Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2015 - Matemática Discreta - Catedrático: Mario Castillo
26 de mayo de 2021

Tarea 6

1. Problema 1.

Demuestre las siguientes propiedades de la divisibilidad para enteros a, b & c.

a. Si $a|b$ y $b|c$, entonces $a \mid c$.

Solución. Sean $m, n \in \mathbb{Z}$. Por hipótesis tenemos:

$$b = ma \qquad \text{y} \qquad c = nb.$$

Ahora bien, debemos probar

$$c = ka, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

En donde

$$c = nb = nma = ka.$$

$\therefore$ a divide a $c \implies c|a$. $\square$

b. Si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid \text{mcd}(b, c)$

Solución. Sean $n, m \in \mathbb{Z}$. Por hipótesis tenemos:

$$b = ma \qquad \text{y} \qquad c = na.$$

Además, por el teorema de Bézout, el $\text{mcd}(b, c)$ se puede expresar como $\text{mcd}(b, c) = k_1 b + k_2 c$. Ahora bien, debemos probar

$$k_1 b + k_2 c = ka, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

En donde

$$k_1 b + k_2 c = k_1(ma) + k_2(na) = (k_1 m + k_2 n)a = ka.$$

$\therefore$ a divide a $\text{mcd}(b, c) \implies a|\text{mcd}(b, c)$. $\square$

c. Si $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $\mathrm{mcm}(a,b) \mid c$.

Solución. Sean $m, n \in \mathbb{Z}$. Por hipótesis tenemos:

$$c = ma \implies a = \frac{c}{m} \qquad \text{y} \qquad c = nb \implies b = \frac{c}{n}.$$

Además, por el teorema de 5 de la sección 4 de Rosen and Krithivasan (2012), sabemos

$$\mathrm{mcm}(a,b) = \frac{ab}{\mathrm{mcd}(a,b)}.$$

Por el teorema de Bézout, $\mathrm{mcd}(a,b) = sa + tb$. Ahora bien, debemos probar

$$c = k\frac{ab}{\mathrm{mcd}(a,b)}, \quad k := (sn + tm) \in \mathbb{Z}.$$

Entonces

$$k\frac{ab}{sa+tb} = k\frac{\left(\frac{c}{m}\right)\left(\frac{c}{n}\right)}{s\left(\frac{c}{m}\right) + t\left(\frac{c}{n}\right)} = k\frac{\frac{c^2}{mn}}{\frac{scn+tcm}{mn}} = k\frac{c^2}{c(sn+tm)} = k\frac{c}{sn+tm} = c.$$

Por lo tanto $\mathrm{mcm}(a,b)$ divide a c. $\implies \mathrm{mcm}(a,b)|c$. □

2. Problema 2.

Pruebe que $n^5 - n$ siempre es divisible por 30, para todo entero positivo n.

FERMAT'S LITTLE THEOREM

If p is prime and a is an integer not divisible by p, then $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Furthermore, for every integer a we have $a^p \equiv a \pmod p$.

Solución. Trivial. A probar:

$$n^5 - n = 30c, \qquad c \in \mathbb{Z}.$$

En módulo 5 la expresión sería

$$n^5 - n = 0.$$

Entonces, por el teorema pequeño de Fermat

$$n^5 \equiv n \qquad \mod 5.$$

□

3. Problema 3.

Encuentre el máximo común divisor de los siguientes pares de números:

a. 542 y 234

Solución. Por el algoritmo de Euclides:

$$\begin{aligned} 542 &= 2 * 234 + 74 \\ 234 &= 3 * 74 + 12 \\ 74 &= 6 * 12 + 2 \\ 12 &= 6 * 2 + 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ mcd$(542, 234)$=2. □

b. 9652 y 252

Solución.

$$\begin{aligned} 9652 &= 252 * 38 + 76 \\ 252 &= 76 * 3 + 24 \\ 76 &= 24 * 3 + 4 \\ 24 &= 4 * 6 + 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ mcd$(9652, 252)$=4. □

c. 8374 y 24517

Solución.

$$\begin{aligned} 24517 &= 8374 * 2 + 7769 \\ 8374 &= 7769 * 1 + 605 \\ 7769 &= 605 * 12 + 509 \\ 605 &= 509 * 1 + 96 \\ 509 &= 96 * 5 + 29 \\ 96 &= 29 * 3 + 9 \\ 29 &= 9 * 3 + 2 \\ 9 &= 2 * 4 + 1 \\ 2 &= 1 * 2 + 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ mcd$(8374, 24517)$=1. □

d. 24537 y 1387

Solución.

$$\begin{aligned}
24537 &= 1387 * 17 + 958\\
1387 &= 958 * 1 + 429\\
958 &= 429 * 2 + 100\\
429 &= 100 * 4 + 29\\
100 &= 29 * 3 + 13\\
29 &= 13 * 2 + 3\\
13 &= 3 * 4 + 1\\
3 &= 1 * 3 + 0
\end{aligned}$$

$\therefore$ mcd$(24537, 1387)$=1. □

4. Problema 4.

Encuentre el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números:

a. 234 y 12

Solución. Comenzamos calculando el mcd:

$$\begin{aligned}
234 &= 12 * 19 + 6\\
12 &= 6 * 2 + 0
\end{aligned}$$

Implica que

$$mcm(234, 12) = \frac{234 * 12}{mcd(234, 12)} = \frac{234 * 12}{6} = 234 * 2 = 468.$$

□

b. 142 y 742

Solución. Comenzamos calculando el mcd:

$$\begin{aligned}
742 &= 142 * 5 + 32\\
142 &= 32 * 4 + 14\\
32 &= 14 * 2 + 4\\
14 &= 4 * 3 + 2\\
4 &= 2 * 2 + 0
\end{aligned}$$

Implica que

$$mcm(742, 142) = \frac{742 * 142}{mcd(742, 142)} = \frac{742 * 142}{2} = 742 * 71 = 52682.$$

□

c. 17 y 141

Solución. Comenzamos calculando el mcd:

$$\begin{aligned} 141 &= 17 * 8 + 5 \\ 17 &= 5 * 3 + 2 \\ 5 &= 2 * 2 + 1 \\ 2 &= 1 * 2 + 0 \end{aligned}$$

Implica que

$$mcm(141, 17) = \frac{141 * 17}{mcd(141, 17)} = \frac{141 * 17}{1} = 2397.$$

□

d. 35 y 24

Solución. Comenzamos calculando el mcd:

$$\begin{aligned} 35 &= 24 * 1 + 11 \\ 24 &= 11 * 2 + 2 \\ 11 &= 2 * 5 + 1 \\ 2 &= 1 * 2 + 0 \end{aligned}$$

Implica que

$$mcm(35, 24) = \frac{35 * 24}{mcd(35, 24)} = \frac{35 * 24}{1} = 840.$$

□

5. Problema 5.

Encuentre todos los enteros x & y, tales que:

a. $93x + 81y = 3$

Solución. Se determina si la ecuación diofántica tiene soluciones. Calculamos el mcd(93,81):

$$\begin{aligned} 93 &= 81 * 1 + 12 \\ 81 &= 12 * 6 + 9 \\ 12 &= 9 * 1 + 3 \\ 9 &= 3 * 3 + 0 \end{aligned}$$

Concluimos que mcd(93,81)=3 (múltiplo de 3), por lo tanto, sí tiene solución la ecuación diofántica. Ahora, calculamos una solución particular:

$$\begin{aligned} 3 &= (1 * 12) + (-1 * 9) \\ &= (-1 * 81) + (7 * 12) \\ &= (7 * 93) + (-8 * 81) \\ &= (-8 * 81) + (7 * 93) \end{aligned}$$

Es decir:

$$X_0 = 7, Y_0 = -8$$

Quiere decir que la ecuación tiene soluciones infinitas, y por lo tanto se pueden usar las siguientes fórmulas encontradas en clase:

$$t = \frac{\lambda b}{\text{mcd}(a,b)} = \frac{\lambda 81}{3} = 27\lambda \quad \text{y} \quad s = -\frac{\lambda 93}{3} = -31\lambda.$$

Entonces, la solución es:

$$\begin{cases} x &= 7 + 27\lambda \\ y &= -8 - 31\lambda \end{cases}$$

□

b. $43x + 128y = 1$

Solución. Se determina si la ecuación diofántica tiene soluciones. Calculamos el mcd(128,43):

$$\begin{aligned} 128 &= 43 * 2 + 42 \\ 43 &= 42 * 1 + 1 \\ 42 &= 1 * 42 + 0 \end{aligned}$$

Es decir:

$$X_0 = 3, Y_0 = -1.$$

Concluimos que mcd(128,43)=1 (múltiplo de 1), por lo tanto, sí tiene solución la ecuación diofántica. Ahora, calculamos la solución particular:

$$\begin{aligned} 1 &= (1 * 43) + (-1 * 42) \\ &= (-1 * 128) + (3 * 43) \end{aligned}$$

Quiere decir que la ecuación tiene soluciones infinitas, y por lo tanto se pueden usar las siguientes fórmulas encontradas en clase:

$$t = \frac{\lambda b}{\text{mcd}(a,b)} = \frac{\lambda 128}{1} \quad \text{y} \quad s = -\frac{\lambda 43}{1}.$$

Entonces, la solución es:

$$\begin{cases} x &= 3 + 128\lambda \\ y &= -1 - 43\lambda \end{cases}$$

□

6. Problema 6.

Encuentre enteros positivos x & y que satisfagan las condiciones indicadas:

a. $x + y = 150, \operatorname{mcd}(x, y) = 30$

Solución. Usamos el teorema de Bézout:

$$\begin{cases} x + y & = 150 \\ sx + ty & = 30 \end{cases}$$

Es decir, despejando para y, se tiene:

$$y = 150 - x \implies sx + t(150 - x) = 30 \implies sx + 150t - xt = 30 \implies$$

$$\implies x(s - t) = 30 - 150t \implies x = \frac{30 - 150t}{s - t}.$$

Volviendo a la ecuación inicial:

$$\frac{30 - 150t}{(s - t)} + y = 150 \implies y = 150 - \frac{30 - 150t}{(s - t)} = \frac{150s - 30}{s - t}.$$

Por lo tanto $x = \frac{30-150t}{s-t}$ y $y = \frac{150s-30}{s-t}$. □

b. $xy = 8400, \operatorname{mcd}(x, y) = 20$

Solución. Usamos el teorema de Bézout:

$$\begin{cases} xy & = 8400 \\ sx + ty & = 20 \end{cases}$$

Es decir, despejando para y

$$y = \frac{8400}{x}$$

Evaluando en la segunda ecuación

$$sx + t\left(\frac{8400}{x}\right) = 20 \implies x^2 - \frac{20}{s} + \frac{8400t}{s} = 0$$

Usando la fórmula de Dieta:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{10 - 84st}}{s}.$$

Volviendo a la primera ecuación, concluimos:

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{10 - 84st}}{t}.$$

En las soluciones asumimos que $t, s \neq 0$. □

7. Problema 7.

Calcule $\text{mcd}(203, 91, 77)$.

Solución. Encontrando el mcd(203,91):

$$\begin{aligned} 203 &= 91 * 2 + 21 \\ 91 &= 21 * 4 + 7 \\ 21 &= 7 * 3 + 0 \end{aligned}$$

El mcd(203,91)=7. Ahora bien, calculamos el mdc(7,77):

$$77 = 7 * 11 + 0$$

Por lo tanto, el gcd(203,91,7) = 7. □

Referencias

Rosen, K. H. and Krithivasan, K. (2012). *Discrete mathematics and its applications: with combinatorics and graph theory.* Tata McGraw-Hill Education.