Universidad del Valle de Guatemala
29 de enero de 2021
Rudik Roberto Rompich - Carné: 19857
Carlos Daniel Martínez - Carné: 19340

Estadística Matemática - Paulo Mejía

Proyecto 1

Instrucciones: Elabore un documento en latex con las siguientes soluciones y cargue los archivos tex y pdf en la tarea de Canvas.

Problema 1 [Teoream de Tchebysheff] Sea k ≥ 1. Demuestre que, para cualquier conjunto de n mediciones, la fracción incluida en el intervalo $\bar{y} - \mathrm{k} \cdot \mathrm{s}$ a $\bar{y} + \mathrm{k} \cdot \mathrm{s}$ es al menos $\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ [Sugerencia: $\mathrm{s}^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2\right]$. En esa expresión, sustituya con ks todas las desviaciones para las cuales $|y_i - \bar{y}| \geq \mathrm{k} \cdot \mathrm{s}$. Simplifique]. (Valor 4 puntos).

Demostración. Basándose en la demostración de Wackerly et al. (2014). Para una muestra de un tamaño n, supongamos que n' hace referencia al número de medidas que caen afuera del intervalo $\bar{y} \pm ks$, tal que $\frac{n-n'}{n}$ es la fracción que cae dentro del intervalo. Por otra parte, para mostrar que esta fracción es mayor o igual que $1 - \frac{1}{k^2}$, nótese que:

$$(n-1)s^2 = \sum_{i \in A}(y_i - \bar{y})^2 + \sum_{i \in b}(y_i - \bar{y})^2, \text{ (ambas sumas deben ser positivas)}$$

donde $A = \{i : |y_i - \bar{y}| \geq ks\}$ y $B = \{i : |y_i - \bar{y}| < ks\}$. Entonces, tenemos:

$$\sum_{i \in A}(y_i - \bar{y})^2 \geq \sum_{i \in A} k^2 s^2 = n' k^2 s^2,$$

como i está contenida en A, $|y_i - \bar{y}| \geq ks$ y existen n' elementos en A. Lo que quiere decir que tenemos $s^2 \geq \frac{k^2 s^2 n'}{(n-1)}$, o $1 \geq \frac{k^2 n'}{(n-1)} \geq \frac{k^2 n'}{n}$. Tal que, $\frac{1}{k^2} \geq n'/n$ o $\frac{(n-n')}{n} \geq 1 - \frac{1}{k^2}$ ■

Problema 2 [Media Potencial] Sea $\phi(\mathrm{t}) = \left[\frac{x_1^t + {x_2}^t + \ldots + x_n^t}{n}\right]^{1/t}$ con $x_i > 0$ para $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}$.

1. Calcular $\phi(-1)$ (Media armónica)

$$\begin{aligned}
\phi(-1) = & \left[\frac{x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ldots + x_n^{-1}}{n}\right]^{1/-1} \\
= & \left[\frac{x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ldots + x_n^{-1}}{n}\right]^{-1} \\
= & \left[\frac{n}{x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ldots + x_n^{-1}}\right]^{1} \\
= & \left[\frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}}\right] \\
= & \frac{n}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{x_i}}
\end{aligned}$$

2. Calcular $\phi(1)$ (Media aritmética)

$$\begin{aligned}
\phi(1) = & \left[\frac{x_1^1 + x_2^1 + \ldots + x_n^1}{n}\right]^{1/1} \\
= & \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \\
= & \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{x_i}}{n}
\end{aligned}$$

3. Calcular $\phi(2)$ (Media cuadrática)

$$\begin{aligned}
\phi(2) = & \left[\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}\right]^{1/2} \\
= & \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \\
= & \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}{n}}
\end{aligned}$$

4. Calcular $\lim_{t\to 0} \phi(\mathrm{t})$ (Media geométrica)

$$\begin{aligned}
\phi(\mathrm{t}) &= \left[\frac{x_1^t + {x_2}^t + \ldots + x_n^t}{n}\right]^{1/t} \\
\lim_{t\to 0} \phi(\mathrm{t}) &= \lim_{t\to 0} \left[\frac{x_1^t + {x_2}^t + \ldots + x_n^t}{n}\right]^{1/t} \\
\ln(\lim_{t\to 0} \phi(\mathrm{t})) &= \ln\left(\lim_{t\to 0} \left[\frac{x_1^t + {x_2}^t + \ldots + x_n^t}{n}\right]^{1/t}\right) \\
\lim_{t\to 0} \ln(\phi(\mathrm{t})) &= \lim_{t\to 0} \ln \left[\frac{x_1^t + {x_2}^t + \ldots + x_n^t}{n}\right]^{1/t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \ln \left[\frac{x_1^t + {x_2}^t + \ldots + x_n^t}{n}\right] \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\ln \left[\frac{x_1^t + {x_2}^t + \ldots + x_n^t}{n}\right]}{t}
\end{aligned}$$

Nótese que al evaluar a $\lim_{t\to 0}$ obtenemos una forma indeterminada $\frac{0}{0}$.
Aplicamos l'Hôpital.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \ln(\phi(\mathrm{t})) &= \lim_{t\to 0} \frac{n}{x_1^t + {x_2}^t + \ldots + x_n^t} \cdot \frac{1}{n}\left(x_1^t \ln x_1 + x_2^t \ln x_2 + \ldots + x_n^t \ln x_n\right) \\
&= \frac{n}{x_1^0 + x_2^0 + \ldots + x_n^0} \cdot \frac{1}{n}\left(x_1^0 \ln x_1 + x_2^0 \ln x_2 + \ldots + x_n^0 \ln x_n\right) \\
&= \frac{n}{\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ veces}}} \cdot \frac{1}{n}\left(1 \cdot \ln x_1 + 1 \cdot \ln x_2 + \ldots + 1 \cdot \ln x_n\right) \\
&= \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n}\left(\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n\right) \\
&= \frac{1}{n} \ln\left(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n\right) \\
&= \ln\left(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n\right)^{\frac{1}{n}} \\
e^{\lim\limits_{t\to 0} \ln(\phi(\mathrm{t}))} &= e^{\ln\left(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n\right)^{\frac{1}{n}}} \\
\therefore \lim_{t\to 0} \phi(\mathrm{t}) &= \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}
\end{aligned}$$

5. Demuestre que ϕ es una función monótona
   [Sugerencia: Utilizar la desigualdad de Jensen]

   Para la función $\phi(\mathrm{t}) = \left[\frac{x_1^t + {x_2}^t + \ldots + x_n^t}{n}\right]^{1/t}$ se propone la siguiente notación:

$$\phi(t) = \left[\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} x_n^t\right]^{1/t}$$

Basándonos en la demostración general realizada por Giorgi (2014), usando la desigualdad de Jensen y estipulando el siguiente teorema: Sean $(p_1, ..., p_n)$ el vector asociado al peso tal que $p_k \in [0,1]$ (en donde p_i se tomó en el caso particular de $\frac{1}{n}$) y $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ para $-\infty < t_1 < t_2 < \infty$ se tiene que que:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i^{t_1}\right]^{1/t_1} \leq \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i^{t_2}\right]^{1/t_2}$$

La igualdad ocurre si y solo si $x_1 = ... = x_n$

Demostración. Para obtener $0 < t_1 < t_2$, por la desigualdad de Jensen para la función $x \to x^p$ con $p > 1$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i\right)^p \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i^p$$

Con esta desigualdad y las sustituciones $x_n = x_n^{t_1}, p = \frac{t_2}{t_1} > 1$ se tiene que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i\right)^{\frac{t_2}{t_1}} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i^{\frac{t_2}{t_1}}$$

Así consideramos la t_2-ésima raiz da la desiqualdad deseada en este caso. Por otra parte, la convexidad estricta de $x \to x^p$ para $p > 1$ asegura que la igualdad se cumple si sólo sí $x_1 = \ldots = x_n$

Para $t_1 < t_2 < 0$, tenemos $0 < t_2 < -t_1$, a continuación se tiene

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(x_i^{-1}\right)^{-t_2}\right)^{\frac{-1}{t_2}} &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(x_i^{-1}\right)^{-t_1}\right)^{\frac{-1}{t_1}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i^{t_1}\right)^{\frac{1}{t_1}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i^{t_2}\right)^{\frac{1}{t_2}}
\end{aligned}$$

Para $t_1 < 0 < t_2, y$ como $-t_1 > 0$ entonces

$$M_0 = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(x_i^{-1}\right)^{-t_1}\right)^{\frac{-1}{t_1}} \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i^{t_1}\right)^{\frac{1}{t_1}} \leq \prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}}$$

Como $t_2 > 0$, para el resto de los casos $0 = t_1 < t_2$, y $t_1 < t_2 = 0$, han sido cubiertos por la misma desigualdad por tanto tenemos

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i^{t_1}\right)^{\frac{1}{t_1}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i^{t_2}\right)^{\frac{1}{t_2}}$$

■

$\therefore \phi$ es una función monótona creciente.

Referencias

Giorgi, B. G. D. (2014). Desigualdades del tipo hermite-hadamard y estimaciones de la fórmula trapezoidal para funciones convexas.

Wackerly, D., Mendenhall, W., and Scheaffer, R. L. (2014). *Mathematical statistics with applications*. Cengage Learning.