# **Relaciones**

⚠️ Aceptaremos la definición intuitiva de *par ordenado* como un ente formado por dos objetos en un orden determinado, los cuales vamos a escribir entre paréntesis y separados por comas, es decir:

$$(a, b)$$

**Definición**. Sean $(a, b)$ y $(c, d)$ dos pares ordenados, decimos que ambos pares son *iguales*, si y solo si, son iguales los primeros elementos y los segundos elementos, respectivamente:

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \text{ y } b = d$$

**Definición**. Sean $A$ y $B$ conjuntos. Definimos el *producto cartesiano de A con B* de la siguiente manera:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$$

En palabras, el conjunto de parejas ordenadas tales que el primer elemento pertenece al conjunto $A$ y el segundo elemento pertenece al conjunto $B$.

⚠️ El producto cartesiano no es conmutativo, es decir, $A \times B \neq B \times A$ (ver la demostración en el libro).

*Ejemplo 1*.

a) $A = \{\$, \#\}$ y $B = \{\&, \%, *\}$

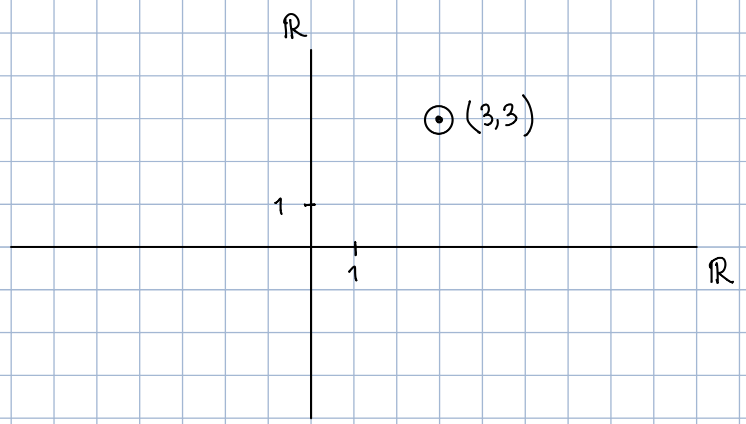
Entonces, $A \times B = \{(\$, \&), (\$, \%), (\$, *), (\#, \&), (\#, \%), (\#, *)\}$

b) Consideremos el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

Entonces, el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{..., (0, 0), (-\pi, 7), (e, \pi), (1, 2), ...\}$ tiene, evidentemente, infinitos elementos.

👨‍🏫 Al igual que la notación que usamos para escribir el producto de dos números $a \cdot a = a^2$, se suele utilizar la misma notación para el producto cartesiano de un conjunto consigo mismo, es decir:

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ se lee «*erre dos*» y lo conocemos como *plano cartesiano*




⚠️ Cada punto del plano cartesiano es un par ordenado del producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

**Definición**. Sean $A$ y $B$ conjuntos. Una *relación de $A$ en $B$* es cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

En símbolos escribimos $R$: $A \to B$, $R \subseteq A \times B$.

Cuando la relación es de $A$ en sí mismo, decimos que se trata de una *relación sobre $A$*.

*Ejemplo 2*. Sean $A = \{\text{a, b, c}\}$ y $B = \{\text{x, y}\}$ conjuntos.

Sabemos que $A \times B = \{(\text{a, x}), (\text{a, y}), (\text{b, x}), (\text{b, y}), (\text{c, x}), (\text{c, y})\}$.

Son ejemplos de relaciones los siguientes:

$R_1 = \emptyset$, se conoce como la *relación vacía*

$R_2 = \{(\text{a, x})\}$

$R_3 = \{(\text{a, x}), (\text{a, y})\}$, notemos que el elemento a $\in A$ está relacionado con los elementos x, y $\in B$

---

*Ejemplo 3*. Definimos la relación «menor o igual» sobre $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$R = \{(a, b) : a \leq b\}$$

Por ejemplo, $(1, 3) \in R$ y escribimos $1 \leq 3$; $(2, 2) \in R$ y escribimos $2 \leq 2$; pero $(4, 1) \notin R$.

---

*Ejemplo 4*. Sea $A = \{\text{a, e, i, o, u}\}$. Asociada a toda relación sobre un conjunto existe una relación llamada *relación identidad*, la cual está formada solamente por parejas ordenadas de objetos iguales. En este ejemplo la relación identidad es la siguiente:

$$i_A = \{(\text{a, a}), (\text{e, e}), (\text{i, i}), (\text{o, o}), (\text{u, u})\}$$

---

**Definición**. Sea $A$ un conjunto y $R$ una relación sobre $A$.

- $R$ es *reflexiva*, si y solo si, $\forall a \in A$, $(a, a) \in R$
- $R$ es *simétrica*, si y solo si, $(a, b) \in R \to (b, a) \in R$
- $R$ es *antisimétrica*, si y solo si, $[(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R] \to a = b$, o bien, tomando la contrapositiva de la implicación $a \neq b \to [(a, b) \notin R \vee (b, a) \notin R]$
  - Simetría y antisimetría NO son opuestos.
- $R$ es *transitiva*, si y solo si, $[(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R] \to (a, c) \in R$