**Universidad del Valle de Guatemala**
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

**Estudiante:** Rudik Roberto Rompich
**E-mail:** rom19857@uvg.edu.gt
**Carné:** 19857

MM2036 - Estadística Matemática - Catedrático: Paulo Mejía
23 de mayo de 2021

---

# Parcial 4

Instrucciones: Resuelva los siguientes problema. Favor hacer la solución en latex y cargar el archivo latex y pdf en la tarea de Canvas. Para la resolución de los problemas, se utilizará el libro de Wackerly et al. (2014).

## 1. Problema 1

Sea $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal con media $\mu$ y varianza 1.

1. a) Demuestre que $\overline{Y}$ es un estimador suficiente para $\mu$.

   *Solución.* content... □

2. b) ¿Cuál es la distribución de $\overline{Y}$ con sus parámetros? (Incluya la justificación).

3. c) Encuentre la función generadora de momentos de $\overline{Y}$ (Incluya la justificación).

4. d) Calcule $E\left(\overline{Y}^2\right)$ y $E\left(\overline{Y}^4\right)$, utilizando la función generadora de momentos del inciso de $\boldsymbol{\overline{Y}}$

5. e) Demuestre que el MUEV (estimador insesgado de varianza mínima) de $\mu^2$ es $\widehat{\mu^2} = \overline{Y}^2 - \frac{1}{n}$

6. f) Obtenga la $VAR\left(\widehat{\mu^2}\right)$, utilizando el resultado en d ). (Valor 25 puntos).

## 2. Problema 2

Los estimadores de máxima verosimilitud tienen propiedades interesantes cuando se trabaja con muestras grandes. Suponga que $t(\theta)$ es una función derivable en $\theta$. Por la propiedad de invarianza, se tiene que si $\hat{\theta}$ es el MLE de $\theta$, entonces el MLE de $t(\theta)$ está dada por

$t(\hat{\theta})$. En algunas condiciones de regularidad que se cumplen para las distribuciones que se consideren, $t(\hat{\theta})$ es un estimador consistente para $t(\theta)$. Además, para tamaño de muestras grandes,

$$Z = \frac{t(\hat{\theta}) - t(\theta)}{\sqrt{\left[\frac{\partial t(\theta)}{\partial \theta}\right]^2 \Big/ nE\left[-\frac{\partial^2 \ln[f(Y|\theta)]}{\partial \theta^2}\right]}}$$

tiene aproximandamente una distribución normal estándar, donde $f(Y \mid \theta)$ es la función densidad correspondiente a la distribución continua de interés, evaluada en el valor aleatorio Y. En el caso discreto, el resultado análogo se cumple con la función de probabilidad evaluada en el valor aleatorio Y, $p(Y \mid \theta)$, se sustituye por la densidad $f(Y \mid \theta)$. En el caso particular, para una variable aleatoria con distribución de Bernoulli, $p(y \mid p) = p^y(1-p)^{1-y}$, donde y $= 0, 1$. Si $Y_1, \ldots, Y_n$ es una muestra aleatoria de tamaño n de dicha distribución.

1. a) Encuentre el MLE para el parámetro p.

   *Solución.* Comenzamos definiendo el MLE, como:

   **Method of Maximum Likehood**

   Suppose that the likelihood function depends on k parameters $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k$. Choose as estimates those values of the parameters that maximize the likelihood $L(y_1, y_2, ..., y_n|\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$.

   □

2. b) Encuentre el MLE para la expresión p(1-p).

3. c) Construya un intervalo de confianza de $100(1-\alpha)\,\%$ para p$(1-$ p), la varianza de dicha distribución (suponga una muestra grande).

(Valor 25 puntos).

## 3. Problema 3

Suponga que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ es una muestra aleatoria de la distribución de Poisson con media $\lambda > 0$.

1. a) Encuentre el estimador del método de momentos para $\lambda$.

   *Solución.* Comenzamos definiendo el estimador del método de momentos como:

   **Method of moments**

   Choose as estimates those values of the parameters that are solutions of the equations $\mu'_k = m'_k$, for $k$ = 1,2,...,$t$, where $t$ is the number of parameters to be estimated.

   $$\mu'_k = E(Y^k) \quad \text{and } m'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^k.$$

Sabemos por hipótesis que $\mu{=}\lambda$. $\implies$ El estimador del método de momentos está definido como:

$$\hat{\lambda} = m_1' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^1 = \overline{Y}.$$

$\square$

2. b) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud (MLE) $\hat{\lambda}$ para $\lambda$.

*Solución.* Comenzamos definiendo el MLE, como:

**Method of Maximum Likehood**

Suppose that the likelihood function depends on k parameters $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k$. Choose as estimates those values of the parameters that maximize the likelihood $L(y_1, y_2, ..., y_n|\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$.

**Función de probabilidad de Poisson**

Apéndice 2 - Distribuciones discretas, se define como:

$$p(y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}, \quad y = 1, 2, 3, ...$$

$\implies$ Usando la definición de verosimilitud:

$$\begin{aligned}
L(\lambda) &= p(y_1, y_2, \cdots, y_n|\lambda) \\
&= p(y_1|\lambda) \times p(y_2|\lambda) \times \cdots \times p(y_n|\lambda) \\
&= \left\{\frac{\lambda^{y_1} e^{-\lambda}}{y_1!}\right\} \times \left\{\frac{\lambda^{y_2} e^{-\lambda}}{y_2!}\right\} \times \cdots \times \left\{\frac{\lambda^{y} e^{-\lambda}}{y!}\right\} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{y_i} e^{-\lambda}}{y_i!} = \frac{\left(\prod_{i=1}^n \lambda^{y_i}\right)\left(\prod_{i=1}^n e^{-\lambda}\right)}{\prod_{i=1}^n y_i!} = \frac{\left(\lambda^{\sum_{i=1}^n y_i}\right)\left(ne^{-\lambda}\right)}{\prod_{i=1}^n y_i!} \\
\ln\left[L(\lambda)\right] &= \ln\left[\frac{\left(\lambda^{\sum_{i=1}^n y_i}\right)\left(ne^{-\lambda}\right)}{\prod_{i=1}^n y_i!}\right] = \ln\left[\left(\lambda^{\sum_{i=1}^n y_i}\right)\left(ne^{-\lambda}\right)\right] - \ln\left[\prod_{i=1}^{n} y_i!\right] \\
&= \ln\left[\left(\lambda^{\sum_{i=1}^n y_i}\right)\right] + \ln\left[\left(ne^{-\lambda}\right)\right] - \ln\left[\prod_{i=1}^{n} y_i!\right] \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right]\left[\ln(\lambda)\right] - \lambda n - \ln\left[\prod_{i=1}^{n} y_i!\right] \\
\frac{d\ln\left[L(\lambda)\right]}{d\lambda} &= \frac{1}{\lambda}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right] - n - 0
\end{aligned}$$

Igualamos a 0 la expresión:

$$\frac{1}{\hat{\lambda}}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right] - n = 0 \implies \hat{\lambda} = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right] = \overline{Y}$$

$\square$

(Valor 25 puntos).

# 4. Problema 4

Sea $Y$ una variable aleatoria que representa el número de éxitos en n intentos independientes con probabilidad p de éxito en cada intento. Además,

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

donde

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{si el i-ésimo intento resulta en éxito} \\ 0, & \text{en el otro caso} \end{cases}$$

para i $= 1, \ldots,$ n

1. a) Demuestre que $\widehat{p_n} = \frac{Y}{n}$ es un estimador insesgado de $p$.

*Solución.* Tenemos las siguientes denificiones::

**Definición 8.2 - Sesgo**

Let $\hat{\theta}$ be a point estimator for a parameter $\theta$. Then $\hat{\theta}$ is an unbiased estimator if $E(\hat{\theta}) = \theta$. If$E(\hat{\theta}) \neq \theta$, $\theta$ is said to be biased.

**Definición 8.3 - Sesgo**

The bias of a point estimator $\hat{\theta}$ is given by $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$.

A probar: $E(\hat{p}_n) = p$. Entonces:

$$E(\hat{p}_n) = E\left(\frac{Y}{n}\right) = \underbrace{\frac{1}{n}E(Y)}_{\text{Teorema 5.7}} = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n}E\left(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\underbrace{E(Y_1) + E(Y_2) + \cdots + E(Y_n)}_{E(Y_i)=p,\text{ definición de valor esperado.}}\right] = \frac{1}{n}[p + p + \cdots + p] = \frac{1}{n}(np) = p$$

$\square$

2. b) Demuestre que $\widehat{p_n}$ es un estimador consistente de $p$.

*Solución.* Procedemos a calcular la varianza del estimador, es decir:

$$VAR(\hat{p}_n) = \frac{pq}{n}, \quad q = (1-p). \quad \text{(Deducción en el ejercicio 5.28).}$$

$\Longrightarrow$ Tomamos como referencia el teorema 9.1:

**Teorema 9.1**

An unbiased estimator $\hat{\theta}_n$ for $\theta$ is a consistent estimator of $\theta$ if

$$\lim_{n\to\infty} VAR(\hat{\theta}_n) = 0.$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} VAR(\hat{p}_n) = \lim_{n\to\infty} VAR\left(\frac{pq}{n}\right) = VAR(0) = 0.$$

□

3. c) Cuando n es grande, demuestre que la distribución de $\frac{\widehat{p_n}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$ converge a una distribución normal estándar.

*Solución.* Considerando el teorema del límite central:

**Teorema 7.4**

Let $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ be independent and identically distributed random variables with $E(Y_i) = \mu$ and $V(Y_i) = \sigma^2 < \infty$. Define

$$U_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\overline{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Then, the distribution function $U_n$ converges to the standard normal distribution function as $n \to \infty$.

Dados los 2 incisos anteriores tenemos $E(Y_i) = p$ y $VAR(Y_i) = p(1-p)$. Por hipótesis, sabemos $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$. Definimos:

$$U_n = \frac{Y - np}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}} = \frac{\frac{Y-np}{n}}{\frac{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}}{n}} = \frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

Por lo tanto, la distribución converge a una distribución normal. □

4. d) Cuando n es grande, demuestre que la distribución de $\frac{\widehat{p_n}-p}{\sqrt{\widehat{p_n}(1-\widehat{p_n})/n}}$ converge a una distribución normal estándar.

*Solución.* Sabemos que $\hat{p}_n$ es consistente, por lo que $(1-\hat{p}_n)$ también debe ser consistente; por el inciso $b$ del teorema 9.2, entonces $\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)$ es consiste para

$p(1-p)$.

$$\implies \frac{U_n}{W_n} = \frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}}} = \frac{\frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}}{\frac{\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}} = \frac{\underbrace{\frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}}_{\text{Inciso anterior.}}}{\underbrace{\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{p(1-p)}}}_{\text{Su probabilidad converge a 1.}}}$$

Por lo tanto, $U_n$ converge a una distribución normal y la probabilidad de $W_n$ converge a 1. Considerando:

**Teorema 9.3**

Suppose that $U_n$ has a distribution function that converges to a standard normal distribution function as $n \to \infty$. If $W_n$ converges in probability to 1, then the distribution function of $U_n/W_n$converges to a standard normal distribution function.

Se concluye que la distribución $U_n/W_n$ converge a una distribución normal estándar. $\square$

(Valor 25 puntos)

# Referencias

Wackerly, D., Mendenhall, W., and Scheaffer, R. L. (2014). *Mathematical statistics with applications*. Cengage Learning.