No enumerabilidad de $\mathbb{R}$

Ya hemos visto que conjuntos que aparentemente tienen *tamaños* distintos, en realidad son del *mismo tamaño*.

Entonces surge la interrogante: ¿Hay infinitos «más grandes» que otros?

Teorema. El conjunto $\mathbb{R}$ es no enumerable.

Prueba: Por contradicción.

Suponemos, para fines de contradicción, que el conjunto $\mathbb{R}$ es enumerable. En otras palabras, existe una función biyectiva $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. En particular, vamos a modificar el contradominio de f al intervalo $(0, 1)$. Es decir:

$$f_1\colon \mathbb{N} \to (0, 1) \;\&\; f_1 \text{ es biyectiva}$$

Por ejemplo:

$$\begin{array}{ccl}
1 & \to & 0.\underline{\mathbf{2}}3454177\ldots, \\
2 & \to & 0.1\underline{\mathbf{5}}987170\ldots, \\
3 & \to & 0.86\underline{\mathbf{9}}45126\ldots, \\
4 & \to & 0.199\underline{\mathbf{1}}8745\ldots, \\
5 & \to & 0.6745\underline{\mathbf{3}}128\ldots, \\
 & \ldots &
\end{array}$$

Sea $r \in (0, 1)$ con la expansión decimal siguiente: $r = 0.d_1d_2d_3d_4\ldots$, en donde $d_i = 1$ a menos que el i-ésimo número tenga un 1 en el i-ésima dígito, en cuyo caso se elige $d_i = 5$.

Para la lista de arriba, tenemos $r = 0.11151\ldots$; notemos los números resaltados. Luego, el número r no está en la lista anterior.

El número r no está en la lista, ya que difiere del primer número en la posición 1, difiere del segundo número en la posición 2, difiere del tercer número en la posición 3, difiere del cuarto número en la posición 4, difiere del quinto número en la quinta posición, etc.

En otras palabras, el número r **no es la imagen bajo f_1 de ningún n** $\in \mathbb{N}$. Entonces f_1 no es biyectiva. Esto es una contradicción.

$\therefore |\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$ $\square$

A la noción del «tamaño» de un conjunto infinito A se le llama *número cardinal*. Algunos números cardinales son *famosos* y hasta se les han dado nombres:

- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ (se lee *«aleph null o aleph cero»*)
- $|\mathbb{R}| = c$ (se lee *«el continuo»*)

Entonces, la demostración del teorema *sugiere* qué hay «más números reales que números naturales».

En conclusión, la respuesta a la interrogante: sí, hay infinitos «más grandes» que otros.