Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2036 - Estadística Matemática - Catedrático: Paulo Mejía
23 de mayo de 2021

Parcial 4

Instrucciones: Resuelva los siguientes problema. Favor hacer la solución en latex y cargar el archivo latex y pdf en la tarea de Canvas. Para la resolución de los problemas, se utilizará el libro de Wackerly et al. (2014).

1. Problema 1

Sea $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza 1.

Definición 4.8 - Distribución Normal

A random variable Y is said to have a normal probability distribution if and only if, for $\sigma > 0$ and $-\infty < \mu < \infty$, the density function of Y is

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(y-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \qquad \infty < y < \infty$$

1. a) Demuestre que $\overline{Y}$ es un estimador suficiente para μ.

Solución. Comenzamos definiendo al estimador suficiente como:

Teorema 9.4 - Estimador suficiente

Let U be a statistic based on the random sample $Y_1, Y_2, ..., Y_n$. Then U is a sufficient statistic for the estimation of a parameter θ if and only if the likelihood $L(\theta) = L(y_1, y_2, ..., y_n|\theta)$ can be factored into two nonnegative functions,

$$L(y_1, y_2, ..., y_n|\theta) = g(u, \theta) \times h(y_1, y_2, ..., y_n)$$

where $g(u, \theta)$ is a function only of u and θ and $h(y_1, y_2, ..., y_n)$ is not a function of θ.

$$
\begin{aligned}
L(y_1, y_2, \cdots, y_n|\mu) &= L(y_1|\mu) \times L(y_2|\mu) \times \cdots \times L(y_n|\mu) \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(y_1-\mu)^2}{(2\sigma^2)}\right] \times \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(y_2-\mu)^2}{(2\sigma^2)}\right] \times \cdots \times \\
&\times \cdots \times \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(y_n-\mu)^2}{(2\sigma^2)}\right] \\
&= \frac{1}{\sigma^n\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sigma^n\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i^2-2y_i\mu+\mu^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sigma^n\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2\sum_{i=1}^{n}y_i\mu+\sum_{i=1}^{n}\mu^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sigma^n\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2n\overline{y}\mu+n\mu^2\right)\right]
\end{aligned}
$$

Se conocía que σ^2=1, por lo cual:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \times \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2n\overline{y}\mu+n\mu^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \times \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}y_i^2+\frac{1}{2}2n\overline{y}\mu-\frac{1}{2}n\mu^2\right] \\
&= \left\{\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \times \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right]\right\} \times \exp\left[n\overline{y}\mu-\frac{1}{2}n\mu^2\right] \\
&= h(y) \times g(\overline{y}, \mu)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\overline{y}$ es un estimador suficiente para μ. □

2. b) ¿Cuál es la distribución de $\overline{Y}$ con sus parámetros? (Incluya la justificación).

Solución. Considérese el teorema 4.7:

Teorema 4.7 - Distribución Normal

If Y is a normally distributed random variable with parameters μ and σ , then

$$E(Y) = \mu \qquad \text{y} \qquad V(Y) = \sigma^2.$$

□

3. c) Encuentre la función generadora de momentos de $\overline{Y}$ (Incluya la justificación).

4. d) Calcule $E\left(\overline{Y}^2\right)$ y $E\left(\overline{Y}^4\right)$, utilizando la función generadora de momentos del inciso de $\overline{Y}$.

5. e) Demuestre que el MUEV (estimador insesgado de varianza mínima) de μ^2 es $\widehat{\mu^2} = \overline{Y}^2 - \frac{1}{n}$.

   Solución. content... □

6. f) Obtenga la $VAR\left(\widehat{\mu^2}\right)$, utilizando el resultado en d).

   Solución. content... □

(Valor 25 puntos).

2. Problema 4

Sea Y una variable aleatoria que representa el número de éxitos en n intentos independientes con probabilidad p de éxito en cada intento. Además,

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

donde

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{si el i-ésimo intento resulta en éxito} \\ 0, & \text{en el otro caso} \end{cases}$$

para i = 1, . . . , n

1. a) Demuestre que $\widehat{p_n} = \frac{Y}{n}$ es un estimador insesgado de p.

   Solución. Tenemos las siguientes denificiones::

   Definición 8.2 - Sesgo

   Let $\hat{\theta}$ be a point estimator for a parameter θ. Then $\hat{\theta}$ is an unbiased estimator if $E(\hat{\theta}) = \theta$. If$E(\hat{\theta}) \neq \theta$, θ is said to be biased.

   Definición 8.3 - Sesgo

   The bias of a point estimator $\hat{\theta}$ is given by $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$.

   A probar: $E(\hat{p}_n) = p$. Entonces:

$$E(\hat{p}_n) = E\left(\frac{Y}{n}\right) = \underbrace{\frac{1}{n}E(Y)}_{\text{Teorema 5.7}} = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n}E\left(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\underbrace{E(Y_1) + E(Y_2) + \cdots + E(Y_n)}_{E(Y_i)=p,\text{ definición de valor esperado.}}\right] = \frac{1}{n}[p + p + \cdots + p] = \frac{1}{n}(np) = p$$

□

2. b) Demuestre que $\widehat{p_n}$ es un estimador consistente de p.

Solución. Procedemos a calcular la varianza del estimador, es decir:

$$VAR(\hat{p}_n) = \frac{pq}{n}, \quad q = (1-p). \quad \text{(Deducción en el ejercicio 5.28).}$$

$\implies$ Tomamos como referencia el teorema 9.1:

Teorema 9.1

An unbiased estimator $\hat{\theta}_n$ for θ is a consistent estimator of θ if

$$\lim_{n\to\infty} VAR(\hat{\theta}_n) = 0.$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} VAR(\hat{p}_n) = \lim_{n\to\infty} VAR\left(\frac{pq}{n}\right) = VAR\,(0) = 0.$$

□

3. c) Cuando n es grande, demuestre que la distribución de $\frac{\widehat{p_n}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$ converge a una distribución normal estándar.

Solución. Considerando el teorema del límite central:

Teorema 7.4

Let $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ be independent and identically distributed random variables with $E(Y_i) = \mu$ and $V(Y_i) = \sigma^2 < \infty$. Define

$$U_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\overline{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Then, the distribution function U_n converges to the standard normal distribution function as $n \to \infty$.

Dados los 2 incisos anteriores tenemos $E(Y_i) = p$ y $VAR(Y_i) = p(1-p)$. Por hipótesis, sabemos $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$. Definimos:

$$U_n = \frac{Y - np}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}} = \frac{\frac{Y-np}{n}}{\frac{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}}{n}} = \frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

Por lo tanto, la distribución converge a una distribución normal. □

4. d) Cuando n es grande, demuestre que la distribución de $\frac{\widehat{p_n}-p}{\sqrt{\widehat{p_n}(1-\widehat{p_n})/n}}$ converge a una distribución normal estándar.

Solución. Sabemos que $\hat{p}_n$ es consistente, por lo que $(1-\hat{p}_n)$ también debe ser consistente; por el inciso b del teorema 9.2, entonces $\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)$ es consiste para $p(1-p)$.

$$\implies \frac{U_n}{W_n} = \frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}}} = \frac{\frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}}{\frac{\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}} = \frac{\underbrace{\frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}}_{\text{Inciso anterior.}}}{\underbrace{\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{p(1-p)}}}_{\text{Su probabilidad converge a 1.}}}$$

Por lo tanto, U_n converge a una distribución normal y la probabilidad de W_n converge a 1. Considerando:

Teorema 9.3

Suppose that U_n has a distribution function that converges to a standard normal distribution function as $n \to \infty$. If W_n converges in probability to 1, then the distribution function of U_n/W_nconverges to a standard normal distribution function.

Se concluye que la distribución U_n/W_n converge a una distribución normal estándar.

$\square$

(Valor 25 puntos)

Referencias

Wackerly, D., Mendenhall, W., and Scheaffer, R. L. (2014). *Mathematical statistics with applications*. Cengage Learning.