<u>Permutaciones con elementos indistinguibles</u>

Ejemplo 1. ¿Cuántas palabras* diferentes pueden formarse usando las letras de la palabra BALL?
* por *palabra* entendemos cualquier selección ordenada de letras, no importando si tiene sentido o no

⚠️ Tenemos en este caso dos letras L indistinguibles.

Para cada permutación de las 4 letras existe otra equivalente que se obtiene (en este caso) al intercambiar las letras L. Por ejemplo:

$$\begin{matrix} B\ L\ A\ L \\ B\ L\ A\ L \end{matrix} \longrightarrow BLAL$$

Reconocemos que existe una función 2 a 1 del conjunto de permutaciones de las 4 letras al conjunto de palabras.

Entonces, para contar el número de palabras vamos a seguir la siguiente estrategia:

<u>Paso 1</u>: Contar el número de permutaciones de las 4 letras (como si fueran diferentes) $\rightarrow P(4,4) = 4! = 24$

<u>Paso 2</u>: Sea A el conjunto de permutaciones de las 4 letras y B el conjunto de las palabras con las letras B, A, L, L. Reconocemos que:

$$|A| = 2|B|$$

<u>Paso 3</u>: Despejamos para $|B| \rightarrow |B| = |A|/2 = P(4,4)/2 = 24/2 = 12$

$\therefore$ En conclusión, podemos formar 12 palabras diferentes con las letras B, A, L, L.

Ejemplo 2. ¿Cuántas palabras diferentes pueden formarse usando las letras de la palabra MISSISSIPPI?

⚠️ Tenemos en este caso dos letras P, cuatro letras S y cuatro letras I indistinguibles.

Entonces, para cada palabra existen 2 permutaciones equivalentes al intercambiar las letras P.

MISSISSIPPI & MISSISSIPPI son equivalentes

Luego, para cada palabra existen 4! = 24 permutaciones equivalentes al *permutar* las cuatro letras S.

Por ejemplo: MISSISSIPPI, MISSISSIPPI, MISSISSIPPI, ... son equivalentes

Finalmente, para cada palabra existen 4! = 24 permutaciones equivalentes al *permutar* las cuatro letras I.

Por ejemplo: MISSISSIPPI, MISSISSIPPI, MISSISSIPPI ... son equivalentes

<u>Paso 1</u>: Contar el número de permutaciones de 11 letras (como si fueran todas distintas) $\rightarrow P(11,11) = 11!$

<u>Paso 2</u>: Reconocemos qué hay una relación $2!\cdot 4!\cdot 4! = 1152$ a 1 entre las permutaciones de las 11 letras y las palabras.

<u>Paso 3</u>: El número de palabras diferentes con las letras de MISSISSIPPI es: $11!/(2!4!4!) = 34{,}650$

Definición. Dada un conjunto con n objetos en el qué hay n_1 elementos iguales tipo 1, n_2 elementos iguales tipo 2, ..., n_k elementos iguales tipo k.

Entonces el número de permutaciones de elementos indistinguibles es:

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

Ejemplo 3. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ordenarse linealmente 3 pelotas rojas y 2 pelotas azules, si la selección debe ser de *al menos* 3 pelotas?

⚠️ Este problema es equivalente al de contar cuántas palabras diferentes de 3 o más letras podemos formar usando las letras R, R, R, A, A, en donde R representa las pelotas rojas y A representa las pelotas azules.

👨‍🏫 Al menos 3 pelotas se *traduce* a 3 o 4 o 5 letras (pelotas).

Dividimos la «tarea principal» en 3 «tareas» disjuntas: i) palabras de 3 letras, ii) palabras de 4 letras, iii) palabras de 5 letras.

Palabras de 3 letras:

Sin letras A; letras R, R, R: $3!/3! = 1$
Una letra A; letras R, R, A: $3!/2! = 3$
Dos letras A; letras R, A, A: $3!/2! = 3$

Por el principio de la suma, tenemos 7 palabras diferentes de 3 letras.

Palabras de 4 letras:

Una letra A; letras R, R, R, A: $4!/3! = 4$
Dos letras A; letras R, R, A, A: $4!/(2!\cdot 2!) = 6$

Por el principio de la suma, tenemos 10 palabras diferentes de 4 letras.

Palabras de 5 letras:

Todas las letras R, R, R, A, A: $5!/(3!\cdot 2!) = 10$

Tenemos 10 palabras diferentes de 5 letras.

En total, y por el principio de la suma, hay $7 + 10 + 10 = 27$ diferentes palabras de 3 o más letras usando las letras R, R, R, A, A, es decir, hay 27 maneras diferentes de ordenar 3 pelotas rojas y 2 pelotas azules.

MAC