El principio del buen orden

El principio del buen orden. Todo subconjunto *no vacío* de $\mathbb{N}$ contiene un elemento mínimo (en el sentido de la relación menor o igual $\leq$).

Por lo general, un conjunto que cumple con esta propiedad se dice que es *bien ordenado*.

Teorema. *Principio de inducción matemática*.

Sea $S(n)$ una proposición abierta, en la que aparece una o varias veces la variable $n \in \mathbb{N}$.

a) Si $S(1)$ es verdadera; y
b) siempre que $S(k)$ sea verdadera (para algún $k \in \mathbb{N}$ particular, pero elegido al azar), entonces $S(k + 1)$ será verdadera;

entonces $S(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prueba: Sea $S(n)$ una proposición abierta que satisface las condiciones a) y b). Definimos el conjunto:

$$F = \{t \in \mathbb{N} : S(t) \text{ es falsa}\}$$

🧑‍🏫 Queremos mostrar que $F = \emptyset$, entonces vamos usar un argumento por *contradicción*.

Suponemos (para fines de la contradicción) que $F \neq \emptyset$. Entonces, por el principio del buen orden, F tiene un elemento mínimo s. Como $S(1)$ es verdadera, $s \neq 1$, por lo que $s > 1$ y, en consecuencia, $s - 1 \in \mathbb{N}$. Luego, $s - 1 \notin F$ [esto pues $s - 1 < s$ y s es el mínimo de F], entonces $S(s - 1)$ es verdadera. Así, se sigue que si escribimos $k = s - 1$ y como $S(k)$ es verdadera, entonces $S(k + 1) = S(s - 1 + 1) = S(s)$ es verdadera. Por lo tanto $s \notin F$, lo que contradice a $s \in F$. La contradicción surge de haber supuesto $F \neq \emptyset$. Por lo tanto, $F = \emptyset$.

$\therefore S(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

El principio de inducción matemática

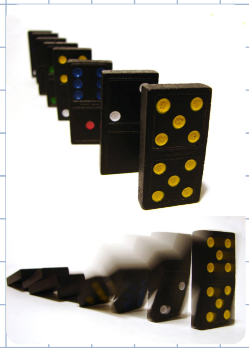
La **inducción matemática** es una regla de inferencia que nos permite demostrar proposiciones abiertas de la variable n. En general, no es necesario que $S(1)$ sea verdadera, sino lo que basta es que $S(n_0)$ sea verdadera para algún $n_0 \geq 1$. En ese caso, reformulamos el principio de inducción matemática:

Sea $S(n)$ una proposición abierta definida sobre un conjunto infinito $\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, ...\}$. Si se cumplen ambas:

a) $S(n_0)$ es verdadera, y
b) siempre que $S(k)$ es verdadera, entonces $S(k + 1)$ es verdadera con $k \geq n_0$,

entonces $S(n)$ es verdad para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

🧑‍🏫 La inducción matemática puede entenderse mejor si usamos una analogía: el *efecto dominó*

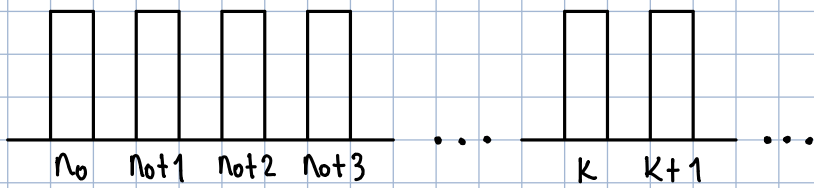


Según Wikipedia,

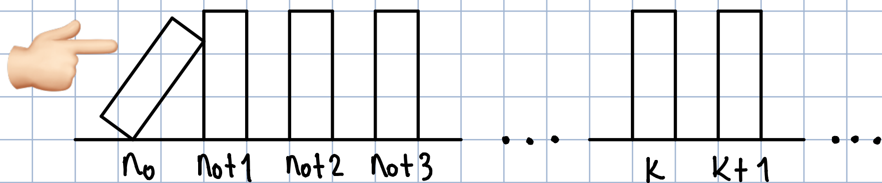
*El **efecto dominó** o reacción en cadena es el efecto acumulativo producido cuando un acontecimiento origina una cadena de otros acontecimientos similares.*

Se produce cuando un pequeño cambio origina un cambio similar a su lado, que a su vez causa otro similar, y así sucesivamente en una secuencia lineal.

El conjunto $\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\}$ es representado por una *fila (infinita) de piezas de dominó, en la que cada una de las fichas, está asociada con exactamente un número del conjunto.*

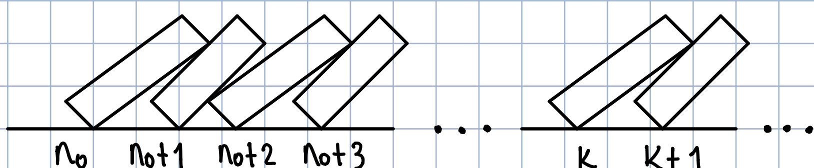


La premisa $S(n_0)$ es verdad se «traduce» a: *la primera pieza de dominó cae.*



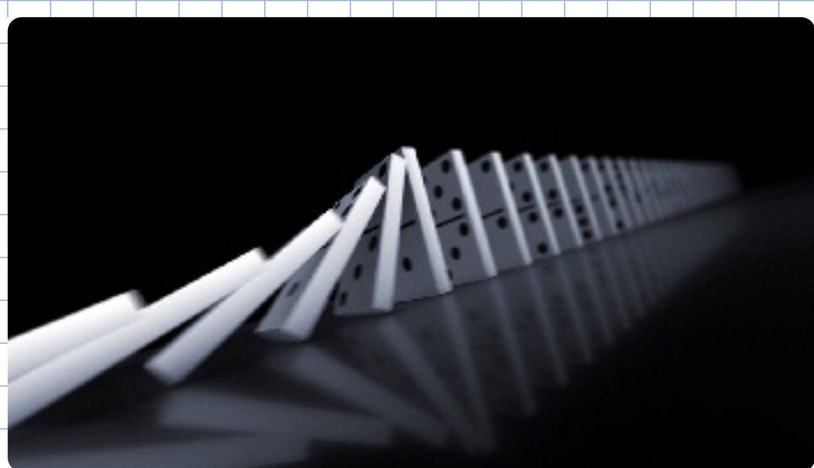
La premisa siempre que $S(k)$ es verdad, entonces $S(k + 1)$ es verdad, para algún $k \geq n_0$, se «traduce» a:

si siempre que se cae algún dominó (asociado con k), entonces se cae el siguiente dominó (asociado con k+1)



La conclusión $S(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$, se «traduce» a:

todas las fichas de dominó caen



Ejemplo 1. Demuestre por inducción matemática la proposición:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(C) Theoni Pappas, 1993

<u>*Prueba*</u>: Por inducción matemática.

Sea $S(n)$: $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$, $n \geq 1$.

👨‍🏫 Cuenta la historia que *«J.B. Büttner, maestro de un colegio alemán, castigó a todos los niños a sumar los 100 primeros números naturales para tenerlos entretenidos y callados un buen rato. Carl Friedrich Gauss obtuvo la respuesta casi de inmediato».*

<u>Paso base</u>: Demostramos $S(1)$.

$$S(1):\ 1 = \frac{1\,\cancel{(1+1)}}{\cancel{2}} = 1$$

<u>Paso inductivo</u>: Asumimos que $S(k)$, $k \geq 1$, es verdadera:

⚠️ A esta suposición la llamamos ***hipótesis inductiva***.

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

👨‍🏫 Sustituimos en $S(n)$ la n por k

demostramos que $S(k)$ implica $S(k+1)$:

$$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

hipótesis inductiva

👨‍🏫 Sustituimos en el **lado izquierdo** de $S(n)$ la variable n por $k+1$.

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

👨‍🏫 Usamos la *hipótesis inductiva* para demostrar que es igual a solamente sustituir la n por $k+1$ en el lado derecho de $S(n)$.

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

$\rightarrow S(k+1)$ es verdadera

$\therefore S(n)$ es verdadera para todo $n \geq 1$. $\square$

⛔ La inducción matemática **no consiste** en sustituir de <u>ambos</u> lados de $S(n)$ la n por $k+1$, pues esto sería *usar lo que queremos demostrar como argumento*.