Universidad del Valle de Guatemala

MM2034 - 1 semestre - 2021

Licenciatura en matemática aplicada

ANÁLISIS DE VARIABLE REAL 1

Catedrático: Dorval Carías

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay

Carné: 19857

Correo: rom19857@uvg.edu.gt

1 de julio de 2021

Índice

1. Sucesiones

Definición 1. *Una sucesión es cualquier función cuyo dominio es un conjunto infinito contable, i.e.* $\mathbb{Z}^+, \mathbb{N}, \mathbb{Q}$.

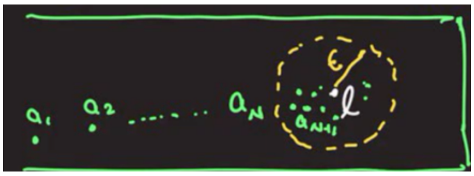
Ejemplo 1. $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R} \ni f(n) = \operatorname{sen} n$ *es una sucesión.*

Definición 2. *Se dice que la sucesión* (a_n) *converge al número* l*, denotado* $a_n \to l$*, si* $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ *si* $n \geq N \implies |a_n - l| < \varepsilon$.

NOTA. *Si existe* l*, entonces es el límite de* (a_n)*. Notación:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l.$$

Ejemplo 2. *Compruebe que* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.



Solución. Dado $\varepsilon > 0 \exists N = \underline{1/\varepsilon} \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \implies n > \frac{1}{\varepsilon}$. □

Teorema 1. *El límite de una sucesión, si existe, es único.*

Demostración. Suponemos que $a_n \to l$ y $a_n \to l'$.

1. Como $a_n \to l \implies$ Dado $\varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N_1 \implies |a_n - l| < \varepsilon/2$.

2. Como $a_n \to l' \exists N_2 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N_2$, entonces $|a_n - l|' < \varepsilon/2$.

3. Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\} \implies$ para $n \geq N$, se cumple:

$$|l - l'| = |l - a_n + a_n - l'| = |(l - a_n) + (a_n - l')| \leq \underbrace{|l - a_n|}_{|a_n - l|} + |a_n - l'| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

i.e. $|l - l'| < \varepsilon$. Por la arbitrariedad de $\varepsilon \implies l = l'$.

$$\boxed{|l - l'| \leq \text{ínf}\{\in : \in > 0\}}$$

■

Teorema 2. *Una sucesión convergente es acotada.*

Demostración. Como $a_n \to l \implies$ Dado $\underline{\varepsilon = 1}\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \implies |a_n - l| < 1$. Entonces, $|a_n| - |l| \leq ||a_n| - |l|| \leq |a_n - l| < 1 \implies |a_n| - |l| < 1 \implies |a_n| < |l| + 1, \forall n \geq N. \implies$ Hagamos $M = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{n-1}|, \underbrace{|l| + 1}_{|a_n|, \forall n \geq N}\}$.
$\implies |a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{Z}^+. \implies (a_n)$ es acotada. ■

Teorema 3. *Si $a_n \to l \implies |a_n| \to |l|$.*

Demostración. Si $a_n \to l \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \in Z^+ \ni$ si $n \geq N \implies |a_n - l| < \varepsilon$. Por desigualdad triangular:

$$||a_n| - |l|| < |a_n - l| < \varepsilon \implies ||a_n| - |l|| < \varepsilon \implies |a_n| \to |l|.$$

■

Teorema 4. *Sean (a_n) y (b_n) sucesiones convergentes tal que $a_n \to l$ y $b_n \to l'$. Entonces:*

1. $(a_n + b_n) \to l + l'$.

2. $(a_n \cdot b_n) \to l \cdot l'$.

Demostración. 1. Sea $\varepsilon > 0 \implies \exists N_1 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ Si $n \geq N \implies |a_n - l| < \varepsilon/2 \implies \exists N_2 \in \mathbb{Z}^+ \in$ si $n \geq N_2 \implies |b_n - l'| < \varepsilon/2$. Hagamos $N = \max\{N_1, N_2\}$. Entonces, se tiene: $|(a_n+b_n)-(l+l')| = |(a_n-l)+(b_n-l')| \leq |a_n - l| + |b_n - l'| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \quad \forall n \geq N. \implies (a_n + b_n) \to l + l'$.

2. *a*) $|a_nb_n - l \cdot l'| = |a_nb_n - a_nl' + a_nl' - l \cdot l'| = |a_n(b_n - l') + (a_n - l) \cdot l'| \leq |a_n(b_n - l')| + |(a_n - l) \cdot l'| = |a_n| \cdot |b_n - l'| + |a_n - l| \cdot |l'|$.

   b) Como a_n es convergente. $\implies a_n$ es acotada. $\implies \exists M' \geq 0 \ni |a_n| \leq M', \forall n \in Z^+$.

   c) Hagamos $M = \max\{M', |l'|\}$

   d) Como $a_n \to l$ y $b_n \to l'$, entonces $\forall \varepsilon > 0$,

      1) $\exists N_1 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N_1 \implies |a_n - l| < \varepsilon$.

      2) $\exists N_2 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N_2 \implies |b_n - l'| < \varepsilon$.

   e) Hacemos $N = \max\{N_1, N_2\}$. Entonces:

$$|a_n \cdot b_n - l \cdot l'| \leq |a_n| \cdot |b_n - l'| + |a_n - l| \cdot |l'| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M} M = \varepsilon, n \geq N.$$

$$\implies a_nb_n \to l \cdot l'.$$

■

Teorema 5. *Si (a_n) converge a l, $l \neq 0$, entonces $a_n \neq 0$ a partir de algún $N \in \mathbb{Z}^+$ y*

$$\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{l}.$$

Demostración. Por hipótesis: $a_n \to l \implies |a_n| \to |l|$. Sea $\underline{\varepsilon = |l|/2} \implies \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N$, entonces $\underbrace{||a_n| - |l||}$ $< |l|/2 \implies -(|a_n| - |l|) < |l|/2 \implies -|a_n| + |l| < |l|/2 \implies \underbrace{|l|/2 < |a_n|}_{1/|a_n| < 2/|l|}, \forall n \geq N$.

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{l}\right| = \left|\frac{l - a_n}{a_n \cdot l}\right| = \frac{|l - a_n|}{|a_n| \cdot |l|} = \frac{|a_n - l|}{|a_n| \cdot |l|} < \frac{|a_n - l|(2)}{|l| \cdot |l|} = \frac{2\overbrace{|a_n - l|}}{den}$$

$\implies 1/a_n \to 1/l$. ■

Teorema 6. *1. Si (a_n) es una sucesión de términos no negativos $\ni a_n \to l \implies l$ es no negativo.*

2. Si $a_n \to l$ y $b_n \to l'$, con $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \implies l \leq l'$.

Corolario 6.1. *Si $a_n \to l$ y si $\alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha a_n \to \alpha l$.*

Ejemplo 3. *Demuestre que* $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$.

Solución. Dado $\varepsilon > 0 \exists N = \underline{2/\varepsilon} \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \implies \left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-1-(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

$$\implies \frac{n}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \implies n > 2/\varepsilon.$$

□

Ejemplo 4. *Compruebe que* $\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right] = 0$.

Solución. Dado $\varepsilon > 0 \exists N = \underline{1/(4\varepsilon^2)} \in \mathbb{Z}^+ ni$ si $n \geq N \implies \left|\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) - 0\right| < \varepsilon$.

$\implies \left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \implies 2\sqrt{n} > 1/\varepsilon \implies \sqrt{n} > 1/2\varepsilon \implies n > 1/(4\varepsilon^2)$. □

NOTA. *Considere las sucesiones: $a_n = n$ y $b_n = (-1)^n$. Ambas sucesiones divergen (i.e no converge).*

Definición 3. *Se dice que* (a_n) *tiende a infinito* ($\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$)*, si* $\forall M > 0 \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni a_n > M$.

NOTA. *La acotación de una sucesión no asegura convergencia.*

Teorema 7. *Suponga* $(x_n), (y_n), (z_n)$ *son sucesiones de números reales tal que*

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Si $\lim x_n = \lim z_n \implies (y_n)$ *converge y* $\lim x_n = \lim y_n = \lim z_n$.

Demostración. Supóngase que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = w$. Si $\varepsilon > 0 \implies \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni |x_n - w| < \varepsilon$ y $|z_n - w| < \varepsilon$.

1. Si $\varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{Z}^+ \ni |x_n - w| < \varepsilon, \forall n \geq N_1$.
2. Si $\varepsilon > 0 \exists N_2 \in \mathbb{Z}^+ \ni |x_n - w| < \varepsilon, \forall n \geq N_2$.

$\implies$ Hagamos $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Como $x_n \leq y_n \leq z_n \implies x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Nótese que: $-\varepsilon < x_n - w < \varepsilon$, y que: $-\varepsilon < z_n - w < \varepsilon$. $\implies -\varepsilon < x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w < \varepsilon \implies -\varepsilon < y_n - w < \varepsilon \iff |y_n - w| < \varepsilon, \forall n \geq N$. $\implies$ Por la arbitrariedad de ε, $\lim_{n\to\infty} y_n = w$. $\implies \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n$. ■