Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2036 - Estadística Matemática - Catedrático: Paulo Mejía
21 de mayo de 2021

Parcial 4

Instrucciones: Resuelva los siguientes problema. Favor hacer la solución en latex y cargar el archivo latex y pdf en la tarea de Canvas. Para la resolución de los problemas, se utilizará el libro de Wackerly et al. (2014).

1. Problema 1

Sea $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza 1.

1. a) Demuestre que $\overline{Y}$ es un estimador suficiente para μ.

   Solución. content... □

2. b) ¿Cuál es la distribución de $\overline{Y}$ con sus parámetros? (Incluya la justificación).
3. c) Encuentre la función generadora de momentos de $\overline{Y}$ (Incluya la justificación).
4. d) Calcule $E\left(\overline{Y}^2\right)$ y $E\left(\overline{Y}^4\right)$, utilizando la función generadora de momentos del inciso de $\overline{\boldsymbol{Y}}$
5. e) Demuestre que el MUEV (estimador insesgado de varianza mínima) de μ^2 es $\widehat{\mu^2} = \overline{Y}^2 - \frac{1}{n}$
6. f) Obtenga la $VAR\left(\widehat{\mu^2}\right)$, utilizando el resultado en d). (Valor 25 puntos).

2. Problema 2

Los estimadores de máxima verosimilitud tienen propiedades interesantes cuando se trabaja con muestras grandes. Suponga que $t(\theta)$ es una función derivable en θ. Por la propiedad de invarianza, se tiene que si $\hat{\theta}$ es el MLE de θ, entonces el MLE de $t(\theta)$ está dada por

$t(\hat{\theta})$. En algunas condiciones de regularidad que se cumplen para las distribuciones que se consideren, $t(\hat{\theta})$ es un estimador consistente para $t(\theta)$. Además, para tamaño de muestras grandes,

$$Z = \frac{t(\hat{\theta}) - t(\theta)}{\sqrt{\left[\frac{\partial t(\theta)}{\partial \theta}\right]^2 \Big/ nE\left[-\frac{\partial^2 \ln[f(Y|\theta)]}{\partial \theta^2}\right]}}$$

tiene aproximandamente una distribución normal estándar, donde $f(Y \mid \theta)$ es la función densidad correspondiente a la distribución continua de interés, evaluada en el valor aleatorio Y. En el caso discreto, el resultado análogo se cumple con la función de probabilidad evaluada en el valor aleatorio Y, $p(Y \mid \theta)$, se sustituye por la densidad $f(Y \mid \theta)$. En el caso particular, para una variable aleatoria con distribución de Bernoulli, $p(y \mid p) = p^y(1-p)^{1-y}$, donde y $= 0, 1$. Si $Y_1, \ldots, Y_n$ es una muestra aleatoria de tamaño n de dicha distribución.

1. a) Encuentre el MLE para el parámetro p.

   Solución. content... □

2. b) Encuentre el MLE para la expresión p(1-p).
3. c) Construya un intervalo de confianza de $100(1-\alpha)\,\%$ para p$(1-$p), la varianza de dicha distribución (suponga una muestra grande).

(Valor 25 puntos).

3. Problema 3

Suponga que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ es una muestra aleatoria de la distribución de Poisson con media $\lambda > 0$.

1. a) Encuentre el estimador del método de momentos para λ.
2. b) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud (MLE) $\hat{\lambda}$ para λ. (Valor 25 puntos).

4. Problema 4

Sea Y una variable aleatoria que representa el número de éxitos en n intentos independientes con probabilidad p de éxito en cada intento. Además,

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

donde

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{si el i-ésimo intento resulta en éxito} \\ 0, & \text{en el otro caso} \end{cases}$$

para i $= 1, \ldots,$ n

1. a) Demuestre que $\widehat{p_n} = \frac{Y}{n}$ es un estimador insesgado de p.
2. b) Demuestre que $\widehat{p_n}$ es un estimador consistente de p.
3. c) Cuando n es grande, demuestre que la distribución de $\frac{\widehat{p_n}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$ converge a una distribución normal estándar.
4. d) Cuando n es grande, demuestre que la distribución de $\frac{\widehat{p_n}-p}{\sqrt{\widehat{p_n}(1-\widehat{p_n})/n}}$ converge a una distribución normal estándar.

(Valor 25 puntos)

Referencias

Wackerly, D., Mendenhall, W., and Scheaffer, R. L. (2014). *Mathematical statistics with applications*. Cengage Learning.