Relaciones de equivalencia

Repaso:

$$A = \{1,2,3,4\} \qquad R = \{(1,2),(2,1),(1,1)\}$$

Propiedades:

Reflexividad $\forall a \in A,\ (a,a) \in R$

Transitividad $\forall a,b,c \in A,\ (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R$

Simetría $\forall a,b \in A,\ (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$

Antisimetría $\forall a,b \in A,\ (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \rightarrow a = b$

$$a \neq b \rightarrow (a,b) \notin R \vee (b,a) \notin R$$

Definición. Una relación R sobre un conjunto A que satisface las siguientes propiedades:
1. Reflexividad
2. Simetría
3. Transitividad

se llama **relación de equivalencia sobre el conjunto A**.

Ejemplo 1. Sea $A = \{0, 1, 2, ..., 9\}$ un conjunto y R una relación sobre A tal que:

$$R = \{(a, b) : a - b \text{ es par}\}$$

a) Enumere los elementos de R.

$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (1, 9), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (3, 9), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (5, 7), (5, 9),$
$(7, 1), (7, 3), (7, 5), (7, 7), (7, 9), (9, 1), (9, 3), (9, 5), (9, 7), (9, 9) (0, 0), (0, 2), (0, 4), (0, 6), (0, 8),$
$(2, 0), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (4, 0), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (4, 8), (6, 0), (6, 2), (6, 4), (6, 6), (6, 8),$
$(8, 0), (8, 2), (8, 4), (8, 6), (8, 8)\}$

Esta relación «partió» al conjunto A en dos *categorías*: **pares** & **impares**

b) Determine si R es una relación de equivalencia.

Nota: **Todos** los números pares tienen la forma $2n$, en donde $n \in \mathbb{Z}$.

Reflexividad: Sea $a \in A$. Luego, $a - a = 0 = 2 \cdot 0$ es par $\rightarrow (a, a) \in R$ $\quad \therefore R$ es reflexiva.

Simetría: Sean $a, b \in A$. Suponemos $(a, b) \in R \rightarrow a - b = 2n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.
Luego, $b - a = -(a - b) = -2n \rightarrow (b, a) \in R$. $\quad \therefore R$ es simétrica.

Transitividad: Sean $a, b, c \in A$. Suponemos $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow a - b = 2n \wedge b - c = 2m,\ n, m \in \mathbb{Z}$.
Luego, $a - c = (a - b) + (b - c) = 2n + 2m = 2(n + m) = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \rightarrow (a, c) \in R$. $\quad \therefore R$ es transitiva.

En conclusión, R es una relación de equivalencia.

Definición. Si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto A y $a \in A$, entonces el conjunto definido como:

$$[a] = \{x \in A : (a, x) \in R\}$$

👨‍🏫 En palabras, el conjunto de todos los elementos en A que están relacionados con a.

se le llama **clase de equivalencia de *a***.

Ejemplo 2. Sean $X = \{a, b, c, d\}$ e $Y = \{a, d\}$ conjuntos y R una relación de equivalencia sobre el conjunto de todos los subconjuntos de X tal que:

$$R = \{(A, B) : A \cap Y = B \cap Y\}$$

Definición. Dado un conjunto A, al conjunto de todos los subconjuntos del conjunto A se llama **conjunto potencia de *A***. En símbolos lo representamos como $P(A)$.

👨‍🏫 En este ejemplo, el conjunto $P(X)$ (sobre el que está definida R) es:

$$P(X) = \{\varnothing, \{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$$

a) ¿La pareja $(\{a, c\}, \{a, c, d\}) \in R$?

Hacemos $\{a, c\} \cap Y = \{a\}$ & $\{a, c, d\} \cap Y = \{a, d\}$ $\quad \therefore (\{a, c\}, \{a, c, d\}) \notin R$

b) ¿La pareja $(\varnothing, \{b, c\}) \in R$?

Hacemos $\varnothing \cap Y = \varnothing$ & $\{b, c\} \cap Y = \varnothing$ $\quad \therefore (\varnothing, \{b, c\}) \in R$

c) Liste los elementos en la clase de equivalencia de $\{b,c,d\}$.

Primero, $\{b,c,d\} \cap Y = \{d\}$

Entonces, $[\{b,c,d\}] = \{\{d\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{b,c,d\}\}$

👨‍🏫 La clase de equivalencia del conjunto $\{b,c,d\}$ tiene a todos los conjuntos que tienen en común el elemento d con el conjunto Y.

⚠️ Todo elemento pertenece a su propia clase de equivalencia (ver el conjunto en azul).

d) Liste los elementos en las clases de equivalencia de $\varnothing$, $\{a\}$ & $\{a,d\}$.

Hacemos $\varnothing \cap Y = \varnothing$, $\{a\} \cap Y = \{a\}$ & $\{a,d\} \cap Y = \{a,d\}$. Entonces:

$[\varnothing] = \{\varnothing, \{b\},\{c\},\{b,c\}\}$
$[\{a\}] = \{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$
$[\{a,d\}] = \{\{a,d\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$