Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

Matemática Discreta - Catedrático: Mario Castillo
5 de mayo de 2021

Tarea 4

1. Demostrar por inducción.

$$\sum_{i=0}^{n} C(n,i) = 2^n$$

Demostración. Para la demostración de esta prueba, el único teorema que vamos a asumir verdadero es el siguiente:

Teorema 2 de la Sección 6.3 de Rosen and Krithivasan (2012)

El número de r-combinaciones de un conjunto con n elementos, donde n es un entero no negativo y r es un entero con $0 \leq r \leq n$, es igual a:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Antes de comenzar el problema, usaremos una notación más cómoda:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

Ahora bien, comenzamos la prueba por inducción.

$\boxed{\textbf{Paso base:}}$

Se propone $n = 1$, entonces:

$$\sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} = \sum_{i=0}^{1} \frac{1!}{i!(1-i)!} = \frac{1!}{0!(1-0)!} + \frac{1!}{1!(1-1)!} = 1 + 1 = 2.$$

Por lo tanto, el caso base se cumple.

Paso inductivo:

Asumimos que $S(k)$ es verdadera para un $k \geq 1$.

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} = 2^k$$

demostramos que $S(k) \implies S(k+1)$. Es decir que es necesario probar que:

$$\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} = 2^{k+1}.$$

Para la argumentación, será necesario probar la identidad de Pascal, que se define:

Teorema 2 de la sección 6.4 de Rosen and Krithivasan (2012).

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!k + n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{k!((n+1)-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

$\square$

Casos importantes

1. $$\binom{k+1}{0} = \binom{k}{0-1} + \binom{k}{0} = 0 + \binom{k}{0} = \binom{k}{0}$$

2. Equivalencia

$$\binom{k+1}{k+1} = 1 = \binom{k}{k}$$

Ahora bien,

$$\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}=\binom{k+1}{0}+\binom{k+1}{1}+\binom{k+1}{2}+\cdots+\binom{k+1}{k}+\binom{k+1}{k+1}$$

Aplicando la identidad de Pascal:

$$\begin{aligned}
&=\binom{k+1}{0}+\left[\binom{k}{1-1}+\binom{k}{1}\right]+\left[\binom{k}{2-1}+\binom{k}{2}\right]+\cdots+\\
&+\left[\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right]+\binom{k+1}{k+1}\\
&=\binom{k+1}{0}+\left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}\right]+\left[\binom{k}{1}+\binom{k}{2}\right]+\cdots+\\
&+\left[\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right]+\binom{k+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Usando los casos importantes, mencionado en el cuadro de arriba:

$$\begin{aligned}
&=\binom{k}{0}+\left[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}\right]+\left[\binom{k}{1}+\binom{k}{2}\right]+\cdots+\\
&+\left[\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right]+\binom{k}{k}\\
&=\left[\binom{k}{0}+\binom{k}{0}\right]+\left[\binom{k}{1}+\binom{k}{1}\right]+\cdots+\left[\binom{k}{k}+\binom{k}{k}\right]\\
&=2\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\\
&=2\cdot 2^n\\
&=2^{n+1}
\end{aligned}$$

$\therefore S(n)$ es verdadera para todo número $n\in\mathbb{N}$. $\square$

Referencias

Rosen, K. H. and Krithivasan, K. (2012). *Discrete mathematics and its applications: with combinatorics and graph theory.* Tata McGraw-Hill Education.