

Proposiciones matemáticas

¿Qué es una proposición?

Una *proposición* es una expresión bien definida, que puede ser verdadera (= 1) o falsa (= 0), pero NUNCA ambas al mismo tiempo.

Ejemplo 1.

p : *El tiburón da miedo*. Esta frase es un ejemplo de una expresión que **no está bien definida**. La razón es que depende de las preferencias de cada persona; a algunos les dará miedo y a otros no.

q : *Hoy es viernes*. Esta frase es un ejemplo de una proposición; es falsa.

¿Qué es una proposición abierta?

Una *proposición abierta* es una expresión que contiene una (o más) variable y que al ser sustituida con algún valor determinado, dicha expresión se «convierte» en una proposición.

Ejemplo 2.

$p(x)$: $x + 1 = 0$. Por ejemplo, si $x = 0$ p es falsa y si $x = -1$ p es verdadera.

¿Qué es un conectivo lógico?

Un *conectivo lógico* es un operador que se utiliza para «conectar» dos (o más) proposiciones. Estos están representados por símbolos inequívocos. Son ejemplos de conectivos:

- la negación; símbolo: $\neg p$ («no» o «not»)
- la conjunción; símbolo: $p \wedge q$ («y» o «and»)
- la disyunción; símbolo: $p \vee q$ («o» u «or»)
- la implicación; símbolo: $p \rightarrow q$ («si..., entonces...»)
- la doble implicación; símbolo: $p \leftrightarrow q$ («..., si y solo si, ...»)

Caracterización de los conectivos lógicos

Usamos *tablas de verdad* para caracterizar (describir) los conectivos lógicos.

Negación	
p	$\neg p / \sim p$
0	1
1	0

Conjunción		
p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Implicación		
p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Disyunción		
p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Doble implicación		
p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Caracterización de conectivos lógicos usando tablas de verdad

Ejemplo. Para entender un poco mejor la implicación, veamos el siguiente ejemplo. Definimos las siguientes proposiciones:

p := Yo estudio.

q := Yo apruebo Mate Discreta.

La proposición compuesta $p \rightarrow q$:= Si estudio, entonces apruebo Mate Discreta. Supongamos que esta proposición es una *ley de vida*, es decir, sabemos que es cierto (al menos debería serlo...).

¿Para qué valores de verdad nos sentiríamos “defraudados” por la vida?

Luego de analizar la tabla de verdad de la implicación, concluimos lo siguiente:

- Para $p = 0$ y $q = 0$, no estudio y no apruebo; no me siento “defraudado” (aunque sí triste 😞)
- Para $p = 0$ y $q = 1$, no estudio y apruebo; no me siento “defraudado” (aunque sí feliz 😊)
- Para $p = 1$ y $q = 1$, estudio y apruebo; no me siento “defraudado” (la *ley* se cumplió 🙏)
- Para $p = 1$ y $q = 0$, estudio y no apruebo; sí me siento “defraudado” (pasa más seguido de lo que nos gustaría 🙄)

Podemos concluir que el único caso “malo” es cuando $p = 1$ y $q = 0$, tal y como lo confirma la fila correspondiente en la tabla de verdad.

⚠ La implicación no es una relación causa-efecto, sino hipótesis-conclusión.

Ejemplo. Si está lloviendo, entonces está nublado.

Notemos que la lluvia 🌧 **implica** nubes, pero no **causa** nubes. Lo único que esta implicación “prohíbe” es que esté lloviendo y no esté nublado.