Relaciones de equivalencia, parte II

Definición. Sea A un conjunto y sea S una familia de subconjuntos de A:

$$S = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

Si la familia de subconjuntos satisface las siguientes propiedades:

1. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$
3. $A_i \neq \emptyset$ para todo i,

entonces se dice que S es una **partición del conjunto A**.

Ejemplo 1. Sean $X = \{a, b, c, d\}$ e $Y = \{a, d\}$ conjuntos y R una relación de equivalencia sobre el conjunto potencia de X tal que:

$$R = \{(A, B) : A \cap Y = B \cap Y\}$$

Recordemos el conjunto potencia del conjunto X:

$P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$

Las 4 clases de equivalencia son:

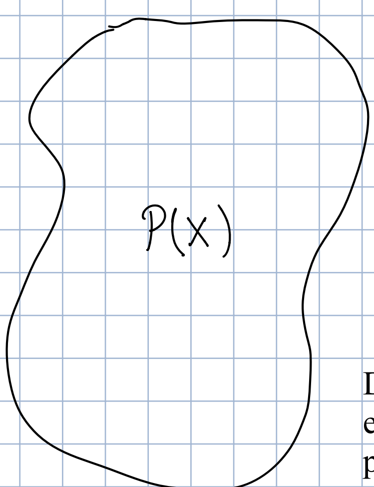
$[\emptyset] = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}\}$
$[\{a\}] = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$
$[\{d\}] = \{\{d\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{b,c,d\}\}$
$[\{a,d\}] = \{\{a,d\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$

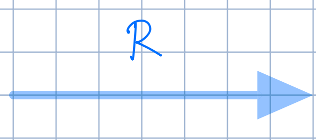
Notemos que $[\emptyset] \cup [\{a\}] \cup [\{d\}] \cup [\{a, d\}] = P(X)$

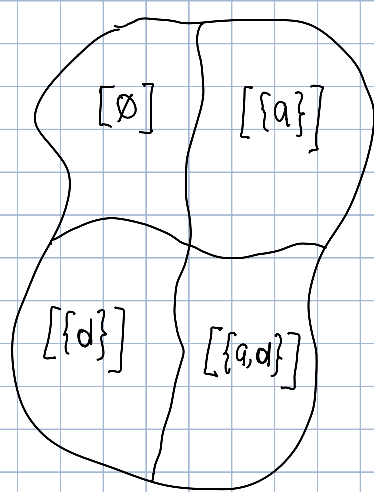
Además, $[\emptyset] \cap [\{a\}] = \emptyset$, $[\emptyset] \cap [\{d\}] = \emptyset$, $[\emptyset] \cap [\{a,d\}] = \emptyset$, $[\{a\}] \cap [\{d\}] = \emptyset$, $[\{a\}] \cap [\{a,d\}] = \emptyset$ & $[\{d\}] \cap [\{a,d\}] = \emptyset$.

Finalmente $[\emptyset] \neq \emptyset$, $[\{a\}] \neq \emptyset$, $[\{d\}] \neq \emptyset$ & $[\{a,d\}] \neq \emptyset$.

En conclusión, la familia de subconjuntos de $P(X)$ dada por $\{[\emptyset], [\{a\}], [\{d\}], [\{a,d\}]\}$ es una partición del conjunto $P(X)$.







Decimos que la relación de equivalencia R induce una partición sobre el conjunto $P(X)$.

⚠️ Toda relación de equivalencia sobre un conjunto A induce una partición del conjunto A.

Definición. Sea A un conjunto y R una relación de equivalencia sobre A. Al conjunto de todas las clases de equivalencia del conjunto A se le llama **conjunto cociente**, el cual se denota como A/R.

Ejemplo 2. Para el conjunto y la relación de equivalencia del Ejemplo 1, el conjunto cociente es:

$$P(X)/R = \{[\varnothing], [\{a\}], [\{d\}], [\{a,d\}]$$

⚠️ $P(X) \neq P(X)/R \rightarrow |P(X)| = 16$ y $|P(X)/R| = 4$.

Ejemplo 3. Sea R una relación sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que:

$$R = \{((a,b), (c,d)) : a + d = b + c\}$$

Demuestre que R es una relación de equivalencia.

Reflexividad:
Sea $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Luego, $a + b = a + b \rightarrow ((a,b), (a,b)) \in R \quad \therefore R$ es reflexiva

Simetría:
Sean $(a,b), (c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales que $((a,b), (c,d)) \in R \rightarrow a + d = b + c \rightarrow b + c = a + d \rightarrow c + b = d + a \rightarrow$ $((c,d), (a,b)) \in R \quad \therefore R$ es simétrica

Transitividad:
Sean $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales que $((a,b), (c,d)) \in R$ & $((c,d), (e,f)) \in R$.

Entonces, $a + d = b + c$ & $c + f = d + e$.

Luego, sumamos ambas ecuaciones: $a + \cancel{d} + \cancel{c} + f = b + \cancel{c} + \cancel{d} + e \rightarrow a + f = b + e \rightarrow ((a,b), (e,f)) \in R$.

$\therefore R$ es transitiva. $\square$

Ejemplo 4. Para el conjunto y la relación de equivalencia del Ejemplo 3:

a) Escriba *algunos* elementos de las siguientes clases de equivalencia:

$[(0, 2)] = \{(0, 2), (1, 3), (2, 4),\ldots\}$
$[(0, 1)] = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3),\ldots\}$
$[(0, 0)] = \{(0, 0), (3, 3), (2, 2),\ldots\}$
$[(1, 0)] = \{(1, 0), (2, 1), (5, 4),\ldots\}$
$[(2, 0)] = \{(2, 0), (3, 1), (7, 5),\ldots\}$

b) Liste *algunos* elementos del conjunto cociente $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / R$:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} / R = \{..., [(0, 2)], [(0, 1)], [(0, 0)], [(1, 0)], [(2, 0)], ...\}$$

⚠️ Se propone usar una simbología diferente para representar las clases de equivalencia:

$-2 = [(0, 2)] = \{(0, 2), (1, 3), (2, 4),...\}$
$-1 = [(0, 1)] = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3),...\}$
$0 = [(0, 0)] = \{(0, 0), (3, 3), (2, 2),...\}$
$1 = [(1, 0)] = \{(1, 0), (2, 1), (5, 4),...\}$
$2 = [(2, 0)] = \{(2, 0), (3, 1), (7, 5),...\}$

Entonces, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / R = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ es el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$.

Ejercicio 4. Sea R una relación sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\text{-}\{0\}$ tal que:

$$R = \{((a,b), (c,d)) : a \cdot d = b \cdot c\}$$

a) Demuestre que R es una relación de equivalencia.
b) Escriba *algunos* elementos de $[(1, 2)], [(-2, 3)], [(1, 1)], [(-5, 4)]$
c) Escribá *algunos* elementos del conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\text{-}\{0\} / R$
d) Proponga una simbología apropiada para las clases de equivalencia