_\gamma z^2$, donde γ es la recta que une 0 con $1+i$.

$$\Rightarrow \int_\gamma z^2 = \int_0^{1+i} z^2\,dz = \frac{z^2}{2}\Big|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \boxed{a+bi}$$

② Calcule $\int_\gamma e^{iz}$ donde $\gamma = ti$, $0 \le t \le 1$

$$\Rightarrow \int_\gamma e^{iz}\,dz = \frac{1}{i} e^{iz}\Big|_0^i = \frac{1}{i}\left[e^{i\cdot i} - e^0\right] =$$
$$= \frac{1}{i}\left(e^{-1} - 1\right)$$
$$= -i\left(e^{-1} - 1\right)$$
$$= \left(1 - e^{-1}\right) i$$

③ * Calcule $\int_\gamma \mathrm{Re}(z)\,dz$, donde γ une 0 con $1+2i$

$\int x\,dz$

$z = x + iy =$

$\mathrm{Re}(z) = x$

(i) $\gamma_1(t) = (1+2i)t$, $0 \le t \le 1$

$\gamma_1'(t) =$

② Calcule $\int_\gamma e^{iz}$ donde $\gamma = ti$, $0 \le t \le 1$

$$\Rightarrow \int_\gamma e^{iz}\, dz = \frac{1}{i} e^{iz} \Big|_0^i = \frac{1}{i}\left[e^{i \cdot i} - e^0\right] =$$

$$= \frac{1}{i}\left(e^{-1} - 1\right)$$

$$= -i\left(e^{-1} - 1\right)$$

$$= \left(1 - e^{-1}\right) i$$

③ * Calcule $\int_\gamma Re(z)\, dz$, donde γ une 0 con $1+2i$

$\int x\, dz$

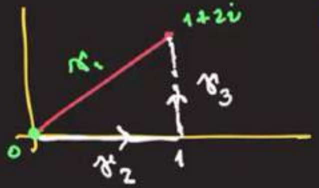
$z = x + iy =$

$Re(z) = x$

(i) $\gamma_1(t) = (1+2i)t$, $0 \le t \le 1$

$\gamma_1'(t) = 1 + 2i$

$$\Rightarrow \int_\gamma \mathrm{Re}(z)\,dz = \int_0^1 \mathrm{Re}\left[(1+2i)t\right](1+2i)\,dt = \frac{1}{2} + i$$



(ii)

$$\gamma(t) = \gamma_2(t) + \gamma_3(t)$$

$$\gamma_2(t) = t + 0i, \quad 0 \le t \le 1$$

$$\gamma_3(t) = 1 + it, \quad 0 \le t \le 2$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \mathrm{Re}(z) = \int_{\gamma_2+\gamma_3} \mathrm{Re}(z) = \int_{\gamma_2} \mathrm{Re}(z) + \int_{\gamma_3} \mathrm{Re}(z)$$

$$= \frac{1}{2} + 2i$$

$\Rightarrow \int_\gamma \mathrm{Re}(z)$ depende de la trayectoria.

Nota: Si $\gamma(t) = u(t) + i\,v(t)$, $a \leq t \leq b$, es una curva suave; entonces:

$$\ell(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$$

$$\Rightarrow \gamma'(t) = u'(t) + i\,v'(t) \Rightarrow |\gamma'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

$$\Rightarrow \quad \ell(\gamma) = \int_a^b \left[(x'(t))^2 + (y'(t))^2\right]^{1/2} dt$$

Teorema ($M\ell$): Sea f una función continua sobre la región $A \subseteq \mathbb{C}$ y γ una curva suave en A. Si existe $M \geq 0$, tal que, $|f(z)| \leq M$, para $\forall z \in \gamma$, entonces:

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \le M \cdot \ell(\gamma)$$

Ej: Estime el valor de $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz$, si γ es el semicírculo unitario superior recorrido en el sentido positivo.

Sol: $\gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le \pi$

$\gamma'(t) = -\operatorname{sen} t + i \cos t$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz = \int_0^\pi \frac{e^{\cos t + i \operatorname{sen} t}}{\cos t + i \operatorname{sen} t} \cdot (-\operatorname{sen} t + i \cos t)\, dt$$

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq M \cdot \ell(\gamma)$$

Ej: Estime el valor de $\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz$, si γ es el semicírculo unitario superior recorrido en el sentido positivo.

Sol: $\gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq \pi$

$\gamma'(t) = -\operatorname{sen} t + i \cos t$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz = \int_0^\pi \frac{e^{\cos t + i \operatorname{sen} t}}{\cos t + i \operatorname{sen} t} \cdot (-\operatorname{sen} t + i \cos t)\,dt$$

$\Rightarrow \ell(\gamma) = \pi$

$$\Rightarrow |f(z)| = \left|\frac{e^z}{z}\right| = \frac{\left|e^{\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t}\right|}{\underbrace{|\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t|}_{1}} =$$

$$= \left|e^{\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t}\right| = e^{\cos t} \leq e^1 = e$$

$$|e^{x+iy}| = e^x$$

$$\therefore \left|\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz\right| \leq e\pi$$

Teorema (de Cauchy) (versión intuitiva)

Si γ es una curva cerrada y simple, y si $f(z)$ es analítica sobre y en el interior de γ, entonces $\int_\gamma f = 0$.

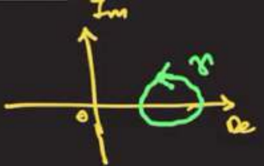
Ej.: 1) $\int_\gamma e^z \, dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{T.C.}}}{=} 0$, $\quad \gamma: \underbrace{|z| = 1}_{\text{círculo centrado en 0 y de radio 1}}$

2) $\int_\gamma e^{z^2} dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{T.C.}}}{=} 0$, $\quad \gamma$: en el círculo unitario

3) $\int_\gamma \frac{1}{z^2} \, dz = 0$, $\quad \gamma: |z| = 1$

↑ ← Teorema fundamental del cálculo.

(El teorema de Cauchy NO aplica)

4.- 

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{z^2}\,dz = 0$$

Teorema de Cauchy

5) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$

1) $\gamma : |z| = 1$ círculo unitario

2) $\gamma(t) = \underbrace{3 + e^{it}}$, $t \in [0, 2\pi]$.

círculo centrado en $z=3$ y de radio 1

5.1) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$; 5.2) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} \overset{T.C.}{=} 0$

Prop (Teorema de Deformación)

sin obstáculos

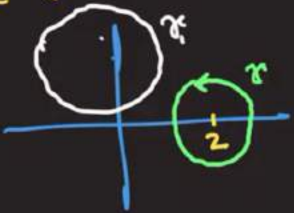
- Sea A una región entre dos curvas cerradas y simples γ_1 y γ_2, orientadas en el sentido positivo
- Si f es analítica en la región, entonces

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

Fórmula integral de Cauchy: Sea $f(z)$ una función analítica sobre y en el interior de la curva cerrada y simple γ, sobre una región $A \subseteq \mathbb{C}$.

Entonces, $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i \cdot f(a)$

Ej.: $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z-2}\,dz$, donde γ es la curva



$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z-2}\,dz = 2\pi i\, e^{(2)^2}$$

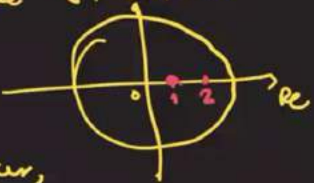
$$= 2\pi i\, e^{4}$$

Fórmula integral de Cauchy

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} \frac{e^{z^2}}{z-2}\,dz = 0$$

T.C.

2) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{sen}\pi z^2 + \cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}\,dz$, donde $\gamma: |z| = 3$



$\Rightarrow$ Fracciones: —

$\displaystyle\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$. Entonces,

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{sen}\pi z^2 + \cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}\,dz = -\int_\gamma \frac{\operatorname{sen}\pi z^2 + \cos\pi z^2}{z-1}\,dz + \int_\gamma \frac{\operatorname{sen}\pi z^2 + \cos\pi z^2}{z-2}\,dz$$

$$= -2\pi i\left[\cancelto{0}{\operatorname{sen}\pi} + \cancelto{-1}{\cos\pi}\right] + 2\pi i\left[\cancelto{0}{\operatorname{sen}4\pi} + \cancelto{1}{\cos 4\pi}\right]$$

$$= 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i$$

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{k!} f^{(k)}(a)$$

Teorema de Cauchy: $\int_\gamma f = 0$

Fórmula integral de Cauchy:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i f(a)$$

Fórmula integral de Cauchy para derivadas

Teorema: Sea f analítica sobre una región A. Entonces existen todas las derivadas de f sobre A. Además, para $z_0 \in A$ y γ una curva cerrada y simple tal que f es analítica sobre y en el interi entonces, $$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a)$$

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = f^{(n)}(a),$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Ej: calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{2z}}{z^4}\,dz$, donde $\gamma: |z| = 1$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{\overbrace{e^{2z}}^{\leftarrow f(z)}}{(z-0)^4}\,dz = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(0)$$

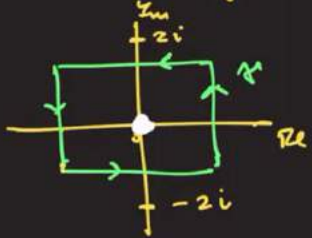
$$= \frac{2\pi i}{3!}\, 8\cancel{e^{2(0)}}^{\,1}$$

$$= \frac{16\pi i}{6} = \frac{8}{3}\pi i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(z) = e^{2z} \\ f'(z) = 2e^{2z} \\ f''(z) = 4e^{2z} \\ f'''(z) = 8e^{2z} \end{cases}$$

Ej: Sea $f(z)=\dfrac{\cos z}{z(z^2+8)}$, encuentre $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$.

donde γ es la curva



$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\,dz =$$

$$= \int_\gamma \frac{\overbrace{\left(\dfrac{\cos z}{z^2+8}\right)}^{f(z)}}{z-0}\,dz$$

$$= 2\pi i\, f(0) = 2\pi i\left(\frac{\cos 0}{0^2+8}\right) = \frac{2\pi i}{8} = \frac{\pi i}{4}$$

Ej: Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+4)^2}$, donde γ es

$$\frac{1}{(z^2+4)^2} = \frac{1}{[(z+2i)(z-2i)]^2} = \frac{1}{(z+2i)^2\,\underbrace{(z-2i)}^2}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{(z^2+4)^2}\,dz = \int_\gamma \frac{\overbrace{\dfrac{1}{(z+2i)^2}}^{f(z)}}{(z-2i)^2}\,dz$$

$$= \frac{2\pi i}{1!}\, f'(2i)$$

$$\Rightarrow \text{Si } f(z) = \frac{1}{(z+2i)^2} \Rightarrow f'(z) = \frac{-2}{(z+2i)^3}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{(z^2+4)^2}\,dz = 2\pi i\left[\frac{-2}{(2i+2i)^3}\right] = \frac{-4\pi i}{(4i)^3} =$$

$$= \frac{-4\pi i}{4^3(-i)} = \frac{\pi}{16}$$

Definição

TFC

TC

• f em analítica sobre e interior $\Rightarrow \int_\gamma f = 0$

✓ • $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i\, f(a)$

✓ •• $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}\, f^{(n)}(a)$

× $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq M\ell$