# Coeficientes binomiales

Existen diversos problemas de conteo que pueden resolverse al asociar el problema original con un problema familiar; el problema de contar el número de cadenas binarias con algún requerimiento específico.

*Subconjuntos*

*Ejemplo 1*. ¿Cuántos subconjuntos con exactamente 4 elementos tiene un conjunto de 8 elementos?

Supongamos el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. El problema nos pide contar de cuántas maneras podemos elegir (sin importar el orden) 4 de estos objetos:

| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | b | c | d | e | f | g | h |

→ la cadena binaria *representa* al subconjunto $\{b,d,g,h\}$

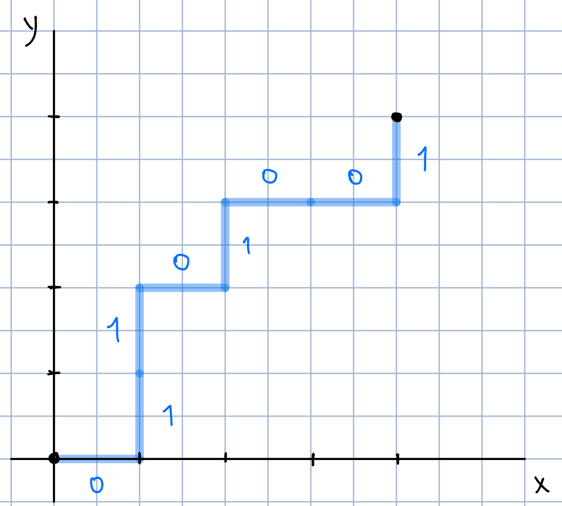
Este problema es equivalente a contar el número de cadenas de 8 bits con exactamente cuatro 1's. Esto puede hacerse de:

$$C(8,4) = 70$$

---

*Caminos*

*Ejemplo 2*. ¿Cuántos diferentes caminos existen desde el punto (0,0) hasta el punto (4,4) en el plano cartesiano, si se permiten únicamente movimientos de una unidad hacia la derecha o una unidad hacia arriba?




Un enfoque podría ser el asociar cada camino con una cadena binaria, en donde un 1 representa un movimiento hacia arriba y un 0 representa un movimiento hacia la derecha:

0 1 1 0 1 0 0 1

Este problema es equivalente a contar el número de cadenas de 8 bits con exactamente cuatro 1's. Esto puede hacerse de:

$$C(8,4) = 70$$

Existe un enfoque alternativo para resolver este problema: contar el número de permutaciones con elementos indistinguibles de las letras *D, D, D, D, A, A, A, A*; en donde *D* representa un movimiento a la derecha y *A* representa un movimiento hacia arriba. Esto puede hacerse de:

$$P(8;4,4) = \frac{8!}{4!\cdot 4!} = 70$$

*Ejemplo 3*. Si se permiten únicamente movimientos de una unidad hacia la derecha o una unidad hacia arriba,

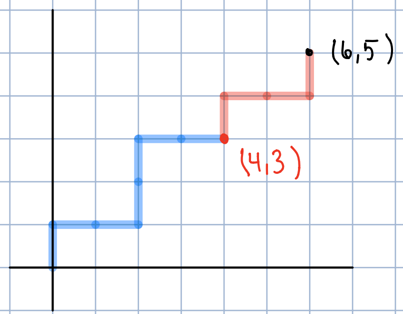
(a) ¿cuántos diferentes caminos existen desde el punto (0,0) hasta el punto (6,5) en el plano cartesiano?

Esto equivale a contar el número de cadenas binarias de 11 bits con exactamente seis 1's (o bien cinco 0's):

$$C(11,6) = C(11,5) = 462$$

(b) ¿cuántos de los caminos del inciso (a) no pasan por el punto (4,3)?

Primero, contamos el número de caminos desde (0, 0) hasta (4, 3): $C(7,4) = C(7,3) = 35$




Luego, contamos el número de caminos desde (4, 3) hasta (6, 5). Se requieren 2 movimientos a la derecha y 2 hacia arriba, esto es contar el número de cadenas de longitud 4 con exactamente dos 1's (o bien dos 0's):

$$C(4,2) = 6$$

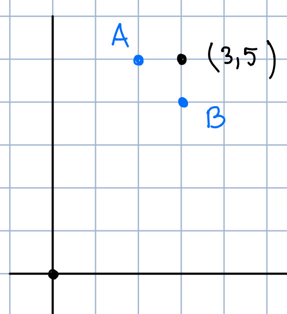
Por cada camino de (0, 0) hasta (4, 3) hay seis caminos de (4, 3) hasta (6, 5). Entonces, por el principio del producto tenemos: $35 \cdot 6 = 210$ caminos de (0, 0) hasta (6, 5) que sí pasan por (4, 3). En conclusión, el número de caminos que no pasan por (4, 3):

$$462 - 210 = 252$$

---

*Propiedad triangular*

*Ejemplo 4*. El problema de determinar cuántos diferentes caminos existen desde el punto (0,0) hasta el punto (3,5) en el plano cartesiano, si se permiten únicamente movimientos de una unidad hacia la derecha o una unidad hacia arriba, puede resolverse de otra manera:




Si consideramos los primeros 7 movimientos, podríamos estar en los puntos $A = (2, 5)$ o bien $B = (3, 4)$, pero no ambos. Entonces, consideramos dos casos:

Caminos hasta $A$: $C(7, 2) = C(7, 5) = 21$
Caminos hasta $B$: $C(7, 3) = C(7, 4) = 35$

⚠️ Ninguno de los caminos hasta $A$ pasa por $B$ y viceversa.

$\therefore$ Por el principio de la suma, el número de caminos desde (0,0) hasta (3,5) es $21 + 35 = 56$

⚠️ Notemos que:

$$C(8, 3) = C(7, 2) + C(7, 3) \quad \text{[si contamos los movimientos a la derecha]}$$
$$C(8, 5) = C(7, 4) + C(7, 5) \quad \text{[si contamos los movimientos hacia arriba]}$$

Esta propiedad recibe el nombre de **propiedad triangular**.

$C(7,0)$ $C(7,1)$ $C(7,2)$ $C(7,3)$ $C(7,4)$ $C(7,5)$ $C(7,6)$ $C(7,7)$

$C(8,0)$ $C(8,1)$ $C(8,2)$ $C(8,3)$ $C(8,4)$ $C(8,5)$ $C(8,6)$ $C(8,7)$ $C(8,8)$

Si escribimos todos estos números en forma triangular:

⚠️ El triángulo de Pascal

$$
\begin{array}{l}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
n=4: \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \qquad C(4,0),\ C(4,4) \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \qquad C(6,1) = C(6,5) \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \qquad C(8,2) = C(8,6)
\end{array}
$$

---

***Coeficientes binomiales***

*Ejemplo 5.* Encuentre el coeficiente del término $x^2y^4$ en la expansión de $(x + y)^6$.

Consideremos $(x + y)^6 = (x + y)(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)$

El problema de encontrar el coeficiente de $x^2y^4$ es equivalente a contar de cuántas maneras diferentes podemos escoger dos $x$'s de entre seis $x$'s (o bien, cuatro $y$'s de entre seis $y$'s). Esto puede hacerse de:

$$\underbrace{C(6,2)}_{\text{las } x\text{'s}} = \underbrace{C(6,4)}_{\text{las } y\text{'s}} = 15$$

De aquí que los números $C(n, r)$ reciban el nombre de **coeficientes binomiales**.