Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2036 - Estadística Matemática - Catedrático: Paulo Mejía
23 de mayo de 2021

Parcial 4

Instrucciones: Resuelva los siguientes problema. Favor hacer la solución en latex y cargar el archivo latex y pdf en la tarea de Canvas. Para la resolución de los problemas, se utilizará el libro de Wackerly et al. (2014).

1. Problema 1

Sea $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza 1.

1. a) Demuestre que $\overline{Y}$ es un estimador suficiente para μ.

   Solución. content... □

2. b) ¿Cuál es la distribución de $\overline{Y}$ con sus parámetros? (Incluya la justificación).
3. c) Encuentre la función generadora de momentos de $\overline{Y}$ (Incluya la justificación).
4. d) Calcule $E\left(\overline{Y}^2\right)$ y $E\left(\overline{Y}^4\right)$, utilizando la función generadora de momentos del inciso de $\boldsymbol{\overline{Y}}$
5. e) Demuestre que el MUEV (estimador insesgado de varianza mínima) de μ^2 es $\widehat{\mu^2} = \overline{Y}^2 - \frac{1}{n}$
6. f) Obtenga la $VAR\left(\widehat{\mu^2}\right)$, utilizando el resultado en d). (Valor 25 puntos).

2. Problema 2

Los estimadores de máxima verosimilitud tienen propiedades interesantes cuando se trabaja con muestras grandes. Suponga que $t(\theta)$ es una función derivable en θ. Por la propiedad de invarianza, se tiene que si $\hat{\theta}$ es el MLE de θ, entonces el MLE de $t(\theta)$ está dada por

$t(\hat{\theta})$. En algunas condiciones de regularidad que se cumplen para las distribuciones que se consideren, $t(\hat{\theta})$ es un estimador consistente para $t(\theta)$. Además, para tamaño de muestras grandes,

$$Z = \frac{t(\hat{\theta}) - t(\theta)}{\sqrt{\left[\frac{\partial t(\theta)}{\partial \theta}\right]^2 \Big/ nE\left[-\frac{\partial^2 \ln[f(Y|\theta)]}{\partial \theta^2}\right]}}$$

tiene aproximandamente una distribución normal estándar, donde $f(Y \mid \theta)$ es la función densidad correspondiente a la distribución continua de interés, evaluada en el valor aleatorio Y. En el caso discreto, el resultado análogo se cumple con la función de probabilidad evaluada en el valor aleatorio Y, $p(Y \mid \theta)$, se sustituye por la densidad $f(Y \mid \theta)$.

Nota 1

Under the following conditions

Table 8.1 Expected values and standard errors of some common point estimators

Target Parameter θ	Sample Size(s)	Point Estimator $\hat{\theta}$	$E(\hat{\theta})$	Standard Error $\sigma_{\hat{\theta}}$
μ	n	$\overline{Y}$	μ	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
p	n	$\hat{p} = \frac{Y}{n}$	p	$\sqrt{\frac{pq}{n}}$
$\mu_1 - \mu_2$	n_1 and n_2	$\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2$	$\mu_1 - \mu_2$	$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}^{*\dagger}$
$p_1 - p_2$	n_1 and n_2	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	$p_1 - p_2$	$\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}^{\dagger}$

*σ_1^2 and σ_2^2 are the variances of populations 1 and 2, respectively.

†The two samples are assumed to be independent.

If the target parameter θ is $\mu, p, \mu_1 - \mu_2$, or $p_1 - p_2$, then for large samples,

$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma_{\hat{\theta}}}$$

possesses approximately a standard normal distribution. Consequently, $Z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma_{\hat{\theta}}}$ forms (at least approximately) a pivotal quantity, and the pivotal method can be employed to develop confidence intervals for the target parameter θ.

For interval confidence the key formula is:

$$\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}}.$$

When $\theta = \mu$ is the target parameter, then $\hat{\theta} = \overline{Y}$ and $\sigma_{\hat{\theta}}^2 = \sigma^2/n$.

Nota 2

Por las condiciones de la nota 1, entonces, el intervalo buscado para Z es:

$$t(\hat{\theta}) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\left[\frac{\partial t(\theta)}{\partial \theta}\right]^2 \Big/ nE\left[-\frac{\partial^2 \ln[f(Y \mid \theta)]}{\partial \theta^2}\right]} \approx$$

$$\approx t(\hat{\theta}) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\left[\frac{\partial t(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}}\right]^2 \Big/ nE\left[-\frac{\partial^2 \ln[f(Y \mid \hat{\theta})]}{\partial \hat{\theta}^2}\right]}$$

En el caso particular, para una variable aleatoria con distribución de Bernoulli, $p(y \mid p) = p^y(1-p)^{1-y}$, donde y $= 0, 1$. Si $Y_1, \ldots, Y_n$ es una muestra aleatoria de tamaño n de dicha distribución.

1. a) Encuentre el MLE para el parámetro p.

   Solución. Comenzamos definiendo el MLE, como:

   Method of Maximum Likehood

   Suppose that the likelihood function depends on k parameters $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k$. Choose as estimates those values of the parameters that maximize the likelihood $L(y_1, y_2, ..., y_n|\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$.

   $\implies$ Usando la definición de verosimilitud:

$$\begin{aligned}
p(y|p) &= L(y_1, y_2, \cdots, y_n|p) = p^y(1-p)^{1-y}, \qquad \left(y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \\
\ln\left[p(y|p)\right] &= \ln\left[p^y(1-p)^{1-y}\right] = \ln\left[p^y\right] + \ln\left[(1-p)^{1-y}\right] \\
&= y\ln\left[p\right] + (1-y)\ln\left[(1-p)\right] \\
\frac{\partial \ln\left[p(y|p)\right]}{\partial p} &= \frac{y}{p} + \frac{(1-y)}{(1-p)}(-1) = \frac{y}{p} - \frac{(1-y)}{(1-p)} \qquad (*) \\
\frac{\partial^2 \ln\left[p(y|p)\right]}{\partial p^2} &= -\frac{y}{p^2} - \frac{(1-y)}{(1-p)^2} \qquad (**) \text{ Nos ayudará en el inciso 3. c)}
\end{aligned}$$

   Igualando $(*)$ a 0:

$$\frac{y}{\hat{p}} - \frac{(1-y)}{(1-\hat{p})} = 0 \implies \hat{p} = y.$$

   □

2. b) Encuentre el MLE para la expresión p(1-p).

   Solución. Bajo los supuestos usuales, el MLE de $t(p) = p(1-p)$ es $t(\hat{p}) = \hat{p}(1-\hat{p})$. En donde:

$$\begin{aligned}
t(p) &= p(1-p) = p - p^2 \\
\frac{dt(p)}{dp} &= 1 - 2p
\end{aligned}$$

Igualando a 0:

$$1 - 2\hat{p} = 0 \implies \hat{p} = \frac{1}{2}.$$

$\square$

3. c) Construya un intervalo de confianza de $100(1-\alpha)\,\%$ para p(1 − p), la varianza de dicha distribución (suponga una muestra grande).

Solución. Ahora, tómese como referencia la **Nota 2**. Aún nos falta calcular:

$$E\left[-\frac{\partial^2 \ln[f(Y \mid \hat{\theta})]}{\partial \hat{\theta}^2}\right] = E\left[-\frac{\partial^2 \ln[p(y \mid \hat{p})]}{\partial \hat{p}^2}\right] = \underbrace{E\left[-\left(-\frac{y}{p^2} - \frac{(1-y)}{(1-p)^2}\right)\right]}_{(**)\text{ del inciso 1 a)}} =$$

Sabemos que $\hat{p} = y$, entonces:

$$= \left(\frac{p}{p^2} + \frac{(1-p)}{(1-p)^2}\right) = \frac{1}{p(1-p)}.$$

Entonces, el intervalo de confianza para $p(1-p)$, como se estableció en la **Nota 2**, se define:

$$t(\hat{p}) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\left[\frac{\partial t(\hat{p})}{\partial \hat{p}}\right]^2 \Big/ nE\left[-\frac{\partial^2 \ln[f(Y \mid \hat{p})]}{\partial \hat{p}^2}\right]} =$$

$$= \hat{p}(1-\hat{p}) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{[1-2p]^2 \Big/ n\left(\frac{1}{p(1-p)}\right)} =$$

$$= \hat{p}(1-\hat{p}) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})(1-2\hat{p})^2}{n}}.$$

$\square$

(Valor 25 puntos).

3. Problema 3

Suponga que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ es una muestra aleatoria de la distribución de Poisson con media $\lambda > 0$.

1. a) Encuentre el estimador del método de momentos para λ.

Solución. Comenzamos definiendo el estimador del método de momentos como:

Method of moments

Choose as estimates those values of the parameters that are solutions of the equations $\mu'_k = m'_k$, for $k = 1,2,...,t$, where t is the number of parameters to be estimated.

$$\mu'_k = E(Y^k) \quad \text{and } m'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^k.$$

Sabemos por hipótesis que $\mu{=}\lambda$. $\implies$ El estimador del método de momentos está definido como:

$$\hat{\lambda} = m_1' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^1 = \overline{Y}.$$

□

2. b) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud (MLE) $\hat{\lambda}$ para λ.

Solución. Comenzamos definiendo el MLE, como:

Method of Maximum Likehood

Suppose that the likelihood function depends on k parameters $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k$. Choose as estimates those values of the parameters that maximize the likelihood $L(y_1, y_2, ..., y_n|\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$.

Función de probabilidad de Poisson

Apéndice 2 - Distribuciones discretas, se define como:

$$p(y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}, \quad y = 1, 2, 3, ...$$

$\implies$ Usando la definición de verosimilitud:

$$\begin{aligned}
L(\lambda) &= p(y_1, y_2, \cdots, y_n|\lambda) \\
&= p(y_1|\lambda) \times p(y_2|\lambda) \times \cdots \times p(y_n|\lambda) \\
&= \left\{\frac{\lambda^{y_1} e^{-\lambda}}{y_1!}\right\} \times \left\{\frac{\lambda^{y_2} e^{-\lambda}}{y_2!}\right\} \times \cdots \times \left\{\frac{\lambda^{y} e^{-\lambda}}{y!}\right\} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{y_i} e^{-\lambda}}{y_i!} = \frac{\left(\prod_{i=1}^n \lambda^{y_i}\right)\left(\prod_{i=1}^n e^{-\lambda}\right)}{\prod_{i=1}^n y_i!} = \frac{\left(\lambda^{\sum_{i=1}^n y_i}\right)\left(ne^{-\lambda}\right)}{\prod_{i=1}^n y_i!} \\
\ln\left[L(\lambda)\right] &= \ln\left[\frac{\left(\lambda^{\sum_{i=1}^n y_i}\right)\left(ne^{-\lambda}\right)}{\prod_{i=1}^n y_i!}\right] = \ln\left[\left(\lambda^{\sum_{i=1}^n y_i}\right)\left(ne^{-\lambda}\right)\right] - \ln\left[\prod_{i=1}^{n} y_i!\right] \\
&= \ln\left[\left(\lambda^{\sum_{i=1}^n y_i}\right)\right] + \ln\left[\left(ne^{-\lambda}\right)\right] - \ln\left[\prod_{i=1}^{n} y_i!\right] \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right]\left[\ln(\lambda)\right] - \lambda n - \ln\left[\prod_{i=1}^{n} y_i!\right] \\
\frac{d\ln\left[L(\lambda)\right]}{d\lambda} &= \frac{1}{\lambda}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right] - n - 0
\end{aligned}$$

Igualamos a 0 la expresión:

$$\frac{1}{\hat{\lambda}}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right] - n = 0 \implies \hat{\lambda} = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right] = \overline{Y}$$

□

(Valor 25 puntos).

4. Problema 4

Sea Y una variable aleatoria que representa el número de éxitos en n intentos independientes con probabilidad p de éxito en cada intento. Además,

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

donde

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{si el i-ésimo intento resulta en éxito} \\ 0, & \text{en el otro caso} \end{cases}$$

para i = $1, \ldots,$ n

1. a) Demuestre que $\widehat{p_n} = \frac{Y}{n}$ es un estimador insesgado de p.

Solución. Tenemos las siguientes denificiones::

Definición 8.2 - Sesgo

Let $\hat{\theta}$ be a point estimator for a parameter θ. Then $\hat{\theta}$ is an unbiased estimator if $E(\hat{\theta}) = \theta$. If$E(\hat{\theta}) \neq \theta$, θ is said to be biased.

Definición 8.3 - Sesgo

The bias of a point estimator $\hat{\theta}$ is given by $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$.

A probar: $E(\hat{p}_n) = p$. Entonces:

$$E(\hat{p}_n) = E\left(\frac{Y}{n}\right) = \underbrace{\frac{1}{n}E(Y)}_{\text{Teorema 5.7}} = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n}E\left(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\underbrace{E(Y_1) + E(Y_2) + \cdots + E(Y_n)}_{E(Y_i)=p,\text{ definición de valor esperado.}}\right] = \frac{1}{n}[p + p + \cdots + p] = \frac{1}{n}(np) = p$$

□

2. b) Demuestre que $\widehat{p_n}$ es un estimador consistente de p.

Solución. Procedemos a calcular la varianza del estimador, es decir:

$$VAR(\hat{p}_n) = \frac{pq}{n}, \quad q = (1-p). \quad \text{(Deducción en el ejercicio 5.28).}$$

$\implies$ Tomamos como referencia el teorema 9.1:

Teorema 9.1

An unbiased estimator $\hat{\theta}_n$ for θ is a consistent estimator of θ if

$$\lim_{n\to\infty} VAR(\hat{\theta}_n) = 0.$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} VAR(\hat{p}_n) = \lim_{n\to\infty} VAR\left(\frac{pq}{n}\right) = VAR(0) = 0.$$

□

3. c) Cuando n es grande, demuestre que la distribución de $\frac{\widehat{p_n}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$ converge a una distribución normal estándar.

Solución. Considerando el teorema del límite central:

Teorema 7.4

Let $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ be independent and identically distributed random variables with $E(Y_i) = \mu$ and $V(Y_i) = \sigma^2 < \infty$. Define

$$U_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\overline{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Then, the distribution function U_n converges to the standard normal distribution function as $n \to \infty$.

Dados los 2 incisos anteriores tenemos $E(Y_i) = p$ y $VAR(Y_i) = p(1-p)$. Por hipótesis, sabemos $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$. Definimos:

$$U_n = \frac{Y - np}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}} = \frac{\frac{Y-np}{n}}{\frac{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}}{n}} = \frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

Por lo tanto, la distribución converge a una distribución normal. □

4. d) Cuando n es grande, demuestre que la distribución de $\frac{\widehat{p_n}-p}{\sqrt{\widehat{p_n}(1-\widehat{p_n})/n}}$ converge a una distribución normal estándar.

Solución. Sabemos que $\hat{p}_n$ es consistente, por lo que $(1-\hat{p}_n)$ también debe ser consistente; por el inciso b del teorema 9.2, entonces $\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)$ es consiste para

$p(1-p)$.

$$\implies \frac{U_n}{W_n} = \frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}}} = \frac{\frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}}{\frac{\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}} = \frac{\underbrace{\frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}}_{\text{Inciso anterior.}}}{\underbrace{\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{p(1-p)}}}_{\text{Su probabilidad converge a 1.}}}$$

Por lo tanto, U_n converge a una distribución normal y la probabilidad de W_n converge a 1. Considerando:

Teorema 9.3

Suppose that U_n has a distribution function that converges to a standard normal distribution function as $n \to \infty$. If W_n converges in probability to 1, then the distribution function of U_n/W_nconverges to a standard normal distribution function.

Se concluye que la distribución U_n/W_n converge a una distribución normal estándar.

$\square$

(Valor 25 puntos)

Referencias

Wackerly, D., Mendenhall, W., and Scheaffer, R. L. (2014). *Mathematical statistics with applications*. Cengage Learning.