Técnicas de conteo avanzadas

Ejemplo 1. En una tienda de donas 🍩 hay 5 diferentes sabores de donas: chocolate, glaseada, fresa, cajeta y con chispas de chocolate. ¿De cuántas maneras diferentes podemos elegir media docena de donas, si al menos debemos escoger dos de chocolate?

Este problema es equivalente a contar el número de cadenas de 10 bits con exactamente seis 0's (o bien cuatro 1's) sujeto a una *restricción específica*:

de los seis 0's, al menos dos deben «quedar juntos»

El número de opciones se ve reducido, ya que dos de las donas deben ser de chocolate. Entonces el problema en realidad consiste en elegir cuatro donas de 5 diferentes sabores disponibles y esto es equivalente a contar el número de cadenas de 5 - 1 + 4 = 8 bits con exactamente cuatro 0's (o bien cuatro 1's):

$$C(8,4) = 70$$

Ejemplo 2. En una tienda de helados 🍨 hay 7 diferentes sabores de helado: chocolate, vainilla, pistacho, atol de elote, galleta, chocomenta y mango. ¿De cuántas maneras diferentes podemos elegir una docena de helados, si al menos debemos escoger dos de pistacho y 3 de chocomenta?

Sin restricciones, este problema es equivalente a contar el número de cadenas de 7 - 1 + 12 = 18 bits con exactamente doce 0's (o bien seis 1's).

Luego dada la restricción tenemos 5 opciones menos para elegir, entonces el problema es equivalente a contar el número de cadenas 7 - 1 + 7 = 13 con exactamente siete 0's (o bien seis 1's):

$$C(13,7) = C(13,6) = 1716$$

❓ ¿Cómo cambia el número de opciones si la restricción es que debemos llevar al menos tres helados de chocomenta y *exactamente* dos de pistacho?

Luego de «quitar» las 5 opciones (3 de chocomenta y 2 pistacho), tenemos que «eliminar» además un sabor; el problema es equivalente a contar el número de cadenas de 6 - 1 + 7 = 12 bits con exactamente cinco 1's (o bien siete 0's):

$$C(12,7) = C(12,5) = 792$$

Ejemplo 3. Encuentre el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación:

$$w + x + y + z = 15$$

sujeta a la restricción $0 \leq y \leq 5$.

🧑‍🏫 Vamos a presentar dos estrategias diferentes para resolver el problema.

Forma 1: Reconocemos que hay 6 casos diferentes:

Caso $y = 0$:	$C(17, 15) = C(17, 2) = 136$
Caso $y = 1$:	$C(16, 14) = C(16, 2) = 120$
Caso $y = 2$:	$C(15, 13) = C(15, 2) = 105$
Caso $y = 3$:	$C(14, 12) = C(14, 2) = 91$
Caso $y = 4$:	$C(13, 11) = C(13, 2) = 78$
Caso $y = 5$:	$C(12, 10) = C(12, 2) = 66$

$\therefore$ Por el principio de la suma, el número de soluciones es 596.

Forma 2: Contar el complemento

⚠️ El complemento de la restricción $0 \leq y \leq 5$ es $y > 5 \leftrightarrow y \geq 6$

Tomando en cuenta la restricción, le problema puede interpretarse como el de contar el número de soluciones de la ecuación:

$$w + x + y + z = 15 - 6 = 9$$

sin restricciones.

El número de soluciones es: $C(12, 9) = C(12, 3) = 220$

Luego, contamos el número de soluciones de la ecuación $w + x + y + z = 15$ sin restricciones.

El número de soluciones es: $C(18, 15) = C(18, 3) = 816$

Finalmente, al total le restamos el complemento: 816 - 220 = 596 soluciones de la ecuación con la restricción dada.

Ejemplo 4. Encuentre el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación:

$$w + x + y + z = 11$$

sujeta a la siguiente restricción $2 \leq y \leq 5$.

👨‍🏫 El problema puede resolverse por casos:

Caso $y = 2$: $C(11, 2) = C(11, 9) = 55$
Caso $y = 3$: $C(10, 2) = C(10, 8) = 45$
Caso $y = 4$: $C(9, 2) = C(9, 7) = 36$
Caso $y = 5$: $C(8, 2) = C(8, 6) = 28$

$\therefore$ Por el principio de la suma, el número de soluciones es 164.

⚠️ Este problema se resuelve usando el principio de inclusión - exclusión. La estrategia será:

1. Contamos el número de soluciones para las cuales $y \geq 2$
2. Contamos el número de soluciones para las cuales $y \geq 6$
3. Restamos el paso 2 del 1.

El número de soluciones para las cuales $y \geq 2$ es: $C(12, 3) = C(12, 9) = 220$

Luego, el número de soluciones para las cuales $y \geq 6$ es: $C(8, 3) = C(8, 5) = 56$

$\therefore$ El número de soluciones de la ecuación sujeta a la restricción dada es: $220 - 56 = 164$