<u>Cardinalidad y enumerabilidad</u>

Definición. La *cardinalidad* de un conjunto es una medida de la «cantidad» de elementos en un conjunto.

<u>Notación</u>: La cardinalidad de un conjunto A usualmente se denota como $|A|$.

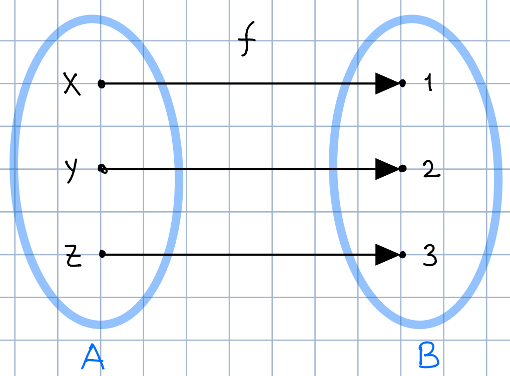
¿Cuándo son dos conjuntos A y B del *mismo tamaño*?

> *R*: Cuando tienen la misma «cantidad» de elementos. Pero, ¿qué significa «cantidad» cuando los conjuntos *tienen* infinitos elementos?

Para «evitar» la posible ambigüedad que causa la noción de «cantidad» cuando un conjunto tiene infinitos elementos, usaremos un procedimiento bien definido que nos permite entender cuándo dos conjuntos tienen el *mismo tamaño*.

Definición. Sean A y B conjuntos. Decimos que A y B tienen el *mismo tamaño o cardinalidad* si existe una función biyectiva $f: A \to B$. En ese caso escribimos $|A| = |B|$.

Ejemplo 1. Los conjuntos $A = \{x, y, z\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$ tienen la misma cardinalidad, ya que:



Definimos la función $f: A \to B$.

f es inyectiva, pues no hay dos elementos en A con la misma imagen.

f es sobreyectiva, pues todo elemento en B es la imagen de algún elemento de A.

$\therefore f$ es biyectiva y $|A| = |B|$

Definición. Sean A e $I_n = \{1, 2, 3, ..., n\} \subset \mathbb{N}$ conjuntos. Decimos que A es un *conjunto finito* si existe una función biyectiva $f: A \to I_n$. En ese caso decimos que A tienen cardinalidad n y escribimos $|A| = n$.

Ejemplo 2. Notemos que el conjunto B del Ejemplo 1 es igual a I_3. Entonces, $|A| = 3$.

Definición. Un conjunto que no es finito, se dice que es un *conjunto infinito*. Además, decimos que un conjunto es *infinito enumerable* (o *contable*) si existe una función biyectiva $f: A \to \mathbb{N}$.

Resumen:
- A es un conjunto finito, si y solo si, $f: A \to I_n$ es una biyección.
- A es un conjunto infinito, si y solo si, A no es finito.
- A es un conjunto infinito enumerable, si y solo si, $f: A \to \mathbb{N}$ es una biyección.
- Se dice que un conjunto es *enumerable* o *contable*, si este es finito o infinito enumerable.

A los conjuntos enumerables se les conoce también como *conjuntos discretos*.

Teorema. Sean A, B & C conjuntos. Entonces:
1. $|A| = |A|$
2. $|A| = |B| \to |B| = |A|$
3. $|A| = |B| \wedge |B| = |C| \to |A| = |C|$

Ejemplo 3. Sea X el conjunto de naturales pares. Demuestre que X es un conjunto infinito enumerable.

Prueba: Sea $f\colon \mathbb{N} \to X$ una función, tal que:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & & X \\ & f & \\ 0 & \longrightarrow & 0 \\ 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & \longrightarrow & 4 \\ \vdots & & \vdots \\ n & \longrightarrow & 2n \end{array}$$

La regla de asignación
es $f(n) = 2n$

Primero, demostramos que f es inyectiva.

Sean $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $f(n_1) = f(n_2) \to 2n_1 = 2n_2 \to n_1 = n_2$ $\quad \therefore f$ es inyectiva.

Luego, demostramos que f es sobreyectiva, es decir, $\operatorname{Im} f = X$.

$\operatorname{Im} f \subseteq X$: Sea $y \in \operatorname{Im} f \to y = f(n) = 2n$ para algún $n \in \mathbb{N} \to y \in X$.

$X \subseteq \operatorname{Im} f$: Sea $x \in X \to x$ es un número par $\to x = 2n = f(n)$ para algún $n \in \mathbb{N} \to x \in \operatorname{Im} f$.

$\therefore f$ es biyectiva y, por lo tanto, $|\mathbb{N}| = |X|$ $\quad \square$

Ejercicio 4. Demuestre que el intervalo de números reales $(0, 1)$ tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{R}$.

$|(-\pi/2, \pi/2)| = |\mathbb{R}|$ [*Ayuda*: arctan(x)/tan(x)]

$|(-\pi/2, \pi/2)| = |(0, 1)|$ [*Ayuda*: ecuación paramétrica de una recta]

$\therefore |(0, 1)| = |(-\pi/2, \pi/2)| = |\mathbb{R}| \to |(0, 1)| = |\mathbb{R}|$