Universidad del Valle de Guatemala
26 de febrero de 2021
Rudik R. Rompich - Carné: 19857

Matemática Discreta 1 - MM2015 - Mario Castillo

Tarea 2

1. Ejercicios del tema 2

1.1. Ejercicio 9

En la siguiente igualdad de pares ordenados $(y-2, 2x-1) = (x-1, y+2)$ encontrar los valores de "x" y "y".

Solución. Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y-2 = x-1 \\ 2x-1 = y+2 \end{cases} = \begin{cases} y-x = 1 \\ 2x-y = 3 \end{cases}$$

Es decir, si tomamos $y = 1+x$ y reemplazamos la y en el segundo término $2x-(1+x) = 3 \implies x = 4$. Es decir $y-(4) = 1 \implies y = 5$. Por lo tanto, $y = 5$ y $x = 4$. ■

1.2. Ejercicio 10

Si $X = \{1, 2, 3, 4\}$, expresar en forma enumerativa las siguientes relaciones definidas en X.

Solución. Se tienen, por definición, un conjunto X, tal que una relación binaria definida sobre X es todo subconjunto $X \times X$, es decir: $Rel \subseteq X \times X$, tal que:

$$X \times X = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), \tag{1}$$
$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\} \tag{2}$$

1. $Rel_1 = \{(x, y)|x = y\} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$
2. $Rel_2 = \{(x, y)|3x = y\} = \{(1,3)\}$
3. $Rel_3 = \{(x, y)|x = 5y\} = \emptyset$
4. $Rel_4 = \{(x, y)|2x = y+1\} = \{(1,1), (2,3)\}$
5. $Rel_5 = \{(x, y)|x \geq y\} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

■

1.3. Ejercicio 11

Analice cada una de las relaciones definidas en el problema anterior e indique si son reflexivas, simétricas, transitivas, antisimétricas o no lo son.

Solución. Considerando:

1. Rel_1; es reflexiva ya que contiene los pares (a, a); es simétrica ya que $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$
2. Rel_2; es antisimétrica, ya que $(a, b) \in R$ pero $(a, b) \notin R$; es transitiva, solo tiene un elemento.
3. Rel_3; no es ninguna.
4. Rel_4;es antisimétrica, ya que $(a, b) \in R$ pero $(a, b) \notin R$
5. Rel_5; es reflexiva ya que contiene los pares (a, a); es antisimétrica, ya que $(a, b) \in R$ pero $(a, b) \notin R$; es transitiva.

■

1.4. Ejercicio 15

Analizar cada una de las relaciones dadas. Sea A el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado $\mathcal{U}$ y las relaciones definidas en A:

Solución. Tenemos:

1. $Rel_1 = \{(C, D) | C, D \in A \text{ y } C \subset D\}$

   Solución. Es decir:

   - Reflexiva; $\forall C \in A \implies C \subset C \implies (C, C) \in A$. Se cumple, ya que la todo conjunto está contenido en sí mismo.
   - Simétrica; $\forall C, D \in A \implies C \subset D$. Pero entonces $\implies D \not\subset C$. Entonces no es simétrica.
   - Antisimétrica; $\forall C, D \in A$, entonces sabemos que $C \subset D$ o $D \subset C$, es decir $(C, D) \in A$ o $(D, C) \in A$. Entonces es antisimétrica.
   - Transitiva; $\forall C, D, E \in A$, entonces: $(C, D) \in A$ y $(D, E) \in A \implies C \subset D$ y $D \subset E \implies C \subset E \implies (C, E) \in A$

   ■

2. $Rel_2 = \{(C, D) | C, D \in A \text{ y } C \cap D = \emptyset\}$

   - Reflexiva; $\forall C \in A \implies C \cap C \neq \emptyset$. No es reflexiva.
   - Simétrica $\forall C, D$, entonces $C \cap D \implies D \cap C \implies (C, D) \in Ay(D, C) \in A$
   - Antisimétrica. No, ya que la intersección es conmutativa.
   - Transitiva: $\forall C, D, E \in A$, entonces, $C \cap D$ y $D \cap E \implies C \cap E \implies (C, E) \in A$. Es transitiva.

   ■

1.5. Ejercicio 19

Sea **Z** el conjunto de números enteros. Sea $Rel(\mathbf{Z})$ la relación definida en **Z** por:

$$Rel(Z) = \{(a, b) | a \in Z, b \in Z \text{ y } a + b = 2^c\}$$

Siendo 2^c = múltiplo de 2. ¿Es $Rel(\mathbf{Z})$ una relación de equivalencia?

Solución. A probar: reflexiva, simétrica y transitiva:

1. Reflexiva, $\forall a \in Z \implies a + a = 2a \implies (a, a) \in Z$ es múltiplo de 2. Entonces es reflexiva.

2. Simétrica, $\forall a, b \in Z \implies a + b = b + a = 2^c \implies (a, b) = (b, a) \in Z$ es múltiplo de 2. Entonces es simétrica.

3. Transitiva, $\forall a, b, c \in Z \implies a + b = 2^{c_2}$ y $b + c = 2^{c_1} \implies a + b + b + c = 2^{c_1} + 2^{c_2} \implies a + c = 2^{c_1+c_2} - 2b$. Entonces, es transitiva.

$\therefore$ es una relación de equivalencia. $\blacksquare$

1.6. Ejercicio 22

Sea **Z** el conjunto de números enteros. Sea $Rel(\mathbf{Z})$ la relación definida en **Z** por:

$$Rel(Z) = \{(a, b) | a \in Z, b \in Z \text{ y } a = 3b\}$$

¿Es $Rel(\mathbf{Z})$ una relación de equivalencia?

Solución. A probar: reflexiva, simétrica y transitiva:

1. Reflexiva, $\forall a \in Z \implies a = 3a \implies (a, a) \in Z$. Es transitiva.

2. Simétrica, $\forall a, b \in Z \implies a = 3b$ pero $b = 3a$ no es igual. Entonces, no es simétrica.

$\therefore$ no es una relación de equivalencia. $\blacksquare$

1.7. Ejercicio 26

26. Sea $\mathcal{P}$(A) la familia de subconjuntos de un conjunto dado A. (Por ejemplo, si

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Sea B un subconjunto fijo de A. (Por ejemplo, sea B = {a, b},) Se definen las siguientes funciones:

1. $\mathrm{f}_1 : P(\mathrm{A}) \to P(\mathrm{A}) \ni \mathrm{f}_1(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^\mathrm{c}$

Solución.

$$f_1(\emptyset) = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\} \tag{1}$$
$$f_1(\{a\}) = \{\emptyset,\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\} \tag{2}$$
$$f_1(\{b\}) = \{\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\} \tag{3}$$
$$f_1(\{c\}) = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\} \tag{4}$$
$$f_1(\{a,b\}) = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\} \tag{5}$$
$$f_1(\{a,c\}) = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\} \tag{6}$$
$$f_1(\{b,c\}) = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\} \tag{7}$$
$$f_1(\{a,b,c\}) = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\} \tag{8}$$

■

2. $\mathrm{f}_2 : P(\mathrm{A}) \rightarrow P(\mathrm{A}) \ni \mathrm{f}_2(\mathrm{X}) = \mathrm{X} \cup \mathrm{B}$

   Solución.

   Considerando $B = \{a,b\}$

$$f_2(\emptyset) = \{\emptyset, a, b\} \tag{1}$$
$$f_2(\{a\}) = \{a,b\} \tag{2}$$
$$f_2(\{b\}) = \{a,b\} \tag{3}$$
$$f_2(\{c\}) = \{a,b,c\} \tag{4}$$
$$f_2(\{a,b\}) = \{a,b\} \tag{5}$$
$$f_2(\{a,c\}) = \{a,b,c\} \tag{6}$$
$$f_2(\{b,c\}) = \{a,b,c\} \tag{7}$$
$$f_2(\{a,b,c\}) = \{a,b,c\} \tag{8}$$

■

3. $\mathrm{f}_3 : P(\mathrm{A}) \rightarrow P(\mathrm{A}) \ni \mathrm{f}_3(\mathrm{X}) = \mathrm{X} - \mathrm{B} \forall \mathrm{X} \in \mathcal{P}(\mathrm{A})$

   Solución.

   Considerando $B = \{a,b\}$

$$f_3(\emptyset) = \emptyset \tag{1}$$
$$f_3(\{a\}) = \{b\} \tag{2}$$
$$f_3(\{b\}) = \{a\} \tag{3}$$
$$f_3(\{c\}) = \{c\} \tag{4}$$
$$f_3(\{a,b\}) = \emptyset \tag{5}$$
$$f_3(\{a,c\}) = \{c\} \tag{6}$$
$$f_3(\{b,c\}) = \{c\} \tag{7}$$
$$f_3(\{a,b,c\}) = \{c\} \tag{8}$$

■

4. $\mathrm{f}_4 : P(\mathrm{A}) \to P(\mathrm{A}) \ni \mathrm{f}_4(\mathrm{X}) = B - \mathrm{X} \forall \mathrm{X} \in P(\mathrm{A})$

Solución.

Considerando $B = \{a, b\}$

$$
\begin{align}
f_4(\emptyset) &= \{a, b\} \tag{1}\\
f_4(\{a\}) &= \{b\} \tag{2}\\
f_4(\{b\}) &= \{a\} \tag{3}\\
f_4(\{c\}) &= \{a, b\} \tag{4}\\
f_4(\{a, b\}) &= \emptyset \tag{5}\\
f_4(\{a, c\}) &= \{b\} \tag{6}\\
f_4(\{b, c\}) &= \{a\} \tag{7}\\
f_4(\{a, b, c\}) &= \emptyset \tag{8}\\
& \tag{9}
\end{align}
$$

■

5. $\mathrm{f}_5 : P(\mathrm{A}) \to P(\mathrm{A}) \ni \mathrm{f}_5(\mathrm{X}) = \mathrm{B} \cap \mathrm{X} \forall \mathrm{X} \in P(\mathrm{A})$

Solución.

Considerando $B = \{a, b\}$

$$
\begin{align}
f_5(\emptyset) &= \emptyset \tag{1}\\
f_5(\{a\}) &= \{a\} \tag{2}\\
f_5(\{b\}) &= \{b\} \tag{3}\\
f_5(\{c\}) &= \emptyset \tag{4}\\
f_5(\{a, b\}) &= \{a, b\} \tag{5}\\
f_5(\{a, c\}) &= \{a\} \tag{6}\\
f_5(\{b, c\}) &= \{b\} \tag{7}\\
f_5(\{a, b, c\}) &= \{a, b\} \tag{8}\\
& \tag{9}
\end{align}
$$

■

6. $f_6 : P(A) \to P(A) \ni f_6(X) = (B \cap X)^c \forall X \in P(A)$

Solución.

Considerando $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

$$\begin{align} f_6(\emptyset) &= \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} \tag{1}\\ f_6(\{a\}) &= \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} \tag{2}\\ f_6(\{b\}) &= \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} \tag{3}\\ f_6(\{c\}) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} \tag{4}\\ f_6(\{a,b\}) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} \tag{5}\\ f_6(\{a,c\}) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} \tag{6}\\ f_6(\{b,c\}) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\} \tag{7}\\ f_6(\{a,b,c\}) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\} \tag{8}\\ & \tag{9} \end{align}$$

■

7. $f_7 : P(A) \to P(A) \ni f_7(X) = (B \cap X)^c \forall X \in P(A)$

   Solución.

   Considerando $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

$$\begin{align} f_6(\emptyset) &= \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} \tag{1}\\ f_6(\{a\}) &= \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} \tag{2}\\ f_6(\{b\}) &= \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} \tag{3}\\ f_6(\{c\}) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} \tag{4}\\ f_6(\{a,b\}) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} \tag{5}\\ f_6(\{a,c\}) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} \tag{6}\\ f_6(\{b,c\}) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\} \tag{7}\\ f_6(\{a,b,c\}) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\} \tag{8}\\ & \tag{9} \end{align}$$

■

Encuentre todas las imágenes correspondientes a las 7 funciones dadas para todos los valores de de X perteneciente a $P(A)$ que se definió al principio de este ejercicio.

1.8. Ejercicio 34

Del ejercicio 26 indique cuáles de las funciones son sobre, biyectivas y cuáles no son ningún tipo de ellas.

Solución. Tenemos:

1. f_1 inyectiva y sobreyectiva; biyectiva.
2. f_2 no es ninguna
3. f_3 no es ninguna

4. f_4 no es ninguna.
5. f_5 no es ninguna
6. f_6 inyectiva y sobreyectiva; biyectiva.
7. f_7 inyectiva y sobreyectiva; biyectiva.

■

1.9. Ejercicio 35

Sean $f : R \to R \ni f(x) = x + 2$
$g : R \to R \ni g(x) = x^2$
Encontrar:

1. $f \circ g = f(g) = (x^2) + 2$
2. $g \circ f = g(f) = (x + 2)^2$
3. $(f \circ g)(5) = (25) + 2) = 27$
4. $(g \circ f)(-2) = (-2 + 2)^2 = 0$

2. Hoja de trabajo 2

2.1. Ejercicio 4

Indíquese cuáles entre las siguientes funciones son inyectivas, cuáles sobreyectivas y cuáles biyectivas.

Nota: Por $P(U)$ representaremos la familia de todos los subconjuntos de un conjunto U.

1. $\mathrm{f : Z \to Z \ni f(x) = x + 3}$, inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.
2. $f : R \to R \ni f(x) = x^3$ inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.
3. $f : R \to R \ni f(x) = x^2$ ninguna.
4. $f : Z \to Z^+ \ni f(x) = x^2 + 1$ ninguna.
5. $f : R \to (R^+ \cup \{0\}) \ni f(x) = \max\{x, -x\}$, inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.
6. $f : P(U) \to P(U) \quad \ni f(X) = X \cup A, \forall X \in P(U)$, donde A es un subconjunto fijo de U; ninguno, por el ejericicio 34 de la primera parte.
7. $\mathrm{f : P(U) \to P(U) \ni f(X) = U - X, \forall X \in P(U)}$, ninguno, por el ejericicio 34 de la primera parte.
8. $\mathrm{f : P(U) \to P(U) \ni f(X) = A - X, \forall X \in P(U)}$, ninguno, por el ejericicio 34 de la primera parte.
9. $\mathrm{f : P(U) \to P(U) \ni f(X) = (X - A) \cup (A - X), \forall X \in P(U)}$, ninguno, por el ejericicio 34 de la primera parte.

2.2. Ejercicio 6

Demuéstrese las siguientes proposiciones:

1. Si $f \circ g$ está definida y g y f son inyectivas, entonces $f \circ g$ es inyectiva.

   Demostración. A probar que $f \circ g$ es inyectiva. Tenemos por hipótesis que f y g son inyectivas, es decir: $f(x) = f(x') \leftrightarrow x = x'$ y $g(x) = g(x') \leftrightarrow x = x'$. Entonces, si consideramos $f(g(x)) = f(g(x')) \leftrightarrow g(x) = g(x') \leftrightarrow x = x'$. Probando que es inyectiva. □

2. Si $g \circ f$ está definida y g y f son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.

   Demostración. A probar que $g \circ f$ es sobreyectiva. Por hipótesis sabemos que f y g son sobreyectivas. Entonces, supongamos que $g : Y \to Z \to \exists y \in Y$ y $z \in Z \ni g(y) = z$. Además $f : X \to Y \to \exists x \in X$ y $y \in Y \ni f(x) = y$. Entonces, $g(f(x)) = g(y) = z$ □

3. Si $g \circ f$ está definida y g y f son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.

   Demostración. Por la demostración (1) y la demostración (2) sabemos que la composición de funciones de dos funciones inyectivas es inyectiva y la composición de dos funciones sobreyectivas es sobreyectiva, entonces es trivial considerar que dos funciones biyectivas (inyectivas y sobreyectivas) es biyectiva. □

2.3. Ejercicio 8

Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ Sea R_1 y R_2 las relaciones definidas en A :

$$\mathrm{R}_1 = \{(0,1),(1,2),(4,5),(8,9),(9,9)\}$$
$$\mathrm{R}_2 = \{(0,0),(1,1),(3,4),(4,5),(8,8),(8,9)\}.$$

Descríbanse en forma enumerativa las relaciones $\mathrm{R}_1 \cup \mathrm{R}_2, \mathrm{R}_1\mathrm{R}_2, \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2, R_2 - R_1$

Solución. Entonces, tenemos:

1. $R_1 \cup R_2 = \{(0,1),(1,2),(4,5),(8,9),(9,9),(0,0),(1,1),(3,4),(8,8)\}$
2. $R_1R_2 = \{(0,1),(1,2),(4,5),(8,9),(9,9)\} \cdot \{(0,0),(1,1),(3,4),(4,5),(8,8),(8,9)\}$
3. $R_1 - R_2 = \{(0,1),(1,2),(9,9)\}$
4. $R_2 - R_1 = \{(0,0),(1,1),(3,4),(8,8)\}$

■

2.4. Ejercicio 10

Demuéstrese que si R_1 y R_2 son equivalencias definidas en un mismo conjunto A, entonces $R_1 \cap R_2$ es también una equivalencia definida en A.

Demostración. A probar: $R_1 \cap R_2$ es una equivalencia. Por hipótesis, sabemos que R_1 y R_2 son equivalencias (cumplen con la reflexividad, simetría y transitividad). Entonces procederemos a demostrar que $R_1 \cap R_2 \implies (R_1, R_2) \in A$ cumple con esas 3 propiedades:

1. Reflexividad, supóngase que $\forall R_1 \in A \implies R_1 \cap R_1 = \emptyset \implies \emptyset \in A$ cumple con la reflexividad.

2. Simetría, $\forall R_1, R_2 \implies R_1 \cap R_2 = R_2 \cap R_1 \implies (R_1, R_2) \in A$ y $(R_2, R_1) \in A$ cumple con la simetría.

3. Transitividad $\forall R_1, R_2, R_3 \implies R_1 \cap R_2$ y $R_2 \cap R_3 \implies R_1 \cap R_3 \implies (R_1, R_3) \in A$. Entonces cumple con la transitividad.

$\therefore R_1 \cap R_2$ es una equivalencia definida en A □

2.5. Ejercicio 12

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 13, 14, 15\}$. Sea

$$\mathrm{R} = \triangle_{\mathrm{A}} \cup \{(1,4), (4,1), (3,4), (4,3), (3,1), (1,3)\}$$

Pruébese que R es una equivalencia mostrando cuál es la partición de A que la induce.

Solución. Sea $\triangle_A = \{(1,1), (2,2), (3,3), ..., (14,15), (15,15)\}$

$$\implies \triangle_A \cup \{(1,4), (4,1), (3,4), (4,3), (3,1), (1,3)\} = \tag{1}$$
$$= \{(1,1), (2,2), (3,3), ..., (14,14), (15,15), (1,4), (4,1), (3,4), (4,3), (3,1), (1,3)\} \tag{2}$$

Mostrando que $\forall r \in R, r \neq \emptyset$: se cumple, ya que no hay ningún elemento $\emptyset$ en R.

Por otro lado, se debe cumplir que r_i y $r_j \in R$ debemos demostrar que $r_i \cap r_j = \emptyset$ si $r_i \neq r_j$, es trivial darse cuenta que no hay ningún $r_i \cap R_j \neq \emptyset$. Por lo tanto, R es una relación de equivalencia.

■