

Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2030 - Ecuaciones Diferenciales 2 - Catedrático: Dorval Carías
20 de mayo de 2021

Tarea 3

Utilice la transformada de Laplace para resolver el problema con valores en la frontera dado.

1. Problema 1.

Resuelva:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} - 2u$$

Con las condiciones:

$$t > 0, \quad x > 0, \quad u(x, 0) = 10e^{-x} - 6e^{-4x}$$

Solución. Aplicando la transformada de Laplace (en términos de $f(t)$), tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} - 2\mathcal{L}\{u\} \\ s\check{u}(x, s) - u(x, 0) &= \check{u}'(x, s) - 2\check{u}(x, s) \\ s\check{u}(x, s) - (10e^{-x} - 6e^{-4x}) &= \hat{u}'(x, s) - 2\check{u}(x, s)\end{aligned}$$

Usando una notación más cómoda, tenemos:

$$\begin{aligned}s\check{u} - (10e^{-x} - 6e^{-4x}) &= \check{u}' - 2\check{u} \\ -(10e^{-x} - 6e^{-4x}) &= \hat{u}' - 2\hat{u} - s\check{u}\end{aligned}$$

Que implica:

$$\hat{u}' - (2 + s)\hat{u} = 6e^{-4x} - 10e^{-x}$$

Identificamos que se trata de una ecuación de primer orden, con $P(x) = -(2+s)$. Entonces,

$$\mu = e^{\int P(x)dx} = e^{-\int (2+s)dx} = e^{-(2+s)x}$$

Por lo cual,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} [e^{-(2+s)x} \check{u}] &= (6e^{-4x} - 10e^{-x}) e^{-(2+s)x} \\
 \int d[e^{-(2+s)x} \check{u}] &= \int (6e^{-4x} - 10e^{-x}) e^{-(2+s)x} dx \\
 e^{-(2+s)x} \check{u} &= \int (6e^{-4x-(2+s)x} - 10e^{-x-(2+s)x}) dx \\
 e^{-(2+s)x} \check{u} &= \int (6e^{-x(6+s)} - 10e^{-x(3+s)}) dx \\
 e^{-(2+s)x} \check{u} &= -\frac{6e^{-x(6+s)}}{6+s} + \frac{10e^{-x(3+s)}}{3+s} \\
 \check{u} &= -\frac{6e^{-x(6+s)} e^{(2+s)x}}{6+s} + \frac{10e^{-x(3+s)} e^{(2+s)x}}{3+s} \\
 \check{u} &= -\frac{6e^{-x(6+s)+(2+s)x}}{6+s} + \frac{10e^{-x(3+s)+(2+s)x}}{3+s} \\
 \check{u} &= -\frac{6e^{-4x}}{6+s} + \frac{10e^{-x}}{3+s}
 \end{aligned}$$

La solución es:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} [u(x, s)] (t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{10e^{-x}}{3+s} - \frac{6e^{-4x}}{6+s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{10e^{-x}}{3+s} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{6e^{-4x}}{6+s} \right] = \\
 &= 10e^{-x} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s - (-3)} \right] - 6e^{-4x} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s - (-6)} \right] = 10e^{-x} e^{-3t} - 6e^{-4x} e^{-6t} = \\
 &= 10e^{-x-3t} - 6e^{-4x-6t} = 10e^{-(x+3t)} - 6e^{-2(2x+3t)}
 \end{aligned}$$

□

2. Problema 2.

Encuentre la solución acotada de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Con las condiciones: $x > 0, t > 0$, y tal que

$$u(0, t) = 1, \quad u(x, 0) = 0$$

Nota 1

Debido a que no hay ninguna cota en x , se impondrá una nueva condición (basado en los principios físicos que gobiernan la ecuación de calor):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0.$$

Solución. Aplicando la transformada de Laplace (en términos de $f(t)$), tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} \\ s\tilde{u}(x, s) - u(x, 0) &= \tilde{u}''(x, s)\end{aligned}$$

Aplicando $u(x, 0) = 0 \implies \tilde{u}(x, 0) = 0$:

$$s\tilde{u}(x, s) = \tilde{u}''(x, s)$$

Implica:

$$\tilde{u}''(x, s) - s\tilde{u}(x, s) = 0$$

Con una notación más cómoda:

$$\tilde{u}'' - s\tilde{u} = 0$$

Resolviendo la EDO:

$$\tilde{u}(x, s) = Ae^{(-\sqrt{s}x)} + Be^{(\sqrt{s}x)}$$

Por la **Nota 1**, sabemos $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{u}(x, s) = 0$. Por lo tanto, B debe ser 0:

$$\tilde{u}(x, s) = Ae^{(-\sqrt{s}x)}$$

Aplicando la condición $u(0, t) = 1 \implies \tilde{u}(0, s) = 1/s$:

$$\tilde{u}(0, s) = A = \frac{1}{s}$$

Entonces:

$$\tilde{u}(x, s) = \frac{1}{s}e^{(-\sqrt{s}x)}$$

La solución es:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \mathcal{L}^{-1}[u(x, s)](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}e^{(-\sqrt{s}x)}\right]\end{aligned}$$

□

3. Problema 3.

Resuelva:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0$$

Con las condiciones:

$$u(0, t) = 0, \quad u(3, t) = 0, \quad u(x, 0) = 10 \operatorname{sen} 2\pi x - 6 \operatorname{sen} 4\pi x$$

Solución. Aplicando la transformada de Laplace (en términos de $f(t)$), tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} &= 4 \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} \\ s\tilde{u}(x, s) - u(x, 0) &= 4\tilde{u}''(x, s) \end{aligned}$$

Aplicando una de las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} s\tilde{u}(x, s) - (10 \operatorname{sen} 2\pi x - 6 \operatorname{sen} 4\pi x) &= 4\tilde{u}''(x, s) \\ 4\tilde{u}''(x, s) - s\tilde{u}(x, s) &= 6 \operatorname{sen} 4\pi x - 10 \operatorname{sen} 2\pi x \\ \tilde{u}''(x, s) - \frac{s}{4}\tilde{u}(x, s) &= \frac{3}{2} \operatorname{sen} 4\pi x - \frac{5}{2} \operatorname{sen} 2\pi x \end{aligned}$$

Usando una notación más cómoda:

$$\tilde{u}'' - \frac{s}{4}\tilde{u} = \frac{3}{2} \operatorname{sen} 4\pi x - \frac{5}{2} \operatorname{sen} 2\pi x$$

Se propone tratar el problema por el método del caso homogéneo y caso particular:

$$\tilde{u}(x, s) = \tilde{u}_H(x, s) + \tilde{u}_P(x, s)$$

Caso homogéneo :

$$\tilde{u}'' - \frac{s}{4}\tilde{u} = 0$$

Haciendo una sustitución:

$$m^2 - \frac{s}{4} = 0 \implies m = \pm \sqrt{\frac{s}{4}}$$

La solución del caso homogéneo:

$$\tilde{u}(x, s) = A e^{+\sqrt{s/4}x} + B e^{-\sqrt{s/4}x}$$

Caso particular:

$$\tilde{u}'' - \frac{s}{4}\tilde{u} = \frac{3}{2} \operatorname{sen} 4\pi x - \frac{5}{2} \operatorname{sen} 2\pi x$$

Se propone tratar el problema por el método de coeficientes indeterminados, proponiendo:

$$\tilde{u}_P(x, s) = A \operatorname{sen} 4\pi x + B \cos 4\pi x + C \operatorname{sen} 2\pi x + D \cos 2\pi x$$

En donde,

$$\tilde{u}'_P(x, s) = 4\pi A \cos 4\pi x - 4\pi B \sin 4\pi x + 2\pi C \cos 2\pi x - 2\pi D \sin 2\pi x$$

$$\tilde{u}''_P(x, s) = -16\pi^2 A \sin 4\pi x - 16\pi^2 B \cos 4\pi x - 4\pi^2 C \sin 2\pi x - 4\pi^2 D \cos 2\pi x$$

Haciendo una sustitución en la expresión propuesta:

$$\begin{aligned} \tilde{u}'' - \frac{s}{4}\tilde{u} &= (-16\pi^2 A \sin 4\pi x - 16\pi^2 B \cos 4\pi x - 4\pi^2 C \sin 2\pi x - 4\pi^2 D \cos 2\pi x) - \\ &\quad - \frac{s}{4}(A \sin 4\pi x + B \cos 4\pi x + C \sin 2\pi x + D \cos 2\pi x) \\ &= -\left(16\pi + \frac{s}{4}\right) A \sin 4\pi x - \left(16\pi + \frac{s}{4}\right) B \cos 4\pi x - \\ &\quad - \left(4\pi + \frac{s}{4}\right) C \sin 2\pi x - \left(4\pi + \frac{s}{4}\right) D \cos 2\pi x \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} -\left(16\pi^2 + \frac{s}{4}\right) A \sin 4\pi x - \left(16\pi^2 + \frac{s}{4}\right) B \cos 4\pi x - \\ -\left(4\pi^2 + \frac{s}{4}\right) C \sin 2\pi x - \left(4\pi^2 + \frac{s}{4}\right) D \cos 2\pi x &= \frac{3}{2} \sin 4\pi x - \frac{5}{2} \sin 2\pi x \end{aligned}$$

Que es lo mismo que:

$$\begin{aligned} -\left(64\pi^2 + s\right) A \sin 4\pi x - \left(64\pi^2 + s\right) B \cos 4\pi x - \\ -\left(16\pi^2 + s\right) C \sin 2\pi x - \left(16\pi^2 + s\right) D \cos 2\pi x &= \frac{3}{2} \sin 4\pi x - \frac{5}{2} \sin 2\pi x \end{aligned}$$

Nos damos cuenta que podemos asumir: $B = 0 = D$, entonces:

$$-\left(64\pi^2 + s\right) A \sin 4\pi x - \left(16\pi^2 + s\right) C \sin 2\pi x = \frac{3}{2} \sin 4\pi x - \frac{5}{2} \sin 2\pi x$$

Es decir,

$$-\left(64\pi^2 + s\right) A = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad -\left(16\pi^2 + s\right) C = -\frac{5}{2}$$

Entonces:

$$A = -\frac{3}{2(64\pi^2 + s)} = -\frac{6}{64\pi^2 + s} \quad \text{y} \quad C = \frac{5}{2(16\pi^2 + s)} = \frac{10}{16\pi^2 + s}$$

Por lo tanto, la solución del caso particular es:

$$\tilde{u}_P(x, s) = -\left(\frac{6}{64\pi^2 + s}\right) \sin 4\pi x + \left(\frac{10}{16\pi^2 + s}\right) \sin 2\pi x$$

La solución general:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, s) &= \tilde{u}_H(x, s) + \tilde{u}_P(x, s) \\ &= Ae^{+\sqrt{s/4}x} + Be^{-\sqrt{s/4}x} + \left(\frac{10}{16\pi^2 + s}\right) \sin 2\pi x - \left(\frac{6}{64\pi^2 + s}\right) \sin 4\pi x \end{aligned}$$

Considerando las condiciones, $\tilde{u}(0, s) = 0$ y $\tilde{u}(3, s) = 0$, tenemos:

$$\tilde{u}(0, s) = A + B = 0 \implies B = -A$$

Es decir:

$$\tilde{u}(x, s) = C \cosh \sqrt{\frac{s}{4}} x + \left(\frac{10}{16\pi^2 + s} \right) \sen 2\pi x - \left(\frac{6}{64\pi^2 + s} \right) \sen 4\pi x$$

Aplicando la última condición:

$$\tilde{u}(3, s) = C \cosh \sqrt{\frac{s}{4}} \cdot 3 = 0 \implies C = 0$$

Por lo tanto, la solución general final es:

$$\tilde{u}(x, s) = \left(\frac{10}{16\pi^2 + s} \right) \sen 2\pi x - \left(\frac{6}{64\pi^2 + s} \right) \sen 4\pi x$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} [u(x, s)](t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\left(\frac{10}{16\pi^2 + s} \right) \sen 2\pi x - \left(\frac{6}{64\pi^2 + s} \right) \sen 4\pi x \right] = \\ &= 10\mathcal{L}^{-1} \left[\left(\frac{1}{s - (-16\pi^2)} \right) \right] \sen 2\pi x - 6\mathcal{L}^{-1} \left[\left(\frac{1}{s - (-64\pi^2)} \right) \right] \sen 4\pi x = \\ &= 10e^{-16\pi^2 t} \sen 2\pi x - 6e^{-64\pi^2 t} \sen 4\pi x \end{aligned}$$

□

4. Problema 4.

Resuelva:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{F_o}{\rho}$$

Con las condiciones: $0 < x < L, t > 0$, sujeta a

$$y(0, t) = y(L, t) = y(x, 0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$$

Solución. Aplicando la transformada de Laplace (en términos de $f(t)$), tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right\} &= c^2 \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} + \frac{F_o}{\rho} \mathcal{L} \{1\} \\ s^2 \tilde{y}(x, s) - sy(x, 0) - y'(x, 0) &= c^2 \tilde{y}''(x, s) + \frac{F_o}{\rho} \cdot \frac{1}{s} \\ s^2 \tilde{y}(x, s) &= c^2 \tilde{y}''(x, s) + \frac{F_o}{\rho} \cdot \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Implica:

$$\begin{aligned} c^2 \tilde{y}''(x, s) - s^2 \tilde{y}(x, s) &= -\frac{F_o}{\rho} \cdot \frac{1}{s} \\ \tilde{y}''(x, s) - \frac{1}{c^2} s^2 \tilde{y}(x, s) &= -\frac{F_o}{c^2 \rho} \cdot \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Substituimos $k_1 = 1/c^2$ $k_2 = F_o/c^2 \rho$:

$$\tilde{y}''(x, s) - k_1 \cdot s^2 \tilde{y}(x, s) = -k_2 \cdot \frac{1}{s}$$

Usamos una notación más cómoda:

$$\tilde{y}'' - k_1 \cdot s^2 \tilde{y} = -k_2 \cdot \frac{1}{s}$$

□