Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2036 - Estadística Matemática - Catedrático: Paulo Mejía
23 de mayo de 2021

Parcial 4

Instrucciones: Resuelva los siguientes problema. Favor hacer la solución en latex y cargar el archivo latex y pdf en la tarea de Canvas. Para la resolución de los problemas, se utilizará el libro de Wackerly et al. (2014).

1. Problema 1

Sea $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza 1.

1. a) Demuestre que $\overline{Y}$ es un estimador suficiente para μ.

   Solución. content... □

2. b) ¿Cuál es la distribución de $\overline{Y}$ con sus parámetros? (Incluya la justificación).
3. c) Encuentre la función generadora de momentos de $\overline{Y}$ (Incluya la justificación).
4. d) Calcule $E\left(\overline{Y}^2\right)$ y $E\left(\overline{Y}^4\right)$, utilizando la función generadora de momentos del inciso de $\overline{\boldsymbol{Y}}$
5. e) Demuestre que el MUEV (estimador insesgado de varianza mínima) de μ^2 es $\widehat{\mu^2} = \overline{Y}^2 - \frac{1}{n}$
6. f) Obtenga la $VAR\left(\widehat{\mu^2}\right)$, utilizando el resultado en d). (Valor 25 puntos).

2. Problema 2

Los estimadores de máxima verosimilitud tienen propiedades interesantes cuando se trabaja con muestras grandes. Suponga que $t(\theta)$ es una función derivable en θ. Por la propiedad de invarianza, se tiene que si $\hat{\theta}$ es el MLE de θ, entonces el MLE de $t(\theta)$ está dada por

$t(\hat{\theta})$. En algunas condiciones de regularidad que se cumplen para las distribuciones que se consideren, $t(\hat{\theta})$ es un estimador consistente para $t(\theta)$. Además, para tamaño de muestras grandes,

$$Z = \frac{t(\hat{\theta}) - t(\theta)}{\sqrt{\left[\frac{\partial t(\theta)}{\partial \theta}\right]^2 \Big/ nE\left[-\frac{\partial^2 \ln[f(Y|\theta)]}{\partial \theta^2}\right]}}$$

tiene aproximandamente una distribución normal estándar, donde $f(Y \mid \theta)$ es la función densidad correspondiente a la distribución continua de interés, evaluada en el valor aleatorio Y. En el caso discreto, el resultado análogo se cumple con la función de probabilidad evaluada en el valor aleatorio Y, $p(Y \mid \theta)$, se sustituye por la densidad $f(Y \mid \theta)$. En el caso particular, para una variable aleatoria con distribución de Bernoulli, $p(y \mid p) = p^y(1-p)^{1-y}$, donde y $= 0, 1$. Si $Y_1, \dots, Y_n$ es una muestra aleatoria de tamaño n de dicha distribución.

1. a) Encuentre el MLE para el parámetro p.

   Solución. Comenzamos definiendo el MLE, como:

   Method of Maximum Likehood

   Suppose that the likelihood function depends on k parameters $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k$. Choose as estimates those values of the parameters that maximize the likelihood $L(y_1, y_2, ..., y_n|\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$.

   $\square$

2. b) Encuentre el MLE para la expresión p(1-p).

3. c) Construya un intervalo de confianza de $100(1-\alpha)\,\%$ para p$(1-$p$)$, la varianza de dicha distribución (suponga una muestra grande).

(Valor 25 puntos).

3. Problema 4

Sea Y una variable aleatoria que representa el número de éxitos en n intentos independientes con probabilidad p de éxito en cada intento. Además,

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

donde

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{si el i-ésimo intento resulta en éxito} \\ 0, & \text{en el otro caso} \end{cases}$$

para i $= 1, \dots,$ n

1. a) Demuestre que $\widehat{p_n} = \frac{Y}{n}$ es un estimador insesgado de p.

Solución. Tenemos las siguientes denificiones::

Definición 8.2 - Sesgo

Let $\hat{\theta}$ be a point estimator for a parameter θ. Then $\hat{\theta}$ is an unbiased estimator if $E(\hat{\theta}) = \theta$. If$E(\hat{\theta}) \neq \theta$, θ is said to be biased.

Definición 8.3 - Sesgo

The bias of a point estimator $\hat{\theta}$ is given by $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$.

A probar: $E(\hat{p}_n) = p$. Entonces:

$$E(\hat{p}_n) = E\left(\frac{Y}{n}\right) = \underbrace{\frac{1}{n}E(Y)}_{\text{Teorema 5.7}} = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n}E\left(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\underbrace{E(Y_1) + E(Y_2) + \cdots + E(Y_n)}_{E(Y_i)=p,\text{ definición de valor esperado.}}\right] = \frac{1}{n}\left[p + p + \cdots + p\right] = \frac{1}{n}(np) = p$$

$\square$

2. b) Demuestre que $\widehat{p_n}$ es un estimador consistente de p.

Solución. Procedemos a calcular la varianza del estimador, es decir:

$$VAR(\hat{p}_n) = \frac{pq}{n}. \qquad \text{(Deducción en el ejercicio 5.28).}$$

$\implies$ Tomamos como referencia el teorema 9.1:

Teorema 9.1

An unbiased estimator $\hat{\theta}_n$ for θ is a consistent estimator of θ if

$$\lim_{n\to\infty} VAR(\hat{\theta}_n) = 0.$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} VAR(\hat{p}_n) = \lim_{n\to\infty} VAR\left(\frac{pq}{n}\right) = VAR\left(\frac{pq}{0}\right) = 0.$$

$\square$

3. c) Cuando n es grande, demuestre que la distribución de $\frac{\widehat{p_n} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$ converge a una distribución normal estándar.

Solución. Considerando:

Teorema 9.3

Suppose that U_n has a distribution function that converges to a standard normal distribution function as $n \to \infty$. If W_n converges in probability to 1, then the distribution function of U_n/W_nconverges to a standard normal distribution function.

$\square$

4. d) Cuando n es grande, demuestre que la distribución de $\frac{\widehat{p_n}-p}{\sqrt{p_n(1-\widehat{p_n})/n}}$ converge a una distribución normal estándar.

Solución. Considerando:

Teorema 9.3

Suppose that U_n has a distribution function that converges to a standard normal distribution function as $n \to \infty$. If W_n converges in probability to 1, then the distribution function of U_n/W_nconverges to a standard normal distribution function.

$\square$

(Valor 25 puntos)

Referencias

Wackerly, D., Mendenhall, W., and Scheaffer, R. L. (2014). *Mathematical statistics with applications*. Cengage Learning.