Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada
Fecha de entrega: 24 de febrero de 2021
Rudik R. Rompich - Carné: 19857

Estadística Matemática - Paulo Mejía

Parcial 1

Instrucciones: Resuelva los siguientes problema. Favor hacer la solución en latex y cargar el archivo latex y pdf en la tarea de Canvas.

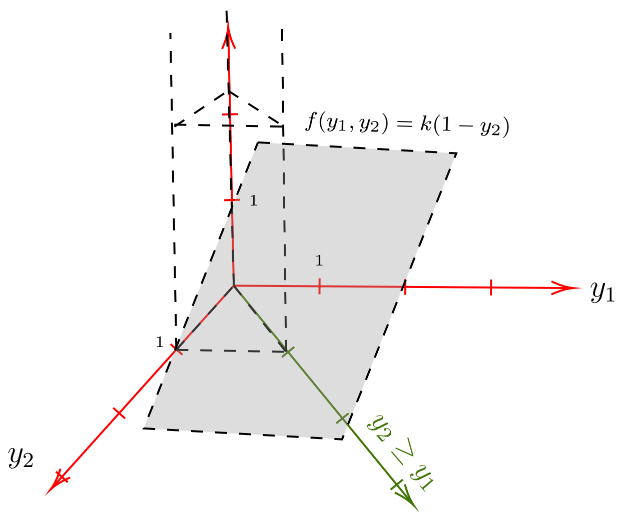
En la argumentación de los siguientes problemas y demostraciones, se usaron teoremas y definiciones del libro de Wackerly et al. (2014)

1. Problema

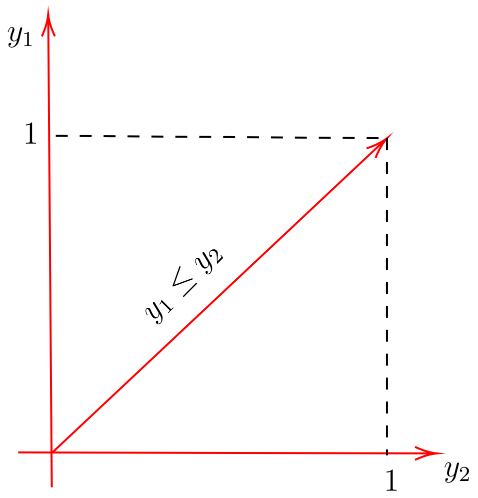
Sean Y_1 y Y_2 variables aleatorias con función densidad de probabilidad conjunta, definida por: $f(y_1, y_2) = \begin{cases} k(1-y_2) & \text{si } 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1 \\ 0 & \text{si en cualquier otro caso} \end{cases}$

1. Determine el valor de k para que sea una función densidad.

   Solución. Considerando la siguiente figura:



   Considerando también:



Se observa que se puede plantear la siguiente doble integral:

$$\int_0^1 \int_0^{y_2} k(1-y_2)dy_1dy_2$$

Replanteando la doble integral:

$$k\left[\int_0^1 \int_0^{y_2} (1-y_2)dy_1dy_2\right] = k\int_0^1 [(1-y_2)y_1|_0^{y_2}]dy_2 = \tag{1}$$

$$= k\int_0^1 [(1-y_2)y_2]dy_2 = k\int_0^1 [y_2 - y_2^2]dy_2 = \tag{2}$$

$$= k\left[\frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{3}y_2^3\right]_0^1 = k\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = k\left[\frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right] \tag{3}$$

$$= \frac{k}{6} \tag{4}$$

Entonces, como sabemos que el valor de la densidad siempre debería integrar a 1, entonces:

$$\frac{k}{6} = 1 \quad ; \quad k = 6 \tag{5}$$

Entonces, tenemos:

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 6(1-y_2) & \text{si } 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1 \\ 0 & \text{si en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{6}$$

■

2. Calcule $\mathrm{E}(Y_1)$

Solución.

Considerando:

$$\begin{aligned}
E(Y_1) &= 6\int_0^1\int_0^{y_2} y_1(1-y_2)dy_1dy_2 && (1)\\
&= 6\int_0^1\int_0^{y_2}[y_1-y_1y_2]dy_1dy_2 = 6\int_0^1\left[\frac{1}{2}y_1^2-\frac{1}{2}y_2y_1^2\right]_0^{y_2}dy_2 = && (2)\\
&= 6\int_0^1\left[\frac{1}{2}(y_2)^2-\frac{1}{2}y_2(y_2)^2\right]dy_2 = 6\int_0^1\left[\frac{1}{2}y_2^2-\frac{1}{2}y_2^3\right]dy_2 = && (3)\\
&= 6\left[\frac{1}{6}y_2^3-\frac{1}{8}y_2^4\right]_0^1 = \frac{1}{4} && (4)
\end{aligned}$$

■

3. Determine la función de densidad marginal para Y_2.

   Solución.

   Sabemos que la densidad marginal se calcula con:

$$f_2(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1,y_2)dy_1 \quad (1)$$

   Entonces:

$$\begin{aligned}
&= 6\int_0^{y_2}(1-y_2)dy_1 && (2)\\
&= 6[y_1-y_2y_2]_0^{y_1} && (3)\\
&= 6[y_2-y_2^2] && (4)\\
&= 6y_2-6y_2^2, \qquad 0\le y_2\le 1 && (5)
\end{aligned}$$

■

4. Determine la función densidad condicional de Y_1 dado $Y_2 = y_2$.

   Solución.

   Por definición, sabemos que:

$$F(y_1|y_2) = P(Y_1\le y_1|Y_2=y_2) = \frac{f(y_1,y_2)}{f_2(y_2)} \quad (1)$$

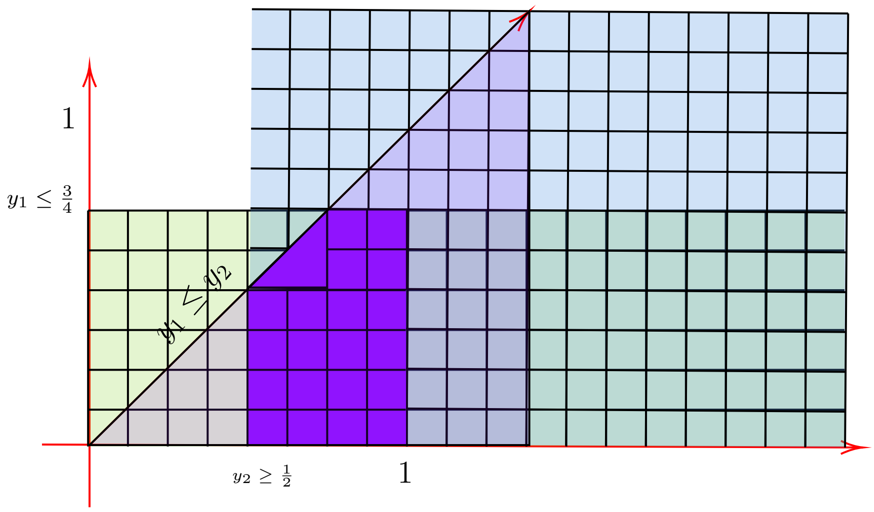
   Entonces:

$$= \frac{6(1-y_2)}{6y_2-6y_2^2} = \frac{6(1-y_2)}{6y_2(1-y_2)} = \frac{1}{y_2}, \qquad 0\le y_1\le y_2\le 1 \quad (2)$$

■

5. Calcule la $P\left([Y_1 \leq 3/4] \cap [Y_2 \geq 1/2]\ \right)$.

Solución. Considerando la representación gráfica del problema:



Entonces, se plantearon dos integrales dobles:

$$6\int_{1/2}^{1}\int_{0}^{1/2}(1-y_2)dy_1dy_2 + 6\int_{1/2}^{3/4}\int_{y_1}^{1}(1-y_2)dy_2dy_1 \tag{1}$$

Para la primera integral:

$$6\int_{1/2}^{1}\int_{0}^{1/2}(1-y_2)dy_1dy_2 = 6\int_{1/2}^{1}\left[y_1 - y_2y_1\right]_0^{1/2}dy_2 = \tag{2}$$

$$6\int_{1/2}^{1}\left[\left(\frac{1}{2}\right) - y_2\left(\frac{1}{2}\right)\right]dy_2 = 3\int_{1/2}^{1}(1-y_2)dy_2 = \tag{3}$$

$$3\left[y_2 - \frac{1}{2}y_2^2\right]_{1/2}^{1} = 3\left[\left(1-\frac{1}{2}(1)^2\right) - \left(\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\right] \tag{4}$$

$$= \frac{3}{8} \tag{5}$$

Para la segunda doble integral:

$$6\int_{1/2}^{3/4}\int_{y_1}^{1}(1-y_2)dy_2dy_1 = 6\int_{1/2}^{3/4}\left[y_2 - \frac{1}{2}y_2^2\right]_{y_1}^{1}dy_1 = \tag{6}$$

$$= 6\int_{1/2}^{3/4}\left[((1) - \frac{1}{2}(1)^2) - ((y_1) - \frac{1}{2}(y_1)^2)\right]dy_1 = 6\int_{1/2}^{3/4}\left[(\frac{1}{2}) - (y_1) + \frac{1}{2}y_1^2\right]dy_1 = \tag{7}$$

$$= 6\left[\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{6}y_1^3\right]_{1/2}^{3/4} = 6\left[\frac{21}{128} - \frac{7}{48}\right] = \frac{7}{64} \tag{8}$$

Por lo cual, nos da como resultado:

$$\frac{3}{8} + \frac{7}{64} = \frac{31}{64} \tag{9}$$

■

6. Determine $E\left(Y_1 \mid Y_2 = y_2\right)$.

Solución.

Considerando la definición:

$$E[g(Y)|Y_2 = y_2] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1) f(y_1|y_2) dy_1 \tag{1}$$

Sabemos, por el ejercicio de la densidad merginal que:

$$f(y_1|y_2) = \frac{1}{y_2} \tag{2}$$

Eso quiere decir, que podemos plantear la ecuación así:

$$\int_0^{y_2} y_1 \frac{1}{y_2} dy_1 = \frac{1}{y_2} \left[\frac{1}{2} y_1^2\right]_0^{y_2} = \frac{1}{2} y_2 \tag{3}$$

■

(Valor 37.5 puntos).

2. Problema

a) Demuestre que $\forall p \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}, \left(x_1 + x_2 + \ldots + x_p\right)^2 = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 + 2 \sum \sum_{1 \leq i < j \leq p} x_i x_j$

Solución.

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^2 = \left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right)^2 = \tag{1}$$

Entonces, asumamos una nueva variable j, para fines ilustrativos:

$$= \left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} x_j\right) \tag{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_i a_j \tag{3}$$

Entonces, se puede asumir lo siguiente, siempre y cuando $m \neq n$ (veáse a mayor detalle en la demostración del problema 2 - inciso 3):

$$= \sum_{i=1}^{p} a_i^2 + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_i a_j \tag{4}$$

Haciendo unas modificaciones al segundo término:

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} a_i a_j = \tag{5}$$

Asumiendo que $1 \leq m \leq n \leq p$, entonces se estipula lo siguiente:

$$= 2 \sum_{1 \leq i <} \sum_{j \leq p} x_i x_j \tag{6}$$

Es decir:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^2 = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i <} \sum_{j \leq p} x_i x_j \tag{7}$$

■

Demuestre que si sean $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ y $X_1, X_2, \ldots, X_m$ variables aleatorias con $E(Y_i) = \mu_i$ para i $= 1, \ldots,$ n y $E(X_j) = \xi_j$ para j $= 1, \ldots,$ m. Se define $U_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i Y_i$ y $U_2 = \sum_{j=1}^{m} b_j X_j$ para $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$.

Entonces, se cumple los incisos 1, 2 y 3:

1. $E(U_1) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i$

   Solución.

$$\begin{aligned}
E(U_1) &= E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i Y_i\right) && (1)\\
&= \sum_{i=1}^{n} E(a_i Y_i) && \text{Aplicando el teorema 5.8 del libro.} \quad (2)\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i E(Y_i) && \text{Aplicando el teorema 5.7 del libro.} \quad (3)\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i && (4)
\end{aligned}$$

■

2. $VAR(U_1) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 VAR(Y_i) + 2 \sum \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \operatorname{COV}(Y_i, Y_j)$

Solución.

$$VAR\,(U_1) = E\,[U_1 - E\,(U_1)]^2\,.\ \text{(Aplicando definición)} \tag{1}$$
$$= E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i\right]^2 \text{(Usando la demostración anterior)} \tag{2}$$
$$= E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i\,(Y_i - \mu_i)\right]^2 \tag{3}$$

Usando la demostración del inciso **a**:

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\,(Y_i - \mu_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i a_j\,(Y_i - \mu_i)\,(Y_j - \mu_j)\right] \tag{4}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 E\,(Y_i - \mu_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i a_j E\,[(Y_i - \mu_i)\,(Y_j - \mu_j)]\,. \tag{5}$$

Entonces, por las definiciones generales de la variancia y la covarianza, tenemos lo siguiente:

$$VAR\,(U_1) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 VAR\,(Y_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j}^{n} a_i a_j \operatorname{Cov}\,(Y_i, Y_j) \tag{6}$$

Sabemos que es equivalente decir que $\mathrm{COV}\,(Y_i, Y_j) = \mathrm{COV}\,(Y_j, Y_i)$, entonces tenemos:

$$VAR\,(U_1) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 VAR\,(Y_i) + 2\sum_{1\le i}\sum_{<j\le n} a_i a_j \,\mathrm{COV}\,(Y_i, Y_j) \tag{7}$$

■

3. $\mathrm{COV}\,(U_1, U_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \,\mathrm{COV}\,(Y_i, X_j)$

Solución.

$$\mathrm{COV}\,(U_1, U_2) = E\,\{[U_1 - E\,(U_1)]\,[U_2 - E\,(U_2)]\} \tag{1}$$
$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j X_j - \sum_{j=1}^{m} b_j \xi_j\right)\right] \tag{2}$$
$$= E\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} a_i\,(Y_i - \mu_i)\right]\left[\sum_{j=1}^{m} b_j\,(X_j - \xi_j)\right]\right\} \tag{3}$$
$$= E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j\,(Y_i - \mu_i)\,(X_j - \xi_j)\right] \tag{4}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j E\,[(Y_i - \mu_i)\,(X_j - \xi_j)] \tag{5}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \,\mathrm{COV}\,(Y_i, X_j) \tag{6}$$

■

Además,

4. Si las variables aleatorias $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ son independientes, calcule $VAR\left(U_1\right)$.

   Solución.

   Usando el teorema 5.11 sabemos que si existen dos variables aleatorias independientes Y_1 y Y_2, entonces $COV(Y_1, Y_2) = 0$, por otra parte, por el inciso 2 sabemos:

$$VAR\left(U_1\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 VAR\left(Y_i\right) + 2 \sum_{1\leq i<} \sum_{j\leq n} a_i a_j \operatorname{COV}\left(Y_i, Y_j\right) \tag{1}$$

   Entonces, es evidente observar que la varianza es:

$$VAR\left(U_1\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 VAR\left(Y_i\right) \tag{2}$$

   ■

5. Si las variables aleatorias $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ y $X_1, X_2, \ldots, X_m$ son independientes entre sí, calcule $\operatorname{COV}\left(U_1, U_2\right)$

   Solución.

   Usando el teorema 5.11 sabemos que si existen dos variables aleatorias independientes Y_1 y Y_2, entonces $COV(Y_1, Y_2) = 0$, entonces, por el inciso 3 sabemos:

$$\operatorname{COV}\left(U_1, U_2\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \operatorname{COV}\left(Y_i, X_j\right) \tag{1}$$

   Entonces, se observa que:

$$\operatorname{COV}\left(U_1, U_2\right) = 0 \tag{2}$$

   ■

(Valor 37.5 puntos).

3. Problema

Demuestre que si Y_1 y Y_2 son variables aleatorias, entonces:

1. $\mathrm{E}\left(\mathrm{Y}_1\right) = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left(\mathrm{Y}_1 \mid \mathrm{Y}_2\right)\right]$

   Solución. Tenemos 2 casos:

a) El caso continuo: Supóngase que Y_1 y Y_2 son variables aleatorias conjuntamente continuas con una función de densidad conjunta $f(y_1, y_2)$ y densidades marginales $f_1(y_1)$ y $f_2(y_2)$. Entonces:

$$\begin{aligned} E(Y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y_1 f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 && (1) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y_1 f(y_1 \mid y_2) f_2(y_2)\, dy_1 dy_2 && (2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} y_1 f(y_1 \mid y_2)\, dy_1\right\} f_2(y_2)\, dy_2 && (3) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E(Y_1 \mid Y_2 = y_2) f_2(y_2)\, dy_2 = E[E(Y_1 \mid Y_2)] && (4) \end{aligned}$$

b) El caso discreto: Supóngase que Y_1 y Y_2 son variables aleatorias conjuntamente discretas con una función de probabilidad $p(y_1, y_2)$ y densidades marginales $p_1(y_1)$ y $p_2(y_2)$. Entonces:

$$\begin{aligned} E(Y_1) &= \sum_{\forall y_1}\sum_{\forall y_1} y_1 p(y_1, y_2) && (1) \\ &= \sum_{\forall y_1}\sum_{\forall y_1} y_1 p(y_1 \mid y_2) p_2(y_2) && (2) \\ &= \sum_{\forall y_1}\left\{\sum_{\forall y_1} y_1 p(y_1 \mid y_2)\right\} p_2(y_2) && (3) \\ &= \sum_{\forall y_1} E(Y_1 \mid Y_2 = y_2) p_2(y_2) = E[E(Y_1 \mid Y_2)] && (4) \end{aligned}$$

■

2. $VAR(\mathrm{Y}_1) = \mathrm{E}[VAR(\mathrm{Y}_1 \mid \mathrm{Y}_2)] + VAR[\mathrm{E}(\mathrm{Y}_1 \mid \mathrm{Y}_2)]$

Solución.

Se sabe que $VAR(Y_1 \mid Y_2)$ se da por:

$$VAR(Y_1 \mid Y_2) = E\left(Y_1^2 \mid Y_2\right) - [E(Y_1 \mid Y_2)]^2 \qquad (1)$$

y también se sabe que

$$E[VAR(Y_1 \mid Y_2)] = E\left[E\left(Y_1^2 \mid Y_2\right)\right] - E\left\{[E(Y_1 \mid Y_2)]^2\right\} \qquad (2)$$

Eso quiere decir que:

$$VAR[E(Y_1 \mid Y_2)] = E\left\{[E(Y_1 \mid Y_2)]^2\right\} - \{E[E(Y_1 \mid Y_2)]\}^2 \qquad (3)$$

Entonces, la varianza de Y_1 se calcula con:

$$\begin{aligned}
VAR\left(Y_1\right) =& E\left[Y_1^2\right]-\left[E\left(Y_1\right)\right]^2 && (4)\\
=& E\left\{E\left[Y_1^2 \mid Y_2\right]\right\}-\left\{E\left[E\left(Y_1 \mid Y_2\right)\right]\right\}^2 && (5)\\
=& E\left\{E\left[Y_1^2 \mid Y_2\right]\right\}-E\left\{\left[E\left(Y_1 \mid Y_2\right)\right]^2\right\}+E\left\{\left[E\left(Y_1 \mid Y_2\right)\right]^2\right\} && (6)\\
& -\left\{E\left[E\left(Y_1 \mid Y_2\right)\right]\right\}^2 && (7)\\
=& E\left[VAR\left(Y_1 \mid Y_2\right)\right]+VAR\left[E\left(Y_1 \mid Y_2\right)\right] && (8)
\end{aligned}$$

■

(Valor 25 puntos).

Referencias

Wackerly, D., Mendenhall, W., and Scheaffer, R. L. (2014). *Mathematical statistics with applications*. Cengage Learning.