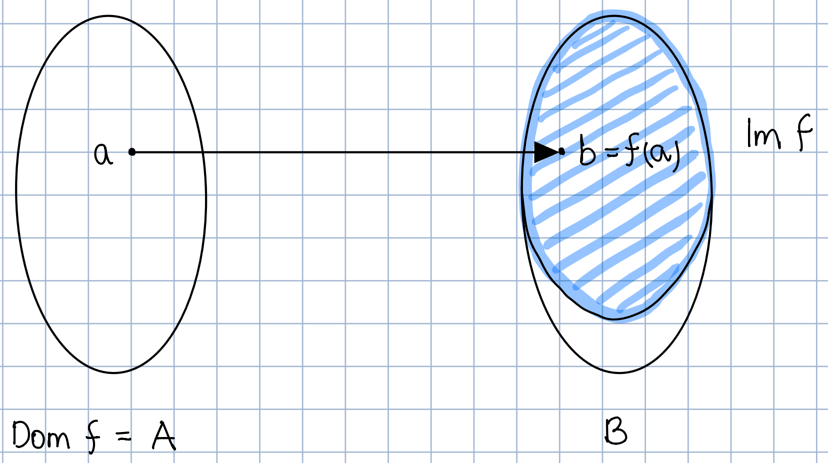
Funciones

Definición. Una *función* es una terna ordenada (f, A, B), en donde f es una regla que asigna a cada elemento del conjunto A (*dominio*) un elemento del conjunto B (*contradominio*).

Por lo general escribimos (f, A, B) como $f : A \to B$ tal que $\forall a \in A\ \exists_1\ b \in B$ tal que $f(a) = b$.



Definición. El conjunto de elementos del contradominio que son asignados a cada elemento del dominio, recibe el nombre de *imagen* (*o rango*) de la función. En símbolos:

$$\operatorname{Im} f = \{y \in B : y = f(x) \text{ para alguna } x \in A\}$$

<u>Observaciones</u>:

- En general, tenemos que $\operatorname{Im} f \subseteq B$.
- Cuando escribimos $y = f(x)$, es usual decir que y es la imagen bajo f de x.
- Evidentemente, podemos asegurar que una función es una relación con la característica de que cada primer elemento de las parejas ordenadas admite únicamente un segundo elemento. Es por esta razón que a las funciones a veces se les llama *relaciones uniformes o univaluadas*.

Ejemplo 1. Son ejemplos de funciones

a) Sean A el conjunto de estudiantes de la UVG y B el conjunto de números enteros positivos. Definimos la función $f : A \to B$, en donde f asigna a cada estudiante un número de carnet.

Notemos que $\operatorname{Im} f \subset B$, ya que hay números enteros positivos que NO son un número de carnet.

b) Sean A el conjunto de carreras de la UVG y B el conjunto de cursos del Depto. De Matemática. Definimos la relación $g : A \to B$, en donde g asigna a cada carrera un curso del Depto. De Matemática. Esta no es una función, ya que una carrera, por ejemplo, Ing. Ciencia de Datos «lleva» más de un curso del Depto. De Matemática.

⚠️ Toda función es una relación, mas no toda relación es una función.

Definición. Sea $f : A \to B$ una función. Al subconjunto de $A \times B$ cuyas parejas ordenadas tienen la forma:

$$(x, f(x)) \text{ en donde } x \in A$$

se le conoce como la *gráfica de la función f*. En símbolos:

$$\operatorname{Gr} f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

⚠️ Lo que conocemos como «gráfica» (haciendo referencia a un dibujo) es, en realidad, la *representación gráfica de la gráfica de una función*.

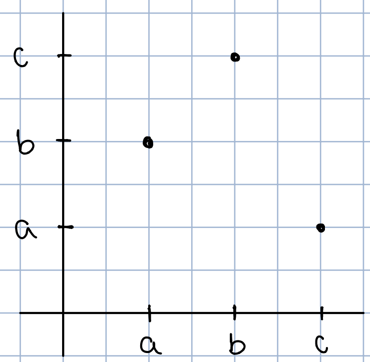
Ejemplo 2. Sea $A = \{a, b, c\}$ un conjunto y $f : A \to A$, tal que:

$$f(a) = b; \quad f(b) = c; \quad f(c) = a$$

una función.

La gráfica de f es: $\operatorname{Gr} f = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$.

Por otro lado, la representación gráfica de $\operatorname{Gr} f$ es:



Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Definición. Sea f: $A \to B$ una función. Se dice que f es *inyectiva* (o uno a uno) si puntos diferentes en Dom f tienen imágenes diferentes en Im f. En símbolos:

$$a \neq a' \to f(a) \neq f(a')$$

Lo anterior es equivalente, por contrapositiva, a escribir $f(a) = f(a') \to a = a'$.

Ejemplo 3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (se suele decir que está definida *en* $\mathbb{R}$); $f(x) = x^2$ una función.

La función no es inyectiva ya que, por ejemplo, $f(1) = f(-1) = 1$ pero $1 \neq -1$. En palabras, imágenes iguales provienen de x's diferentes.

Ejemplo 4. Sea h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $h(x) = x + 1$ una función.

Sean $x_1, x_2 \in$ Dom h. Entonces,

Supongamos $h(x_1) = h(x_2) \to x_1 + \cancel{1} = x_2 + \cancel{1} \to x_1 = x_2$.

$\therefore$ h es inyectiva.

Definición. Sea $f: A \to B$ una función. Se dice que f es *sobreyectiva* (o simplemente *sobre*) si el conjunto Im f es igual al contradominio B. En símbolos:

$$\forall y \in B \ \exists \ x \in A \text{ tal que } y = f(x)$$

Ejemplo 5. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; g(x) = x^2$ una función.

La función g no es sobreyectiva ya que no existe $x \in$ Dom g tal que, por ejemplo, $-1 = f(x)$.

Im $g = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} \subset \mathbb{R}$.

Definición. Sea $f: A \to B$ una función. Se dice que f es *biyectiva* cuando f es inyectiva y sobreyectiva, es decir:

- $f(a) = f(a') \to a = a'$
- $\forall y \in B \ \exists \ x \in A$ tal que $y = f(x)$