El principio de inducción matemática, parte II

Ejemplo 1. Demuestre que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ vale:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Prueba: Por inducción matemática.

Sea $S(n)$ la proposición abierta:

$$S(n): \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \; n \geq 1$$

Paso base: Demostramos $S(1)$.

$$S(1) = 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Paso inductivo: Asumimos que $S(k)$ es verdadera para algún $k \geq 1$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \; n \geq 1$$

demostramos que $S(k)$ implica $S(k+1)$:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)[2k^2 + 7k + 6]}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} = S(k+1)
\end{aligned}$$

$\therefore$ $S(n)$ es verdadera para toda $n \geq 1$. □

MAC

Ejemplo 2. Demuestre que para cualquier entero positivo $n \geq 6$ vale $4n < n^2 - 7$.

Prueba: Por inducción matemática.

Sea $S(n)$: $4n < n^2 - 7$, $n \geq 6$ una proposición abierta.

Paso base: Demostramos $S(6)$.

$$S(6) = 4 \cdot 6 = 24 < 6^2 - 7 = 29$$

Paso inductivo: Asumimos que $S(k)$ es verdadera para algún $k \geq 6$:

$$4k < k^2 - 7$$

demostramos que $S(k)$ implica $S(k+1)$:

$$4k < k^2 - 7$$

$$4k + 4 < k^2 - 7 + 4 < k^2 - 7 + 2k + 1 \quad \text{pues como } k \geq 6,\ 2k+1 \geq 13 > 4$$

$$4(k+1) < k^2 - 7 + 2k + 1 = (k+1)^2 - 7$$

$\therefore$ $S(n)$ es verdadera para todo entero positivo $n \geq 6$. □

⚠️ El paso base es **muy importante**.

Ejemplo 3.

Falso teorema. Para todo n vale $n + 1 = n$.

Prueba: Por inducción matemática.

Sea $S(n)$: $n + 1 = n$ para todo n una proposición abierta.

Paso inductivo: Asumimos que $S(k)$ es verdadera para algún k:

$$k + 1 = k$$

demostramos que $S(k)$ implica $S(k+1)$:

$$(k+1) + 1 = k + 1$$

🤯 ¡Esto no tiene sentido! El problema es que *omitimos deliberadamente* el paso base. En realidad no existe ningún entero positivo para el que $n + 1 = n$.

MAC