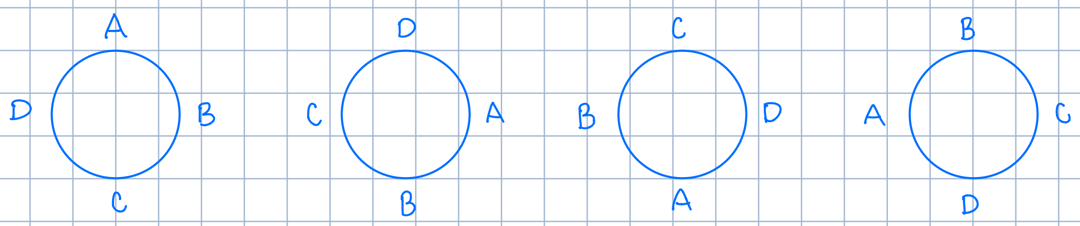
Permutaciones circulares

Definición. Una **permutación circular** es una permutación en la cual los objetos se ordenan en un círculo.

Ejemplo 1. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar 4 personas al rededor de una mesa redonda, si se considera que 2 configuraciones son *equivalentes* si una se puede obtener a partir de una rotación de la otra?

Consideremos 4 personas: A, B, C & D. Una posible configuración es la siguiente:



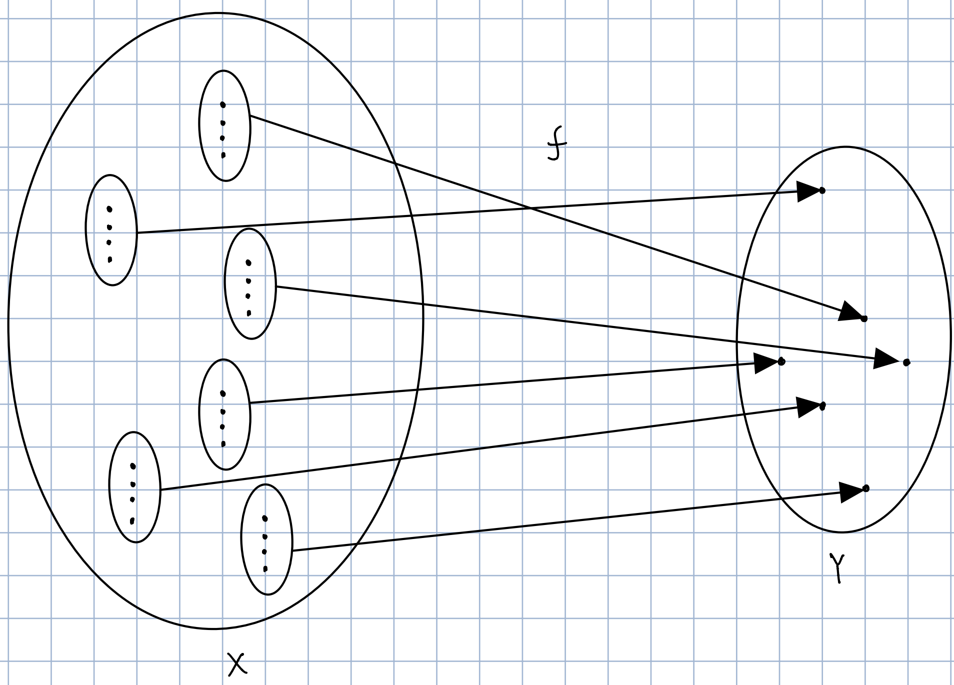
⚠️ Tenemos 4 configuraciones equivalentes

Podemos representar cada configuración como una permutación de las cuatro personas:

ABCD DABC CDAB BCDA

Definimos el conjunto X como el conjunto de permutaciones de 4 personas e Y como el conjunto de configuraciones válidas en las que podemos sentar a 4 personas al rededor de una mesa redonda.

⚠️ La función f es 4 a 1



Entonces, $|X| = 4\,|Y| \rightarrow |Y| = |X|/4 = 4!/4 = 3! = 6$.

En general, definimos al conjunto X como el conjunto de todas las permutaciones de n objetos y el conjunto Y como el conjunto de todas las configuraciones válidas en las que podemos colocar los n objetos en forma circular.

Entonces, existe una función n a 1, $f: X \rightarrow Y$ de manera que $|Y| = |X|/n = n!/n = (n-1)!$

Combinaciones

Definición. Dada un conjunto con n elementos, se le llama ***r*-combinación** a una selección no ordenada (el orden no importa) de $r \leq n$ elementos de dicho conjunto.

👨‍🏫 La forma más común de referirnos a una r-combinación es simplemente una combinación de r elementos.

Primero, contamos el número de selecciones ordenadas de r elementos de un conjunto con n elementos (r-permutación):

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Luego, el número de permutaciones de cada selección ordenada de r objetos es $P(r,r) = r!$. Entonces podemos asegurar que existe una función $r!$ a 1 del conjunto de selecciones ordenadas de r objetos X al conjunto de selecciones no ordenadas de r objetos Y. Por lo tanto:

$$|X| = r!\,|Y| \rightarrow |Y| = \frac{|X|}{r!} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

👨‍🏫 Usamos la simbología $C(n,r) = n!/r!(n - r)!$ para representar una combinación de r objetos de un conjunto con n objetos.

Ejemplo 2. Un mazo estándar de 52 cartas consta de 4 palos (corazones ❤️, diamantes ♦️, espadas ♠️ y tréboles ♣️), cada una con 13 valores diferentes (A, 2, 3, 4, ..., J, Q, K).

¿De cuántas maneras distintas es posible seleccionar 5 cartas de un mazo estándar?

⚠️ Los problemas de conteo de cartas son ejemplos clásicos de combinaciones.

Entonces, $C(52,5) = 2{,}598{,}960$ es el número de selecciones no ordenadas de 5 cartas.

Ejemplo 3. ¿De cuántas maneras distintas es posible seleccionar 12 países para formar un comité de la ONU, si 3 de ellos se eligen de un bloque de 45, 4 de un bloque de 57 y el resto de las 69 naciones restantes?

Para formar un comité de 12 países, seguimos 3 etapas:

Etapa 1: Escoger 3 de 45 → $C(45,3) = 14{,}190$
Etapa 2: Escoger 4 de 57 → $C(57,4) = 395{,}010$
Etapa 3: Escoger 5 de 69 → $C(69,5) = 11{,}238{,}513$

Por el principio del producto podemos seleccionar 12 países de $C(45,3) \cdot C(57,4) \cdot C(69,5)$.

Ejemplo 4.

(a) ¿Cuántas cadenas binarias de longitud 5 hay?

$$\underset{B_5}{\underline{2}} \cdot \underset{B_4}{\underline{2}} \cdot \underset{B_3}{\underline{2}} \cdot \underset{B_2}{\underline{2}} \cdot \underset{B_1}{\underline{2}} = 2^5 = 32$$

(b) ¿Cuántas cadenas binarias de longitud 5 tienen exactamente 3 ceros?

⚠️ Este problema se puede entender como un problema de selección no ordenada de *las posiciones* de los bits (ya se las 0's o los 1's).

El número de casillas disponibles es $n = 5$ y debemos escoger las posiciones de $r = 3$ ceros, esto puede hacerse de $C(5,3) = 10$ formas diferentes.

Luego, el número de casillas disponibles para los 1's es $n = 2$ y debemos escoger las posiciones de $r = 2$ unos, esto puede hacerse de $C(2,2) = 1$ formas diferentes.

Por el principio del producto concluimos que hay $C(5,3) \cdot C(2,2) = C(5,3) = 10$.

MAC