

Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2030 - Ecuaciones Diferenciales 2 - Catedrático: Dorval Carías
20 de mayo de 2021

Tarea 3

Utilice la transformada de Laplace para resolver el problema con valores en la frontera dado.

1. Problema 1.

Resuelva:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} - 2u$$

Con las condiciones:

$$t > 0, \quad x > 0, \quad u(x, 0) = 10e^{-x} - 6e^{-4x}$$

Solución. Aplicando la transformada de Laplace (en términos de $f(t)$), tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} - 2\mathcal{L}\{u\} \\ s\check{u}(x, s) - u(x, 0) &= \hat{u}'(x, s) - 2\hat{u}(x, s) \\ s\check{u}(x, s) - (10e^{-x} - 6e^{-4x}) &= \hat{u}'(x, s) - 2\hat{u}(x, s)\end{aligned}$$

Usando una notación más cómoda, tenemos:

$$\begin{aligned}s\check{u} - (10e^{-x} - 6e^{-4x}) &= \hat{u}' - 2\hat{u} \\ -(10e^{-x} - 6e^{-4x}) &= \hat{u}' - 2\hat{u} - s\check{u}\end{aligned}$$

Que implica:

$$\hat{u}' - (2 + s)\hat{u} = 6e^{-4x} - 10e^{-x}$$

□

2. Problema 2.

Encuentre la solución acotada de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Con las condiciones: $x > 0, t > 0$, y tal que

$$u(0, t) = 1, \quad u(x, 0) = 0$$

Nota 1

Debido a que no hay ninguna cota en x , se impondrá una nueva condición (basado en los principios físicos que gobiernan la ecuación de calor):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0.$$

Solución. Aplicando la transformada de Laplace (en términos de $f(t)$), tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} &= \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} \\ s\tilde{u}(x, s) - u(x, 0) &= \tilde{u}''(x, s) \end{aligned}$$

Aplicando $u(x, 0) = 0 \implies \tilde{u}(x, 0) = 0$:

$$s\tilde{u}(x, s) = \tilde{u}''(x, s)$$

Implica:

$$\tilde{u}''(x, s) - s\tilde{u}(x, s) = 0$$

Con una notación más cómoda:

$$\tilde{u}'' - s\tilde{u} = 0$$

Resolviendo la EDO:

$$\tilde{u}(x, s) = Ae^{(-\sqrt{s}x)} + Be^{(\sqrt{s}x)}$$

Por la **Nota 1**, sabemos $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{u}(x, s) = 0$. Por lo tanto, B debe ser 0:

$$\tilde{u}(x, s) = Ae^{(-\sqrt{s}x)}$$

Aplicando la condición $u(0, t) = 1 \implies \tilde{u}(0, s) = 1/s$:

$$\tilde{u}(0, s) = A = \frac{1}{s}$$

Entonces:

$$\check{u}(x, s) = \frac{1}{s} e^{(-\sqrt{s}x)}$$

La solución es:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} [u(x, s)](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} e^{(-\sqrt{s}x)} \right] \end{aligned}$$

□

3. Problema 3.

Resuelva:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0$$

Con las condiciones:

$$u(0, t) = 0, \quad u(3, t) = 0, \quad u(x, 0) = 10 \operatorname{sen} 2\pi x - 6 \operatorname{sen} 4\pi x$$

Solución. Aplicando la transformada de Laplace (en términos de $f(t)$), tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} &= 4 \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} \\ s\check{u}(x, s) - u(x, 0) &= 4\check{u}''(x, s) \end{aligned}$$

Aplicando una de las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} s\check{u}(x, s) - (10 \operatorname{sen} 2\pi x - 6 \operatorname{sen} 4\pi x) &= 4\check{u}''(x, s) \\ 4\check{u}''(x, s) - s\check{u}(x, s) &= 6 \operatorname{sen} 4\pi - 10 \operatorname{sen} 2\pi x \\ \check{u}''(x, s) - \frac{s}{4}\check{u}(x, s) &= \frac{3}{2} \operatorname{sen} 4\pi - \frac{5}{2} \operatorname{sen} 2\pi x \end{aligned}$$

Usando una notación más cómoda:

$$\check{u}'' - \frac{s}{4}\check{u} = \frac{3}{2} \operatorname{sen} 4\pi - \frac{5}{2} \operatorname{sen} 2\pi x$$

□

4. Problema 4.

Resuelva:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{F_o}{\rho}$$

Con las condiciones: $0 < x < L, t > 0$, sujeta a

$$y(0, t) = y(L, t) = y(x, 0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$$

Solución. Aplicando la transformada de Laplace (en términos de $f(t)$), tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right\} &= c^2 \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right\} + \frac{F_o}{\rho} \mathcal{L}\{1\} \\ s^2 \tilde{y}(x, s) - sy(x, 0) - y'(x, 0) &= c^2 \tilde{y}''(x, s) + \frac{F_o}{\rho} \cdot \frac{1}{s} \\ s^2 \tilde{y}(x, s) &= c^2 \tilde{y}''(x, s) + \frac{F_o}{\rho} \cdot \frac{1}{s}\end{aligned}$$

Implica:

$$\begin{aligned}c^2 \tilde{y}''(x, s) - s^2 \tilde{y}(x, s) &= -\frac{F_o}{\rho} \cdot \frac{1}{s} \\ \tilde{y}''(x, s) - \frac{1}{c^2} \tilde{y}(x, s) &= -\frac{F_o}{c^2 \rho} \cdot \frac{1}{s}\end{aligned}$$

Substituimos $k_1 = 1/c^2$ $k_2 = F_o/c^2 \rho$:

$$\tilde{y}''(x, s) - k_1 \cdot s^2 \tilde{y}(x, s) = -k_2 \cdot \frac{1}{s}$$

Usamos una notación más cómoda:

$$\tilde{y}'' - k_1 \cdot s^2 \tilde{y} = -k_2 \cdot \frac{1}{s}$$

□