Conceptos Básicos - Análisis de Variable Real 1

Rudik Rompich

June 1, 2021

Propiedades de $\mathbb{R}$

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un campo

Def: Un conjunto no vacío P de elementos de un campo $\mathbb{F}$ es una clase positiva si cumple:

1) Si $a, b \in P \Rightarrow a + b \in P$
2) Si $a, b \in P \Rightarrow a \cdot b \in P$
3) Si $a \in \mathbb{F}$, entonces:

   $a \in P$ o es $a = 0$ o es $-a \in P$

   (ley de tricotomía)

Nota: Sea $N = \{-a : a \in P\}$ la clase negativa relativa a P.

$\Rightarrow \mathbb{F} = P \cup \{0\} \cup N$

Ejs:

1) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un campo. Sea $P = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \ni a, b \in \mathbb{Z}^+ \right\} \Rightarrow P$ es una clase positiva de $\mathbb{Q}$.

2) Sea $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, con las operaciones

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ es un campo.

$\Rightarrow$ Sea $P = \{0\} \begin{cases} (1) \ \checkmark \\ (2) \ \checkmark \\ (3) \ \times \end{cases}$

$\Rightarrow P$ no es clase positiva de $\mathbb{Z}_2$.

Sea $P' = \{1\}$ — $(1) \ \times$

$\Rightarrow P'$ no es clase positiva de $\mathbb{Z}_2$.

Proyectos Blackboard

Def: Sea P la clase positiva del campo $\mathbb{F}$, entonces se dice que $\mathbb{F}$ está ordenado por P (o que $\mathbb{F}$ es un campo ordenado).

i) Si $a \in P$, se dice que a es positivo. Notación $a > 0$

ii) Si $a \in P$ o $a = 0$, se dice que a es no negativo. Notación: $a \geq 0$

iii) Si $a, b \in \mathbb{F}$ y $a - b \in P$, se escribe $a > b$

iv) Si $a, b \in \mathbb{F}$ y $a - b \in P$ o $a - b = 0$, se escribe $a \geq b$.

Prop:

1) Si $a > b$ y $b > c \Rightarrow a > c$

2) Si $a, b \in \mathbb{F}$, entonces $a > b$ o ex $a = b$ o ex $b > a$

3/4

3) Si $a \geq b$ y $b \geq a \Rightarrow a = b$.

Dem:

1) Si $a > b \Rightarrow a - b \in P$

$b > c \Rightarrow b - c \in P$

$\Rightarrow (a-b) + (b-c) = a - c \in P$

$\Rightarrow a > c$.

2) Por la tricotomía en P.

3) Supóngase, por el absurdo, que $a \geq b$, $b \geq a$ y $a \neq b$. Entonces, $a > b$ o $b > a$ $(\rightarrow\leftarrow)$. $\square$

Prop: Sea $\mathbb{F}$ un campo ordenado

1) Si $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

2) $1 > 0$

3) Si $n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow n > 0$

Proyectos Blackboard

Dem.:

1) Si $a \neq 0 \Rightarrow a > 0$ ó$_{ex}$ $a < 0$

Si $a > 0 \Rightarrow a \cdot a = a^2 > 0$

$(a \in P \Rightarrow a \cdot a \in P \Rightarrow a^2 > 0)$

Si $a < 0 \Rightarrow -a \in P \Rightarrow (-a) \cdot (-a) =$

$= a^2 \in P \Rightarrow a^2 > 0$

2) Hacemos $a = 1$ en 1) $\Rightarrow 1^2 = 1 > 0$

3) Por inducción sobre n.

i) Probemos para $n = 1$. Por 2), $1 > 0$.

ii) Suponemos que $k > 0$

iii) Probamos para $k+1$;

$k > 0,\ 1 > 0 \Rightarrow k+1 > 0.$

$\Rightarrow n > 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$

$\square$

5/5

Teorema: Sean $a, b, c \in \mathbb{F}$.

1) Si $a > b \Rightarrow a + c > b + c$
2) Si $a > b$ y $c > d \Rightarrow a + c > b + d$
3) Si $a > b$ y $c > 0 \Rightarrow ac > bc$
4) Si $a > b$ y $c < 0 \Rightarrow ac < bc$
5) Si $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$
6) Si $a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0$.

Dem:

1) Si $a > b \Rightarrow a - b \in P \Leftrightarrow$
$(a + c) - (b + c) \in P \Rightarrow a + c > b + c$

2) Si $a > b \Rightarrow a - b \in P$
$c > d \Rightarrow c - d \in P$

$\Rightarrow (a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + c) \in P$
$\Rightarrow a + c > b + c$.

Proyectos Blackboard

3) Si $\left.\begin{array}{l} a>b \Rightarrow a-b \in P \\ c>0 \Rightarrow c \in P \end{array}\right\} \Rightarrow (a-b)\cdot c =$

$= ac - bc \in P \Rightarrow ac > bc.$

4) Si $\left.\begin{array}{l} a>b \Rightarrow a-b \in P \\ c<0 \Rightarrow -c \in P \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (a-b)(-c) = bc - ac \in P$

$\Rightarrow bc > ac.$

5) Sea $a>0$ y suponemos $a^{-1}<0.$

$\Rightarrow -a^{-1} > 0 \Rightarrow a\cdot(-a^{-1}) > 0,$

pero $a(-a^{-1}) = -1 > 0$ $(\rightarrow\leftarrow).$

Si $a^{-1} = 0 \Rightarrow 1 = a \cdot a^{-1} = 0$ $(\rightarrow\leftarrow)$

$\Rightarrow a^{-1} > 0.$

6) Similar al 5). $\square$

Proyectos Blackboard

Corolario: Si $a>b \Rightarrow a > \frac{a+b}{2} > b$

Dem

- Si $a>b \Rightarrow a+a > a+b$

$$\Rightarrow 2a > a+b$$
$$\Rightarrow a > \frac{a+b}{2}$$

- Si $a>b \Rightarrow a+b > b+b$

$$\Rightarrow a+b > 2b$$
$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} > b$$

$$\therefore a > \frac{a+b}{2} > b \qquad \square$$

N.B. En el corolario, hagamos $b=0$. Entonces:

Si $a>0 \Rightarrow a > \frac{a}{2} > 0$. Entonces, en un campo ordenado no existe un número positivo menor.

Proyectos Blackboard

Teorema: si $ab > 0$, entonces $a > 0$ y $b > 0$ o $a < 0$ y $b < 0$. $\square$

Def: Sea $\mathbb{F}$ un campo con clase positiva P. Se define la **función valor absoluto:**

$$|\cdot| : \mathbb{F} \longrightarrow P \cup \{0\} \ni$$

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Teorema:

1) $|a| = 0$ ssi $a = 0$

2) $|-a| = |a|$

3) $|ab| = |a| \cdot |b|$

4) Si $c \geq 0 \Rightarrow |a| \leq c$ ssi $-c \leq a \leq c$

Proyectos Blackboard

Dem

1) ($\Leftarrow$) Si $a=0 \Rightarrow$ por definición

$|a| = |0| = 0$

($\Rightarrow$) A probar: Si $|a|=0 \Rightarrow a=0$

Por contrapuesta, suponga que

$a \neq 0 \Rightarrow a>0$ ó $a<0$.

Si $a>0 \Rightarrow |a| = a>0 \Rightarrow |a| \neq 0$

Si $a<0 \Rightarrow |a| = -a>0 \Rightarrow |a| \neq 0$

i.e. Si $a \neq 0 \Rightarrow |a| \neq 0$.

2) A probar: $|-a| = |a|$

casos: Si $a>0 \Rightarrow |a| = a = |-a|$

Si $a<0 \Rightarrow |a| = -a = |-a|$

Si $a=0 \Rightarrow |0| = 0 = |-0|$

3) $|ab| = |a|\cdot|b|$: Por casos:

i) Si $a>0$ y $b>0$; entonces

$ab>0 \Rightarrow |ab| = ab = |a|\cdot|b|$

ii) Si $a>0$ y $b<0 \Rightarrow ab<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |ab| = -(ab) = a\cdot(-b) = |a|\cdot|b|$

iii) Si $a<0$ y $b<0 \Rightarrow ab>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |ab| = ab = (-a)(-b) = |a|\cdot|b|$

4) A probar: Si $c \geq 0$, entonces

$|a| \leq c$ ssi $-c \leq a \leq c$

($\Rightarrow$) Suponga que $|a| \leq c \Rightarrow$

$\Rightarrow a \leq c$ y $-a \leq c$

$\Rightarrow a \leq c$ y $a \geq -c$

$\therefore -c \leq a \leq c$

($\Leftarrow$) Suponga que $-c \leq a \leq c$

$\Rightarrow -c \leq a$ y $a \leq c$

$\Rightarrow c \geq -a$ y $a \leq c$

$\therefore |a| \leq c$ $\square$

Proyectos Blackboard

Nota: Como $|a| \geq 0 \Rightarrow |a| \leq |a| \Rightarrow$

$\Rightarrow -|a| \leq a \leq |a|, \ \forall a.$

Teorema: Sean a y b elementos de un campo ordenado $\mathbb{F}$. Entonces,

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

(Desigualdad triangular)

Dem:

$$-|a| \leq a \leq |a|$$
$$-|b| \leq b \leq |b|$$

$$\Rightarrow -(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$$

$$\Rightarrow |a+b| \leq |a|+|b| \qquad \square$$

Nota: Si a, b son elementos del campo ordenado $\mathbb{F}$, entonces:

12 / 12

1) $\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$. En efecto:

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|$$

$$\Rightarrow |a|-|b| \leq |a-b|$$

$$|b| = |(b-a)+a| \leq |b-a| + |a|$$

$$\Rightarrow |b|-|a| \leq |b-a| = |a-b|$$

$$\Rightarrow -(|a|-|b|) \leq |a-b|$$

$$\Rightarrow \big||a|-|b|\big| \leq |a-b| \quad (I)$$

2) Si sustituimos b por $-b$ en (I).

$$\Rightarrow \big||a|-|-b|\big| \leq |a-(-b)|$$

$$\Rightarrow \big||a|-|b|\big| \leq |a+b|$$

3) Si sustituimos en $(*)$ b por $-b$, se tiene:

$$|a + (-b)| \le |a| + |-b|$$

$$\Rightarrow |a - b| \le |a| + |b|$$

Conclusión:

$$\big||a|-|b|\big| \le |a \pm b| \le |a| + |b|$$

(Desigual triangular)

<u>Def</u>: Un campo ordenado $\mathbb{F}$ es <u>arquimediano</u> si $\forall x \in \mathbb{F} \ \exists\ n \in \mathbb{Z}^+ \ni x < n$.

<u>N.B.</u>: La clase positiva P de $\mathbb{F}$ es arquimediana si $\forall x \in \mathbb{F} \ \exists\ n \in \mathbb{Z}^+ \ni n - x \in P$.

<u>Ejercicios</u>:

1) Compruebe que el campo $\mathbb{Q}$ es arquimediano

¿Depende este enunciado del orden que se defina en $\mathbb{Q}$?

2) Presente un ejemplo de un campo ordenado que sea arquimediano.

<u>Teorema</u> Si $\mathbb{F}$ es un campo arquimediano, entonces:

1) Si $y>0$ y $z>0 \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z}^+ \ni ny > z$

2) Si $z>0 \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z}^+ \ni 0 < \frac{1}{n} < z$

3) Si $y>0 \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z}^+ \ni n-1 \leq y < n$.

<u>Dem</u>:

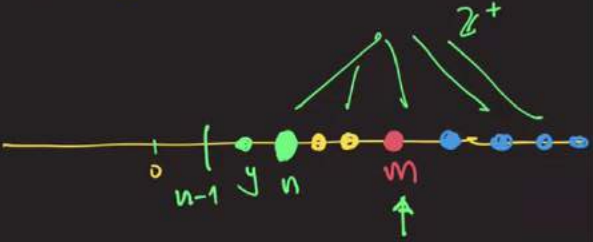
1) Si $y>0$ y $z>0 \Rightarrow x := \frac{z}{y} > 0 \Rightarrow$

$\exists\, n \in \mathbb{Z}^+ \ni \underbrace{n > \frac{z}{y}}_{n > x =} \Rightarrow ny > z$.

2) Si $z > 0 \Rightarrow \frac{1}{z} > 0 \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z}^+ \ni$

$n > \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{1}{n} < z \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < z.$

3) Sea $y > 0 \Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{Z}^+ \ni y < m,$



2) Si $z>0 \Rightarrow \frac{1}{z}>0 \Rightarrow \exists\, n\in\mathbb{Z}^{+} \ni$
$n>\frac{1}{z} \Rightarrow \frac{1}{n}<z \Rightarrow 0<\frac{1}{n}<z$.

3) Sea $y>0 \Rightarrow \exists\, m\in\mathbb{Z}^{+} \ni y<m$.
Sea n el menor de tales enteros positivos m (n existe por el principio del buen orden]. Entonces,
$n-1 \leq y < n$.

Nota B. (cota superior más pequeña)

1) Sea $B\subseteq\mathbb{Q}$, $B\neq\emptyset$. Entonces, B es acotado superiormete si $K\in\mathbb{Q} \ni K\geq b$, $\forall\, b\in B$. En este caso K es cota superior de B.

Ej: Sea $\{a\in\mathbb{Q} \ni a<4\}$

Proyectos Blackboard

este conjunto está acotado superiormente por 4 (pero también 5, 16, ... son cotas superiores). Por otro lado, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ no es acotado.

2) Si $B \subseteq \mathbb{Q}$, $B \neq \emptyset$ y B es acotado superiormente, entonces la cota superior más pequeña de B es un número $K \in \mathbb{Q}$ $\ni$

i) K es cota superior;

ii) Si c es cota superior de B, entonces $c \geq K$.

3) Si existe la cota superior más pequeña de B, esta es única.

Suponga que K_1 y K_2 son cotas superiores más pequeñas

18 / 18

Entonces:

- Como K_1 es cota superior más pequeña y K_2 es cota superior $\Rightarrow K_2 \geq K_1$
- Como K_2 es cota sup. más pequeña y K_1 es cota superior $\Rightarrow K_1 \geq K_2$

$\Rightarrow K_1 = K_2$.

4 Considere el conjunto

$$C = \{a \in \mathbb{Q} : a \geq 0 \text{ y } a^2 < 2\}$$

Nótese que C está acotado superiormente. En efecto, si $a \in C \Rightarrow a^2 < 2 \Rightarrow a^2 < 4 \Rightarrow a < 2 \Rightarrow 2$ es cota superior de C.

¿Es 2 la menor cota superior de C?

No, considere $a^2 < \frac{9}{4} \Rightarrow a < \frac{3}{2} = 1.5$

$\Rightarrow$ Los números racionales:

$2,\ 1.5,\ 1.42,\ 1.415,\ 1.4143,$

$1.41422,\ 1.414214, \ldots$ $\rightarrow \sqrt{2}$

son cota superior de C.

$\Rightarrow$ C no tiene en $\mathbb{Q}$ una cota superior más pequeña. Nótese que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ debería ser la cota superior más pequeña de C.

Def: El conjunto de números reales $\mathbb{R}$ es un campo ordenado que satisface:

arquimediano

P1) $\forall x > 0$ en $\mathbb{R}$ $\exists\, n \in \mathbb{Z}^+ \ni x < n$; y

P2) Cada subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que es acotado superiormente tiene una $\underbrace{\text{cota superior más pequeña}}_{\text{Supremo}}$ en $\mathbb{R}$.

Nota:

1) Cada subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que es acotado inferiormente tiene una cota inferior más grande (ínfimo). En efecto si A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente, considere $-A$ y aplique el axioma del supremo.

Notación: supremo de A: $\sup A$

ínfimo de A: $\inf A$.

Ej: 1) considere $\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\Rightarrow \inf\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Proyectos Blackboard

Ej: $\sup[a,b] = b$; $\inf[a,b] = a$

$\sup(a,b) = b$; $\inf(a,b) = a$

Nota: Si el $\sup A \in A \Rightarrow \sup A$ es el máximo de A.

Si el $\inf A \in A \Rightarrow \inf A$ es el mínimo de A.

Convenciones:

1) Si A no está acotado superiormente, entonces escribimos

$$\sup A = \infty$$

2) Si A no está acotado inferiormente, entonces escribimos

$$\inf A = -\infty$$

3) Si $A = \phi$ (Recordemos que cada número real es cota superior e inferior de ϕ), se escribe:

22 / 24

$\sup \emptyset = -\infty$ e $\inf \emptyset = \infty$

N.B. En todo caso, se dice que el $\sup A$ e $\inf A$ existen si son un número finito.

Espacios Métricos

Def: Sean X un conjunto y

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \ni$$

$\forall a, b, c \in X$ satisface:

Positividad

i) $d(a,b) \geq 0$; $d(a,b) = 0$ ssi $a = b$.

ii) $d(a,b) = d(b,a)$ simetría

iii) $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$

Desigualdad triangular.

entonces (X, d) es un espacio métrico y d es una métrica sobre X o una distancia sobre X.

Prop (Reordenamiento de la desigualdad triangular)

Si (X, d) es un esp. métrico y si $a, b, c \in X$, entonces:

$$|d(a,b) - d(b,c)| \leq d(a,c)$$

Dem. Sabemos que:

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) \quad \bullet$$

$$d(c,b) \leq d(c,a) + d(a,b) \quad \bullet$$

De $\bullet$ se obtiene:

$$d(a,b) - d(c,b) \leq d(a,c)$$

$$\Rightarrow d(a,b) - d(b,c) \leq d(a,c) \quad *$$

De $\bullet$ se obtiene:

$$d(c,b) - d(a,b) \leq d(c,a)$$

$$\Rightarrow d(b,c) - d(a,b) \leq d(a,c)$$

$$\Rightarrow -[d(a,b) - d(b,c)] \leq d(a,c)$$

$$\Rightarrow |d(a,b) - d(b,c)| \leq d(a,c).$$ ∎

Ejemplos

1) Sean $X = \mathbb{R}$ y $d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ni$

$$d_1(a,b) = |a-b|$$

$\Rightarrow (\mathbb{R}, d_1)$ es un espacio métrico.

En efecto: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Entonces:

i) Por definición, $d_1(a,b) = |a-b| \geq 0$

Si $d(a,b) = |a-b| = 0 \Rightarrow a-b = 0$
$\Rightarrow a = b$

Si $a = b \Rightarrow d(a,b) = |a-a| = |0| = 0$

ii) $d(a,b) = |a-b| = |-(a-b)| =$
$= |b-a| = d(b,a)$

iii) $d(a,b) = |a-b| = |(a-c) + (c-b)|$
$\leq |a-c| + |c-b| = d(a,c) + d(c,b).$

Proyectos Blackboard

* 2) Cada conjunto admite una métrica. Sea $X \neq \phi$, entonces se define la <u>métrica discreta</u> así:

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \ni$$

$$d(a,b) = \begin{cases} 1, & a \neq b \\ 0, & a = b \end{cases}$$

$\Rightarrow (X, d)$ es espacio métrico.

<u>Ejercicio:</u> Sea d una métrica sobre X, y sea $D: X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \ni$

$$D(a,b) := \frac{d(a,b)}{1 + d(a,b)}, \ \forall a,b \in X$$

$\Rightarrow (X, D)$ es espacio métrico.

<u>Ej:</u> Sea $X = \mathbb{R}^n$ y sean:

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definamos

26 / 26

$$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ni$$

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

(métrica Euclidiana en $\mathbb{R}^n$).

$\Rightarrow (\mathbb{R}^n, d_2)$ es métrica.

Lema: Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, números reales cualesquiera. Entonces se cumplen:

1) Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

2) Desigualdad de Minkowski

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2\right]^{1/2} \leq \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right]^{1/2}$$

Blackboard

Dem:

1) Sea $x \in \mathbb{R} \ni \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 x^2 + 2 a_i b_i x + b_i^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow \overbrace{\left(\sum_i a_i^2\right)}^{A} x^2 + 2 \overbrace{\left(\sum_i a_i b_i\right)}^{B} x + \overbrace{\sum_i b_i^2}^{C} \geq 0$$

(polinomio en x)

$$\Rightarrow (2B)^2 - 4AC \leq 0 \Leftrightarrow B^2 \leq AC$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \quad *$$

2) $\sum_i (a_i + b_i)^2 = \sum_i a_i^2 + \sum b_i^2 + \sum_i 2 a_i b_i$

$$= \sum a_i^2 + \sum b_i^2 + 2\left(\sum_i a_i b_i\right)$$

$$\underset{C-S}{\leq} \sum_i a_i^2 + \sum b_i^2 + 2\sqrt{\sum_i a_i^2} \cdot \sqrt{\sum b_i^2}$$

$$= \left(\sqrt{\sum_i a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sum (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2} \quad \square$$

Ej: Considere $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ni$

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : i=1,\dots,n\}$$

$\Rightarrow d_\infty$ es una métrica en $\mathbb{R}^n$.

Ej: $x = (2,3,4)$ y $y = (-1,2,0)$

$$\Rightarrow d_\infty(x,y) = \max\{|2-(-1)|, |3-2|, |4-0|\}$$
$$= \max\{3,1,4\} = 4$$

Ej: Sea $B([a,b])$ el conjunto de funciones acotadas definidas en $[a,b]$ y de valores reales.

También se denota:

$$\ell^\infty([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ni |f(x)| \leq M,\ M > 0\}.$$

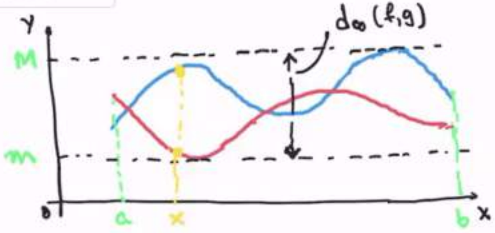
$\Rightarrow$ Dadas $f, g \in \ell^\infty[a,b]$

$$f: [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Dirichlet

Lebesgue



$$\Rightarrow d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} \{ |f(x) - g(x)| \},$$

la cual es una métrica en $\ell^\infty[a,b]$ y se llama <u>métrica</u> o <u>distancia</u> <u>del</u> <u>supremo</u>.

Ej: Sea $C[a,b]$ el conjunto de funciones continuas sobre $[a,b]$ con valores reales. Entonces, si $f,g \in C[a,b]$, se tiene:

la métrica $d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$

sobre $C[a,b]$.

<u>Def</u>: Suponga que V es un esp. vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), y que

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R} \ni$$

$\forall x, y \in V$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ se cumplen:

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$.

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Entonces, $\|\cdot\|$ es una <u>norma</u> sobre V, y decimos que $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

Nota: Sea V un espacio vectorial normado.
Entonces, considere:

$$d: V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \ni$$
$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Nótese que: 1) $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$;

Si $x = y \Rightarrow d(x, y) = \|x - y\| = 0$

Si $d(x, y) = \|x - y\| = 0 \Rightarrow x - y = 0$
$\Rightarrow x = y$

2) $d(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| =$
$= \|y - x\| = d(y, x)$.

3) $d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq$
$\leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$.

$\Rightarrow$ $d(x,y) = \|x-y\|$ es una métrica sobre V. Esta es la métrica inducida por la norma.

Topología de $\mathbb{R}$ $(\mathbb{R}^n)$

Def: Sea X un conjunto no vacío. Una familia de subconjuntos τ de X es una Topología sobre X si:

1) $\phi, X \in \tau$

2) Cualquier familia $\{A_i\}$ de elementos de τ es t.q. $\bigcup_i A_i \in \tau$.

3) Si $A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$.

A los elementos de τ se les llama abiertos de X