Relaciones de equivalencia

Definición. Una relación R sobre un conjunto A que es reflexiva, simétrica y transitiva, es llamada una relación de equivalencia.

Dos elementos $a, b \in A$ que están relacionados por una relación de equivalencia, se dice que son equivalentes. La notación $a \sim b$ se usa para indicar que a y b son equivalentes respecto a una relación de equivalencia particular.

💡 La idea general detrás de una relación de equivalencia es que es una clasificación de objetos que de alguna manera son equivalentes.

Ejemplo 1. Sean A el conjunto de estudiantes del curso MM2015, y R_1, R_2 y R_3 relaciones definidas sobre A de la siguiente manera:

$R_1 = \{(x, y) : x$ es más alto que $y\}$
$R_2 = \{(x, y) : x$ nació en el mismo mes que $y\}$
$R_3 = \{(x, y) : x$ tiene la misma edad que $y\}$

Determine si las relaciones son relaciones de equivalencia sobre el conjunto A.

$R_1 = \{(x, y) : x$ es más alto que $y\}$

Reflexiva: Para un elemento $x \in A$, x no es más alto que $x \rightarrow (x, x) \notin R_1$.
$\therefore R_1$ no es una relación reflexiva $\rightarrow \mathbb{R}_1$ no es una relación de equivalencia.

$R_2 = \{(x, y) : x$ nació en el mismo mes que $y\}$

Reflexiva: Para cualquier elemento $x \in A$, x nació en el mismo mes que $x \rightarrow (x, x) \in R_2$.

Simetría: Para cualquier par de elementos $x, y \in A$, si x nació en el mismo mes que y, entonces y nació en el mismo mes que x, es decir, $(x, y) \in R_2 \rightarrow (y, x) \in R_2$.

Transitividad: Para cualesquiera tres elementos $x, y, z \in A$, si x e y nacieron en el mismo mes e y y z nacieron en el mismo mes, entonces x y z nacieron en el mismo mes, es decir, $(x, y) \in R_2 \wedge (y, z) \in R_2 \rightarrow (x, z) \in R_2$

En conclusión, R_2 es una relación de equivalencia.

$R_3 = \{(x, y) : x$ tiene la misma edad que $y\}$

Reflexiva: Para cualquier elemento $x \in A$, x tiene la misma edad que $x \rightarrow (x, x) \in R_3$.

Simetría: Para cualquier par de elementos $x, y \in A$, si x tiene la misma edad que y, entonces y tiene la misma edad que x, es decir, $(x, y) \in R_3 \rightarrow (y, x) \in R_3$.

Transitividad: Para cualesquiera tres elementos $x, y, z \in A$, si x e y tienen la misma edad e y y z tienen la misma edad, entonces x y z tienen la misma edad, es decir, $(x, y) \in R_3 \wedge (y, z) \in R_3 \rightarrow (x, z) \in R_3$.

En conclusión, R_3 es una relación de equivalencia.

Ejemplo 2. Sean $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ & $Y = \{3, 4\}$ conjuntos. Defina la relación de equivalencia R sobre $P(X)$ como:

$$R = \{(A, B) : A \cap Y = B \cap Y\}$$

(a) Encuentre todos los elementos en $C \in P(X)$ tales que $(C, \{1, 3\}) \in R$.

En primer lugar, determinamos que $\{1, 3\} \cap Y = \{3\}$.

Luego, escribimos todos aquellos elementos $C \in P(X)$ tales que $C \cap Y = \{3\}$. Estos son:

$$\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}$$

En la terminología de relaciones de equivalencia, decimos que los anteriores son equivalentes al conjunto $\{1, 3\}$ en el sentido de la relación R.

Definición. Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. El conjunto de todos los elementos $x \in A$ que son equivalentes a un elemento particular $a \in A$, es llamado clase de equivalencia de a. En símbolos tenemos:

$$[a] = \{x \in A : (a, x) \in R\}$$

Al elemento $a \in A$ se le llama representante de la clase de equivalencia.

A raíz de la definición anterior, tenemos que la clase de equivalencia de $\{1, 3\}$ es:

$$[\{1, 3\}] = \{\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}\}$$

(b) Encuentre la clase de equivalencia del vacío, es decir, $[\emptyset]$.

Como $\emptyset \cap Y = \emptyset$, entonces buscamos aquellos elementos que no tienen nada en común con Y. En otras palabras, cualquier subconjunto de X que no contenga a 3 ni a 4.

$$[\emptyset] = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{1, 2, 5\}\}$$

⚠️ Cualquier elemento de una clase de equivalencia puede usarse como representante. Eso quiere decir que, por ejemplo, $[\emptyset] = [\{5\}]$.

(c) ¿Cuántas clases de equivalencia diferentes hay? ¿Cuáles son?

Como $Y = \{3, 4\}$, los posibles resultados de la intersección con Y son:

$$\emptyset, \{3\}, \{4\} \text{ y } \{3, 4\}$$

Por lo tanto, la relación tiene 4 clases de equivalencia y estas son: $[\emptyset]$, $[\{3\}]$, $[\{4\}]$ y $[\{3, 4\}]$.

Ejemplo 3. Sea R una relación definida sobre $\mathbb{Z}$ como:

$$R = \{(a, b) : b - a = 4k, \text{ para algún entero } k\}$$

(a) Demuestre que R es una relación de equivalencia.

<u>Reflexividad</u>: Para todo $a \in \mathbb{Z}$, $a - a = 0 = 4 \cdot 0 \rightarrow (a, a) \in R$

<u>Simetría</u>: Para todo par $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, b) \in R \rightarrow b - a = 4k \rightarrow a - b = 4(-k) \rightarrow (b, a) \in R$

<u>Transitividad</u>: Para cualesquiera tres elementos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow b - a = 4k_1$ y $c - b = 4k_2 \rightarrow \cancel{b} - a + c - \cancel{b} = 4k_1 + 4k_2 \rightarrow c - a = 4(k_1 + k_2) \rightarrow (a, c) \in R$

$\therefore$ La relación R es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$. $\square$

(b) ¿Cuántas clases de equivalencia diferentes hay? ¿Cuáles son?

Consideremos, por ejemplo, el elemento $6 \in \mathbb{Z}$. Escribimos todos aquellos elementos relacionados con este, es decir, la clase de equivalencia del 6:

$$[6] = \{\dots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\} = \{x \in \mathbb{Z} : x = 4k + 2\}$$

«el conjunto de todos los enteros cuyo residuo es 2 al ser divididos por 4»

⚠️ Todo elemento pertenece a su propia clase de equivalencia.

Cada clase de equivalencia contiene infinitos enteros, todos ellos tienen el mismo residuo al ser divididos por 4. Entonces, como los posibles residuos al realizar la divisón por 4 son:

$$0, 1, 2, 3$$

La relación R «crea» 4 clases de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$ y estas son:

$[0] = \{x \in \mathbb{Z} : x = 4k\}$, $[1] = \{x \in \mathbb{Z} : x = 4k + 1\}$, $[2] = \{x \in \mathbb{Z} : x = 4k + 2\}$, $[3] = \{x \in \mathbb{Z} : x = 4k + 3\}$

👀 Observación: La relación R «parte» el conjunto $\mathbb{Z}$ en 4 clases de equivalencia $[0]$, $[1]$, $[2]$ y $[3]$, y estas satisfacen las siguientes propiedades:

1) $[a] \cap [b] = \varnothing$ para todo $[a] \neq [b]$
2) $[0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] = \mathbb{Z}$

En conclusión, las clases de equivalencia de la relación R forman una partición del conjunto $\mathbb{Z}$.

⚠️ Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Entonces las clases de equivalencia de R forman una partición del conjunto A. De la misma manera, dada una partición S del conjunto A, existe una relación de equivalencia R que tiene a cada conjunto de S como sus clases de equivalencia.

Ejemplo 4. Liste los pares ordenados en la relación de equivalencia R producida por la partición $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{4, 5\}$ y $A_3 = \{6\}$ del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 4), (5, 5), (4, 5), (5, 4), (6, 6)\}$

Definición. Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. El conjunto de todas las clases de equivalencia de R es llamado conjunto cociente. En símbolos escribimos: A/R.

Ejemplo 5. Sea $R = \{(a, b) : b - a = mk$, para algún entero $k\}$ una relación de equivalencia definida sobre $\mathbb{Z}$ y $m > 1$ un entero positivo fijo.

Esta relación es llamada **congruencia módulo *m***.

El conjunto cociente $\mathbb{Z}/R$ es llamado conjunto de enteros módulo m y es comúnmente representado como $\mathbb{Z}_m$.

Las clases de equivalencia de la relación son:

$[0] = \{x \in \mathbb{Z} : x = mk\}$
$[1] = \{x \in \mathbb{Z} : x = mk + 1\}$
$[2] = \{x \in \mathbb{Z} : x = mk + 2\}$
...
$[m\text{-}1] = \{x \in \mathbb{Z} : x = mk + (m\text{-}1)\}$

El conjunto cociente es:

$$\mathbb{Z}_m = \{[0], [1], [2], ..., [m\text{-}1]\}$$

SPOILER Esta relación de equivalencia, y en particular el conjunto $\mathbb{Z}_m$, son la «piedra angular» de la criptografía que estudiaremos más adelante en el curso.