Funciones, parte II

Ejemplo 1.

⚠️ Podemos *modificar* el dominio y el contradominio de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$ para que esta sea biyectiva.

Sea $X = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ un conjunto.

Lema 1. La función $f_1: X \to X$; $f_1(x) = x^2$ es inyectiva.

<u>*Prueba*</u>: Sean $x_1, x_2 \in X$. Supongamos $f_1(x_1) = f_1(x_2) \to (x_1)^2 = (x_2)^2 \to |x_1| = |x_2|$. Luego, como $x_1, x_2 \geq 0$ por la definición del conjunto X, tenemos que $|x_1| = |x_2| \to x_1 = x_2$.

$\therefore f_1$ es inyectiva. $\square$

Lema 2. La función $f_1: X \to X$; $f_1(x) = x^2$ es sobreyectiva.

<u>*Prueba*</u>: Queremos demostrar que $\operatorname{Im} f_1 = X$.

Primero, mostramos que $\operatorname{Im} f_1 \subseteq X$ (contradominio de f_1).

Supongamos $y \in \operatorname{Im} f_1 \to y = f_1(x)$ para algún $x \in \operatorname{Dom} f_1 \to y = x^2 \to y \geq 0$ porque $x \geq 0 \to y \in X$.

Luego, mostramos que $X \subseteq \operatorname{Im} f_1$.

Supongamos $y \in X \to y \geq 0 \to \operatorname{sqrt}(y) = x$ y $x \geq 0 \to y = x^2 \to y \in \operatorname{Im} f_1$.

$\therefore \operatorname{Im} f_1 = X$. $\square$

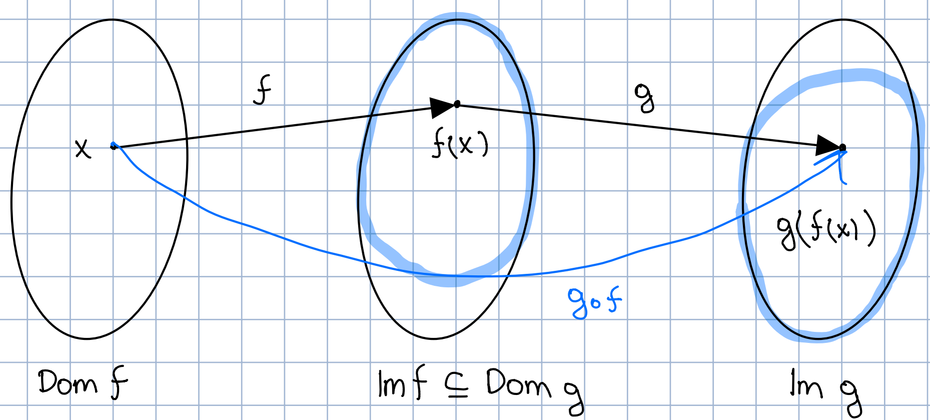
Proposición. La función $f_1: X \to X$; $f_1(x) = x^2$ es biyectiva.

<u>*Prueba*</u>: Trivial por los Lemas 1 y 2. $\square$

Definición. Sean $f: A \to B$ y $g: B \to C$ dos funciones. Se le llama *composición de funciones de f y g* a la función:

$$g \circ f : A \to C;\ (g \circ f)(x) = g[f(x)]\ \forall\, x \in A$$

⚠️ Notemos que $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Dom} g$.



Definición. Sea A un conjunto. Se le llama *función identidad* a la función definida como:

$$i_A: A \to A;\ i(a) = a\ \forall a \in A$$

Definición. Sea $f: A \to B$ una función. Una función $g: B \to A$ es la *inversa de* f si:

$$f \circ g\,(x) = i(x)\ \&\ g \circ f\,(x) = i(x)$$

Teorema. Una función $f: A \to B$ tiene inversa f^{-1}, si y solo si, f es biyectiva.

<u>*Prueba*</u>:

Primero, mostramos que si f es biyectiva, entonces f tiene inversa.

Sea $f: A \to B$ una función biyectiva. Definimos la función $f^{-1}: B \to A$ de la siguiente forma. Sea $b \in B$. Como f es sobreyectiva, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Sea $f^{-1}(b) = a$. Como f es inyectiva, entonces a es único. Por lo tanto f^{-1} está bien definida.

Ahora probamos que f^{-1} es la inversa de f. Sean $a \in A$ y $b = f(a)$. Entonces, por definición $f^{-1}(b) = a$. Luego:

$$f^{-1} \circ f\,(a) = f^{-1}[f(a)] = f^{-1}(b) = a = i(a)$$

Sean $b \in B$ y $a = f^{-1}(b)$. Entonces, por definición $f(a) = b$. Luego:

$$f \circ f^{-1}\,(b) = f[f^{-1}(b)] = f(a) = b = i(b)$$

$\therefore f^{-1}$ es la inversa de f.

Luego, mostramos que si f tiene inversa, entonces f es biyectiva.

Sea $f: A \to B$ una función y $f^{-1}: B \to A$ su inversa.

Primero, mostramos que f es sobreyectiva. Supongamos $b \in B$. Sea $a = f^{-1}(b)$. Entonces:

$$f(a) = f[f^{-1}(b)] = f \circ f^{-1}(b) = i(b) = b\ \forall b \in B.$$

Por lo tanto, f es sobreyectiva.

Luego, mostramos que f es inyectiva. Sean $a_1, a_2 \in A$ tales que $f(a_1) = f(a_2)$. Sean $b = f(a_1)$ y $a = f^{-1}(b)$. Entonces:

$$\begin{aligned} a_2 &= i(a_2) \\ &= f^{-1} \circ f\,(a_2) \\ &= f^{-1}(f(a_2)) \\ &= f^{-1}(b) \\ &= a \end{aligned}$$

Al mismo tiempo:

$$\begin{aligned} a_1 &= i(a_1) \\ &= f^{-1} \circ f(a_1) \\ &= f^{-1}(f(a_1)) \\ &= f^{-1}(b) \\ &= a \end{aligned}$$

Entonces $a_1 = a = a_2$. Por lo tanto, f es inyectiva. $\square$

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$

Definición. Sea A un conjunto. Se le llama *sucesor de A* al conjunto definido como:

$$A^+ = \mathrm{s}(A) = \sigma(A) = A \cup \{A\}$$

Ejemplo 2. Sea $A = \{\#, \$\}$. Entonces, el sucesor de A es el conjunto:

$$\mathrm{s}(A) = A \cup \{A\} = \{\#, \$\} \cup \{\{\#, \$\}\} = \{\#, \$, \{\#, \$\}\}$$

¿Cuántos elementos tiene el conjunto s(A)*?*

Tres elementos, a saber: #, \$, {#, \$}.

«*En el principio no había nada...*»

Consideremos el conjunto vacío Ø.

Entonces, el sucesor del conjunto vacío es el conjunto s(Ø) = Ø ∪ {Ø} = {Ø}.

Luego, el sucesor del sucesor del conjunto vacío es el conjunto s(s(Ø)) = {Ø} ∪ {{Ø}} = {Ø,{Ø}}.

🧑‍🏫 Esta notación parece ser un poco engorrosa. Podemos utilizar una *simbología* diferente.

0 = Ø
1 = s(0)
2 = s(1)
3 = s(2)
4 = s(3)
...

⚠️ Esta familia de conjuntos (*todos* los sucesores del vacío) es lo que nosotros conocemos como *conjunto de números naturales*. En símbolos:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$