TOPOLOGÍA - Análisis de Variable Real 1

Rudik Rompich

June 1, 2021

Proyectos Whiteboard 3

$\Rightarrow$ $d(x,y) = \|x-y\|$ es una métrica sobre V. Esta es la métrica inducida por la norma.

Topología de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$)

Def: Sea X un conjunto no vacío. Una familia de subconjuntos τ de X es una Topología sobre X si:

1) $\phi, X \in \tau$

2) Cualquier familia $\{A_i\}$ de elementos de τ es t.q. $\bigcup_i A_i \in \tau$.

3) Si $A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$.

A los elementos de τ se les llama abiertos de X

2) La familia θ de todos los subconjuntos abiertos de M es la $\boxed{\text{topología de } M}$, y el par (M, θ) es el espacio topológico asociado al métrico M.

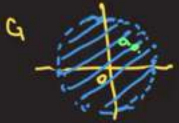
Nota: En el caso de $\mathbb{R}^n$ se dice que se tiene el espacio topológico Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Ejs.: 1) $\mathbb{R}^n$ es abierto. En efecto, $B_1(x) \subset \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

2) $G = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ es abierto, pero
$F = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ no lo es.

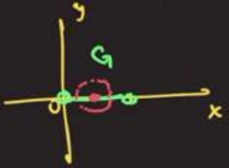
3) $G = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ni x^2+y^2<1\}$ es abierto y

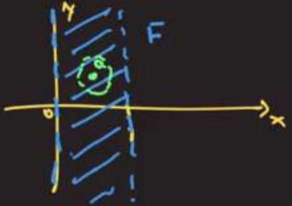
$F = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ni x^2+y^2\le 1\}$ no es abierto



4) $G = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ni 0<x<1,\ y=0\}$ no es abierto de $\mathbb{R}^2$.

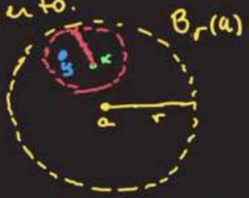
$F = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ni 0<x<1\}$ es abierto de $\mathbb{R}^2$





5) ϕ es abierto.

Prop: Una bola abierta es abierto.



$\rho = r - d(a,x)$

Dem: Sea $x \in B_r(a)$ y considere la bola centrada en x y de radio $r - d(a,x)$. A probar: $B_{r-d(a,x)}(x) \subset B_r(a)$

Sea $y \in B_{r-d(a,x)}(x)$. Entonces,

$$\begin{aligned} d(a,y) &\leq d(a,x) + d(x,y) \\ &< d(a,x) + [r - d(a,x)] \\ &= r \end{aligned}$$

$\Rightarrow y \in B_r(a)$. $\square$

Teorema: Considere $(\mathbb{R}^n, d)$:

1) ϕ y $\mathbb{R}^n$ son abiertos.
2) La intersección de dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ es abierto de $\mathbb{R}^n$.
3) La unión de cualquier colección de abiertos es un abierto de $\mathbb{R}^n$.

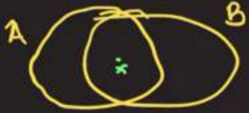
Por inducción se deduce que la intersección finita de abiertos es abierto.

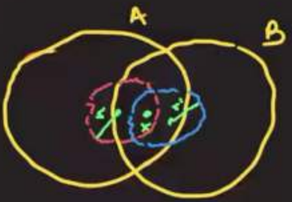
Dem: 1) OK.

2) Sean A y B abiertos de $\mathbb{R}^n$. A probar: $A \cap B$ es abierto. Sea $x \in A \cap B$, entonces:

$\Rightarrow x \in A$, abierto, $\Rightarrow \exists\, r > 0 \ni d(x,z) < r$, para $z \in A$.

$x \in B$, abierto, $\Rightarrow \exists\, r' > 0 \ni d(x,w) < r$, para $w \in B$.





⇒ Hagamos $r = \min\{r, r'\}$ ⇒ si $y \in \mathbb{R}$ ∋ $d(x,y) < r$ ⇒ $y \in A$ y $y \in B$ ⇒ $y \in A \cap B$ ⇒ $A \cap B$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.

3) Sea $\{G_\alpha\}$ una colección cualquiera de abiertos de $\mathbb{R}^n$, y sea $G = \bigcup_\alpha G_\alpha$. Si $x \in G$ ⇒ $x \in G_\lambda$, para algún λ. Como G_λ es abierto ⇒ $\exists\, r > 0 \ni B_r(x) \subset G_\lambda \subset \bigcup_\alpha G_\alpha = G$. □

Nota: la intersección de una colección infinita de abiertos no necesariamente es abierto. En efecto: considere:

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} \ni -\frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n}\}, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

$$A_1 = (-1, 2)$$
$$A_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$$
$$\vdots$$

- Los A_n son abiertos (por ser bolas abiertas de $\mathbb{R}$)

$$\Rightarrow A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$
$$= [0, 1]$$

¿Por qué cerrado?

Def: Un subconjunto F en el métrico (M,d) es **cerrado** si F^c es abierto.

$$[0,1]^c = \underbrace{\underbrace{(-\infty,0)}_{\text{abierto}} \cup \underbrace{(1,\infty)}_{\text{abierto}}}_{\text{abierto}} \Rightarrow [0,1] \text{ es cerrado.}$$

Ej: En $\mathbb{R}^n$:

1. $\emptyset$ es abierto $\Rightarrow \emptyset^c = \mathbb{R}^n$ es cerrado.
2. $\mathbb{R}^n$ es abierto $\Rightarrow (\mathbb{R}^n)^c = \emptyset$ es cerrado

$\Rightarrow \emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son abiertos y cerrados

3. $[0,1)$ no es abierto ni cerrado

•) 

Abierto: Bola abierta contenida en A en cada punto.

••) Topología en el métrico
↑ colección de todos los abiertos

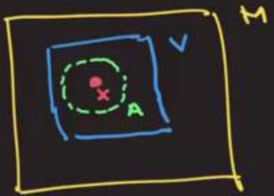
•••) F es cerrado si F^c es abierto.

::) Abierto y cerrado no son negación uno del otro

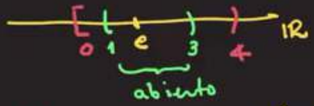
- $\emptyset, \mathbb{R}^n$ son abiertos y cerrados
- $[0,1)$ no es abierto ni cerrado

espacio métrico

Def: Sea $x \in M$, entonces cualquier conjunto contiene un abierto $A \ni x \in A$ es una **vecindad de x.**



Ej:



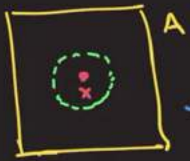
$[0,4)$ es vecindad de e

$(1,3)$ es vecindad de e ↳ abierta

$\mathbb{R}$ es vecindad de e.

$(e-\epsilon, e+\epsilon)$ es vecindad de e, $\forall \epsilon>0$

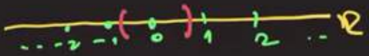
Def: Un punto $x \in M$ es punto interior de [cut off] conjunto $A \subseteq M$, si A es una vecindad de [cut off]



Ej: ① En $[0,1]$, $x=0$ y $x=$ [cut off] no son puntos interiores. El resto de puntos de $(0,1)$ son puntos interiores de $[0,1]$

② En $I=(0,1)$, todos sus puntos son interiores.

③ $\mathbb{R} \cap \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

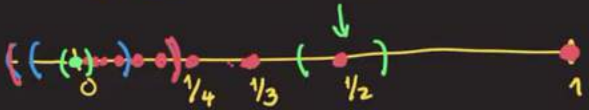


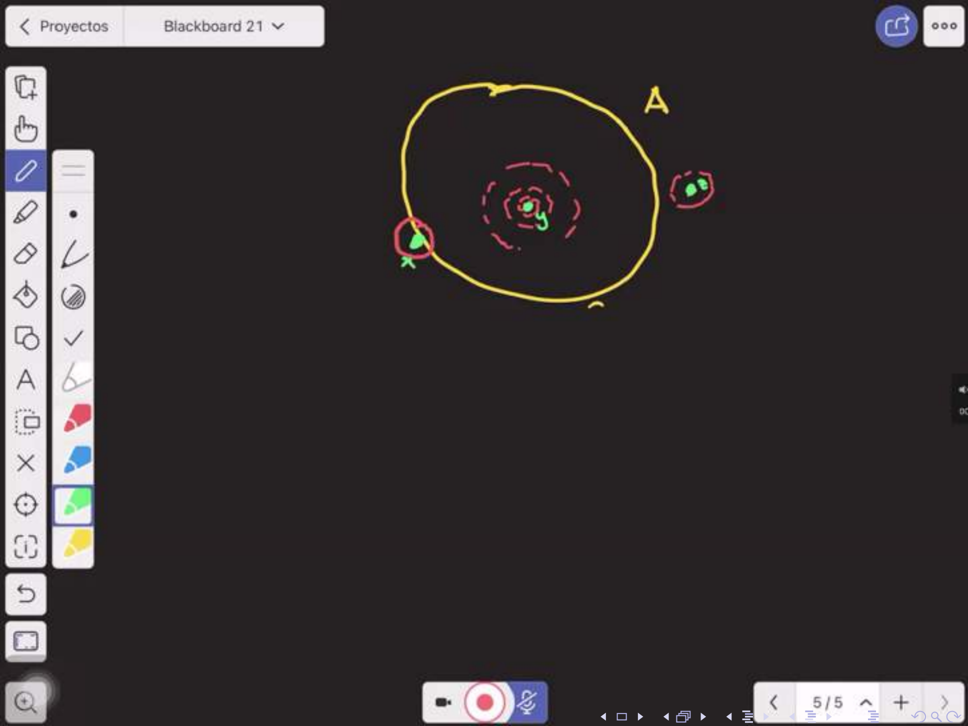
$\Rightarrow \mathbb{R} \cap \mathbb{Z}$ no tiene puntos interiores

Def: Un punto x es punto de acumulación (o punto límite) de un conjunto $A \subseteq M$, si cada vecindad de x contiene al menos un punto de A diferente de x. Es decir, si

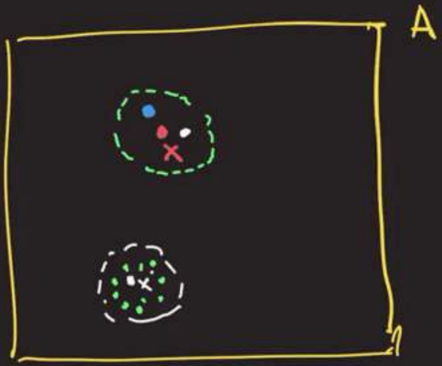
$$\left(B_r(x) - \{x\}\right) \cap A \neq \phi, \quad \forall r > 0$$

Ej: $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{n}, \dots\right\} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow x = 0$ es un punto de acumulación de A.




Proyectos
Blackboard 21
A
x
y
5 / 5

Def: 1) El conjunto de todos los puntos interiores de A se llama <u>interior de A</u> (Notación: A° o $\text{int}(A)$). Es decir



Proyectos   Blackboard 21

Def: 1) El conjunto de todos los puntos interiores de A se llama <u>interior de A</u> (Notación: A° o $\text{int}(A)$). Es decir

$$\text{int}(A) = \bigcup_{\mathcal{U} \subset A,\ \mathcal{U} \text{ es abierto}} \mathcal{U}$$

i.e. $\text{int}(A)$ es el abierto más grande contenido

Ej: ① $\text{int}\,[0,1] = (0,1)$

② $\text{int}\,\mathbb{R}\cap\mathbb{Z} = \phi$

③ $\text{int}\,\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$

* ④ A es abierto ssi $A = \text{int}(A)$.

5/7

(2) La __cerradura__ de A es el conjunto:

$$\bar{A} := \bigcap_{A \subset F,\ F \text{ cerrado}} F$$

__Nota:__ 1) $\bar{A}$ es cerrado

2) $\bar{A}$ es el cerrado más pequeño que contiene a A.

3) A es cerrado ssi $A = \bar{A}$.

* 4) Si F es un cerrado que contiene a $A \Rightarrow A \subset \bar{A} \subset F$

(3) La __frontera__ de A (denotada $bd(A)$ o ∂A)

se define: $\partial A := \bar{A} - \operatorname{int}(A)$

Ej: Sea $I = [0,1] \Rightarrow \bar{I} = [0,1]$

$\text{int } I = (0,1)$

$\Rightarrow \partial A = \bar{I} - \text{int}(A) = \{0,1\}$

4 El conjunto de todos los puntos de acumulación de un conjunto A se llama conjunto derivado de A. Notación: A'.

Prop (1): Si $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$

Dem: Sea $x \in A'$ (i.e. x es punto de acumulación de A)

$\Rightarrow \forall$ abierto $G \ni x \in G$, se tiene que

$$(G - \{x\}) \cap A \neq \phi$$

Como $A \subset B \Rightarrow \underbrace{(G-\{x\})\cap A} \subset (G-\{x\})\cap B$

$\Rightarrow \phi \neq (G-\{x\})\cap A \subset (G-\{x\})\cap B$

$\Rightarrow (G-\{x\})\cap B \neq \phi, \; \forall G \ni x \in G \Rightarrow x \in B'$ $\square$

Prop (2) $(A\cup B)' = A'\cup B'$

Dem.

$(\supseteq)$ Sabemos que $\begin{matrix} A \subset A\cup B \\ B \subset A\cup B \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A' \subset (A\cup B)' \\ B' \subset (A\cup B)' \end{matrix}$

$\Rightarrow A'\cup B' \subset (A\cup B)'$

$(\subseteq)$ $(A\cup B)' \subset A'\cup B'$

$A^0, \bar{A}, A'$

p es punto límite de A, si $\forall G$ abierto $\ni p \in G$,

se tiene que $G \cap A \neq \phi$
$\uparrow$
$(G - \{p\}) \cap A \neq \phi$

Prop: Si $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$

Prop: $(A \cup B)' = A' \cup B'$

Dem.

$(\supseteq)$ A probar: $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$. Entonces

$$\left.\begin{array}{l} A \subset A \cup B \Rightarrow A' \subset (A \cup B)' \\ B \subset A \cup B \Rightarrow B' \subset (A \cup B)' \end{array}\right\} \Rightarrow A' \cup B' \subset (A \cup B)'$$

$$\left.\begin{array}{l} H \subset L \\ M \subset N \end{array}\right\} \Rightarrow (H \cup M) \subset (L \cup N)$$

(⊆) A probar: $(A\cup B)' \subset A'\cup B'$

$\Leftrightarrow$ si $x\in (A\cup B)' \Rightarrow x\in A'\cup B'$

$\Leftrightarrow$ si $\underbrace{x\notin A'\cup B'}$ $\Rightarrow x\notin (A\cup B)'$

$G\cap A=\emptyset$

$G\cap A \cancel{=\{x\}}$

Sea $x\notin A'\cup B' \Rightarrow x\notin A'$ y $x\notin B'$.

$\Rightarrow$ Como $x\notin A' \Rightarrow \exists\, G$, abierto, tal que $G\cap A\subset\{x\}$
$x\in G$

$x\in H$

Como $x\notin B' \Rightarrow \exists\, H$, abierto, tal que $H\cap A\subset\{x\}$

Nótese que $G\cap H$ es abierto. Entonces, $x\in G\cap H$, y

$$(G\cap H)\cap(A\cup B) = (\underbrace{G\cap H\cap A})\cup(G\cap H\cap B)$$
$$\subset \{x\}\cup\{x\}=\{x\}$$

$\Rightarrow x\notin(A\cup B)' \Rightarrow$ si $x\notin A'\cup B' \Rightarrow x\in (A\cup B')$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (A \cup B)' \subset A' \cup B' \Rightarrow (A \cup B)' = A' \cup B'.$ $\square$

Prop: A es cerrado ssi $A' \subset A$

(Un conjunto es cerrado ssi contiene a sus puntos de acumulación).

Dem: $(\Rightarrow)^{*}$ Sea A cerrado y sea $p \notin A \Rightarrow p \in A^c$, pero A^c es un abierto $\Rightarrow p \in A^c$ y $A \cap A^c = \phi$

$\Rightarrow p \notin A' \Rightarrow A' \subset A.$

$(\Leftarrow)$ A probar: $A' \subset A \Rightarrow$ A $\underbrace{\text{es cerrado}}_{\Leftrightarrow\ A^c \text{ es abierto}}$.

$*$ A probar: $A' \subset A \Leftrightarrow$ Si $x \in A' \Rightarrow x \in A$

$\Leftrightarrow$ Si $x \notin A \Rightarrow x \notin A'$

Suponga que $A' \subset A$ y sea $p \in A^c$. $\Rightarrow p \notin A'$
$\Rightarrow \exists$ G, abierto, tal que: $p \in G$ y
$$(G - \{p\}) \cap A = \phi$$
Como $p \notin A \Rightarrow G \cap A = \phi \Rightarrow G \subset A^c$. Entonces, si $p \in A^c$ $\exists$ abierto $G \ni p \in G \subset A^c \Rightarrow A^c$ es abierto $\Rightarrow A$ es cerrado. $\square$

Prop: Si F es un superconjunto cerrado de cualquier conjunto A, entonces $A' \subset F$

Dem: Sabemos que F es cerrado y $A \subset F$. Como $A \subset F \Rightarrow A' \subset F'$. Como F es cerrado, entonces $F' \subset F \Rightarrow A' \subset F$. $\square$

Prop: $A \cup A'$ es cerrado

Dem: pendiente.

Prop: $\bar{A} = A \cup A'$

Dem: ($\supseteq$) Sabemos que $\boxed{A \subset \bar{A}}$. Por otra parte,

$$\Rightarrow A' \subset (\bar{A})' \subset \bar{A} \Rightarrow \boxed{A' \subset \bar{A}} \Rightarrow A \cup A' \subset \bar{A}$$

[cerrado]

($\subseteq$) A probar! $\bar{A} \subset A \cup A'$. Entonces,

$$A \subset \underbrace{A \cup A'}_{\text{cerrado}} \Rightarrow A \subset \bar{A} \subset A \cup A'. \quad \square$$

$\bar{A} = \bigcap u$

u cerrado $\Rightarrow$

$u \supset A$

Prop: Si $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

Dem: Si $A \subset B \Rightarrow A' \subset B' \Rightarrow A \cup A' \subset B \cup B'$

$\Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$ □

Prop: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Dem: $(\subseteq)$ A probar: $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$.

Sabemos que $\left.\begin{array}{l} A \subset \bar{A} \\ B \subset \bar{B} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup B \subset \underbrace{\bar{A} \cup \bar{B}}_{\text{cerrado}}$

$\Rightarrow A \cup B \subset \overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$.

$(\supseteq)$ $\left.\begin{array}{l} A \subset A \cup B \Rightarrow \bar{A} \subset \overline{A \cup B} \\ B \subset A \cup B \Rightarrow \bar{B} \subset \overline{A \cup B} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$

$\Rightarrow \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. □

Nota: (Axiomas de Kuratowski)

K1; $\overline{\emptyset} = \emptyset$ ✓

K2; $A \subset \overline{A}$ ✓

K3; $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ ✓

K4: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ✓

Propone: construir una topología de cerrados a partir de K1 - K4

Conjuntos conexos

Def: Un subconjunto H del espacio métrico M es disconexo, si existen abiertos A y B $\ni$ $A \cap H \neq \emptyset$, $B \cap H \neq \emptyset$,
$(A \cap H) \cap (B \cap H) = \emptyset$ y
$(A \cap H) \cup (B \cap H) = H$.

A y C son conexos
B es disconexo


A
B

abiertos

↓

conexo → T. valor intermedio

↑

conexidad

compacidad

Preservan bajo aplicación de funciones continuas

↓

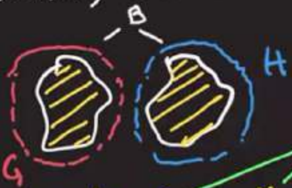
compacto →

↑

abiertos

Recordemos: A es conexo, si A no es disconexo

Disconexo:



Disconexión de B

Si existen abiertos G y H $\ni$

i) $G \cap B \neq \emptyset$ y $H \cap B \neq \emptyset$

ii) $(G \cap B) \cap (H \cap B) = \emptyset$

iii) $(G \cap B) \cup (H \cap B) = B$

Ej: 1) $\mathbb{Z}$ es disconexo en $\mathbb{R}$. En efecto, considere:

$$G = (-\infty, 1/2) \quad \text{y} \quad H = (1/2, \infty)$$

$\Rightarrow$ G y H son una disconexión de $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

2) $\mathbb{Q}$ es disconexo en $\mathbb{R}$. En efecto, sea la disconexión:

$$G=(-\infty,\pi) \quad \text{y} \quad H=(\pi,\infty)$$

<u>Teorema</u>: $I=[0,1]$ es conexo en $\mathbb{R}$.

<u>Dem</u>: Supóngase por el absurdo que A y B son una disconexión de I; i.e., $A\cap I$ y $B\cap I$ son no vacíos, disjuntos y su unión es I.

• Suponga que $1\in B$. Como I es acotado $\Rightarrow$ $A\cap I$ y $B\cap I$ también son acotado. Entonces, por el principio del supremo, $\exists\ c=\sup(A\cap I)>0$ y $c\in A\cup B$

.. Si $c \in A \Rightarrow c < 1$

$\Rightarrow$ como A es abierto $\Rightarrow \exists\, B_r(c) \subset A \Rightarrow \exists\, \alpha \in A \ni$ $c < \alpha$ $(\rightarrow\leftarrow) \Rightarrow c \notin A$

... Si $c \in B \Rightarrow$ como B es abierto $\Rightarrow \exists\, c_1 \in B \ni c_1 < c$ y es tal que $[c_1, c] \cap (A \cap I) = \phi$ (i.e. c_1 es una cota superior de $A \cap I$ y es menor que c) $(\rightarrow\leftarrow)$. Entonces, que $c \in B$ $(\rightarrow\leftarrow)$.

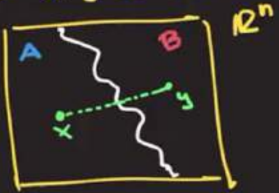
$\Rightarrow [0,1]$ es conexo. $\square$

Si I es un intervalo $\Rightarrow I$ es conexo

<u>Corolario</u>: $(0,1)$ es conexo. $\square$

Teorema: $\mathbb{R}^n$ es conexo.

Dem: Supóngase, por el absurdo, que A y B son una disconexión de $\mathbb{R}^n$.



Sean $x \in A$ & $y \in B$, y considere el segmento de recta que une x con y:

$$S = \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\}$$

Sean:

$$A_1 = \{t \in \cancel{\mathbb{R}}\,[0,1] \ni (1-t)x + ty \in A\}$$

$$B_1 = \{t \in \cancel{\mathbb{R}}\,[0,1] \ni (1-t)x + ty \in B\}$$

$\Rightarrow A_1 \cap B_1 = \phi$ $(\rightarrow\leftarrow)$, ya que A_1, B_1 serían una disconexión de $[0,1]$. Entonces, $\mathbb{R}^n$ es conexo.

Blackboard 31

Teorema: Los únicos conjuntos abiertos y cerrados de $\mathbb{R}^n$ son ϕ y $\mathbb{R}^n$.

Dem: Supóngase, por el absurdo, que $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \phi$ y $A \neq \mathbb{R}^n$, es abierto y cerrado de $\mathbb{R}^n$.

Como A es cerrado $\Rightarrow$ $A^c = B$ es abierto.

$\Rightarrow A \neq \phi \Rightarrow B \neq \phi$, $A \cap B = \phi$ y $A \cup B = \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ A y B forman una disconexión de $\mathbb{R}^n$ ($\leftrightarrow \Leftarrow$)

$\Rightarrow$ los únicos abiertos y cerrado de $\mathbb{R}^n$ son ϕ y $\mathbb{R}^n$. $\square$

Teorema: Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es conexo ssi es un intervalo.

<u>Dem:</u>

($\Leftarrow$) A probar: cada intervalo de $\mathbb{R}$ es un conexo (ver prueba de: $[0,1]$ es conexo).

($\Rightarrow$) Sea $C \subseteq \mathbb{R}$ conexo. A probar: C es un intervalo.

Sean $a, b \in C \ni a < b$ y sea $x \in \mathbb{R} \ni$ $a < x < b$. A probar: $x \in C$

Si $x \notin C \Rightarrow (-\infty, x)$ y (x, ∞) forman una disconexión de C ($\rightarrow\leftarrow$)

$\Rightarrow x \in C \Rightarrow C$ es intervalo. $\square$

Compactos

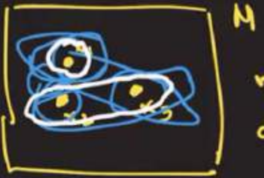
Def: Sea A un subconjunto del espacio métrico M. Decimos que la familia de abiertos $\{G_i\}_{i\in I}$ de M es una cubierta abierta de A, si

$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$$

Nota: En el caso de M, la cubierta abierta debe cumplir: $M = \bigcup_{i\in I} G_i$

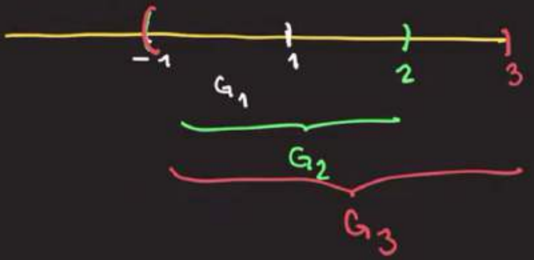
Def: Un subconjunto A del espacio métrico M es **compacto** si cada abierta de A tiene subcubierta finita. $\leadsto$ sigue cubriendo al conjunto A

Ej: Sea $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un subconjunto finito en $\mathbb{R}^n$ y sea $G = \{G_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de K (i.e. $\bigcup_{i \in I} G_i \supseteq K$). Dado que K es finito, basta un número finito de los G_i para cubrir a K $\Rightarrow$ K es compacto.



Ej: Sea $H=[0,\infty)\subseteq\mathbb{R}$ no es compacto.

En efecto, sea $G_n=(-1,n)$, $n\in\mathbb{Z}^+$



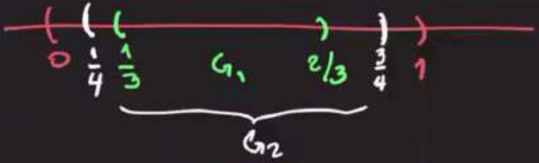
$\Rightarrow G=\{G_n\}$ es una cubierta abierta de H.

Suponga que $\{G_{n_1}, G_{n_2},\dots, G_{n_k}\}$ es una subcolección de G, Sea $M=\max\{n_1,n_2,\dots,n_k\}$

$\Rightarrow G_{n_i} \subseteq G_M$, $i=1,\dots,K$ $\Rightarrow G_M = \bigcup_{i=1}^{K} G_{n_i}$, pero, en particular, $M \notin \bigcup_{i=1}^{K} G_{n_i} \Rightarrow \{G_{n_1},\dots,G_{n_K}\}$ no cubre a H. Entonces, G no tiene subcubierta finita para $H \Rightarrow H$ no es compacto.

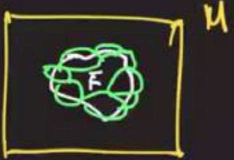
Ej: Sea $H=(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ y considere

$$G_n = \left(\frac{1}{n},\ 1-\frac{1}{n}\right), \quad n>2$$



$\Rightarrow$ $G = \{G_n\}$ es una cubierta abierta de H, pero G no tiene subcubierta finita para H $\Rightarrow$ H no es compacto.

<u>Prop:</u> Sea F un subconjunto cerrado de un espacio métrico compacto M. Entonces, F es compacto.



<u>Dem:</u> Sea $G = \{G_i\}$ una cubierta abierta de F. Como F^c es abierto

$\Rightarrow$ $\left(\bigcup_{i\in I} G_i\right) \cup F^c$ es cubierta abierta de M,

i.e. $\left(\bigcup_{i\in I} G_i\right) \cup F^c = M$

es compacto, existe una subcubierta finita de M, $\{G_{i_1}, G_{i_2}, \dots G_{i_n}, F^c\}$ tal que:

$$G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_n} \cup F^c = M$$

$\Rightarrow \{G_{i_1}, \dots, G_{i_n}\}$ es una subcubierta finita para F $\Rightarrow$ F es compacto. $\square$

<u>Teorema</u> (Heine-Borel): Un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ es compacto ssi es cerrado y acotado.

Ej: ① $(0,1)$ no es compacto, ya que no es cerrado

② $[0,1]$ es compacto, por Heine-Borel.

Γ • Si $S \subseteq \mathbb{R}$, compacto, $\Rightarrow$ S es cerrado y acotado

• Si $S \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado y acotado $\Rightarrow$ S es secuencialmente compacto $\Rightarrow$ S es compacto

Producto de una colección cualquiera de conjuntos compactos es compacto (Teorema de Tíkonov) Tychonoff ⌟

<u>Nota</u>: Un espacio métrico M es de <u>Lindelöf</u> si cada cubierta abierta de M tiene una subcubierta contable

<u>Teorema</u>: Si $S \subseteq \mathbb{R}$ es compacto, entonces S es cerrado y acotado.

<u>Dem</u>:

A probar: S es acotado.

Considere, para $m \in \mathbb{Z}^+$; $H_m = (-m, m)$.

Como cada H_m es abierto y $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} H_m = \mathbb{R}$

$\Rightarrow \{H_m : m \in \mathbb{Z}^+\}$ es cubierta abierta de S.

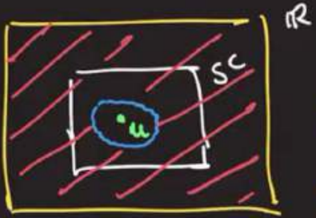
Como S es compacto $\Rightarrow$ Hay una subcubierta finita $\{H_{m_1}, \dots, H_{m_n}\}$ para S, i.e.

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_{m_n} = H_M = (-M, M) \Rightarrow \text{M es acotado}$$

A probar: S es cerrado. $\Leftarrow\Rightarrow$ S^c es abierto.

Sea $u \in S^c$ y considere:

$$G_n = \{ y \in \mathbb{R} : |y-u| > \tfrac{1}{n} \}, \ n \in \mathbb{Z}^+$$



Note que los G_n son abiertos.

y $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbb{R} - \{u\}$.

Como $u \notin S \Rightarrow S \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$

$\Rightarrow \{G_n\}$ es una cubierta abierta de S.

Como S es compacto $\Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{Z}^+ \ni$

$$S \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} G_n = G_m = \left[u - \tfrac{1}{m}, u + \tfrac{1}{m} \right]^c$$

$$\Rightarrow S \cap \left(u - \tfrac{1}{m}, u + \tfrac{1}{m}\right) = \phi \Rightarrow \left(u - \tfrac{1}{m}, u + \tfrac{1}{m}\right) \subset S^c$$

$\Rightarrow S^c$ es abierto $\Rightarrow S$ es cerrado. $\square$

<u>Verificar</u>: ¿Por qué Heine-Borel no aplica en un espacio métrico cualquiera? ¿Se cumple alguna de las implicaciones?

Heine-Borel

- Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es compacto $\Rightarrow$ A es cerrado y acotado

✓ • Si $A \subseteq \mathbb{R}$ que es cerrado y acotado $\Rightarrow$ A es compacto

•• Producto cualquiera de compactos es compacto (Teorema de Tikonov)

Sucesiones

Def: Una sucesión es cualquier función cuyo dominio es un conjunto infinito contable, i.e.

$\mathbb{Z}^+, \mathbb{N}, \mathbb{Q}$

Ej: $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R} \ni f(n) = \operatorname{sen} n$ es una sucesión