Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2015 - Matemática Discreta - Catedrático: Mario Castillo
14 de mayo de 2021

Tarea 5

1. Problema 1

Supongamos que no se permiten repeticiones.

1. ¿Cuántos números de 3 dígitos se pueden formar con los siete dígitos 1, 2, 5, 6, 8, 9 y 0?

   Solución. Tenemos el conjunto de datos: $S_0 = \{0, 1, 2, 5, 6, 8, 9\}$ con cardinalidad 7. Notamos que es un problema de r-permutación. La forma esperada es la siguiente:

$$\underbrace{X}_{D_1}\underbrace{X}_{D_2}\underbrace{X}_{D_3} = P(n, r) = \square$$

   Sin embargo, notamos que el dígito 0 podría generar problemas, ya que podrían generarse números de 3 cifras como 017, 007, etcétera; los cuales no serían números válidos. Por lo cual, excluimos el 0 y el conjunto sería $S_1 = \{1, 2, 5, 6, 8, 9\}$ con cardinalidad 6 para D_1; por su parte D_2 (ya que el 0 fue eliminado en D_1, entonces en D_2 sí es posible que haya un cero) y D_3 pertenecen a S. Ahora, por el principio del producto (y como no se pueden repetir):

$$\underbrace{6}_{D_1} \cdot \underbrace{6}_{D_2} \cdot \underbrace{5}_{D_3} = P(6, 1) \cdot P(6, 2) = 180 \text{ dígitos.}$$

   $\square$

2. ¿Cuántos de estos son menores que 400?

   Solución. Analizamos la situación, es decir que en la posición D_1 no pueden estar los números: $\{0, 5, 6, 8, 9\}$ ya que en el caso de 0 no sería un número de 3 dígitos y en el caso de los demás números, sería un número mayor a 400. Entonces (ya que no se pueden repetir),

$$\underbrace{2}_{D_1} \cdot \underbrace{6}_{D_2} \cdot \underbrace{5}_{D_3} = P(2,1) \cdot P(6,2) = 60 \text{ dígitos.}$$

□

2. Problema 2

¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar con las letras de la palabra MOROSO?

Solución. Tomamos como referencia el término **palabras** para referirse a un conjunto ordenado de letras. Notamos que tenemos 3 O's indistinguibles,

MOROSO
MOROSO
MOROSO
⋮

Vamos a usar la fórmula para permutaciones de elementos indistinguibles,

$$P(n, \{n_1, n_2, \cdots, n_k\}) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Entonces,

$$P(6,3) = \frac{6!}{3!} = 120 \text{ palabras que se pueden juntar con MOROSO.}$$

□

¿Cuántas de estas tienen las tres O's juntas?

Solución. La estrategia consiste en considerar OOO como una letra gigante, es decir que tenemos la cadena de elementos,

$$\underbrace{M}_{L_1}\underbrace{R}_{L_2}\underbrace{S}_{L_3}\underbrace{\mathbf{OOO}}_{L_4}$$

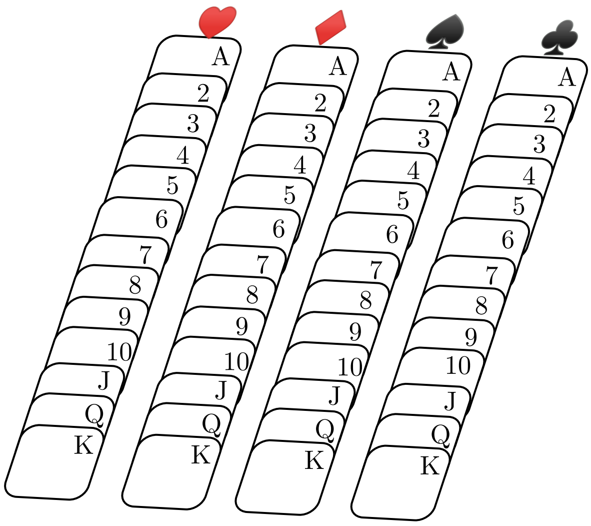
Es decir, podemos hacer una permutación:

$$P(4,4) = 4! = 24 \text{ palabras tienen OOO juntas.}$$

□

3. Problema 3

Un mazo estándar de 52 cartas consta de 4 palos (corazones, diamantes, espadas y tréboles), cada uno con 13 valores diferentes (A, 2, 3, ..., 10, J, Q, K). En una mano estándar de póker (5 cartas):



1. ¿De cuántas maneras diferentes podemos sacar tres espadas y dos cartas rojas (diamantes y/o corazones)?

   Solución. Notamos que tenemos un problema de combinatoria en dos etapas. Primero, obtenemos las maneras que se pueden sacar 3 espadas de 13 cartas de espadas que tenemos:

   $$C(13,3) = 286 \text{ maneras.}$$

   Ahora bien, calculamos las maneras que se pueden obtener 2 cartas rojas, de las 26 cartas rojas que tenemos, es decir:

   $$C(26,2) = 325 \text{ maneras.}$$

   Ahora aplicamos el principio del producto:

   $$C(13,3) \cdot C(26,2) = 286 \cdot 325 = 92950 \text{ maneras de sacar 3 espadas y 2 cartas rojas.}$$

   □

2. ¿De cuántas maneras diferentes podemos sacar un flush (cinco cartas del mismo palo, sin necesariamente ser consecutivas)?

   Solución. Ya que el orden no importa, es un problema de combinatoria, es decir:

   $$C(13,5) = 1287 \text{ maneras diferentes de sacar un flush para cada palo.}$$

   Si en caso nos piden la solución para los 4 palos, entonces simplemente sería:

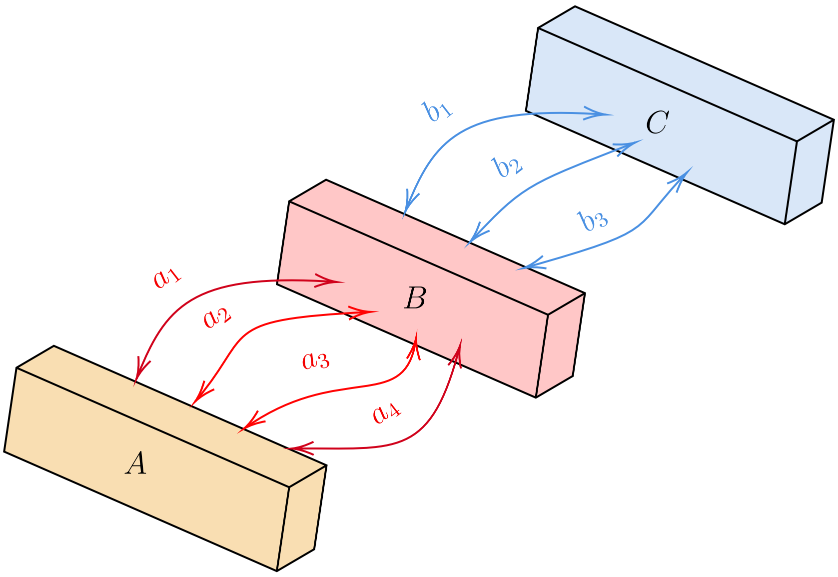
   $$4 \cdot C(13,5) = 4 \cdot 1287 = 5148 \text{ maneras diferentes de sacar un flush.}$$

   □

4. Problema 4

Supongamos que hay 4 líneas de buses entre A y B; y 3 líneas de buses entre B y C. ¿De cuántas maneras puede una persona viajar en viaje redondo (ida y vuelta) de A a C, sin usar ninguna línea de bus más de una vez?

Solución. Visualicemos el problema:



Es decir, tenemos un problema de combinatoria. Para el tramo $A - B$:

$$C(4,1) = 4 \text{ formas.}$$

Para el tramo $B - C$:

$$C(3,1) = 3 \text{ formas.}$$

Ahora de regreso, tramo $C - B$:

$$C(2,1) = 2 \text{ formas.}$$

Para el tramo $B - A$:

$$C(3,1) = 3 \text{ formas.}$$

Por lo tanto, las maneras que se puede hacer un viaje redondo son (aplicando el principio del producto):

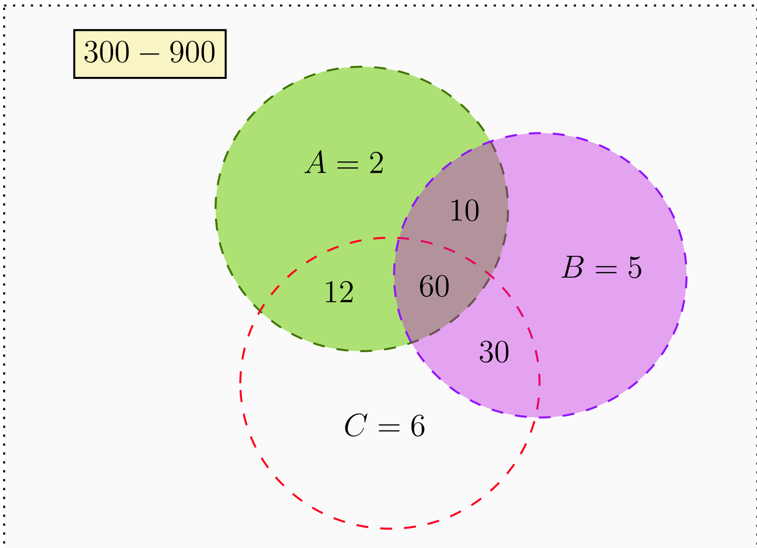
$$C(4,1) \cdot C(3,1) \cdot C(2,1) \cdot C(3,1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72 \text{ formas.}$$

□

5. Problema 5

¿Cuántos números entre 300 y 900 son múltiplos de 2 o 5, pero no de 6?

Solución. El problema lo podemos visualizar como:



Es decir, que nos interesa conocer los números del círculo verde y purpura; evitando **todos** los elementos del círculo punteado rojo. Ya que tenemos 3 conjuntos, vamos a usar la generalización del principio de inclusión-exclusión centrado para 3 conjuntos. Entonces,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} \left|A_1 \cap \cdots \cap A_n\right|.$$

En el caso específico de n=3 (3 conjuntos),

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Elementos del conjunto A:

$$A = \left\lfloor \frac{900}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{300}{2} \right\rfloor = 300$$

Elementos del conjunto B:

$$B = \left\lfloor \frac{900}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{300}{5} \right\rfloor = 120$$

Elementos del conjunto C:

$$C = \left\lfloor \frac{900}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{300}{6} \right\rfloor = 100$$

Elementos de $|A \cap B|$:

$$A \cap B = \left\lfloor \frac{900}{2*5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{300}{2*5} \right\rfloor = 60$$

Elementos de $|A \cap C|$:

$$A \cap C = \left\lfloor \frac{900}{2*6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{300}{2*6} \right\rfloor = 50$$

Elementos de $|B \cap C|$:

$$B \cap C = \left\lfloor \frac{900}{5*6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{300}{5*6} \right\rfloor = 20$$

Elementos de $|A \cap B \cap C|$:

$$A \cap B \cap C = \left\lfloor \frac{900}{2*5*6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{300}{2*5*6} \right\rfloor = 10$$

Entonces, por el principio de inclusión-exclusión (excluyendo el conjunto C porque no nos interesa),

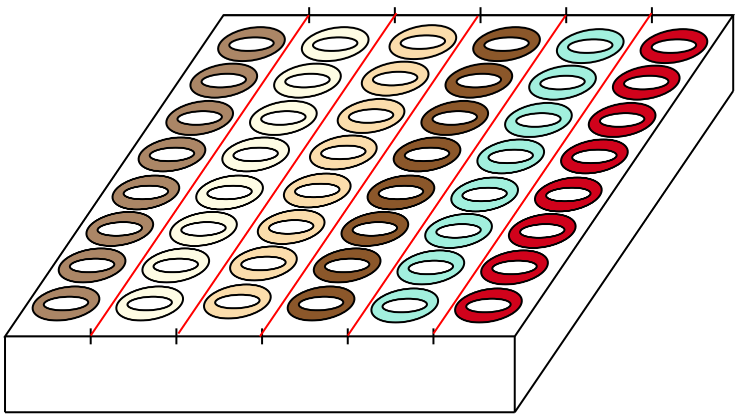
$$|A \cup B \cup C| = 300 + 120 + 0 - 60 - 50 - 20 + 10 = 300 \text{ números.}$$

□

6. Problema 6

Supongamos que una tienda ofrece seis sabores de donas: chocolate, glaseada, crema bavaria, café, cajeta y fresa.

1. ¿De cuántas maneras diferentes podemos escoger ocho de ellas, si hay por lo menos ocho donas de cada sabor?



Solución. Vamos a usar la fórmula para combinar elementos indistinguibles. En donde: $n =$ opciones a elegir, $r =$ elementos indistinguibles. Entonces,

$$\begin{aligned} C([n-1]+r, r) &= C([8-1]+8, 8) \\ &= C(15, 8) \\ &= 6435 \text{ formas.} \end{aligned}$$

□

2. ¿De cuántas maneras diferentes podemos escoger diez donas, si debemos elegir al menos dos de chocolate y dos de café?

Solución. Nombramos, $n =$ sabores, $r =$ opciones a elegir y $d =$ opciones a elegir distinguibles.

$$\begin{aligned} C([n-1]+[r-d], r-d) &= C([6-1]+[10-4], 10-4) \\ &= C(11,6) \\ &= 462 \text{ formas.} \end{aligned}$$

□

7. Problema 7

1. ¿Cuántas cadenas de 12 bits tienen por lo menos cuatro 1's?

   Solución.

$$\begin{aligned} C(12,4) &= 495 \\ C(12,5) &= 792 \\ C(12,6) &= 924 \\ C(12,7) &= 792 \\ C(12,8) &= 495 \\ C(12,9) &= 220 \\ C(12,10) &= 66 \\ C(12,11) &= 12 \\ C(12,12) &= 1 \\ &\underline{\qquad}+ \\ &3797 \text{ cadenas.} \end{aligned}$$

□

2. ¿Cuántas cadenas binarias de longitud 10 comienzan con 111 o terminan con 101 o ambos?

   a) Por el principio de la multiplicación:

$$2^7 = 128 \text{ cadenas.}$$

   comienzan en 111.

   b) Por el principio de la multiplicación:

$$2^7 = 128 \text{ cadenas.}$$

   terminan en 101.

   c) Con «ambos» vamos a referirnos a que inician en 111 y terminan en 101; es decir,

$$2^4 = 16 \text{ cadenas.}$$

8. Problema 8

1. a. Encuentre el coeficiente de x^4 en la expansión $(1+3x)^6$.

   Solución. Usando el teorema binomial:
   $$(1+3x)^6 = \sum_{j=0}^{6} \binom{6}{j} (3x)^{6-j}(1)^j$$
   Como nos piden el coeficiente de x^4, entonces proponemos que $j=2$, es decir:
   $$\begin{aligned} &= \binom{6}{2}(3x)^{6-2}(1)^2 \\ &= \binom{6}{2}(3^4)x^4 \\ &= 1215x^4. \end{aligned}$$
   □

2. b. Encuentre el coeficiente de x^2 en la expansión $(1-4x)^5$.

   Solución. Usando el teorema binomial:
   $$(1+(-4x))^5 = \sum_{j=0}^{5} \binom{5}{j} (-4x)^{5-j}(1)^j$$
   Como nos piden el coeficiente de x^2, entonces proponemos que $j=3$, es decir:
   $$\begin{aligned} &= \binom{5}{3}(-4x)^{5-3}(1)^3 \\ &= \binom{5}{3}(-4)^2x^2 \\ &= 160x^2 \end{aligned}$$
   □

3. c. Encuentre el coeficiente de x^3 en la expansión $(1+3x)^6(1-4x)^5$.

   Solución. Usando el teorema binomial:
   $$(1+3x)^6(1+(-4x))^5 = \sum_{j=0}^{6} \binom{6}{j} (3x)^{6-j}(1)^j \cdot \sum_{j=0}^{5} \binom{5}{j} (-4x)^{5-j}(1)^j$$
   Como nos piden el coeficiente de x^3, entonces proponemos que $j=4$, es decir:
   $$\begin{aligned} &= \binom{6}{4}(3x)^{6-4} \cdot \binom{5}{4}(-4x)^{5-4} \\ &= \binom{6}{4}(3x)^2 \cdot \binom{5}{4}(-4x)^1 \\ &= \binom{6}{4} \cdot \binom{5}{4} 9 \cdot (-4)x^3 \\ &= -2700x^3 \end{aligned}$$
   □