Ecuaciones diofánticas

Definición. Se le llama **ecuación diofántica** a cualquier ecuación algebraica de dos o más incógnitas, cuyos coeficientes son números enteros y, de las cuales se buscan soluciones enteras. Estas ecuaciones tienen la forma:

$$ax + by = c$$

Recordemos que por la identidad de Bézout, se cumple:

$$\mathrm{mcd}(a,b) = ax_0 + by_0$$

Entonces, si $c = k\cdot\mathrm{mcd}(a,b)$ [un múltiplo de $\mathrm{mcd}(a,b)$] la ecuación puede reescribirse como:

$$c = ax + by \to k\cdot\mathrm{mcd}(a,b) = k(ax_0 + by_0) = a(kx_0) + b(ky_0) \to x = kx_0 \ \&\ y = ky_0$$

⚠️ La ecuación diofántica $ax + by = c$ tiene solución, si y solo si, $c = k\cdot\mathrm{mcd}(a,b)$.

En particular si $\mathrm{mcd}(a,b) = 1$ [a & b son primos relativos], entonces la ecuación diofántica tiene solución para cualquier valor de c; porque cualquier número c es múltiplo de 1.

Ejemplo 1. Encuentre una solución para la ecuación diofántica $10x + 33y = 15$.

Primero calculamos mcd(33,10) usando el algoritmo de Euclides:

$$\begin{aligned} 33 &= 3\cdot 10 + 3 \longrightarrow 3 = 33 - 3\cdot 10 \\ 10 &= 3\cdot 3 + 1 \\ 3 &= 3\cdot 1 \end{aligned}$$

Como mcd(33,10) = 1, entonces la ecuación tiene solución.

Luego resolvemos la identidad de Bézout: $10x_0 + 33y_0 = 1$

$$\begin{aligned} 1 &= 10 - 3\cdot 3 \\ &= 10 - 3\cdot(33 - 3\cdot 10) \\ &= 10\cdot 10 - 3\cdot 33 \end{aligned}$$

Los números $x_0 = 10$ & $y_0 = -3$ satisfacen la identidad de Bézout.

Finalmente:

$$1 = 10(10) + 33(-3) \xrightarrow{\times 15} 15 = 10(150) + 33(-45)$$

∴ Los números $x = 150$ & $y = -45$ son *una solución* de la ecuación diofántica $10x + 33y = 15$.

Ejemplo 2. Tomado de la película Die Hard 2 (1990)

Samuel L. Jackson y Bruce Willis tienen que llenar 4 galones de agua usando dos recipientes: uno de 5 galones y otro de 3 galones.

Este problema puede *traducirse* a resolver la ecuación diofántica: $3x + 5y = 4$.

Primero calculamos mcd(5,3) usando el algoritmo de Euclides:

$$5 = 1 \cdot 3 + 2$$
$$3 = 1 \cdot 2 + 1$$
$$2 = 2 \cdot 1$$

$\therefore$ mcd(5,3) = 1

Luego resolvemos la identidad de Bézout: $3x_0 + 5y_0 = 1$

$$1 = 3 - 1 \cdot 2 = 3 - 1 \cdot (5 - 1 \cdot 3) = 3(2) + 5(-1) \longrightarrow x_0 = 2 \ \& \ y_0 = -1$$

Finalmente multiplicamos por 4:

$$4 = 3(8) + 5(-4)$$

$\therefore$ Los números $x = 8$ & $y = -4$ son *una solución* de la ecuación diofántica $3x + 5y = 4$.

En la película, llenaron el recipiente de 5 galones dos veces ($y = 2$) y vaciaron el recipiente de 3 galones dos veces ($x = -2$). De hecho, al reemplazar estos valores en la ecuación diofántica obtenemos **otra solución** al problema:

$$3(-2) + 5(2) = 4$$

⚠️ Podemos concluir que las soluciones de una ecuación diofántica **no son únicas**, de hecho son infinitas.

Solución general de una ecuación diofántica

Definición. El **mínimo común múltiplo** de dos (o más) números es el menor múltiplo común de todos ellos.

<u>Notación</u>: Usamos la notación mcm(a,b) para representar al mínimo común múltiplo.

Ejemplo 3. Calcule el mcm(72,50).

Vamos a utilizar la factorización prima de cada número:

72	2
36	2
18	2
9	3^2
1	

50	2
25	5^2
1	

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0$$

$$50 = 2 \cdot 5^2 \cdot 3^0$$

Para *construir* mcm(72,50) tomamos los factores con **mayor exponente** posible:

$$\text{mcm}(72,50) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$$

👨🏻‍🏫 Esta *construcción* se parece mucho a la que utilizaríamos para calcular mcd(72,50).

La diferencia es que para *construir* el mcd(72,50) tomamos los factores con **menor exponente** posible:

$$\text{mcd}(72,50) = 2$$

⚠️ Observemos qué ocurre si multiplicamos mcm(72,50) con mcd(72,50):

$$\text{mcm}(72,50)\cdot\text{mcd}(72,50) = 2^3\cdot3^2\cdot5^2\cdot2 = (2^3\cdot3^2)\cdot(5^2\cdot2) = 72\cdot50$$

En conclusión, mcm(a,b)·mcd(a,b) = $a\cdot b$.

Como vimos anteriormente, las soluciones de una ecuación diofántica no son únicas.

Recordemos la ecuación diofántica $3x + 5y = 4$. Como se calculó, una solución es:

$$x_0 = 8 \ \& \ y_0 = -4$$

💡 Una idea podría ser sumar/restar a x_0 y, *en la misma proporción*, restar/sumar a y_0 para obtener así otra solución:

Probando, $x = 8 + 1 = 9$ & $y = -4 - 1 = -5 \rightarrow 3(9) + 5(-5) = 2 \neq 4$

😞 Esto parece no estar funcionando:

$$ax + by = a(x_0 + t) + b(y_0 - t) = ax_0 + by_0 + at - bt$$

El término $at - bt$ será cero si y solo si $t = 0$.

Una mejor propuesta sería entonces: $x = x_0 + t$ & $y = y_0 - s$

Al sustituir en la ecuación diofántica obtenemos:

$$ax + by = a(x_0 + t) + b(y_0 - s) = ax_0 + by_0 + at - bs$$

En conclusión queremos que $at - bs = 0 \rightarrow at = bs$

$$\text{mcm}(a,b)\cdot\text{mcd}(a,b) = a\cdot b$$

$$\text{mcm}(a,b) = \frac{a\cdot \boxed{b}}{\boxed{\text{mcd}(a,b)}} = \frac{\boxed{a}\cdot b}{\boxed{\text{mcd}(a,b)}}$$

$$t \qquad s$$

$$t = \frac{b\cdot\lambda}{\text{mcd}(a,b)} \longrightarrow at\lambda = \frac{a\cdot b\cdot\lambda}{\text{mcd}(a,b)} = \text{mcm}(a,b)\lambda$$

$$s = \frac{a \cdot \lambda}{mcd(a,b)} \longrightarrow bs\lambda = \frac{a \cdot b \cdot \lambda}{mcd(a,b)} = mcm(a,b) \cdot \lambda$$

⚠️ Escoger *t* y *s* de esta manera, nos garantiza que $at - bs = 0$.

En conclusión, escogemos los siguientes valores para *t* y *s*:

$t = (\lambda b)/\mathrm{mcd}(a,b)$ & $s = (\lambda a)/\mathrm{mcd}(a,b)$

En particular, cuando $\mathrm{mcd}(a,b) = 1$, entonces $t = \lambda b$ & $s = \lambda a$.

Finalmente, la solución general de la ecuación diofántica $3x + 5y = 4$ sería:

$x = 8 + t = 8 + 5\lambda$
$y = -4 - s = -4 - 3\lambda$

👨🏻‍🏫 La solución particular de la película se obtiene al hacer $\lambda = -2$

$x = 8 + 5(-2) = -2$
$y = -4 - 3(-2) = 2$