Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2034 - Análisis de Variable Real 1 - Catedrático: Dorval Carías
6 de junio de 2021

HT 6

Las siguientes definiciones/teoremas (demostrados) fueron vistos en clase:

Homeomorfismo

Un homeomorfismo es una función bicontinua y biyectiva entre dos espacios topológicos. Es decir:

$$f : (x, \tau_x) \to (y, \tau_y).$$

$\implies f$ es homeomorfismo si y solo si:

1. f es continua.
2. f es biyectiva (i.e f tiene inversa).
3. La inversa de f es continua.

En este caso, x y y son espacios homeomorfos, es decir topológicamente indistinguibles.

Definición de continuidad

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in A$. Se dice que f es continua en x_0, si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. (i.e. Si $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \ni$ si $x \in A$, $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.)

Definición de continuidad uniforme

Una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua sobre A si, $\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta > 0 \ni x, x' \in A, |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Definición de Lipschitz

Si $f : I \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que f es Lipschitz, si $\exists\, A > 0 \ni$

$$|f(x) - f(x')| \leq A|x - x'|, \forall x, x' \in I.$$

Definición de punto fijo

x_0 es un punto fijo de una función f si y solo si $f(x_0) = x_0$.

Teorema del Valor Intermedio - Bolzano (Demostrado en clase)

Sea H un subconjunto de $\mathbb{R}$ y sea f una función continua y acotada sobre H con valores en $\mathbb{R}$. Si $k \in \mathbb{R} \ni$

$$\inf\{f(x) : x \in H\} < k < \sup\{f(x) : x \in H\}.$$

$\implies \exists\, c \in H \ni f(c) = k.$

1. Problema 1

Definición del valor intermedio

Si $f(a) < c < f(b)$, entonces $f(x) = c$ para algún x entre a y b.

Teorema 1 (Demostrado en clase)

La imagen de un compacto bajo un mapeo continuo es compacto.

Definición de punto límite de Rudin et al. (1976)

Si p es un punto límite de un conjunto E, entonces cada vecindad de p contiene infinitos puntos contables de E.

Caracterización secuencial de compacto (Demostrado en clase)

Un subconjunto K de $\mathbb{R}$ es compacto si y solo si cada sucesión en K tiene una subsucesión que converge a un punto en K.

Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua ssi f tiene la propiedad del valor intermedio y mapea conjuntos compactos en conjuntos compactos.

Demostración. Nótese que es una prueba de ida y de vuelta.

$\boxed{\Rightarrow}$ A probar: f tiene la propiedad del valor intermedio y mapea conjuntos compactos en conjuntos compactos. Por hipótesis sabemos que f es continua, entonces por el teorema del valor intermedio de Bolzano f debe tener la propiedad del valor intermedio.

$$\implies \exists\, c \in \mathbb{R} \ni f(c) = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, por la caracterización secuencial de compactos, nos garantiza que el subconjunto que mapea la función es compacto en un intervalo $[a, b]$ si cada sucesión en el subconjunto tiene una subsucesión que converge a algún punto en el subconjunto (a mayor detalle en la prueba de regreso). Además, por el teorema 1, la compacidad de conjuntos compactos se preserva bajo un mapeo continuo.

$\boxed{\leftarrow}$ Por contradicción. Sea asume que f no es continua. Además, tenemos:

a) Una función mapea conjuntos compactos en conjuntos compactos. Además, nótese que por Heine-Borel, un conjunto compacto es cerrado y acotado. Entonces, tenemos una función f que mapea $[a,b] \to [a,b]$.

b) Considérese la caracterización secuencial del compacto. Entonces dígase que si $x_n \to x_0$. Pero ahora, nótese que nos dicen que f tiene la propiedad del valor intermedio tal que:

$$f(x_0) < c < f(x_n), \qquad c \in [a,b] \text{ y } \forall\ n.$$

Entonces, $f(z_n) = c$, en donde $z_n \in (x_0, x_n)$. Por lo que podemos asumir que, $z_n \to x_0$. Ahora, notamos que x_0 debe ser un **punto límite** del conjunto z, tal que $f(z) = c$; sin embargo, por el inciso **a** sabemos que $[a,b]$ es cerrado, pero z no pertenece al conjunto x_0. ($\to\leftarrow$) Entonces f debe ser continua.

□

2. Problema 2

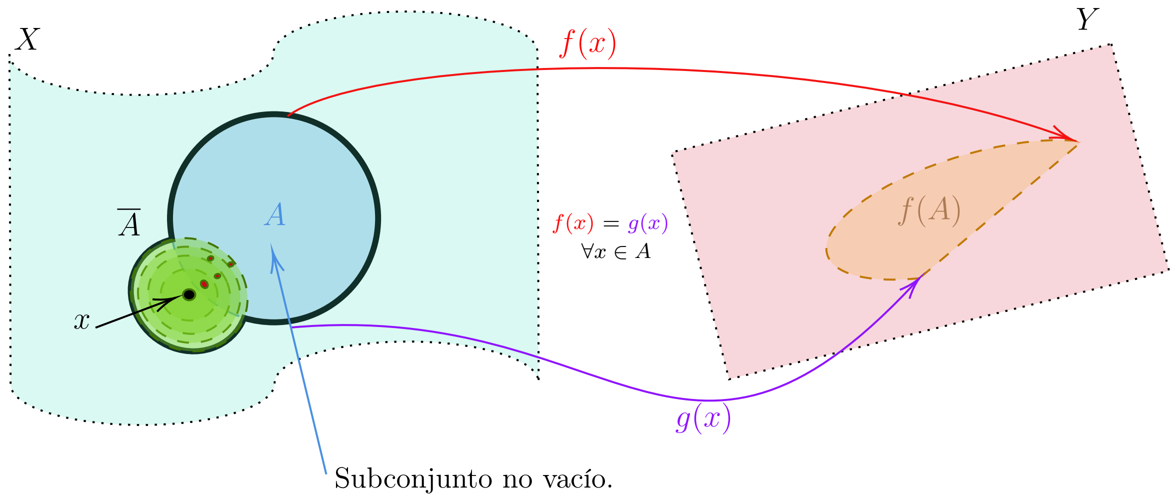
Teorema 3.2 de Rudin et al. (1976)

Let $\{p_n\}$ be a sequence in a metric space X.

1. $\{p_n\}$ converges to $p \in X$ if and only if every neighborhood of p contains all but finitely many of the terms of $\{p_n\}$
2. If $p \in X, p' \in X$, and if $\{p_n\}$ converges to p and to p', then $p' = p$.
3. If $\{p_n\}$ converges, then $\{p_n\}$ is bounded.
4. If $E \subset X$ and if p is a limit point of E, then there is a sequence $\{p_n\}$ in E such that $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.

Sean X y Y espacios métricos y sea A un subconjunto no vacío de X. Si f y g son mapeos continuos de X en Y, tales que $f(x) = g(x), \forall x \in A$, demuestre que $f(x) = g(x), \forall\ x \in \overline{A}$.

Demostración. A probar: $f(x) = g(x),\ \forall\ x \in \overline{A}$. Observamos que el problema consiste:



Sea x_n una sucesión en el espacio métrico X. Entonces el inciso 4 del teorema 3.2 de Rudin et al. (1976) nos garantiza que si $A \subset X$ y si x es un punto límite (de acumulación) de A, entonces hay una sucesión $\{x_n\}$ en A tal que:

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Ahora por hipótesis, si usamos el mapeo continuo de X en Y, tales que:

$$f(x_n) = g(x_n), \qquad \text{para cada } n.$$

Por lo tanto, $f(x_n) = g(x_n)$ están en el espacio métrico Y; lo que implicaría

$$f(x) = g(x), \qquad x \in \overline{A}.$$

$\square$

3. Problema 3

Definición 4.28 (Funciones monótonas) de Rudin et al. (1976)

Let f be real on (a, b). Then f is said to be monotonically increasing on (a, b) if $a < x < y < b$ implies $f(x) \leq f(y)$. If the last inequality is reversed, we obtain the definition of a monotonically decreasing function. The class of monotonic functions consists of both the increasing and the decreasing functions.

Teorema 1 (Fue dejado como tarea demostrarlo)

Sea f continua e inyectiva en $I = [a, b]$. Entonces es estrictamente monótona en I.

Demostración. Vamos a tomar como referencia la deducción de Walker (2012). Entonces, por hipótesis tenemos que f es continua e inyectiva. Como es inyectiva, se sabe que $f(a) \neq f(b)$. Entonces, ahora tenemos dos casos:

1. $f(a) < f(b)$ entonces f es estrictamente creciente. Entonces tenemos que $f(a) < f(b)$. Entonces, consideremos el teorema del valor medio del Bolzano, tal que $f(a) < f(x) < f(b)$ para todo $a < x < b$. $\implies y \in [x, b] \ni f(y) = f(a)$. Pero entonces, eso implicaría que que no es inyectiva $(\rightarrow\leftarrow)$. De la misma forma, $f(x) \geq f(b)$ no sería posible. Digamos $x < y \in I$, tenemos que $f(x) \geq f(y)$, entonces por el teorema del valor medio de Bolzano existe un $z \in [a, x]$ tal que $f(z) = f(y)$. Por lo tanto, f no sería inyectiva $(\rightarrow\leftarrow)$.

2. $f(a) > f(b)$ entonces f es estrictamente decreciente. La prueba es la misma al inciso anterior, pero con los signos cambiados.

$\therefore$ $x < y \in I$ y entonces tenemos $f(x) < f(y)$. Además tenemos $f(x) > (y)$; que son estrictamente creciente y decreciente respectivamente. $\square$

Pruebe que si $f : [a, b] \to [a, b]$ es un homeomorfismo, entonces a y b son puntos fijos de f, o $f(a) = b$ y $f(b) = a$.

Demostración. Conocemos $f : [a, b] \to [a, b]$ es un homeomorfismo si y solo si: (1) Es biyectiva. (2) Función continua. (3) La inversa de la función es continua. Por el teorema 1, las condiciones se cumplen trivialmente:

1. Si f es creciente. Entonces:

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)] = [a, b].$$

a y b son puntos fijos de f. Es decir, por la definición de punto fijo.

$$f(a) = a \qquad \text{y} \qquad f(b) = b.$$

2. Si f es decreciente. Entonces:

$$f([a, b]) = [f(b), f(a)] = [a, b].$$

Tal que:

$$f(a) = b \qquad \text{y} \qquad f(b) = a.$$

$\square$

4. Problema 4

Sea $f : \mathbb{R} \to (-1, 1), f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

Notación

Nótese que la función se puede reescribir como:

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & , -\infty < x < 0 \\ \frac{x}{1+x} & , 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

1. Pruebe que f es un homeomorfismo.

Demostración. Considérese la definición de homeomorfismo.

a) **Comprobar f es continua**. Tómese como referencia la definición de continuidad. Tenemos 2 casos:

1) $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Sea $x_0 \in [0, \infty)$. Entonces, si $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta := \text{mín}\{0, 2\varepsilon\} > 0$, tal que:

$$|x - x_0| < \delta.$$

$$\begin{aligned} \implies |f(x) - f(x_0)| &= \left| \frac{x}{1+x} - \frac{x_0}{x_0} \right| = \left| \frac{x(1+x_0) - x_0(1+x)}{(1+x)(1+x_0)} \right| \\ &= \left| \frac{x + xx_0 - x_0 - x_0x}{(1+x)(1+x_0)} \right| = \left| \frac{x - x_0}{(1+x)(1+x_0)} \right| = \\ &= \frac{1}{|(1+x)(1+x')|} \cdot |x - x'| \leq \frac{1}{2} \cdot |x - x'|. \end{aligned}$$

Entonces, ahora tenemos

$$\frac{1}{2} \cdot |x - x_0| < \epsilon \implies |x - x_0| < 2\epsilon.$$

Por lo cual, seleccionamos $\delta := \text{mín}\{0, 2\varepsilon\}$.

2) $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Mismo argumento que el anterior con el signo e intervalo cambiado.

Por lo tanto, f es continua.

b) **Comprobar f es biyectiva**. Es decir, primero probaremos que es inyectiva y luego sobreyectiva.

1) Inyectiva. Tenemos dos casos:

a' $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Entonces, se proponen dos funciones:

$$f(x_1) = \frac{x_1}{1-x_1} \quad y \quad f(x_2) = \frac{x_2}{1-x_2}.$$

$$f(x_1) = f(x_2) \implies \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \implies x_1(1-x_2) = x_2(1-x_1) \implies$$
$$\implies x_1 - x_1x_2 = x_2 - x_2x_1 \implies x_1 = x_2. \therefore \text{ Es inyectiva.}$$

b' $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Mismo argumento que el inciso anterior, únicamente el signo cambiado.

$\therefore f$ es inyectiva.

2) Sobreyectiva. Tenemos dos casos:

a' $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Entonces, debemos despejar para x. Se propone:

$$y = \frac{x}{1-x}.$$

$$\implies y = \frac{x}{1-x} \implies y(1-x) = x \implies y - yx = x \implies$$
$$y = xy + x \implies y = x(y+1) \implies x = \frac{y}{y+1}. \therefore \text{ Es sobreyectiva.}$$

b' $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Mismo argumento que el inciso anterior, únicamente el signo cambiado.

$\therefore f$ es sobreyectiva.

$\therefore$ Una función inyectiva y sobreyectiva es biyectiva.

$c)$ **Comprobar f^{-1} es biyectiva**. Nuevamente, tenemos 2 casos:

1) $f(x) = \frac{x}{1-x}$. En donde $f(x)^{-1} = \frac{x}{x+1}$. Sea $x_0 \in (-\infty, 0)$. Entonces, $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta := \min\{2\varepsilon, 0\} > 0$, tal que:

$$|x - x_0| < \delta.$$

$$\implies |f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{x}{x+1} - \frac{x_0}{x_0+1}\right| = \left|\frac{x(x_0+1) - x_0(x+1)}{(x+1)(x_0+1)}\right| =$$
$$= \left|\frac{xx_0 + x - x_0x - x_0}{(x+1)(x_0+1)}\right| = \left|\frac{x - x_0}{(x+1)(x_0+1)}\right| = \frac{1}{|(x+1)(x_0+1)|} \cdot |x - x_0|$$

Entonces:

$$\frac{1}{|(x+1)(x_0+1)|} \cdot |x - x_0| \leq \frac{1}{2}|x - x_0| < \varepsilon.$$
$$\implies |x - x_0| < 2\varepsilon.$$

Por lo cual, seleccionamos arbitrariamente $\delta := \min\{2\varepsilon, 0\}$.

2) $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Mismo argumento del inciso anterior con los signos cambiados.

Por lo tanto, la inversa de f es continua.

$\therefore$ f es un homeomorfismo. □

2. Demuestre que f es Lipschitz.

Demostración. Tenemos dos casos:

$a)$ $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Debemos probar que $\exists\ A > 0$:

$$|f(x) - f(x')| \leq A|x - x'|, \forall\ x, x' \in I.$$

$$\implies \left|\frac{x}{1+x} - \frac{x'}{1+x'}\right| = \left|\frac{x(1+x') - x'(1+x)}{(1+x)(1+x')}\right| = \left|\frac{x + xx' - x' - x'x}{(1+x)(1+x')}\right| =$$
$$= \left|\frac{x - x'}{(1+x)(1+x')}\right| = \frac{1}{|(1+x)(1+x')|} \cdot |x - x'| \leq \frac{1}{2} \cdot |x - x'|.$$

b) $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Mismo argumento que el anterior con el signo cambiado.

$\therefore$ $f(x)$ es Lipschitz. $\square$

Teorema 1 de Lipschitz (demostrado en clase)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ es Lipschitz de orden α. $\implies$ f es continuamente uniforme.

3. Deduzca que f es uniformemente continua.

   Demostración. Por el teorema 1 de Lipschitz (demostrado en clase), para el caso particular en donde $\alpha = 1$, entonces podemos concluir que f es uniformemente continua. $\square$

5. Problema 5

Mapeo expansivo

Sea X un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Un mapeo $f : X \to X$ es expansivo si

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|, \quad \forall\ x, y \in X.$$

Demuestre que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y expansiva, entonces es un homeomorfismo con inversa Lipschitz.

Literatura

Para la realización de esta prueba, se consultaron las siguientes fuentes:

1. Georgiev and Zennir (2020). El teorema 1.9.6 se ofrece una de las generalizaciones y trata un caso específico de un teorema similar.

2. Carothers (2000). Este libro profundiza en las definiciones de homeomorfismos desde su punto analítico y topológico.

3. Brouwer (1911). Teorema de la invarianza del dominio (deducción avanzada con temas de topología).

Demostración. A probar: f es un homeomorfismo ([1] biyectiva, [2] continua, [3] inversa continua) que su inversa es Lipschitz. Por hipótesis tenemos un subconjunto $\mathbb{R}$ y un mapeo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuo tal que:

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|, \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}.$$

$\implies$ Nótese que la inyectividad se cumple trivialmente y además por hipótesis sabemos que es continua. Hace falta comprobar que posee la sobreyectividad para ser biyectiva; y finalmente, comprobar que su inversa también es continua. Estos dos factores se demuestran por el teorema de la invarianza del dominio de Brouwer (**literatura - inciso 3**). Por lo tanto, tenemos que f es un homeomorfismo. $\implies$ f tiene inversa. Por lo tanto, podemos asumir, tomando como referencia el caso general de **literatura - inciso 1**:

$$|x - y| \geq |f^{-1}(x) - f^{-1}(y)|.$$

Que claramente es Lipschitz con $\alpha = 1, A = 1$. $\square$

Referencias

Brouwer, L. E. (1911). Beweis der invarianz des n-dimensionalen gebiets. *Mathematische Annalen*, 71(3):305–313.

Carothers, N. L. (2000). *Real analysis*. Cambridge University Press.

Georgiev, S. G. and Zennir, K. (2020). *Multiple Fixed-point Theorems and Applications in the Theory of ODEs, FDEs and PDEs*. CRC Press.

Rudin, W. et al. (1976). *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-hill New York.

Walker, P. (2012). *Examples and theorems in analysis*. Springer Science & Business Media.