# <u>Elementos de la teoría de conjuntos</u>

**Definición**. Una *cuantificación universal* es una proposición de la forma:

**<u>Para todo</u> $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{P(x)}$** Simbología: $\forall x, P(x)$

**Definición**. Una *cuantificación existencial* es una proposición de la forma:

**<u>Existe</u> $\boldsymbol{x}$ tal que, $\boldsymbol{P(x)}$** Simbología: $\exists x, P(x)$

**Definición**. La *especificación universal* es una regla de inferencia que a partir de la verdad de una proposición cuantificada universalmente nos permite inferir la verdad sobre un individuo particular.

Vamos a aceptar como pseudo-definición de *conjunto* la siguiente:

una colección o agrupación de objetos a los que llamamos *elementos del conjunto*

**Definición**. Sean $A$ y $B$ dos conjuntos. Decimos que $A$ es un *subconjunto* de $B$ si la proposición:

$$\forall x \in A \rightarrow x \in B$$

Usamos la simbología $A \subseteq B$ para indicar que $A$ es un subconjunto de $B$.

**Definición**. Sean $A$ y $B$ dos conjuntos. Decimos que $A$ es un *subconjunto propio* de $B$ si se cumple:

$$A \subseteq B \text{ y } A \neq B$$

Usamos la simbología $A \subset B$ para indicar que $A$ es un subconjunto propio de $B$.

**Definición**. El *conjunto vacío* es un conjunto el cual no tiene elementos. Este lo representamos mediante la simbología $\varnothing$ o $\{\ \}$.

**Propiedad**. El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

*Prueba*:
Sea $A$ un conjunto cualquiera. Por definición $\varnothing \subseteq A \leftrightarrow \forall x \in \varnothing \rightarrow x \in A$. Luego, por definición del conjunto vacío $\forall x \in \varnothing$ es falsa. Entonces, como toda proposición condicional cuya hipótesis sea falsa es verdadera.
$\therefore \varnothing \subseteq A$ $\square$

**Definición**. Sean $A$ y $B$ dos conjuntos. Decimos que los conjuntos $A$ y $B$ son iguales si se cumple:

$$A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A$$

Usamos la simbología $A = B$ para indicar que $A$ y $B$ son iguales.

***Propiedades de la contención***

**Propiedad**. Todo conjunto es un subconjunto de sí mismo.

*Prueba*:
Sea $A$ un conjunto cualquiera. Por definición, $A \subseteq A \leftrightarrow \forall x, (x \in A \rightarrow x \in A)$. Tenemos ahora dos casos.

> Caso $x \notin A$: la implicación $x \in A \rightarrow x \in A$ es verdadera, ya que tanto la hipótesis como la tesis son ambas falsas.
> 👨🏻‍🏫 En general, no será necesario «demostrar» las implicaciones cuando la hipótesis sea falsa, ya que la implicación **siempre** será verdadera.
>
> Caso $x \in A$: la implicación $x \in A \rightarrow x \in A$ es verdadera, ya que tanto la hipótesis como la tesis son ambas verdaderas.

$\therefore A \subseteq A$ $\square$

**Propiedad**. La contención es *transitiva*, es decir, $A \subseteq B$ y $B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$.

**Definición**. El *silogismo hipotético* es una regla de inferencia que permite concluir lo siguiente:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

*Prueba*:
Sean $A$, $B$ y $C$ conjuntos. Suponemos $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, es decir, las implicaciones:

$$x \in A \rightarrow x \in B \text{ y } x \in B \rightarrow x \in C$$

son verdaderas.

Luego, por silogismo hipotético $x \in A \rightarrow x \in C$.

$\therefore A \subseteq C$ $\square$