Primer semestre 2021 - Matemática Aplicada - Universidad del Valle de Guatemala

Un nuevo mundo...

Análisis de Variable Real 1

Rudik Roberto Rompich

Enero a Junio de 2021

Primer semestre 2021 - Matemática Aplicada - Universidad del Valle de Guatemala

Disclaimer
Supuestamente, una parte elemental de la matemática.

Colophon
This document was typeset with the help of KOMA-Script and LaTeX using the kaobook class.
The source code of this book is available at:
https://github.com/fmarotta/kaobook
(You are welcome to contribute!)

Publisher
Rudik Roberto Rompich Cotzojay

The harmony of the world is made manifest in Form and Number, and the heart and soul and all the poetry of Natural Philosophy are embodied in the concept of mathematical beauty.

– D'Arcy Wentworth Thompson

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Análisis de Variable Real | 1

1.1. 11 de enero de 2021

Propiedades de R

Definition 1.1.1 *Un conjunto no vacío P de elementos de un campo $\mathbb{F}$ es una clase positiva si cumple:*

- *Si $a, b \in P \longrightarrow a + b \in P$*
- *Si $a, b \in P \longrightarrow a \cdot b \in P$*
- *Si $a \in \mathbb{F}$, entonces:*
  Ley de tricotomía
  $a \in P \qquad O_{ex} \qquad a = 0 \qquad O_{ex} \qquad -a \in P$

Remark 1.1.1 Sea $N = \{-a : a \in P\}$ la clase negativa relativa a P. $\longrightarrow \mathbb{F} = P \cup \{0\} \cup N$

Example 1.1.1 Algunos ejemplos...

- $(Q, +, \cdot)$ es un campo. Sea $P = \{\frac{a}{b} \in Q \ni a, b \in \mathbb{Z}^+\} \longrightarrow P$ es una clase positiva de Q.
- Sea $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, con las operaciones:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

*	0	1
0	0	0
1	0	1

  $\longrightarrow (\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ es un campo.
- Sea $P = \{0\}$.
  (1) Cumple (2) Cumple (3) No cumple $\longrightarrow P$ no es una clase positiva de $\mathbb{Z}_2$.
- Sea $P' = \{1\}$
  (1) No cumple. $\longrightarrow P'$ no es una clase positiva de $\mathbb{Z}_2$.

Definition 1.1.2 *Sea P la clase positiva del campo $\mathbb{F}$, entonces se dice que $\mathbb{F}$ está ordenada por P. (O que $\mathbb{F}$ es un campo ordenado).*

- *Si $a \in P$, se dice que a es positivo. Notación $a > 0$.*
- *Si $a \in P$ o $a = 0$, se dice que a es no negativo. Notación $a \geq 0$*
- *Si $a, b \in \mathbb{F}$ y $a - b \in P$, se escribe $a > b$.*
- *Si $a, b \in \mathbb{F}$ y $a - b \in P$ o $a - b = 0$, se escribe $a \geq b$.*

Proposition 1.1.1 *Algunas propiedades...*

- *Transitividad Si $a > b$ y $b > c \longrightarrow a > c$.*

- *Tricotomía Si* $a, b \in \mathbb{F}$, *entonces:*
  $a > b \quad O_{ex} \quad a = b \quad O_{ex} \quad b > a.$
- *Antisimetría Si* $a \geq b$ *y* $b \geq a \longrightarrow a = b$

Demostración. Se presentan las pruebas:

- 1. Si

$$a > b \longrightarrow a - b \in P$$
$$b > c \longrightarrow b - c \in P$$
$$\longrightarrow (a - b) + (b - c) = a - c \in P$$
$$\longrightarrow a > c$$

- 2. Por la tricotomía en P.
- 3. Supóngase, por el absurdo, que $a \geq b$, $b \geq a$ y $a \neq b$. Entonces
  $a > b \quad O_{ex} \quad b > a(\longrightarrow\longleftarrow)$

□

Proposition 1.1.2 *Sea* $\mathbb{F}$ *un campo ordenado:*

- *Si* $a \neq 0 \longrightarrow a^2 > 0$
- *1>0*
- *Si* $n \in \mathbb{Z}^+ \longrightarrow n > 0$

Demostración. Pruebas
1.

- Si $a \neq 0 \longrightarrow a > 0 \quad O_{ex} \quad a < 0$.
- Si $a > 0 \longrightarrow a \cdot a = a^2 > 0$
  (Por la propiedad de $a \in P \longrightarrow a \cdot a \in P \longrightarrow a^2 > 0$).
- Si $a < 0 \longrightarrow -a \in P \longrightarrow (-a) \cdot (-a) = a^2 \in P \longrightarrow a^2 > 0$.

2.

- Hacemos $a = 1$ en 1) $\longrightarrow 1^2 = 1 > 0$.

3. Por inducción sobre n.

- Probemos para $n = 1$. Por 2), $1 > 0$.
- Suponemos que $k > 0$.
- Probamos para $k + 1$; $k > 0, 1 > 0 \longrightarrow k + 1 > 0 \longrightarrow n > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

□

Theorem 1.1.3 *Sean* $a, b, c \in \mathbb{F}$...

- *Si* $a > b \longrightarrow a + c > b + c$
- *Si* $a > b$ *y* $c > d \longrightarrow a + c > b + d$
- *Si* $a > b$ *y* $c > 0 \longrightarrow a \cdot c > b \cdot c$
- *Si* $a > b$ *y* $c < 0 \longrightarrow a \cdot c < b \cdot c$
- *Si* $a > 0 \longrightarrow a^{-1} > 0$
- *Si* $a < 0 \longrightarrow a^{-1} < 0$

Demostración. Prueba...

1. Si $a > b \longrightarrow a - b \in P \leftrightarrow (a + c) - (b + c) \in P \longrightarrow a + c > b + c$.

2. Si
$$a > b \longrightarrow a - b \in P$$
$$c > d \longrightarrow c - d \in P$$
$$\longrightarrow (a-b) + (c-d) = (a+c) - (b+c) \in P$$
$$\longrightarrow a + c > b + c$$
3. Si
$$a > b \longrightarrow a - b \in P$$
$$c > 0 \longrightarrow c \in P$$
$$\longrightarrow (a-b) \cdot c = ac - bc \in P \longrightarrow ac > bc$$
4. Si
$$a > b \longrightarrow a - b \in P$$
$$c < 0 \longrightarrow -c \in P$$
$$\longrightarrow (a-b) \cdot (-c) = bc - ac \in P$$
$$\longrightarrow bc > ac$$
5. Sea $a > 0$ y suponemos $a^{-1} < 0 \longrightarrow -a^{-1} > 0 \longrightarrow a(-a^{-1}) > 0$, pero $a(-a^{-1}) = -1 > 0(\longrightarrow\longleftarrow)$. Si $a^{-1} = 0 \longrightarrow 1 = aa^{-1} = 0(\longrightarrow\longleftarrow) \longrightarrow a^{-1} > 0$.
6. Similar al 5)

$\square$

Corollary 1.1.4 *Si $a > b \longrightarrow a > \frac{a+b}{2} > b$*

Demostración.

$$a > b \longrightarrow a + a > a + b \tag{1.1}$$
$$\longrightarrow 2a > a + b \tag{1.2}$$
$$\longrightarrow a > \frac{a+b}{2} \tag{1.3}$$

Por otro lado

$$a > b \longrightarrow a + b > b + b \tag{1.4}$$
$$\longrightarrow a + b > 2b \tag{1.5}$$
$$\longrightarrow \frac{a+b}{2} > b \tag{1.6}$$
$$\therefore a > \frac{a+b}{2} > b \tag{1.7}$$

$\square$

En el corolario, hagamos $b = 0$. Entonces, si $a > 0 \implies a > \frac{a}{2} > 0$. Entonces, en un campo ordenado no existe un número positivo menor.

Theorem 1.1.5 *Si $ab > 0$, entonces, $a > 0$ y $b > 0$ o $a < 0$ y $b < 0$.*

Demostración. Pendiente $\square$

Valor absoluto

Definition 1.1.3 *Sea $\mathbb{F}$ un campo con clase positiva P. Se define la función valor absoluto:*

$$|\cdot|:\mathbb{F}\to P\cup\{0\}\ni$$

$$|a|=\begin{cases}a & si\ a\geq 0\\ -a & si\ a<0\end{cases}$$

Theorem 1.1.6 *Related*

1. $|a|=0$ *ssi* $a=0$
2. $|-a|=|a|$
3. $|ab|=|a|\cdot|b|$
4. *Si* $c\geq 0\longrightarrow |a|\leq c$ *ssi* $-c\leq a\leq c$

Demostración. Pruebas...

1. $(\longrightarrow)$ Si $a=0\longrightarrow$ Por definición: $|a|=|0|=0$.
   $(\longleftarrow)$ A probar: Si $|a|=0\longrightarrow a=0$
   Por contrapuesta, suponga que $a\neq 0\longrightarrow a>0$ o $a<0$.
   Si $a>0\longrightarrow |a|=a>0\longrightarrow |a|\neq 0$
   Si $a<0\longrightarrow |a|=-a>0=|a|\neq 0$
   i.e. si $a\neq 0\longrightarrow |a|=0$
2. A probar: $-|a|=|a|$
   Si $a>0\longrightarrow |a|=a=|-a|$
   Si $a<0\longrightarrow |a|=-a=|-a|$
   Si $a=0\longrightarrow |0|=0=|-0|$
3. $|ab|=|a|\cdot|b|$
   Por casos:
   - Si $a>0$ y $b>0$, entonces:
   $$ab>0\longrightarrow |ab|=ab=|a|\cdot|b|$$
   - Si $a>0$ y $b<0\longrightarrow ab<0\longrightarrow |ab|=-(ab)=a\cdot(-b)=|a|\cdot|b|$
   - Si $a<0$ y $b<0\longrightarrow ab>0\longrightarrow |ab|=ab=(-a)(-b)=|a|\cdot|b|$
4. A probar: si $c\geq 0\longrightarrow |a|\leq c$ ssi $-c\leq a\leq c$
   $(\longrightarrow)$ Suponga que $|a|\leq c\longrightarrow a\leq c$ y $-a\leq c\longrightarrow a\leq c$ y $a\geq -c, \therefore -c\leq a\leq c$
   $(\longleftarrow)$ Suponga que $-c\leq a\leq c\longrightarrow -c\leq a$ y $a\leq c\longrightarrow c\geq -a$ y $a\leq c\therefore |a|\leq c$

$a\leq b \qquad -a\leq b\leftrightarrow |a|\leq b$

$\square$

1.2. 14 de enero de 2021

Remark 1.2.1 Como el valor absoluto de $|a|\geq 0\longrightarrow -|a|\leq |a|\longrightarrow -|a|\leq a\leq |a|, \forall a$

Theorem 1.2.1 (Desigualdad triangular) *Sea a y b elementos de un campo ordenado $\mathbb{F}$. Entonces $|a+b|\leq |a|+|b|$*

Demostración.

$$-|a| \leq a \leq |a| \tag{1.1}$$
$$-|b| \leq b \leq |b| \tag{1.2}$$
$$-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b| \tag{1.3}$$
$$|a+b| \leq |a|+|b| \tag{1.4}$$

□

Remark 1.2.2 Si a, b son elementos del campo ordenado F, entonces:

- $$||a|-|b|| \leq |a-b| \tag{1.1}$$

  En efecto:

  $$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b|+|b| \tag{1.2}$$
  $$\longrightarrow |a|-|b| \leq |a-b| \tag{1.3}$$

  Por otro lado:

  $$|b| = |(b-a)+a| \leq |b-a|+|a| \tag{1.4}$$
  $$\longrightarrow |b|-|a| \leq |b-a| = |a-b| \tag{1.5}$$
  $$\longrightarrow ||a|-|b|| \leq |a-b| \tag{1.6}$$

- Si sustituimos b por $-b$ en (1)

  $$\longrightarrow ||a|-|b|| \leq |a-(-b)| \tag{1.1}$$
  $$\longrightarrow ||a|-|b|| \leq |a+b| \tag{1.2}$$

- Si sustituimos en (*) b por $-b$ se tiene:

  $$|a+(-b)| \leq |a|+|-b| \tag{1.1}$$
  $$\longrightarrow |a-b| \leq |a|+|b| \tag{1.2}$$

  Conclusión:

  $$||a|-|b|| \leq |a \pm b| \leq |a|+|b| \text{ (Desigualdad triangular)} \tag{1.3}$$

Propiedad arquímedeada (o de Arquímedes)

Definition 1.2.1 *Un campo ordenado $\mathbb{F}$ es arquimedeano si $\forall x \in \mathbb{F} \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni x < n$.*

Remark 1.2.3 La clase positiva P de $\mathbb{F}$ es arquimediana si $\forall x \in \mathbb{F} \exists \mathbb{Z}^+ \ni n - x \in P$.

Ejercicios

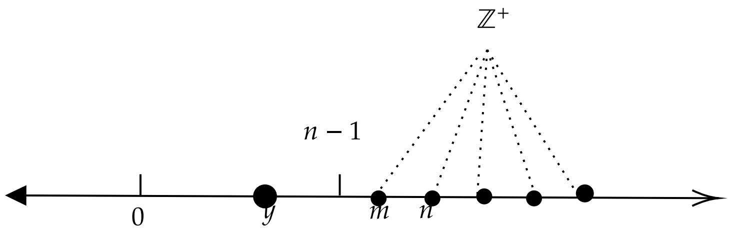
1. Compruebe que el campo $\mathbb{Q}$ es arquimeadeano.
   - ¿Depende este enunciado del orden que se defina en $\mathbb{Q}$?
2. Presente un ejemplo de un campo ordenado que sea arquimediano.

Theorem 1.2.2 *Si $\mathbb{F}$ es un campo arquimedeano, entonces:*

- *Si $y > 0$ y $z > 0 \longrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni ny > z$*
- *Si $z > 0 \longrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni 0 < \frac{1}{n} < z$*
- *Si $y > 0 \longrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni n - 1 \leq y < n$*

Demostración. ...

1. Si $y > 0$ y $z > 0 \ni x := \frac{z}{y} > 0 \longrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni n > \frac{z}{y} \longrightarrow ny > z$
2. Si $z > 0 \longrightarrow \frac{1}{z} > 0 \longrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni n > \frac{1}{z} \longrightarrow \frac{1}{n} < z \longrightarrow 0 < \frac{1}{n} < z$
3. Sea $y > 0 \longrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}^+ \ni y < m$.



Sea n el menor de tales enteros positivos m (n existe por el principio del buen orden). Entonces, $n - 1 \leq y < n$.

□

En matemática, el teorema del buen orden establece que todo conjunto puede ser bien ordenado. Un conjunto X está bien ordenado por un orden estricto si todo subconjunto no vacío de X tiene un elemento mínimo bajo dicho orden. También se conoce como teorema de Zermelo y es equivalente al axioma de elección.

Remark 1.2.4 (Cota superior más pequeña) Sea $B \subset \mathbb{Q}, B \neq \mathbb{Q}$. Entonces, B es acotado superiormente, si $k \in \mathbb{Q}$. Entonces, B es acotado superiormente si $k \in \mathbb{Q} \ni k \geq b, \forall b \in B$. (En este caso k es cota superior de B.

Example 1.2.1

1. Sea $\{a \in \mathbb{Q} \longrightarrow a < 4\}$ (este conjunto está acotado superiormente por 4 [pero también 5, 16,... son cotas superiores.]). Por otro lado, $\mathbb{N} \leq \mathbb{Q}$ no es acotado.
2. Si $B \subset \mathbb{Q}, B \neq \mathbb{Q}$ y B es acotado superiormente, entonces la cota superior más pequeña de B es un número $k \in \mathbb{Q} \ni$
   - k es cota superior.
   - si C es cota superior de B, entonces $C \geq k$.
3. Si existe la cota superior más pequeña de B, esta es única. Suponga que k_1 y k_2 son las cotas superiores más pequeñas de B. Entonces
   - Como k_1 es cota superior más pequeña y k_2 es cota superior $k_2 \geq k_1$.
   - Como k_2 es cota superior más pequeña y k_1 es cota superior $\longrightarrow k_1 \geq k_2 \longrightarrow k_1 = k_2$
4. Considere el conjunto $c = \{a \in \mathbb{Q} : a \geq 0$ y $a < 2\}$ Nótese que

C está acotado superiormente. En efecto, si $a \in C \longrightarrow a^2 < 4 \longrightarrow a < 2 \longrightarrow 2$ es cota superior de C.

5. ¿Es 2 la menor cota superior de C? No, considere: $a^2 < -\frac{a}{4} \longrightarrow a < \frac{3}{2} = 1{,}5$

Para investigar

- Cotas superiores.
- Supremo de dos conjuntos = Cota superior.

1.3. 18 de enero de 2021

Espacios métricos

Definition 1.3.1 *Espacios Metricos*

(1) Sean x un conjunto y

$$d : x \times x \longrightarrow \mathbb{R} \ni$$

$\forall a, b, c \in x$ satisface:

1. $(a, b) \geqslant 0; d(a, b) = 0$ *ssi* $a = b$.
2. $d(a, b) = d(b, a)$
3. $d(a, b) \leqslant d(a, c) + d(c, d)$, *entonces* (x, d) *es un espacio métrico y* d *es una métrica sobre* x *a una distancia sobre* x

1.4. 21 de enero de 2021

Example 1.4.1 $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^{''}}$ es métrica.
A probar

$$d_2(x, y) \leq d_2(x, z) + d_2(z, y)$$

Demostración.

$$[d_2(x,z)+d_2(z,y)]^2 = \tag{1.1}$$

$$[\sqrt{\sum(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum(z_i-y_i)^2}] \tag{1.2}$$

$$= \sum(x_i-z_i)^2+\sum(z_i-y_i)^2+2[(\sum(x_i-z_i)^2)(\sum(z_i-y_i)^2]^{1/2} \geq \tag{1.3}$$

$$\sum(x_i-z_i)^2+\sum(z_i-y_i)^2+2\sum(x_i-z_i)(z_i-y_i) \tag{1.4}$$

$$= \sum[(x_i-z_i)^2+2(x_i-z_i)(z_i-y_i)+(z_i-y_i)^2] \tag{1.5}$$

Cauchy-Schwarz $[(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2)(\sum b_i^2)]^{1/2}$

$$= \sum[(x_i-z_i)+(z_i-y_i)]^2 \tag{1.6}$$

$$\longrightarrow d_2(x,z)+d_2(z,y) \geq d_2(x,y) \tag{1.7}$$

□

Example 1.4.2 Considere: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ni$

$$d_\infty = mx\{|x_i-y_i| : i=1,\dots,n\}$$

$\longrightarrow d_\infty$ es una métrica de $\mathbb{R}^n$.

Tenemos $x=(2,3,4)$ y $y=(-1,2,0)$, entonces $d_\infty(x,y)=mx\{|2-(-1)|,|3-2|,|4-0|\}=mx\{3,1,4\}=4$

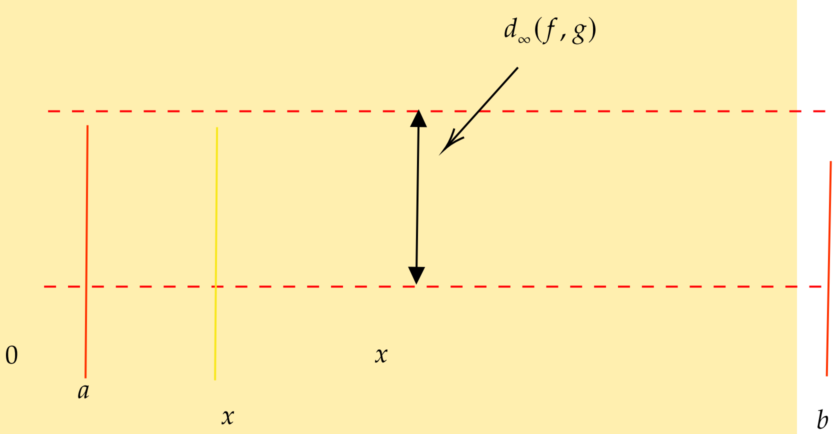
Example 1.4.3 Sea $B([a,b])$ el conjunto de funciones acotadas definidas en $[a,b]$ y de valores reales. También se denota:

$$l^\infty([a,b])=\{f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}\ni|f(x)|\leq M, M>0\}$$

Ejemplos
Dadas $f,g\in l^\infty[a,b]$

$$f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\0, x\in\mathbb{I}\end{cases}$$

Función de Dirichlet



$$\longrightarrow d_\infty(f,g) = sup_{x\in[a,b]}\{|f(x)-g(x)|\}$$

, la cual es una métrica en $l^\infty[a,b]$ y se llama métrica o distancia del supremo.

Example 1.4.4 Sea $C[a,b]$ el conjunto de funciones continuas sobre el $[a,b]$ con valores reales. Entonces, si $f,g \in C[a,b]$, se tiene: la métrica $d(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx$ sobre $C[a,b]$

Definition 1.4.1 (Norma) *Suponga que V es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}(\mathbb{R} o \mathbb{C})$ y que*

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R} \ni$$

$\forall x, y \in V$ y $\alpha \in \mathbb{F}$, se cumplen:

- $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0$ *ssi* $x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
  Entonces, $\|\cdot\|$ es una norma sobre V, y decimos que $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

Remark 1.4.1 Sea V un espacio vectorial normado. Entonces, considere:

$$d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \ni$$

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

Nótese que:

- $d(x,y) = \|x.y\| \geq 0;$
  Si $x = y \longrightarrow d(x,y) = \|x-y\| = 0$
  Si $d(x,y) = \|x-y\| = 0 \longrightarrow x - y = 0 \longrightarrow x = y$
- $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = |-1| \|y-x\| = \|y-x\| = d(y,x)$
- $d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq \|x-z\| + \|a\|$
  $d(x,y) = \|x-y\|$ es una métrica sobre V. Esta es la métrica inducida por la norma.

Topología de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$)

Definition 1.4.2 *Sea x un conjunto no vacío. Una familia de subconjunto τ de x es una topología sobre x si:*

- $\emptyset, x \in \tau$
- *Cualquier familia $\{A_i\}$ de elementos de τ es t.q. $\bigcup_i A_i \in \tau$*
- *Si $A_1, A_2 \in \tau \longrightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$. A los elementos de τ se les llama abiertos de x.*

1.5. 25 de enero de 2021

Topología de Espacios Métricos

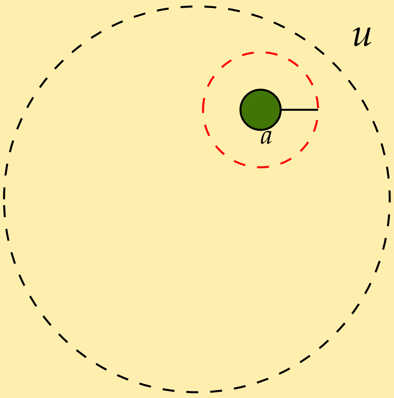
Definition 1.5.1 *Sea (M, d) un espacio métrico.*

1. *La* ***Bola abierta*** *de centro en a y radio r es: $B_r(a)\{x \in M \ni d(x, a) < r\}$*
2. *La* ***Bola cerrada*** *de centro en a y radio r es $\bar{B}_r(a) = B_r[a] = \{x \in M \ni d(x, a) \leq r\}$*

Remark 1.5.1
1. En el caso que $M = \mathbb{R}$ y $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}, \implies B_r(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : a - r < x < a + r\} = (a - r, a + r)$. Que es análogo para $[a - r, a + r]$
2. En el caso de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{C}$, las bolas se llaman discos.
3. Un subconjunto de un espacio métrico es acotado si está contenido en una bola; $A \subset M$ es acotado, si $\exists r > 0, a \in M \ni A \subset B_r(a)$. (i.e. $d(x, a) < r, \forall x \in A$).
4. Las bolas abiertas y cerradas son acotadas.

Los elementos de una topología se le llama abiertos.

Definition 1.5.2
1. *Un subconjunto u del espacio métrico M es un abierto, si $\forall a \in u \exists r > 0 \ni B_r(a) \subset u$*



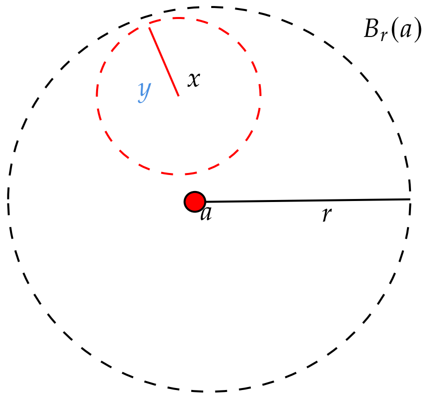
2. *La familia θ de todos los subconjuntos abiertos de M es la* ***topología de M****, y el par (M, θ) es espacio topológico asociado al métrico M.*

Remark 1.5.2 En el caso de $\mathbb{R}^n$ se dice que se tiene el espacio topológico Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Example 1.5.1 Algunos ejemplos...

1. $\mathbb{R}^n$ es abierto. En efecto, $B_1(x) \subset \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
2. $G = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ es abierto, pero $F = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ no lo es.
3. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ni x^2 + y^2 < 1\}$ es abierto y $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \ni x^2 + y^2 \leq 1\}$ no es abierto.
4. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ni 0 < x < 1, y = 0\}$ no es abierto de $\mathbb{R}^2$. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ni 0 < x < 1\}$ es abierto de $\mathbb{R}^2$
5. $\emptyset$ es abierto.

Proposition 1.5.1 *Una bola abierta es abierto.*



Demostración. $p = r - d(a, x)$

Sea $x \in B_r(a)$ y considere la bola centrada en x y de radio $r - d(a, x)$. A probar: $B_{r-d(a,x)}(x) \subset B_r(a)$.

Sea $y \in B_{r-d(a,x)}(x)$. Entonces,

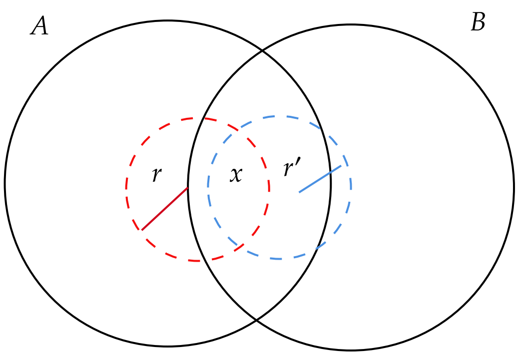
$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) \qquad < d(a, x) + [r - d(a, x)]r \tag{1.1}$$

$\implies y \in B_r(a)$ □

Theorem 1.5.2
1. *$\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son abiertos.*
2. *La intersección de dos abiertos de $\mathbb{R}^n$[a] es abierto de $\mathbb{R}^n$*
3. *La unión de cualquier colección de abiertos es un abierto de $\mathbb{R}^n$*

[a] Por inducción se deduce que la intersección de finita de abiertos es abierto.

Demostración.
1. OK.
2. Sea A y B abiertos de $\mathbb{R}^n$. A probar: $A \cap B$ es abierto. Sea $x \in A \cap B$, entonces:
   $\implies x \in A$, abierto, $\implies \exists r > 0 \ni d(x, z) < r$, para $z \in A$.
   $x \in B$, abierto, $\implies \exists r' > 0 \ni d(x, w) < r$, para $w \in B$.



$\implies$ Hagamos $r = min\{r, r'\} \implies$ si $y \in \mathbb{R} \ni d(x, y) < r \implies$ $y \in A$ y $y \in B \implies y \in A \cap B \implies A \cap B$ es abierto en $\mathbb{R}^n$

3. Sea $\{G_\alpha\}$ una colección cualquiera de abiertos de $\mathbb{R}^n$, y sea $G = \bigcup_\alpha G_\alpha$. Si $x \in G \implies x \in G_\lambda$, para algún λ. Como G_λ es abierto $\implies \exists r > 0 \ni B_r(x) \subset G_\lambda \subset$

$\{G_\alpha : \alpha \in I\}$

$\bigcup_{i=1}^n A_i$.

□

Remark 1.5.3 La intersección de una colección infinita de abiertos, no necesariamente es abierta. En efecto, considere:

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} \ni -\frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n}\}, n \in \mathbb{Z}^+$$

$$A_1 = (-1, 2)$$

$$A_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$$

$\implies A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [0, 1]$[a]

[a] ¿Por qué cerrado?

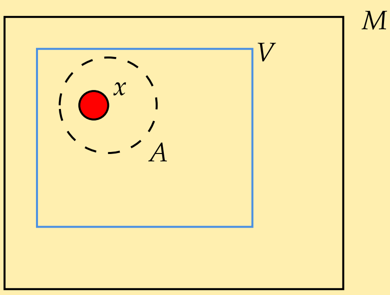
Los A_n son abiertos (por ser bolas abiertas en $\mathbb{R}$)

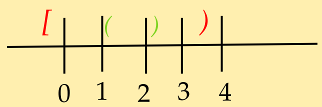
Definition 1.5.3 *Un subconjunto $\mathbb{F}$ en el métrico (M, d) es cerrado si $\mathbb{F}^c$ es abierto.* $[0, 1] = (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \implies [0, 1]$ *es cerrado.*

Example 1.5.2
1. $\emptyset$ es abierto $\implies \emptyset^c = \mathbb{R}^n$ es cerrado.
2. $\mathbb{R}^n$ es abierto $\implies (\mathbb{R}^n)^c = \emptyset$ es cerrado. $\implies \emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son abiertos y cerrados.
3. $[0, 1)$ no es abierto ni cerrado.

1.6. 28 de enero de 2021

Definition 1.6.1 *Sea $x \in M$ (espacio métrico), entonces cualquier conjunto que contiene un abierto $A \ni x \in A$ es una vecindad de x.*





Definition 1.6.2 *Un punto $x \in M$ es un punto interior de un conjunto $A \subseteq M$, si A es una vecindad de x.*

Example 1.6.1
- $[0,1]$, $x = 0$ y $x = 1$ no son puntos interiores. El resto de puntos de $[0,1)$ son puntos interiores de $[0,1]$
- $I = (0,1)$, todos son puntos interiores.
- $\mathbb{R} \cap \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

  $$\implies \mathbb{R} \cap \mathbb{Z}$$

  no tiene puntos interiores.

A cualquier conjunto no vacío se le puede dotar de una métrica. $A, d \implies d(x,y)\begin{cases}1, x \neq 1 \\ 0, x = 0\end{cases}$

Punto interior, por lo menos una bola abierta contenida en A

Definition 1.6.3 *Un punto $x \in M$ es un punto de acumulación (cluster) o punto límite de un conjunto $A \subseteq M$, si cada vecindad de x contiene al menos un punto de A diferente de x. Es decir, si*

$$B_r(x) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset, \forall r > 0$$

Example 1.6.2 $A = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\} \subseteq \mathbb{R} \implies x = 0$ es un punto de acumulación de A.

Definition 1.6.4
1. *El conjunto de todos los puntos interiores de A se llama interior de A. (Notación: A^0 o $int(A)$. Es decir,*

   $$int(A) = \bigcup_{U \subset A, u \text{ es abierto}} \mathcal{U}$$

   i.e. $int(A)$ es el abierto más grande contenido.

   Example 1.6.3
   a) $int[0,1] = (0,1)$
   b) $int \mathbb{R} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$
   c) $int \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$
   d) A es un conjunto abierto ssi $A = int(A)$

2. *La cerradura de A es el conjunto:*

   $$\bar{A} := \bigcap_{A \subset F, F \text{ cerrado}}$$

   Remark 1.6.1
   a) $\bar{A}$ es cerrado
   b) $\bar{A}$ es el cerrado más pequeño que contiene a A.
   c) A es cerrado ssi $A = \bar{A}$
   d) Si F es un cerrado que contiene a $A \implies A \subset \bar{A} \subset F$

3. *La frontera de A (denotada $bd(A)$ o ∂A) Se define:*

   $$\partial A := \bar{A} - int(A)$$

   Example 1.6.4 Sea$I = [0,1] \implies \bar{I} = [0,1] \implies (0,1) \implies \partial A = \bar{I} - int(A) = \{0,1\}$

4. *El conjunto de todos los puntos de acumulación de un conjunto A se llama conjunto derivado de A. Notación: A'*

Proposition 1.6.1
1. *Si $A \subset B \implies A' \subset B'$*

Demostración. Sea $x \in A'$ (i.e. x es un punto de acumulación de A). $\implies \forall$ abierto $G \ni x \in G$, se tiene que

$$(G - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

Como $A \subset B \implies (G - \{x\} \cap A \subset (G - \{x\}) \cap B$

$$\implies \emptyset \neq (G - \{x\}) \cap A \subset (G - \{x\}) \cap B$$

$$(G - \{x\}) \cap B \neq, \forall G \ni x \in G \implies x \in B'$$

$\square$

$A \subset B$
$C \subset D$
$\implies A \cap C \subset B \cap D$

2. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

Demostración.
- (De ida) Sabemos que $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$ $\implies A' \subset (A \cup B)'$ y $B' \subset (A \cup B)'$

$$\implies A' \cup B' \subset (A \cup B)'$$

- (De regreso) $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$
$\longleftrightarrow$ Si $x \in (A \cup B)' \implies x \in A' \cup B'$
$\iff$ Si $x \notin A' \cup B' \implies x \notin (A \cup B)'$
$\implies$ Como $x \notin A' \implies \exists G$, abierto, tal que $G \cap A \subset \{x\}$[a]
Como $x \notin B' \implies \exists H$, abierto, tal que $H \cap A \subset \{x\}$. Nótese que $G \cap H$ es abierto. Entonces, $x \in G \cap H$, y $(G \cap H) \cap (A \cup B) = (G \cap H \cap A) \cup (G \cap H \cap B) \subset \{x\} \cup \{x\} = \{x\}$
$\implies x \notin (A \cup B)' \implies$ si $x \notin A' \cup B' \implies x \in (A \cup B)' \implies (A \cup B) \subset A' \cup B' \implies (A \cup B)' = A' \cup B'$

$\square$

[a] $G \cap A = \emptyset$ o $G \cap A = \{x\}$ (no)

1.7. 1 de febrero de 2021

Definition 1.7.1
- *Bola abierta* $Br(a) = \{x \in M \ni d(x, a) < r\}, \quad r > 0$
- *Abierto:* $Br()$ *o* $\bigcup, \bigcap$
- *Vecindad* x *abierta:* $A \ni A$

Proposition 1.7.1 *A es cerrado ssi* $A' \subset A$

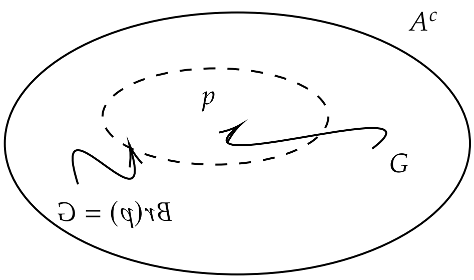
Un conjunto es cerrado ssi contiene a sus puntos de acumulación.

Demostración.
- $(\longrightarrow)$ Sea A cerrado y sea $p \notin A \implies p \in A^c$, pero A^c es un abierto $\ni p \in A^c$ y $A \cup A^c = \emptyset \implies p \not\in A' \implies A \implies A' \subset A$
- $(\longleftarrow)$ A probar: $A' \subset A \implies A$ es cerrado ($\iff A^c$ es abierto). Suponga que $A' \subset A$ y sea $p \in A^c \implies p \notin A' \implies \exists G$, abierto, tal que: $p \in G$ y

$$(G - \{p\}) \cap A = \emptyset$$

Como $p \notin A \implies G \cap A = \emptyset \implies G \subset A^c$. Entonces si $p \in A^c \exists$ abierto $G \ni p \in G \subset A^c \implies A^c$ es abierto.

A probar: $A' \subset A \iff$ si $x \in A' \implies x \in A \iff$ si $x \notin A \implies x \notin A'$



□

Proposition 1.7.2 *Si F es un superconjunto cerrado de cualquier conjunto A, entonces $A' \subset F$*

Demostración. Sabemos que F es cerrado y $A \subset F$. Como $A \subset F \implies A' \subset F'$. Como F es cerrado, entonces $F' \subset F \implies A' \subset F$ □

Proposition 1.7.3 *$A \cup A'$ es cerrado.*

Demostración. Se asume que A' que significa el conjunto de elementos limitantes con A. Para un conjunto B, Se denota cl (B) como cerradura. Desde que cl $(A \cup A') \supseteq$ cl$(A) \supseteq A'$, miramos

$$A \cup A' \subseteq \mathrm{cl}\,(A \cup A')$$

entonces, se necesita probar que $A \cup A'$ es cerrado. Suponemos x es un punto límite de $A \cup A'$. Si $x \in A$, entonces no hay nada que probar, entonces suponemos $x \notin A$. Decimos que U es un vecindario de x; entonces existe $y \in A \cup A'$, $y \neq x$, con $y \in A \cup A'$. Si $y \in A$, entonces está comprobado. De otra forma $y \in A' \setminus A$; si tomamos un vecindario V de y, $V \subseteq U$; entonces hay $z \in A \cap V$, $z \neq y$; por lo que $z \in A \cap U$, $z \neq x$ □

Proposition 1.7.4 $\bar{A} = A \cup A'$

Demostración.
- ($\supseteq$) Sabemos que $A \subset \bar{A}$. Por otra parte, $\implies A' \subset (\bar{A})' \implies \bar{A} \implies A' \subset \bar{A} \implies A \cup A' \subset \bar{A}$.
- ($\subseteq$) A probar: $\bar{A} \subset A \cup A'$. Entonces, $A \subset A \cup A' \implies A \subset \bar{A} \subset A \cup A'$

$A \subset B \implies A' \subset B'$

□

Proposition 1.7.5 *Si $A \subset B \implies \bar{A} \subset \bar{B}$*

Demostración. Si $A \subset B \implies A' \subset B' \implies A \cup B' \subset B \cup B' \implies \bar{A} \subset \bar{B}$ □

Proposition 1.7.6 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Demostración.

- ($\subseteq$) A probar $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$. Sabemos que $A \subset \bar{A}$ y $B \subset \bar{B} \implies A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B} \implies A \cup B \subset \overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$
- $A \subset A \cup B \implies \bar{A} \subset \overline{A \cup B}$
  $B \subset A \cup B \implies \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$
  $\implies \bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B} \cup \overline{A \cup B} \implies \bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$

□

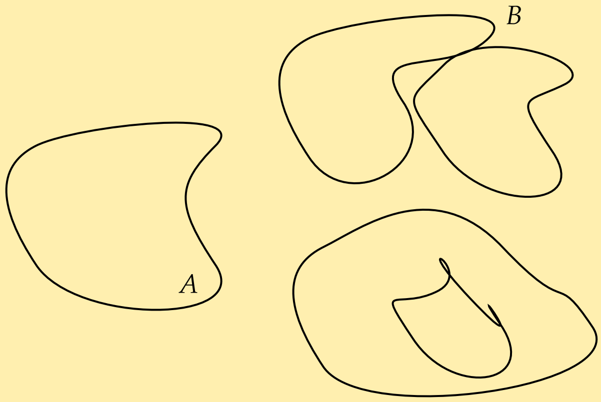
Remark 1.7.1 (Axiomas de Kuratowski)

- $K_1 : \bar{\emptyset} = \emptyset$
- $K_2 : A \subset \bar{A}$
- $K_3 : \bar{\bar{A}} = \bar{A}$
- $K_4 : \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Propone: Construir una topología de cerrados a partir de $k_1 - k_4$

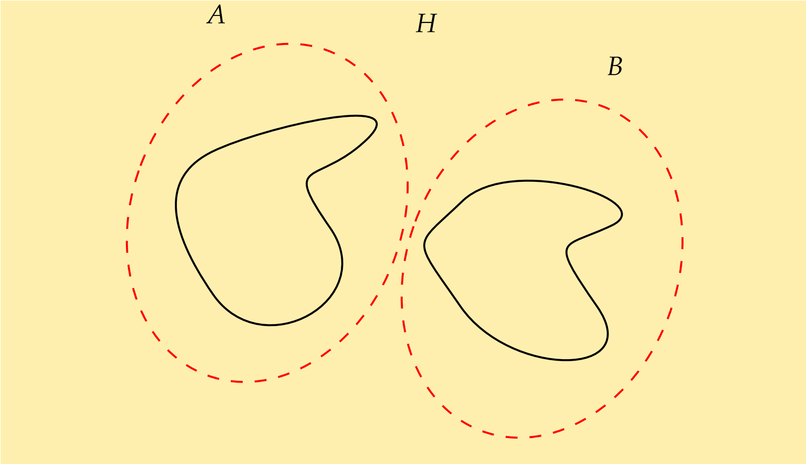
Definition 1.7.2

$$\frac{f(A)}{f(C)}$$

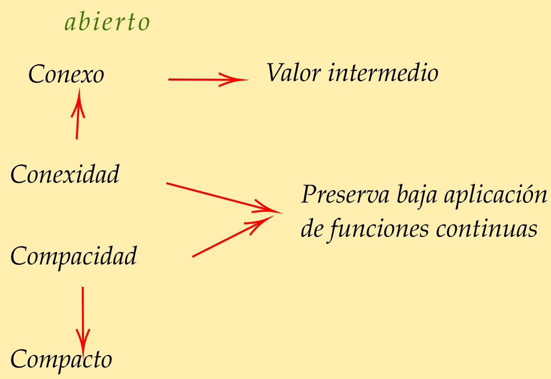


A y C son conexos
B es disconexo

*Un subconjunto H del espacio métrico M es **disconexo**, si existen abiertos A y* $B \ni A \cap H \neq \emptyset, B \cap H \neq \emptyset, (A \cap H) \cap (B \cap H) = \emptyset$ *y* $(A \cap H) \cup (B \cup H) = H$

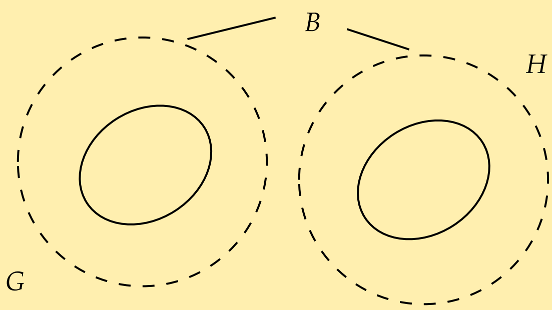


1.8. 4 de febrero de 2021



Definition 1.8.1 *abierto*

Remark 1.8.1 A es conexo, si A no es disconexo.
Disconexo:



Si existen G y H (Disconexión de B) $\ni$

1. $G \cap B \neq \emptyset$ y $H \cap B \neq \emptyset$
2. $(G \cap B) \cap (H \cap B) = \emptyset$
3. $(G \cap B) \cup (H \cap B) = B$

Example 1.8.1 1. $\mathbb{Z}$ es disconexo en $\mathbb{R}$. En efecto, considere:

$$G = (-\infty, \frac{1}{2}) \qquad H = (\frac{1}{2}, \infty)$$

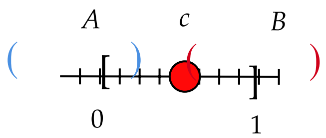
$\implies$ G y H son una disconexión de $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

2. $\mathbb{Q}$ es disconexo en $\mathbb{R}$. En efecto, sea la disconexión:

$$G = (-\infty, \pi) \qquad H = (\pi, \infty)$$

Theorem 1.8.1 $I = [0, 1]$ *es conexo en* $\mathbb{R}$.

Demostración. Supóngase por el absurdo que A y B son una disconexión de I; i.e., $A \cap I$ y $B \cap I$ son no vacíos, disjuntos y su unión es I.



- Suponga que $1 \in B$. Como I es acotado. $\implies$ $A \cap I$ y $B \cap I$ también son acotados. Entonces, por el principio del supremo, $\exists c = sup(A \cap I) > 0$ y $c \in A \cup B$
- Si $c \in A \implies c < 1$ $\implies$ como A es abierto $\implies \exists B_r(c) \subset A \implies \exists \alpha \in A \ni c < \alpha (\rightarrow\leftarrow) \implies c \notin A$
- Si $c \in B \implies$ como B es abierto. $\implies \exists c_1 \in B \ni c_1 < c$ y es tal que $[c_1, c] \cap (A \cap i) = \emptyset$ (i.e. c_1 es una cota superior de $A \cap I$ y es menor que c)$(\rightarrow\leftarrow)$. Entonces, que $c \notin B(\rightarrow\leftarrow)$.

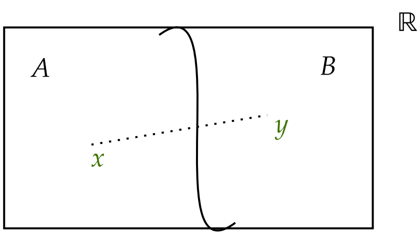
$\implies$ $[0, 1]$ es conexo. □

Corollary 1.8.2 $(0, 1)$ *es conexo.*

Si x es un intervalo $\implies$ x es conexo.

Theorem 1.8.3 $\mathbb{R}^n$ *es conexo.*

Demostración. Supóngase, por el absurdo, que A y B son una disconexión de $\mathbb{R}^n$



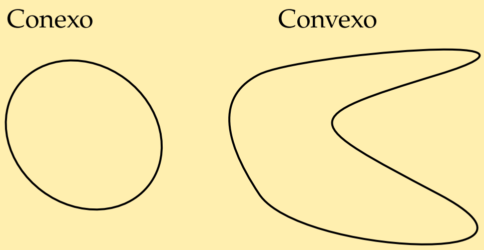
Sean $x \in A$ y $y \in B$, y considere el segmento de recta que une x con y:

$$S = \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\}$$

Sean:

$$A_1 = \{t \in \mathbb{R} \ni (1-t)x + ty \in A\}$$
$$B_1 = \{t \in \mathbb{R} \ni (1-t)x + ty \in B\}$$

$\implies A_1 \cap B_1 = \emptyset(\rightarrow\leftarrow)$, ya que A_1, B_1 serían una disconexión de $[0,1]$. $[0,1]$
Entonces, $\mathbb{R}^n$ es convexo. □



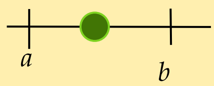
Remark 1.8.2

Theorem 1.8.4 *Los únicos conjuntos abiertos y cerrados de $\mathbb{R}^n$ son $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$*

Demostración. Supóngase, por el absurdo, que $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$ y $A \neq \mathbb{R}^n$, es abierto y cerrado de $\mathbb{R}^n$. Como A es cerrado $\implies A^c = B$ es abierto. $\implies A \neq \emptyset \implies B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = \mathbb{R}^n$. $\implies A$ y B forman una disconexión de $\mathbb{R}^n(\rightarrow\leftarrow)$. $\implies$ los únicos abiertos y cerrados de $\mathbb{R}^n$ son $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ □

Theorem 1.8.5 *Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es conexo ssi es un intervalo.*

Theorem 1.8.6
- *($\leftarrow$) A probar cada intervalo de $\mathbb{R}$ es un conexo (ver prueba de: $[0,1]$ es conexo=.*
- *($\rightarrow$) Sea $C \subset \mathbb{R}$, conexo. A probar: C es un intervalo. Sean $a, b \in C \ni a < b$ y sea $x \in \mathbb{R} \ni a < x < v$. A probar: $x \in C$*



Si $x \notin C \implies (-\infty, c)$ y (x, ∞) formar una disconexión de c.

1.9. 8 de febrero de 2021

Compactos

Definition 1.9.1 *Sea A un subconjunto del espacio métrico M. Decimos que* *la familia de abiertos $\{G_1\}_{i\in I}$ de M es una cubierta de A, si*

$$A \subset \bigcup_{i\in I} G_i$$

Remark 1.9.1 En el caso de M, la cubierta abierta debe cumplir: $M = \bigcup_{i\in I} G_i$

Definition 1.9.2 *Un subconjunto A del espacio métrico M es* ***compacto*** *si cada abierta de A tiene subcubierta finita .*

Sigue cubriendo al conjunto A

Example 1.9.1 Sea $k = \{x_1, ..., x_n\}$ un subconjunto finito de $\mathbb{R}^n$ y sea $G = \{G_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de k (i.e. $\bigcup_{i\in I} G_i \supset k$. Dado que k es finito, basta un número finito de los G_i para cubrir a $k \implies k$ es compacto.

Cerrado y acotado en $\mathbb{R}$ es compacto. En otro caso es necesario investigar

Example 1.9.2 Sea $H = [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ no es compacto. En efecto, sea $G_n = (-1, n), n \in \mathbb{Z}^+$.

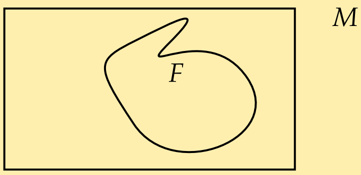
$\implies G = \{G_n\}$ es una cubierta abierta de H. Suponga que $\{G_{n_1}, G_{n_2}, ..., G_{n_k}\}$ es una subcolección de G. Sea $M = max\{n_1, n_2, ..., n_k\}$. Entonces, $G_{n_i} \subseteq G_M, i = 1, ..., k \implies G_M = \bigcup_{i=1}^{k} G_{n_i}$, pero en particular, $M \notin \bigcup_{i=1}^{k} G_{n_i} \implies \{G_{n_1}, ..., G_{n_k}\}$ no cubre a H. Entonces, G no tiene cubierta finita para H. Implica, H no es compacto.

Example 1.9.3 Sea $H = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ y considere:

$$G_n(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}), \quad n > 2$$

$\implies G = \{G_n\}$ es una cubierta abierta de H, pero G no tiene subcubierta finita para $H \implies H$ no es compacta.

Proposition 1.9.1 *Sea F un subconjunto cerrado de un espacio métrica compacto M. Entonces, F es compacto.*



Demostración. Sea $G = \{G_i\}$ una cubierta abierta de F. Como F^c es abierto $\implies (\bigcup_{i\in I} G_i) \cup F^c$ es cubierta abierta de M (i.e $(\bigcup_{i=I} G_i) \cup F^c = M$). Entonces, como M es compacto, existe una subcubierta finita de $M, \{G_{i_1}, G_{i_2}, ..., G_{i_n}, F^c\}$, tal que:

$$G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup ... \cup G_{i_n} \cup F^c = M$$

$\implies \{G_{i_1}, ..., G_{i_n}$ es una subcubierta finita para $F \implies$ F es compacto.

□

Theorem 1.9.2 (Heine-Borel) *Un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ es compacto ssi es cerrado y acotado.*

Example 1.9.4
- (0,1) no es compacto, ya que no es cerrado.

0,1 es compacto, por Heine-Borel.

Remark 1.9.2
1. Si $S \subseteq \mathbb{R}$, compacto, $\implies$ S es cerrado y acotado.
2. Si $S\mathbb{R}$ es cerrado y acotado $\implies$ S es secuencialmente compacto $\implies$ S es compacto $\implies$ S es compacto.

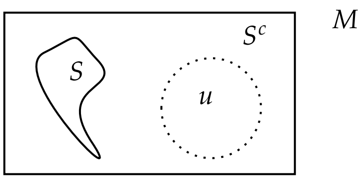
Teorema de Tíkonov (Tychonoff)- Producto de una colección cualquiera de conjuntos compactos es compacto.

Remark 1.9.3 Un espacio métrico M es de Lindelöf si cada cubierta abierta de M tiene una subcubierta contable. Un subconjunto $A \subseteq M$ es un

Theorem 1.9.3 *Si $S \subseteq \mathbb{R}$ es compacto, entonces S es cerrado y acotado.*

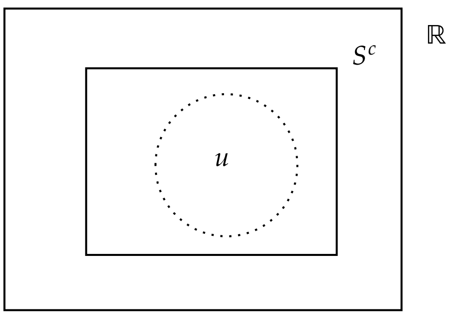
Demostración. A probar: S es acotado,
Considere, para $m \in \mathbb{Z}^+$, $H_m = (-m, m)$. Como cada H_m es abierto y $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} H_m = \mathbb{R} \implies \{H_m : m \in \mathbb{Z}^+\}$ es cubierta abierta de S. Como S es compacto $\implies$ Hay una subcubierta finita $\{H_{m_1}, \ldots, H_{m_n}\}$ para S, i.e $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_{m_n}) = H_m = (-M, M) \implies M$ es acotado.

A probar: S es cerrado. $\leftrightarrow$ S^c es abierto.



Sea $u \in S^c$ y considere:

$$G_n = \{y \in \mathbb{R} : |y - u| > 1/n\}, n \in \mathbb{Z}^+$$



Note que los G_n son abiertos y $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbb{R} - \{u\}$. Como $u \notin S \implies S \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. $\implies \{G_n\}$ es una cubierta abierta d S. Como S es compacto $\implies \exists m \in \mathbb{Z}^+ \ni S \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} G_n = G_m \implies S \cap (u - 1/m, u + 1/m) = \emptyset \implies (u - 1/m, u + 1/m) \subset S^c \implies$ es abierto $\implies S$ es cerrado. $\square$

Remark 1.9.4 ¿Por qué Heine-Borel no aplica en un espacio métrico cualquiera? ¿Se cumple alguna de las implicaciones?

Cosas interesantes...

Letras Griegas con pronunciación

Character	Name	Character	Name
α	alpha *AL-fuh*	ν	nu *NEW*
β	beta *BAY-tuh*	ξ, Ξ	xi *KSIGH*
γ, Γ	gamma *GAM-muh*	o	omicron *OM-uh-CRON*
δ, Δ	delta *DEL-tuh*	π, Π	pi *PIE*
ϵ	epsilon *EP-suh-lon*	ρ	rho *ROW*
ζ	zeta *ZAY-tuh*	σ, Σ	sigma *SIG-muh*
η	eta *AY-tuh*	τ	tau *TOW (as in cow)*
θ, Θ	theta *THAY-tuh*	υ, Υ	upsilon *OOP-suh-LON*
ι	iota *eye-OH-tuh*	ϕ, Φ	phi *FEE, or FI (as in hi)*
κ	kappa *KAP-uh*	χ	chi *KI (as in hi)*
λ, Λ	lambda *LAM-duh*	ψ, Ψ	psi *SIGH, or PSIGH*
μ	mu *MEW*	ω, Ω	omega *oh-MAY-guh*