## El algoritmo de Euclides

Sean a y b tales que  $a \neq 0$ , o bien,  $b \neq 0$ . El mcd(a,b) se puede calcular:

- 1. Comience con mcd(a,b) tal que |a| > |b|. Si b = 0, entonces mcd(a,0) = a.
- 2. Calculamos el residuo r según el algoritmo de la división de Euclides:  $a = q \cdot b + r$ ,  $0 \le r < b$ .
- 3. Asignamos a = b, b = r, con esto se sigue cumpliendo que |a| > |b| [recordemos que mcd(a,b)=mcd(b,r)]
- 4. Repetir los pasos 2 y 3 hasta que r = 0.

Entonces el mcd(a,b) será el valor de a al finalizar el algoritmo.

Ejemplo 1. Calcule mcd(24, 54).

Identificamos a = 54 & b = 24.

Por el algoritmo de la división de Euclides:

$$54 = 2 \cdot 24 + 6$$
  
 $24 = 4 \cdot 6 + 0$ 

$$mcd(54, 24) = mcd(24, 6) \rightarrow a := 24 \& b := 6$$
  
 $mcd(24, 6) = mcd(6, 0) = 6$ 

$$mcd(54, 24) = 6$$

Ejemplo 2. Calcule mcd(131, 24)

Identificamos a = 131 & b = 24.

Por el algoritmo de la división de Euclides:

$$131 = 5 \cdot 24 + 11$$

$$24 = 2 \cdot 11 + 2$$

$$11 = 5 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

! El hecho que mcd(131,24) = 1 nos indica que ambos números no tienen factores primos en común.

**Definición**. Sean a y b enteros, tales que mcd(a, b) = 1. Entonces decimos que a y b son **primos relativos** o **coprimos**.

$$mod(131, 24) = 1$$

Al momento de programar una implementación de este algoritmo se recomienda almacenar todos los valores de *q* y *r* que se producen.

## La identidad de Bézout (Étienne Bézout, siglo XVIII)

La identidad de Bézout establece que si a y b son enteros diferentes de cero, entonces existen enteros x & y tales que:

$$mcd(a,b) = ax + by$$

Identificat	mos a =	131 &	b =	24.																	
Por el algo	oritmo c	le la di	visió	n de	Eucli	des:															
121	= 5.24	_ 11																			
	- 3 24 = 2·11 +																				
	= 5.2 + 1	-																			
2 = 1	$2 \cdot 1 + 0$																				
∴ mcd(13	1, 24) =	1																			
Para enco	ntrar los	valor	es de	x & 1	v real	izam	os lo	sigu	iente												
		, , , , , ,			, 1001		0000	3184													
	nero, de	_			ıacióı	1 des	pejar	nos e	l resi	duo	mcd	(131	, 24	)]:							
11 =	5.2 + 1	> 1	- 11 -	. 3.2																	
Lue	go, de la	ecua	ción a	nteri	or de	speja	mos	el re	siduo	y lo	susti	tuin	os:								
24 =	= 2 · 11 +	$2 \rightarrow 2$	2 = 24	- 2	11 →	1=	11 - 3	5 (24	- 2 · 1	1)=	11 - :	5 · 24	. + 10	) 11	$\rightarrow$	1 =	11	·11	- 5	·24	
												11	+ 10-	11 =	11(1	+ 1	0) =	= 11	11		
																	,				
	ılmente,	de la	nrime	ra ec	uació																
						L		/1 = 1	1.13	_ 54	·24 .	5.7	) /	. ] =	: 13	1 • 1	- 2	24 ·	60		
11=	= 131 - 5					·24)	- 5.2	٦ ,	1 13	1 - 3.	, 4,		.4 —	Ī							
	= 131 - 5	·24 —	1 =	11(13	31 - 5																
	= 131 - 5	·24 —	1 =	11(13	31 - 5																
	= 131 - 5	·24 —	1 =	11(13	31 - 5																
En conclu	= 131 - 5	valore	1 = es x =	11(13	31 - 5 $2y =$	-60 s	satisf	acen	la eci	uació											
En conclu	= 131 - 5	valore	1 = es x =	11(13	31 - 5 $2y =$	-60 s	satisf	acen	la eci	uació											
En conclu	= 131 - 5 sión los 4. Encu	valore	$1 = \frac{1}{2}$	11(13	31 - 5 $2y =$	-60 s	satisf	acen	la eci	uació											
En conclu  Ejercicio  Calculamo	= 131 - 5 esión los  4. Encue os el mo	valore entre <i>x</i> d(97,5	0.1 = 0.05 $0.05$ $0$	11(13	31 - 5 $2y =$	-60 s	satisf	acen	la eci	uació											
En conclu  Ejercicio  Calculamo	4. Encuros el mo	valore valore entre x  d(97,5	$x = \frac{1}{2} = $	11(13	31 - 5 $2y =$	-60 s	satisf	acen	la eci	uació											
En conclu  Ejercicio  Calculamo  i)  ii)	4. Encuros el mo 97 = 1 52 = 1	valore  valore  entre <i>x</i> d(97,5	x = 1 = 1 $x = 1$	11(13	31 - 5 $2y =$	-60 s	satisf	acen	la eci	uació											
En conclu  Ejercicio  Calculamo  i)  ii)  iii)	4. Encuros el mo	valore valore  entre x  d(97,5)  -52 +  -45 +  -7 + 3	x = 1 = 1 $x = 1$	11(13	31 - 5 $2y =$	-60 s	satisf	acen	la eci	uació											
En conclu  Ejercicio  Calculamo  i)  ii)  iii)  iii)	4. Encuros el mo 97 = 1 52 = 1 45 = 6	valore  valore $d(97,5)$ $52 + 45 + 67 + 3$ $3 + 1$	x = 1 = 1 $x = 1$	11(13	31 - 5 $2y =$	-60 s	satisf	acen	la eci	uació											
En conclu  Ejercicio  Calculamo  i)  ii)  iii)  iv)  v)	97 = 1 4. Encuros el mo 97 = 1 52 = 1 45 = 6 7 = 2 3 = 3	valore  valore $d(97,5)$ $52 + 45 + 57 + 3$ $3 + 1$ $1 + 0$	x = 1 = 1 $x = 1$	11(13	31 - 5 $2y =$	-60 s	satisf	acen	la eci	uació											
En conclu  Ejercicio  Calculamo  i)  ii)  iii)  iv)  v)	97 = 1 4. Encuros el mo 97 = 1 52 = 1 45 = 6 7 = 2 3 = 3	valore  valore $d(97,5)$ $52 + 45 + 57 + 3$ $3 + 1$ $1 + 0$	x = 1 = 1 $x = 1$	11(13	31 - 5 $2y =$	-60 s	satisf	acen	la eci	uació											
En conclu  Ejercicio  Calculamo  i)  ii)  iii)  iv)  v)  ∴ mcd(97	97 = 1 52 = 1 45 = 6 7 = 2 3 = 3	valore valore  valore  cd(97,5  ·52 + ·45 + ·7 + 3  3 + 1  1 + 0	x = 1 = 1 $x = 1$	11(13	31 - 5 $2y =$	-60 s	satisf	acen	la eci	uació											
En conclu  Ejercicio  Calculamo  i)  ii)  ii)  iii)	97 = 1 52 = 1 45 = 6 7 = 2 3 = 3	valore valore valore  valore  iv):  -52 + -45 + -7 + 3 3 + 1 1 + 0	$x = \frac{1}{2}$	11 (13 11 & 11 & tales	$\frac{31-5}{2y} = \frac{31-5}{2}$	-60 s	97y	= mo	la eci	,52).											
En conclu  Ejercicio  Calculamo  i)  ii)  iii)  iv)  v)  ∴ mcd(97	97 = 1 52 = 1 45 = 6 7 = 2 3 = 3	valore valore  valore  cd(97,5  ·52 + ·45 + ·7 + 3  3 + 1  1 + 0	$x = \frac{1}{2}$	11 (13 11 & 11 & tales	$\frac{31-5}{2y} = \frac{31-5}{2}$	-60 s	97y	= mo	la eci	,52).											
En conclu  Ejercicio  Calculamo  i)  ii)  iii)  iv)  v)  ∴ mcd(97	= 131 - 5  = sión los  4. Encue  os el mo $ 97 = 1 $ $ 45 = 6 $ $ 7 = 2 \cdot 3 $ $ 3 = 3 \cdot 6 $ os $r$ de	valore valore valore  valore  iv):  -52 + -45 + -7 + 3 3 + 1 1 + 0	$x = \frac{1}{2}$	[3 = 4]	$2x y = \frac{1}{2}$	52x + 60 = 60 = 60 = 60 = 60 = 60 = 60 = 60	97y	= mc	la eco	iii)]	n 1 =	= 13	1x+	24y							
En conclu  Ejercicio  Calculamo  i)  ii)  iii)  iv)  v)  ∴ mcd(97	= 131 - 5  = sión los  4. Encue  os el mo $ 97 = 1 $ $ 45 = 6 $ $ 7 = 2 \cdot 3 $ $ 3 = 3 \cdot 6 $ os $r$ de	valore valore entre x  d(97,5  -52 +  -45 +  -7 + 3  3 + 1  1 + 0	$x = \frac{1}{2} = $	11(13) $11-8$ tales $[3=6.7) = 6.7$	31 - 5 $45 - 6$	52x + 60 = 60	97 <i>y</i> lespe	jando	la eco	iii)]	n 1 =	= 13	1x +	24 <i>y</i>							
En conclu  Ejercicio  Calculamo  i)  ii)  iii)  iv)  v)  ∴ mcd(97	97 = 1 52 = 1 45 = 6 7 = 2 3 = 3 52) = 1 os r de	valore valore  valore  entre x  d(97,5  · 52 +  · 45 +  · 7 + 3  3 + 1  1 + 0  iv):  7 - 2 · 6	$6 \cdot 1 =$ $8 \cdot x =$ $8 \cdot y =$ $62 \cdot 1 \cdot 45 =$ $63 \cdot 45 =$ $64 \cdot 1 \cdot 46 =$	$11(13)$ $11 \cdot 8$	45 - 6 = 13.7	52x + 60 = 60 = 60 = 60 = 60 = 60 = 60 = 60	97 <i>y</i> despe	jando = 52	la eccode de d	iii)]	n 1 =	= 13	1x +	24 <i>y</i>							