Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2036 - Estadística Matemática - Catedrático: Paulo Mejía
23 de mayo de 2021

Parcial 4

Instrucciones: Resuelva los siguientes problema. Favor hacer la solución en latex y cargar el archivo latex y pdf en la tarea de Canvas. Para la resolución de los problemas, se utilizará el libro de Wackerly et al. (2014).

1. Problema 1

Sea $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza 1.

Definición 4.8 - Distribución Normal

A random variable Y is said to have a normal probability distribution if and only if, for $\sigma > 0$ and $-\infty < \mu < \infty$, the density function of Y is

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(y-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \qquad \infty < y < \infty$$

1. a) Demuestre que $\overline{Y}$ es un estimador suficiente para μ.

   Solución. Comenzamos definiendo al estimador suficiente como:

   Teorema 9.4 - Estimador suficiente

   Let U be a statistic based on the random sample $Y_1, Y_2, ..., Y_n$. Then U is a sufficient statistic for the estimation of a parameter θ if and only if the likelihood $L(\theta) = L(y_1, y_2, ..., y_n|\theta)$ can be factored into two nonnegative functions,

   $$L(y_1, y_2, ..., y_n|\theta) = g(u, \theta) \times h(y_1, y_2, ..., y_n)$$

   where $g(u, \theta)$ is a function only of u and θ and $h(y_1, y_2, ..., y_n)$ is not a function of θ.

$$
\begin{aligned}
L(y_1, y_2, \cdots, y_n|\mu) &= L(y_1|\mu) \times L(y_2|\mu) \times \cdots \times L(y_n|\mu) \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(y_1-\mu)^2}{(2\sigma^2)}\right] \times \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(y_2-\mu)^2}{(2\sigma^2)}\right] \times \cdots \times \\
&\times \cdots \times \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(y_n-\mu)^2}{(2\sigma^2)}\right] \\
&= \frac{1}{\sigma^n\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sigma^n\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i^2-2y_i\mu+\mu^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sigma^n\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2\sum_{i=1}^{n}y_i\mu+\sum_{i=1}^{n}\mu^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sigma^n\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2n\overline{y}\mu+n\mu^2\right)\right]
\end{aligned}
$$

Se conocía que σ^2=1, por lo cual:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \times \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2n\overline{y}\mu+n\mu^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \times \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}y_i^2+\frac{1}{2}2n\overline{y}\mu-\frac{1}{2}n\mu^2\right] \\
&= \left\{\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \times \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right]\right\} \times \exp\left[n\overline{y}\mu-\frac{1}{2}n\mu^2\right] \\
&= h(y) \times g(\overline{y}, \mu)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\overline{y}$ es un estimador suficiente para μ. □

2. b) ¿Cuál es la distribución de $\overline{Y}$ con sus parámetros? (Incluya la justificación).

Solución. Considérese el teorema 4.7:

Teorema 7.1

Let $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ be a random sample of size n from a normal distribution with mean μ and variance σ. Then

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$$

is normally distributed with mean $\mu_{\overline{Y}} = \mu$ and variance $\sigma^2_{\overline{Y}} = \sigma^2/n$.

Entonces, podemos concluir que $\overline{Y}$ tiene una distribución normal con media $\mu_{\overline{Y}} = \mu$ y varianza $\sigma^2_{\overline{Y}} = 1/n$. □

3. c) Encuentre la función generadora de momentos de $\overline{Y}$ (Incluya la justificación).

Solución. Vamos a tomar como referencia el cuadro 2 del apéndice 2:

Table 2 Continuous Distributions

Distribution	Probability Function	Mean	Variance	Moment-Generating Function
Uniform	$f(y) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}; \theta_1 \leq y \leq \theta_2$	$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$	$\frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{12}$	$\frac{e^{t\theta_2} - e^{t\theta_1}}{t(\theta_2 - \theta_1)}$
Normal	$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(y-\mu)^2\right]$ $-\infty < y < +\infty$	μ	σ^2	$\exp\left(\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$

La demostración del caso general es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
m_U(t) &= E(\exp(tU)) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tU) \cdot f(U) dU \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(tU - \frac{(U-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}U \\
&= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left((\sqrt{2}\sigma z + \mu)t - z^2\right) \mathrm{d}z \quad \text{sustituyendo } z = \frac{U-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \\
&= \frac{\exp\{\mu t\}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(z^2 - \sqrt{2}\sigma z t\right)\right) \mathrm{d}z \\
&= \frac{\exp\{\mu t\}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma t\right)^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right) \mathrm{d}z \\
&= \frac{\exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-v^2\right) \mathrm{d}v \quad \text{sustituyendo } v = z - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma t \\
&= \frac{\sqrt{\pi}\exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)}{\sqrt{\pi}} \\
&= \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)
\end{aligned}
$$

Para el caso en donde $\sigma^2 = 1$

$$
= \exp\left(\mu t + \frac{1}{2} t^2\right)
$$

$\square$

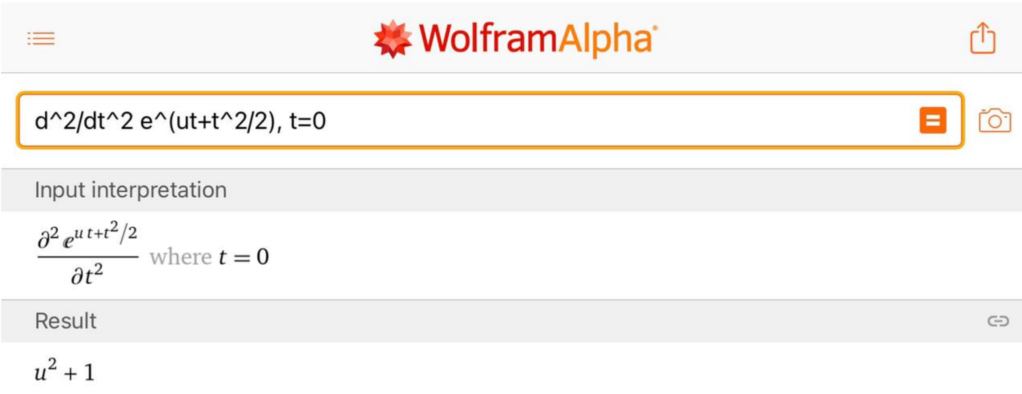
4. d) Calcule $E\left(\overline{Y}^2\right)$ y $E\left(\overline{Y}^4\right)$, utilizando la función generadora de momentos del inciso de $\overline{Y}$.

Solución. Según la literatura:

Valor esperado

$$E(Y^n) = M_Y^{(n)}(0) = \frac{d^n M_Y(0)}{dt^n}$$

Entonces:

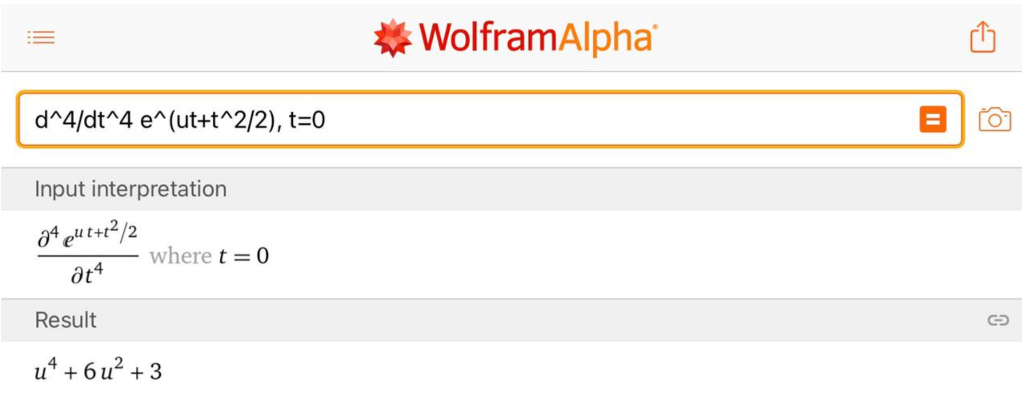


$$E(Y^2) = M_Y^{(2)}(0) = \frac{d^2 M_Y(0)}{dt^2} = \mu^2 + 1$$

Entonces, tenemos $E(Y_i^2) = \mu^2 + 1$ por la deducción del teorema 5.12, podemos asumir que:

$$E(\overline{Y}^2) = \mu^2 + \frac{1}{n}.$$

Por otra parte,



$$E(Y^4) = M_Y^{(4)}(0) = \frac{d^4 M_Y(0)}{dt^4} = \mu^4 + 6\mu^2 + 3$$

Entonces, tenemos $E(Y_i^4) = \mu^4 + 6\mu^2 + 3$ por la deducción del teorema 5.12, podemos asumir que:

$$E(\overline{Y}^4) = \mu^4 + \frac{6\mu^2}{n} + \frac{3}{n^2}.$$

$\square$

5. e) Demuestre que el MUEV (estimador insesgado de varianza mínima) de μ^2 es $\widehat{\mu^2} = \overline{Y}^2 - \frac{1}{n}$.

Solución. Sabemos que $\overline{Y}$ es suficiente para μ. Además, sabemos que $\sigma{=}1$, por lo que $\overline{Y}$ tiene una distribución normal con media μ y varianza $1/n$. Entonces,

$$E(\overline{Y}^2) = \mu^2 + \frac{1}{n} \implies E\left(\overline{Y}^2 - \frac{1}{n}\right) = \mu^2$$

Entonces, tenemos un estimador insesgado de μ^2. Ahora, tomando en cuenta el siguiente teorema:

The Rao–Blackwell Theorem

Let $\hat{\theta}$ be an unbiased estimator for θ such that $VAR(\hat{\theta}) < \infty$. If U is a sufficient statistic for θ, define $\hat{\theta}^* = E(\hat{\theta}|U)$. Then, for all θ,

$$E(\hat{\theta}^*) = \theta \quad \text{y} \quad VAR(\hat{\theta}^*) \leq VAR(\hat{\theta}).$$

Implica que $\hat{\mu}^2 = \overline{Y}^2 - \frac{1}{n}$ es un MVUE de μ^2. □

6. f) Obtenga la $VAR\left(\widehat{\mu^2}\right)$, utilizando el resultado en d).

Solución.

$$VAR(\hat{\mu}^2) = VAR\left(\overline{Y}^2 - \frac{1}{n}\right) = VAR\left(\overline{Y}^2\right) = E(\overline{Y}^4) - [E(\overline{Y}^2)]^2 =$$

$$= \mu^4 + \frac{6\mu^2}{n} + \frac{3}{n^2} - \left[\mu^2 + \frac{1}{n}\right]^2 = \frac{(2 + 4n\mu^2)}{n^2}.$$

□

(Valor 25 puntos).

2. Problema 2

Los estimadores de máxima verosimilitud tienen propiedades interesantes cuando se trabaja con muestras grandes. Suponga que $t(\theta)$ es una función derivable en θ. Por la propiedad de invarianza, se tiene que si $\hat{\theta}$ es el MLE de θ, entonces el MLE de $t(\theta)$ está dada por $t(\hat{\theta})$. En algunas condiciones de regularidad que se cumplen para las distribuciones que se consideren, $t(\hat{\theta})$ es un estimador consistente para $t(\theta)$. Además, para tamaño de muestras grandes,

$$Z = \frac{t(\hat{\theta}) - t(\theta)}{\sqrt{\left[\frac{\partial t(\theta)}{\partial \theta}\right]^2 \Big/ nE\left[-\frac{\partial^2 \ln[f(Y|\theta)]}{\partial \theta^2}\right]}}$$

tiene aproximandamente una distribución normal estándar, donde $f(Y \mid \theta)$ es la función densidad correspondiente a la distribución continua de interés, evaluada en el valor aleatorio Y. En el caso discreto, el resultado análogo se cumple con la función de probabilidad evaluada en el valor aleatorio Y, $p(Y \mid \theta)$, se sustituye por la densidad $f(Y \mid \theta)$.

Nota 1

Under the following conditions

Table 8.1 Expected values and standard errors of some common point estimators

Target Parameter θ	Sample Size(s)	Point Estimator $\hat{\theta}$	$E(\hat{\theta})$	Standard Error $\sigma_{\hat{\theta}}$
μ	n	$\overline{Y}$	μ	$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
p	n	$\hat{p} = \dfrac{Y}{n}$	p	$\sqrt{\dfrac{pq}{n}}$
$\mu_1 - \mu_2$	n_1 and n_2	$\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2$	$\mu_1 - \mu_2$	$\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}^{*\dagger}$
$p_1 - p_2$	n_1 and n_2	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	$p_1 - p_2$	$\sqrt{\dfrac{p_1 q_1}{n_1} + \dfrac{p_2 q_2}{n_2}}^{\dagger}$

*σ_1^2 and σ_2^2 are the variances of populations 1 and 2, respectively.
†The two samples are assumed to be independent.

If the target parameter θ is $\mu, p, \mu_1 - \mu_2$, or $p_1 - p_2$, then for large samples,

$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma_{\hat{\theta}}}$$

possesses approximately a standard normal distribution. Consequently, $Z = \frac{\hat{\theta}-\theta}{\sigma_{\hat{\theta}}}$ forms (at least approximately) a pivotal quantity, and the pivotal method can be employed to develop confidence intervals for the target parameter θ.

For interval confidence the key formula is:

$$\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}}.$$

When $\theta = \mu$ is the target parameter, then $\hat{\theta} = \overline{Y}$ and $\sigma_{\hat{\theta}}^2 = \sigma^2/n$.

Nota 2

Por las condiciones de la nota 1, entonces, el intervalo buscado para Z es:

$$t(\hat{\theta}) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\left[\frac{\partial t(\theta)}{\partial \theta}\right]^2 \Big/ nE\left[-\frac{\partial^2 \ln[f(Y \mid \theta)]}{\partial \theta^2}\right]} \approx$$

$$\approx t(\hat{\theta}) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\left[\frac{\partial t(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}}\right]^2 \Big/ nE\left[-\frac{\partial^2 \ln[f(Y \mid \hat{\theta})]}{\partial \hat{\theta}^2}\right]}$$

En el caso particular, para una variable aleatoria con distribución de Bernoulli, $p(y \mid p) = p^y(1-p)^{1-y}$, donde y $= 0, 1$. Si $Y_1, \ldots, Y_n$ es una muestra aleatoria de tamaño n de dicha distribución.

1. a) Encuentre el MLE para el parámetro p.

Solución. Comenzamos definiendo el MLE, como:

Method of Maximum Likehood

Suppose that the likelihood function depends on k parameters $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k$. Choose as estimates those values of the parameters that maximize the likelihood $L(y_1, y_2, ..., y_n|\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$.

$\implies$ Usando la definición de verosimilitud:

$$\begin{aligned}
p(y|p) &= L(y_1, y_2, \cdots, y_n|p) = p^y(1-p)^{1-y}, \qquad \left(y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \\
\ln\left[p(y|p)\right] &= \ln\left[p^y(1-p)^{1-y}\right] = \ln\left[p^y\right] + \ln\left[(1-p)^{1-y}\right] \\
&= y\ln\left[p\right] + (1-y)\ln\left[(1-p)\right] \\
\frac{\partial \ln\left[p(y|p)\right]}{\partial p} &= \frac{y}{p} + \frac{(1-y)}{(1-p)}(-1) = \frac{y}{p} - \frac{(1-y)}{(1-p)} \qquad (*) \\
\frac{\partial^2 \ln\left[p(y|p)\right]}{\partial p^2} &= -\frac{y}{p^2} - \frac{(1-y)}{(1-p)^2} \qquad (**) \text{ Nos ayudará en el inciso 3. c)}
\end{aligned}$$

Igualando $(*)$ a 0:

$$\frac{y}{\hat{p}} - \frac{(1-y)}{(1-\hat{p})} = 0 \implies \hat{p} = y.$$

□

2. b) Encuentre el MLE para la expresión p(1-p).

Solución. Bajo los supuestos usuales, el MLE de $t(p) = p(1-p)$ es $t(\hat{p}) = \hat{p}(1-\hat{p})$. En donde:

$$\begin{aligned}
t(p) &= p(1-p) = p - p^2 \\
\frac{dt(p)}{dp} &= 1 - 2p
\end{aligned}$$

Igualando a 0:

$$1 - 2\hat{p} = 0 \implies \hat{p} = \frac{1}{2}.$$

□

3. c) Construya un intervalo de confianza de $100(1-\alpha)\,\%$ para $\mathrm{p}(1-\mathrm{p})$, la varianza de dicha distribución (suponga una muestra grande).

Solución. Ahora, tómese como referencia la **Nota 2**. Aún nos falta calcular:

$$E\left[-\frac{\partial^2 \ln[f(Y \mid \hat{\theta})]}{\partial \hat{\theta}^2}\right] = E\left[-\frac{\partial^2 \ln[p(y \mid \hat{p})]}{\partial \hat{p}^2}\right] = \underbrace{E\left[-\left(-\frac{y}{p^2} - \frac{(1-y)}{(1-p)^2}\right)\right]}_{(**) \text{ del inciso 1 a)}} =$$

Sabemos que $\hat{p} = y$, entonces:

$$= \left(\frac{p}{p^2} + \frac{(1-p)}{(1-p)^2} \right) = \frac{1}{p(1-p)}.$$

Entonces, el intervalo de confianza para $p(1-p)$, como se estableció en la **Nota 2**, se define:

$$t(\hat{p}) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\left[\frac{\partial t(\hat{p})}{\partial \hat{p}} \right]^2 \Big/ nE \left[- \frac{\partial^2 \ln[f(Y \mid \hat{p})]}{\partial \hat{p}^2} \right]} =$$

$$= \hat{p}(1-\hat{p}) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{[1-2p]^2 \Big/ n \left(\frac{1}{p(1-p)} \right)} =$$

$$= \hat{p}(1-\hat{p}) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})(1-2\hat{p})^2}{n}}.$$

□

(Valor 25 puntos).

3. Problema 3

Suponga que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ es una muestra aleatoria de la distribución de Poisson con media $\lambda > 0$.

1. a) Encuentre el estimador del método de momentos para λ.

Solución. Comenzamos definiendo el estimador del método de momentos como:

> **Method of moments**
>
> Choose as estimates those values of the parameters that are solutions of the equations $\mu'_k = m'_k$, for $k = 1,2,...,t$, where t is the number of parameters to be estimated.
>
> $$\mu'_k = E(Y^k) \quad \text{and } m'_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i^k.$$

Sabemos por hipótesis que μ=λ. $\Longrightarrow$ El estimador del método de momentos está definido como:

$$\hat{\lambda} = m'_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i^1 = \overline{Y}.$$

□

2. b) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud (MLE) $\hat{\lambda}$ para λ.

Solución. Comenzamos definiendo el MLE, como:

Method of Maximum Likehood

Suppose that the likelihood function depends on k parameters $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k$. Choose as estimates those values of the parameters that maximize the likelihood $L(y_1, y_2, ..., y_n|\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$.

Función de probabilidad de Poisson

Apéndice 2 - Distribuciones discretas, se define como:

$$p(y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}, \quad y = 1, 2, 3, ...$$

$\implies$ Usando la definición de verosimilitud:

$$\begin{aligned}
L(\lambda) &= p(y_1, y_2, \cdots, y_n|\lambda) \\
&= p(y_1|\lambda) \times p(y_2|\lambda) \times \cdots \times p(y_n|\lambda) \\
&= \left\{\frac{\lambda^{y_1} e^{-\lambda}}{y_1!}\right\} \times \left\{\frac{\lambda^{y_2} e^{-\lambda}}{y_2!}\right\} \times \cdots \times \left\{\frac{\lambda^{y} e^{-\lambda}}{y!}\right\} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{y_i} e^{-\lambda}}{y_i!} = \frac{\left(\prod_{i=1}^n \lambda^{y_i}\right)\left(\prod_{i=1}^n e^{-\lambda}\right)}{\prod_{i=1}^n y_i!} = \frac{\left(\lambda^{\sum_{i=1}^n y_i}\right)\left(ne^{-\lambda}\right)}{\prod_{i=1}^n y_i!} \\
\ln\left[L(\lambda)\right] &= \ln\left[\frac{\left(\lambda^{\sum_{i=1}^n y_i}\right)\left(ne^{-\lambda}\right)}{\prod_{i=1}^n y_i!}\right] = \ln\left[\left(\lambda^{\sum_{i=1}^n y_i}\right)\left(ne^{-\lambda}\right)\right] - \ln\left[\prod_{i=1}^{n} y_i!\right] \\
&= \ln\left[\left(\lambda^{\sum_{i=1}^n y_i}\right)\right] + \ln\left[\left(ne^{-\lambda}\right)\right] - \ln\left[\prod_{i=1}^{n} y_i!\right] \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right]\left[\ln(\lambda)\right] - \lambda n - \ln\left[\prod_{i=1}^{n} y_i!\right] \\
\frac{d \ln\left[L(\lambda)\right]}{d\lambda} &= \frac{1}{\lambda}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right] - n - 0
\end{aligned}$$

Igualamos a 0 la expresión:

$$\frac{1}{\hat{\lambda}}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right] - n = 0 \implies \hat{\lambda} = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right] = \overline{Y}$$

□

(Valor 25 puntos).

4. Problema 4

Sea Y una variable aleatoria que representa el número de éxitos en n intentos independientes con probabilidad p de éxito en cada intento. Además,

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

donde

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{si el i-ésimo intento resulta en éxito} \\ 0, & \text{en el otro caso} \end{cases}$$

para i = 1, . . . , n

1. a) Demuestre que $\widehat{p_n} = \frac{Y}{n}$ es un estimador insesgado de p.

   Solución. Tenemos las siguientes denificiones::

   Definición 8.2 - Sesgo

   Let $\hat{\theta}$ be a point estimator for a parameter θ. Then $\hat{\theta}$ is an unbiased estimator if $E(\hat{\theta}) = \theta$. If$E(\hat{\theta}) \neq \theta$, θ is said to be biased.

   Definición 8.3 - Sesgo

   The bias of a point estimator $\hat{\theta}$ is given by $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$.

   A probar: $E(\hat{p}_n) = p$. Entonces:

$$E(\hat{p}_n) = E\left(\frac{Y}{n}\right) = \underbrace{\frac{1}{n}E(Y)}_{\text{Teorema 5.7}} = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n}E\left(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\underbrace{E(Y_1) + E(Y_2) + \cdots + E(Y_n)}_{E(Y_i)=p\text{, definición de valor esperado.}}\right] = \frac{1}{n}[p + p + \cdots + p] = \frac{1}{n}(np) = p$$

   $\square$

2. b) Demuestre que $\widehat{p_n}$ es un estimador consistente de p.

   Solución. Procedemos a calcular la varianza del estimador, es decir:

$$VAR(\hat{p}_n) = \frac{pq}{n}, \quad q = (1-p). \quad \text{(Deducción en el ejercicio 5.28).}$$

   $\Longrightarrow$ Tomamos como referencia el teorema 9.1:

Teorema 9.1

An unbiased estimator $\hat{\theta}_n$ for θ is a consistent estimator of θ if

$$\lim_{n\to\infty} VAR(\hat{\theta}_n) = 0.$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} VAR(\hat{p}_n) = \lim_{n\to\infty} VAR\left(\frac{pq}{n}\right) = VAR(0) = 0.$$

□

3. c) Cuando n es grande, demuestre que la distribución de $\frac{\widehat{p}_n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$ converge a una distribución normal estándar.

Solución. Considerando el teorema del límite central:

Teorema 7.4

Let $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ be independent and identically distributed random variables with $E(Y_i) = \mu$ and $V(Y_i) = \sigma^2 < \infty$. Define

$$U_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\overline{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Then, the distribution function U_n converges to the standard normal distribution function as $n \to \infty$.

Dados los 2 incisos anteriores tenemos $E(Y_i) = p$ y $VAR(Y_i) = p(1-p)$. Por hipótesis, sabemos $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$. Definimos:

$$U_n = \frac{Y - np}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}} = \frac{\frac{Y-np}{n}}{\frac{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}}{n}} = \frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

Por lo tanto, la distribución converge a una distribución normal. □

4. d) Cuando n es grande, demuestre que la distribución de $\frac{\widehat{p}_n - p}{\sqrt{\widehat{p}_n(1-\widehat{p}_n)/n}}$ converge a una distribución normal estándar.

Solución. Sabemos que $\hat{p}_n$ es consistente, por lo que $(1-\hat{p}_n)$ también debe ser consistente; por el inciso b del teorema 9.2, entonces $\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)$ es consiste para $p(1-p)$.

$$\implies \frac{U_n}{W_n} = \frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}}} = \frac{\frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}}{\frac{\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}} = \frac{\underbrace{\frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}}_{\text{Inciso anterior.}}}{\underbrace{\sqrt{\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{p(1-p)}}}_{\text{Su probabilidad converge a 1.}}}$$

Por lo tanto, U_n converge a una distribución normal y la probabilidad de W_n converge a 1. Considerando:

Teorema 9.3

Suppose that U_n has a distribution function that converges to a standard normal distribution function as $n \to \infty$. If W_n converges in probability to 1, then the distribution function of U_n/W_nconverges to a standard normal distribution function.

Se concluye que la distribución U_n/W_n converge a una distribución normal estándar.

$\square$

(Valor 25 puntos)

Referencias

Wackerly, D., Mendenhall, W., and Scheaffer, R. L. (2014). *Mathematical statistics with applications*. Cengage Learning.