Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiantes: Rudik Roberto Rompich, Carlos Martínez
E-maila: rom19857@uvg.edu.gt, mar19340@uvg.edu.gt
Carnés: 19857, 19340

MM2036 - Estadística Matemática - Catedrático: Paulo Mejía
18 de abril de 2021

Proyecto 4

1. Problema 1

La función de densidad normal bivariante es:

$$f(y_1, y_2) = \frac{e^{-Q/2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

donde $Q = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(y_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(y_1-\mu_1)(y_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$
Demuestre que $Cov(Y_1, Y_2) = \rho\sigma_1\sigma_2$

Demostración. La demostración tomará como referencia el libro de Roussas (2003). Se propone:

$$\begin{aligned}
Q = & \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{y_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{y_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right] \\
= & \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{y_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{y_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{y_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \rho^2\left(\frac{y_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right] \\
= & \frac{1}{1-\rho^2}\left[-2\rho\left(\frac{y_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\rho\frac{y_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{y_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right] \\
= & \left[\frac{y_2-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{y_1-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{y_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2.
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\frac{y_2-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{y_1-\mu_1}{\sigma_1} = & \frac{y_2-\mu_2}{\sigma_2} - \frac{(\rho\sigma_2)}{\sigma_2}\frac{y_1-\mu_1}{\sigma_1} \\
= & \frac{1}{\sigma_2}\left[y_2 - \left(\mu_2 + \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(y_1-\mu_1)\right)\right]
\end{aligned}$$

Ahora hagamos $B_{y_1} = \mu_2 + \dfrac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(y_1 - \mu_1) \Rightarrow \dfrac{y_2 - \mu_2}{\sigma_2} - \rho\dfrac{y_1 - \mu_1}{\sigma_1} = \dfrac{y_2 - B_{y_1}}{\sigma_2}$. Entonces, $\left[\dfrac{y_2 - \mu_2}{\sigma_2} - \rho\dfrac{y_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right]^2 + (1-\rho^2)\left(\dfrac{y_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 = \left[\dfrac{y_2 - B_{y_1}}{\sigma_2}\right]^2 + (1-\rho^2)\left(\dfrac{y_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2$.

Finalmente, vemos que $-Q/2 = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\rho^2}\left[\left[\dfrac{y_2 - B_{y_1}}{\sigma_2}\right]^2 + (1-\rho^2)\left(\dfrac{y_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right] = -\dfrac{(y_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \dfrac{(y_2 - B_{y_1})^2}{2(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})^2}$.

Luego,

$$
\begin{aligned}
f(y_1, y_2) = & \frac{e^{-Q/2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\
= & \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\left(-\frac{(y_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)} \cdot e^{\left(-\frac{(y_2 - B_{y_1})^2}{2(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})^2}\right)} \\
= & \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{\left(-\frac{(y_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})} e^{\left(-\frac{(y_2 - B_{y_1})^2}{2(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})^2}\right)}
\end{aligned}
$$

Nótese que por definición 4.8, Y_1 tiene una distribución normal de probabilidad $f(y_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{\left(-\frac{(y_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)}$ y de igual forma $f(y_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})} e^{\left(-\frac{(y_2 - B_{y_1})^2}{2(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})^2}\right)}$ donde los parámetros de $f(y_1)$ son media μ_1 y la desviación estándar es σ_1, luego para $f(y_2)$ la media es B_{y_1} y la desviación estándar es $\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$

Procedemos a calcular

$$
\begin{aligned}
E(Y_1Y_2) = & \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y_1 y_2 f(y_1, y_2) dy_2 dy_1 \\
= & \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y_1 f(y_1) \cdot y_2 f(y_1|y_2) dy_2 dy_1 \qquad (1) \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} y_1 f(y_1) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y_2 f(y_1|y_2) dy_2\right] dy_1 \qquad (y_1 f(y_1) \text{ depende sólo de } y_1) \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} y_1 f(y_1) B_{y_1} dy_1 \qquad (2) \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} y_1 f(y_1) \left[\mu_2 + \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(y_1 - \mu_1)\right] dy_1
\end{aligned}
$$

Razones:

(1) ya que $f(y_2|y_1) = \dfrac{f(y_1, y_2)}{f(y_1)} \Rightarrow f(y_1 y_2) = f(y_1)\cdot f(y_2|y_1)$ (Definición 5.7)

(2) Nuevamente $f(y_2|y_1) = \dfrac{f(y_1, y_2)}{f(y_1)}$, pero sabemos que

$$f(y_1,y_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{\left(-\frac{(y_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})}e^{\left(-\frac{(y_2-B_{y_1})^2}{2(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})^2}\right)}=f(y_1)\cdot f(y_2)$$

$\Rightarrow f(y_2|y_1)=\dfrac{f(y_1)\cdot f(y_2)}{f(y_1)}=f(y_2)$. Ahora bien, la expresión $\int_{-\infty}^{\infty}y_2 f(y_1|y_2)dy_2=\int_{-\infty}^{\infty}y_2 f(y_2)dy_2=\mu_2$, pero como Y_2 tiene una distribución normal de probabilidad, donde hemos visto que la media es $E(Y_2)=\int_{-\infty}^{\infty}y_2 f(y_2)dy_2=B_{y_1}$.

Continuando con la integral, sustituyendo B_{y_1}

$$\int_{-\infty}^{\infty}y_1 f(y_1)\left[\mu_2+\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(y_1-\mu_1)\right]dy_1=\int_{-\infty}^{\infty}y_1 f(y_1)\mu_2+\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}\cdot[y_1 f(y_1)]\cdot(y_1-\mu_1)dy_1$$

Resolviendo para el primer término de la integral

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}y_1 f(y_1)\mu_2 dy_1 &= \mu_2\int_{-\infty}^{\infty}y_1 f(y_1)dy_1\\ &= \mu_2 E(Y_1)\\ &= \mu_2\mu_1\\ &= \mu_1\mu_2\end{aligned}$$

Resolviendo para el segundo término de la integral

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}\cdot[y_1 f(y_1)]\cdot(y_1-\mu_1)dy_1 &= \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}\left[\int_{-\infty}^{\infty}y_1^2 f(y_1)-y_1 f(y_1)\mu_1 dy_1\right]\\ &= \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}\left[\int_{-\infty}^{\infty}y_1^2 f(y_1)dy_1-\mu_1\int_{-\infty}^{\infty}y_1 f(y_1)dy_1\right]\\ &= \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}\left[E(Y_1^2)-\mu_1 E(y_1)\right] && \text{(por definición de } E(Y_1))\\ &= \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}\left[E(Y_1^2)-[E(y_1)]^2\right] && (\mu_1=E(Y_1))\\ &= \frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}\cdot[\sigma_1^2] && \text{por teorema de varianza}\\ &= \rho\sigma_2\sigma_1\end{aligned}$$

$\Rightarrow E(Y_1,Y_2)=\mu_1\mu_2+\rho\sigma_2\sigma_1$. Y como $Cov(Y_1,Y_2)=E(Y_1Y_2)-E(Y_1)E(Y_2)=\mu_1\mu_2+\rho\sigma_2\sigma_1-\mu_1\mu_2=\rho\sigma_2\sigma_1$

$$\therefore Cov(Y_1,Y_2)=\rho\sigma_2\sigma_1$$

□

2. Problema 2

Sean $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ variables aleatorias independientes con $E(Y_i)=\mu$ y $V(Y_i)=\sigma^2$ para $i=1,2,\dots,n$. Sean $U_1=\sum_{i=1}^{n}a_iY_i$ y $U_2=\sum_{b_i}Y_i$, donde $a_1,a_2,\dots,a_n$ y $b_1,b_2,\dots,b_n$ son constantes. Se dice que U_1 y U_2 son ortogonales si $Cov(U_1,U_2)=0$

a) Demuestre que U_1 y U_2 son son ortogonales si y sólo si $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=0$

Demostración.

$$Cov(U_1, U_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j Cov(Y_i, Y_j) \quad \text{(por teorema 5.12, inciso c)}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j Cov(Y_i, Y_j) = \quad & a_1 b_1 Cov(Y_1, Y_1) + \cdots + a_1 b_n Cov(Y_n, Y_n) + \\
& + a_2 b_1 Cov(Y_2, Y_1) + a_2 b_2 Cov(Y_2, Y_2) + \cdots + a_2 b_n Cov(Y_2, Y_n) + \\
& + a_3 b_1 Cov(Y_3, Y_1) + \cdots + a_3 b_3 Cov(Y_3, Y_3) + \cdots + a_3 b_n Cov(Y_3, Y_n) + \\
& . \\
& . \\
& . \\
& + a_n b_1 Cov(Y_n, Y_1) + \cdots + a_n b_n Cov(Y_n, Y_n)
\end{aligned}$$

Debido a que $Y_1, \ldots, Y_n$ son variables aleatorias independientes, entonces $Cov(Y_i, Y_j) = 0$ para $i \neq j$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j Cov(Y_i, Y_j) = \quad & a_1 b_1 Cov(Y_1, Y_1) + a_1 b_2 (0) + \cdots + a_1 b_n (0) + \\
& + a_2 b_1 (0) + a_2 b_2 Cov(Y_2, Y_2) + a_2 b_3 (0) + \cdots + a_2 b_n (0) + \\
& + a_3 b_1 (0) + \cdots + a_3 b_3 Cov(Y_3, Y_3) + \cdots + a_3 b_n (0) + \cdots \\
& \cdots + a_n b_1 (0) + \cdots + a_n b_{n-1} (0) + a_n b_n Cov(Y_n, Y_n) \\
= \quad & a_1 b_1 Cov(Y_1, Y_1) + a_2 b_2 Cov(Y_2, Y_2) + \cdots + a_n b_n Cov(Y_n, Y_n) \\
= \quad & \sum_{i=1}^n a_i b_i Cov(Y_i, Y_i)
\end{aligned}$$

Sabemos que $Cov(Yi, Y_i) = E(Y_i Y_i) - E(Y_i)E(Y_i) = E(Y_i^2) - \mu\mu = E(Y_i^2) - \mu^2 = V(Y_i) \Rightarrow Cov(Yi, Y_i) = V(Y_i) = \sigma^2$. Además hemos probado que $Cov(U_1, U_2) = \sum_{i=1}^n a_i b_i Cov(Y_i, Y_i) = \sum_{i=1}^n a_i b_i \sigma^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i b_i$ y si $Cov(U_1, U_2) = 0 \Leftrightarrow \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$. Siempre que σ^2 sea estrictamente mayor a cero $\sigma^2 > 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$, se espera que $\sigma^2 > 0$ en la mayor parte de los casos.

$$\therefore Cov(U_1, U_2) \text{ son ortogonales sí y sólo si } \sum_{i=1}^n a_i b_i = 0 \text{ tal que } \sigma^2 > 0$$

□

b) Si $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ tienen una distribución normal. Entonces, U_1 y U_2 tienen una distribución bivariante. Demuestre que U_1 y U_2 son independientes si son ortogonales.

Demostración. Supongamos que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ tienen una distribución normal, U_1 y U_2 tienen una distribución bivariante y además son ortogonales, entonces por teorema del problema 2, $Cov(U_1, U_2) =$

$\rho\sigma_1\sigma_2 = 0 \Rightarrow \rho = 0$. Sustituyamos $\rho = 0$ en $f(U_1, U_2)$.

$$Q = \left(\frac{U_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{U_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(u_1,u_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{U_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{U_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(U_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(U_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \\
&= f(u_1)\cdot f(u_2)
\end{aligned}$$

Donde las funciones $f(u_1)$ y $f(u_2)$ son funciones de densidad de las variables aleatorias U_1 y U_2 que tienen una distribución de probabilidad normal. Nótese que $f(u_1)$ y $f(u_2)$ son positivas y $f(u_1)$ únicamente dependen de u_1 y $f(u_2)$ depende sólo de u_2, entonces por teorema 5.5 se tiene que U_1 y U_2 son independientes. □

Teorema 5.5
Sean Y_1 y Y_2 que tienen una densidad conjunta $f(y_1, y_2)$ que es positiva si y sólo si $a \leq y_1 \leq b$ y $c \leq y_2 \leq d$; y $f(y_1, y_2) = 0$ en otro caso. Entonces Y_1 y Y_2 son variables aleatorias independientes si y sólo si

$$f(y_1, y_2) = g(y_1)h(y_2)$$

donde $g(y_1)$ es una función no negativa de y_1 solamente y $h(y_2)$ es una función no negativa de y_2 solamente.

3. Problema 3

Suponga que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ es una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2. La independencia de $\sum_{i=1}^n \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$ y $\overline{Y}$ se puede demostrar como lo siguiente: defina una matriz A de n×n con

$$A = \begin{bmatrix}
\frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\
\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} & \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} & -\frac{2}{\sqrt{2\cdot 3}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & -\frac{(n-1)}{\sqrt{(n-1)n}}
\end{bmatrix}$$

y observe que A^t A = I, la matriz identidad. Entonces

$$\sum_{i=1}^n Y_i^2 = Y^tY = Y^tA^tAY$$

donde Y es el vector de valores Y_i

1. Demuestre que

$$AY = \begin{bmatrix} \overline{Y}\sqrt{n} \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix}$$

donde $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$ son funciones lineales de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = n\overline{Y}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} U_i^2$$

Demostración.

Se comienza determinando AY:

$$\begin{aligned} AY = A\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{Y_1}{\sqrt{n}} + \frac{Y_2}{\sqrt{n}} + \frac{Y_3}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{Y_i}{\sqrt{n}} \\ \frac{Y_1}{\sqrt{2}} - \frac{Y_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{Y_1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \frac{Y_2}{\sqrt{2\cdot 3}} - \frac{2Y_3}{\sqrt{2\cdot 3}} \\ \vdots \\ \frac{Y_1}{\sqrt{(n-1)n}} + \frac{Y_2}{\sqrt{(n-1)n}} + \ldots + \frac{Y_{i-1}}{\sqrt{(n-1)n}} - \frac{(n-1)Y_i}{\sqrt{(n-1)n}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sqrt{n}} \\ \frac{Y_1 - Y_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{Y_1 + Y_2 - 2Y_3}{\sqrt{2\cdot 3}} \\ \vdots \\ \frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{n-1} - (n-1)Y_n}{\sqrt{(n-1)n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Y}\sqrt{n} \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

Entonces, ahora tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 &= Y^t Y = Y^t A^t A Y = (AY)^t + AY \\ &= \begin{bmatrix} \overline{Y}\sqrt{n} & U_1 & U_2 & U_3 & \ldots & U_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{Y}\sqrt{n} \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \left[\overline{Y}^2 n + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \ldots + U_{n-1}^2\right] \\ &= n\overline{Y}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} U_i^2 \end{aligned} \tag{2}$$

$\square$

2. Demuestre que las funciones lineales $\overline{Y}\sqrt{n}, U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$ son ortogonales por pares y por lo tanto independientes de acuerdo con la suposición de normalidad.

Definición

Sea $L_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}Y_j$ una función lineal de $Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_n$. Ahora, dos funciones lineales, dígase L_i y L_k son ortogonales por pares si y solo si $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{kj} = 0$ y por lo tanto L_i y L_k son independientes.

Demostración. Sean $L_1, L_2, L_3, ..., L_n$ las n funciones lineales $\left(L_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}Y_j\right)$ de AY. Es decir:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \overline{Y}\sqrt{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sqrt{n}} \\
L_2 &= U_1 = \frac{Y_1 - Y_2}{\sqrt{2}} \\
L_3 &= U_2 = \frac{Y_1 + Y_2 - 2Y_3}{\sqrt{2 \cdot 3}} \\
&\vdots \\
L_n &= U_{n-1} = \frac{Y_1 + Y_2 + ... + Y_{n-1} - (n-1)Y_n}{\sqrt{(n-1)n}}
\end{aligned}
$$

Nótese que las constantes $a_{ij},\ j = 1, 2, 3, ..., n$ son los elementos de i-ésima fila de la matriz A.

Es necesario probar que la propiedad se cumple para todas las filas. Comenzamos comprobando un caso en específico, L_1 y L_2:

Las constantes de L_1 y L_2:

$$
a_{1,j} = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, ..., \frac{1}{\sqrt{n}}\right\} \qquad a_{2,j} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \cdots, 0\right\}
$$

Aplicando la propiedad $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{kj} = 0$, tenemos que:

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}a_{2,j} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 0 + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 0 = 0
$$

Por lo cual, L_1 y L_2 son ortogonales y por lo tanto independientes.

Ahora, supóngase que tenemos L_i y L_k, en donde $k > i$. Tenemos las constantes de L_i y L_k:

$$
a_{i,j} = \left\{\frac{1}{\sqrt{(i-1)i}}, \frac{1}{\sqrt{(i-1)i}}, ..., \frac{1}{\sqrt{(i-1)i}}, -\frac{(i-1)}{\sqrt{(i-1)}}, 0\right\}
$$

$$
a_{k,j} = \left\{\frac{1}{\sqrt{(k-1)k}}, \frac{1}{\sqrt{(k-1)k}}, ..., \frac{1}{\sqrt{(k-1)k}}, \frac{1}{\sqrt{(k-1)k}}, -\frac{(k-1)}{\sqrt{(k-1)k}}\right\}
$$

Aplicando la propiedad $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{kj} = 0$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}a_{k,j} &= \frac{1}{\sqrt{(i-1)i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(k-1)k}} + \frac{1}{\sqrt{(i-1)i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(k-1)k}} + \\
&+ \cdots + \frac{1}{\sqrt{(i-1)i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(k-1)k}} - \frac{(i-1)}{\sqrt{(i-1)i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(k-1)k}} + 0 \cdot -\frac{(k-1)}{\sqrt{(k-1)k}} \\
&= \left[\frac{1+1+\cdots+1+1}{\sqrt{(i-1)i}\sqrt{(k-1)k}}\right] - \frac{(i-1)}{\sqrt{(i-1)i}\sqrt{(k-1)k}} \\
&= \left[\frac{\sum_{j=1}^{i-1}(1)}{\sqrt{(i-1)i}\sqrt{(k-1)k}}\right] - \frac{(i-1)}{\sqrt{(i-1)i}\sqrt{(k-1)k}} \\
&= \left[\frac{(i-1)}{\sqrt{(i-1)i}\sqrt{(k-1)k}}\right] - \frac{(i-1)}{\sqrt{(i-1)i}\sqrt{(k-1)k}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por lo cual, L_i y L_k son ortogonales y por lo tanto independientes. Por lo tanto, las funciones lineales $L_1, L_2, L_3, ..., L_n$ son ortogonales por pares e independientes de acuerdo a la suposición de normalidad. □

3. Demuestre que $\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} U_i^2$ y concluya que esta cantidad es independiente de $\overline{Y}$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i^2 - 2Y_i\overline{Y} + \overline{Y}^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} Y_i\overline{Y} + \sum_{i=1}^{n} \overline{Y}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - 2n\overline{Y}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}Y_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{Y}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - 2n\overline{Y}^2 + n\overline{Y}^2 \\
&= n\overline{Y}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} U_i^2 - n\overline{Y}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} U_i^2
\end{aligned}
$$

Como se demostró en el inciso anterior, U_i para $i = 1, 2, ..., n-1$ es independiente de $\sqrt{n}\overline{Y}$. Por lo tanto, $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$ y $\overline{Y}$ son independientes también. □

4. Demuestre que $\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ tiene una distribución χ^2 con (n-1) grados de libertad.

Demostración. Se considerará el libro de Wackerly et al. (2014) para la demostración. Se propone una nueva variable:

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

Por lo que se tiene:

$$\begin{aligned}
W &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \mu)^2}{\sigma^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y} + \overline{Y} - \mu\right)^2}{\sigma^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 + (\overline{Y} - \mu)^2 + 2(\overline{Y} - \mu)\,(Y_i - \overline{y})\right)}{\sigma^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} (\overline{Y} - \mu)^2}{\sigma^2} + \frac{2(\overline{Y} - \mu)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y}\right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} (\overline{Y} - \mu)^2}{\sigma^2} + \frac{2(\overline{Y} - \mu)}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} \overline{Y}\right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{\sigma^2} + \frac{n(\overline{Y} - \mu)^2}{\sigma^2} + \frac{2(\overline{Y} - \mu)}{\sigma^2} \left(\frac{n}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - n\overline{Y}\right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{\sigma^2} + \frac{n(\overline{Y} - \mu)^2}{\sigma^2} + \frac{2(\overline{Y} - \mu)}{\sigma^2} \left(n\overline{Y} - n\overline{Y}\right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{\sigma^2} + \frac{n(\overline{Y} - \mu)^2}{\sigma^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\overline{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2
\end{aligned}$$

Para un mejor manejo de las variables, se nombrará:

$$X_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{\sigma^2} \qquad X_2 = \left(\frac{\overline{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2$$

Ahora bien, se sabe que W tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2, por lo cual tiene una distribución χ^2 con n gl. Consecuentemente, se observa que X_2 tiene 1 gl, dado que $X_2 = \left(\frac{\overline{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 = Z^2$. Entonces, ahora es necesario probar que X_1 tiene una distribución χ^2 con $n-1$ gl. Por lo que se propone, sabiendo que X_1 y X_2 son independientes, usar la función generadora de momentos:

Table 2 Continuous Distributions

Distribution	Probability Function	Mean	Variance	Moment-Generating Function
Chi-square	$f(y) = \frac{(y)^{(v/2)-1} e^{-y/2}}{2^{v/2}\Gamma(v/2)}$; $y > 0$	v	$2v$	$(1-2t)^{-v/2}$

La demostración del caso general es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
m_U(t) &= E\left(\exp\left(tU\right)\right) && (1)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(tU\right)\cdot f(U)\ dU && \text{Definición 5.9} \quad (2)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(tU\right)\cdot \frac{(U)^{(v/2)-1}\exp\left(-U/2\right)}{2^{v/2}\Gamma(v/2)}\ dU && (3)\\
&= \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)}\int_{0}^{\infty} \exp\left(tU-U/2\right)\cdot (U)^{(v/2)-1}\ dU && (4)\\
&= \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)}\int_{0}^{\infty} \exp\left(-U(1/2-t)\right)\cdot (U)^{(v/2)-1}\ dU && (5)
\end{aligned}
$$

Se propone $y = U(\frac{1}{2}-t)$:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)}\int_{0}^{\infty} \exp\left(-y\right)\cdot \left(\frac{2y}{1-2t}\right)^{(v/2)-1}\cdot\frac{2}{1-2t}\ dU && (6)\\
&= \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)}\int_{0}^{\infty} \exp\left(-y\right)\cdot \left(\frac{2y}{1-2t}\right)^{(v/2)}\cdot\ dU && (7)\\
&= \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)}\cdot\left(\frac{2}{1-2t}\right)^{(v/2)}\int_{0}^{\infty} \exp\left(-y\right)\cdot (y)^{(v/2)}\ dU && (8)\\
&= \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)}\cdot\left(\frac{2}{1-2t}\right)^{(v/2)}\Gamma(\frac{v}{2}) && (9)\\
&= \frac{1}{2^{v/2}}\cdot\left(\frac{2}{1-2t}\right)^{(v/2)} && (10)\\
&= \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{(v/2)} && (11)\\
&= (1-2t)^{-v/2} && (12)
\end{aligned}
$$

Finalmente, podemos calcular:

$$
\begin{aligned}
m_W(t) &= m_{X_1}(t)\times m_{X_2}(t) && (13)\\
(1-2t)^{-v/2} &= m_{X_1}(t)\times(1-2t)^{-1/2} && (14)
\end{aligned}
$$

Despejando para $m_{X_1}(t)$:

$$
m_{X_1}(T) = (1-2t)^{-(n-1)/2} \qquad (15)
$$

Por lo tanto, se tiene que por medio de la función generado de momento de $X_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}{\sigma^2}$ tiene una distribución χ^2 con $n-1$ gl. □

(Valor 2 puntos)

Referencias

Roussas, G. G. (2003). *An introduction to probability and statistical inference*. Elsevier.

Wackerly, D., Mendenhall, W., and Scheaffer, R. L. (2014). *Mathematical statistics with applications*. Cengage Learning.