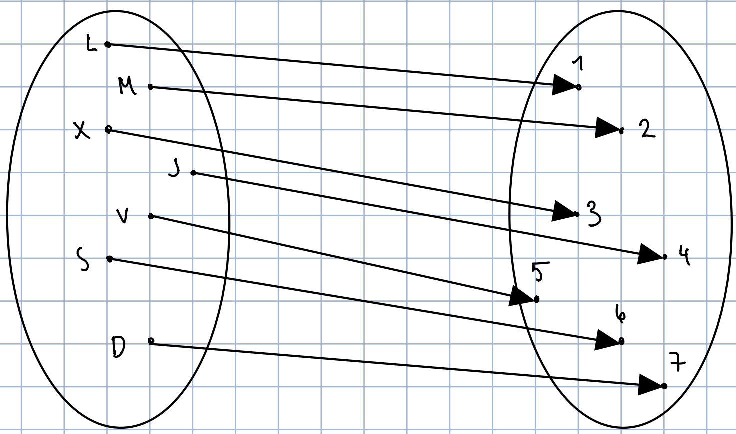
Técnicas de conteo: principios básicos

Una de las primeras cosas que aprendimos en relación a las matemáticas fue a **contar**. Todos recordamos aquellos lejanos días en el *kinder* cuando la maestra preguntaba:

¿Cuántos son los días de la semana?

Aunque posiblemente lo ignorábamos, el proceso de contar consiste en *asignar* a cada día uno y solo uno de los números naturales, es decir, definir una función biyectiva del conjunto de los días de la semana al conjunto de los primeros números 7 naturales. En símbolos:

$f: X \to Y$, en donde $X = \{L, M, X, J, V, S, D\}$ & $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ de manera que:



⚠️ Aunque la asignación como tal podría variar, lo importante es que la función es biyectiva y nos permite concluir que el número de días de la semana es 7. ¡Eso es contar!

Esta asignación puede realizarse fácilmente pues el número de elementos en los conjuntos involucrados es pequeño. Hay situaciones en las que este proceso es, por decir lo menos, muy impráctico.

Estamos interesados en desarrollar técnicas que nos permitan contar *grandes cantidades de objetos* de manera *eficiente* y *precisa*.

El principio de la suma

Si una tarea se puede realizar de m formas, otra tarea se puede realizar de n formas y ambas tareas son independientes (en el sentido que no pueden realizarse de manera simultánea), entonces hay $m + n$ formas de realizar alguna de estas tareas (pero no ambas).

Ejemplo 1. Supongamos que una estantería hay 5 líbros de matemática y 4 libros de física. ¿De cuántas maneras podemos escoger un libro?

Por el principio de la suma, hay $5 + 4 = 9$ maneras posibles para elegir un libro.

Definición. Si A y B son conjuntos finitos tales que $|A| = m$, $|B| = n$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Esto es lo que se conoce como el **principio de la suma**.

Ejemplo 2. Alice puede viajar de Miamia a Orlando por vía aérea o por vía terrestre. Si tiene a su disposición 3 líneas aéreas y 6 líneas terrestres, ¿de cuántas maneras puede realizar el viaje?

Por el principio de la suma, hay 3 + 6 = 9 diferentes formas de completar el viaje.

Ejemplo 3. ¿Cuántos números entre 1 y 50 son múltiplos de 7 u 11?

Sean $A = \{x : x = 7k,\ 1 \leq x \leq 50\} = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$ y $B = \{x : x = 11k,\ 1 \leq x \leq 50\} = \{11, 22, 33, 44\}$ conjuntos.

Entonces, notemos que entre 1 y 50 no hay números que sean múltiplos de 7 y múltiplos de 11.

Entonces, por el principio de la suma tenemos $|A| + |B| = 7 + 4 = 11$ números que son múltiplos de 7 u 11.

De forma alternativa, sin necesidad de listarlos:

Entre 1 y 50 hay (50 - 1) + 1 = 50 números.

$\left\lfloor \frac{50}{7} \right\rfloor = 7$ → múltiplos de 7 $\qquad$ $\left\lfloor \frac{50}{11} \right\rfloor = 4$ → múltiplos de 11

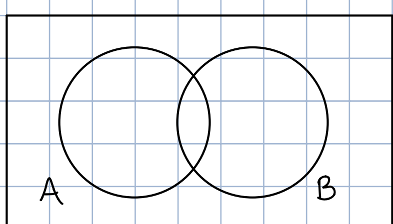
esta es la función
piso o *floor*

Ejemplo 4. Un mazo estándar de 52 cartas consta de 4 palos (corazones ♥️, diamantes ♦️, picas/espadas ♠️ y tréboles ♣️), cada una con 13 valores diferentes (A, 2, 3, 4, ..., J, Q, K).

El número de formas en las que se puede seleccionar una carta roja o una figura (J, Q o K) NO es 26 + 12 = 38, ¿por qué?

El número de cartas rojas es 13 + 13 = 26 (13 corazones y 13 diamantes).
El número de figuras es 3 + 3 + 3 + 3 = 12

⚠️ La respuesta no es simplemente la suma, ya que hay cartas rojas que también son figuras.



Sean A el conjunto de cartas rojas y B el conjunto de figuras. Entonces:

$$A \cap B \neq \emptyset$$

Hay 6 cartas que son rojas y figuras. Al contar por separado las rojas (son 26) y las figuras (son 12), estas 6 cartas fueron contadas **2 veces**. Esto puede *corregirse* al restar 6 de la suma:

$$26 + 12 - 6 = 32$$

Definición. Si A y B son conjuntos finitos y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Esto es lo que se conoce como el **principio de inclusión-exclusión**.

Ejemplo 5. ¿Cuántos números entre 1 y 100 son múltiplos de 3 o 5?

$$\left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33 \quad , \quad \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20 \quad y \quad \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor = 6$$

múltiplos de 3 y 5, son
múltiplos de $15 = 3 \cdot 5$

Finalmente, por el principio de inclusión-exclusión: $33 + 20 - 6 = 47$.

El principio del producto

Si una tarea se realiza en dos etapas, en donde la primera se puede realizar de m formas y, si para cada una de ellas la segunda etapa se puede realizar de n formas distintas, entonces la tarea completa se puede realizar de $m \cdot n$ formas diferentes.

Ejemplo 6. Si se desea escoger un postre y una bebida, teniendo 5 opciones para el postre y 6 opciones para la bebida, ¿de cuántas maneras puede escogerse un postre y una bebida?

La tarea consiste en escoger un postre y una bebida, la cual puede hacerse en dos etapas:
1. Escoger un postre → 5
2. Escoger una bebida → 6

Entonces, por el principio del producto tenemos $5 \cdot 6 = 30$ opciones para escoger un postre y una bebida.

Definición. Si A y B son conjuntos finitos tales que $|A| = m$, $|B| = n$, entonces:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = m \cdot n$$

Este es el **principio del producto**.

Ejemplo 7. ¿Cuántas diferentes placas de carro pueden formarse usando 3 letras y 3 dígitos?

Sean A el conjunto de letras $\rightarrow |A| = 26$ y B es el conjunto de dígitos $\rightarrow |B| = 10$. La tarea consiste en formar una placa, la cual puede desarrollarse en 6 etapas:

$$L_1 L_2 L_3 D_1 D_2 D_3$$

Entonces, por el principio del producto el número de placas que podemos formar es:

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^3 = 17{,}576{,}000$$

Ejercicio 8. Bob, quien vive en Springfield IL, quiere visitar NY City. Puede escoger entre 3 servicios de bus y 2 servicios de tren para llegar de Springfield a Chicago. De allí, puede escoger entre 2 líneas aéreas o 3 líneas de trenes rápidos para llegar a NY City. ¿De cuántas diferentes opciones dispone Bob para realizar su viaje?