Combinaciones con elementos indistinguibles

Ejemplo 1. Cadenas de bits.

(a) ¿Cuántas cadenas de bits se pueden formar con 8 bits?

$$\underset{b_1}{\underline{2}} \cdot \underset{b_2}{\underline{2}} \cdot \underset{b_3}{\underline{2}} \cdot \ldots \cdot \underset{b_7}{\underline{2}} \cdot \underset{b_8}{\underline{2}} = 2^8 = 256$$

(b) ¿Cuántas cadenas de 8 bits se pueden formar, si estas tienen exactamente tres 1’s?

👨‍🏫 Podemos confundirnos y pensar que el problema trata de contar las opciones diferentes que tenemos para elegir 0’s y 1’s, cuando en realidad el problema de las cadenas binarias consiste en *escoger las posiciones donde colocaremos los* 1’s, o bien, los 0’s.

⚠️ Este es un problema de contar las posibles combinaciones en las cuales se pueden escoger 3 posiciones de 8 disponibles para los 1’s.

$$\underset{b_1}{\underline{1}} \quad \underset{b_2}{\underline{0}} \quad \underset{b_3}{\underline{0}} \quad \underset{b_4}{\underline{1}} \quad \underset{b_5}{\underline{1}} \quad \underset{b_6}{\underline{0}} \quad \underset{b_7}{\underline{0}} \quad \underset{b_8}{\underline{0}}$$

Esto puede hacerse de $C(8,3) = 56$ maneras diferentes → 56 cadenas de 8 bits con tres 1’s.

De manera análoga, este es también un problema de contar las posibles combinaciones en las cuales se pueden escoger 5 posiciones de 8 disponibles para los 0’s.

$$\underset{b_1}{\underline{1}} \quad \underset{b_2}{\underline{0}} \quad \underset{b_3}{\underline{0}} \quad \underset{b_4}{\underline{1}} \quad \underset{b_5}{\underline{1}} \quad \underset{b_6}{\underline{0}} \quad \underset{b_7}{\underline{0}} \quad \underset{b_8}{\underline{0}}$$

Esto puede hacerse de $C(8,5) = 56$ maneras diferentes → 56 cadenas de 8 bits con cinco 0’s.

⚠️ A partir de este resultado podemos concluir que $C(n, r) = C(n, n - r)$, esta propiedad se conoce como **simetría**.

Ejemplo 2.

(a) ¿Cuántas cadenas de 10 bits con exactamente seis 1’s se pueden formar?

$C(10,6) = C(10,4) = 210$

(b) ¿Cuántas cadenas de 10 bits tienen al menos ocho 1’s?

Consideramos tres casos disjuntos: cadenas con ocho 1’s, cadenas con nueve 1’s y cadenas con diez 1’s

Cadenas con ocho 1's: $C(10,8) = 45$
Cadenas con nueve 1's: $C(10,9) = 10$
Cadenas con diez 1's: $C(10,10) = 1$

Por el principio de la suma, hay 56 cadenas de 10 bits con al menos ocho 1's.

(c) ¿Cuántas cadenas de 10 bits tienen al menos dos 1's?

Podríamos considerar nueve casos, pero estos son *demasiados*. Sin embargo, podemos *contar el complemento*, es decir, al total de cadenas binarias de 10 bits le restamos el número de cadenas binarias de 10 bits con un 1 y con cero 1's.

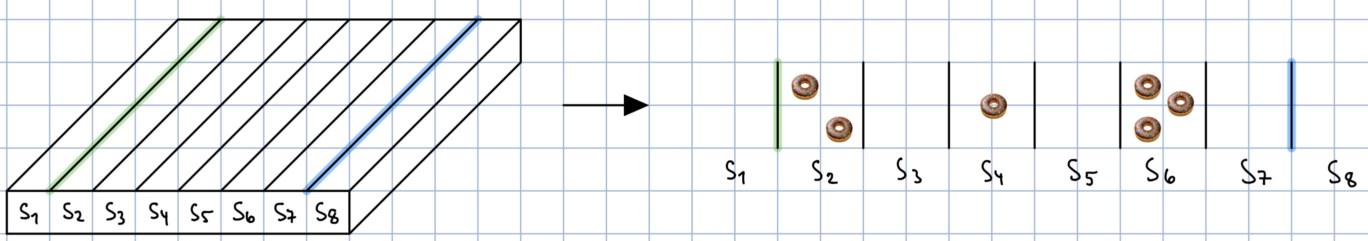
$$2^{10} - \underbrace{C(10,1)}_{\text{cadenas de 10 bits con un 1}} - \underbrace{C(10,0)}_{\text{cadenas de 10 bits con cero 1's}} = \sum_{i=2}^{10} C(10,i) = 1013$$

Ejemplo 3. En una tienda de donas 🍩 hay 8 diferentes sabores de donas. ¿De cuántas maneras diferentes podemos elegir media docena de donas? (Supongamos que hay como mínimo seis donas de cada sabor)

⚠️ Se trata de una *combinación* porque nos importa qué sabores de donas escogimos, pero el orden en el que las hayamos escogido es irrelevante.

⚠️ Son *elementos indistinguibles* porque las donas del mismo sabor son iguales.

Supongamos que en la tienda nos dan una caja que tiene 8 compartimientos:



👨‍🏫 Este problema puede asociarse con un problema conocido: podemos usar 1's para representar a los separadores y podemos usar 0's para representar las donas.

Así, la selección del ejemplo sería equivalente a la cadena binaria:

1001101100011

⚠️ Se trata de una cadena binaria de longitud 7 + 6 = 13 con exactamente siete 1's (o seis 0's).

Elegir media docena de donas de 8 sabores disponibles es equivalente a contar *el número de cadenas de (8 - 1) + 6 = 13 bits con exactamente siete 1's (o seis 0's)*.

separadores donas

Entonces, el número de posibles selecciones es $C(13, 7) = C(13, 6) = 1716$.

Ejemplo 4. En una tienda de helados 🍨 hay 6 diferentes sabores de helado. ¿De cuántas maneras diferentes podemos elegir una docena de helados? (Supongamos que hay como mínimo doce helados de cada sabor).

Podemos representar los 6 sabores usando 5 separadores → cinco 1's.

Escogemos 12 helados → doce 0's

Este problema es equivalente a contar el número de cadenas de $(6 - 1) + 12 = 17$ bits con exactamente cinco 1's (o doce 0's):

$$C(17,12) = C(17,5) = 6188$$

En conclusión, el número de combinaciones de n objetos tomando r de ellos (indistinguibles) con repetición puede calcularse como $C([n - 1] + r, r) = C([n - 1] + r, n - 1)$.

Ejemplo 5. ¿De cuántas maneras diferentes podemos colocar 7 pelotas azules 🔵 en 4 cajas etiquetadas, si es posible dejar cajas vacías?

Para 4 cajas necesitamos 3 separadores → tres 1's.
Las 7 pelotas → siete 0's.

Este problema es equivalente a contar el número de cadenas de $(4 - 1) + 7 = 10$ bits con exactamente tres 1's (o siete 0's): $C(10,3) = C(10,7) = 120$.