Universidad del Valle de Guatemala

MM2034 - 1 semestre - 2021

Licenciatura en matemática aplicada

ANÁLISIS DE VARIABLE REAL 1

Catedrático: Dorval Carías

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay
Carné: 19857
Correo: rom19857@uvg.edu.gt

3 de julio de 2021

Índice

Parte I

Reales

1. Propiedades de $\mathbb{R}$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un campo.

Definición 1. *Un conjunto no vacío P de elementos de un campo $\mathbb{F}$ es una clase positiva si cumple:*

1. *Si $a, b \in P \implies a + b \in P$.*
2. *Si $a, b \in P \implies a \cdot b \in P$.*
3. *Si $a \in \mathbb{F}$, entonces:*
   a) *$a \in P$ o $a = 0$ o $-a \in P$. (Ley de tricotomía)*

NOTA. *Sea $N = \{-a : a \in P\}$ la clase negativa relativa a P. $\implies \mathbb{F} = P \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$.*

Ejemplo 1. 1. *$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un campo. Sea $P\{a/b \in \mathbb{Q} \ni a, b \in \mathbb{Z}^+\} \implies P$ es una clase positiva de $\mathbb{Q}$.*

2. *Sea $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, en las operaciones:*

+	0	1
0	0	1
1	1	0

*	0	1
0	0	0
1	0	1

$\implies$ *$(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ es un campo.*

a) *Sea* $P = \{0\}$*. Cumple las propiedades: 1, 2. No cumple 3.* $\implies$ P *no es una clase positiva de* $\mathbb{Z}_2$*.*

b) *Sea* $P' = \{1\}$*. No cumple el 1.* $\implies$ P' *no es clase positiva de* $\mathbb{Z}_2$*.*

Definición 2. *Sea* P *la clase positiva del campo* $\mathbb{F}$*, entonces se dice que* $\mathbb{F}$ *está ordenada por* P *(o que* $\mathbb{F}$ *es un campo ordenado).*

1. *Si* $a \in P$*, se dice que* a *es positivo. Notación* $a > 0$*.*

2. *Si* $a \in P$ *o* $a = 0$*, se dice que* a *es no negativo. Notación* $a \geq 0$*.*

3. *Si* $a, b \in \mathbb{F}$ *y* $a - b \in P$*, se escribe* $a > b$*.*

4. *Si* $a, b \in \mathbb{F}$ *y* $a - b \in P$ *o* $a - b = 0$*, se escribe* $a \geq b$*.*

Proposición 1. *Otras propiedades:*

1. *Si* $a > b$ *y* $b > c$ $\implies$ $a > c$*.*

2. *Si* $a, b \in \mathbb{F}$*, entonces*

   a) $a > b$ *o* $a = b$ *o* $b > a$*.*

3. *Si* $a \geq b$ *y* $b \geq a$ $\implies$ $a = b$*.*

Proposición 2. *Sea* $\mathbb{F}$ *un campo ordenado:*

1. *Si* $a \neq 0$ $\implies$ $a^2 > 0$*.*

2. *1>0.*

3. *Si* $n \in \mathbb{Z}^+$ $\implies$ $n > 0$*.*

Teorema 1. *Sean* $a, b, c \in \mathbb{F}$*.*

1. *Si* $a > b$ $\implies$ $a + c > b + c$*.*

2. *Si* $a > b$ *y* $c > d$ $\implies$ $a + c > b + d$*.*

3. *Si* $a > b$ *y* $c > 0$ $\implies$ $ac > bc$*.*

4. *Si* $a > b$ *y* $c < 0$ $\implies$ $ac < bc$*.*

5. *Si* $a > 0 \implies a^{-1} > 0$.

6. *Si* $a < 0 \implies a^{-1} < 0$.

Corolario 1.1. *Si* $a > b \implies a > \frac{a+b}{2} > b$.

NOTA. *Hagamos* $b = 0$. *Entonces, si* $a > 0 \implies a > \frac{a}{2} > 0$. *Entonces, en un campo ordenado no existe un número positivo menor.*

Teorema 2. *Si* $ab > 0$, *entonces,* $a > 0$ *y* $b > 0$ *o* $a < 0$ *y* $b < 0$.

Definición 3. *Sea* $\mathbb{F}$ *un campo una clase positiva* P. *Se define la función valor absoluto:*

$$|\cdot| : \mathbb{F} \to P \cup \{0\} \ni$$

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0. \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Teorema 3. 1. $|a| = 0 \iff a = 0$.

2. $|-a| = |a|$.

3. $|ab| = |a| \cdot |b|$.

4. *Si* $c \geq 0 \implies |a| \leq c \iff -c \leq a \leq c$.

NOTA. *Como* $|a| \geq 0 \implies |a| \leq |a| \implies -|a| \leq a \leq |a|, \forall a$.

Teorema 4 (Desigualdad triangular)**.** *Sean* a *y* b *elementos de un campo ordenado* $\mathbb{F}$. *Entonces,*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

NOTA (Desigualdad triangular)**.** *Si* a, b *son elementos del campo ordenado* $\mathbb{F}$, *entonces:*

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

Definición 4. *Un campo ordenado* $\mathbb{F}$ *es arquimediano si* $\forall x \in \mathbb{F}\ \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni x < n$.

NOTA. *La clase positiva* P *de* $\mathbb{F}$ *es arquimediana si* $\forall x \in \mathbb{F}\ \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni n - x \in P$.

Teorema 5. *Si* $\mathbb{F}$ *es un campo arquimediano, entonces:*

1. *Si* $y > 0$ *y* $z > 0 \implies \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni ny > z$.

2. *Si* $z > 0 \implies \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni 0 < 1/n < z$.

3. *Si* $y > 0 \implies \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni n - 1 \leq y < n$.

1.1. Supremo e Ínfimo

NOTA (Cota superior más pequeño). *Sea $B \subseteq \mathbb{Q}$, $B \neq \mathbb{Q}$. Entonces, B es acotado superiormente si $k \in \mathbb{Q} \ni k \geq b$, $\forall b \in B$. En este caso k es cota superior de B.*

Ejemplo 2. *Considérese*

1. *Sea $\{a \in \mathbb{Q} \ni a < 4\}$. Este conjunto está acotado superiormente por 4 (pero también 5, 6,... son cotas superiores). Por otro lado, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ no es acotado.*

2. *Si $B \subseteq \mathbb{Q}, B \neq \mathbb{Q}$ y B es acotado superiormente, entonces la cota superior más pequeña de B es un número $k \in \mathbb{B}$ es un número $k \in \mathbb{Q} \ni$*

   a) *K es cota superior.*

   b) *Si c es cota superior de B, entonces $c \geq k$.*

3. *Si existe la cota superior más pequeña de B, esta es única. Suponga que k_1 y k_2 son cotas superiores más pequeñas. Entonces:*

   a) *Como k_1 es cota superior más pequeña y k_2 es cota superior $\implies k_2 \geq k_1$.*

   b) *Como k_2 es cota superior más pequeña y k_1 es cota superior. $\implies k_1 \geq k_2 \implies k_1 = k_2$.*

4. *Considérese el conjunto*

$$C = \{a \in \mathbb{Q} : a \geq 0 \text{ y } a^2 < 2\}.$$

Nótese que C está acotado superiormente. En efecto, si $a \in C \implies a^2 < 4 \implies a < 2 \implies 2$ es cota superior de C.

Ejemplo 3. *Ejemplos*

a) *¿Es 2 la menor cota superior de C? No, considere $a^2 < 9/4 \implies a < 3/2 = 1{,}5$.*

b) *Los números racionales: 2, 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 1.41422, 1.41214,... son cotas superiores de C.*

c) *C no tiene en $\mathbb{Q}$ una cota superior más pequeña. Nótese que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, debería ser la cota superior más pequeña de C.*

Definición 5. *El conjunto de números reales $\mathbb{R}$ es un campo ordenado que satisface:*

P1 $\forall x > 0$ *en* $\mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni x < n > y$.

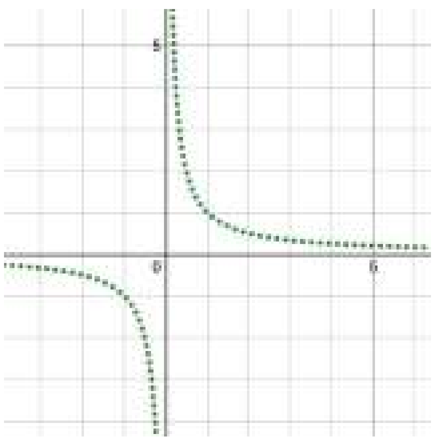
P2 *Cada subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que es acotado superiormente tiene una* $\underbrace{\textit{cota superior más pequeña}}_{\textit{supremo}}$ *en $\mathbb{R}$.*

NOTA. *Cada subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que es acotado inferiormente tiene una cota inferior más grande (**ínfimo**). En efecto si A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente, considere $-A$ y aplique el axioma del supremo.*

1. *Supremo de A:* $\sup A$.
2. *Ínfimo de A:* $\inf A$.

Ejemplo 4.

Considere $\left(\frac{1}{n}\right)$.



$\implies \inf\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Ejemplo 5.

$\sup[a, b] = b; \text{ínf}[a, b] = a.$

$\sup(a, b) = b; \text{ínf}(a, b) = a.$

NOTA. *1. Si el* $\sup A \in A \implies \sup A$ *es el máximo de* A.

2. Si el $\text{ínf}\, A \in A \implies \text{ínf}\, A$ *es el mínimo de* A.

Convenciones:

1. Si A no está acotada superiormente, entonces escribimos

$$\sup A = \infty$$

2. Si A no está acotado inferiormente, entonces escribimos

$$\text{ínf}\, A = -\infty$$

3. Si $A = \emptyset$ (Recordemos que cada número real es cota superior e inferior de $\emptyset$), se escribe:

$$\sup \emptyset = -\infty \text{ e } \text{ínf}\, \emptyset = \infty$$

NOTA. *En todo caso, se dice que el* $\sup A$ *e* $\text{ínf}\, A$ *existen si son un número finito.*

1.2. Espacios métricos

Definición 6. *Sea X un conjunto y*

$$d : X \times X \to \mathbb{R} \ni$$

$\forall a, b, c \in X$ *satisface:*

1. *Positividad.* $d(a,b) \geq 0$; $d(a,b) = 0 \iff a = b$.

2. *Simetría.* $d(a,b) = d(b,a)$.

3. *Desigualdad triangular.* $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,d)$, *entonces* (X,d) *es un espacio métrico y* d *es una métrica sobre* X *o una distancia sobre* X.

Proposición 3 (Reordenamiento de la desigualdad triangular)**.** *Si* (X,d) *es un espacio métrico y si* $a, b, c \in X$, *entonces:*

$$|d(a,b) - d(b,c)| \leq d(a,c).$$

Ejemplo 6. 1. *Sea* $X = \mathbb{R}$ *y* $d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni d_1(a,b) = |a-b|$. $\implies$ $(\mathbb{R}, d_1)$ *es un espacio métrico. En efecto, sean* $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Entonces:*

a) *Por definición,* $d_1(a,b) = |a-b| \geq 0$.

1) *Si* $d(a,b) = |a-b| = 0 \implies a - b = 0 \implies a = b$.

2) *Si* $a = b \implies d(a,b) = |a-a| = |0| = 0$.

b) $d(a,b) = |a-b| = |-(a-b)| = |b-a| = d(b,a)$.

c) $d(a,b) = |a-b| = |(a-c)+(c-d)| \leq |a-c| + |c-b| = d(a,c) + d(c,b)$.

2. *Cada conjunto admite una métrica. Sea $X \neq \emptyset$, entonces se define la métrica discreta así:* $d : X \times X \to \mathbb{R} \ni$

$$d(a,b) = \begin{cases} 1, & a \neq b \\ 0, & a = b \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ (X, d) *es espacio métrico.*

Ejemplo 7 (Métrica Euclidiana en $\mathbb{R}^n$)**.** *Sea* $X = \mathbb{R}^n$ *y sean:* $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$*. Definamos:* $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ni$

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

$\Longrightarrow$ $(\mathbb{R}^n, d_2)$ *es métrica.*

Lema 6. *Sean* $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$*, números reales cualquiera. Entonces, se cumplen:*

1. *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$
$$(\overline{a} \cdot \overline{b}) \leq \|\overline{a}\| \cdot \|\overline{b}\|$$

2. *Desigualdad de Minkowski*

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2\right]^{1/2} \leq \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right] + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right]^{1/2}$$

Ejemplo 8. *Considere* $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ni$

$$d_\infty(x,y) = \text{máx}\left\{|x_i - y_i| : i = 1, \cdots, n\right\}.$$

$\Longrightarrow$ d_∞ *es una métrica en* $\mathbb{R}^n$*.*

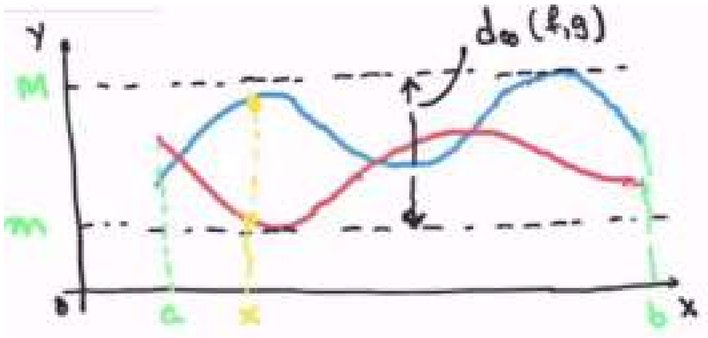
Ejemplo 9. $x = (2,3,4)$ *y* $y = (-1,2,0)$.

$$\implies d_\infty(x,y) = \text{máx}\{|2-(-1)|, |3-2|, |4-0|\} = \text{máx}\{3,1,4\} = 4.$$

Ejemplo 10. *Sea* $B([a,b])$ *el conjunto de funciones acotadas definidas en* $[a,b]$ *y de valores reales. También se denota:*

$$l^\infty([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ni |f(x)| \le M, M > 0\}$$

. $\implies$ *Dadas* $f, g \in l^\infty[a,b]$.



$\implies d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|\}$, *la cual es una métrica en* $l^\infty[a,b]$ *y se llama métrica o distancia del supremo.*

Ejemplo 11. *Sea* $C[a,b]$ *el conjunto de funciones continuas sobre* $[a,b]$ *con valores reales. Entonces, si* $f, g \in C[a,b]$, *se tiene la métrica:*

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

sobre $C[a,b]$.

Definición 7. *Suponga que* V *es un espacio vectorial sobre el campo* $\mathbb{F}$ *(*$\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*) y que:*

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R} \ni$$

$\forall x, y \in V$ *y* $\alpha \in \mathbb{F}$ *se cumplen:*

1. $\|x\| \ge 0, \|x\| = 0 \iff x = 0$.

2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Entonces, $\|\cdot\|$ *es una norma sobre* V *y decimos que* $(V, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado.*

NOTA. *Sea* V *un espacio vectorial normado. Entonces, considere:*

$$d : V \times V \to \mathbb{R} \ni$$

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Nótese que:

1. $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$*;*

   a*)* *Si* $x = y \implies d(x,y) = \|x-y\| = 0$.

   b*)* *Si* $d(x,y) = \|x-y\| = 0 \implies x-y=0 \implies x=y$.

2. $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = |-1| \cdot \|y-x\| = \|y-x\| = d(y,x)$.

3. $d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq \|x- <\|+|z-y\| = d(x,z)+d(z,y)$.
$\implies d(x,y) = \|x-y\|$ *es una métrica sobre* V*. Esta es la métrica inducida por la norma.*

1.3. HT1

Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada
14 de febrero de 2021
Rudik Roberto Rompich - Carné: 19857

Análisis de Variable Real 1 - Dorval Carías

HT 1 - Revisión

1. **Muestre que el campo $\mathbb{Q}$ de los racionales es arquimediano.**

Demostración. Por definición, un campo ordenado $\mathbb{F}$ tiene la propiedad arquimediana si $\forall x \in \mathbb{F} \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni x < n$. Entonces, sea $\mathbb{Q}$ el campo de los racionales, es decir $\exists$ unos elementos m y $n \ni \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ en donde $m \neq 0$ y $m, n \in \mathbb{Z}$. Entonces, se deben cumplir, según el Teorema 1.4.2 de Abbott (2012):

$$x \in \mathbb{Q}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ que satisfaga la desigualdad } n > x \tag{1}$$

$$\text{Dado cualquier número racional } y > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ que satisfaga } \frac{1}{n} < y \text{ o } 1 < ny \tag{2}$$

Para (1), supóngase $x = \frac{n}{m}$, entonces existen dos casos:

1. $(x < 0)$, se cumple la propiedad (1) en todos los casos por definición.
2. $(x \geq 0)$ Como sabemos $x = \frac{n}{m}$ y $m \neq 0$. Entonces, por definición de números racionales, se debe cumplir $m \geq 1$ en cualquier caso.

Para (2), si tomamos $y = \frac{n}{m} \implies m \cdot y = n \implies$ i.e. $n = my \geq y$ (como $m \geq 1$) $\implies n + 1 > y$, cumpliendo la propiedad (2).

$\therefore$ el campo $\mathbb{Q}$ es arquimediano. □

1. **¿Depende este resultado del orden definido en $\mathbb{Q}$?**

   En la argumentación de la prueba se asumió que $\mathbb{Q}$ era un campo ordenado. Por lo cual, se determinó que $\mathbb{Q}$ es un campo arquimediano. Sin embargo, no depende del orden definido, ya que solamente existe una relación que ordena a $\mathbb{Q}$ y que únicamente en esa relación puede ser ordenada; como se observa en la demostración anterior.

2. **Presente un ejemplo de un campo ordenado no arquimediano.**

Algunos ejemplos de campos no arquimedianos pero sí ordenados son: campo de Levi-Civita , los números hiperreales, números surreales, el campo de Dehn, y el campo de las funciones racionales. De los cuales, se consideró el campo de las *funciones racionales*.

Funciones racionales

Por definición de un campo ordenado, supóngase dos funciones $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}(x)$ y asumimos que $f < g \leftrightarrow f \neq g$ y que al substraer $g - f$ el resultado es un coeficiente positivo. Entonces, por las propiedades del orden, se deben cumplir:

1. Según la tricotomía, por cada $f \in \mathbb{Q}(x)$, se tiene que mantener $f > 0, f = 0$ o $0 > f$
2. Si hay tres elementos $f, g, h \in \mathbb{Q}(x)$ y $f < g$, entonces $f + h < g + h$
3. Si hay tres elementos $f, g, h \in \mathbb{Q}(x), f < g$ y $0 < h$, entonces $fh < gh$.

Demostración. Para mostrar que las funciones racionales son ordenadas, asúmase que $0 < f \leftrightarrow -f < 0$, entonces cualquier elemento de $\mathbb{Q}(x)$ puede escribir como $\frac{f(x)}{g(x)}$ donde $g > 0$. Por otra parte, si definimos $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \in \mathbb{Q}(x)$, en donde por definición $g_1 > 0$ y $g_2 > 0$, eso quiere decir que:

$$\implies \frac{f_1(x)}{g_1(x)} < \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \implies f_1(x)g_2(x) < f_2(x)g_1(x)$$

probando que las funciones racionales son ordenadas. □

Por otra parte queremos determinar que las funciones racionales no son arquimedeanas:

Demostración. Considérese un contraejemplo, tomando en cuenta las funciones racionales $f(x) = x$ y $g(x) = 1$. Se observa que si se toma un elemento $n \in \mathbb{N}$, siempre habrá una función $f(x) > n \cdot g(x)$, debido a que $\big(f - n \cdot g\big)(x) = x - n$ y afirmando que el coeficiente de $\big(f - n \cdot g\big)$ es 1, el cual debe ser positivo; incumpliendo la propiedad arquimediana. □

3. **Si a y b son elementos de un campo arquimediano F con $a < b$, demuestre que existe un racional $c \in F \ni a < c < b$.**

Demostración. Basándose en la deducción de Bartle and Sherbert (2000). Supóngase que c=0, por lo que se puede considerar $a > 0$. En donde $b - a > 0$. Siguiendo el corolario que dice si $t > 0$, entonces existe $n_t \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/n_t < t$. Se puede asumir que $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < b - a$. Por lo tanto, si se tiene $na + 1 < nb$., aplicando nuevamente otro corolario que afirma: Si $b > 0$, entonces existe $n_b \in \mathbb{N}$ tal que $n_b - 1 \leq y \leq n$. Por lo que se tiene que: $na > 0$, entonces $m \in \mathbb{N}$ con $m - 1 \leq na < m$. Por lo tanto, $m \leq na + 1 < nb$, Mientras que $na < m < nb$. Entonces el número racional $r := m/n$ satisface $a < c < b$
□

4.

- Defina operaciones en $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + (\sqrt{2})y : x, y \in \mathbb{Q}\}$ de tal forma que sea un campo.

  Demostración. Por definición, asúmase que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$, por lo que las propiedades de asociatividad, conmutatividad y distributividad de la multiplicación sobre la suma son implícitas por ser un subcampo de $\mathbb{R}$. Entonces:

1. Cerradura bajo la adición. Dados $a_1, a_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, entonces $a_1 + a_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

   Sea $a_1 = x_1 + (\sqrt{2})y_1$ y $a_2 = x_2 + (\sqrt{2})y_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \implies a_1 + a_2 = x_1 + x_2 + (\sqrt{2})y_1 + (\sqrt{2})y_2 = x_1 + x_2 + (\sqrt{2})[y_1 + y_2] \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
2. Cerradura bajo la multiplicación. Dados $a_1, a_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, entonces $a_1 \cdot a_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

   Sea $a_1 = x_1 + (\sqrt{2})y_1$ y $a_2 = x_2 + (\sqrt{2})y_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \implies a_1 \cdot a_2 = (x_1 + (\sqrt{2})y_1)(x_2 + (\sqrt{2})y_2) = x_1 \cdot x_2 + (\sqrt{2})y_2 x_1 + (\sqrt{2})y_1 x_2 + (\sqrt{2}y_1) \cdot (\sqrt{2}y_2) = x_1 \cdot x_2 + (\sqrt{2})[y_2 x_1 + y_1 x_2] + 2(y_1 y_2) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
3. Inverso. Sea $a \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \implies \frac{1}{a} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$$\begin{aligned}(x + y\sqrt{2})^{-1} &= \frac{1}{x + y\sqrt{2}} \\ &= \frac{x}{x^2 - 2y^2} - \frac{y}{x^2 - 2y^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\end{aligned}$$

   en donde $x^2 - 2y^2 \neq 0$ porque $\sqrt{2}$ es irracional. $\implies \frac{1}{a} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$\therefore \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + (\sqrt{2})y : x, y \in \mathbb{Q}\}$ es un campo. □

- ¿Es un campo ordenado?

  Demostración. Dadas las propiedades de un campo ordenado (Sea P la clase positiva del campo $\mathbb{F}$, entonces se dice que $\mathbb{F}$ está ordenada por P (O que $\mathbb{F}$ es un campo ordenado):

  1. Si $a \in P$, se dice que a es positivo. Notación $a > 0$.
  2. Si $a \in$ P o $a = 0$, se dice que a es no negativo. Notación $a \geq 0$
  3. Si $a, b \in \mathbb{F}$ y $a - b \in P$,, se escribe $a > b$
  4. Si $a, b \in \mathbb{F}$ y $a - b \in P$ o $a - b = 0$, se escribe $a \geq b$

  Se propone un $a = x + (\sqrt{2}y)$. Debido a la relación $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset R \implies a > 0$ o $a \geq 0$, demostrando las propiedades (1) y (2). Por otra parte, se proponen dos elementos $x_1 + (\sqrt{2})x_2$ y $y_1 + (\sqrt{2})y_2$, tal que:

$$x_1 + (\sqrt{2})x_2 \leq y_1 + (\sqrt{2})y_2 \iff y_1 - x_1 + (x_2 - y_2)(\sqrt{2}) \geq 0$$

  Demostrando las propiedades (3) y (4). $\therefore \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + (\sqrt{2})y : x, y \in \mathbb{Q}\}$ es un campo ordenado.

  □

- ¿Es ordenado el campo de los complejos?

  Demostración. Asúmase un contraejemplo. Dígase un elemento $-i \in \mathbb{C}$. Entonces, se tienen dos casos: (i) Si $-i > 0$, es decir que si se eleva al cuadrado $(-i)^2 > 0 \implies -1 > 0$. Entonces se tiene que $-i < 0$. (ii) Si se eleva a una potencia 4 $\implies (-i)^4 > 0 \implies (-i)^2(-i)^2 = (-1)(-1) = 1 > 0$. Afirmando al mismo tiempo que $-1 > 0$ y $1 > 0$ ($\rightarrow\leftarrow$). Es decir, una contradicción en una de las propiedades de un campo ordenado (Si $0 < a < b$ y $0 < c < d$, entonces $ac < bd$). Por lo tanto, el campo de los complejos no es ordenado. $\square$

Referencias

Abbott, S. (2012). *Understanding analysis*. Springer Science & Business Media.

Bartle, R. G. and Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis*, volume 2. Wiley New York.

Parte II

Topología

2. Topología básica en $\mathbb{R}$

Definición 8. *Sea X un conjunto no vacío. Una familia de subconjuntos τ de X es una topología sobre X si:*

1. $\Phi, X, \in \tau$.

2. *Cualquier familia $\{A_i\}$ de elementos de τ es tal que $\cup_i A_i \in \tau$.*

3. *Si $A_1, A_2 \in \tau \implies A_1 \cap A_2 \in \tau$.*

NOTA. *A los elementos de τ se les llama abiertos de X.*

Definición 9. *La familia θ de todos los subconjuntos abiertos de M es la topología de M y el par (M, θ) es el espacio topológico asociado al métrico M.*

NOTA. *En el caso de $\mathbb{R}^n$ se dice que se tiene el espacio topológico Euclidiano $\mathbb{R}^n$.*

Ejemplo 12.

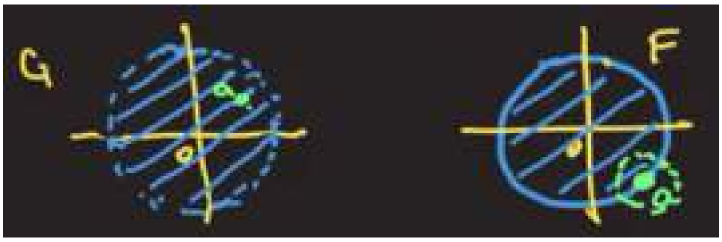
1. *$\mathbb{R}^n$ es abierto. En efecto, $B_1(x) \subset \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n$.*

2. *$G = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ es abierto, pero $F = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ no lo es.*

Ejemplo 13.

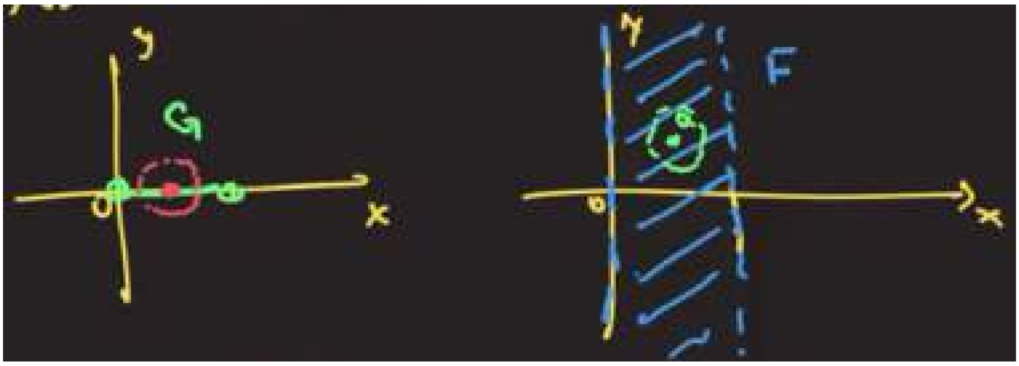
1. *$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ni x^2 + y^2 < 1\}$ es abierto.*

2. *$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ni x^2 + y^2 \leq 1\}$ no es abierto.*



Ejemplo 14. *1.* $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ni 0 < x < 1, y = 0\}$ *no es abierto de* $\mathbb{R}^2$.

2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ni 0 < x < 1\}$ *es abierto de* $\mathbb{R}^2$.



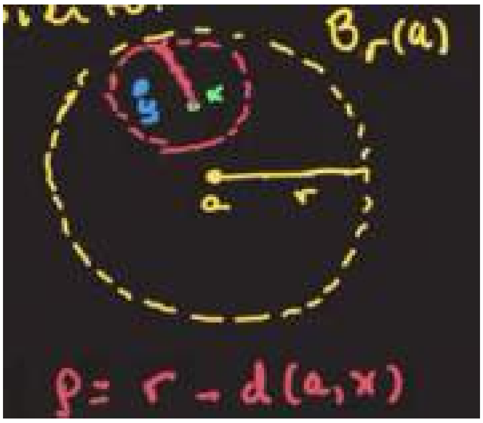
Ejemplo 15. Φ *es abierto.*

Proposición 4. *Una bola abierta es abierto.*

Demostración. Sea $x \in B_r(a)$ y considere la bola centrada en x y de radio $r - d(a, x)$. A probar: $B_{r-d(a,x)}(x) \subset B_r(a)$. Sea $y \in B_{r-d(a,x)}(x)$. Entonces,

$$\begin{aligned} d(a, y) &\leq d(a, x) + d(x, y) \\ &< d(a, x) + [r - d(a, x)] \\ &= r \end{aligned}$$

$\implies y \in B_r(a)$.



■

Teorema 7. *Considere* $(\mathbb{R}^n, d)$*:*

1. Φ *y* $\mathbb{R}^n$ *son abiertos.*

2. *La intersección de dos abiertos de* $\mathbb{R}^n$ *es abierto de* $\mathbb{R}^n$*.*

   > *Por inducción, se deduce que la intersección finita de abiertos es abierto.*

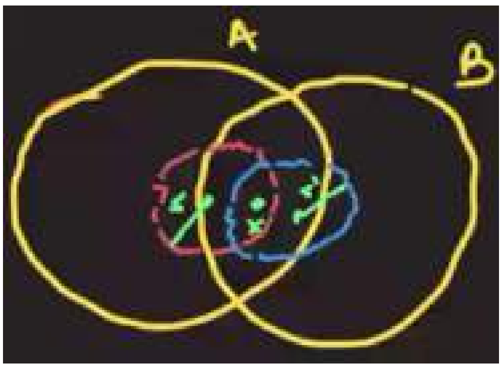
3. *La unión de cualquier colección de abiertos es un abierto de* $\mathbb{R}^n$*.*

Demostración. 1. OK.

2. Sea A y B abiertos de $\mathbb{R}^n$. A probar: $A \cap B$ es abierto. Sea $x \in A \cap B$, entonces:

   a) $x \in A$, abierto, $\implies$ $\exists r > 0 \ni d(x,z) < r$, para $z \in A$.

   b) $x \in B$, abierto, $\implies$ $\exists r' > 0 \ni d(x,w) < r$, para $w \in B$.



$\implies$ Hagamos $r = \min\{r, r'\} \implies$ si $y \in \mathbb{R} \ni d(x,y) < r \implies y \in A$ y $y \in B \implies y \in A \cap B \implies A \cap B$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.

3. Sea $\{G_\alpha\}$ una colección cualquiera de abierto de $\mathbb{R}^n$, y sea $G = \cup_\alpha G_\alpha$. Si $x \in G \implies x \in G_\lambda$, para algún λ. Como G_λ es abierto $\implies \exists r > 0 \ni B_r(x) \subset G_\lambda \subset \cup_\alpha G_\alpha = G$.

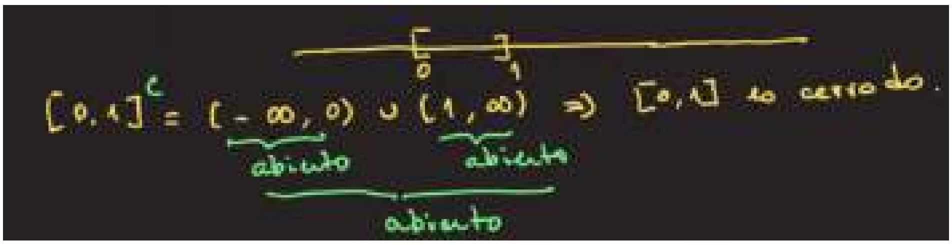
$\blacksquare$

NOTA. *La intersección de una colección infinita de abierto no necesariamente es abierto. En efecto considere:*

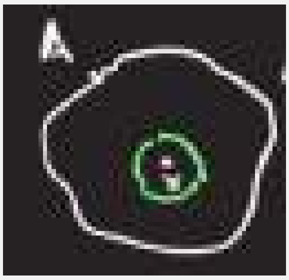
$$
\begin{aligned}
A_n &= \{x \in \mathbb{R} \ni -\frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n}\}, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \\
A_1 &= (-1, 2) \\
A_2 &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \\
&\vdots \\
\implies A &= \cap_{n=1}^{\infty} A_n \\
&= [0,1] \quad \text{¿Por qué cerrado?}
\end{aligned}
$$

Los A_n son abiertos (por se bolas abiertas de $\mathbb{R}$)

Definición 10. *Un subconjunto $\mathbb{F}$ en el métrico (M,d) es cerrado si $\mathbb{F}^c$ es abierto.*



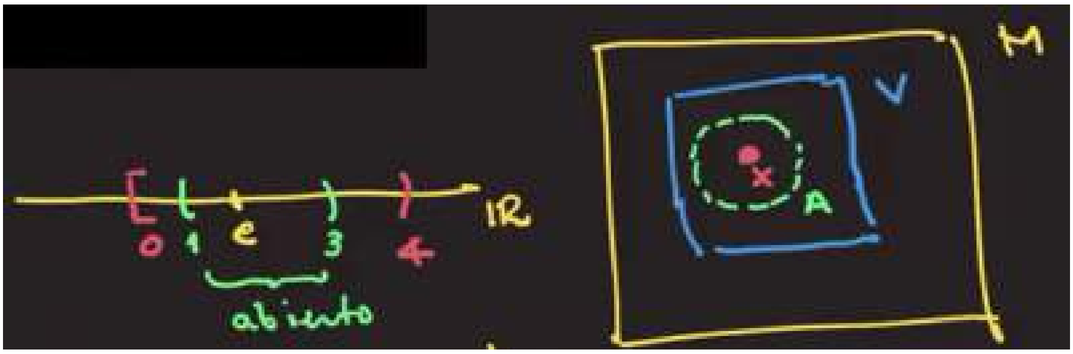
1. Abierto: bola abierta contenida en A es cada punto.



2. Topología (colección de todos los abiertos) en el métrico.
3. F es cerrado si F^c es abierto.
4. Abierto y cerrado no son negación uno del otro.
   a) Φ, $\mathbb{R}^n$ son abiertos y cerrados.
   b) $[0,1)$ no es abierto ni cerrado.

Definición 11. *Sea $x \in M$ (espacio métrico), entonces cualquier conjunto que contiene un abierto $A \ni x \in A$ es una vecindad de x.*

Ejemplo 16. *Sea*



1. $[0,4)$ *es na vecindad de* e*.*

2. $(1,3)$ *es vecindad abierta de* e*.*

3. $\mathbb{R}$ *es vecindad de* e*.*

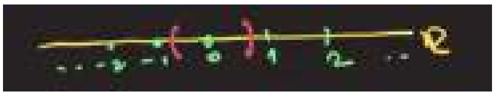
4. $(e-\varepsilon, e+\varepsilon)$ *es vecindad de* e*,* $\forall \varepsilon > 0$*.*

Definición 12. *Un punto $x \in M$ es punto interior de un conjunto $A \subseteq M$, si A es una vecindad de M.*

1. $[0,1]$*,* $x = 0$ *y* $x = 1$*; no son puntos interiores. El resto de punto* $(0,1)$ *son puntos interiores de* $[0,1]$*.*

2. En $I = (0,1)$, todos son puntos interiores.

3. $\mathbb{R} \cap \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

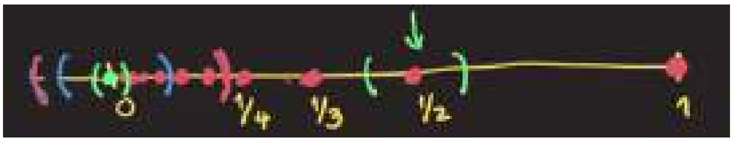


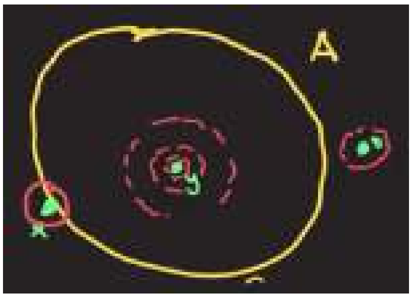
$\implies$ $\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}$ *no tiene puntos interiores.*

Definición 13. *Un punto x es un punto de acumulación (o punto límite) de un conjunto $A \subseteq M$, si cada vecindad de x contiene al menos un punto de A diferente de x. Es decir, si*

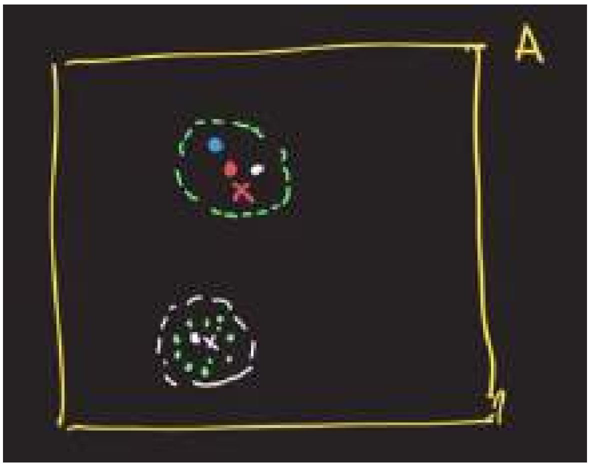
$$(B_r(x) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset, \quad \forall r > 0.$$

Ejemplo 17. $A = \{1, 1/2, 1/3, \cdots, 1/n, \cdots\} \subseteq \mathbb{R} \implies x = 0$ *es un punto de acumulación de A.*





Definición 14. *El conjunto de todos los puntos interiores de A se llama interior de A (Notación: A° o $int(A)$).*



Es decir:

$$int(A) = \bigcup_{U \subset A,\ U \text{ es abierto.}} U$$

i.e $int(A)$ *en el abierto más grande contenido.*

Ejemplo 18. 1. $int[0,1] = (0,1)$.

2. $int\mathbb{R} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.

3. $int\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

4. A *es abierto* $\iff A = int(A)$.

Ejemplo 19. *La cerradura de* A *es el conjunto:*

$$\overline{A} := \bigcap_{A \subset F,\ F \text{ cerrado}} F$$

NOTA. 1. $\overline{A}$ *es cerrado.*

2. $\overline{A}$ *es el cerrado más pequeño que contiene a* A.

3. A *es cerrado* $\iff A = \overline{A}$.

4. *Si* F *es un cerrado que contiene a* $A \implies A \subset \overline{A} \subset F$.

Definición 15. *La frontera de* A *(denotada* $bd(A)$ *o* ∂A*), se define*

$$\partial A := \overline{A} - int(A).$$

Ejemplo 20. *Sea* $I = [0,1] \implies \overline{I} = [0,1] \implies int(I) = (0,1) \implies \partial A = \overline{I} - int(A) = \{0,1\}$.

Definición 16. *El conjunto de todos los puntos de acumulación de un conjunto A se llama conjunto derivada de A. Notación: A'.*

Proposición 5. *Si* $A \subset B \implies A' \subset B'$.

Demostración. Sea $x \in A'$ (i.e x es un punto de acumulación de A) $\implies \forall$ abierto $G \ni x \in G$, se tiene que

$$(G - \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Como $A \subset B \implies (G - \{x\}) \cap A \subset (G - \{x\}) \cap B \implies \emptyset \neq (G - \{x\}) \cap A \subset A \subset (G - \{x\}) \cap B \implies (G - \{x\}) \cap B \neq \emptyset, \forall G \ni x \in G \implies x \in B'$. ■

Proposición 6. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

Demostración. Tenemos:

($\supseteq$) Sabemos que

a) $A \subset A \cup B \implies A' \subset (A \cup B)'$.

b) $B \subset A \cup B \implies B' \subset (A \cup B)'$.

$\implies A' \cup B' \subset (A \cup B)'$.

($\subseteq$) A probar: $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$.

a) $\iff$ Si $x \in (A \cup B)' \implies x \in A' \cup B'$.
b) $\iff$ Si $x \notin A' \cup B' \implies x \notin (A \cup B)'$.

Sea $x \notin A' \cup B' \implies x \notin A'$ y $x \notin B'$. $\implies$ Como $x \notin A' \implies \exists G, \underbrace{abierto}_{x \in G}$, tal que $G \cap A \subset \{x\}$[1].

[1] $G \cap A = \emptyset$ o $\cancel{G \cap A = \{x\}}$

Como $x \notin B' \implies \exists H, \underbrace{abierto}_{x \in H}$, tal que $H \cap A \subset \{x\}$. Nótese que $G \cap H$ es abierto. Entonces, $x \in G \cap H$, y

$$(G \cap H) \cap (A \cup B) = (G \cap H \cap B) \subset \{x\} \cup \{x\} = \{x\}$$

$\implies x \notin (A \cup B)' \implies$ Si $x \notin A' \cup B' \implies x \in (A \cup B') \implies (A \cup B)' \subset A' \cup B' \implies (A \cup B)' = A' \cup B'$.

■

Proposición 7. *A es cerrado $\iff A' \subset A$.*

> *Un conjunto es cerrado $\iff$ contiene a sus puntos de acumulación.*

Demostración. Se tiene:

$(\implies)$ [2] Sea A cerrado y sea $p \notin A \implies p \in A^c$, pero A^c es un abierto $\ni p \in A^c$ y $A \cap A^c = \emptyset \implies p \notin A' \implies A' \subset A$.

$(\impliedby)$ A probar: $A' \subset A \implies A$ es $\underbrace{cerrado}_{A^c \text{ es abierto}}$. Suponga que $A' \subset A$ y sea $p \in A^c$. $\implies p \notin A' \implies \exists G$, abierto, tal que: $p \in G$ y

$$(G - \{p\}) \cap A = \emptyset.$$

Como $p \notin A \implies G \cap A = \emptyset \implies G \subset A^c$. Entonces, si $p \in A^c \exists$ abierto $G \ni p \in G \subset A^c \implies A^c$ es abierto. $\implies A$ es cerrado.

■

---

[2] A probar:
a) $A' \subset A \iff$ si $x \in A' \implies x \in A$
b) $A' \subset A \iff$ si $x \notin A \implies x \notin A'$.

Proposición 8. *Si F es un superconjunto cerrdo de cualquier conjunto A, entonces $A' \subset F$.*

Demostración. Sabemos que F es cerrado y $A \subset F$. Como $A \subset F \implies A' \subset F \implies A' \subset F'$. Como F es cerrado, entonces $F' \subset F \implies A' \subset F$. ■

Proposición 9. *$A \cup A'$ es cerrado.*

Proposición 10. $\overline{A} = A \cup A'$.

Demostración. ($\supseteq$) Sabemos que $A \subset \overline{A}$. Por otra parte, $\implies A' \subset (\underbrace{\overline{A}}_{cerrado})' \subset \overline{A} \implies A' \subset \overline{A} \implies A \cup A' \subset \overline{A}$.

($\subseteq$) A probar: $\overline{A} \subset A \cup A'$. Entonces, $A \subset \underbrace{A \cup A'}_{cerrado} \implies A \subset \overline{A} \subset A \cup A'$.

$$\boxed{\overline{A} = \bigcap u \qquad u \text{ cerrado} \ni u \supset A}$$

■

Proposición 11. *Si $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.*

Demostración. Si $A \subset B \implies A' \subset B' \implies A \cup A' \subset B \cup B' \implies \overline{A} \subset \overline{B}$. ■

Proposición 12. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Demostración. Tenemos:

($\subseteq$) A probar: $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Sabemos:

$$\begin{cases} A \subset \overline{A} \\ B \subset \overline{B} \end{cases} \implies A \cup B \subset \underbrace{\overline{A} \cup \overline{B}}_{cerrado}.$$

$$\implies A \cup B \subset \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}.$$

($\supseteq$)

$$\begin{cases} A \subset A \cup B & \implies \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \\ B \subset A \cup B & \implies \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \end{cases} \implies \overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

$$\implies \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

■

2.1. Axiomas de Kuratowski

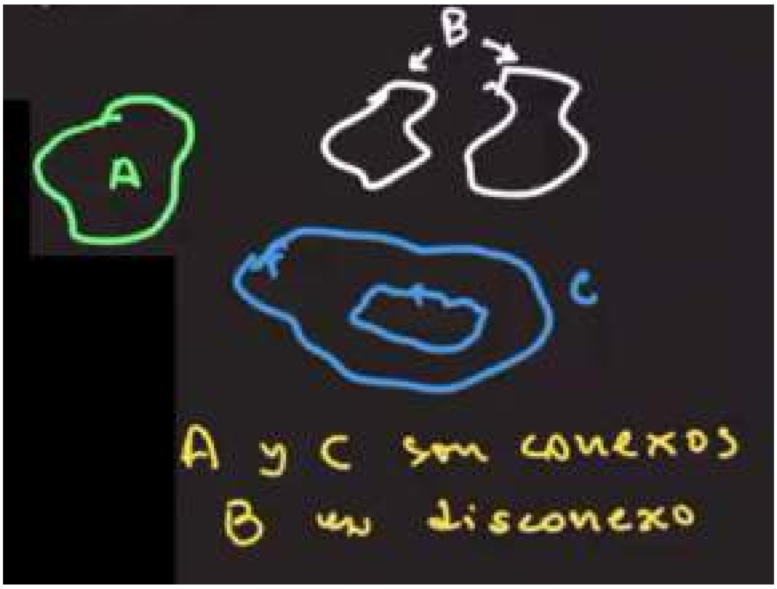
Se propone construir una topología de cerrados a partir de $K_1 - K_4$.

K_1 ; $\overline{\emptyset} = \emptyset$

K_2 ; $A \subset \overline{A}$.

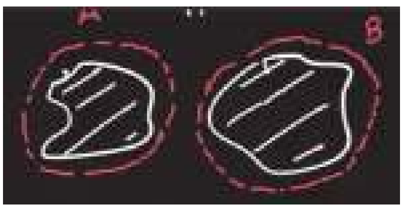
K_3 ; $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

K_4 ; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

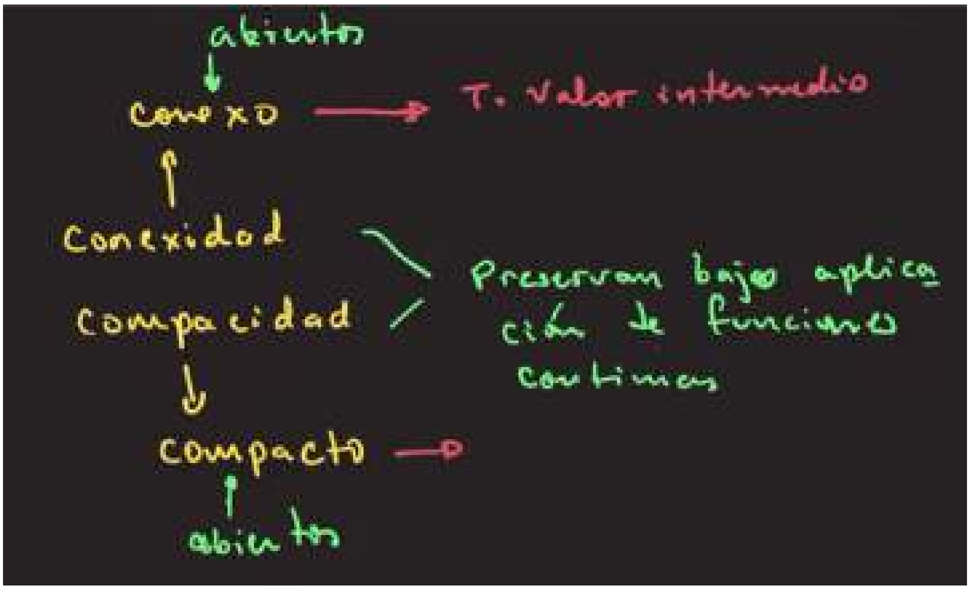


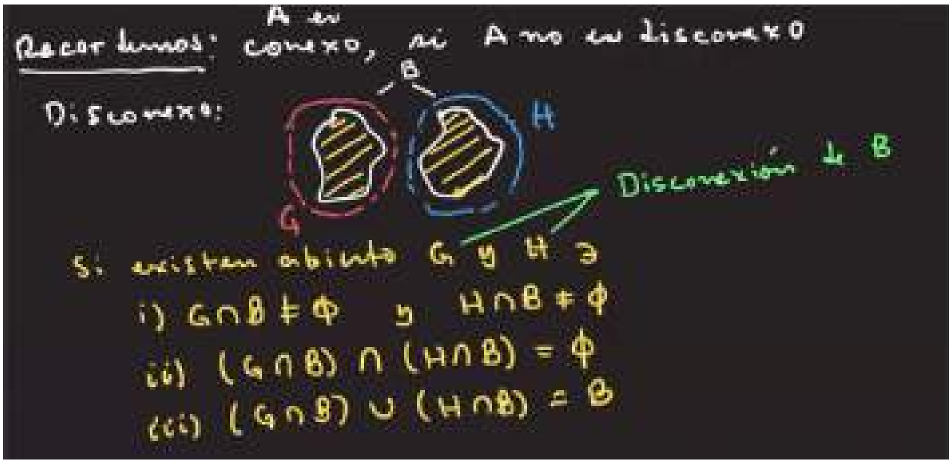
2.2. Conjuntos conexos

Definición 17. *Un subconjunto H del espacio métrico M es disconexo, si existen abiertos A y $B \ni A \cap H \neq \emptyset, B \cap H \neq \emptyset, (A \cap H) \cap (B \cap H) = \emptyset$ y $(A \cap H) \cup (B \cap H) = H$.*



2.2.1. Resumen





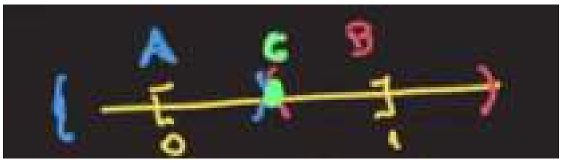
Ejemplo 21. *$\mathbb{Z}$ es disconexo en $\mathbb{R}$. En efecto, considere: $G = (-\infty, 1/2)$ y $H = (1/2, \infty)$. $\implies$ G y H son una disconexión de $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.*

Ejemplo 22. *$\mathbb{Q}$ es disconexo en $\mathbb{R}$. En efecto, sea la disconexión: $G = (-\infty, \pi)$ y $H = (\pi, \infty)$.*

Teorema 8. *$I = [0, 1]$ es conexo en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Supóngase por el absurdo que A y B son una disconexión de I; i.e, $A \cap I$ y $B \cap I$ son no vacíos, disjuntos y su unión es I.

1. Suponga que $1 \in B$.



Como I es acotado. $\implies A \cap I$ y $B \cap I$ también son acotados. Entonces, por el principio del supremo, $\exists c = \sup(A \cap I) > 0$ y $c \in A \cup B$.

2. Si $c \in A$. $\implies c < 1$.

$\implies$ Como A es abierto $\implies \exists B_r(c) \subset A \implies \exists \alpha \in A \ni c < \alpha$. $(\rightarrow\leftarrow) \implies c \notin A$.

3. Si $c \in B$.

$\implies$ Como B es abierto $\implies \exists c_1 \in B \ni c_1 < c$ y es tal que $[c_1, c] \cap (A \cap I) = \emptyset$ (i.e c_1 es una cota superior de $A \cap I$ y es menor que c)$(\rightarrow\leftarrow)$. Entonces, que $c \in B$ $(\rightarrow\leftarrow)$. $\implies [0, 1]$ es conexo.

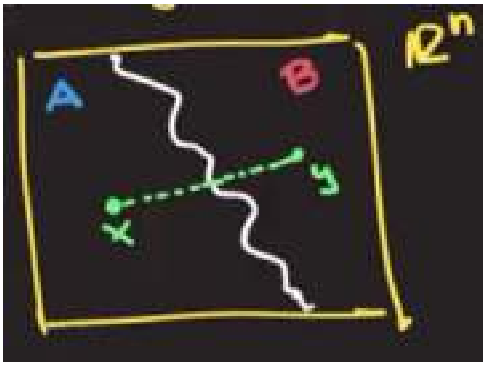
$\blacksquare$

Corolario 8.1. $(0, 1)$ *es conexo*[3].

Teorema 9. $\mathbb{R}^n$ *es conexo.*

Demostración. Supóngase, por el absurdo, que A y B son una disconexión de $\mathbb{R}^n$.

[3] Si x es un intervalo. $\implies x$ es conexo.



Sean $x \in A$ y $y \in B$, y considere el segmento de recta que une x con y:

$$S = \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\}$$

Sean:

$$A_1 = \{t \in \underbrace{\mathbb{R}}_{[0,1]} \ni (1-t)x + ty \in A\}$$
$$B_1 = \{t \in \underbrace{\mathbb{R}}_{[0,1]} \ni (1-t)x + ty \in B\}$$

$\implies A_1 \cap B_1 = \emptyset (\rightarrow\leftarrow)$, ya que A_1, B_1 serían una disconexión de $[0,1]$. Entonces, $\mathbb{R}^n$ es conexo. ∎

Teorema 10. *Los únicos conjuntos abiertos y cerrados de $\mathbb{R}^n$ son $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Supóngase, por el absurdo, que $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$ y $A \neq \mathbb{R}^n$, es abierto y cerrado de $\mathbb{R}^n$. Como A es cerrado $\implies A^c = B$ es abierto. $\implies A \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = \mathbb{R}^n$. $\implies A$ y B forman una disconexión de $\mathbf{R}^n$ $(\rightarrow\leftarrow)$. $\implies$ Los únicos abiertos y cerrados de $\mathbf{R}^n$ son $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$. ∎

Teorema 11. *Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es conexo $\iff$ es un intervalo.*

Demostración. Tenemos

($\impliedby$) A probar: cada intervalo de $\mathbb{R}$ es un conexo. (Ver prueba de: $[0,1]$ es conexo).

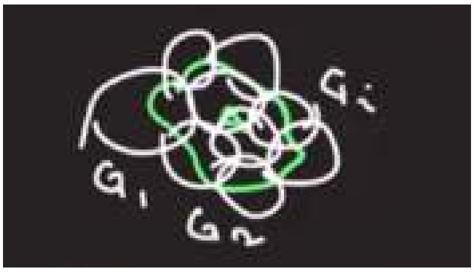
($\implies$) Sea $C \subseteq \mathbb{R}$ conexo. A probar: C es un intervalo. Sean $a, b \in C \ni a < b$ y sea $x \in \mathbb{R} \ni a < x < b$. A probar: $x \in C$. Si $x \notin C \implies (-\infty, x)$ y (x, ∞) forman una disconexión de c. $(\rightarrow\leftarrow)$. $\implies x \in C \implies C$ es intervalo.

∎

2.3. Compactos

Sea A un subconjunto del espacio métrico M. Decimos que la familia de abierto $\{G_i\}_{i\in I}$ de M es una cubierta abierta de A, si

$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$$

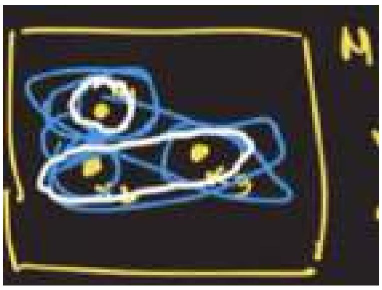


NOTA. *En el caso de M, la cubierta abierta debe cumplir:*

$$M = \bigcup_{i\in I} G_i$$

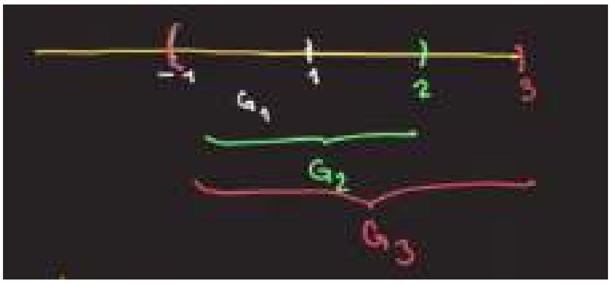
Definición 18. *Un subconjunto A del espacio métrico M es compacto si cada abierta de A tiene subcubierta finita*[4].

Ejemplo 23. *Sea $k = \{x_1, \cdots, x_n\}$ un subconjunto finito de $\mathbb{R}^n$ y sea $G = \{G_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de k (i.e $\bigcup_{i\in I} G_i \supseteq k$). Dado que k es finito, basta un número finito de los G_i para cubrir a k. $\implies$ es compacto.*



Ejemplo 24. *Sea $H = [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ no es compacto. En efecto, sea $G_n = (-1, n), n \in \mathbb{Z}^+$.*

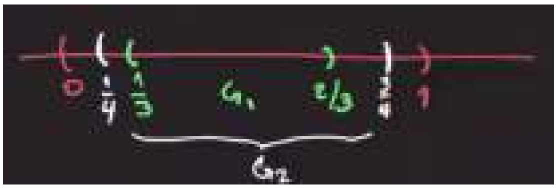
[4] Sigue cubriendo al conjunto A



$\Longrightarrow$ $G = \{G_n\}$ *es una cubierta abierta de* H*. Suponga que* $\{G_{n_1}, G_{n_2}, \cdots, G_{n_k}\}$ *es una subcolección de* G*. Sea* $M = \max\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$*.* $\Longrightarrow$ $G_{n_i} \subseteq G_M$*,* $i = 1, \cdots, k$ $\Longrightarrow$ $G_M = \bigcup_{i=1}^{k} G_{n_i}$*, pero, en particupar,* $M \notin \bigcup_{i=1}^{k} G_{n_i}$ $\Longrightarrow$ $\{G_{n_1}, \cdots, G_{n_k}\}$ *no cubre a* H*. Entonces,* G *no tiene subcubierta finita para* H*.* $\Longrightarrow$ H *no es compacto.*

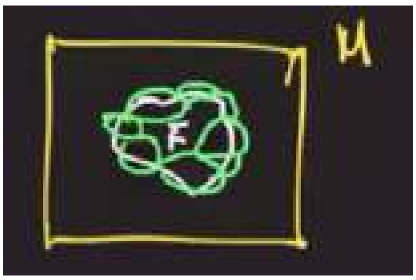
Ejemplo 25. *Sea* $H = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ *y considere:*

$$G_n = \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right), \quad n > 2.$$



$\Longrightarrow$ $G = \{G_n\}$ *es una cubierta abierta de* H*, pero* G *no tiene subcubierta finita para* H*.* $\Longrightarrow$ H *no es compacto.*

Proposición 13. *Sea* F *un cubconjunto cerrado de un espacio métrico* M*. Entonces,* F *es compacto.*



Demostración. Sea $G = \{G_i\}$ una cubiera abierta de F. Como F^c es abierto $\Longrightarrow$ $\left(\bigcup_{i\in I} G_i\right) \cup F^c$ es cubierta abierta de M, i.e. $\left(\bigcup_{i\in I} G_i\right) \cup F^c = M$. $\cdots$ es compacto, existe una subcubierta finita M, $\{G_{i_1}, G_{i_2}, \cdots, G_{i_n}, F^c\}$, tal que:

$$G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \cdots \cup G_{i_n} \cup F^c = M$$

$\Longrightarrow$ $\{G_{i_1}, \cdots, G_{i_n}\}$ es una subcubierta finita para F. $\Longrightarrow$ es compacto. ∎

Teorema 12 (Heine-Borel)**.** *Un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ es compacto $\Longleftrightarrow$ es cerrado y acotado.*

Ejemplo 26. *Ejemplos.*

1. $(0, 1)$ *no es compacto, ya que no es cerrado.*

2. $[0, 1]$ *es compacto, por Heine-Borel.*

1. Si $S \subseteq \mathbb{R}$, compacto, $\Longrightarrow$ S es cerrado y acotado.
2. Si $S \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado y acotado. $\Longrightarrow$ S es secuencialmente compacto $\Longrightarrow$ S es compacto.
3. Producto de una colección de conjuntos compacto. **(Teorema de Tíkonov -Tychonoff-)**

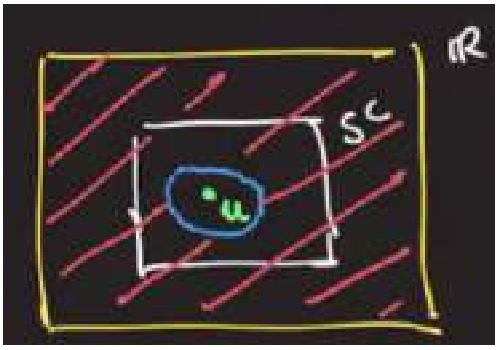
NOTA. *Un espacio métrico M es de Lindelof si cada cubierta abierta de M tiene una subcubierta contable.*

Teorema 13. *Si $S \subseteq \mathbb{R}$ es compacto, entonces S es cerrado y acotado.*

Demostración. A probar: S es acotado. Considere, para $m \in \mathbf{Z}^+$, $H_m = (-m, m)$. Como cada H_m es abierto y $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} H_m = \mathbb{R} \implies \{H_m : m \in \mathbb{Z}^+\}$ es cubierta abierta de S. Como S es compacto $\implies$ Hay una subcubierta finita $\{H_{m_1}, \cdots, H_{m_n}\}$ para S, i.e. $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_{m_n} = H_m = (-M, M) \implies M$ es acotado.

A probar: S es cerrado. $\iff$ S^c es abierto. Sea $u \in S^c$ y considere:

$$G_n = \{y \in \mathbb{R} : |y - u| > 1/n \quad n \in \mathbb{R}$$



Note que los G_n son abiertos y $\bigcup_{n=1}^{\infty} = \mathbb{R} - \{u\}$. Como $u \notin S \implies S \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \implies \{G_n\}$ es una cubierta abierta de S. Como S es compacto. $\implies$ $\exists m \in \mathbb{Z}^+ \ni S \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} G_n = G_m = \left[u - \frac{1}{m}, u + \frac{1}{m}\right]^c \implies S \cap \left(u - \frac{1}{m}, u + \frac{1}{m}\right) = \emptyset \implies \left(u - \frac{1}{m}, u + \frac{1}{m} \subset S^c\right) \implies S^c$ es abierto. $\implies S$ es cerrado. ∎

> Verificar. ¿Por qué Heine-Borel no aplica en un espacio métrico cualquiera? ¿Se cumple alguna de las implicaciones?

Teorema 14 (Heine-Borel)**.** *El jefe mayor*

1. *Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es compacto $\implies$ A es cerrado y acotado.*

2. *Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado y acotado $\implies$ A es compacto.*

3. *Teorema de Tikonov. Producto cualquiera de compactos es compacto.*

2.4. Hoja de repaso y parcial

Reales y topología.

Universidad del Valle de Guatemala
Análisis de Variable Real 1 **4 de febrero de 2021**

Ejercicios Complementarios de Preparación para el Parcial 1

1. Revisión de pruebas de teoremas seleccionados:
   a) **Teorema de intervalos encajados**: Si (I_n) es cualquier sucesión de intervalos cerrados en $\mathbb{R}$, no vacíos y encajados, entonces existe un punto x que pertenece a cada intervalo.
   Nota: Estudiar el caso que los intervalos no son cerrados.
   b) **Teorema de Bolzano-Weierstrass**: Cada subconjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}^n$ tiene un punto de acumulación.

2. Sea X un espacio métrico. Demuestre que cualesquiera dos puntos de X pueden separarse mediante conjuntos abiertos disjuntos de X (Es decir, X es un Espacio de Hausdorff).

3. Sean X un conjunto no vacío y la función $d: X \times X \to \mathbb{R}$, que satisface las condiciones siguientes:
   a. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
   b. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

   Pruebe que d es una métrica sobre X.

4. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $d_1: X \times X \to \mathbb{R}$, definida por:
   $$d_1(x,y) = ln\big(1 + d(x,y)\big), \quad \forall x,y \in X.$$
   Demuestre que $d_1$es una nueva métrica sobre X.

5. Sean A y B subconjuntos de un espacio métrico X, y pruebe las propiedades siguientes:
   a) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ (¿Se cumple la otra contención?)
   b) $int(A) \cup int(B) \subseteq int(A \cup B)$
   c) $int(A) \cap int(B) = int(A \cap B)$
   d) Presente un ejemplo de dos subconjuntos A y B de la recta real, tales que
   $$int(A) \cup int(B) \neq int(A \cup B)$$
   e) $(\bar{A})^c = int(A^c)$
   f) $\bar{A} = \{x: d(x,A) = 0\}$

6. Describa el interior del conjunto de Cantor.

7. Sea X un espacio métrico y A un subconjunto de X. Se dice que A es *denso* (o *siempre denso*) si $\bar{A} = X$. Demuestre que los enunciados siguientes son equivalentes.
   a) A es denso.
   b) El único superconjunto cerrado de A es X.
   c) El único conjunto abierto disjunto de A es $\emptyset$.
   d) A intersecta a cada conjunto abierto no-vacío.
   e) A intersecta cada bola abierta.

Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada
Fecha de entrega: 13 de febrero de 2021
Rudik R. Rompich - Carné: 19857

Análisis de Variable Real 1 - Dorval Carías

Parcial 1

1. (10p) Se dice que $E \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si cuando $x, y \in E \Rightarrow (1-\lambda)x + \lambda y \in E$, para cada $0 \leq \lambda \leq 1$. Pruebe que las bolas en $\mathbb{R}^n$ son conjuntos convexos.

Demostración. Por definición de una bola abierta/cerrada en $\mathbb{R}^n$ se tiene que su centro x y su radio r tal que se cumpla:

$$|y - r| < r$$

Entonces, tenemos que $x, y \in E$, asumamos que $y = (z - x)$ y $x = (y - x)$, entonces hacemos la substitución:

$$|(1-\lambda)x + \lambda y| = |(1-\lambda)(y-x) + \lambda(z-x)| \tag{1}$$

Por la desigualdad triangular:

$$\leq (1-\lambda)|(y-x)| + \lambda|(z-x)| \tag{2}$$
$$= (1-\lambda)r + \lambda r \tag{3}$$
$$= r \tag{4}$$

$\therefore$ las bolas en $\mathbb{R}^n$ son conjuntos convexos. $\square$

2. (15 p) Sean $x, y, a, b \in \mathbb{R}^+ y$ suponga que $\frac{x}{y} < \frac{a}{b}$. Demuestre que $\frac{x}{y} < \frac{x+a}{y+b} < \frac{a}{b}$.

Demostración.

Caso I

$$= \frac{x}{y} < \frac{x+a}{y+b} \implies x(y+b) < (x+a)y \Rightarrow \tag{1}$$

$$\Rightarrow xy + xb < xy + ay \Rightarrow xb < ay \Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{a}{b} \tag{2}$$

Caso 2

$$\frac{x+a}{x+b} < \frac{a}{b} \Rightarrow (x+a)b < a(x+b) \tag{3}$$
$$\Rightarrow xb + ab < ay + ab => \quad xb < ay \implies \tag{4}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{a}{b} \tag{5}$$
$$\therefore \frac{x}{y} < \frac{x+a}{x+b} < \frac{a}{b} \tag{6}$$

□

3. (15 p) Sea E un subconjunto no vacío del conjunto de números reales que está acotado superiormente. Si $y = \sup(E)$, pruebe que $y \in \bar{E}$

Demostración. Si $y = sup(E)$, a probar: $y \in \overline{E}$ ($\overline{E} = E$ cerrado). Consideremos por el absurdo $y \notin \overline{E}$. Sabemos que $\forall \xi > 0 \exists x \in E \ni y - \xi < x < y$, eso implicaría que $y - \xi$ es una cota superior ($\rightarrow\leftarrow$). Entonces, y es un punto de acumulación de E. $\therefore y \in \overline{E}$ □

4. (20 p) Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, acotados y no vacíos. Demuestre que:

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$$

Demostración. Supóngase las siguientes variables: $p = \sup A, q = \sup B, r = \sup(A+B)$. Ahora, asumamos que existe un $a \in A$ y un $b \in B$. Entonces, sabemos por la definición de supremo que $a \leq p$ y que $b \leq q$, entonces aplicando una sumatoria a ambas variables: $a + b \leq p + q$, tal que $r \leq p + q$ se cumple.

Por otra parte, sabemos que $b \in B$ lo que quiere decir que $a \leq r - b \quad \forall a \in A$; que afirma que $r - b$ es una cota superior para A tal que $p \leq r - b$. Entonces, $y \leq r - p$ $\forall b \in B$, entonces $q \leq r - p$ y por lo tanto $p + q \leq q$. Al combinar estas dos desigualdades, finalmente tenemos que $w = p + q$, es decir:

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

□

5. (20p) Sean A y B subconjuntos de un espacio métrico X.

   1. 5.1. Pruebe que $(\text{int}(A))^c = \overline{(A^c)}$

      Demostración.

      Se procede por medio de la doble contención:

      De ida $\subseteq$

$$x \in (int(A))^c \implies x \notin int(A) \implies x \in \overline{(A^c)} \implies (\text{int}(A))^c \subseteq \overline{(A^c)} \tag{1}$$

      De regreso $\supseteq$

$$x \in \overline{(A^c)} \implies x \notin int(A) \implies x \in (int(A))^c \tag{2}$$

□

2. 5.2. ¿Es cierto que $\text{int}(A \cap B) = \bar{A} \cap \bar{B}$?

Demostración. Supóngase un contraejemplo en donde $A = [0, 5]$ y $B = [4, 5]$, tal que:

$$A = [0,5] \qquad B = [4,5] \tag{1}$$
$$\overline{A} = [0,5] \qquad \overline{B} = [4,5] \tag{2}$$

Es decir:

$$A \cap B = [4,5] \qquad \overline{A} \cap \overline{B} = [4,5] \tag{3}$$
$$\text{int}(A \cap B) = (4,5) \tag{4}$$

Esto implica que:

$$\text{int}(A \cap B) \neq \overline{A} \cap \overline{B} \tag{5}$$

Lo que implica que no es cierta la igualdad. □

6. (20p) Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $D(x, y) = \text{mín}(1, d(x, y))$.

1. 6.1. Pruebe que D es una métrica sobre X.

Demostración. Por definición de espacio métrico tenemos, asumiendo $d(x, y) = D(x, y)$:

a) $d(x, y) \geq 0$ o $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$. Entonces, tenemos 2 casos para $min(1, d(x, y))$:
   1) (i) donde $min(1, d(x, y)) \geq 0$, se cumple.
   2) (ii) $min(1, d(x, y)) = 0$, se cumple.

   Por lo que se cumple la propiedad.

b) $d(x, y) = d(y, x)$. Por lo que se tiene que $min(1, d(x, y)) = min(1, d(y, x))$, cumpliendo la propiedad.

c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

   Entonces, tenemos:

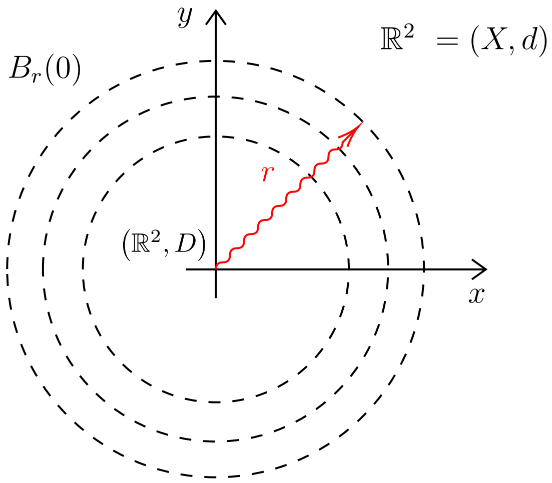
$$min(1, d(x, y)) \leq min(1, d(x, z)) + min(1, d(z, y)) \tag{1}$$
$$= min(2, 1 + d(x, z), 1 + d(z, y), d(x, z) + d(z, y)) \tag{2}$$
$$= min(1, d(x, y)) \tag{3}$$

   Cumpliendo la propiedad.

∴ D es una métrica sobre X. □

2. Si (X, d) es $\mathbb{R}^2$ con su métrica usual, describa las bolas abiertas $B_r(0)$ en $(\mathbb{R}^2, D)$.

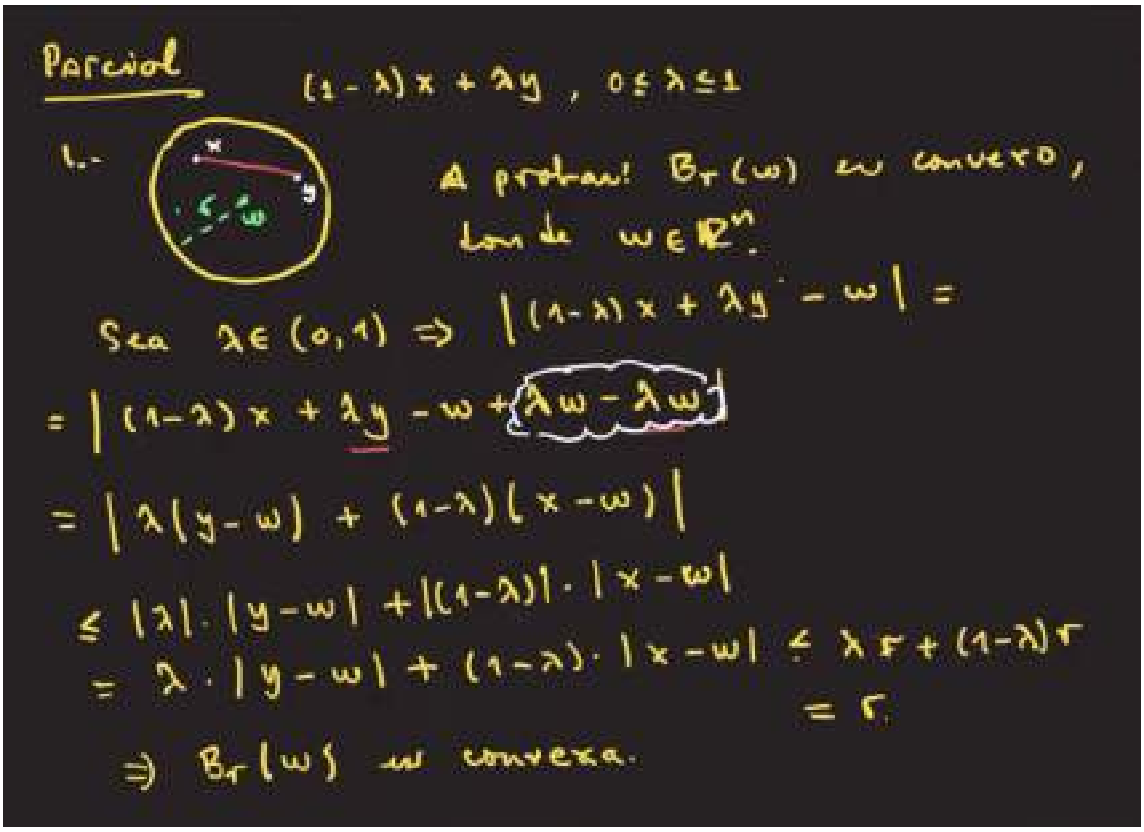
Demostración. Considerando $\mathbb{R}^2 = (X, d)$ con su métrica usual y por otra parte las bolas abiertas $B_r(0)$ en $(\mathbb{R}^2, D)$:

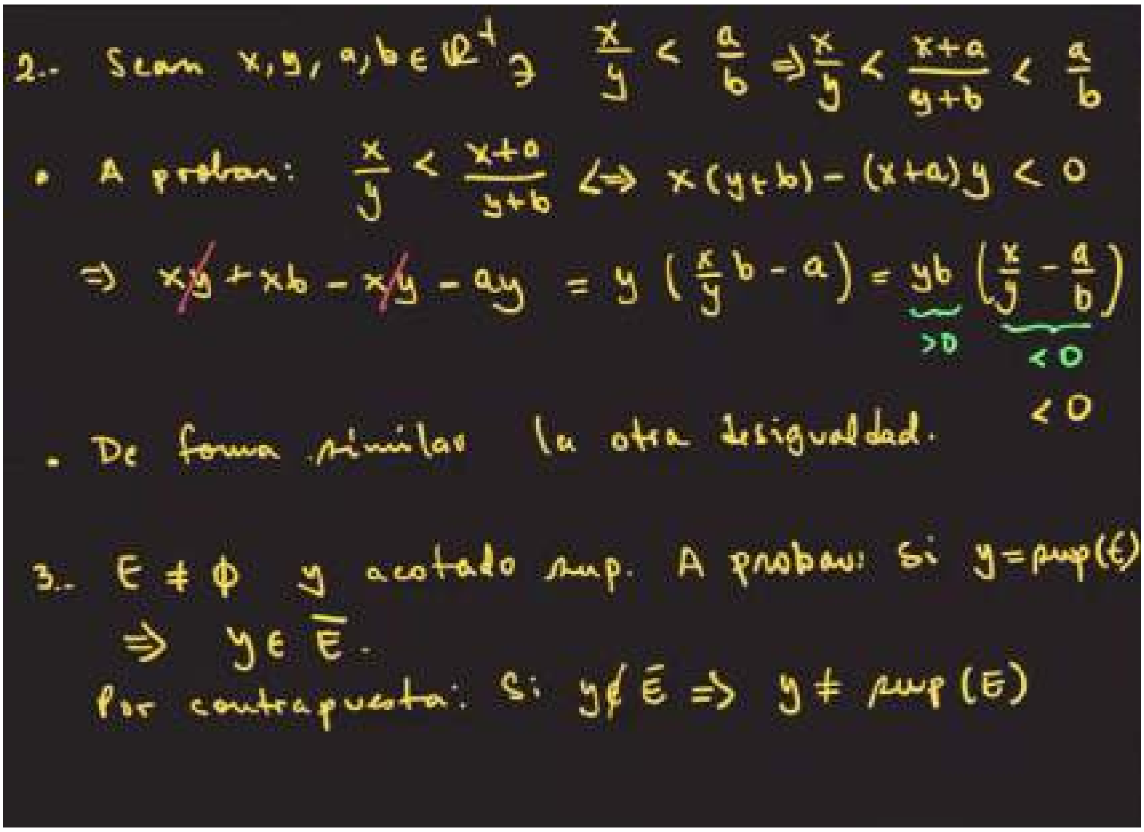


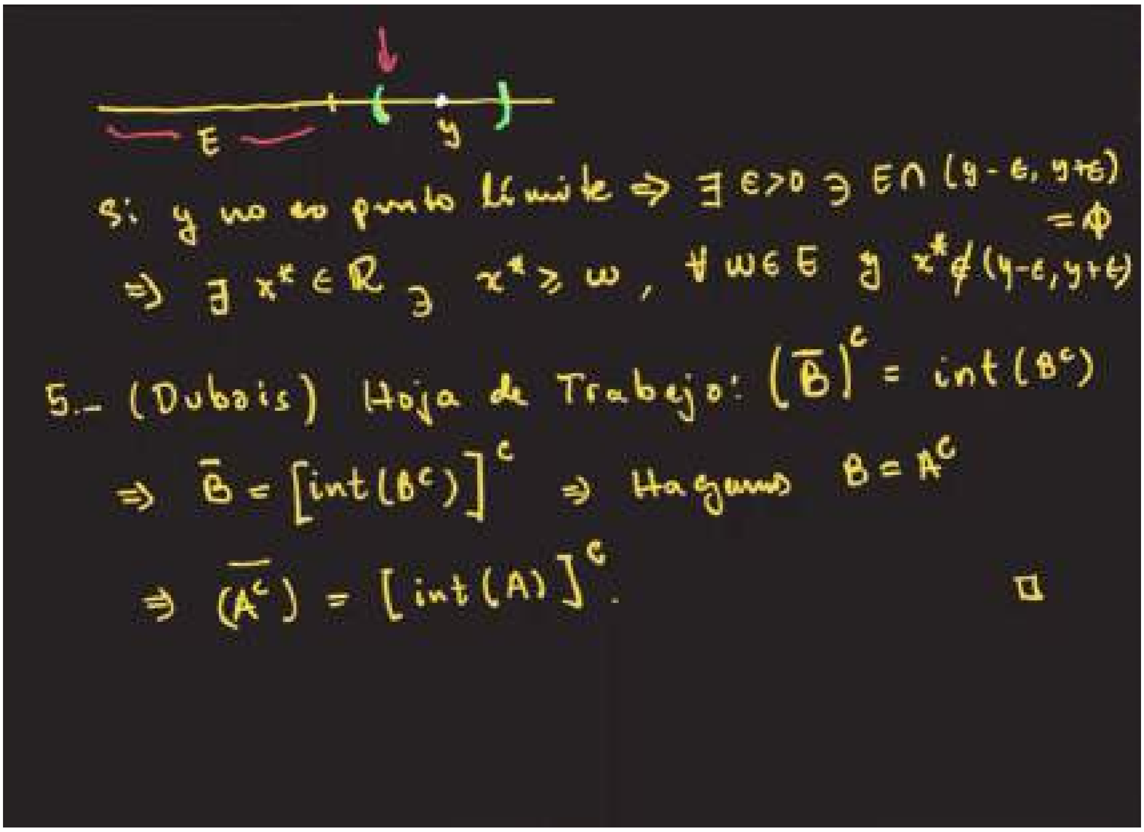
$\square$

Las bolas se podrían describir como $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : D(X, 0) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : min(1, d(x, 0) < r\}$.

2.4.1. Soluciones







Parte III

Sucesiones

3. Sucesiones

Definición 19. *Una sucesión es cualquier función cuyo dominio es un conjunto infinito contable, i.e.* $\mathbb{Z}^+, \mathbb{N}, \mathbb{Q}$.

Ejemplo 27. $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R} \ni f(n) = \operatorname{sen} n$ *es una sucesión.*

Definición 20. *Se dice que la sucesión* (a_n) *converge al número* l*, denotado* $a_n \to l$*, si* $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ *si* $n \geq N \implies |a_n - l| < \varepsilon$.

NOTA. *Si existe l, entonces es el límite de (a_n). Notación:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l.$$

Ejemplo 28. *Compruebe que* $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Solución. Dado $\varepsilon > 0 \exists N = \underline{1/\varepsilon} \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \implies n > \frac{1}{\varepsilon}$. □

Teorema 15. *El límite de una sucesión, si existe, es único.*

Demostración. Suponemos que $a_n \to l$ y $a_n \to l'$.

1. Como $a_n \to l \implies$ Dado $\varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N_1 \implies |a_n - l| < \varepsilon/2$.

2. Como $a_n \to l' \exists N_2 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N_2$, entonces $|a_n - l|' < \varepsilon/2$.

3. Sea $N = \max\{N_1, N_2\} \implies$ para $n \geq N$, se cumple:

   $$|l-l'| = |l-a_n+a_n-l'| = |(l-a_n)+(a_n-l')| \leq \underbrace{|l-a_n|}_{|a_n-l|} + |a_n-l'| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon.$$

   i.e. $|l - l'| < \varepsilon$. Por la arbitrariedad de $\varepsilon \implies l = l'$.

   $$\boxed{|l - l'| \leq \inf\{\in:\in> 0\}}$$

■

Teorema 16. *Una sucesión convergente es acotada.*

Demostración. Como $a_n \to l \implies$ Dado $\underline{\varepsilon = 1}\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \implies |a_n - l| < 1$. Entonces, $|a_n| - |l| \leq ||a_n| - |l|| \leq |a_n - l| < 1 \implies |a_n| - |l| < 1 \implies |a_n| < |l| + 1, \forall n \geq N. \implies$ Hagamos $M = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{n-1}|, \underbrace{|l| + 1}_{|a_n|, \forall n \geq N}\}$. $\implies |a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{Z}^+. \implies (a_n)$ es acotada. ■

Teorema 17. *Si* $a_n \to l \implies |a_n| \to |l|$.

Demostración. Si $a_n \to l \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \in Z^+ \ni$ si $n \geq N \implies |a_n - l| < \varepsilon$. Por desigualdad triangular:

$$||a_n| - |l|| < |a_n - l| < \varepsilon \implies ||a_n| - |l|| < \varepsilon \implies |a_n| \to |l|.$$

■

Teorema 18. *Sean* (a_n) *y* (b_n) *sucesiones convergentes tal que* $a_n \to l$ *y* $b_n \to l'$. *Entonces:*

1. $(a_n + b_n) \to l + l'$.
2. $(a_n \cdot b_n) \to l \cdot l'$.

Demostración. 1. Sea $\varepsilon > 0 \implies \exists N_1 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ Si $n \geq N \implies |a_n - l| < \varepsilon/2 \implies \exists N_2 \in \mathbb{Z}^+ \in$ si $n \geq N_2 \implies |b_n - l'| < \varepsilon/2$. Hagamos $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Entonces, se tiene: $|(a_n + b_n) - (l + l')| = |(a_n - l) + (b_n - l')| \leq |a_n - l| + |b_n - l'| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \quad \forall n \geq N. \implies (a_n + b_n) \to l + l'$.

2.
   a) $|a_n b_n - l \cdot l'| = |a_n b_n - a_n l' + a_n l' - l \cdot l'| = |a_n(b_n - l') + (a_n - l) \cdot l'| \leq |a_n(b_n - l')| + |(a_n - l) \cdot l'| = |a_n| \cdot |b_n - l'| + |a_n - l| \cdot |l'|$.

   b) Como a_n es convergente. $\implies a_n$ es acotada. $\implies \exists M' \geq 0 \ni |a_n| \leq M', \forall n \in Z^+$.

   c) Hagamos $M = \text{máx}\{M', |l'|\}$

   d) Como $a_n \to l$ y $b_n \to l'$, entonces $\forall \varepsilon > 0$,

      1) $\exists N_1 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N_1 \implies |a_n - l| < \varepsilon$.

2) $\exists N_2 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N_2 \implies |b_n - l'| < \varepsilon$.

e) Hacemos $N = \max\{N_1, N_2\}$. Entonces:

$$|a_n \cdot b_n - l \cdot l'| \leq |a_n| \cdot |b_n - l'| + |a_n - l| \cdot |l'| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M} M = \varepsilon, n \geq N.$$

$\implies a_n b_n \to l \cdot l'$.

■

Teorema 19. *Si (a_n) converge a l, $l \neq 0$, entonces $a_n \neq 0$ a partir de algún $N \in \mathbb{Z}^+$ y*

$$\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{l}.$$

Demostración. Por hipótesis: $a_n \to l \implies |a_n| \to |l|$. Sea $\underline{\varepsilon = |l|/2} \implies \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N$, entonces $\underbrace{||a_n| - |l||} < |l|/2 \implies -(|a_n| - |l|) < |l|/2 \implies -|a_n| + |l| < |l|/2 \implies \underbrace{|l|/2 < |a_n|}_{1/|a_n| < 2/|l|}, \forall n \geq N$.

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{l}\right| = \left|\frac{l - a_n}{a_n \cdot l}\right| = \frac{|l - a_n|}{|a_n| \cdot |l|} = \frac{|a_n - l|}{|a_n| \cdot |l|} < \frac{|a_n - l|(2)}{|l| \cdot |l|} = \frac{2\overbrace{|a_n - l|}}{den}$$

$\implies 1/a_n \to 1/l$. ■

Teorema 20. *1. Si (a_n) es una sucesión de términos no negativos $\ni a_n \to l \implies l$ es no negativo.*

2. Si $a_n \to l$ y $b_n \to l'$, con $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \implies l \leq l'$.

Corolario 20.1. *Si $a_n \to l$ y si $\alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha a_n \to \alpha l$.*

Ejemplo 29. *Demuestre que* $\lim_{n \to \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$.

Solución. Dado $\varepsilon > 0 \exists N = \underline{2/\varepsilon} \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \implies \left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-1-(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

$$\implies \frac{n}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \implies n > 2/\varepsilon.$$

$\square$

Ejemplo 30. *Compruebe que* $\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right] = 0$.

Solución. Dado $\varepsilon > 0 \exists N = \underline{1/(4\varepsilon^2)} \in \mathbb{Z}^+ ni$ si $n \geq N \implies \left|\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) - 0\right| < \varepsilon$.

$\implies \left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \implies 2\sqrt{n} > 1/\varepsilon \implies \sqrt{n} > 1/2\varepsilon \implies n > 1/(4\varepsilon^2)$. $\square$

NOTA. *Considere las sucesiones:* $a_n = n$ *y* $b_n = (-1)^n$. *Ambas sucesiones divergen (i.e no converge).*

Definición 21. *Se dice que* (a_n) *tiende a infinito (*$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$*), si* $\forall M > 0 \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni a_n > M$.

NOTA. *La acotación de una sucesión no asegura convergencia.*

Teorema 21. *Suponga* $(x_n), (y_n), (z_n)$ *son sucesiones de números reales tal que*

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Si $\lim x_n = \lim z_n \implies (y_n)$ *converge y* $\lim x_n = \lim y_n = \lim z_n$.

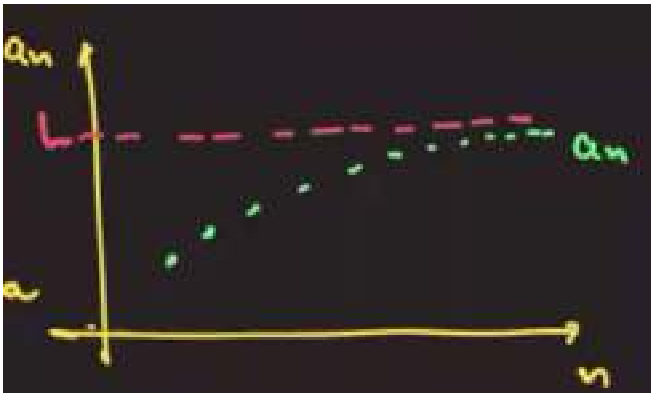
Demostración. Supóngase que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = w$. Si $\varepsilon > 0 \implies \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni |x_n - w| < \varepsilon$ y $|z_n - w| < \varepsilon$.

1. Si $\varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{Z}^+ \ni |x_n - w| < \varepsilon, \forall n \geq N_1$.
2. Si $\varepsilon > 0 \exists N_2 \in \mathbb{Z}^+ \ni |x_n - w| < \varepsilon, \forall n \geq N_2$.

$\implies$ Hagamos $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Como $x_n \leq y_n \leq z_n \implies x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Nótese que: $-\varepsilon < x_n - w < \varepsilon$, y que: $-\varepsilon < z_n - w < \varepsilon$. $\implies -\varepsilon < x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w < \varepsilon \implies -\varepsilon < y_n - w < \varepsilon \iff |y_n - w| < \varepsilon, \forall n \geq N$. $\implies$ Por la arbitrariedad de ε, $\lim_{n\to\infty} y_n = w$. $\implies \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n$. ∎

Teorema 22 (Convergencia monótona)**.** *Sea $X = (x_n)$ una sucesión de números reales que es monótona creciente; i.e. $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$. Entonces la sucesión (x_n) converge ssi (x_n) es acotada en cuyo caso $\lim(x_n) = \sup\{x_n\}$.*



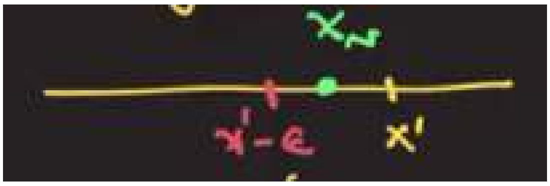
Demostración. Tenemos:

($\implies$) Sabemos que (x_n) converge. $\implies$ (x_n) es acotada. A probar: $\lim x_n = \sup\{x_n\}$. Como (x_n) es convergente. $\implies$ Sea $x_n \to l$, i.e. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \implies |x_n - l| < \varepsilon \implies -\varepsilon < x_n - l < \varepsilon \implies l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon. \implies$ Para $n \geq N$ se tiene $l + \varepsilon$ es cota superior de (x_n). Entonces:

$$l - \varepsilon < x_n < \underbrace{\sup\{x_n\}}_{\{x_n\} \text{ es acotado}} < l + \varepsilon.$$

$\implies l - \varepsilon < \sup\{x_n\} < l + \varepsilon \implies -\varepsilon < \sup\{x_n\} - l < \varepsilon \implies |\sup\{x_n\} - l| < \varepsilon \implies \underbrace{\lim x_n}_{l} = \sup\{x_n\}$.

($\Longleftarrow$) Suponemos que (x_n) es monótoma creciente y acotada. Entonces $\exists x' = \sup\{x_n\}$. A probar: $\lim x_n = x'$. Como $x' = \sup\{x_n\} \implies x' \geq x_n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Por otro lado, por caracterización de supremo, si $\varepsilon > 0 \implies \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$



$x' - \varepsilon < \underbrace{x_N}_{\substack{\text{elemento de}\\ \text{la sucesión}}}$. Como la sucesión es monótona creciente, se cumple que, $\forall n \geq N, x' - \varepsilon < x_N \underbrace{\leq}_{\substack{suc.\\ creciente}} x_n \underbrace{\leq}_{\substack{x'\\ supremo}} x' < x' + \varepsilon. \implies x' - \varepsilon < x_n < x' + \varepsilon, \quad n \geq N \implies -\varepsilon < x_n - x' < \varepsilon \iff |x_n - x'| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N \implies \lim x_n = x'$.

■

Corolario 22.1. *Sea (x_n) una sucesión de reales que es monótona decreciente; i.e.*

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdot \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots$$

Entonces, (x_n) es convergente ssi $\{x_n\}$ es acotado, en cuyo caso $\lim x_n = \inf\{x_n\}$.

Ejemplo 31. *Estudie la convergencia de la sucesión:*

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Solución. Utilicemos el Teorema de convergencia monótona: (i.e. probremos que (a_n) es creciente y acotada).

1. (a_n) es creciente: por inducción sobre n.

   a) $n = 0$; $a_0 = 0 < a_1 = \sqrt{6}$

   b) Suponemos para $n = k - 1$

$$\implies a_{k-1} < a_k$$

c) Probamos para $n = k+1$. $\implies a_{k-1} < a_k \implies a_{k-1}+6 < a_k+6 \implies \sqrt{a_{k-1}+6} < \sqrt{a_k+6} \implies a_k < a_{k+1} \implies (a_n)$ es creciente.

2. (a_n) es acotada. Por inducción sobre n:

   a) $n = 0$; $a_0 = 0 < 3$.

   b) Suponemos para $n = k-1 \implies a_{k-1} < 3$.

   c) Probamos para $n = k$;

$$\begin{aligned} a_{k-1} &< 3 \\ a_{k-1}+6 &< 9 \\ \sqrt{a_{k-1}+6} &< \sqrt{9} \\ a_k &< 3. \end{aligned}$$

   $\implies (a_n)$ está acotada. $\implies (a_n)$ converge.

3. Como sabemos que (a_n) es convergente $\implies$ Si n es muy grande $\implies$ $a_n \to L$, i.e.

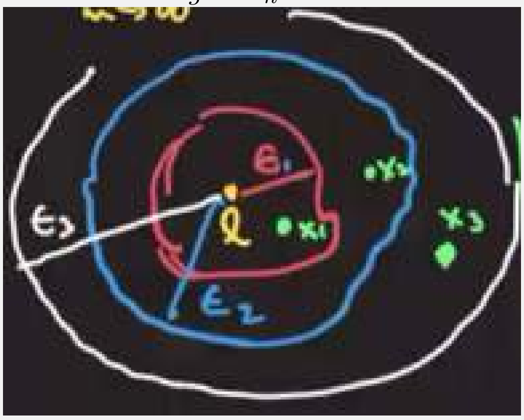
$$\underbrace{a_{n+1}}_{L} = \sqrt{\underbrace{a_n}_{L}+6}$$

$\implies L^2 = L+6 \implies L^2 - L - 6 = 0 \implies (L-3)(L+2) = 0 \implies L = 3$ o $\cancel{L = -2}$. $\implies \lim_{n\to\infty} a_n = 3$.

$\square$

NOTA. *Una interpretación altera de la definición de límite:* $\lim_{n\to\infty} a_n = l \iff \forall\varepsilon\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ *si* $n \geq N \implies |a_n - l| < \varepsilon$.

Cada bola centrada en l *tiene algún* a_n.



Lema 23. $a_n \to l \iff \underbrace{|a_n - l|}_{d(a_n,k)} \to 0$.

Demostración. $|a_n - l| \to 0$ ssi $\forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \implies ||a_n - l| - 0| = ||a_n - l|| = |a_n - l| < \varepsilon \iff a_n \to l$. ■

Teorema 24. *Un elemento* l *es un punto de acumulación de un conjunto* A *ssi existe una sucesión* (x_n) *de elemento de* A*, distinto de* l*, tal que* $x_n \to l$.

Demostración. Tenemos

($\Longleftarrow$) Sea (x_n) una sucesión de elementos de $A \ni x_n \to l$. $\implies$ Cada bola abierta centrada en l tiene un $x_n \in A$. $\implies$ l es un punto de acumulación de A.

($\implies$) Sea l un punto de acumulación de $A \implies$ Cada bola abierta centrada en l contiene un elemento de $x_n \in A$. Entonces, podemos formar la sucesión (x_n), de elementos de A diferentes de $l \ni x_n \in B_{1/n}(l) \implies x_n \to l$.

∎

Teorema 25. *Un conjunto A es cerrado ssi al límite de cada sucesión convergente de elementos de A está en A.*

3.1. Sucesiones de Cauchy

Definición 22. *Una sucesión (x_n) de elementos de un espacio métrico (X, d) es una sucesión de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n, m \geq N \implies \underbrace{d(x_n, x_m)}_{|x_n - x_m|} < \varepsilon$.*

Proposición 14. *Cada sucesión convergente es de Cauchy.*

Demostración. Sea $x_n \to l \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \implies |x_n - l| < \varepsilon/2$. Suponga que $n, m \geq N \implies |x_n - x_m| = |(x_n - l) + (l - x_m)| \leq |x_n - l| + |x_m - l| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon \implies (x_n)$ es de Cauchy. ∎

¿Cómo se prueba que: si (x_n) es de Cauchy $\implies (x_n)$ converge?

1. Cada sucesión de Cauchy (x_n) en $\mathbb{R}^n$ está acotada.
2. **Teorema de Bolzano-Weierstrass**- Cada sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ tiene una subsucesión convergente.
3. Si (x_n) es de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ y tiene una subsucesión convergente a $l \implies x_n \to l$.
4. Cada sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ es convergente.

Definición 23. *Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}^n$ y sea $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$ una sucesión de enteros positivos (estrictamente creciente), entonces la sucesión:*

$$x_{r_1}, x_{r_2}, \cdots, x_{r_n}, \cdots$$

es una subsucesión de (x_n).

$$(x_n) = x_1, \underbrace{x_2}_{\substack{x_2 \\ r_1}}, x_3, \underbrace{\cdots}_{\substack{x_5 \\ r_2}}, \underbrace{x_n}_{\substack{x_8 \\ r_3}}, \cdots$$

NOTA. *Sea $g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ una función estrictamente creciente.*

Ejemplo 32. *Si $X = (x_n)$ es una sucesión sobre $\mathbb{R}^n \implies x \circ g := \big(x_{g(n)}\big)$ es una subsucesión de X.*

Ejemplo 33. *Ejemplos*

1. *Dada la sucesión (x_n), entonces*

   a) *La subsucesión (x_{2n}) se llama sucesión par de (x_n).*

   b) *La subsucesión (x_{2n-1}) se llama subsucesión impar de (x_n).*

2. *Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$ y sea $m \in \mathbb{Z}^+$ (fijo). Entonces:*

$$(x_{k+m-1})_{k \in \mathbb{Z}^+}$$

   es una subsucesión de (x_n).

$$(x_n) : x_1, x_2, x_3, \cdots$$

$$(x_{k+m-1}) : x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots$$

Teorema 26. *Si $x_n \to l$, entonces cualquier subsucesión de (x_n) también converge a l.*

Demostración. Como $x_n \to l \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \implies |x_n - l| < \varepsilon$. Sea $x' = (x_{r_1}, x_{r_2}, \cdots)$ una subsucesión de $x = (x_n)$. Como $r_n \geq n \implies r_n \geq N \implies |x_{r_n} - l| < \varepsilon$. Entonces, $x_{r_n} \to l$. ■

Corolario 26.1. *Si $x_n \to l$ y si $m \in \mathbb{Z}^+$ (fijo) $\implies x' = (x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots)$ converge a l.*

Teorema 27 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Si (x_n) es acotada en $\mathbb{R}^n$, entonces (x_n) tiene una subsucesión convergente.*

> $(-1)^n$ es acotado y divergente.
> $((-1)^n)_{2n} \to 1$
> $((-1)^n)'_{2n-1} \to -1$

Teorema 28. *Cada sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ es acotada.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy. ($[\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n, m \geq N \implies |x_m - x_n < \varepsilon]$). $\implies$ Sea $\varepsilon = 1 \implies \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ Para $m = N$ y $n > N$, se tiene que $|x_n - x_m| < 1$. Por desigualdad triangular:

$$|x_n| - |x_m| < 1$$

$$\implies |x_n| < |x_m| + 1, \quad n > N = m$$

$\implies$ Sea $c = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{m-1}|, |x_m| + 1\} \implies |x_n| \leq c, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \implies$ (x_n) es acotada. ■

Teorema 29 (Criterio de convergencia de Cauchy)**.** *Una sucesión (x_n) en $\mathbb{R}^n$ es convergente ssi (x_n) es de Cauchy.*

Demostración.

$(\implies)$ Por teorema anterior; si (x_n) converge $\implies (x_n)$ de Cauchy.

$(\impliedby)$ Sea (x_n) de Cauchy, por (1), (x_n) es acotado; por (2), (x_n) tiene una subsucesión convergente; y, por (3), (x_n) converge. ■

NOTA. *Un espacio métrico en el que cada sucesión de Cauchy converge en un espacio completo.*

Ejemplo 34. *Considere la sucesión (x_n) definida por:*

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}, \quad n > 2.$$

> (x_n) *no es monótona:* $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1{,}5, \cdots$ *(no aplica el teorema de convergencia monótona).*

Solución. A probar: (x_n) es de Cauchy

1. Nótese que $1 \leq x_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. En efecto, por inducción sobre n:

   a) Probamos para $n = 1 \implies 1 \leq x_1 = 1 \leq 2$.

   b) Suponemos la propiedad para $n \leq k - 1$.

   $$1 \leq x_{k-1} \leq 2$$

   c) Probamos para $n = k$

   $$+\begin{cases} 1 \leq x_{k-1} \leq 2 \\ 1 \leq x_{k_2} \leq 2 \end{cases}$$

   $\implies 2 \leq x_{k-1} + x_{k-2} \leq 4 \implies 1 \leq \frac{x_{k-1}+x_{k-2}}{2} \implies 1 \leq x_k \leq 2.$
   $\implies 1 \leq x_n \leq 2, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$

2. *a*) $|x_n - x_{n+1}| = \left|x_n - \left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}\underbrace{|x_n - x_{n-1}|}_{x_{n-1}-x_n} = \frac{1}{2^2}|x_{n-1} - x_{n-2}| = \frac{1}{2^3}|x_{n-2} - x_{n-3}| = \cdots = \frac{1}{2^{n-1}}\underbrace{|x_2 - x_1|}_{1}.$

b) Sea $m > n$, entonces: $|x_n - x_m| = |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + \cdots + (x_{m-1} - x_m)| \leq |x_m - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m| = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-2}}$. $\implies |x_n - x_m| \leq \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right) < \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{1-(1/2)}\right) = \frac{2}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}}$. $\implies \frac{1}{2^{n-2}} < \varepsilon \implies \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{4} \implies 2^n > \frac{4}{\varepsilon} \implies n > \log_2\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)$.

3. Dado $\varepsilon > 0 \exists N = \log_2\left(\frac{4}{\varepsilon}\right) \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n, m \geq N \implies |x_n - x_m| < \varepsilon \implies (x_n)$ es de Cauchy. $\implies (x_n)$ es convergente por el criterio de Cauchy). $\implies x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$; si $n \geq N$, entonces $\implies L = \frac{1}{2}(L + L) \iff L = L \implies$ este método no es útil para encontrar el límite.

NOTA. *Sabemos que* (x_n) *es convergente* $\implies \lim_{n\to\infty} x_n = L$. *Por teorema, buscamos una subsuceción convergente (está converjerá a* L*)*

4. Considere la subsuceción (x_{2n-1})

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 \\
x_2 &= 2 \\
x_3 &= \frac{1+2}{2} = 1 + \frac{1}{2} \\
x_4 &= \frac{3/2+2}{2} = 7/4 \\
x_5 &= \frac{7/4+3/2}{2} = 7/8 + 3/4 = 3/4 + 2/8 + 5/8 = 1 + 1/2 + 1/2^3 \\
x_7 &= 1 + 1/2 + 1/2^3 + 1/2^5 \\
x_{2n-1} &= 1 + 1/2 + 1/2^3 + \cdots + 1/2^{2n-3}
\end{aligned}
$$

$\implies x_{2n-1} = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + 1/4 + 1/4^2 + \cdots + 1/4^{n-2}\right) =$

$$\boxed{2^{2n-4} = 2^{2n}2^{-4} = (2^2)^n(2^2)^{-2} = 4^n 4^{-2}}$$

$= 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{1-1/4}\right]. \implies \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1-(1/4)^{n-1}}{1-1/4}\right]\right] = 1 + \frac{1}{2}(4/3) = 1 + 2/3 = 5/3. \therefore \lim x_{2n-1} = 5/3 \implies \lim(x_n) = 5/3.$

$\square$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1-\cancel{(1/4)^{n-1}}}{1-1/4}\right]\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \lim x_{2n-1} = 5/3 \Rightarrow \lim(x_n) = \frac{5}{3}$$

Ej: Sea (a_n) la sucesión definida por:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}.$$

Pruebe que (a_n) es de Cauchy.

• Nó tene que $a_n \geq 1, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

$\Rightarrow a_n > 1, \ \forall n > 1$

• $|a_{n+1} - a_n| = \left|\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) - \left(1 + \frac{1}{a_{n-1}}\right)\right| =$

$= \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}}\right| = \left|\frac{a_{n-1} - a_n}{a_n \cdot a_{n-1}}\right| = \left|\frac{a_n - a_{n-1}}{a_n \cdot a_{n-1}}\right|$

$$a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}} \Rightarrow a_n \cdot a_{n-1} = \overset{a_{n-1} \geq 1}{a_{n-1}} + 1 \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_n \cdot a_{n-1}} \leq \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow |a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}| \leq \frac{1}{2^2}|a_{n-1} - a_{n-2}| \leq \dots$

$\dots \leq \frac{1}{2^{n-1}}|a_2 - a_1|$

Sea $m > n$. Entonces:

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + \dots + (a_{n+1} - a_n)|$$

$$\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \dots + |a_{n+1} - a_n|$$

$$\leq \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{m-3}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n}} + \dots + \frac{1}{2^{m-3}} + \frac{1}{2^{m-2}}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n-1}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{1-1/2}\right) = \frac{2}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}}$$

$$\Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{1}{2^{n-2}}$$

$$\frac{1}{2^{n-2}} < \epsilon \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{4} \Rightarrow n > \log_2\left(\frac{4}{\epsilon}\right) \cdot$$

Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $N = \log_2\left(\frac{4}{\epsilon}\right) \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n, m \geq N$

$\Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon \Rightarrow (a_n)$ es de Cauchy

$\Rightarrow (a_n)$ converge. Nōtese que:

Si $L = 1 + \frac{1}{L} \Rightarrow L^2 - L - 1 = 0$

$$\Rightarrow L = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \cancel{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

Ej: Pruebe que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, utilizando sucesiones de Cauchy.

Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \in \mathbb{Z}^+$. A probar,

(S_n) es de Cauchy

Sean $\boxed{m, n \geq N}$: $\Rightarrow |S_m - S_n| = \left| \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right| =$
$(m > n)$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \left| \frac{1}{k^2} \right| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2}$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2 - k} \leq \sum_{k=N}^{m} \frac{1}{k^2-k} = \sum_{k=N}^{m} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right]$$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \ \ni \ n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \ \ni$ si $n \geq N \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \epsilon, \ \forall p,$
$p = 1, 2, \ldots$

Ej: Probar que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge (utilizando Cauchy)

Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, la n-ésima suma parcial.

A probar: (S_n) converge (i.e. (S_n) es de Cauchy).

Sea $N \in \mathbb{Z}^+$ y considere $m, \boxed{n \geq N}$ $(m > n)$ $\Rightarrow$

$$|S_m - S_n| = \left|\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2}\right| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} <$$

$\boxed{n+1 > n \geq N}$

$$\leq \sum_{k=N}^{m} \frac{1}{k^2}$$

$$< \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^2-k} = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$$

Fracciones parciales

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k-1} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$= \sum_{k=N}^{\infty} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{N-1} - \cancel{\frac{1}{N}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{N}} - \cancel{\frac{1}{N+1}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{N+1}} - \cancel{\frac{1}{N+2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{N+2}} - \frac{1}{N+3} \right) + \cdots$$

Cuando se calculen muchos términos, se tiene que:

$$|S_m - S_n| < \sum_{k=N}^{\infty} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right] = \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N+\text{[illegible]}}$$

$$\Rightarrow |S_m - S_n| < \frac{1}{N-1} < \epsilon \Rightarrow N-1 > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow N > \frac{1}{\epsilon} + 1$$

$\Rightarrow$ Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $N = \frac{1}{\epsilon} + 1$ $\ni$ Si $n, m \geq N$ $\Rightarrow$ $|s_m - s_n| < \epsilon$ $\Rightarrow$ (s_n) es de Cauchy $\Rightarrow$ (s_n) converge $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge.

Otros problemas de Convergencia:

Ej: $\lim_{n \to \infty} n^{1/n} = 1$

$(n^{1/n}) : 1, 2^{1/2}, 3^{1/3}, \ldots$

$: 1, 1.4142, 1.4422, \ldots$

Nótese que $n^{1/n} = 1 + r_n$, donde (r_n) es una sucesión de números reales. A probar: $r_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Entonces,

$$n^{1/n} = 1 + r_n$$

$$\Rightarrow n = (1 + r_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot r_n^{n-k} \geq$$

$\Rightarrow$ Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $N = \frac{1}{\epsilon} + 1$ $\ni$ si $n, m \geq N$ $\Rightarrow$

$|s_m - s_n| < \epsilon$ $\Rightarrow$ (s_n) es de Cauchy $\Rightarrow$ (s_n)

converge $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge.

<u>Otros problemas de convergencia</u>:

Ej: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ $\quad (n^{1/n}) : 1, 2^{1/2}, 3^{1/3}, \ldots$

$: 1, 1.4142, 1.4422, \ldots$

Nótese que $\boxed{n^{1/n} = 1 + r_n}$, donde (r_n) es una sucesión de números reales. A probar: $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Entonces,

$$n^{1/n} = 1 + r_n$$

$$\Rightarrow \quad n = (1 + r_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r_n^k \cdot 1^{n-k} \geq$$

Ej: $\forall a>0$, $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$

Ayuda: Utilice la desigualdad de Bernoulli

Desigualdad de Bernouilli:

$\forall\ \boxed{x > -1}$, se tiene que $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Por inducción sobre n:

i) $n=1$ $\quad (1+x)^1 = 1 + 1\cdot x$

ii) Suponemos la prop. para $n=k$, i.e. $(1+x)^k \geq 1+kx$

iii) Probamos para $n = k+1$

$$\Rightarrow \quad (1+x)^k \geq 1 + kx$$

$$\Rightarrow \quad (1+x)^k(1+x) \geq (1+x)(1+kx)$$

$$= 1 + kx + x + kx^2$$

$$= 1 + (k+1)x + kx^2$$

$$\geq 1 + (k+1)x \Rightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$$

$$\Rightarrow (1+x)^n \geq 1 + xn. \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$\dashv$

Sol: Nótese que $a^{1/n} = 1 + r_n$, donde (r_n) es una sucesión de reales positivos. A probar: $r_n \to 0$.

$$\Rightarrow a^{1/n} = 1 + r_n \Rightarrow a = (1+r_n)^n \underset{\uparrow \text{ Bernoulli:}}{\geq} 1 + n\cdot(r_n)$$

$$\Rightarrow a \geq 1 + n(r_n) \geq n(r_n)$$

$$\Rightarrow r_n \leq \frac{a}{n} \Rightarrow \text{si } n \to \infty \Rightarrow \frac{a}{n} \to 0 \Rightarrow r_n \to 0$$

$$\Rightarrow a^{1/n} \longrightarrow 1.$$

$$\Rightarrow \quad n \geq \binom{n}{2} r_n^2 \cdot 1^{n-2} \Rightarrow n \geq \frac{n!}{2!\,(n-2)!}\, r_n^2$$

$$\frac{n \cdot (n-1)\cancel{(n-2)!}}{2 \cdot \cancel{(n-2)}\,!}$$

$$\Rightarrow \cancel{n} \geq \frac{\cancel{n}(n-1)}{2}\, r_n^2$$

$$\Rightarrow r_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \Rightarrow \frac{2}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow r_n \longrightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 0.$$

<u>Eliminación de Formas indeterminados</u>

<u>Motivación</u>: Suponga que $a_n = 1/n$ y $b_n = 1/n$

nótese que $\lim a_n = \lim b_n = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{0}{0}, \text{ pero } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/n} = 1$$

i.e Se puede tener que $a_n \to 0$ y $b_n \to 0$, y que además, la sucesión $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ converge.

¿Hay generalizaciones?

<u>Teorema</u>: (Stolz - Cesàro) (caso $\frac{0}{0}$)

Sean (a_n) y (b_n) sucesiones de reales $\ni$:

i) $a_n \to 0$, $b_n \to 0$

ii) (b_n) es una sucesión estrictamente monótona; y

iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$ (probablemente, $l \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$)

Entonces, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Gorbatov.
Matemática Discreta
Editorial Mir

<u>Dem</u>: Sea (b_n) una sucesión decreciente.

<u>caso 1</u>: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \mathbb{R} \Rightarrow$ dado $\epsilon > 0$

$$\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni \left| \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - l \right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad -\epsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - l < \epsilon$$

$$\Rightarrow \ell - \epsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < \epsilon + \ell$$

$\leftarrow$ como (b_n) es decreciente
$\Rightarrow b_{n+1} - b_n < 0$

$$\Rightarrow (\ell - \epsilon)(b_{n+1} - b_n) > a_{n+1} - a_n > (\epsilon + \ell)(b_{n+1} - b_n) \quad (*)$$

Fijemos un $n \in \mathbb{Z}^+$ y escribamos $(*)$ para $n, n+1, \dots, n+p-1$. Luego, sumamos las $p+1$ desigualdades, obteniéndose lo siguiente:

$$(\ell - \epsilon)(\cancel{b_{n+1}} - b_n) > a_{n+1} - a_n > (\epsilon + \ell)(b_{n+1} - b_n)$$

$$(\ell - \epsilon)(\cancel{b_{n+2}} - \cancel{b_{n+1}}) > a_{n+2} - a_{n+1} > (\epsilon + \ell)(b_{n+2} - b_{n+1})$$

$$\vdots$$

$$(\ell - \epsilon)(b_{n+p} - \cancel{b_{n+p-1}}) > a_{n+p} - a_{n+p-1} > (\epsilon + \ell) \cdot (b_{n+p} - b_{n+p-1})$$

$\Rightarrow (l-\epsilon)(b_{n+p}-b_n) > a_{n+p}-a_n > (l+\epsilon)(b_{n+p}-b_n)$

Si $p \to \infty$, se tiene que $b_{n+p} \to 0$ y $a_{n+p} \to 0$

$\Rightarrow (l-\epsilon)(-b_n) > -a_n > (l+\epsilon)(-b_n)$

$\Rightarrow (l-\epsilon)(b_n) < a_n < (l+\epsilon)(b_n)$

Caso(1.1) $b_n > 0 \Rightarrow l-\epsilon < \frac{a_n}{b_n} < l+\epsilon$

$\Rightarrow -\epsilon < \frac{a_n}{b_n} - l < \epsilon$

$\Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| < \epsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$

Teorema (Stolz- Césaro) (caso $\frac{0}{0}$)

Sean (a_n) y (b_n) sucesiones de reales $\ni$ $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ y (b_n) es estrictamente monótona.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$.

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

Dem: Considérese (b_n) es estrictamente decreciente $(b_n > 0)$

Casos: ① $l \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n > N$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - l \right| < \epsilon$$

$$\Rightarrow -\epsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - l < \epsilon$$

$$\Rightarrow l - \epsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{\underbrace{b_{n+1} - b_n}_{<0}} < l + \epsilon$$

$$\Rightarrow (l-\epsilon)(b_{n+1} - b_n) > a_{n+1} - a_n > (l+\epsilon)(b_{n+1} - b_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{(l-\epsilon)(b_n - b_{n+1}) < a_n - a_{n+1} < (l+\epsilon)(b_n - b_{n+1})}$$

$\forall n > N$

Sea $p \in \mathbb{Z}^+$, entonces:

$$\frac{a_n - a_{n+p}}{b_n - b_{n+p}} = \frac{(a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \dots + (a_{n+p-1} - a_{n+p})}{b_n - b_{n+p}}$$

$$= \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+p}} + \frac{a_{n+1} - a_{n+2}}{b_n - b_{n+p}} + \dots + \frac{a_{n+p-1} - a_{n+p}}{b_n - b_{n+p}}$$

$$\Rightarrow \frac{(l-\epsilon)(b_n - b_{n+1})}{b_n - b_{n+p}} + \frac{(l-\epsilon)(b_{n+1} - b_{n+2})}{b_n - b_{n+p}} + \dots + \frac{(l-\epsilon)(b_{n+p-1} - b_{n+p})}{b_n - b_{n+p}}$$

$$\leq \frac{a_n - a_{n+p}}{b_n - b_{n+p}} \leq$$

$$\leq \frac{(l+\epsilon)(b_n - b_{n+1})}{b_n - b_{n+p}} + \dots + \frac{(l+\epsilon)(b_{n+p-1} - b_{n+p})}{b_n - b_{n+p}}$$

$$\Rightarrow \frac{(l-\epsilon)}{\cancel{b_n - b_{n+p}}}(\cancel{b_n - b_{n+p}}) \leq \frac{a_n - a_{n+p}}{b_n - b_{n+p}} \leq \frac{(l+\epsilon)}{\cancel{b_n - b_{n+p}}}(\cancel{b_n - b_{n+p}})$$

Fijamos n y hacemos $p \to \infty$ $\quad a_{n+p} \to 0$ y $b_{n+p} \to 0$

(hipótesis)

$$\Rightarrow \ell - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < \ell + \epsilon \Rightarrow -\epsilon < \frac{a_n}{b_n} - \ell < \epsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} - \ell \right| < \epsilon, \quad \forall n > N \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell.$$

② $\ell = \infty$:

Sea $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni \forall n > N$, se tiene que

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{\underbrace{b_{n+1} - b_n}_{<0}} > \epsilon. \text{ Entonces}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n < \epsilon (b_{n+1} - b_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n - a_{n+1} > \epsilon (b_n - b_{n+1}), \quad n > N}$$

Sean $\underline{m, n > N}$ $\ni m > n$. Entonces

$$\Rightarrow a_n - a_m = (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + (a_{m-1} - a_m)$$

$$= \sum_{k=n}^{m-1} (a_k - a_{k+1})$$

$$> \epsilon \sum_{k=n}^{m-1} (b_k - b_{k+1})$$

$$= \epsilon (b_n - b_m)$$

$\Rightarrow a_n - a_m > \epsilon (b_n - b_m)$. Dividimos por b_n.

$\Rightarrow \dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a_m}{b_n} > \epsilon \left(1 - \dfrac{b_m}{b_n}\right)$. Hacemos $m \to \infty$

$\Rightarrow \dfrac{a_n}{b_n} > \epsilon$, para $n > N \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$.

$\square$

Teorema (Stolz - Césaro): Sean (a_n) y (b_n) sucesiones de reales $\ni$ (b_n) es estrictamente creciente a ∞ y que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Entonces, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$

$\square$

Nota: El converso del Teorema Stolz-Cesaro no se cumple; en efecto, considere:

$$a_n = \frac{1}{3n-(-1)^n} \quad \text{\&} \quad b_n = \frac{1}{3n+(-1)^n}$$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, pero $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ no existe.

Teorema (Converso de Stolz-Césaro): Sean (a_n) y (b_n) sucesiones $\ni$:

i) $0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n < \cdots$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{b_{n+1}} = L \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell$

$\square$

1.- Encuentre $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3}$

- Nótese que (n^3) es estrictamente creciente y $\lim_{n\to\infty} n^3 = \infty$
- Sean $(a_n) = (1^2+2^2+\dots+n^2)$ y $(b_n) = (n^3)$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = [1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2] - [1^2+2^2+\dots+n^2]$

$$= (n+1)^2 = n^2+2n+1$$

$$b_{n+1} - b_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2+3n+1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{3n^2+3n+1} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

2.. Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2\sqrt{e}+3\sqrt[3]{e}+\dots+n\sqrt[n]{e}}{n^2}$

Sol: Sea $a_n = 1+2\sqrt{e}+\dots+n\sqrt[n]{e}$; $b_n = n^2$.

Nótese que (b_n) es estrictamente creciente y $b_n \to \infty$. además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)e^{1/(n+1)}}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} e^{1/n+1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)(1) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = 1/2.$

3) Calcule $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(n+1)}$

Sol: Sean $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ y $b_n = \ln(n+1)$

Nótese que b_n es creciente y $b_n \to \infty$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\ln(n+1) - \ln(n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\ln(e)} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

3.2. HT

Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada
8 de marzo de 2021
Rudik Roberto Rompich - Carné: 19857

Análisis de Variable Real 1 - Dorval Carías

HT 2

1. Ejercicios

Definiciones y Teoremas: (Se considerarán las definiciones y teoremas del libro de Bartle and Sherbert.

Definición 1. Se dice que una secuencia $X = (x_n)$ en $\mathbf{R}$ converge a un $x \in \mathbf{R}$, si para cada $\epsilon < 0$ existe un número natural $K(\epsilon)$ tales que para todos $n \geq K(\epsilon)$, los términos de x_n satisfacen $|x_n - x| < \epsilon$

Definición 2. Una $X = (x_n)$ de números reales se dice que es una secuecia de Cauchy si para cada $\epsilon > 0$ existe un número natural $H(\epsilon)$ tal que para todos los números naturales $n, m \geq H(\epsilon)$, los términos x_n, x_m satisfacen $|x_n - x_m| < \epsilon$

Definición 3. Una secuencia $X = (x_n)$ de números reales se dice que es acotada si existe un núm ero real $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Definición 4. Sea una secuencia $X = (x_n)$ de números reales. Se dice que es creciente si satisface $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq x_{n+1} \leq ...$

Teorema 1. **Teorema de la convergencia monótona**. Una secuencia monótona de números reales es convergente si y solo si es acotada. Es decir (en el caso de cota superior): Si $X = (x_n)$ es una secuencia acotada creciente, entonces: $\lim(x_n) = sup\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$

Teorema 2. Sea $X = (x_n : n \in \mathbf{N})$ una secuencia de números y sea $m \in \mathbf{N}$. Entonces la $m-$cola $X_m = (X_{m+n} : n \in \mathbf{N}$ de X converge si y solo si X converge. En este caso, $\lim X_m = \lim X$.

1.1. Problema 1

Demuestre que una secuencia monótona creciente y acotada es de Cauchy.

Demostración.

Por hipótesis, sabemos que existe una secuencia (x_n) que es acotada y monótona creciente. Asumamos que $u = \lim(x_n) = \sup\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ (por Teorema 1), $\epsilon > 0$ y $H(\epsilon) \in \mathbf{N}$. Definamos $H(\epsilon) = H$; entonces, por definición de supremo, se debe cumplir:

$$u - \epsilon < x_H \leq u \tag{1}$$

Por otra parte, supongamos $n \geq m \geq H$. Además, por hipótesis también sabemos que es una secuencia creciente, entonces tomamos la definición 4, en donde:

$$x_H \leq x_m \leq x_n \tag{2}$$

Es decir, si combinamos (1) y (2), tenemos:

$$u - \epsilon < x_H \leq x_m \leq x_n \leq u \tag{3}$$

Ahora bien, para determinar que es una secuencia de Cauchy, debemos comprobar que $|x_n - x_m| < \epsilon$ (según la definición 2). Notamos que se pueden sacar dos desigualdades de la expresión:

$$u - \epsilon < x_m \leq u \tag{4}$$
$$u - \epsilon < x_n \leq u \tag{5}$$

Notamos que la desigualdad (4) la podemos expresar como: $-1(u - \epsilon < x_m \leq u) \implies -u + \epsilon > -x_m \geq -u$. Entonces si sumamos los dos términos tenemos que:

$$-u \leq -x_m < -u + \epsilon \tag{6}$$
$$u - \epsilon < x_n \leq u \tag{7}$$
$$\implies (-u) + (u - \epsilon) < (x_n) + (-x_m) < (-u + \epsilon) + u \tag{8}$$
$$\implies -\epsilon < (x_n) + (-x_m) < \epsilon \tag{9}$$
$$\implies |(x_n) + (-x_m)| < \epsilon \tag{10}$$

Por lo tanto, (x_n) es una secuencia de Cauchy. □

1.2. Problema 2

Si $x_n = \sqrt{n}$, demuestre que (x_n) satisface que $|x_{n+1} - x_n| = 0$, pero no es una sucesión de Cauchy.

Demostración.

Consideremos $x_{n+1} = \sqrt{n+1}$, entonces la expresión:

$$|x_{n+1} - x_n| = |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| \tag{1}$$

Considerando que es necesario encontrar $\lim(|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|)=0$. Se propone otra notación para tratar el problema. Primero, sabemos que $\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)=1$,por lo que se tiene:

$$\begin{aligned}
&= \left|\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)\right| && (2)\\
&= \left|\frac{(n+1)+\sqrt{n}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\sqrt{n+1}-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| && (3)\\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| && (4)
\end{aligned}$$

Es decir, que tenemos $\lim\left(|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|\right)=\lim\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right|\right)=0$, para comprobarlo, usamos la definición 1, dado $\epsilon>0$ entonces $\exists N=\left(\frac{1}{2\epsilon}\right)^2$ tal que $n\geq\left(\frac{1}{2\epsilon}\right)^2$ y que satisface $|x_n-x|<\epsilon$:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right|\leq\left|\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{1}{2\sqrt{n}}\right|<\epsilon \tag{5}$$

Despejando para n y tomando en cuenta el caso positivo:

$$n=\left(\frac{1}{2\epsilon}\right)^2 \tag{6}$$

Por lo tanto, sabemos que el límite de la secuencia es cero. Por otra parte, para comprobar que no es una secuencia de Cauchy, se propone un contraejemplo: $\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}<\epsilon, n=n, m=4n$, entonces se tiene:

$$|x_m-x_n|=|(\sqrt{4n})-(\sqrt{n})|=|2(\sqrt{n})-(\sqrt{n})|=|\sqrt{n}| \tag{7}$$

Entonces, sabemos que $\sqrt{n}$ siempre tiene que ser ≥ 1. Por lo tanto, no cumple con la definición 2, que afirma que se debe satisfacer $|x_n-x_m|<\epsilon$. Entonces, no es una sucesión de Cauchy. □

1.3. Problema 3

Si $x_1<x_2$ son números reales arbitrarios y $x_n=\frac{1}{2}(x_{n-2}+x_{n-1})$ para $n>2$, pruebe que (x_n) converge. Encuentre el límite.

La siguiente demostración, tomará como referencia el ejercicio resuelto en clase en donde $x_1=1$ y $x_2=2$.

Demostración. Es necesario demostrar que (x_n) converge, es decir, tenemos dos posibilidades:

1. Si la serie es monótona se podría usar el Teorema de Convergencia Monótona. Propongamos $n=1$, entonces se tiene $x_3=\frac{1}{2}(x_1+x_2)<x_2$. Entonces, (x_n) no es monótona y por lo tanto no se puede utilizar para demostrar convergencia.

2. Si (x_n) es una secuencia de Cauchy, entonces debe converger.

Procedemos a probar que (x_n) es de Cauchy (basándonos en la definición 2). Primero, ya que los términos son generados por un promedio, es necesario encontrar una relación entre $|x_n - x_{n+1}|$:

$$\begin{aligned}
|x_n - x_{n+1}| &= \left| x_n - \left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}| && (1)\\
&= \frac{1}{2^2}|x_{n-1} - x_{n-2}| = \frac{1}{2^3}|x_{n-2} - x_{n-3}| = ... = \frac{1}{2^{n-1}}|x_2 - x_1| && (2)
\end{aligned}$$

En general, supongamos que $m > n$, entonces:

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + ... + (x_{m-1} - x_m)| && (3)\\
&\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{x+2}| + ... + |x_{m-1} - x_m| && (4)\\
&= \left[\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{m+1}} + ... + \frac{1}{2^{m-2}}\right]|x_2 - x_1| && (5)\\
&= \left[\frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-m-1}}\right)\right]|x_2 - x_1| && (6)\\
&= \left[\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]|x_2 - x_1| && (7)\\
&= \left[\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)}\right)\right]|x_2 - x_1| && (8)\\
&= \left[\frac{2}{2^{n-1}}\right]|x_2 - x_1| && (9)\\
&= \left[\frac{1}{2^{n-2}}\right]|x_2 - x_1| && (10)
\end{aligned}$$

Es decir, que $|x_n - x_m| \leq [2^{2-n}]|x_2 - x_1|$. Entonces, dado $\epsilon > 0 \exists H = \log_2\left(\frac{4|x_2-x_1|}{\epsilon}\right) \in \mathbf{Z}^+ \ni$ si $n, m > H \implies |x_n - x_m| < \epsilon$ tal que:

$$\begin{aligned}
[2^{2-n}]|x_2 - x_1| < \epsilon &\implies [2^2 2^{-n}] < \frac{\epsilon}{|x_2 - x_1|} \implies \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{4|x_2 - x_1|} && (11)\\
&\implies 2^n > \frac{4|x_2 - x_1|}{\epsilon} \implies \log_2(2^n) > \log_2\left(\frac{4|x_2 - x_1|}{\epsilon}\right) && (12)\\
&\implies n > \log_2\left(\frac{4|x_2 - x_1|}{\epsilon}\right) && (13)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, es una sucesión de Cauchy y por criterio de Cauchy, la sucesión debe converger. Como (x_n) converge, procedemos a encontrar su límite por la subsecuencia de números impares x_{2n-1}, es decir:

$$x_{2n-1} = x_1 + \frac{|x_2 - x_1|}{2} + \frac{|x_2 - x_1|}{2^3} + \frac{|x_2 - x_1|}{2^5} + ... + \frac{|x_2 - x_1|}{2^{2n-1}} \qquad (14)$$

Como $x_2 > x_1$, entonces podemos quitar el valor absoluto. Se procede con lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{lím}(x_n) &= x_1 + \frac{2}{3}(x_2 - x_1) && (15)\\ &= x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_1 && (16)\\ &= \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 && (17) \end{aligned}$$

□

1.4. Problema 4

Sea $\alpha \in (0, 2)$. Considere la sucesión definida por:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + (1 - \alpha)x_{n-1}, \forall n \geq 1$$

Encuentre el límite de la sucesión en términos de α, x_0, x_1.

Demostración. Según las condiciones del problema, es necesario encontrar el límite de la sucesión en términos de α, x_0, x_1. Se propone, el método para sucesiones de recurrencia de segundo orden, es decir:

Tenemos:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + (1 - \alpha)x_{n-1} \tag{1}$$

Si asignamos arbitrariamente $x^2 = x_{x+1}, x = x_n$ y $1 = x_{n-1}$:

$$\begin{aligned} x^2 &= \alpha x + (1 - \alpha) && (2)\\ 0 &= x^2 - \alpha x + (a - 1) && (3) \end{aligned}$$

Aplicamos la fórmula de Vieta y encontramos que $x_1 = (\alpha - 1)$ y $x_2 = 1$, entonces se tiene:

$$x_{n+1} = C_1(\alpha - 1)^n + C_2(1)^n \tag{4}$$

Será necesario encontrar las constantes C_1 y C_2. Por hipótesis, sabemos que tiene que estar en términos de x_0, x_1, α y $n \geq 1$.

Para $n = 1$:

$$x_{1+1} = C_1(\alpha - 1)^1 + C_2(1)^1 \tag{5}$$

Para $n = 2$:

$$x_{2+1} = C_1(\alpha - 1)^2 + C_2(1)^2 \tag{6}$$

Entonces tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1(\alpha-1)^1 + C_2 = x_2 \\ C_1(\alpha-1)^2 + C_2 = x_3 \end{cases} \tag{7}$$

Consideremos también, que x_2 y x_3, tienen una igualdad con la expresión original:

$$\begin{align} x_2 &= \alpha x_1 + (1-\alpha)x_0 \tag{8}\\ x_3 &= \alpha x_2 + (1-\alpha)x_1 \tag{9}\\ &= \alpha[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_0] + (1-\alpha)x_1 \tag{10}\\ &= \alpha^2 x_1 + \alpha(1-\alpha)x_0 + (1-\alpha)x_1 \tag{11}\\ &= (\alpha^2-\alpha+1)x_1 + (\alpha-\alpha^2)x_0 \tag{12} \end{align}$$

Entonces, aplicando una substitución a la segunda ecuación de (7):

$$\begin{align} C_1 &= \frac{x_2 - C_2}{(\alpha-1)} \tag{13}\\ &\implies \left(\frac{x_2 - C_2}{(\alpha-1)}\right)(\alpha-1)^2 + C_2 = x_3 \tag{14}\\ &\implies (x_2 - C_2)(\alpha-1) + C_2 = x_3 \tag{15}\\ &\implies \alpha x_2 - x_2 - \alpha C_2 + 2C_2 = x_3 \tag{16}\\ &\implies (2-\alpha)C_2 + (\alpha-1)x_2 = x_3 \tag{17}\\ C_2 &= \frac{x_3 - (\alpha-1)x_2}{2-\alpha} \tag{18} \end{align}$$

Ahora bien, se substituye C_2 y C_3 con los valores de encontrados en (8) y (12):

$$\begin{align} C_2 &= \frac{(\alpha^2-\alpha+1)x_1 + (\alpha-\alpha^2)x_0 - (\alpha-1)[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_0]}{2-\alpha} \tag{19}\\ &= \frac{(\alpha^2-\alpha+1)x_1 + (\alpha-\alpha^2)x_0 - (\alpha^2-\alpha)x_1 + (1-\alpha)^2 x_0}{2-\alpha} \tag{20}\\ &= \frac{[(\alpha^2-\alpha+1) - (\alpha^2-\alpha)]x_1 + [(\alpha-\alpha^2) + (1-\alpha)^2]x_0}{2-\alpha} \tag{21}\\ &= \frac{x_1 + [(\alpha-\alpha^2) + (1-2\alpha+\alpha^2)]x_0}{2-\alpha} \tag{22}\\ &= \frac{x_1 + (1-\alpha)x_0}{2-\alpha} \tag{23}\\ \implies C_1 &= \frac{x_2 - C_2}{\alpha-1} = \frac{[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_0] - \left(\frac{x_1+(1-\alpha)x_0}{2-\alpha}\right)}{\alpha-1} \tag{24}\\ &= \frac{\frac{(\alpha x_1+(1-\alpha)x_0)(2-\alpha)-(x_1+(1-\alpha)x_0)}{2-\alpha}}{\alpha-1} = \frac{\frac{-(\alpha-1)^2 x_1}{2-\alpha}}{\alpha-1} \tag{25}\\ &= \frac{-(\alpha-1)x_1}{2-\alpha} = \frac{(1-\alpha)x_1}{2-\alpha} \tag{26} \end{align}$$

Es decir que tenemos, substituyendo en la ecuación (4):

$$
\begin{aligned}
X_{n+1} &= C_1(\alpha-1)^n + C_2(1)^n && (27)\\
&= \frac{(1-\alpha)x_1}{2-\alpha}(\alpha-1)^n + \frac{x_1+(1-\alpha)x_0}{2-\alpha}(1)^n && (28)\\
&= \frac{(1-\alpha)x_1(\alpha-1)^n + (x_1+(1-\alpha)x_0)(1)^n}{2-a} && (29)
\end{aligned}
$$

Se puede asumir que $(1)^n = 1$ en todos los casos.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(1-\alpha)x_1(\alpha-1)^n + (x_1+(1-\alpha)x_0)}{2-a} && (30)\\
&= \frac{-(\alpha-1)x_1(\alpha-1)^n + (x_1+(1-\alpha)x_0)}{2-a} && (31)\\
&= \frac{-x_1(\alpha-1)^{n+1} + (x_1+(1-\alpha)x_0)}{2-a} && (32)\\
&= \frac{-x_1(\alpha-1)^{n+1} + x_1+(1-\alpha)x_0}{2-a} && (33)\\
&= \frac{[1-(\alpha-1)^{n+1}]x_1+(1-\alpha)x_0}{2-\alpha} && (34)
\end{aligned}
$$

Entonces, la convergencia de la serie dependerá de la siguiente expresión, en donde $\alpha \in (0,2)$:

$$
\lim(x_n) = \frac{[1-(\alpha-1)^{n+1}]x_1+(1-\alpha)x_0}{2-\alpha} \qquad (35)
$$

□

1.5. Problema 5

Sea a un número positivo. Definamos la sucesión (x_n) por:

$$x_{n+1} = a + x_n^2, \forall n \geq 0, x_0 = 0$$

Encuentre una condición necesaria y suficiente para la convergencia de la sucesión.

Sucesión de forma recursiva

n=0:

$x_1 = a + x_0^2 = a$

n=1:

$x_2 = a + x_1^2 = a + a^2$

n=2:

$x_3 = a + x_2^2 = a + (a+a^2)^2$

n=3:

$x_4 = a + x_3^2 = a + [(a+a^2)^2]^2$

n=4:

$x_5 = a + x_4^2 = a + \left\{[(a+a^2)^2]^2\right\}^2$

$\vdots$

$x_{n+1} = a + x_n^2$

Demostración. Dado que es necesario encontrar una condición para que (x_n) converja, se propone utilizar el Teorema 2 relacionado a las $m-$colas. Es decir, supóngase que $\lim(x_n) = x$, entonces $\lim(x_{n+1}) = x$. Entonces, se tiene por hipótesis:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a + x_n^2 && (1)\\ x &= a + x^2 && (2)\\ 0 &= a - x + x^2 && (3) \end{aligned}$$

Se procede aplicando la fórmula de Vieta para ecuaciones cuadráticas, en donde, $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = a$. Es decir:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} && (4)\\ &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(a)}}{2(1)} && (5)\\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2} && (6) \end{aligned}$$

La convergencia de (x_n) depende del discriminante de la ecuación anterior. Nótese que, para generar soluciones reales, es necesario $\sqrt{1-4a} \geq 0$, entonces:

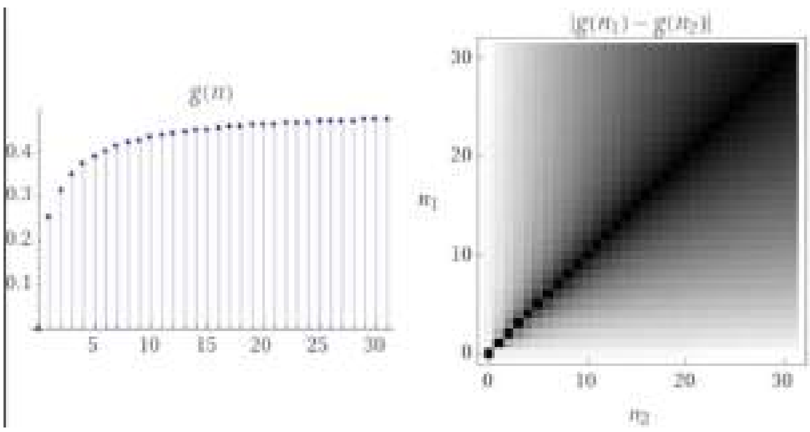
$$\begin{aligned} \sqrt{1-4a} &\geq 0 && (7)\\ 1 - 4a &\geq 0 && (8)\\ -4a &\geq -1 && (9)\\ a &\leq \frac{1}{4}. && (10) \end{aligned}$$

Entonces, esto quiere decir que la sucesión (x_n) definida por $x_{n+1} = a + x_n^2$ converge si y solo si $a \leq \frac{1}{4}$. □

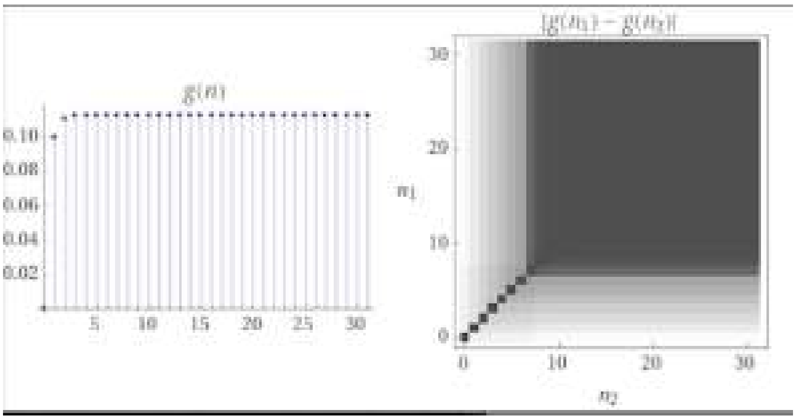
Por curiosidad, se utilizó *WolframAlpha* para comprobar que la condición es verdadera, con el siguiente comando (en donde α es variable):

$$x(0) = 0, x(n+1) = \alpha + (x(n))^2$$

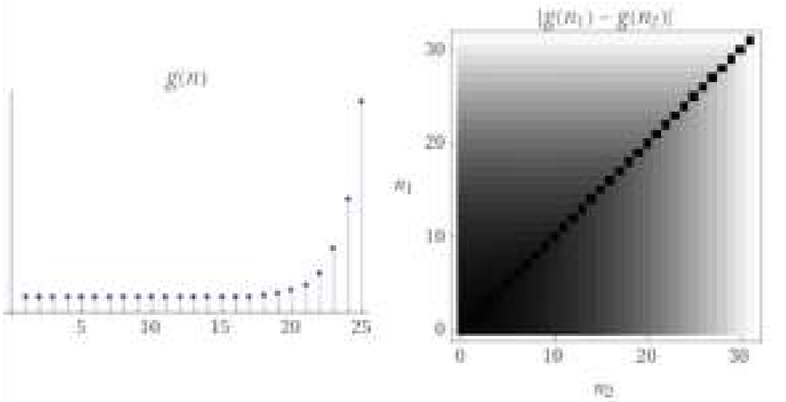
Con un $\alpha = 0{,}25$, la convergencia es evidente.



Con un $\alpha = 0{,}1$, la convergencia es evidente.



Con un $\alpha = 0{,}5$, no existe convergencia.



Por lo tanto, la condición parece cumplirse.

Referencias

Bartle, R. G. and Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis*, volume 1. Wiley New York.

3.3. Parcial

Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2034 - Análisis de Variable Real 1 - Catedrático: Dorval Carías
8 de abril de 2021

Parcial 2 - Revisión

1. Problema 1

1. Utilice la definición para probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-5n+7} = 1$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n^2+1}{n^2-5n+7}-1\right| &= \left|\frac{n^2+1-(n^2-5n+7)}{n^2-5n+7}\right| = \left|\frac{5n-6}{n^2-5n+7}\right| \\
&= \left|\frac{5n-6}{\left(n-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right| = \frac{5n-6}{\left(n-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&< \frac{5n-6}{\left(n-\frac{5}{2}\right)^2}
\end{aligned} \tag{1}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{5n-6}{\left(n-\frac{5}{2}\right)^2} < \epsilon &\implies 5n-6 < \epsilon\left(n-\frac{5}{2}\right)^2 \\
&\implies 5n-6 < \epsilon\left(n^2-5n+\frac{25}{4}\right) \\
&\implies 20n-24 < 4\epsilon\left(n^2-5n+\frac{25}{4}\right) \\
&\implies 20n-24 < \epsilon\left(4n^2-20n+25\right) \\
&\implies 4\epsilon n^2-20\epsilon n+25\epsilon-20n+24 > 0 \\
&\implies 4\epsilon n^2-(20\epsilon+20)n+25\epsilon+24 > 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Se tiene: $a = 4\epsilon$, $b = -20(\epsilon + 1)$ y $c = 25\epsilon + 24$. Aplicando la fórmula de Vieta:

$$\begin{aligned} n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= \frac{20(\epsilon+1) \pm \sqrt{20^2(\epsilon+1)^2 - 4(4\epsilon)(25\epsilon+24)}}{2(4\epsilon)} \\ &= \frac{20(\epsilon+1) \pm \sqrt{20^2(\epsilon+1)^2 - 400\epsilon^2 - 384\epsilon}}{8\epsilon} \\ &= \frac{20(\epsilon+1) \pm \sqrt{416\epsilon+400}}{8\epsilon} \\ &= \frac{20(\epsilon+1) \pm \sqrt{16(26\epsilon+25)}}{8\epsilon} \\ &= \frac{20(\epsilon+1) \pm 4\sqrt{(26\epsilon+25)}}{8\epsilon} \\ &= \frac{10(\epsilon+1) \pm 2\sqrt{(26\epsilon+25)}}{4\epsilon} \\ &= \frac{5(\epsilon+1) \pm \sqrt{(26\epsilon+25)}}{2\epsilon} \end{aligned} \tag{3}$$

$\therefore$ Dado $\epsilon > 0, \exists \quad n = \frac{5(\epsilon+1)\pm\sqrt{26\epsilon+25}}{2\epsilon} \in \mathbb{Z}^+$ si $N \geq n \implies |\frac{n^2+1}{n^2-5n+7} - 1| < \epsilon$. $\square$

2. Pruebe que la sucesión $a_n = (-1)^n$ diverge.

Teorema (Criterio de la Divergencia)

Si una sucesión $X = (x_n)$ de números reales, tiene cualquiera de las siguientes dos propiedades, entonces X es divergente.

a) X tiene dos subsucesiones convergentes $X' = (x_{nk})$ y $X'' = (x_{rk})$ de los cuales sus límites no son iguales.

b) X no es acotada.

Demostración. Se tiene $A = a_n = (-1)^n$. Es decir, se propone plantear los casos para n pares e impares. Se tiene: $A' = (a_{2n}) = (-1)^{2n} = \{1, 1, 1, ..., 1\}$ que converge a 1 y $A'' = (a_{2n-1}) = (-1)^{2n-1} = \{-1, -1, -1, ..., -1\}$ que converge a -1. Por lo tanto, considerando el Criterio de la Divergencia inciso **a**, (a_n) diverge. $\square$

2. Problema 2

¿Es acotado el conjunto $\left\{\frac{1}{x^2-3} : x \in \mathbb{Q}\right\}$? Justifique su respuesta.

Definición (Subconjunto acotado)

Un subconjunto S de $\mathbb{R}$ se dice que es acotado si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha \leq s \leq \beta \quad \forall s \in S$$

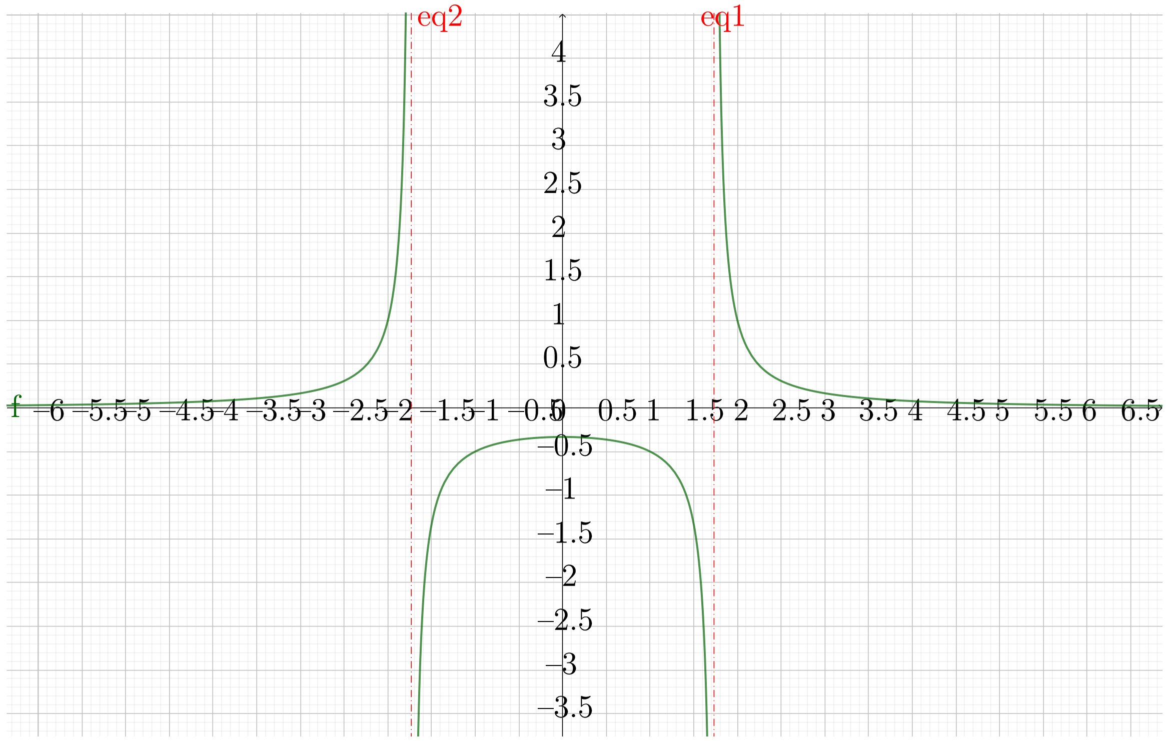


Figura 1: Gráfica de $\frac{1}{x^2-3}$ con cotas en $x = \pm\sqrt{3}$

Intuitivamente (véase la Figura 1) se sabe que el conjunto S no es acotado por las asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^+} S = \infty \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}^-} S = -\infty \qquad \lim_{x\to-\sqrt{3}^+} S = -\infty \qquad \lim_{x\to-\sqrt{3}^-} S = \infty$$

Demostración. Se nombrará al conjunto $S = \{\frac{1}{x^2-3} : x \in \mathbb{Q}\}$. Por contradicción, supóngase que $\beta = \sup S$. Nótese que $2 \in S$, entonces se debe cumplir que $\beta \geq 2$. Ahora considérese $\beta + 1$, es decir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\beta+1)^2-3} &= \frac{1}{\beta^2+2\beta+1-3} && (1)\\
&\leq \frac{1}{\beta^2-3+2(2)+1} = \frac{1}{\beta^2-3+5} && (2)\\
&< \frac{1}{\beta^2-3} && (3)\\
&< \sqrt{3} && (4)
\end{aligned}$$

Lo que quiere decir que $\beta + 1 \in S$. Causando una contradicción ya que $\beta = \sup S$.
$\therefore$ S no está acotada. $\square$

Discusión interesante: **https://math.stackexchange.com/questions/4088277/**

3. Problema 3

Estudie la convergencia de la sucesión:

$$x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2}, n = 1, 2, \ldots$$

En el caso que la sucesión sea convergente, encuentre el límite.

Teorema de colas

Sea $X = (x_n : n \in \mathbb{N})$ una secuencia de números reales y sea $m \in \mathbb{N}$. Entonces la $m-$cola $X_m = (x_{m+n} : n \in \mathbb{N})$ de X converge si y solo si X converge. En este caso $\lim X_m = \lim X$.

Teorema Convergencia Monótona

Una sucesión de números reales es convergente si y solo si es acotada. Además:

1. Si $X = (x_n)$ es una sucesión acotada creciente, entonces:

$$\lim(x_n) = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

2. Si $Y = (y_n)$ es una sucesión acotada decreciente, entonces:

$$\lim(y_n) = \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Convergencia numérica

$$x_1 = 2 \tag{1}$$
$$x_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{x_1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \tag{2}$$
$$x_3 = \frac{1}{x_2} + \frac{x_2}{2} = \frac{17}{12} \approx 1,417 \tag{3}$$
$$x_4 = \frac{1}{x_3} + \frac{x_3}{2} = \frac{577}{408} \approx 1,414 \tag{4}$$
$$x_5 = \frac{1}{x_4} + \frac{x_4}{2} = \frac{665857}{470832} \approx 1,414 \tag{5}$$
$$\vdots \tag{6}$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2} \approx 1{,}414 \tag{7}$$

Puntos fijos

Considerando el *teorema de colas* se tiene $\lim x_{n+1} = \lim x_n = X$. Entonces:

$$\implies X = \frac{1}{X} + \frac{X}{2} = \frac{2+X^2}{2X} \tag{1}$$
$$\implies 2X^2 = 2 + X^2 \tag{2}$$
$$\implies X^2 = 2 \tag{3}$$
$$\implies X = \sqrt{2}, -\sqrt{2} \tag{4}$$

Se nota que $X \neq -\sqrt{2}$. Por lo tanto, $X = \sqrt{2}$.

Demostración. Al hacer un cálculo directo (véase el cuadro de *convergencia numérica*) se muestra que $x_1 = 2, x_2 = 3/2, x_3 = 17/12, ..., x_{n+1} \approx 1,414$. $\implies$ Se propone una acotación, tal que $\sqrt{2} < x_2 < x_1$. Por inducción, se mostrará que $\sqrt{2} < x_n$ o $x_n > \sqrt{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Por el cuadro de *convergencia numérica*, se sabe que la condición es válida para $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Ahora bien, si $n = k$:

$$x_k > \sqrt{2} \qquad k \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Se quiere probar que $x_{k+1} > x_k$:

$$x_{k+1} = \frac{1}{x_k} + \frac{x_k}{2} > \frac{1}{(\sqrt{2})} + \frac{(\sqrt{2})}{2} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \tag{2}$$

tal que $x_{k+1} > \sqrt{2}$. Por lo tanto, $x_n > \sqrt{2}$ se cumple para $n \in \mathbb{N}$. Por lo que la sucesión es acotada. Ahora se quiere probar que la sucesión es monótona decreciente. Por inducción se mostrará que $x_n > x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Se sabe que la condición se cumple para $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Ahora, supóngase $x_k > x_{k+1}$ para algún k:

$$\implies x_k > x_{k+1} \implies \frac{x_k}{2} > \frac{x_{k+1}}{2} \tag{3}$$
$$\implies x_k > x_{k+1} \implies \frac{1}{x_k} > \frac{1}{x_{k+1}} \tag{4}$$

Sumando (3) y (4) se tiene:

$$\begin{aligned} &\implies x_k + x_k > x_{k+1} + x_{k+1} \implies 2x_k > 2x_{k+1} \implies x_k > x_{k+1} \\ &\implies \frac{1}{x_k} + \frac{x_k}{2} > \frac{1}{x_{k+1}} + \frac{x_{k+1}}{2} \end{aligned} \tag{5}$$

Por lo consecuente, considerando (5) se tiene:

$$\implies x_{k+1} = \frac{1}{x_k} + \frac{x_k}{2} > \frac{1}{x_{k+1}} + \frac{x_{k+1}}{2} = x_{k+2} \tag{6}$$

Se tiene que $x_k > x_{k+1}$ lo que implica $x_{k+1} > x_{k+2}$. Por lo tanto, $x_n > x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$; es decir, la secuencia es monótona decreciente. Se ha demostrado que la secuencia está acotada y es monótona decreciente. Por el *teorema convergecia monótona*, sabemos que la sucesión (x_n) es convergente a un límite de por lo menos $\sqrt{2}$. Por hipótesis se conoce $x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2} \forall n \in N$, el $n-$ésimo término en la 1-cola de x_1 de x tiene una simple relación algebraica al n-ésimo término de x. Por el cuadro de *punto fijos* sabemos:

$$X = \frac{1}{X} + \frac{X}{2}$$

del cual, se tiene $X = \lim x_n = \sqrt{2}$. □

4. Problema 4

Suponga (a_n) es una sucesión monótona que contiene una subsucesión que es de Cauchy. Demuestre que (a_n) también es de Cauchy.

Teorema Convergencia Monótona

Una sucesión de números reales es convergente si y solo si es acotada. Además:

1. Si $X = (x_n)$ es una sucesión acotada creciente, entonces:

$$\lim(x_n) = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

2. Si $Y = (y_n)$ es una sucesión acotada decreciente, entonces:

$$\lim(y_n) = \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Una sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión convergente.

Teorema de subsucesiones convergentes

Sea $X = (x_n)$ una subsucesión acotada de números reales y que un $x \in \mathbb{R}$ tenga la propiedad de que cada subsucesión convergente de X converge a x. Entonces la sucesión X converge a x.

Demostración. Por hipótesis, se sabe que la sucesión es monótona ssi es acotada y que tiene una subsucesión de Cauchy, es decir que la subsucesión converge; por lo que se tiene el *teorema de Bolzano-Weierstrass*. Ahora bien, considerando el *teorema de subsucesiones convergentes*; se sabe que (x_n) es acotada y que su única subsucesión es convergente, entonces (x_n) también es convergente. Por lo tanto, por el criterio de Cauchy, una sucesión convergente también es de Cauchy. □

5. Problema 5

Suponga que la sucesión (a_n) satisface la condición

$$|a_{n+1} - a_{n+2}| < \lambda |a_n - a_{n+1}|$$

con $\lambda \in (0,1)$. Pruebe que (a_n) converge.

Definición (Sucesión contractiva)

Se dice que una sucesión (x_n) de números reales es *contractiva* si existe una constante C, $0 < C < 1$, tal que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n|$$

para todos los $n \in \mathbb{N}$. El número C es llamado la constante de la sucesión contractiva.

Definición (sumatoria de una progresión geométrica)

Si $r \in \mathbb{R}, r \neq 1$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$1 + r + r^2 + ... + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Teorema

Cada sucesión contractiva es una sucesión de Cauchy y por lo tanto, es convergente.

Caso específico

Si $0 < b < 1$, entonces $\lim(b^n) = 0$

Demostración. Considérese el desarrollo hecho en el teorema 3.5.8 de Bartle and Sherbert (2000). Sin pérdida de generalidad, la condición se plantea como una *sucesión contractiva*:

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| < \lambda|a_{n+1} - a_n|$$

Se propone una serie de acotaciones:

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| < \lambda|a_{n+1} - a_n| < \lambda^2|a_n - a_{n-1} < \lambda^3|a_{n-1} - a_{n-2}| < ... < \lambda^n|a_2 - a_1|$$

Ahora, para $m > n$, se estima $|x_m - x_n|$ aplicando la desigualdad triangular y luego se utiliza la sumatoria de una *progresión geométrica*:

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| && (1)\\
&\leq \left(\lambda^{m-2} + \lambda^{m-3} + \cdots + \lambda^{n-1}\right)|a_2 - a_1| = \lambda^{n-1}\left(\frac{1 - \lambda^{m-n}}{1 - \lambda}\right)|a_2 - a_1| && (2)\\
&\leq \lambda^{n-1}\left(\frac{1}{1 - \lambda}\right)|a_2 - a_1| && (3)
\end{aligned}$$

Se sabe que $\lambda \in (0,1)$, entonces $\lim(\lambda^n) = 0$ (veáse el caso específico). Por lo tanto, (x_n) es una sucesiónde Cauchy. Considerando el criterio de Cauchy, se sabe que (x_n) es una sucesión convergente. □

Referencias

Bartle, R. G. and Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis*, volume 2. Wiley New York.

Parte IV

Sucesiones de Funciones

4. Sucesiones de Funciones

SUCESIONES DE FUNCIONES - Análisis de Variable Real 1

Rudik Rompich

June 1, 2021

Sucesiones de Funciones (Cauchy, 1821)
(Weierstrass, Varios)

Nota: ① Una función $f: X \to \mathbb{R}$ está acotada superiormente, si $\exists\, c \in \mathbb{R} \ni |f(x)| < c, \forall x \in X$

② El supremo de f, $\sup(f) := \sup\{f(x) : x \in X\}$
el ínfimo de f, $\inf(f) := \inf\{f(x) : x \in X\}$

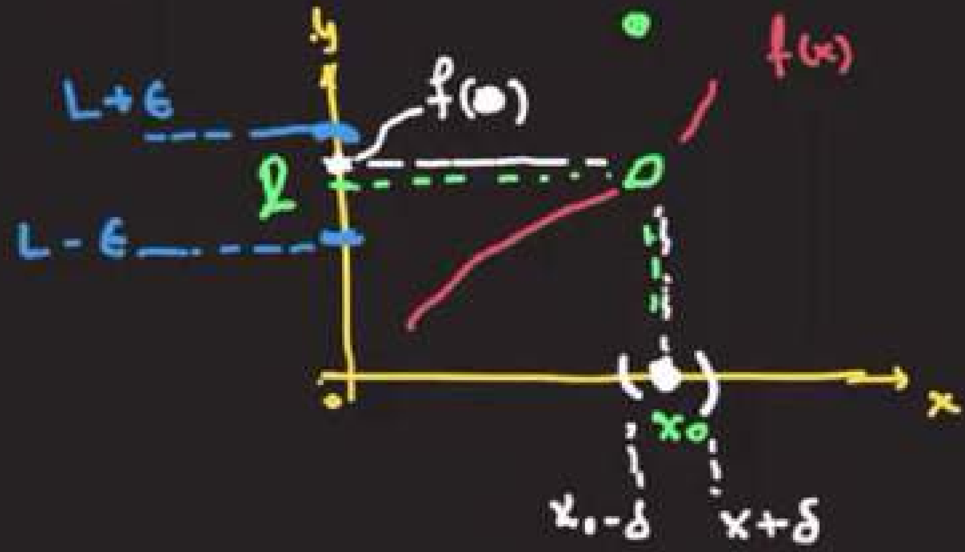
③ Una función está acotada superiormente si $\sup(f) < \infty$.
Una función está acotada inferiormente si $\inf(f) > -\infty$

Def: Sean $I \subseteq \mathbb{R}$, un intervalo y x_0 un punto de acumulación de I. Sea f una función definida en I (excepto posiblemente en x_0). Se dice que $l \in \mathbb{R}$ es el límite de $f(x)$ en x_0,

i.e.
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \;;= f(x_0)$$

si $\forall \epsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 \ni 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

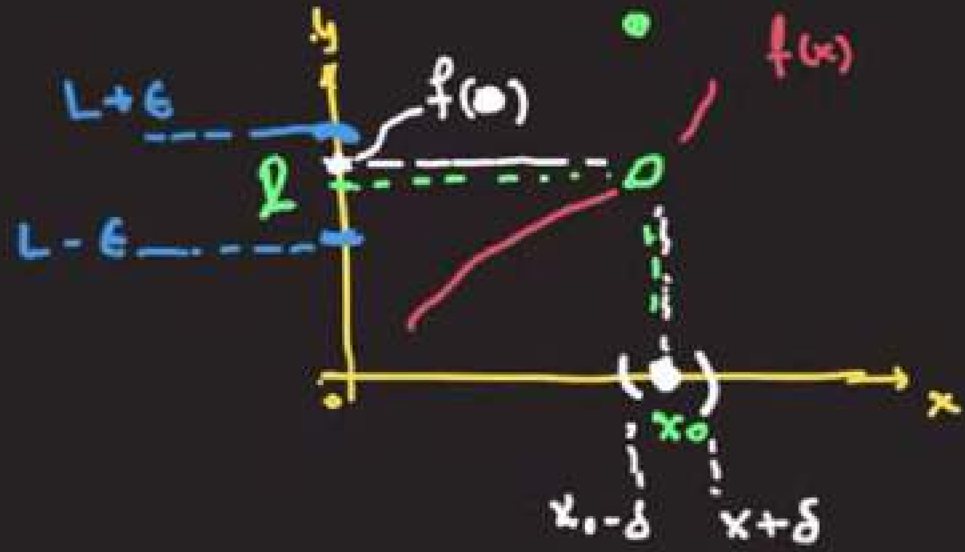


Def: (Cauchy) Sean $I \subseteq \mathbb{R}$, un intervalo y x_0 un punto de acumulación de I. Sea f una función definida en I (excepto posiblemente en x_0). Se dice que $l \in \mathbb{R}$ es el límite de $f(x)$ en x_0,

i.e. $$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \; \neq f(x_0)$$

si $\forall \epsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ni 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$



* $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ ssi $\forall \epsilon>0$ $\boxed{\exists N\in\mathbb{Z}^+}$ $\ni$ $\forall n > N$

se tiene que $|a_n - l| < \epsilon$

* $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ssi $\forall \epsilon>0$ $\exists$ $\boxed{\delta>0 \ni}$ si

$\boxed{0<|x-c|<\delta}$ $\Rightarrow$ $|f(x) - L| < \epsilon$

Ej: 1) Compruebe que $\lim_{x\to x_0}(2x+3) = 2x_0+3$

Dem: $\boxed{\text{Dado } \epsilon>0}$ $\exists$ $\delta =$ ______ >0 $\ni$ si

$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |(2x+3)-(2x_0+3)| < \epsilon$

Sucio: $\left|(2x+3)-(2x_0+3)\right| = \left|2x+\cancel{3}-2x_0-\cancel{3}\right| =$

$= \left|2x-2x_0\right| = 2\left|x-x_0\right| < \epsilon$

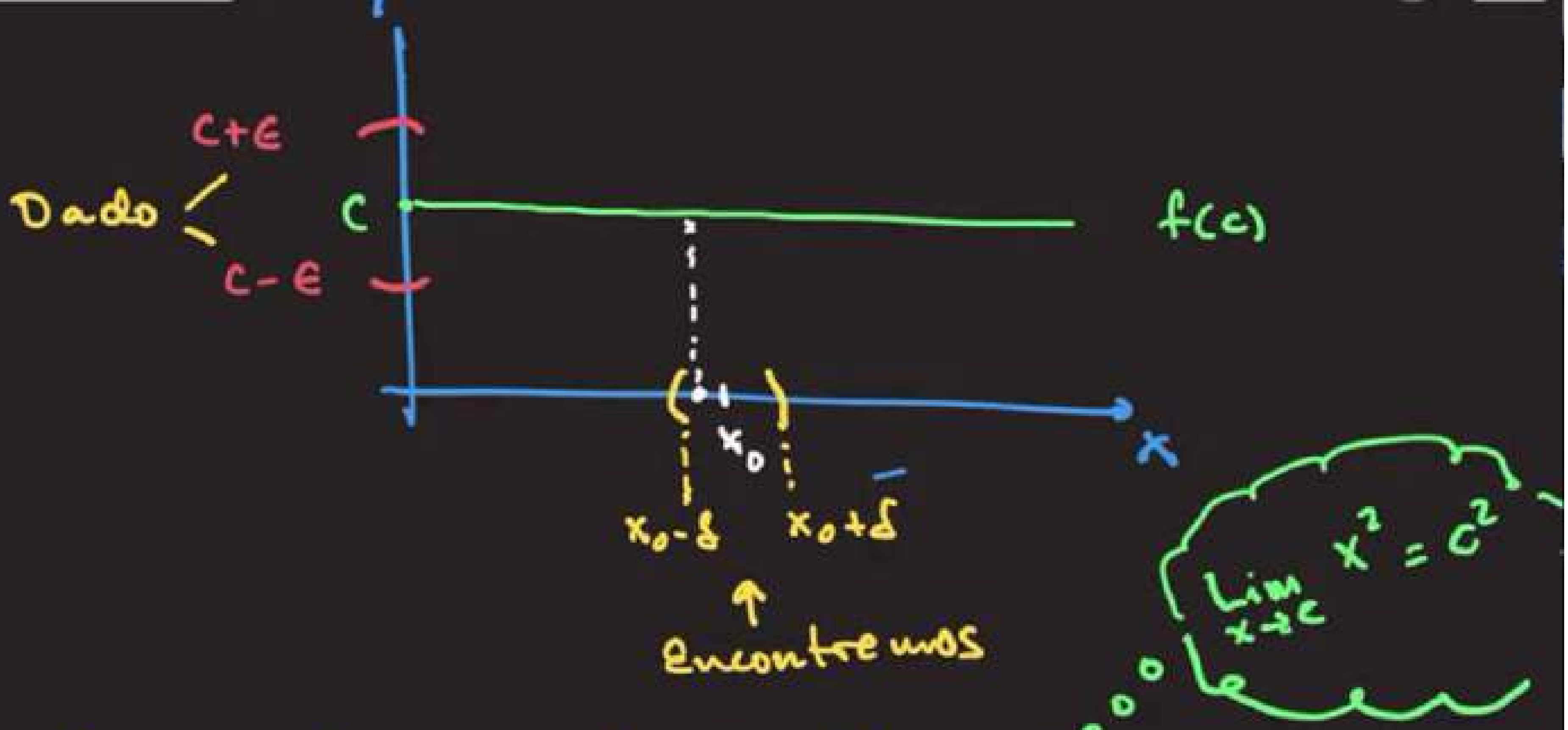
$\Rightarrow |x-x_0| < \boxed{\frac{\epsilon}{2} = \delta}$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$ (c es una constante real)

Dem: Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $\delta =$ ____ > 0 $\ni$ si

$0 < |x-x_0| \Rightarrow |c-c| < \epsilon$

Respaldo: $|c-c| = 0 < \epsilon$



3) *** Compruebe que $\lim_{x\to 3}(x^2-1) = 8$

Dem: Dado $\epsilon > 0$ $\exists\ \delta =$ ______ $> 0 \ni$ si $0 < |x-3| < \delta$

$\Rightarrow |(x^2-1) - 8| < \epsilon$.

Respaldo: $|(x^2-1)-8| = |x^2-9| = |(x+3)(x-3)|$

$= |x+3| \cdot \underbrace{|x-3|}$.

$$\boxed{\begin{array}{l} = |x+3| \cdot |x-3| < \epsilon \\ \Rightarrow |x-3| < \dfrac{\epsilon}{|x+3|} < \dfrac{\epsilon}{|x|} = \delta \text{ ¡cuidado!} \\ \delta \text{ debe ser un número real} \end{array}}$$

δ

Hagamos $|x-3| < 1$ $\Rightarrow$ $-1 < x-3 < 1$
(supuesto)

$\Rightarrow$ Sumamos 6

$\Rightarrow 5 < x+3 < 7 \Rightarrow 5 < \boxed{|x+3| < 7}$

$\Rightarrow |(x^2-1)-8| = |x+3| \cdot |x-3| < 7 \cdot |x-3|$

$= 7 \cdot |x-3| < \epsilon \Rightarrow |x-3| < \frac{\epsilon}{7}$ ↙ δ

$\Rightarrow$ seleccionamos $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{7}, 1\right\}$

Ej: Compruebe que $\lim\limits_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$, si $c > 0$

Dem: Dado $\epsilon > 0 \ \exists \ \delta =$ ______ $> 0 \ni$ si

$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| < \epsilon$

Respaldo: $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| = \left|\frac{c-x}{xc}\right| = \frac{|x-c|}{|x| \cdot c} =$

$= |x-c| \cdot \frac{1}{|x| \cdot c}$; Suponemos que $|x-c|$

Suponemos que $|x-c| < \frac{1}{2}c \leftarrow \delta$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}c < x - c < \frac{1}{2}c \text{. Sumando } c$$

$$\Rightarrow c - \frac{1}{2}c < x < \frac{1}{2}c + c$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}c < x} < \frac{3}{2}c \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} < \frac{2}{c}$$

$$x < \frac{3}{2}c \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{2}{3c} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x|c} < \frac{2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| = |x-c| \cdot \frac{1}{|x| \cdot c} < |x-c| \cdot \frac{2}{c^2} < \epsilon$$

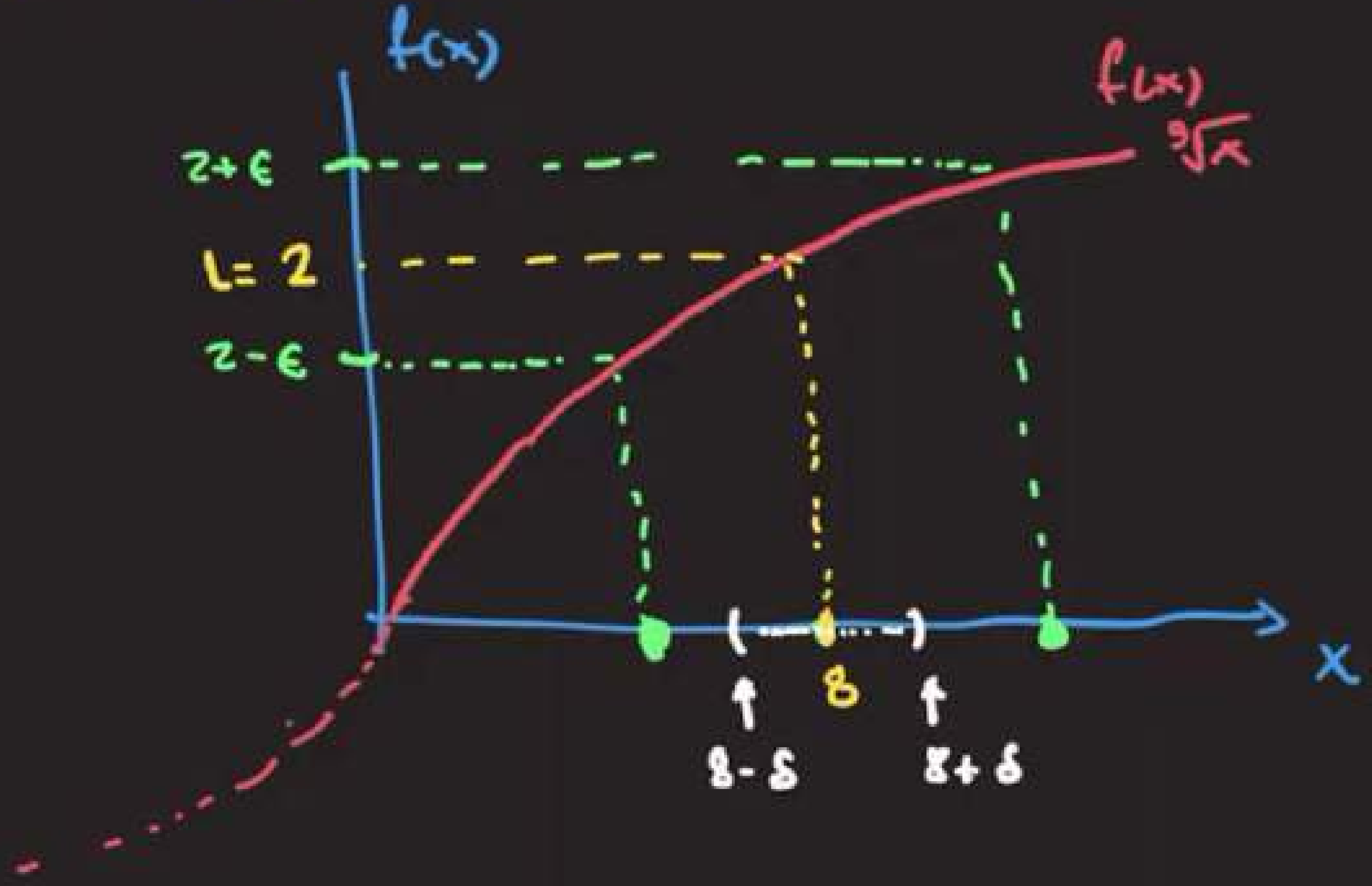
$$\Rightarrow |x-c| < \frac{\epsilon c^2}{2} \leftarrow \delta$$

Problema (***) : $\lim_{x \to 8} \sqrt[3]{x} = 2.$

Ej: Compruebe que $\lim_{x \to 8} \sqrt[3]{x} = 2$

Sol: $\cancel{\forall}$ Dado $\epsilon > 0 \ \exists \ \delta =$ ______ $> 0 \ \ni$ si $|x-8| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |\sqrt[3]{x} - 2| < \epsilon$



Respaldo: Dado $\epsilon > 0$, debemos encontrar $\delta > 0 \ni$

Si $|x - 8| < \delta \Rightarrow \boxed{|\sqrt[3]{x} - 2| < \epsilon}$

$\Rightarrow -\epsilon < \sqrt[3]{x} - 2 < \epsilon \Rightarrow 2 - \epsilon < \sqrt[3]{x} < 2 + \epsilon$

$\Rightarrow (2-\epsilon)^3 < x < (2+\epsilon)^3$

$\Rightarrow (2-\epsilon)^3 \leq 8 - \delta$ y $8 + \delta \leq (2+\epsilon)^3$

$\Rightarrow \delta \leq 8 - (2-\epsilon)^3$ y $\delta \leq (2+\epsilon)^3 - 8$

$\Rightarrow \delta = \min\{8 - (2-\epsilon)^3, (2+\epsilon)^3 - 8\}$

$\Rightarrow$ Sol: Dado $\epsilon > 0 \ \exists \ \delta = \min\{8 - (2-\epsilon)^3, (2+\epsilon)^3 - 8\} > 0 \ni$

Si $|x - 8| < \delta \Rightarrow |\sqrt[3]{x} - 2| < \epsilon$.

Nota: Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, entonces es único.

En efecto, suponga que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y que $\lim_{x\to a} f(x) = b'$. Entonces, Dado $\epsilon > 0$,

$\exists\, \delta_1 > 0 \ni$ si $|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \frac{\epsilon}{2}$

$\exists\, \delta_2 > 0 \ni$ si $|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b'| < \frac{\epsilon}{2}$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces: si $|x-a| < \delta \Rightarrow$

$$|b - b'| = |(b - f(x)) + (f(x) - b')| \leq$$

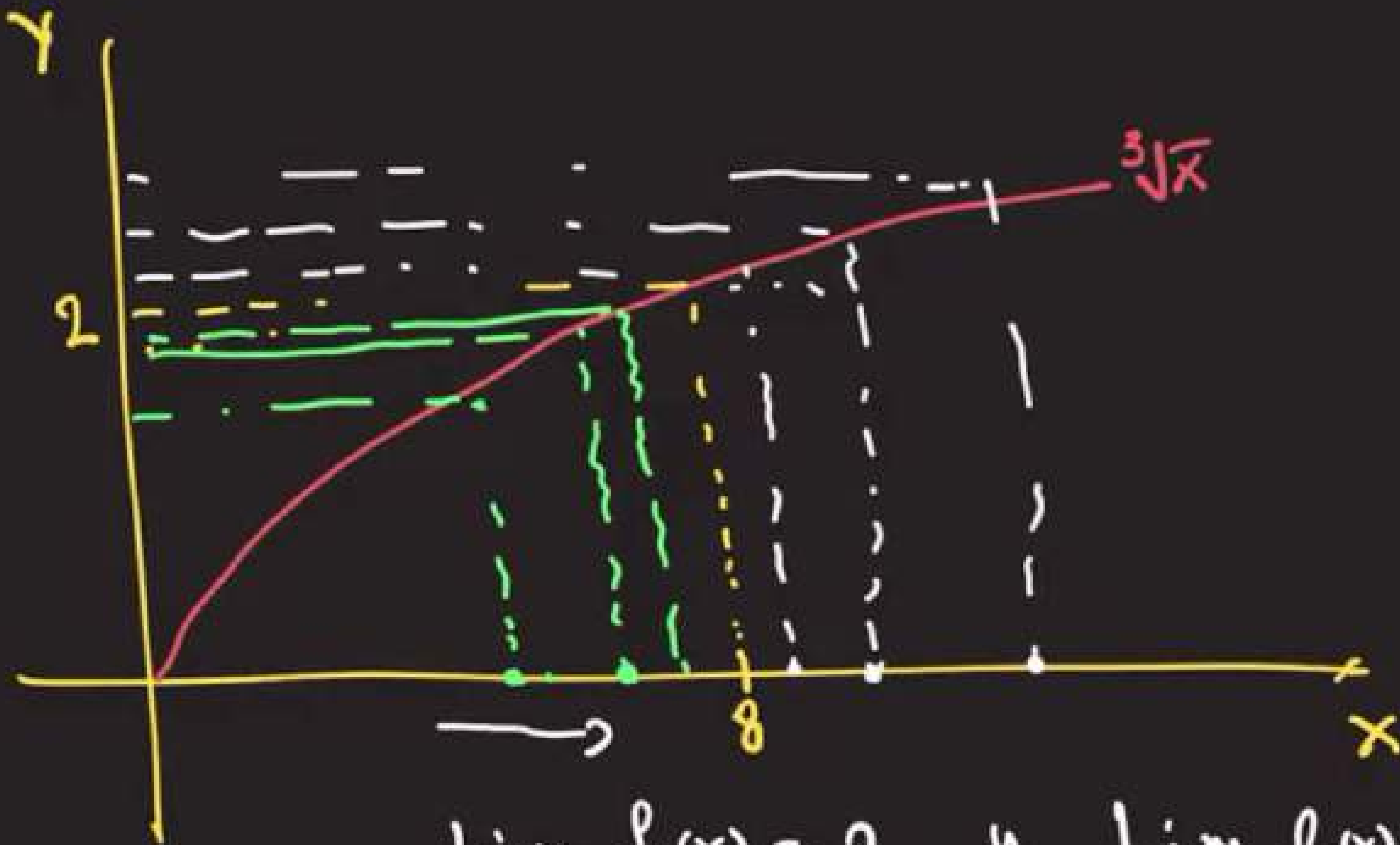
$$\leq |f(x) - b| + |f(x) - b'|$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$ Por la arbitrariedad de ϵ, se tiene que $b = b'$. $\square$

Teorema (Caracterización secuencial de límite)

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y suponga que c es un punto de acumulación de A. Entonces,

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ ssi $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$, para cada sucesión (x_n) en A $\ni$ $\lim_{n \to \infty} x_n = c$.



$$\lim_{x \to 8^-} f(x) = 2 \quad y \quad \lim_{x \to 8^+} f(x) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 8} f(x) = 2$$

Teorema (caracterización secuencial de límite)

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y suponga que c es un punto de acumulación de A. Entonces,

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ ssi $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$, para cada sucesión (x_n) en $A \ni \lim_{n \to \infty} x_n = c$.

Dem.

número reales

$(\Rightarrow)$ Suponga que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y que (x_n) es una sucesión de elementos de $A \ni \lim_{n \to \infty} x_n = c$.

A probar: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ $\ni$ si $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

También, $\exists\ N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $\underline{n \geq N} \Rightarrow |x_n - c| < \delta$

$$\Rightarrow |f(x_n) - L| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

($\Leftarrow$) A probar $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

Por contrapuesta, suponemos que $\lim_{x\to c} f(x) \neq L$ (o bien, el límite no existe). Es decir, existe $\epsilon_0 > 0$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \ni \text{ si } |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

$\exists\ \epsilon_0 > 0 \ni \forall \delta > 0$, se cumple que: si $|x-c| < \delta$

$|f(x) - L| \geq \epsilon_0$

También, $\exists\ N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $\underline{n \geq N} \Rightarrow |x_n - c| < \delta$

$\Rightarrow |f(x_n) - L| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$ ✓

$(\Leftarrow)$ A probar $\lim_{x\to c} f(x) = L.$

Por contrapuesta, suponemos que $\lim_{x\to c} f(x) \neq L$

(o bien, el límite no existe).

(x_n)

$\exists$ una sucesión $\ni\ x_n \to c$, pero $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq L$

También, $\exists\ N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $\underline{n \geq N} \Rightarrow |x_n - c| < \delta$

$\Rightarrow |f(x_n) - L| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$

$(\Leftarrow)$ A probar $\lim_{x\to c} f(x) = L.$

Por contrapuesta, suponemos que $\lim_{x\to c} f(x) \neq L$

(o bien, el límite no existe).

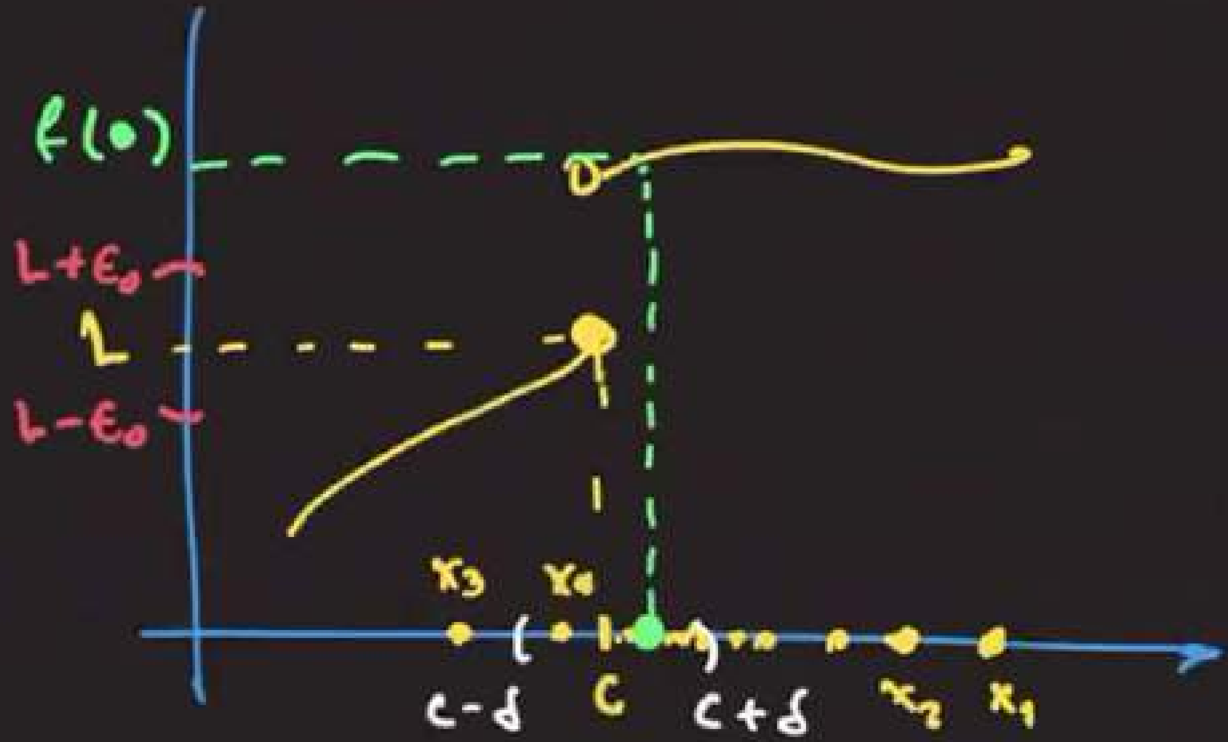
(x_n)

$\exists$ una sucesión $\ni\ x_n \to c$, pero $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq L$

Como $\lim_{x\to c} f(x) \neq L \Rightarrow \exists\ \epsilon_0 > 0 \ni \forall\ \delta > 0\ \exists x \in A,$

con $|x - c| < \delta$ y tal que $|f(x) - L| \geq \epsilon_0$

$$\lim_{x \to c} f(x) \neq L$$



Considere la sucesión (x_n) formada así:

i) $x_n \in A$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$;

ii) Dado $\delta > 0$, $|x_n - c| < \frac{1}{n}$.

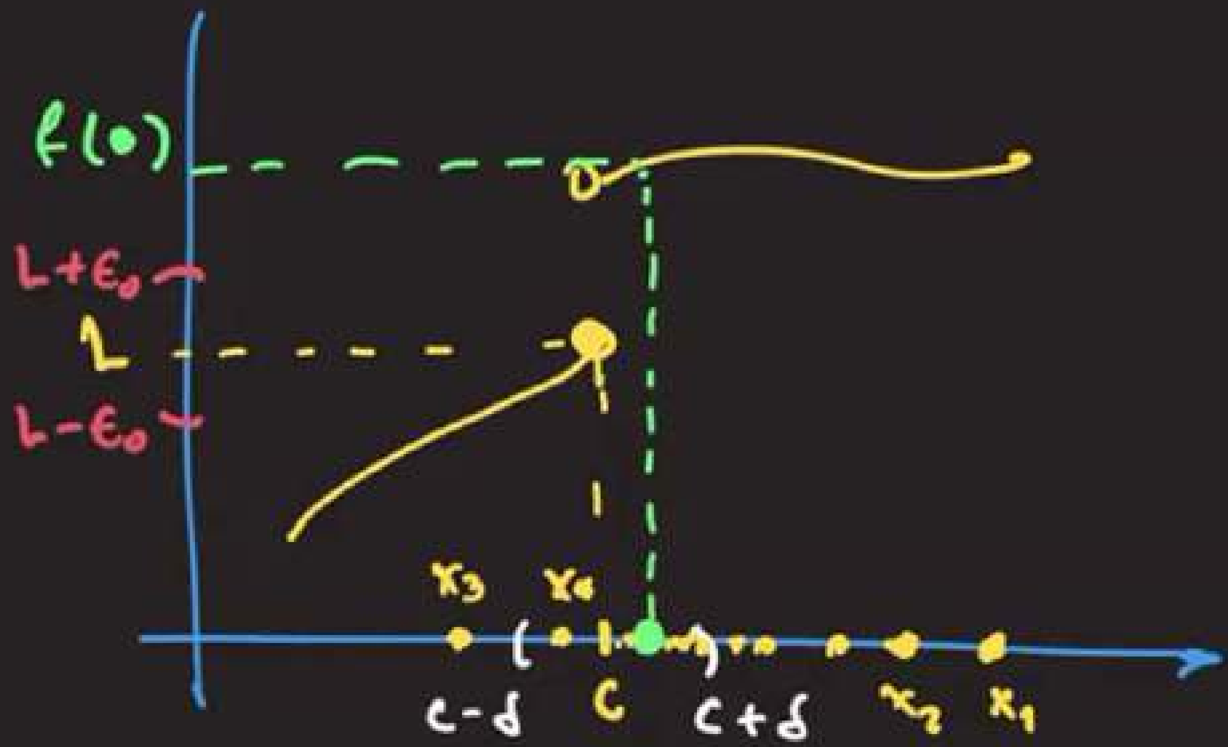
$\delta = \frac{1}{n}$

Nótese que $\lim\limits_{n\to} (x_n) = c \Rightarrow$

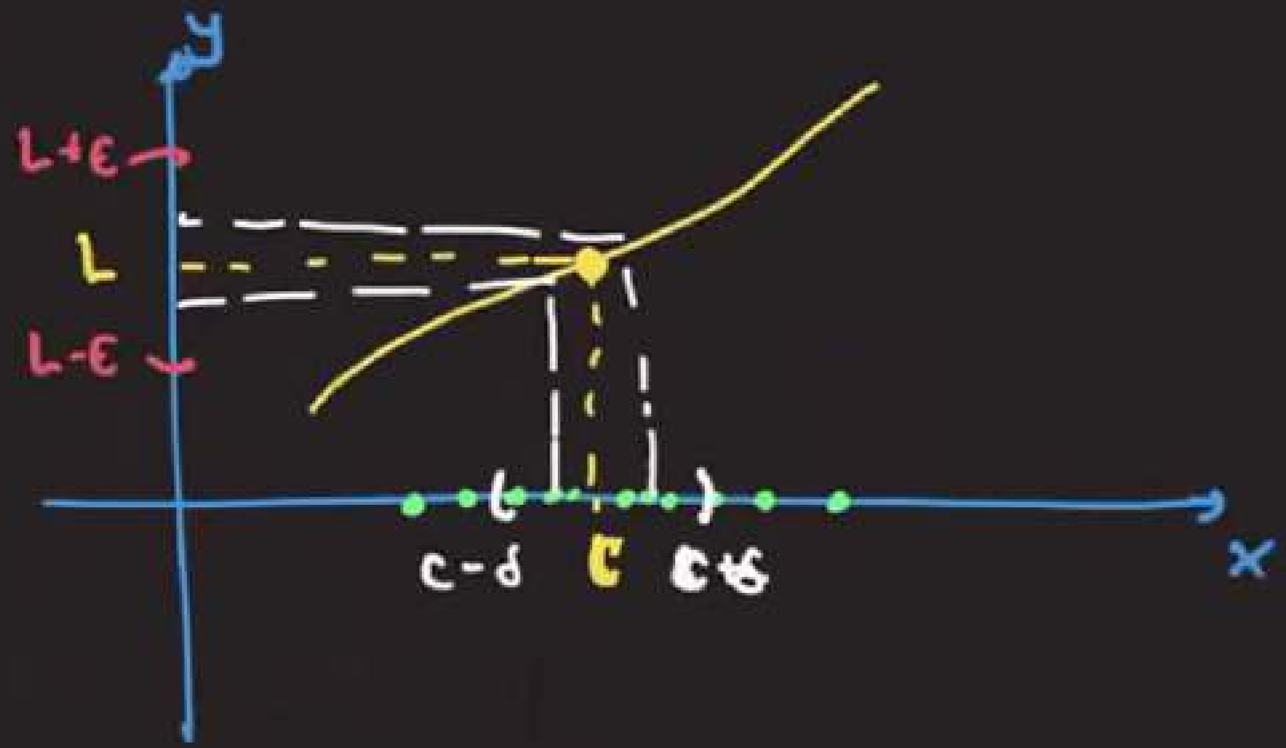
Podemos encontrar un $x_n \in A \ni |x_n - c| < \frac{1}{n}$ y

$\ni |f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$. Entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq L$

$$\lim_{x \to c} f(x) \neq L$$



Corolario: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea c un punto de acumulación de A. Entonces, el $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe si se cumple alguna de las siguientes


y
L+ε
L
L-ε
c-δ
c
c+δ
x

(1) Existen sucesiones (x_n) & (y_n) en A $\ni$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = c \text{ , pero}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$$

2) Existe una sucesión (x_n) en A $\ni$ $\lim_{n\to\infty} x_n = c$,

pero $(f(x_n))$ diverge.

Ej: Considere la función $sgn: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ni$

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} sgn(x)$ no existe.

En efecto: considere las sucesiones:

$$x_n := \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$
, pero:
$$y_n := -\frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(y_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1$$

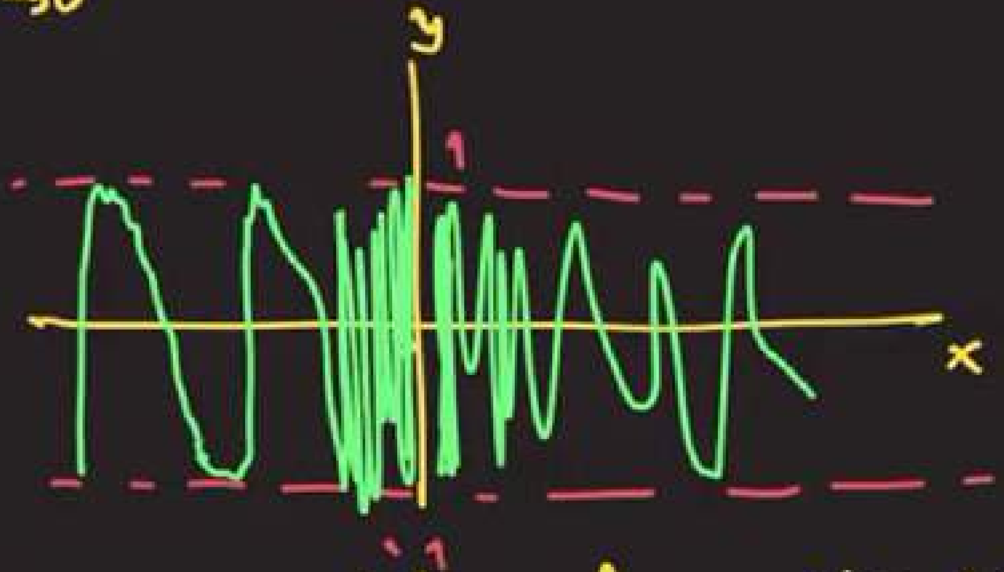
$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ no existe.

Ej: Sea $f: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R} \ni f(x) = \frac{1}{x}$. "Sabemos" que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ no existe. Sea $x_n = \frac{1}{n}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0; \text{ Pero } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/n)} = \lim_{n\to\infty} n \to \text{diverge.} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \text{ no existe}$$

Ej: El $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe.



En efecto, considere las siguientes sucesiones

$$x_n := \frac{1}{2n\pi} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

$$y_n := \frac{1}{2n\pi + \pi/2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0} \quad \text{además,}$$

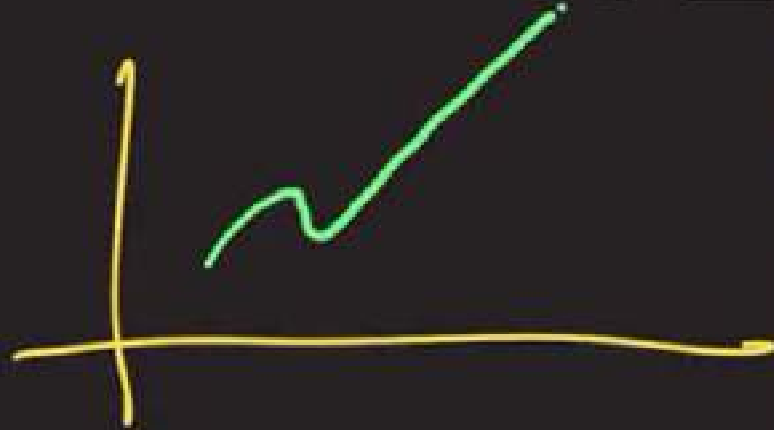
$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(2n\pi) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

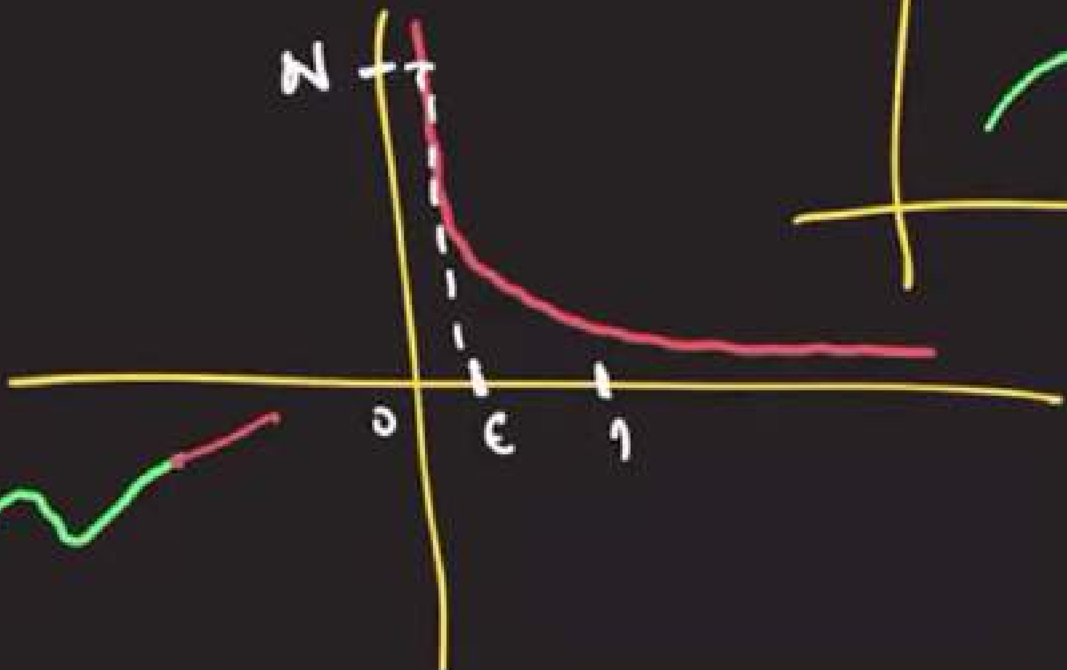
$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) =$$

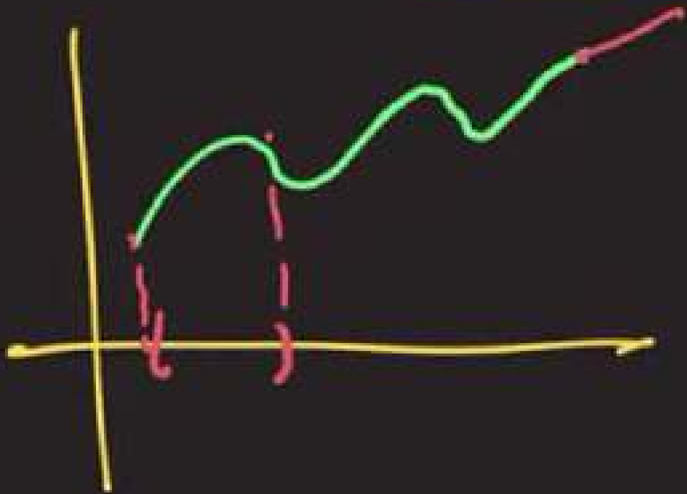
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\cancelto{0}{\operatorname{sen} 2n\pi} \cos\frac{\pi}{2} + \cancelto{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} \cancelto{1}{\cos 2n\pi}\right] = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ no existe.}$$







$[0, \infty)$

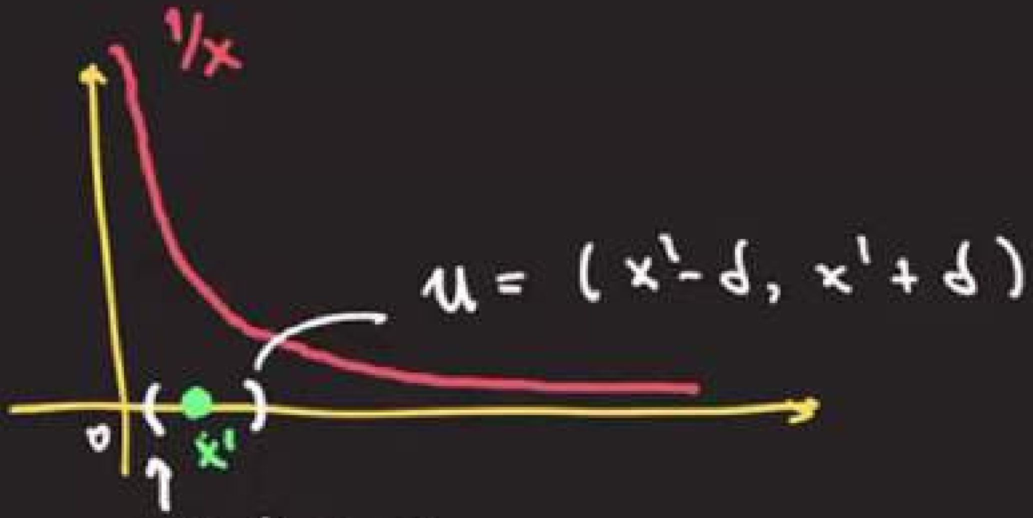
$[0, 1]$

$(0, 1]$

$(c, 1]$, $c > 0$

Def: Dadas $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y c un punto de acumulación de A, se dice que f es **localmente acotada** en c si existe una vecindad $\mathcal{U}$ de c $\ni$ f es acotada en $\mathcal{U} \cap A$.

Ej.:



$x' - \delta > 0$

$\Rightarrow$ $f(x) = \frac{1}{x}$ es acotada en $\mathcal{U}$ (y en $\mathcal{U} \cap \mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ f es acotada localmente en x'

Teorema: Suponga que la función $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y que c es un punto de acumulación de A.

Si $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ existe $\Rightarrow$ f es localmente acotada en c.

Dem: Sea $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$. $\Rightarrow$ sea $\epsilon = 1 \Rightarrow \exists\ \delta > 0 \ni$ si $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1$. Sea $\mathcal{U} = (c - \delta, c + \delta)$

$\Rightarrow$ si $x \in A \cap \mathcal{U}$, se tiene:

$$|f(x)| = |(f(x) - L) + L| \leq |f(x) - L| + |L|$$
$$< 1 + |L|, \quad \forall x \in A \cap \mathcal{U}$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ está localmente acotada en $A \cap \mathcal{U}$. $\square$

por la izquierda en c, denotado

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L \quad \ldots \quad \lim_{x \uparrow c} f(x) = L$$

sii, $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \ni c - \delta < x < c$ y $x \in A$

$\Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Teorema: Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y c un punto de acumulación de $\{x \in A \ni x > c\}$ y $\{x \in A \ni x < c\}$.

Entonces,

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \ldots \quad L \in \mathbb{R}$$

ssi $\displaystyle \lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L$

Dem:

($\Rightarrow$) Sabemos que $\lim_{x\to c} f(x) = L$; i.e. Dado $\epsilon > 0$

$\exists\ \delta > 0 \ni$ si $|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

$\Leftrightarrow \quad -\delta < x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

$\Leftrightarrow \quad c - \delta < x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

Nótese que: centrada en c

En particular, si $c < x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$;

y, si $c - \delta < x < c \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to c^-} f(x) = L = \lim_{x\to c^+} f(x).$$

($\Leftarrow$) Suponga que $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L$

Es decir, dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ $\ni$

$$c - \delta_1 < x < c \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon, \quad y$$

$$c < x < c + \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

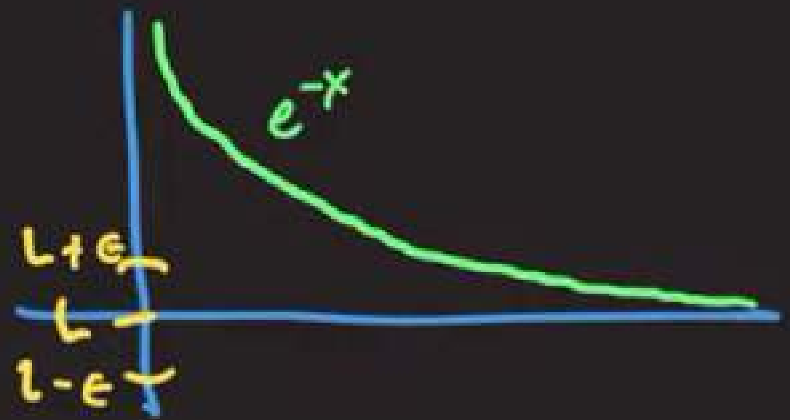
$$\Rightarrow c - \delta_1 < x < c + \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

δ $\Rightarrow$ Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$\Rightarrow c - \delta < x < c + \delta \Leftrightarrow |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = L. \qquad \square$$

<u>Def:</u>



$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$$

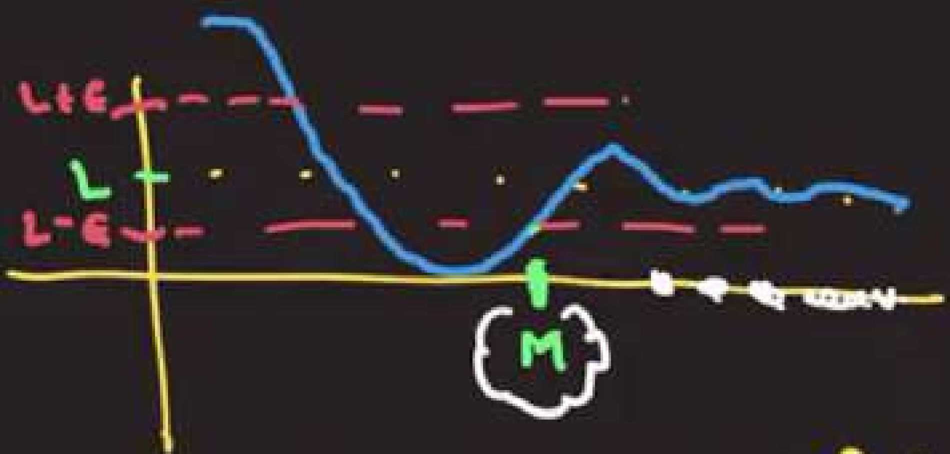
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Nota: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1) Si A no está acotado superiormente, entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L,$$

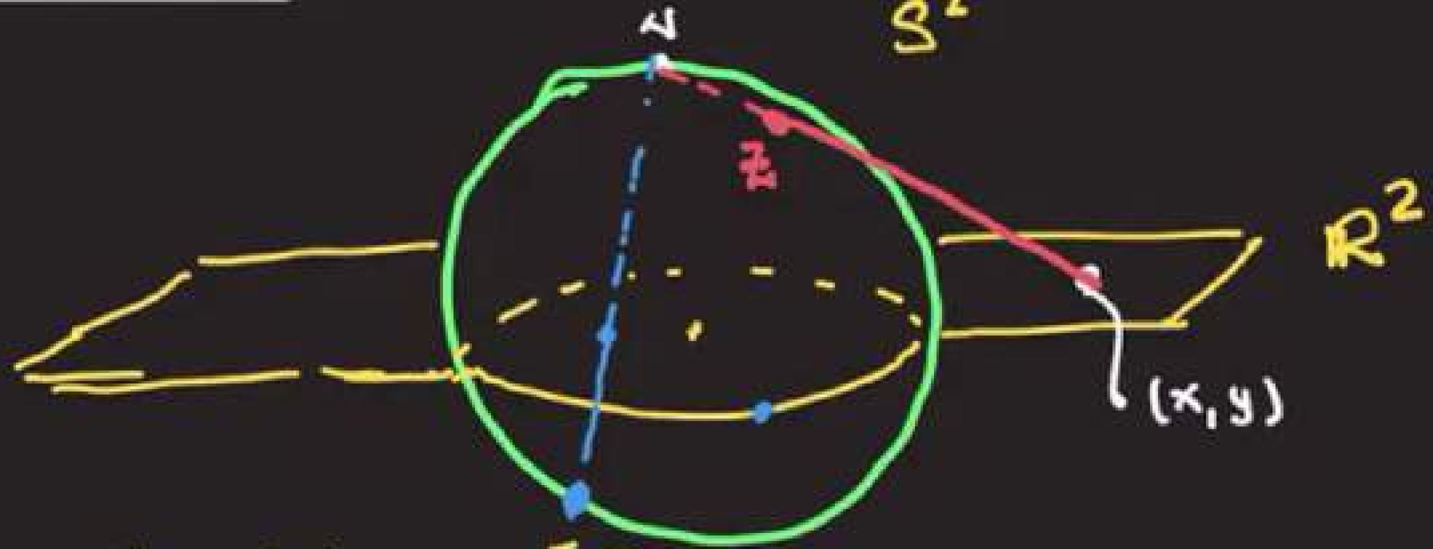
ssi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ M \in \mathbb{R} \ni$ si $x \in A$ y $x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.



2) Si A no está acotado inferiormente, entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

ssi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ M \in \mathbb{R} \ni$ si $x \in A$ y $x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.



Proyección Estereográfica
Esfera de Riemann

Propiedades de Límites

Prop: Suponga que $f,g: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y que c es un punto de acumulación de A. Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in A$, y si $\lim_{x \to c} f(x)$ y $\lim_{x \to c} g(x)$ existen, entonces

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x).$$

Dem: Supongamos que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c} g(x) = M$, y por el absurdo $L > M$.

Considere $\epsilon = \boxed{\dfrac{L-M}{2}} > 0 \Rightarrow$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ $\ni$:

$L - f(x)$

si $x \in A$ y $|x-c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

Si $x \in A$ y $|x-c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \epsilon$

$M - g(x)$

$\Rightarrow$ Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow$ Si $x \in A$, $|x-c| < \delta \Rightarrow$

$$f(x) - g(x) = [f(x) - L] + [L-M] + [M - g(x)]$$

$$> -\epsilon + [L-M] - \epsilon$$

$$= (L-M) - \underset{\uparrow \atop \frac{L-M}{2}}{2\epsilon} > 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$$

$(\longrightarrow \longleftarrow)$.

Prop: Suponga que $f, g, h : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y que c es un punto de acumulación de A. Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in A$ y si $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \to c} g(x) = L.$$

Dem: Por el teorema anterior:

- $\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x) \Rightarrow L \leq \lim_{x \to c} g(x)$
- $\lim_{x \to c} g(x) \leq \lim_{x \to c} h(x) \Rightarrow \lim_{x \to c} g(x) \leq L$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} g(x) = L$$

- Falta el argumento de la existencia de $\lim_{x \to c} g(x)$.

Prop: Suponga que $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y que c es un punto de acumulación de A. Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c} g(x) = M$, entonces:

1) $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$

2) $\lim_{x \to c} k f(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$.

3) $\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$

4) $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} f(x) \Big/ \lim_{x \to c} g(x)$, $M \neq 0$.

Dem:

1) Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ $\ni$

si $x \in A$ y $|x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon/2$

si $x \in A$ y $|x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \epsilon/2$

Sea $\boxed{\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0}$. Entonces, si $x \in A$, $|x - c| < \delta$, entonces:

$$|[f(x) + g(x)] - (L + M)| = |[f(x) - L] + [g(x) - M]| \leq$$

$$\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = L + M.$$

3) Como $g(x)$ tiene límite en $c \Rightarrow g(x)$ es localmente acotada en $c \Rightarrow \exists\, K>0$ y $\exists\, \delta_0>0 \ni |g(x)|<K$, $\forall x\in A, |x-c|<\delta_0$. Además, $\forall \epsilon>0\ \exists\, \delta_1>0$ y $\delta_2>0 \ni$

si $x\in A$, $|x-c|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon/2K$

si $x\in A$, $|x-c|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-M| < \epsilon/2|L|$

$\Rightarrow$ si $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\} \Rightarrow$ para $x\in A$, $|x-c|<\delta$,

$$\Rightarrow |f(x)\cdot g(x) - L\cdot M| = |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM|$$

$$= |[f(x)-L]g(x) + L[g(x)-M]|$$

$$\leq \underbrace{|f(x)-L|}\cdot|\underbrace{g(x)}| + |L|\,|\underbrace{g(x)-M}|$$

$$\leq \boxed{\frac{\epsilon}{2K}}\, K + |L|\cdot\boxed{\frac{\epsilon}{2\cdot|L|}} = \epsilon$$

Parte V

Continuidad

5. Continuidad

Clase de Diferenciación - Análisis de Variable Real 1

Rudik Rompich

June 1, 2021

Def: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in A$. Se dice que f es continua en x_0, si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, i.e.

si $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ni$ si $x \in A$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Nota: ① $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

- $f(x_0)$ está definida ①
- $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe ②
- Se cumple la igualdad ① y ②

② La continuidad es una propiedad local de la función.

③ La función es continua en $B \subseteq A$, si f es continua en cada punto de B.

④ Notaciones: ① $\mathbb{R}^A$: el conjunto de funciones de A en $\mathbb{R}$

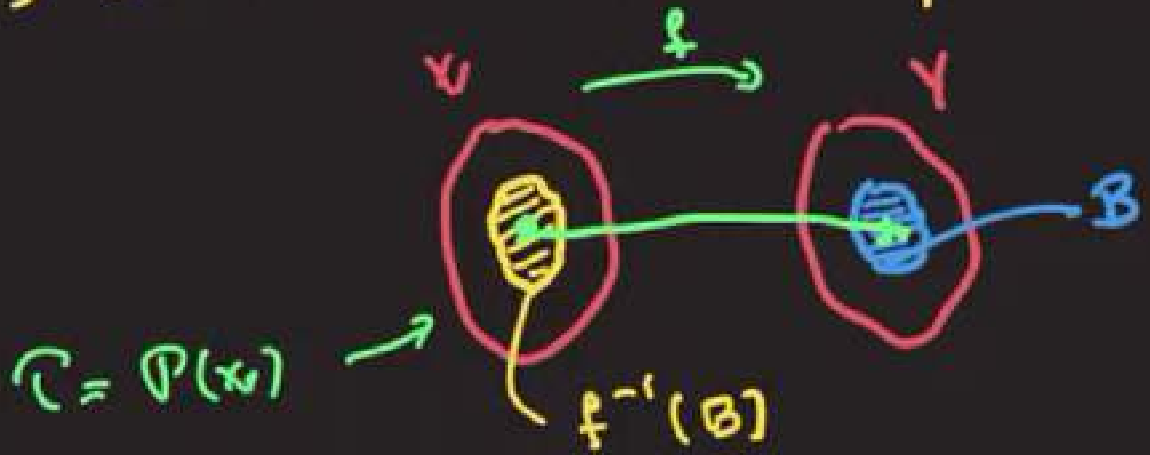
② $C(A)$: el conjunto de funciones continuas en A

Algunas propiedades de funciones:

Sea $f: X \longrightarrow Y$. Entonces:

1) Si $A \subseteq X \Rightarrow f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ es la imagen de A.

2) Si $B \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(B) = \{x \in X \ni f(x) \in B\}$



Propiedades de la Imagen.

1) $f(\phi) = \phi$

2) Si $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$

3) $f\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f(A_i)$

4) $f\left(\bigcap_i A_i\right) \subseteq \bigcap_i f(A_i)$

Propiedades de la preimagen:

1) $f^{-1}(\phi) = \phi$

2) $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$

3) $f^{-1}\left(\bigcup_i B_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$

4) $f^{-1}\left(\bigcap_i B_i\right) = \bigcap_i f^{-1}(B_i)$

Dem: 1) $f(\phi) = \{ f(x) : \underbrace{x \in \phi}_{F} \} = \phi$

2) Sea $\boxed{A_1 \subseteq A_2}$ y sea $\boxed{y \in f(A_1)}$. A probar:

$y \in f(A_2)$

Como $y \in f(A_1) \Rightarrow \exists\, x \in A_1 \ni f(x) = y$.

Pero, como $x \in A_1 \Rightarrow x \in A_2 \Rightarrow y = f(x) \in f(A_2)$

3) ($\subseteq$) A probar: $f\left(\bigcup_i A_i\right) \subseteq \bigcup_i f(A_i)$; i.e.

Si $y \in f\left(\bigcup_i A_i\right) \Rightarrow y \in \bigcup_i f(A_i)$

- Sea $y \in f\left(\bigcup_i A_i\right) \Rightarrow \exists\, x \in \bigcup_i A_i \ni f(x) = y$

$\Rightarrow x \in A_i$, para algún i. $\Rightarrow f(x) = y \in f(A_i)$

para algún i, $\Rightarrow$ $y = f(x) = \bigcup_i f(A_i)$

$(\supseteq)$ A probar: $\bigcup_i f(A_i) \subseteq f(\bigcup_i A_i)$. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Si $y \in \bigcup_i f(A_i) \Rightarrow y \in f(\bigcup_i A_i)$

- Sea $y \in \bigcup_i f(A_i) \Rightarrow y \in f(A_i)$, para algún i

$\Rightarrow \exists\, x \in A_i \ni f(x) = y$. Entonces, $x \in A_i \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \bigcup_i A_i \Rightarrow y = f(x) \in f(\bigcup_i A_i)$.

$\Rightarrow f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$

4) A probar: $f(\bigcap_i A_i) \subseteq \bigcap$

• Si $y \in f(\bigcap_i A_i) \Rightarrow \exists\, x \in \bigcap_i A_i \ni f(x) = y$.

$\Rightarrow x \in A_i, \forall i \Rightarrow y = f(x) \in f(A_i), \forall i$

$\Rightarrow y \in \bigcap_i f(A_i)$. Entonces,

$$f\left(\bigcap_i A_i\right) \subseteq \bigcap_i f(A_i).$$

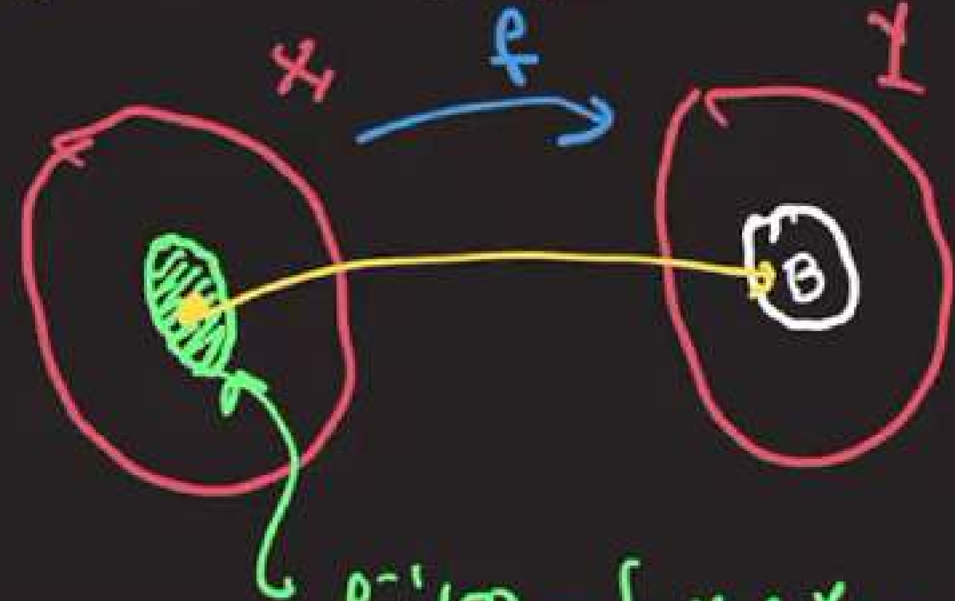
La contención $\bigcap_i f(A_i) \subseteq f(\bigcap_i A_i)$ **NO** se cumple necesariamente. En efecto, considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(x) = 1$; sea $A = (0,1)$ y $B = (1,2)$:

$\Rightarrow f(A) \cap f(B) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$

$f(A \cap B) = f[(0,1) \cap (1,2)] = f(0$

$$\Rightarrow f(A)\cap f(B) = \{1\} \nsubseteq \phi = f(A\cap B)$$

Nota.



$$f^{-1}(B) = \{x \in X \ni f(x) \in B\}$$

5) A probar: $f^{-1}(\phi) = \phi$

- $f^{-1}(\phi) = \{x \in X : \underbrace{f(x) \in \phi}_{\text{Falso}}\} = \phi$

6) A probar: Si $B_1 \subseteq Y$, $B_2 \subseteq Y \ni B_1 \subseteq B_2$

$\Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

- Sea $x \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow f(x) \in B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f(x) \in B_2$

  $\Rightarrow x \in f^{-1}(B_2)$

7) A probar! $f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$

($\subseteq$) A probar: $f^{-1}(\bigcup_i B_i) \subseteq \bigcup_i f^{-1}(B_i)$

- Sea $x \in f^{-1}(\bigcup_i B_i) \Rightarrow f(x) \in \bigcup_i B_i \Rightarrow f(x) \in B_i$, para algún i $\Rightarrow x \in f^{-1}(B_i)$, para ese i.

  $\Rightarrow x \in \bigcup_i f^{-1}(B_i)$.

00:34:04

15 / 15

$(\supseteq)$ A probar $\bigcup_i f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}(\bigcup_i B_i)$

- Sea $x \in \bigcup_i f^{-1}(B_i) \Rightarrow x \in f^{-1}(B_i)$, para algún i.

$\Rightarrow f(x) \in B_i \Rightarrow f(x) \in \bigcup_i B_i \Rightarrow x \in f^{-1}(\bigcup_i B_i)$.

$\Rightarrow \quad f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$.

8) $f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i)$

$(\subseteq)$ A probar: $f^{-1}(\bigcap_i B_i) \subseteq \bigcap_i f^{-1}(B_i)$

- Sea $x \in f^{-1}(\bigcap_i B_i) \Rightarrow f(x) \in \bigcap_i B_i \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \in B_i, \forall i \Rightarrow x \in f^{-1}(B_i), \forall i \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \bigcap_i f^{-1}(B_i)$

($\supseteq$) A probar: $\bigcap_i f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}(\bigcap_i B_i)$

- Sea $x \in \bigcap_i f^{-1}(B_i) \Rightarrow x \in f^{-1}(B_i), \forall i$

$\Rightarrow f(x) \in B_i, \forall i \Rightarrow f(x) \in \bigcap B_i \Rightarrow x \in f^{-1}(\bigcap_i B_i)$

$\Rightarrow f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i).$ $\square$

$f: X \to Y$

Prop: $f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c$; $\Rightarrow B^c = Y - B$

Dem: ($\subseteq$) A probar: $f^{-1}(B^c) \subseteq [f^{-1}(B)]^c$

- Sea $x \in f^{-1}(B^c) \Rightarrow f(x) \in B^c \Rightarrow f(x) \notin B$

$\Rightarrow x \notin f^{-1}(B)$

00:45:09

17 / 17

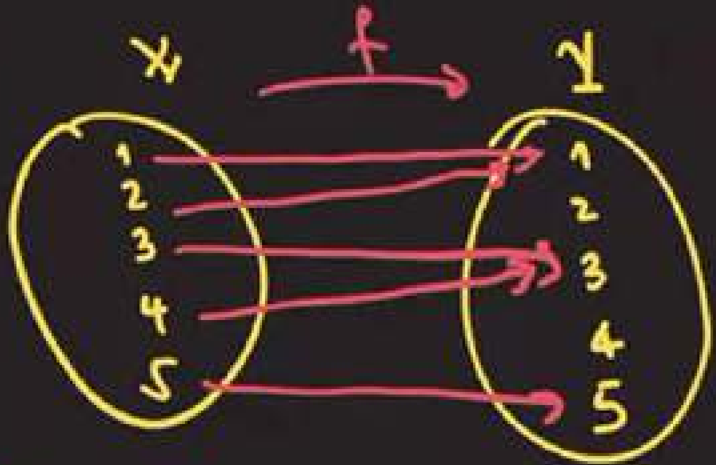
$(\supseteq)$ A probar: $[f^{-1}(B)]^c \subseteq f^{-1}(B^c)$.

Sea $x \in [f^{-1}(B)]^c \Rightarrow x \notin f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \notin B$

$\Rightarrow f(x) \in B^c \Rightarrow x \in f^{-1}(B^c)$.

$\Rightarrow \quad f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c$. $\square$

Nota:



$f^{-1}[\underbrace{\{1,3\}}_{\subseteq Y}] = \underbrace{\{1,2,3,4\}}_{\subseteq X}$; $f^{-1}[\underbrace{\{2,4\}}_{\subseteq Y}] = \phi$

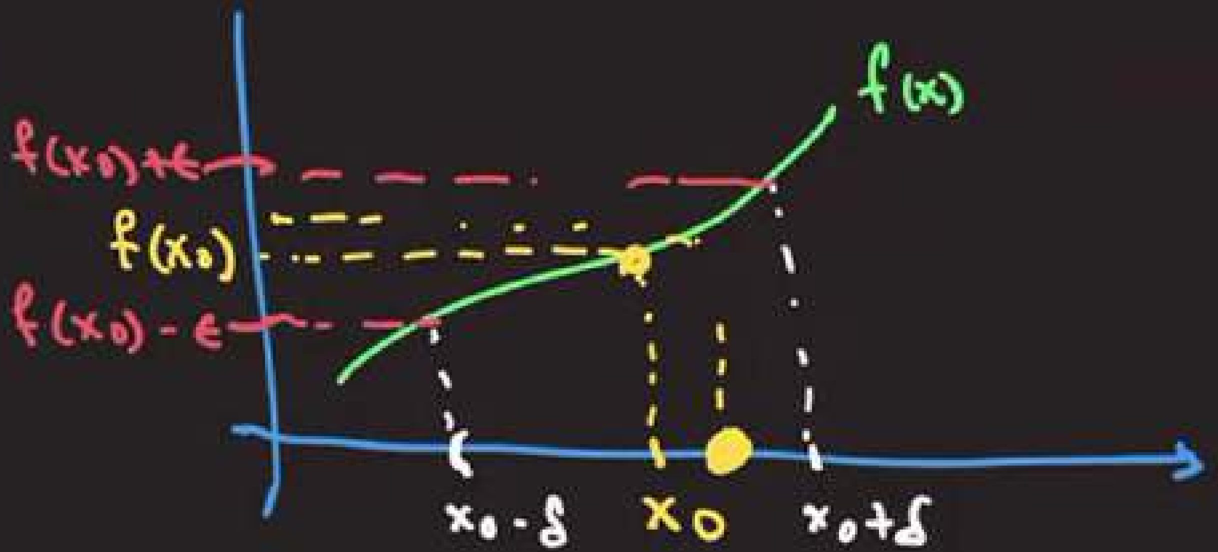
Nota ① Retorno a la definición de continuidad:

- La función $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $\boxed{x_0 \in I}$

si $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ni$ si $x \in I$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ ... $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

②

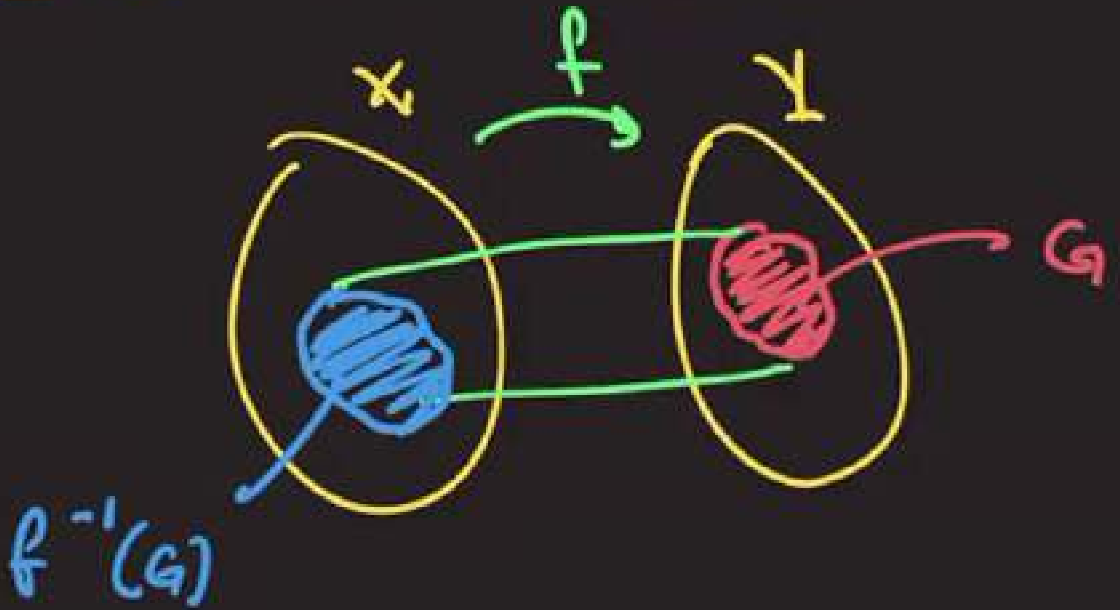


Dado $\epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ni f[I \cap V_\delta(x_0)] \subseteq V_\epsilon(f(x_0))$

<u>Teorema</u>: Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Los enunciados siguientes son equivalentes:

1) f es continua en D.

2) Si G es un abierto de $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ existe un abierto G_1 de $\mathbb{R}$ $\ni$ $G_1 \cap D = f^{-1}(G)$



01:15:37

20 / 20

Def: Un homeomorfismo es una función bicontinua y biyectiva entre dos espacios topológicos.

Es decir: $f:(X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y) \Rightarrow f$ es homeomorfismo ssi

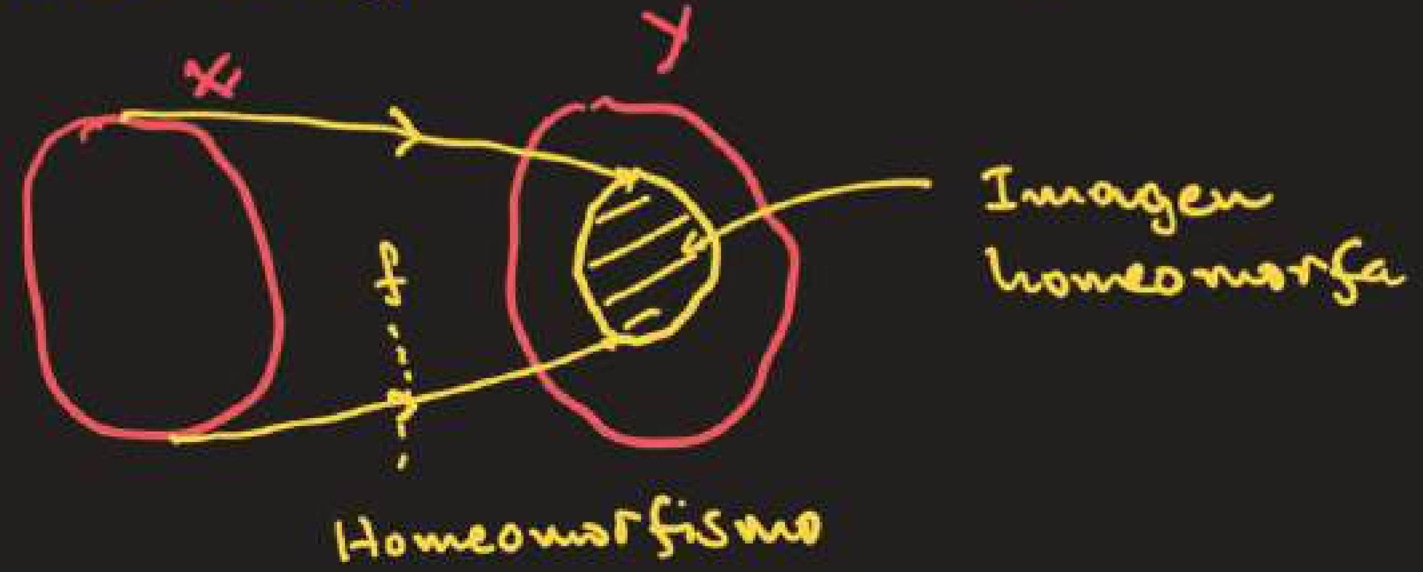
i) f es continua

ii) f es biyectiva (i.e f tiene inversa)

iii) La inversa de f es continua.

En este caso, X e Y son espacios homeomorfos; i.e son topológicamente indistinguibles.

Def: una propiedad topológica es una propiedad que, si la tiene el espacio topológico dominio la tiene cada imagen homeomorfa.



Nota: ① Las propiedades topológicas son el objeto de estudio de la Topología y el Análisis.

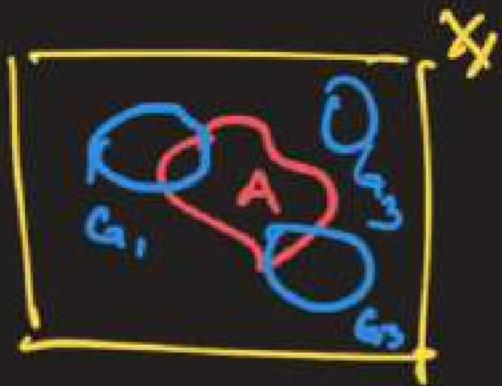
Topología: No hay métrica

Análisis: Hay métrica.

② Un <u>espacio metrizable</u> es un espacio topológico (X, τ) con la propiedad que existe al menos una métrica en X, cuya clase de abiertos generada es τ.

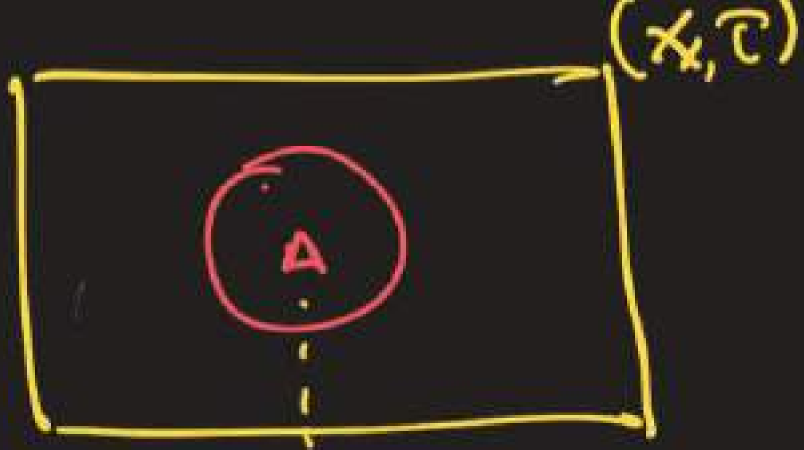
<u>NotA</u>: Sea A un subconjunto no vacío del espacio topológico (X, τ). Considere la clase siguiente:

$$\tau_A = \{ A \cap G : G \in \tau \}$$



$\Rightarrow$ τ_A es una topología sobre A (la topología relativa de A)

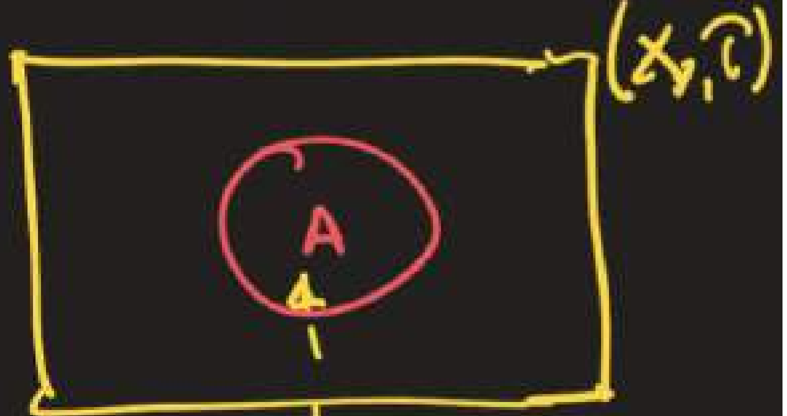
Nota:



(A, τ^*)

Espacio topológico nuevo

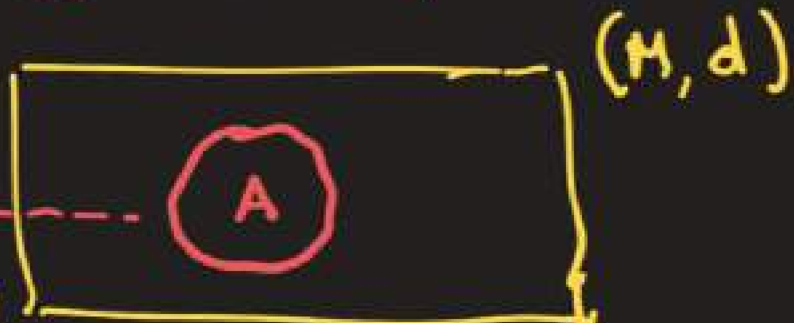
τ^* cualquier otra topología $\neq \tau_A$



(A, τ_A)

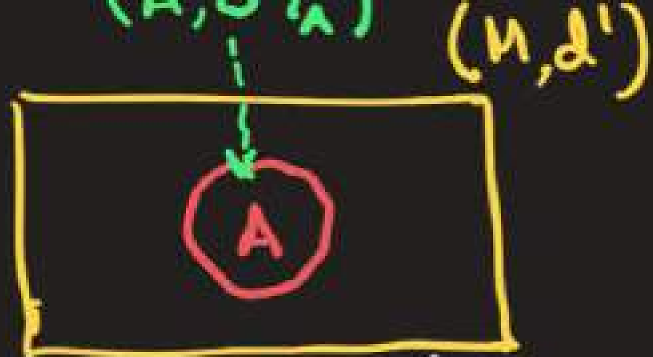
A es un subespacio de X (topológica)

¿Qué pasa con los esp. métricos?



(A, d^*), d^* es métrica, $d^* \neq d$.

$(A, d'|_A)$



Subespacio métrico

Teorema: Sea $f: \boxed{D \subseteq \mathbb{R}} \to \mathbb{R}$. Entonces, los enunciados siguientes son equivalentes:

1) f es continua sobre D.

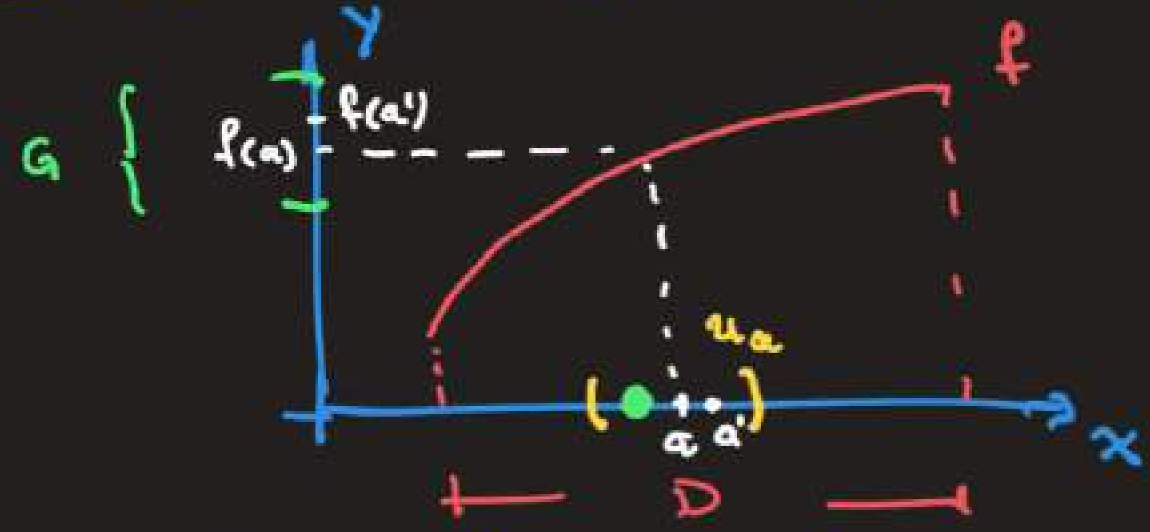
2) Si G es un abierto de $\mathbb{R} \Rightarrow \exists$ un abierto G_1 de $\mathbb{R}$ $\ni$ $f^{-1}(G) = G_1 \cap D$ ... abierto de D

3) Si H es un cerrado de $\mathbb{R} \Rightarrow \exists$ un cerrado H_1 de $\mathbb{R}$ $\ni$ $f^{-1}(H) = H_1 \cap D$

[Sea $f: D \to \mathbb{R}$; f es continua en D ssi $\forall G$ abierto de $\mathbb{R}$, se tiene que $f^{-1}(G)$ es abierto de D.

Nota: Probaremos : 1) $\Rightarrow$ 2) y 2) $\Rightarrow$ 1)
El resto : ejercicio)

Dem: (1) $\Rightarrow$ (2) Suponemos que f es continua en D.



$f^{-1}(G)$ es abierto de D

Si $a \in D \Rightarrow f$ es continua en $a \Rightarrow$ Dada la vecindad $\boxed{G \text{ de } f(a)}$, existe una vecindad U_a de a $\ni$ si $x \in U \cap D \Rightarrow f(x) \in G$. Entonces, se repite

$f(a) \in G \Leftrightarrow a \in f^{-1}(G)$

el argumento para cada $a \in f^{-1}(G)$ ... $a \ni f(a) \in G$

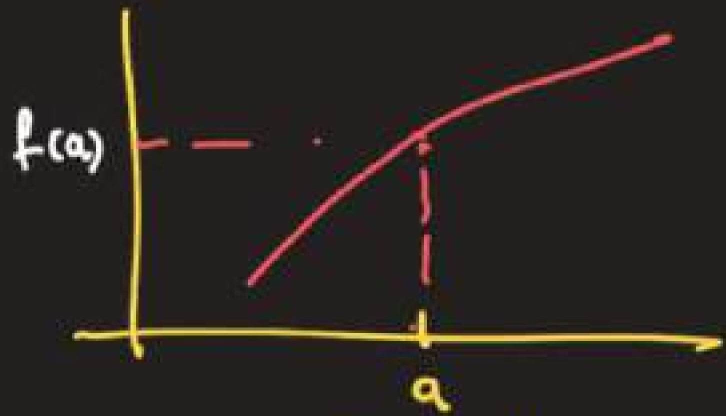
$$\Rightarrow \quad G_1 = \bigcup_{a \in f^{-1}(G)} U_a \quad \leftarrow \text{abiertas}$$

, el cual es abierto de $\mathbb{R}$ y es t.q. si $x \in G_1 \cap D \Rightarrow f(x) \in G$

$\Rightarrow \; f^{-1}(G) = D \cap G_1.$

$\Leftarrow)$ 1) Sea $a \in D$. A probar f es continua en a.

Sea G una vecindad abierta cualquiera de $f(a)$



$\Rightarrow$ Por (2): existe un abierto $G_1 \ni f^{-1}(G) = G_1 \cap D$

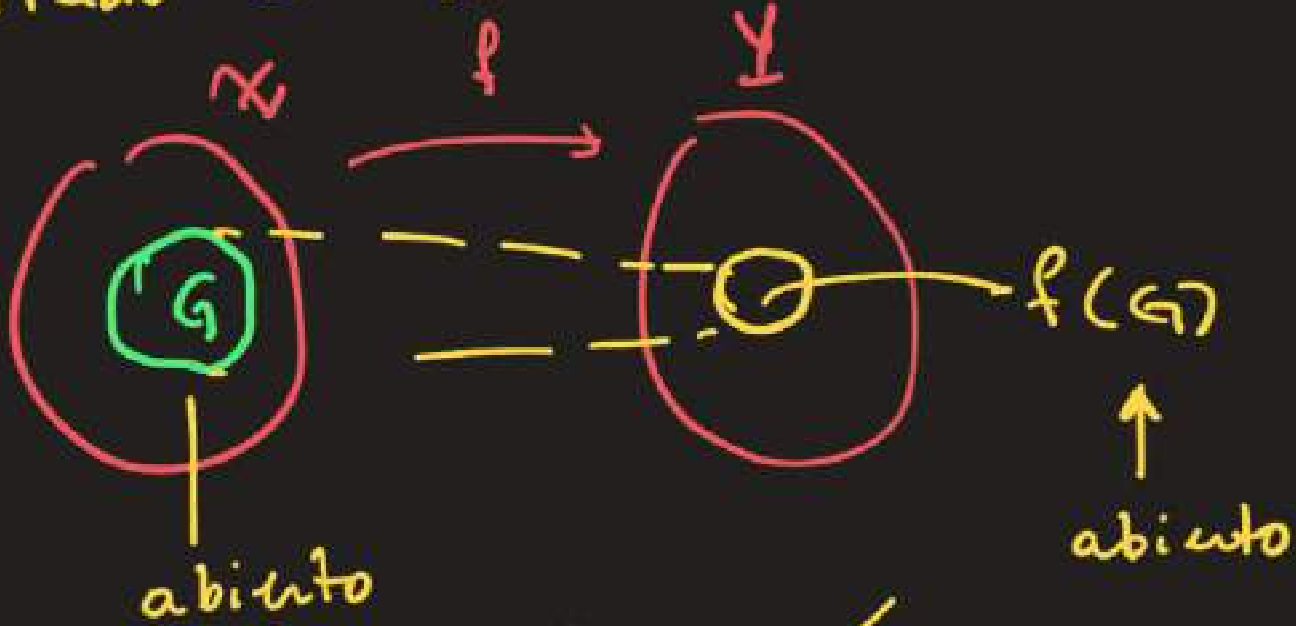
Si $f(a) \in G \Rightarrow a \in f^{-1}(G) = G_1 \cap D \Rightarrow a \in G_1$

↑ vecindad de a

$\Rightarrow$ Si $x \in G_1 \cap D \Rightarrow x \in f^{-1}(G) \Leftrightarrow f(x) \in G.$

Def: 1) $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es <u>abierta</u>, si para cada abierto G de D, se tiene que $f(G)$ es abierto de $\mathbb{R}$.

2) $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es <u>cerrada</u>, si para cada cerrado H de D, se tiene que $f(H)$ es cerrado de $\mathbb{R}$.



$\not\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ es abierta}}$

Ej: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(x) = x^2$. Considere $A = (-1, 1) \Rightarrow f(A) = [0, 1) \Rightarrow f$ no es abierta.

<u>Conjetura:</u>

1) Si f es biyectiva $\Rightarrow f$ es abierta
2) Si f es biyectiva y $\boxed{\text{continua}}$ $\Rightarrow f$ es abierta
?3) Si f es continua $\cancel{\Rightarrow}$ f es abierta *

Ej: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \ni f(x)=x^2$. Considere $A=(-1,1) \Rightarrow f(A)=[0,1) \Rightarrow f$ no es abierta.

Conjetura:

1) Si f es biyectiva $\Rightarrow$ f es abierta
2) Si f es biyectiva y $\boxed{\text{continua}}$ $\Rightarrow$ f es abierta
?3) Si f es continua $\not\Rightarrow$ f es abierta *

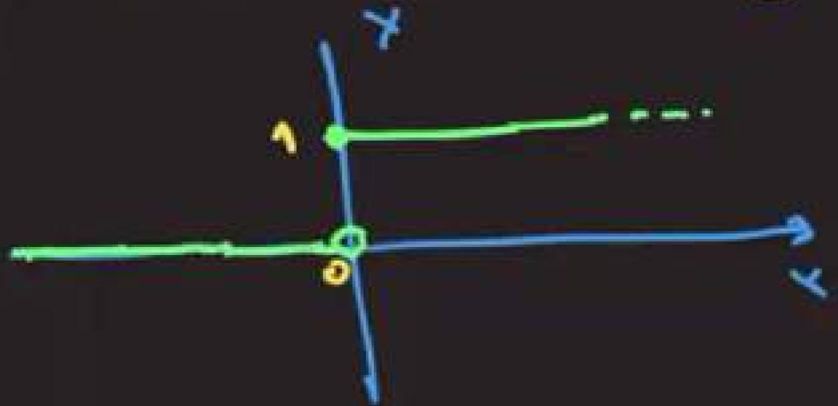
Ej: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \ni f(x)=1, \forall x\in\mathbb{R}$. Sea $A\subseteq\mathbb{R}$, un cerrado cualquiera $\Rightarrow f(A)=\{1\}=$

$$=\Big[\underbrace{\underbrace{(-\infty,1)}_{\text{abierto}} \cup \underbrace{(1,\infty)}_{\text{abierto}}}_{\text{abierto}}\Big]^c,$$

el cual es un cerrado de $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x) = 1$ es una función cerrada. Sin embargo, $f(\underbrace{(0,1)}_{\text{abierto}}) = \underbrace{\{1\}}_{\text{cerrado}} \Rightarrow f$ no es abierta.

Ej: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) \text{ no existe.}$$

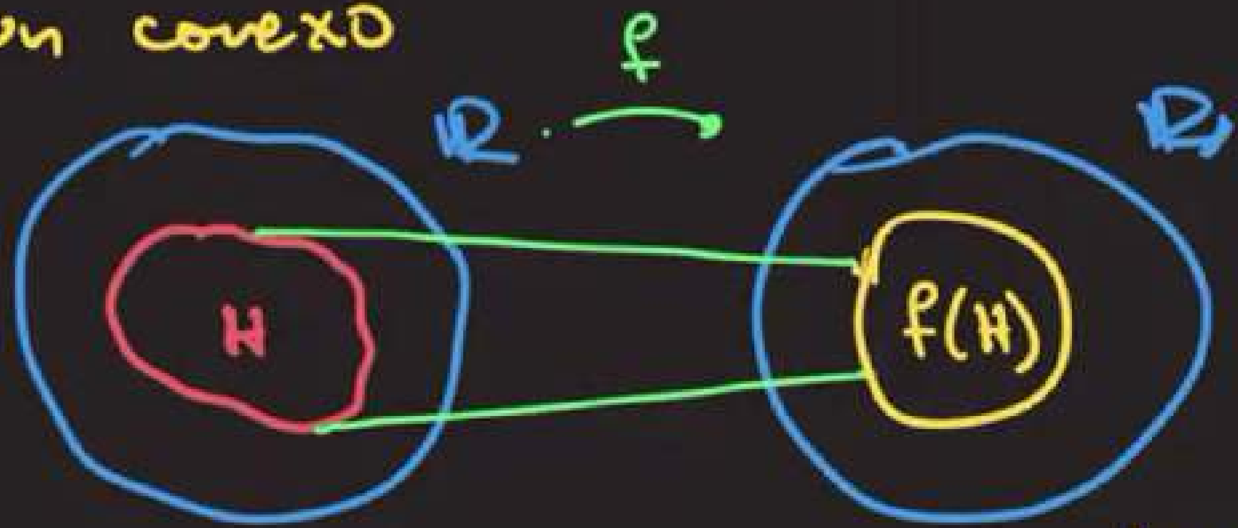
$\Rightarrow f$ es discontinua en $x = 0$.

Sea $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$, el cual es un cerrado $\Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(\underbrace{\{0\}}_{\text{cerrado de } \mathbb{R}}) = \underbrace{(-\infty, 0)}_{\text{abierto de } \mathbb{R}} \Rightarrow f$ no es continua.

$f: H \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

<u>Teorema</u>: Sea $H \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto conexo y f una función continua sobre H. Entonces, $f(H)$ es un conexo



⌐ $D \subseteq \mathbb{R}$ es <u>disconexo</u>, si existen abiertos disjuntos A y B $\ni$ $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $D \cap A \neq \emptyset$, $D \cap B \neq \emptyset$, y cumplen:

$$(D \cap A) \cap (D \cap B) = \emptyset$$
$$(D \cap A) \cup (D \cap B) = D$$

Blackboard 30

$$p \Rightarrow q$$

H es conexo $\uparrow$ (to p)

f continua

f(H) es conexo $\uparrow$ (to q)

Supuesto $p \wedge \bar{q}$

$\longrightarrow$ H es conexo y f(H) es disconexo

$\longrightarrow$ f es continua

Dem: Sea H un convexo de $\mathbb{R}$ y f una función continua. Supóngase, por el absurdo, que $f(H)$ es disconexo.

$\Rightarrow$ Existen abiertos disjuntos y no vacíos A y B de $\mathbb{R}$, $\ni$

$$[f(H) \cap A] \cap [f(H) \cap B] = \phi$$

$$[f(H) \cap A] \cup [f(H) \cap B] = f(H)$$

Por la continuidad de f, existen abiertos no vacíos A_1 y B_1 de X, $\ni$ $f^{-1}(A) = \underbrace{A_1 \cap H}_{\text{abierto de } H \text{ Top. rel.}}$

y $f^{-1}(B) \overset{!}{=} \underbrace{B_1 \cap H}_{\text{abierto de } H}$

Entonces,

$$(A_1 \cap H) \cap (B_1 \cap H) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) =$$

*

$$= f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\phi) = \phi$$

$$(A_1 \cap H) \cup (B_1 \cap H) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) =$$

$$= f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(f(H)) = H$$

$\Rightarrow$ A_1 y B_1 forman una disconexión de H ($\rightarrow\leftarrow$)

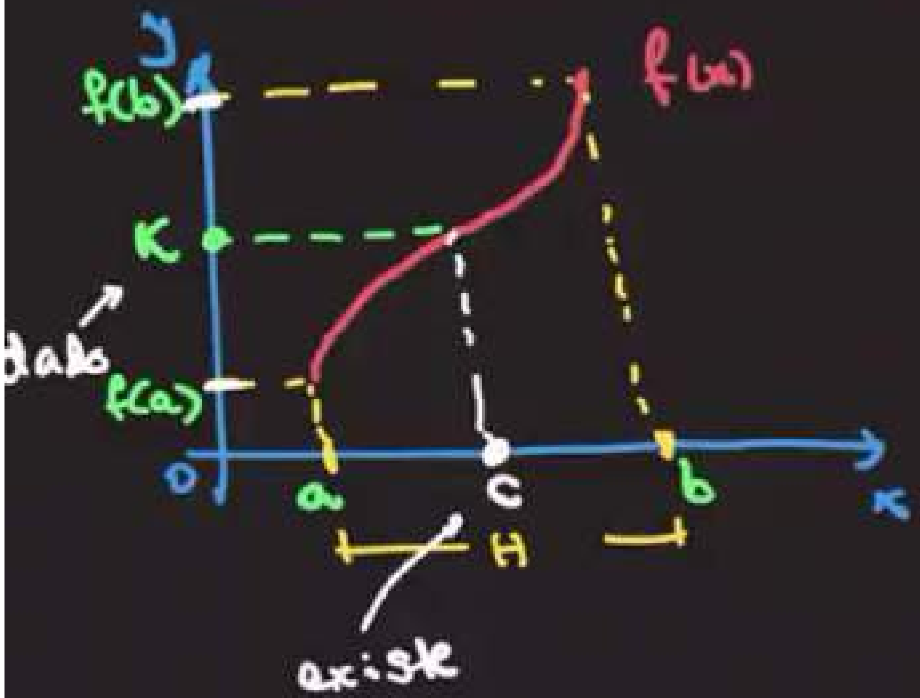
$\Rightarrow$ $f(H)$ es convexo. $\square$

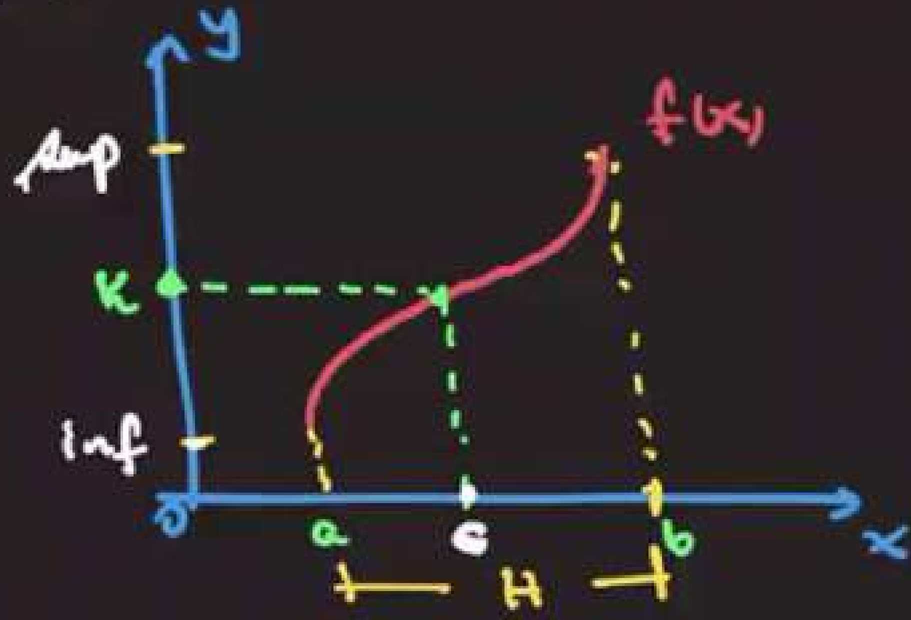
<u>Teorema</u> (del valor intermedio) (Bolzano)

Sea H un subconjunto de $\mathbb{R}$ y sea f una función continua y acotada sobre H con valores en $\mathbb{R}$. Si $K \in \mathbb{R}$ $\ni$

$$\inf\{f(x) : x \in H\} < K < \sup\{f(x) : x \in H\},$$

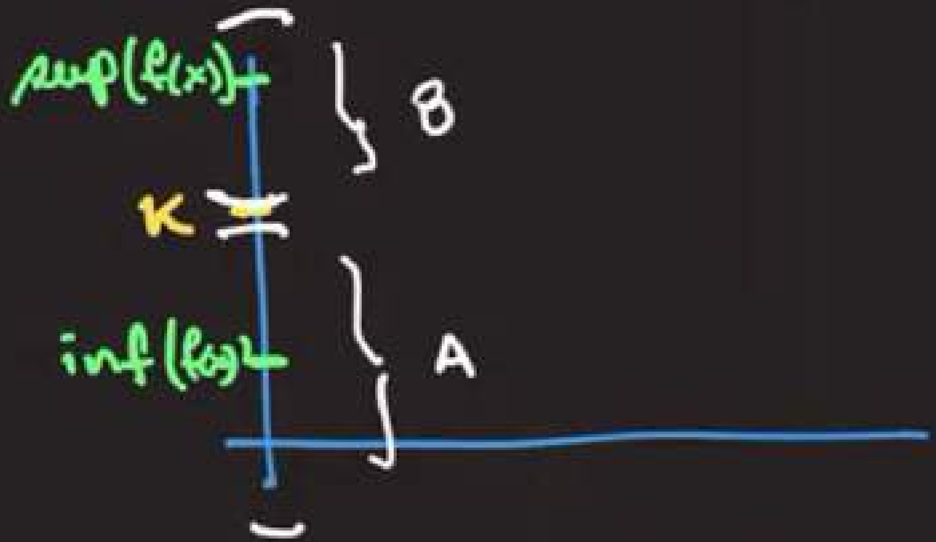
$$\Rightarrow \exists\, c \in H \ni f(c) = K.$$





Dem: Sean H convexo de $\mathbb{R}$, y f continua y acotada sobre H. $(\Rightarrow f(H)$ es convexo$)$

Considere: $A = \{t \in \mathbb{R} \ni t < K\}$ y $B = \{t \in \mathbb{R} \ni t > K\}$



Nótese que A y B son abiertos no vacíos y disjuntos de $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ como f es continua, existen A_1 y B_1 abiertos de $\mathbb{R}$, tales que:

$$f^{-1}(A) = A_1 \cap H \quad y \quad f^{-1}(B) = B_1 \cap H$$

Si f no toma el valor de $k \Rightarrow A_1$ y B_1 forman un disconexión de H $(\rightarrow\leftarrow)$, entonces f tiene que tomar el valor de k, i.e. $\exists$ $c \in H \ni f(c) = k$. $\square$

Problemas:

1. ¿Es cierto que si una función f cumple con la propiedad del valor intermedio, entonces f es continua.

2. Pruebe que, si $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva y tiene la propiedad del valor intermedio, $\Rightarrow f$ es estrictamente monótona.

• Si $K \in \mathbb{R} \ni \inf\{f(x) : x \in H\} < K < \sup\{f(x) : x \in H\}$

$\Rightarrow \exists\, c \in H \ni f(c) = K$.

conexo

f: acotada

La propiedad del valor intermedio.

<u>Teorema:</u> Si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y si $f : K \to \mathbb{R}$ es continua sobre K

$\Rightarrow f(K)$ es un compacto.

$$f(K) \subseteq \bigcup_\alpha G_\alpha \Rightarrow K \subseteq f^{-1}\Big(\bigcup_\alpha G_\alpha\Big)$$

$$K = \bigcup_\alpha \underbrace{f^{-1}(G_\alpha)}$$

Teorema: Si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y $f: K \to \mathbb{R}$ es continua sobre K, entonces $\boxed{f(K) \text{ es compacto}}$ (La compacidad se preserva bajo mapeos continuos).

Dem. Sea $G = \{G_\alpha\}$ una cubierta abierta de $f(K)$; i.e. $f(K) \subseteq \bigcup_\alpha G_\alpha$, G_α abierto.

$$\Rightarrow f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_\alpha G_\alpha\right)$$

$$\Rightarrow K \subseteq \bigcup_\alpha \underbrace{f^{-1}(G_\alpha)}_{\text{abierto}, \forall \alpha,\ \text{en el dominio}}$$

f es continua
G_α es abierto

$\{f^{-1}(G_\alpha)\}$ es cub. abierta de

Como K es compacto $\Rightarrow$ existen

$$\{f^{-1}(G\ ), f^{-1}(G\ ), \ldots, f^{-1}(G\ )\} \ni$$

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_i)$$

$$\Rightarrow f(K) \subseteq f\left[\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_i)\right]$$

$$\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f\left[f^{-1}(G_i)\right]$$

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

$\Rightarrow f(K)$ es compacto. $\square$

Como K es compacto $\Rightarrow$ existen

$$\{f^{-1}(G_{\alpha_1}), f^{-1}(G_{\alpha_2}), \ldots, f^{-1}(G_{\alpha_n})\} \ni$$

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_{\alpha_i})$$

$$\Rightarrow f(K) \subseteq f\left[\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_i)\right]$$

$$\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f\left[f^{-1}(G_i)\right]$$

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

$\Rightarrow f(K)$ es compacto. $\square$

<u>Teorema</u> (caracterización secuencial de compacto):
Un subconjunto K de $\mathbb{R}$ es compacto ssi cada sucesión en K tiene una subsucesión que converge a un punto en K.

<u>Dem</u>:
($\Rightarrow$) Como $K \subseteq \mathbb{R}$, es compacto, entonces por Heine-Borel, K es cerrado y acotado.

- Como K es acotado y si (x_n) es una sucesión cualquiera en K $\Rightarrow$ (x_n) es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$,

Por el teorema de Bolzano-Weierst

$\Rightarrow$ (x_n) tiene una subsucesión convergente.

i.e. existe la subsucesión $(x_{n_k}) \ni$

$x_{n_k} \longrightarrow c$.

Como K es cerrado $\Rightarrow K$ contiene a todos sus puntos límite. En particular, $c \in K$.

$(\Leftarrow)$ Ejercicio.

Ayuda: Pruebe utilizando contrapuesta por casos.

$q \Rightarrow p \Leftrightarrow \bar{p} \Rightarrow \bar{q}$

K no es compacto

K no es cerrado

K no es acotado

00:38:40

MIX 0:03 4/4

Teorema: La imagen de un compacto bajo un mapeo continuo es compacto.

Dem: Sea K un compacto y f una función continua. A probar: $f(K)$ es compacto.

- Sea (y_n) una sucesión en $f(K)$. Entonces, $\exists\, x_n \in K \ni x_n = f(y_n),\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$

  ↳ forman una sucesión en K

Como K es compacto $\Rightarrow$ (x_n) tiene una subsucesión (x_{n_k}) que converge a c.

Como f es continua $\Rightarrow$ la subsucesión $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \longrightarrow f(c) \in f(K)$. $\Rightarrow$ $f(K)$ es compacto.

Nota ① Recordemos (Heine-Borel):

$K \subseteq \mathbb{R}$ es compacto ssi K es cerrado y acotado

② Si $\{K_\alpha\}$ es colección de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$, entonces $\prod_\alpha K_\alpha$ es compacto (Teorema de Tychonoff Tikonov)

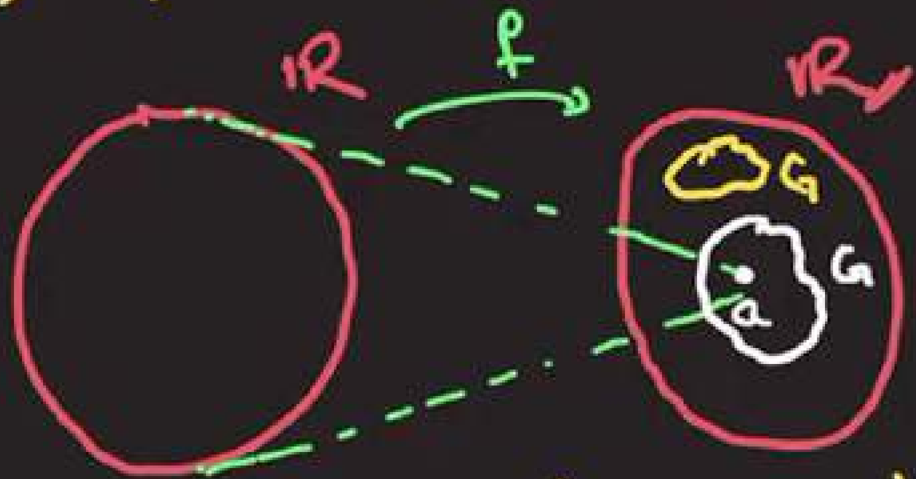
③ • Un conjunto cerrado y acotado en un espacio métrico (X, ρ), ¿Es compacto?

•• Si K es un conjunto compacto en el métrico (X, ρ), ¿Es cerrado y acotado?

Ejemplos:

1) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_u \ni f(x) = a, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Entonces, f es continua.

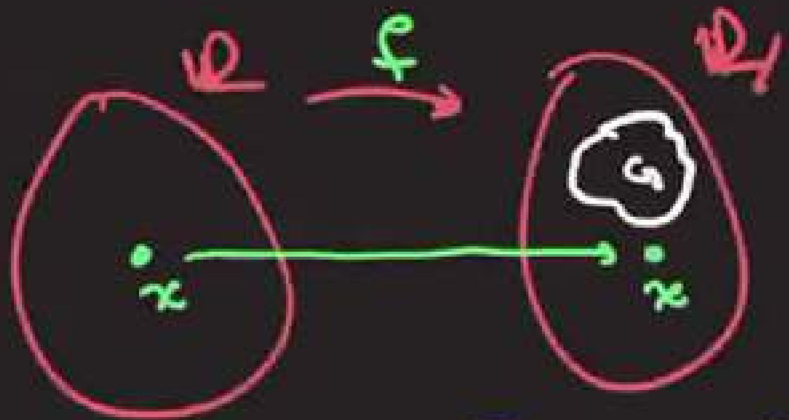


$\Rightarrow$ Sea G un abierto cualquiera de $\mathbb{R}_u$,

entonces: $$f^{-1}(G) = \begin{cases} \mathbb{R} & , a \in G \\ \phi & , a \notin G \end{cases}$$

Como $\mathbb{R}$ y ϕ son abiertos de $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f es continua.

2) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_I \ni f(x)=x \Rightarrow f$ es continua.



Sea G un abierto de $\mathbb{R}_I \Rightarrow f^{-1}(G)=G$, el cual es un abierto de $\mathbb{R} \Rightarrow f$ es continua.

3) (**) Suponga que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to$ son funciones continuas. Entonces,

$$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

es continua.

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(g^{-1}(H)) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & g^{-1}(H) \arrow[r, "g"] \arrow[l, bend left] & H \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}$$

4) Considere la función siguiente:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ni$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 \,, & x \in \mathbb{Q} \\ 0 \,, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(Función de Dirichlet)

f es discontinua en cada $x \in \mathbb{R}$.

Continuidad (cont...)

Nota: 1) Criterio de continuidad: una función $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $c \in A$ ssi para cada sucesión $(x_n) \subset A \ni x_n \to c$, se tiene que $f(x_n) \to f(c)$.

2) Criterio de discontinuidad: Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ y $c \in A$. Entonces, f es discontinua en c ssi existe una sucesión $(x_n) \subset A \ni x_n \to c$ y $f(x_n) \not\to f(c)$.

<u>Nota</u>: 1) Sea $x \in \mathbb{Q}$ y considere la sucesión de irracionales $\left(x + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \left(x + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = x \in \mathbb{Q}.$$

$*$ 2) Sea $y \in \mathbb{I}rr \Rightarrow$ considere $\boxed{\quad\quad}$ de racionales, tal que cumple $\lim_{n\to\infty} \boxed{\quad\quad} = y$.

Ej: Considere la función de Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I}rr. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ es discontinua en cada punto.

En efecto:

i) Sea $c \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ sea (x_n) una sucesión de irracionales $\ni x_n \longrightarrow c \Rightarrow f(x_n) = (0)$ (la sucesión constante cero) $\Rightarrow$

$$f(x_n) \not\longrightarrow f(c) = 1$$
$$(0)_n \longrightarrow 0$$

ii) Sea $d \in \mathbb{I}rr$ y sea (y_n) una sucesión de racionales $\ni y_n \longrightarrow d \Rightarrow f(y_n) = (1)$ (la sucesión constante 1) $\Rightarrow$

$$f(y_n) \not\longrightarrow f(d) = 0$$
$$(1) \longrightarrow 1$$

Def: Un conjunto A es **denso** en B si

$$\bar{A} = B.$$

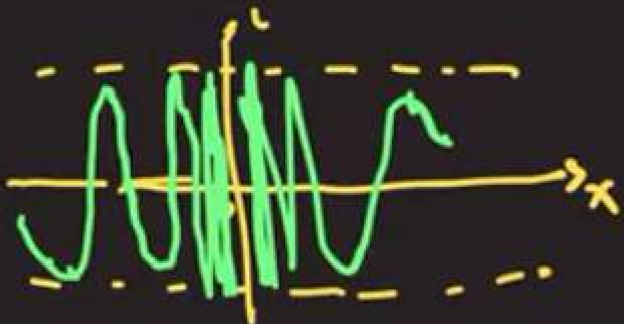
Ej: $\boxed{\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}}$; $\overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}_{rr}$ son densos en $\mathbb{R}$).

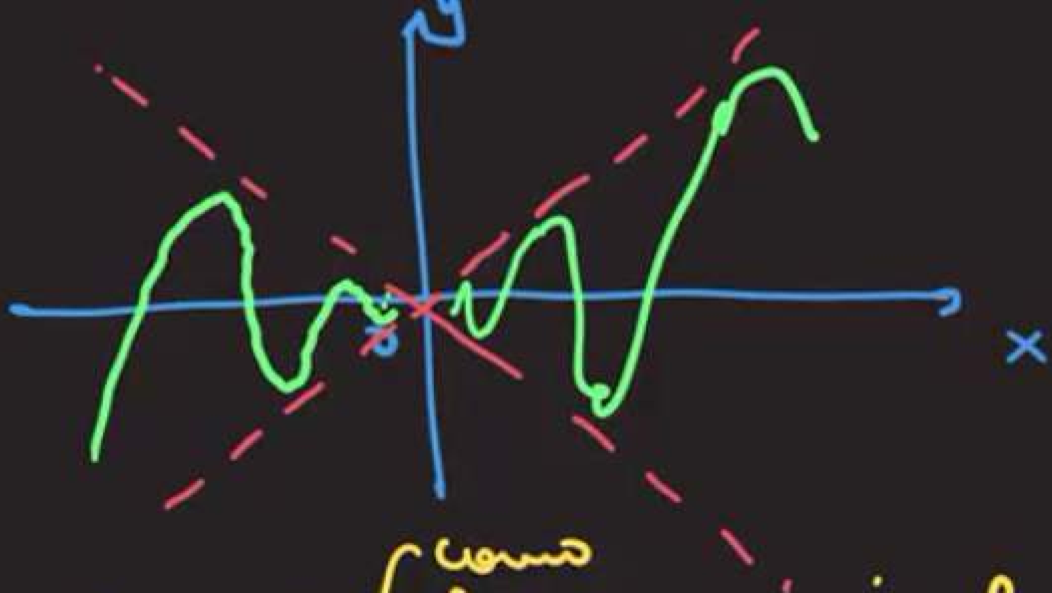
* Ver en Bartle & Sherbert: ① función Thomae

② Continuidad de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $\mathbb{R}$.

Ej: Considere
$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Entonces, $f(x)$ es continua, $\forall x \in \mathbb{R}$.





i) Sea $x \neq 0 \Rightarrow \overset{\text{como}}{f_1(x) = x}$ y $f_2(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ son continuas, $\forall x \neq 0 \Rightarrow f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ es continua.

ii) Sea $c = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, se tiene que:

$$|f(x) - f(\underset{c}{0})| = \left|x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - 0\right| = \left|x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leq |x|$$

$\Rightarrow$ Si $x \to 0 \Rightarrow |f(x) - 0| \to 0 \Rightarrow f$ es continua en $x = 0$.

<u>Nota</u>: 1) $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está <u>acotada</u> en A, si $|f(x)| \leq \underset{\in \mathbb{R}!}{M}$, $\forall x \in A$.

2) $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>no está acotada</u> en A, si $\forall M > 0$ $\exists$ $x_M \in A \ni |f(x_M)| > M$.

<u>Teorema</u>: Sea $I = [a, b]$ un compacto y $f: I \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, f está acotada en I.

Nota: 1) $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está **acotada** en A, si $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in A$.
$\in \mathbb{R}$!

2) $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **no está acotada** en A, si $\forall M > 0 \; \exists \; x_M \in A \ni |f(x_M)| > M$.

Teorema: Sea $I = [a, b]$ un compacto y $f: I \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, f está acotada en I.

Dem: Supóngase, por el absurdo, que f no está acotada en I.

$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \;\; \exists \underset{\uparrow\,(x_n)}{x_n} \in I \ni |f(x_n)| > n.$

$\Rightarrow$ Como I es compacto $\Rightarrow$ I es acotado $\Rightarrow$ $(x_n) \subseteq I$ es acotada $\Rightarrow$ existe (x_{n_k}) sub-sucesión de (x_n) $\ni$ $x_{n_k} \longrightarrow x'$. Como I cerrado $\Rightarrow$ $x' \in I$. Pero f es continua en I $\Rightarrow$ f es continua en x' $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x') \Rightarrow (f(x_{n_k}))$ está acotada $(\rightarrow\leftarrow)$. Entonces, f está acotada. $\square$

Def: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que:

1) f tiene máximo absoluto en A, si $\exists\, x' \in A \ni$
$f(x') \geq f(x)$, $\forall x \in A$.

2) f tiene mínimo absoluto en A, si $\exists\, x'' \in A \ni$
$f(x'') \leq f(x)$, $\forall x \in A$.

Teorema (del valor extremo) (Weierstrass)

Sea I un compacto y, si $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f tiene máximo y mínimo absolutos en I.

• Como $\emptyset \neq f(I) \subseteq \mathbb{R}$, y como I es compacto,
$\Rightarrow$ $f(I)$ es compacto $\Rightarrow$ $f(I)$ es acotado.

$\Rightarrow$ $f(I)$ tiene supremo, digamos s;

i.e. $s = \sup\{f(x) : x \in I\}$.

A probar: $\exists\, x' \in I \ni f(x') = s$.

•• Considere el número $s - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$

$s - \frac{1}{n}$ no es cota superior de $f(I)$; i.e,

$\exists\, x_n \in I \ni s - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

$\uparrow (x_n)$

••• Como I es compacto $\Rightarrow$ I es acotado.

Dada $(x_n) \subseteq I \Rightarrow (x_n)$ es acotada

$\Rightarrow$ Por Bolzano-Weierstrass, (x_n) tiene una subsucesión $(x_{n_k}) \ni x_{n_k} \longrightarrow x' \in I$ (I es cerrado)

Además, como f es continua en I, f es continua en x' $\Rightarrow f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x')$

$\Rightarrow$ Como $s - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq s$

$\Rightarrow$ Para k grande, y aplicando el teorema de compresión, se tiene que

$$s \leq f(x') \leq s$$

$\Rightarrow \exists\, x' \in I \ni f(x') = s$. $\Rightarrow f$ alcanza un máximo absoluto en I.

$\square$

Nota: $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in A$ si,

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ni$ si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Def: Una función $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua (sobre A) si, $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ni \forall \ x, x' \in A, |x - x'| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon$.

- Dado $\epsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta($ $\quad > 0 \ni$ si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$
 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
- Dado $\epsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta($ $\quad > 0 \ni$ si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$
 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
- Dado $\epsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\epsilon,$ $\quad > 0 \ni$ si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$

Nota: $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in A$ si,
$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ni$ si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Def: Una función $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $\overbrace{\underbrace{\text{continua}}}^{\text{uniformemente}}$ (sobre A) si, $\forall \epsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ni \forall \ x, x' \in A, |x - x'| < \delta$
$\Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon$.

Nota:

1) Continuidad uniforme $\Rightarrow$ continuidad. En general, el converso es falso. En efecto, sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(x) = x^2$. Supóngase f es uniformemente continua

y hagamos $\epsilon = 1$. Entonces, debe existir

$\delta = \delta(\epsilon) > 0 \ni \forall x, x' \in \mathbb{R}$, si $|x - x'| < \delta \Rightarrow$

$|f(x) - f(x')| = |x^2 - (x')^2| < 1$.

Sean $x = \frac{\delta}{2}$ y $x' = \frac{\delta}{2} + \frac{2}{\delta}$. Entonces,

$$|x - x'| = \left| \frac{\delta}{2} - \left(\frac{\delta}{2} + \frac{2}{\delta} \right) \right| = \left| -\frac{2}{\delta} \right| = \frac{2}{\delta} < \delta, \text{ y}$$

$$|x^2 - (x')^2| = \left| \frac{\delta^2}{4} - \left(\frac{\delta}{2} + \frac{2}{\delta} \right)^2 \right| = \left| \cancel{\frac{\delta^2}{4}} - \left(\cancel{\frac{\delta^2}{4}} + 2 + \frac{4}{\delta^2} \right) \right|$$

$$= \left| -2 - \frac{4}{\delta^2} \right| = 2 + \frac{4}{\delta^2} > 1$$

*2) Si el dominio de una función es acotado, la continuidad uniforme también puede fallar.

3) La continuidad uniforme se hereda por subconjuntos.

(funciones afines)

Ej: 1) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\underline{\alpha = 0} \Rightarrow f(x) = \beta$ (constante) $\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists \ \delta = 1 > 0 \ni$

$\forall x, x' \in \mathbb{R} \ni |x - x'| < 1 \Rightarrow |f(x) - f(x')| = |\beta - \beta| = 0 < \epsilon$

$\Rightarrow$ como $\delta = 1$ no depende de x' y $x \Rightarrow$ la continuidad es uniforme.

$\underline{\alpha \neq 0}$: $\forall \epsilon > 0 \ \exists \ \delta = \underline{\epsilon / |\alpha|} \ni \forall x, x' \in \mathbb{R} \ni |x - x'| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(x')| = |(\alpha x + \beta) - (\alpha x' + \beta)| =$

$= |\alpha (x - x')| = |\alpha| \cdot |x - x'| < \epsilon \Rightarrow f(x) = \alpha x + \beta$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

2) Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces, es uniformemente continua. En efecto.

Dado $\epsilon > 0 \ \exists \ \delta = \epsilon > 0 \ni \forall x, x' \in \mathbb{R} \ni$ si $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| = |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x'|$

$$= \left| 2 \cos\left(\frac{x+x'}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x-x'}{2}\right) \right|$$

$$\leq 2 \left| \operatorname{sen}\left(\frac{x-x'}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \frac{x-x'}{2} \right| = |x - x'| < \epsilon.$$

<u>**Teorema**</u> (***) Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ un compacto. Si $f: K \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f es uniformemente continua.

Lipschitz $\exists A \ni$

$$|f(x) - f(y)| \leq A|x-y|$$

$\boxed{\delta = \delta(\epsilon, x)}$

Nota: una función $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **no** es uniformemente continua si:

① $\exists\, \epsilon_0 > 0 \ni \forall \delta > 0 \ \exists\, x_\delta, x'_\delta \ni$ si $|x_\delta - x'_\delta| < \delta \Rightarrow$
$|f(x_\delta) - f(x'_\delta)| > \epsilon_0$.

② $\exists\, \epsilon_0 > 0$ y dos sucesiones (x_n) y (x'_n) en $A \ni$
$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x'_n) = 0$ y $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \epsilon_0$.

Teorema (continuidad sobre compactos): Sea $f \in \boxed{C(A)}$ y sea $K \subseteq A^{\subseteq \mathbb{R}}$ un compacto. Entonces, f es uniformemente continua.

conjunto de funciones continuas de A en $\mathbb{R}$.

Dem: Supongamos, por el absurdo que existen $\epsilon_0 > 0$ y sucesiones (x_n) y (x_n') en $K \subseteq \mathbb{R}$ $\ni$ $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_n') = 0$ y $|f(x_n) - f(x_n')| \geq \epsilon_0$.

Como K es compacto $\Rightarrow$ existe una

2/2

subsucesión (x_{n_k}) de $\boxed{(x_n)}$ $\ni \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in K$.

$\Rightarrow$ se cumple también que $\lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = x_0$.

como f es continua en K, entonces

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k})$$

$(\rightarrow \leftarrow)$

$\square$

Prop: Si $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua sobre A y si $(x_n) \subset A$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ en A $\Rightarrow$ $(f(x_n))$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Teorema: Una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es uniformemente continua en (a,b) ssi f puede $\boxed{\text{extenderse}}$ a una función continua sobre $[a,b]$.

Dem: ($\Leftarrow$) Suponga que f tiene una extensión continua $\tilde{f}:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$. Como $[a,b]$ es compacto $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ es uniformemente continua.
Además, la continuidad uniforme se hereda por subconjuntos, i.e $\tilde{f}\big|_{(a,b)}=f$
$\Rightarrow$ f es uniformemente continua sobre (a,b)

($\Rightarrow$) Ejercicio. $\square$

Def: Si $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que f es Lipschitz, si $\exists\ A > 0 \ni$:

$$|f(x) - f(x')| \leq A|x - x'|, \ \forall x, x' \in I$$

Nota: ① Si f es Lipschitz y $x \neq x'$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \right| \leq A$$

i.e. La pendiente de la cuerda que une a los puntos $(x, f(x))$ y $(x', f(x'))$ está acotada por A, $\forall x, x' \in I$, $x \neq x'$.

② Si f es Lipschitz con $A < 1$, entonces es una contracción.

③ Se dice que f es Lipschitz de orden α, $0 < \alpha \leq 1$, si $\exists\, A > 0 \ni$:

$$|f(x) - f(x')| \leq A \cdot |x - x'|^{\alpha}, \quad \forall x, x' \in I$$

Ej: ① Sabemos que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x'| \leq |x - x'|$

$\Rightarrow f(x) = \operatorname{sen} x$ es Lipschitz con $A = 1$, $\forall x, x' \in \mathbb{R}$

sobre $\mathbb{R}$

② Sea $f(x) = \alpha x + \beta$ sobre $\mathbb{R}$. Entonces,

$$|f(x) - f(x')| = |(\alpha x + \beta) - (\alpha x' + \beta)| = |\alpha| \cdot |x - x'|$$

$\Rightarrow$ si $\alpha \neq 0 \Rightarrow f$ es Lipschitz sobre $\mathbb{R}$ con $A = |\alpha|$

Ejercicio: i) Estudie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \ni f(x)=x^2$, y su relación con las funciones de Lipschitz.

ii) Repita el inciso anterior, si $f:(a,b)\to\mathbb{R}$

Teorema: Si $f: I\to\mathbb{R}$ es Lipschitz de orden α
$\Rightarrow$ f es uniformemente continua.

Dem: Sea $\epsilon>0 \Rightarrow \exists\ \delta=\left(\frac{\epsilon}{A}\right)^{1/\alpha}>0$, si tiene que, $\forall\, x,x'\in I \ni |x-x'|<\delta$, entonces

$$|f(x)-f(x')|\leq A|x-x'|^\alpha = A\delta^\alpha = A\left(\frac{\epsilon}{A}\right)^{\alpha/\alpha} = \epsilon.$$

$\Rightarrow$ f es uniformemente continua. $\square$

Teorema (punto fijo): Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ∋ f es una contracción. Entonces, f tiene un punto fijo único.

⌜ **Def:** x_0 es punto fijo de una función f ssi $f(x_0) = x_0$. ⌟

$f(x) = x$

x_0 , $x_{n+1} = \boxed{f(x_n)}$

si (x_n) es de Cauchy

$\Rightarrow$ $x_0 = f(x_0)$

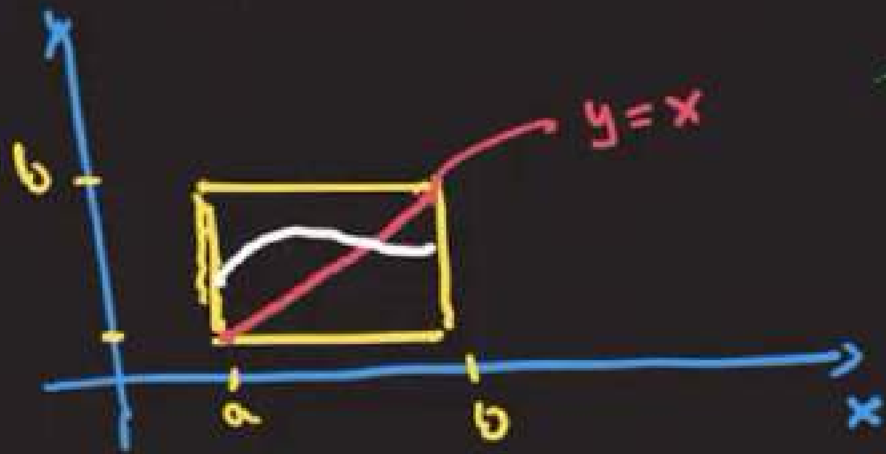
$x = \tan x$

Teorema (punto fijo): Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f$ es una contracción. Entonces, f tiene un punto fijo único.

Def: x_0 es punto fijo de una función f ssi $f(x_0) = x_0$.

Sea $f: [a,b] \longrightarrow [a,b] \ni f$ es una contracción. Entonces $\exists$ un punto fijo único para f (i.e. $\exists! \, x_0 \in [a,b] \ni f(x_0) = x_0$)

- Sea $\boxed{x_{n+1} = f(x_n)}$



(x_n) es de Cauchy

Teoremas de Punto Fijo

Teorema (Punto fijo de Banach)

Sea I un intervalo cerrado y sea $f: I \to \mathbb{R}$ una contracción. Entonces $\exists!\, x_0 \in I \ni f(x_0) = x_0$.

Dem: Sabemos que $\exists\, c,\ 0 < c < 1 \ni$

$$|f(b) - f(a)| \le c\,|b - a|, \quad \forall\, a, b \in I$$

Sea $x_1 \in I$, y sea $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow$ Nótese que $|x_3 - x_2| \le c\,.\,|x_2 - x_1|$. En general

$|f(x_2) - f(x_1)|$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq c\,|x_n - x_{n-1}| \leq c^2 |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \dots$$
$$\leq c^{n-1} |x_2 - x_1|$$

A probar: (x_n) es de Cauchy.

Sea $m > n$. Entonces,

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n|$$
$$\leq c^{m-2} \cdot |x_2 - x_1| + c^{m-3} |x_2 - x_1| + \dots + c^{n-1} |x_2 - x_1|$$
$$\leq (c^{m-2} + c^{m-3} + \dots + c^{n-1}) \cdot |x_2 - x_1|$$
$$\leq c^{n-1} (1 + c^2 + \dots) \cdot |x_2 - x_1| = \frac{c^{n-1}}{1-c} |x_2 - x_1|$$

$\to 0$

Si n es grande, $|x_m - x_n| \to 0 \Rightarrow$ la sucesión (x_n) es de Cauchy $\Rightarrow (x_n)$ converge es convergente; i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Entonces,

como f es continua, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}$$

$$= x_0.$$

El punto fijo es único. En efecto, suponga que x é y son puntos fijos de f. Entonces,

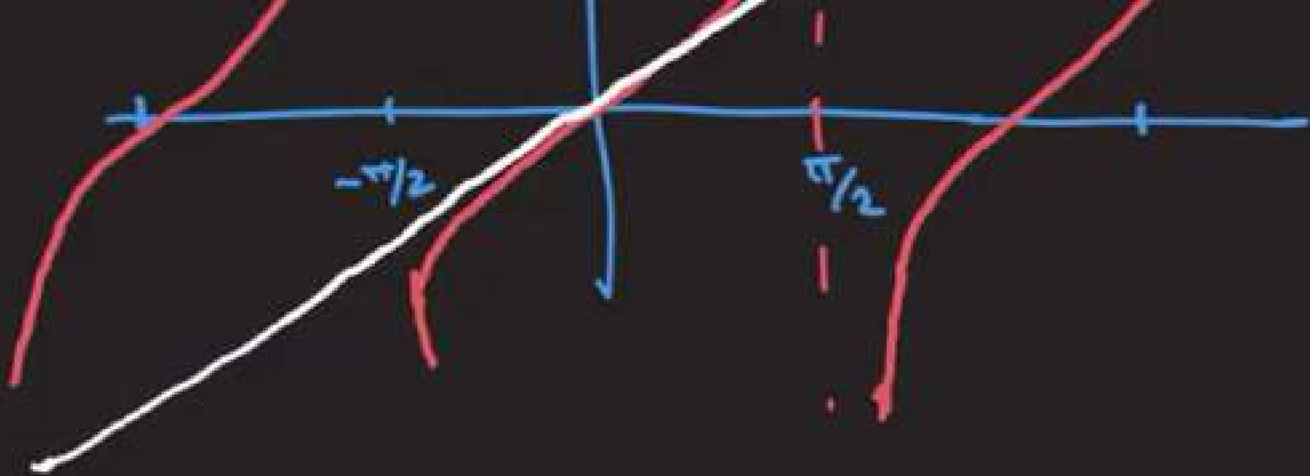
$$|x-y| = |f(x) - f(y)| \leq c\,|x-y|$$

$$\Rightarrow |x-y| \leq c\,|x-y| \Rightarrow c = 1 \ (\rightarrow\leftarrow)$$

(contradice el supuesto que f es contracción; i.e. $0 < c < 1$). $\square$

$\tan x = x$

$x = 0$ es pto. fijo.



$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = \tan x_n$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x_{n+1} = \underbrace{\arctan x_n}_{f(x)}} \quad \leftarrow \text{ converge a un punto}$$

$$\Rightarrow |f'(x)| = \left|\frac{1}{1+x^2}\right| < 1 \Rightarrow f(x) \text{ es contractante.}$$

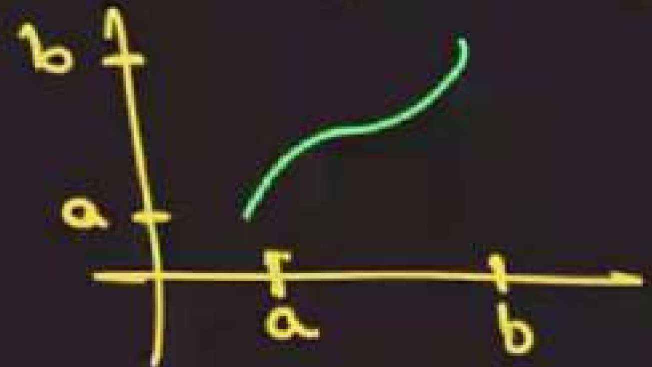
$$x^3 - x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \underbrace{x^3+1}_{f}}$$

<u>Teorema</u> (Punto fijo de Brouwer): Sea X un subconjunto no vacío, convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$, y sea $f: X \to X$ una función continua, $\Rightarrow f$ tiene punto fijo en X. □

Caso especial $n = 1$: Un subconjunto no vacío, convexo y compacto de $\mathbb{R}$ es un intervalo $I = [a,b]$; además, si $f: [a,b] \to [a,b]$ es continua $\Rightarrow f$ tiene punto fijo.

$f(b) \geq a$

$f(a) \leq b$



Dem: Sea $g(x) = f(x) - x$. Entonces,

$$g(a) = f(a) - a \geq 0$$
$$g(b) = f(b) - b \leq 0$$

además, nótese que $g(x)$ es continua en $[a,b]$

$\Rightarrow$ Por el teorema del valor intermedio: $\exists\, x_0 \in [a,b]$ tal que $g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$

$\Rightarrow x_0$ es punto fijo de f. $\square$

• Ecuaciones funcionales: (Ecuación de Cauchy):

Encuentre todas las funciones f ∋

$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \ni \ f(x+y) = f(x) + f(y).$

El inicio de la solución es buscar puntos fijos.

Sea $x = y = 0 \Rightarrow f(0+0) = f(0) + f(0)$

$$\Rightarrow f(0) = 2f(0)$$

$$\Rightarrow f(0) = 0$$

$$\vdots$$

Sea $x = y \Rightarrow f(2x) = 2f(x)$

$$\vdots$$

$$f(kx) = k\,f(x) \leftarrow \text{inducción}, \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

Teoría de la aproximación

$$f(x) \ \boxed{\tilde{\tilde{=}}} \ \sum_{n=1}^{k} a_n x^n$$

$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \ni f(x+y) = f(x) + f(y)$.

El inicio de la solución es buscar puntos fijos.

Sea $x = y = 0 \Rightarrow f(0+0) = f(0) + f(0)$

$\Rightarrow f(0) = 2f(0)$

$\Rightarrow f(0) = 0$

$\vdots$

Sea $x = y \Rightarrow f(2x) = 2f(x)$

$\vdots$

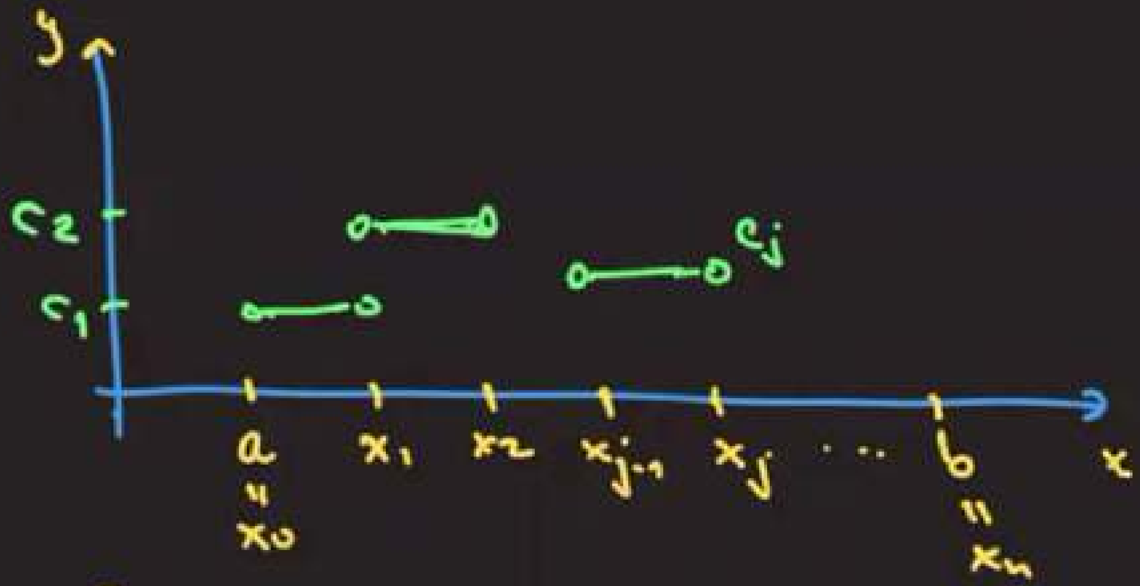
$f(kx) = k f(x) \leftarrow$ inducción, $k \in \mathbb{Z}^+$

Teoría de la aproximación

Def: Sean I un intervalo con puntos frontera a y b $\ni a < b$.

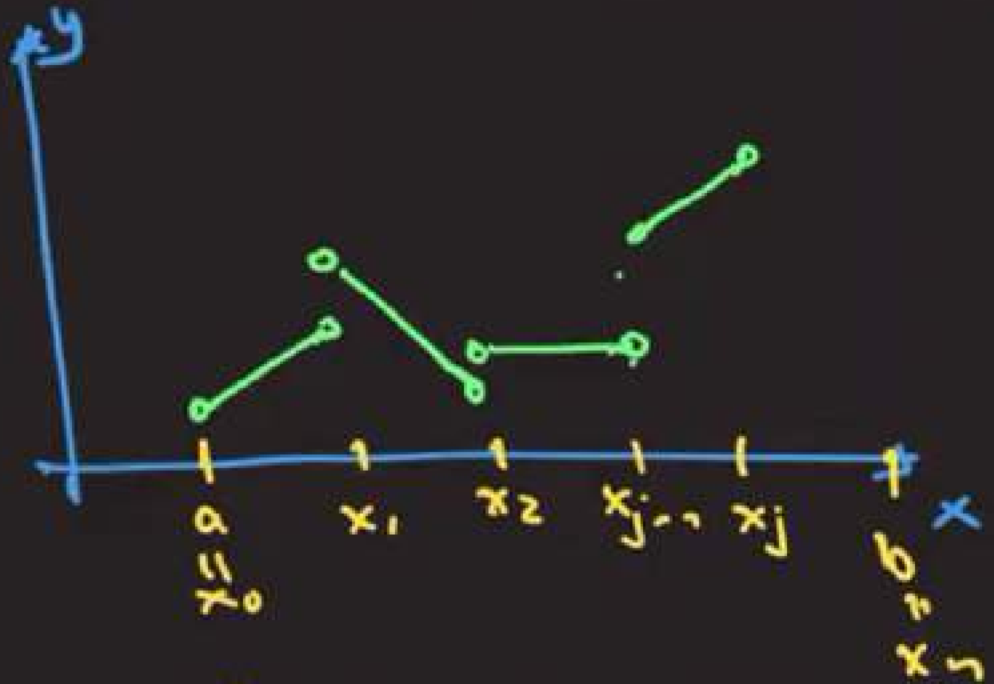
i) Una función $f: I \to \mathbb{R}$ es <u>escalonada</u> si se tienen conjuntos $\{x_0, x_1, \dots x_n\}$ y $\{c_1, \dots, c_n\} \ni$ $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ y

$f(x) = c_j, \; \forall x \in (x_{j-1}, x_j), \; j = 1, \dots, n.$



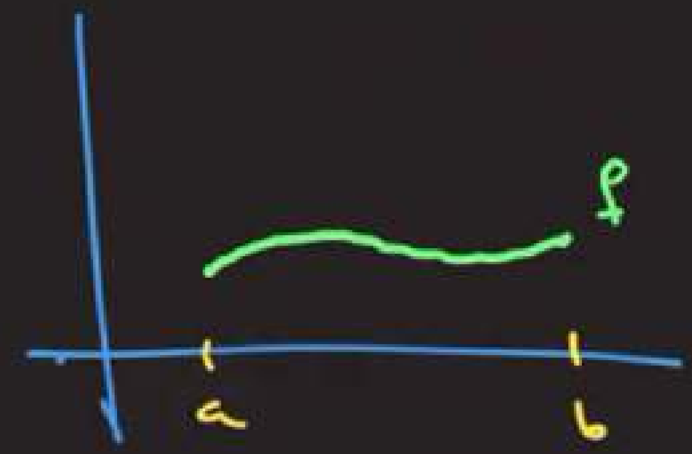
ii) una función $g: I \to \mathbb{R}$ es <u>lineal por tramos</u>, si existe un conjunto $\{x_0, \dots, x$

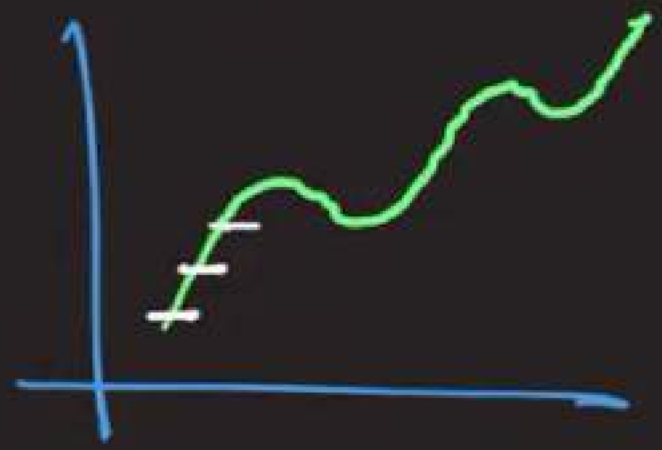
t.q. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ y $g(x) = \alpha_j x + \beta_j$,
para $x \in (x_{j-1}, x_j)$, $1 \le j \le n$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$.



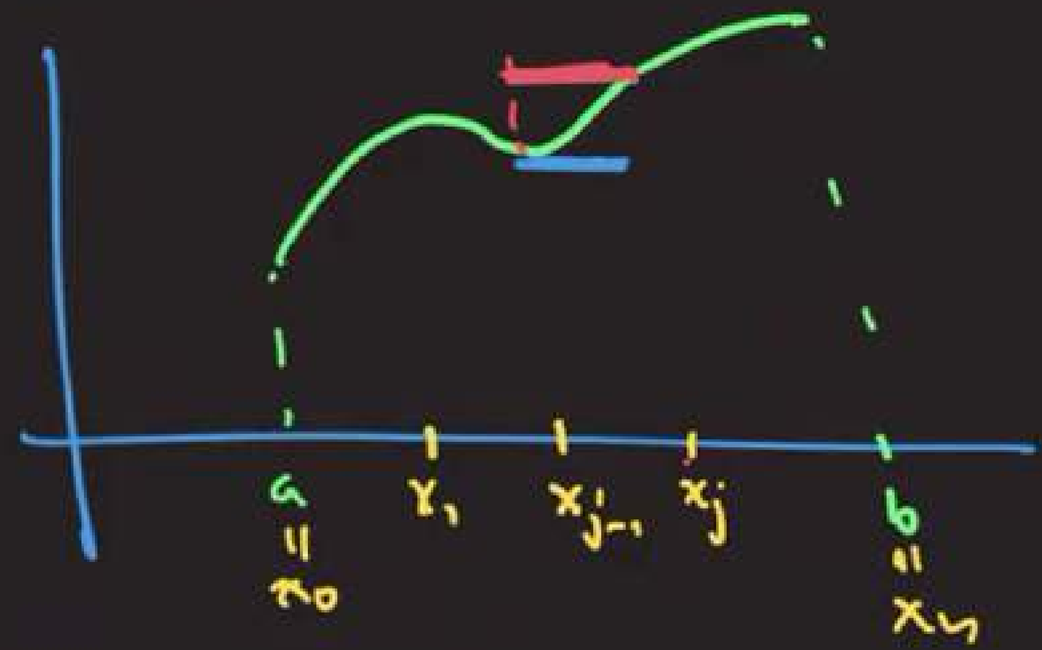
Teorema (aproximación por funciones escalón).
Dada cualquier $f \in C[a,b]$ y $\forall \epsilon > 0$ $\exists$ una
función escalonada $\phi_\epsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\ni$

$$|f(x) - \phi_\varepsilon(x)| < \varepsilon \ , \quad \forall x \in [a,b]$$

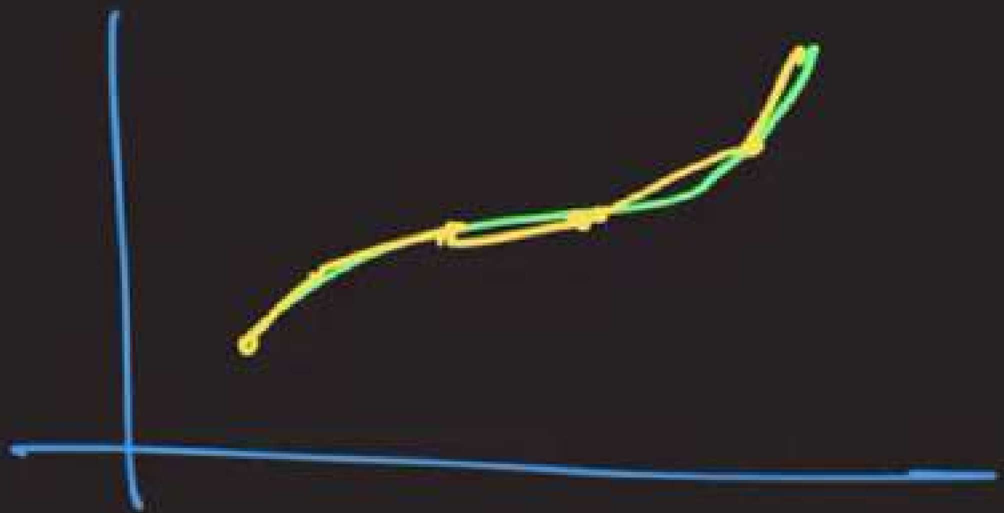




Darboux



$$|f(x) - \phi_\epsilon(x)| < \epsilon \ , \ \forall x \in [a,b]$$



5.1. HT

Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2034 - Análisis de Variable Real 1 - Catedrático: Dorval Carías
16 de mayo de 2021

HT 3

Esta hoja de trabajo se resolvió en un video, se puede encontrar aquí:
https://www.youtube.com/watch?v=nSHzDTNnpCk

Problema

La función de Takagi - Van der Waerden se define como,

$$f_r(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} \psi(r^n x), \qquad r = 2, 3, \ldots$$

donde $\psi(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z})$, la distancia de x al entero más cercano. Determinar que es continua para todos los reales x pero no es diferenciable para ningún real x.

Demostración. □

Para demostrar continuidad, se puede consultar la demostración de Shidfar and Sabetfakhri (1990). Para demostrar que no es diferenciable se tomará como referencia el caso general de Spurrier (2004); a la vez, se tomará como referencia el caso específico

$$f_r(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} \psi(r^n x), \qquad r = 2, 3, \ldots$$

desarrollado por Allaart (2014):

« Considerando Billingsley (1982), asúmase $\psi_k(x) := r^{-k} \psi\left(r^k x\right), k \in \mathbb{Z}_+$, y sea $\psi_k^+(x)$ denota la derivada del lado derecho de ψ_k en x. Entonces ψ_k^+ no es ambigua y evaluada en $\{-1, 1\}$. Se fija $x \in [0, 1)$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $u_n = j_n / 2r^n$ y $v_n = (j_n + 1) / 2r^n$, donde $j_n \in \mathbb{Z}_+$ es elegido tal que $u_n \leq x < v_n$. Nótese que para $k \leq n$ ψ_k es lineal en $[u_n, v_n]$, entonces

$$\frac{\psi_k(v_n) - \psi_k(u_n)}{v_n - u_n} = \psi_k^+(x), \quad 0 \leq k \leq n$$

Primero supóngase que r es par; entonces $\psi_k(v_n) - \psi_k(u_n) = 0$ para $k > n$, y entonces

$$m_n := \frac{f_r(v_n) - f_r(u_n)}{v_n - u_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_k(v_n) - \psi_k(u_n)}{v_n - u_n} = \sum_{k=0}^{n} \psi_k^+(x)$$

Esto implica que $m_{n+1} - m_n = \pm 1$, y entonces m_n no puede tener un límite finito. Ahora supóngase que r es impar. Entonces para $k \geq n$

$$\psi_k(v_n) - \psi_k(u_n) = \frac{(-1)^{j_n}}{2r^k}$$

usando la 1-periocidad de ψ. Por lo que, desde que sabemos que $v_n - u_n = 1/2r^n$,

$$m_n := \frac{f_r(v_n) - f_r(u_n)}{v_n - u_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k^+(x) + (-1)^{j_n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{r^{k-n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k^+(x) + (-1)^{j_n} \frac{r}{r-1}$$

Ahora es claro que $m_{n+1} - m_n$ puede tomar solo valores finitos, el cero no es uno de ellos, y por lo que m_n no puede tener un límite finito definido: $n \to \infty$. Por lo tanto, f_r no tiene una derivada finita$x$. No es diferenciable.»

Referencias utilizadas:

1. Allaart and Kawamura (2012)
2. Allaart (2014)
3. BL (1930)
4. Hailpern (1976)
5. Jarnicki and Pflug (2015)
6. Rajwade and Bhandari (2007)
7. Takagi (1973)
8. BL (1930)
9. Shidfar and Sabetfakhri (1990)
10. Billingsley (1982)

Referencias

Allaart, P. C. (2014). On the level sets of the takagi–van der waerden functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 419(2):1168–1180.

Allaart, P. C. and Kawamura, K. (2012). The takagi function: a survey. *Real Analysis Exchange*, 37(1):1–54.

Billingsley, P. (1982). Van der waerden's continuous nowhere differentiable function. *The American Mathematical Monthly*, 89(9):691–691.

BL, v. d. W. (1930). Ein einfaches beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen funktion. *Mathematische Zeitschrift*, 32:474–475.

Hailpern, B. (1976). Continuous non-differentiable functions. *Pi Mu Epsilon Journal*, 6(5):249–260.

Jarnicki, M. and Pflug, P. (2015). Continuous nowhere differentiable functions. *Springer Monographs in Mathematics, New York*.

Rajwade, A. and Bhandari, A. K. (2007). *Surprises and counterexamples in real function theory*. Springer.

Shidfar, A. and Sabetfakhri, K. (1990). On the hölder continuity of certain functions. In *Exposition. Math*, volume 8, pages 365–369.

Spurrier, K. G. (2004). Continuous nowhere differentiable functions. *South Carolina Honors College*.

Takagi, T. (1973). A simple example of the continuous function without derivative. *The collected papers of Teiji Takagi*, pages 5–6.

5.2. Parcial

Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2034 - Análisis de Variable Real 1 - Catedrático: Dorval Carías
16 de mayo de 2021

Parcial 3

1. Problemas de «Introduction to Real Analysis» de Bartle & Sherbert(3 edición).

1.1. Sección 5.2: Problema 14

Deje que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaga la relación $g(x+y) = g(x)g(y)$ para todo x, y en $\mathbb{R}$. Muestre que si g es continua en $x = 0$, entonces g es continua en cada punto de $\mathbb{R}$. Además, si tenemos $g(a) = 0$ para algún $a \in \mathbb{R}$, entonces $g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Dato interesante

Consultando en la literatura, se encontró que $g(x + y) = g(x)g(y)$ forma parte de las ecuaciones funcionales de Cauchy. Precisamente, el caso exponencial. Se puede consultar más a detalle en el capítulo 10 de Jung (2011).

Definición de continuidad de Bartle & Sherbert

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, sea $f : A \to \mathbb{R}$, sea $c \in A$. Se dice que f **es continuo en** c si dado cualquier número $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si x es cualquier punto de A que satisface $|x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - f(c)| < \epsilon$.

Demostración. Reordenando el problema, tenemos dos hipótesis: **(1)** g es continua en $x = 0$. **(2)** $g(a) = 0$ para algún $a \in \mathbb{R}$. A probar: **(1)** g es continua en cada punto de $\mathbb{R}$. **(2)** $g(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Comenzamos con la segunda hipótesis, tenemos $g(a) = 0$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Proponemos arbitrariamente que $y := x - a$, es decir $x := y + a$, ahora bien:

$$g(x) = g(y + a) = g(y)g(a) = g(y) \cdot 0 = 0$$

Por lo tanto, si $g(a) = 0$ para algún $a \in \mathbb{R}$, se cumple que $g(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Por otra parte, por la primera hipótesis sabemos que g es continua en $x = 0$. $\implies$ Es necesario analizar el caso particular de $g(0)$ para determinar sus posibles valores y que $g(0)$ se mantenga continua, se propone encontrar sus *puntos fijos*:

$$g(0) = g(0+0) = g(0)g(0) = g(0)^2$$

$\implies$ Para que $g(0) = g(0)^2$ se cumpla solo pueden ocurrir dos situaciones: (a) $g(0) = 1$. (b) $g(0) = 0$.

El caso (b) es trivial ya que siempre se cumple, por la primera hipótesis. El caso interesante surge del caso (a) cuando $g(0) = 1$, tal que $g(c) \neq 0$ $\forall c \in \mathbb{R}$. Se propone utilizar lo siguiente para determinar la continuidad de todos los puntos en $\mathbb{R}$: Basándonos en la definición de continuidad, sea g una función continua en $c = 0$, entonces dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si x es cualquier punto de $\mathbb{R}$ que satisface $|x - 0| < \delta$, entonces $|g(x) - 1| < \epsilon$. Nótese que como queremos encontrar la continuidad en todos los puntos c:

$$\begin{aligned} |g(x+c) - g(c)| &= |g(x)g(c) - g(c)| \\ &= |g(c)||g(x) - 1|. \end{aligned}$$

Esto quiere decir, si elegimos arbitrariamente un $\delta = \epsilon/|g(c)|$, entonces $|x| < \delta$ implica que $|g(x) - 1| < |g(c)| \cdot (\epsilon/|g(c)|) = \epsilon$. $\therefore$ g es continua en c. $\square$

1.2. Sección 5.4: Problema 12

Muestre que si f es continua en $[0, \infty)$ y uniformemente continua en $[a, \infty)$ para alguna constante positiva a, entonces f es uniformemente continua en $[0, \infty)$.

Definición de continuidad uniforme de Bartle and Sherbert (2000)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$. Se dice que f es uniformemente continua sobre A si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon) > 0$ tal que si $x, u \in A$ son cualesquiera números que satisfacen $|x - u| < \delta(\epsilon)$, entonces $|f(x) - f(u)| < \epsilon$.

Teorema (Caracterización de la compacidad en $\mathbf{R}$) de Abbott (2012)

Un conjunto $K \subseteq \mathbf{R}$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

Teorema (Heine-Borel) de Abbott (2012)

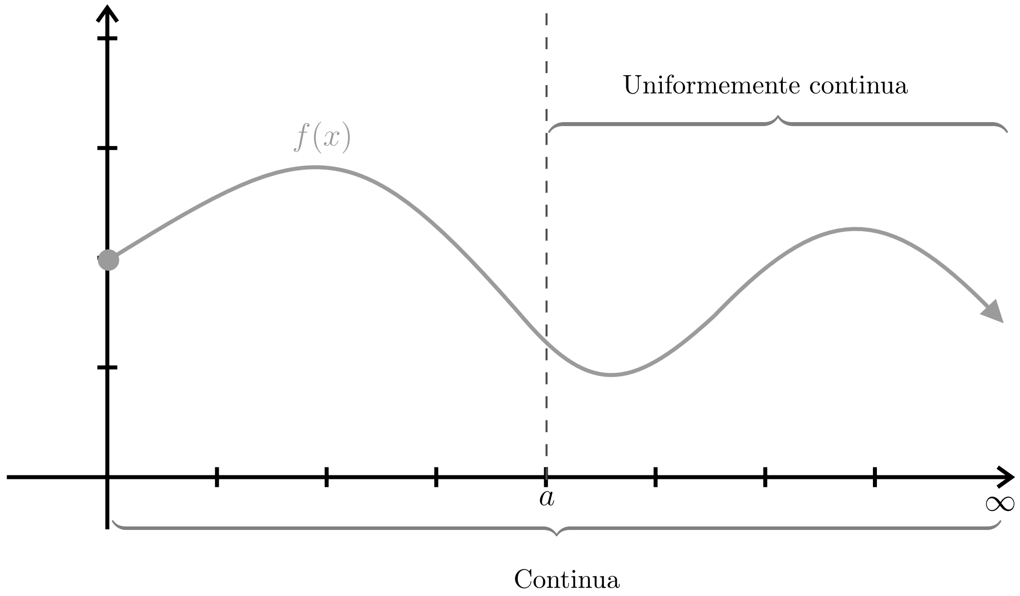
Sea K un subconjunto de $\mathbf{R}$. Todos los enunciados siguientes son equivalentes en el sentido que cualquier de ellos, implica los otros dos.

1. K es compacto.
2. K es cerrado y acotado.
3. Cada cubierta abierta para K tiene una subconvierta finita.

Teorema (Continuidad uniforme en conjuntos compactos) de Abbott (2012)

Una función que es continua en un conjnto compacto K es uniformemente continua en K.

Demostración. Por hipótesis tenemos que f es continua en $[0,\infty)$ y es uniformemente continua en $[a,\infty)$ para alguna constante positiva a. A probar: f es uniformemente continua en $[0,\infty)$. Es decir:



Nótese que lo que nos piden es demostrar que el intervalo $[0,a]$ es uniformemente continuo y posteriormente demostrar que $[0,\infty)$ es continuo.

$\implies$ Sabemos que $[0,a]$ es acotado y cerrado. $\implies$ Por Heine-Borel y la caracterización de la compacidad en $\mathbb{R}$, $[0,a]$ es compacto. $\implies$ Por el teorema de la continuidad uniforme en conjuntos compactos, $[0,a]$ es uniformemente continua. $\implies$ Para evitar lidiar con las situaciones que pueden darse alrededor de a, se preferirá trabajar con una de los cotas, es decir: $[0,a+1]$, que también es uniformemente continua.

Ahora, es necesario probar que $[0,\infty)$ es uniformemente continua. Procederemos con la definición de continuidad para los dos subconjuntos $[0,a+1]$ y $[a,\infty)$.

Notación

$$\delta_1(\epsilon)=\delta_1 \quad \text{y} \quad \delta_2(\epsilon)=\delta_2$$

$\implies$ Dado $\epsilon>0$, existe un $0<\delta_1<1$ tales que $x,u\in[0,a+1]$ son cualesquiera números que satisfacen $|x-u|<\delta_1$, entonces $|f(x)-f(u)|<\epsilon$. Además, existe un $0<\delta_2<1$ tales que $x,u\in[0,\infty)$ son cualesquiera números que satisfacen $|x-u|<\delta_2$, entonces $|f(x)-f(u)|<\epsilon$. Ahora bien, elijamos arbitrariamente que $\delta:=\text{mín}\{\delta_1,\delta_2\}$ tal que exista $\delta<1$ tales que $x,u\in[0,a+1]$ o $x,u\in[a,\infty)$ son cualesquiera números que satisfacen $|x-u|<\delta$, entonces:

$$|f(x)-f(u)|<\epsilon.$$

Por lo tanto, f es uniformemente continua. $\square$

2. Problemas de «Principles of Mathematical Analysis» de Rudin (3ra edición).

2.1. Capítulo 4: Problema 2

Si f es un mapeo continuo de un espacio métrico X en un espacio métrico Y, pruebe que:

$$f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$$

para cada conjunto $E \subset X$. ($\overline{E}$ denota la cerradura de E.) Muestre, con un ejemplo, $f(\overline{E})$ puede ser un subconjunto propio de $\overline{f(E)}$.

Teorema 4.8 de Rudin et al. (1976)

Un mapeo f de un espacio métrico X en un espacio métrico Y es continuo en X si y solo si $f^{-1}(V)$ es abierto en X para cada conjunto abierto V en Y.

Corolario
Un mapeo de un espacio métrico X en un espacio métrico Y es continuo si y solo si $f^{-1}(C)$ es cerrado en X para cada conjunto cerrado C en Y.

Definición 1.3 de Rudin et al. (1976)

Si A y B son conjuntos y si cada elemento de A es un elemento de B, decimos que A es un subconjunto de B, y escribimos $A \subset B$. Si, adicionalmente, hay un elemento de B que no está en A, entonces se dice que A es un conjunto propio de B.

Definición 2.2 de Rudin et al. (1976)

Sean A y B dos conjuntos y sea f un mapeo de A a B. Si $E \subset B$, f^{-1} denota el conjunto de todos los $x \in A$ tales que $f(x) \in E$. Llamamos f^{-1} la *imagen inversa* de E bajo f. Si $y \in B$, $f^{-1}(y)$ es el conjunto de todos los $x \in A$ tales que $f(x) = y$.

Definición (Cerradura) de Rudin et al. (1976)

Si X es un espacio métrico, si $E \subset X$, y si E' denota el conjunto de todos los puntos límites de E en X, entonces la cerradura de E es el conjunto $\overline{E} = E \cup E'$.

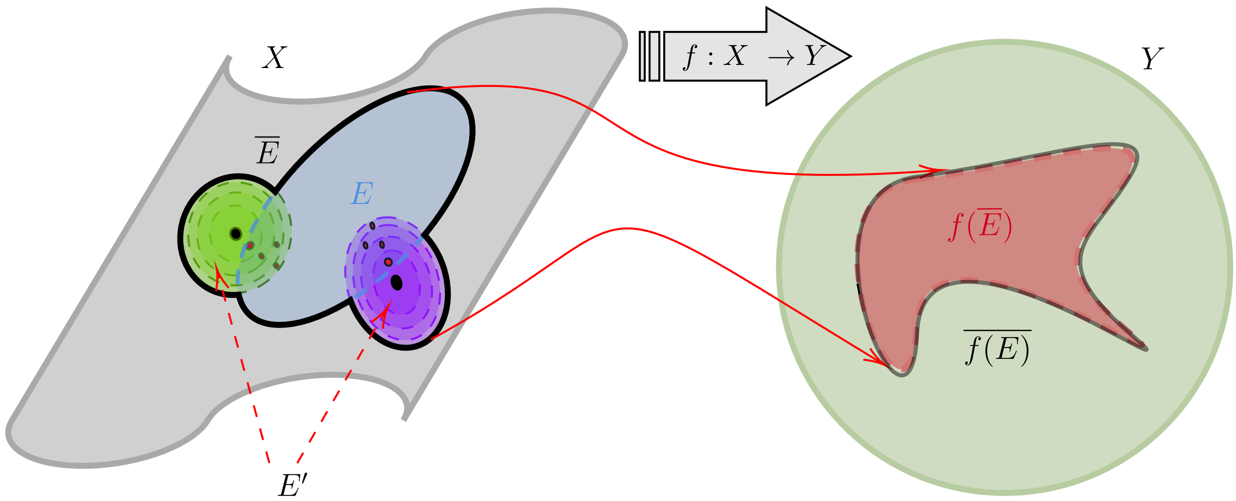
Definición (Punto de acumulación) de Rudin et al. (1976)

Sea X un espacio métrico y $E \subset X$. Un punto p es un punto de acumulación del subconjunto E si cada vecindad de p contiene un punto $q \neq p$ tal que $q \in E$.

Teorema 3.2.12 de Abbott (2012)

Para cualquier $A \subseteq \mathbb{R}$, la cerradura $\overline{A}$ es un conjunto cerrado y es el conjunto más pequeño que contiene a A.

Demostración. Por hipótesis, tenemos un mapeo continuo $f : X \to Y$, para cada conjunto $E \subset X$. A probar: $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$. Gráficamente, tenemos:



Nota 1

Como no sabemos que la función f es biyectiva y por lo tanto no podemos afirmar que tiene inversa, entonces f^{-1} representará a la preimagen.

Por la figura anterior, notamos que $\left(\overline{f(E)}\right)^c = Y - \overline{f(E)}$, que es un abierto de Y. $\implies$ Por el corolario del teorema 4.8 de Rudin et al. (1976), $f^{-1}(Y - \overline{f(E)})$ es un abierto de X. Ahora bien,

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y - \overline{f(E)}) &= f^{-1}(Y) - f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right) \\ &= X - f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right). \end{aligned}$$

Por lo cual, concluimos que $f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right)$ es un cerrado de X.

Nota 2

Sabemos por definición $E \subset \overline{E}$, en donde $\overline{E} = E' \cup E$.

Nota 3

Supóngase que tenemos un punto $x \in E$, entonces $f(x) \in f(E)$, aplicando la preimagen tenemos $x \in f^{-1}(f(E))$. La preimagen se define como

$$f^{-1}(f(E)) = \{x : f(x) \in f(E)\}.$$

Entonces, por la definición de preimagen, podemos concluir que

$$E \subset f^{-1}(f(E)).$$

$\implies$ Nótese que ahora podemos concluir,

$$E \subset \underbrace{f^{-1}(f(E)) \subset f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right)}_{\text{aplicando } f(E) \subset \overline{f(E)}}.$$

Nota 4

Hasta el momento, sabemos que $f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right)$ es un subconjunto cerrado y que $E \subset f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right)$. Ahora, nos interesa conocer si

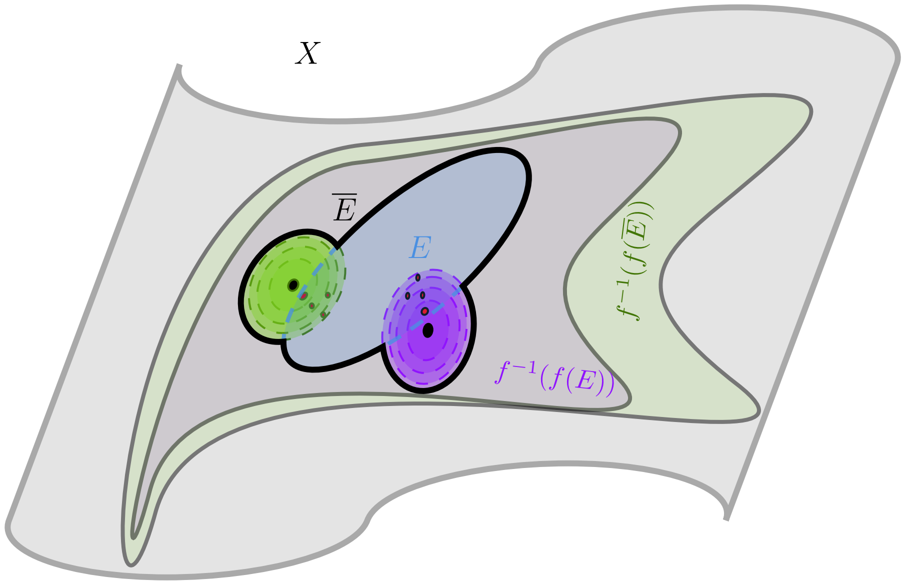
$$E \subset f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right) \implies \overline{E} \subset f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right).$$

Por el teorema 3.2.12 de Abbott (2012), sabemos que $\overline{E}$ es el subconjunto cerrado más pequeño que **contiene** a E (i.e. $E \subset \overline{E}$). Además, como ya sabíamos,

$$E \subset f^{-1}(f(E)) \subset f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right).$$

Entonces,

$$\overline{E} \subset f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right)$$



Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\overline{E} &\subset f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right) \\
f\left(\overline{E}\right) &\subset f\left(f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right)\right) \\
f\left(\overline{E}\right) &\subset \overline{f(E)}
\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo

Muestre con un ejemplo, $f(\overline{E})$ puede ser un subconjunto propio de $\overline{f(E)}$.

Solución. Basándonos en la definición 1.3 de conjunto propio de Rudin et al. (1976). Es necesario encontrar un elemento $\overline{f(E)}$ que no está en $f(\overline{E})$, es decir que los dos conjuntos sean diferentes. Se propone una función continua definida en $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{es ampliamente conocida que es continua.}$$

Es decir, que tenemos $E = \mathbb{N}$. En donde $\mathbb{N} := [1, \infty)$. Por lo tanto, $E = \overline{E} = [1, \infty)$. Entonces, al aplicar el mapeo:

$$f(\overline{E}) = f(\mathbb{N}) = (0, 1]$$

Por lo que ahora, notamos que:

$$\overline{f(E)} = [0, 1]$$

Es decir, el 0 está en $\overline{f(E)}$, pero no en $f(\overline{E})$. Por lo tanto, es un subconjunto propio. □

2.2. Capítulo 4: Problema 6

Suponga E es compacto, pruebe que f es continua en E si y solo si su gráfica es compacta.
IMPORTANTE: El problema proporciona 2 comentarios:

Gráfica

Si f está definido sobre E, la gráfica de f es el conjunto de puntos $(x, f(x))$, para $x \in E$.

Caso particular

En particular, si E es un conjunto de números reales y f se evalúa con reales; la gráfica de f es un subconjunto del plano.

Nota 1

Para la argumentación de esta prueba, se tomó como referencia la aclaración de Paul (2020) respecto al producto topológico que es necesario que tenga la **gráfica** del problema; que aparentemente es una parte importante que Rudin et al. (1976) asumió sin especificarlo correctamente.
«Por ejemplo, supóngase:

1. Se tiene que $E = Y = [0, 1]$ bajo la métrica usual y $f(x) = x$ es el mapeo identidad. $\implies f$ es continuo.

   Ahora bien,

2. Se define

$$d((e, y), (e', y')) = \begin{cases} 0, & e = e' \text{ and } y = y' \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Entonces d es una métrica que induce una topología discreta sobre G. Como se sabe que G es infinito, la colección $\{\{x\} \mid x \in G\}$ es una cubierta infinita de G por conjuntos abiertos sin una subcubierta finita. Es decir, G no es compacto.

Por estas razones, para este caso particular se utiliza una topología adherente al problema, que es el producto topológico definido como $E \times Y$, el cual G hereda como un subespacio.»

Definición de producto topológico de Naber and Naber (1997)

La definición trata con conceptos avanzados de topología, que de momento parecen muy abstractos, sin embargo es la literatura que fundamenta el producto topológico y reafirma lo de la **Nota 1**. Capítulo 1.3 - *Products and Locals Products* - Página 56 de Naber and Naber (1997).

Teorema 4.14 de Rudin et al. (1976)

Supóngase que f es un mapeo continuo de un espacio métrico compacto X en un espacio métrico Y. Entonces $f(Y)$ es compacto.

Demostración. Primero, vamos a reescribir el problema incluyendo el concepto de gráfica con su topología especificada en la nota 1 y la definición de producto topológico. Es decir, que tenemos un mapeo $f : E \to Y$ para las métricas E y Y, en donde E es un compacto.

Notación

Vamos a denotar G como la gráfica y se define como,

$$G := \{\Psi(x) = (x, f(x)) \mid x \in E\}$$

Entonces, nos piden probar,

$$f \text{ es continua} \iff \Psi \subset E \times Y \text{ es compacto.}$$

$\boxed{\rightarrow}$ Sabemos que f es continua y que E es compacto. A probar: $\Psi \subset E \times Y$ es un compacto.

Ahora bien nos interesa encontrar un mapeo continuo que sea compacto, por lo que asumimos que existen un par de puntos $(x, y), x \in E, y \in Y$, con una métrica definida como:

$$\rho\left(\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right)\right) = d_E\left(x_1, x_2\right) + d_Y\left(y_1, y_2\right),$$

basado en la definición usual de Rudin et al. (1976). Por las propiedades de la gráfica $\Psi(x)$ debe ser continua si f es continua. Por otro lado, sea $x \in X$ y dado $\varepsilon > 0$. Elegimos arbitrariamente un $\eta > 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f(u)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

si $d_E(x, y) < \eta$. Entonces, nuevamente, elegimos arbitrariamente un $\delta = \min\left(\eta, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Por lo tanto, se puede observar que

$$\rho(\Psi(x), \Psi(u)) < \varepsilon$$

si $d_E(x, u) < \delta$. Como sabemos que $\Psi(x)$ es continuo, entonces por la siguiente desigualdad

$$\rho(\Psi(x), \Psi(u)) \geq d_Y(f(x), f(u))$$

observamos que f debe ser continua. Finalmente, basándonos en el teorema 4.14 de Rudin et al. (1976) se deduce que la gráfica de una función f sobre un conjunto compacto E es compacto.

$\boxed{\leftarrow}$ Sabemos que $\Psi \subset E \times Y$ y E son compactos. A probar: f es continua.

Ahora, por contrapuesta: asumamos que f no es continuo en un punto x. $\implies$ Hay una sucesión de puntos x_n que convergen a x tales que $f(x_n)$ no convergen a $f(x)$. $\implies$ Por Bolzano-Weierstrass de Abbott (2012), si ninguna subsucesión de $f(x_n)$ converge, entonces la sucesión $\{(x_n, f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene ninguna subsucesión convergente, y por lo tanto su gráfica no es compacta. $\implies$ Ahora bien, si una subsucesión de $f(x_n)$ converge, dígase $f(x_{n_k}) \to z$, pero $z \neq f(x)$. $\implies$ La gráfica de f falla en contener los puntos límite de (x, z), y por lo tanto no es cerrado. Por el teorema de Heine-Borel de Abbott (2012), entonces no es compacta.

$\square$

2.3. Capítulo 4: Problema 15

Pruebe que cada mapeo continuo abierto de R^1 dentro de R^1 es monótono.

Mapeo abierto

Llámese un mapeo *abierto* de X dentro de Y,si $f(V)$ es un conjunto abierto en Y cuando V es un conjunto abierto de X.

$$V \in X$$

$$f(V) \in Y$$

Definición 4.28 de monótono de Rudin et al. (1976)

Sea f real en (a, b). Entonces f se dice que es monótonamente creciente en (a, b) si $a < x < y < b$ implica $f(x) \leq f(y)$. Si la última desigualdad es revertida, se obtiene la definición de una función monótonamente decreciente. La clase de funciones monótonas consisten de ambas: funciones monótonas crecientes y decrecientes.

Demostración. Supóngase que f no es continua y no es monótona, por la definición de monótona de Rudin et al. (1976) existen puntos $a < b < c$ con $f(a) < f(b)$ y $f(c) < f(b)$, definidos en los reales. Entonces el valor máximo de f en el intervalo cerrado de $[a, c]$ se asume que es un punto de u en el intervalo abierto (a, c). Si además hay un punto v en el intervalo abierto (a, c) donde f asume su valor mínimo en $[a, c]$, entonces $f(a, c) = [f(v), f(u)]$. Si ninguno de tales puntos v existe, entonces $f(a, c) = (d, f(u)]$, donde $d = \min(f(a), f(c))$. Por lo que podemos concluir que en cualquier caso, $f((a, c))$ no es abierto. $\square$

Referencias

Abbott, S. (2012). *Understanding analysis*. Springer Science & Business Media.

Bartle, R. G. and Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis*. Wiley New York.

Jung, S.-M. (2011). *Hyers-Ulam-Rassias stability of functional equations in nonlinear analysis*, volume 48. Springer Science & Business Media.

Naber, G. L. and Naber, G. L. (1997). *Topology, geometry, and gauge fields*. Springer.

Paul, S. (2020). Question about metric and compactness. Mathematics Stack Exchange. URL:https://math.stackexchange.com/q/3534792 (version: 2020-02-05).

Rudin, W. et al. (1976). *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-hill New York.

Parte VI

Diferenciación

6. Diferenciación

Clase de Diferenciación - Análisis de Variable Real 1

Rudik Rompich

May 29, 2021

Proyectos Blackboard 75

6|5|2021.

Prop: Una función $f: X \to Y$ es continua (S3) $\forall A \subset X$ se tiene que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Dem: $(\Rightarrow)$ Sea $f: X \to Y$ continua. y sabemos que $f(A) \subset \overline{f(A)}$.

$$\Rightarrow \quad A \subset f^{-1}[f(A)] \subset f^{-1}[\underbrace{\overline{f(A)}}_{\text{cerrado}}]$$

$$\Rightarrow \quad A \subset \bar{A} \subset \underbrace{f^{-1}[\overline{f(A)}]}_{\text{cerrado}}$$

$$\Rightarrow \quad f(A) \subset f(\bar{A}) \subset f[f^{-1}[\overline{f(A)}]] = \overline{f(A)}$$

00:04:51 -01:29:01 1 / 2 Dorva

(⇐) Supongamos que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$, $\forall A \subset X$, y sea F un subconjunto cerrado de Y.

A probar: $f^{-1}(F) = A$ es un cerrado de X.

A probar: $A = \bar{A}$. Pero ya sabemos que $A \subset \bar{A}$. A probar: $\bar{A} \subset A$.

$$\Rightarrow \quad f(\bar{A}) = f\left(\overline{f^{-1}(F)}\right) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} =$$

$$= \bar{F} = F$$

$$\bar{A} \subset f^{-1}(f(\bar{A})) \subset f^{-1}(F) = A$$

$\Rightarrow \bar{A} \subset A \Rightarrow A = \bar{A} \Rightarrow A$ es cerrado

$\Rightarrow f$ es continua. $\square$

Proyectos Blackboard 75

Diferenciación

Def: Sean $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $a<c<b$. Entonces, f es diferenciable en c, con derivada $f'(c)$, si

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c).$$

$\therefore$ el límite existe

Si este límite existe $\forall c\in(a,b) \Rightarrow f$ es diferenciable en (a,b)

Nota: ① La diferenciabilidad es una propiedad local de las funciones.

Dorva

00:21:31 -01:12:21

3 / 3

② En la definición hagamos $h = x - c$

$\Rightarrow x = c + h$. Entonces:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Lagrange

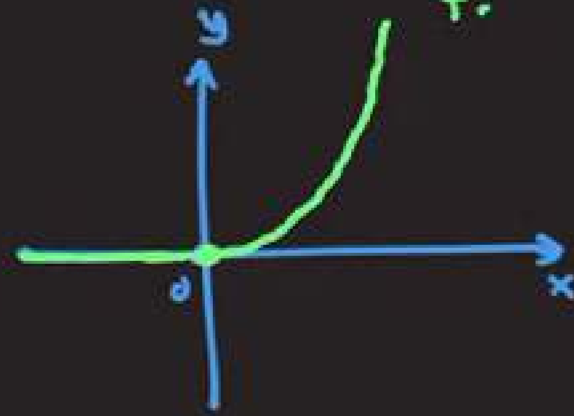
leibniz

③ $f'(c) = \frac{df}{dx}(c) = D_x(c)$

$$\dot{f}(c) = \frac{df}{dt}(c)$$

newton

Ej: ① Sea $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$



Encontremos $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-\cancelto{0}{f(0)}}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = 0 \Rightarrow f'(0)=0.$$

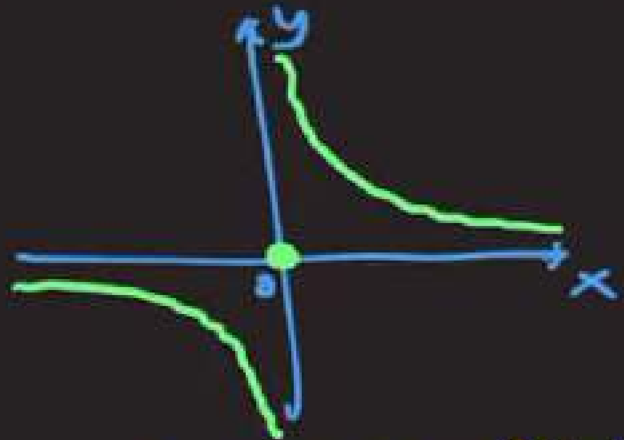
$$\Rightarrow \lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0^+} h = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0^-} 0 = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

Proyectos Blackboard 75

2) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \ni f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$



$$\text{Sea } c\neq 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{c+h}-\frac{1}{c}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{c}-(\cancel{c}+\cancel{h})}{\cancel{h}(c+h)c} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{(c+\underbrace{h}_{0})c} = -\frac{1}{c^2}$$

$$\text{Sea } c=0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} f(h)$$

6 / 7

Proyectos   Blackboard 75

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1/h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}$$, el no existe

$\Rightarrow f'(0)$ no existe $\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.

3) Sean: $f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$ y

$$g(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(x) = 0$, $\forall x \neq 0$, $f'(0)$ no existe (falla la continuid

$g'(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$, $g'(0)$ no exis. cambio abrupto

7 / 8

Proyectos Blackboard 75

En este caso, $g(x) = |x|$ es continua en $x=$

y $g'(0)$ no existe.

Si f es continua en x_0 $\not\Rightarrow$ f es diferenciable.

Sin embargo:

continuidad + $\Rightarrow$ diferenciable.

(i.e. la continuidad es una condición necesaria para la diferenciabilidad)

... pero no es suficiente

8 / 8

Proyectos Blackboard 75

Ej: 1 Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \ni f(x)=\begin{cases} x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$

Si $x\neq 0 \Rightarrow f'(x)=\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Si $x=0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-\underbrace{f(0)}_{0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\,\text{sen}(1/h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}\text{sen}\left(\frac{1}{h}\right)\leftarrow$ no existe

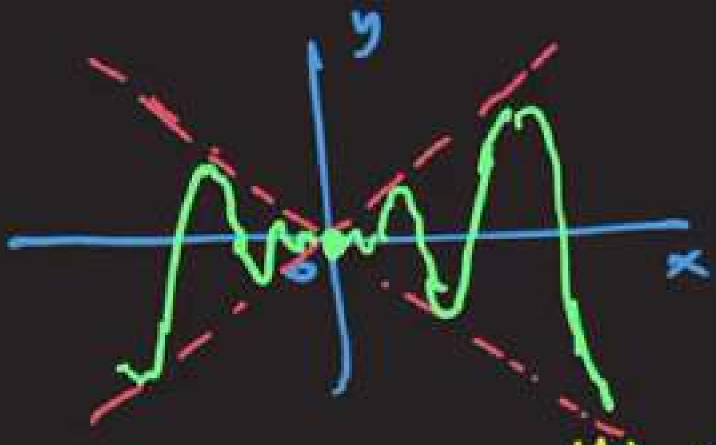
$\Rightarrow f'(0)$ no existe.

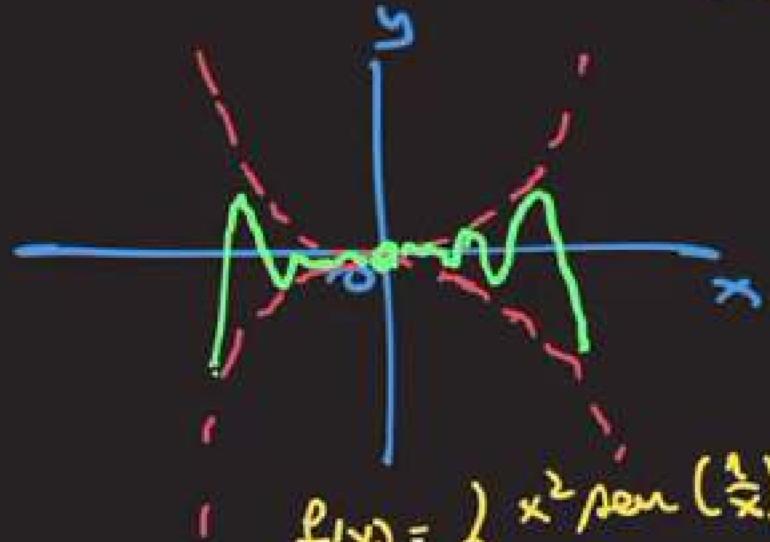
(Recordemos que f es continua en $x=0$).

2 Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \ni f(x)=\begin{cases} x^2\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ \end{cases}$

9 / 9

01:06:21 -00:27:31





$$f(x) = \begin{cases} x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Si } x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = 2x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Si } x = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - \cancel{f(0)}^{\,0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^{\cancel{2}}\,\text{sen}(1/h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} h\,\text{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

Proyectos Blackboard 75

$\Rightarrow f'(0) = 0$. además:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \underbrace{2x\,\text{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right)}_{\to 0} - \cos\left(\tfrac{1}{x}\right), \text{ no existe}$$

$\Rightarrow f'(x)$ no es continua en $x=0$.

(f es diferenciable en $x=0$, pero f' no es continua en $x=0$).

Teorema: Si $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es diferenciable en c, entonces f es continua en c.

Dem: A probar: f es continua

01:18:08 -00:15:44 11 / 11

i.e. A probar: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

$$\iff \lim_{x \to c} f(x) - f(c) = 0$$

$\hookrightarrow \lim\limits_{x \to c} f(c)$

$$\iff \lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] = \lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] \left(\cdot \frac{x-c}{x-c} \right)$$

$$= \lim_{x \to c} \left[\left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) \cdot (x - c) \right]$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right)} \cdot \lim_{x \to c} (x - c) =$$

Def: una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es continuamente diferenciable en (a,b), si f es diferenciable y f' continua sobre (a,b).

Notación: $f\in C^1(a,b)$

Prop: Si $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ son diferenciables en $c\in(a,b)$ y $k\in\mathbb{R}$, entonces:

1) $(f+g)'(c) = f'(c)+g'(c)$
2) $(kf)'(c) = kf'(c)$.
3) $(f\cdot g)'(c) = f'(c)g(c)+f(c)\cdot g'(c)$.
4) Si $g(c)\neq 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \dfrac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{(g(c))^2}$

5) (Regla de la cadena):

$$(g\circ f)'(c) = [g(f(c))]' = g'(f(c))\cdot f'(c).$$

Dem.-(3)
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(c)g(c)}{x-c} =$$

$$= \lim_{x\to c} \frac{(f(x)g(x) - f(c)g(x)) + (f(c)g(x) - f(c)g(c))}{x-c}$$

$$= \lim_{x\to c}\left[\underbrace{\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)}_{f'(c)} g(x) + f(c)\underbrace{\left(\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right)}_{g'(c)}\right]$$

g diferencial
$\Rightarrow$ g continua

Proyectos Blackboard 75

$$= f'(c)\cdot \lim_{x\to c} g(x) + f(c)\,g'(c)$$

g es diferenciable en $c \Rightarrow g$ es continua en c

$$\Rightarrow \lim_{x\to c} g(x) = g(c)$$

$$= f'(c)\,g(c) + f(c)\cdot g'(c).$$

Def: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f tiene

1) un máximo local en $c \in A$, si existe una vecindad U de $c \ni f(x) \leq f(c),\ \forall x \in U.$

2) un mínimo local en $c \in A$, si existe una vecindad U de $c \ni f(x) \geq f(c),\ \forall x \in U$

15 / 15

Proyectos | Blackboard 75

3) un valor extremo en c, si tiene un máximo o mínimo (local o global) en ese punto

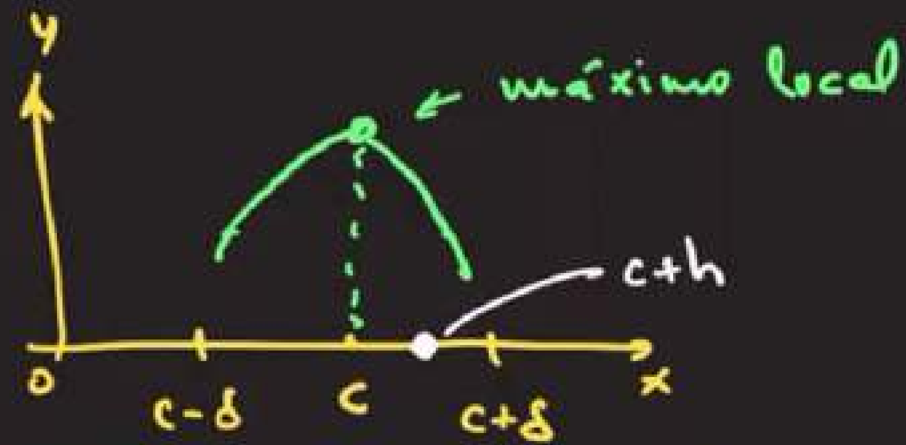
Teorema (valores extremos) (Fermat)

Si $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un valor extremo local en un punto interior $c \in A$, y si f es diferenciable en c, entonces $f'(c) = 0$.

Dem: Suponga que f tiene un máximo local en $c \in A \Rightarrow \exists$ una vecindad de c, digamos $U = (c-\delta, c+\delta) \subseteq A$, $\delta > 0 \ni f(x) \leq f(c)$, $\forall x \in U$.

1:10

16 / 16



$\Rightarrow$ si $\boxed{0 < h < \delta}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c) \leq 0 \quad \text{I}$$

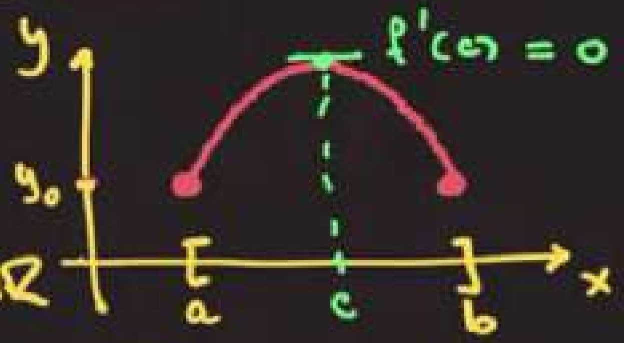
Por otro lado, si $-\delta < h < 0$, entonces:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0, \text{ por lo tanto}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c) \geq 0 \quad \text{II}$$

$\Rightarrow$ De I y II, se tiene que $f'(c)=0$ $\square$

Def: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Un punto interior $c \in A$ es un punto crítico de f, si f no es diferenciable en c o si $f'(c)=0$. El punto c es estacionario si $f'(c)=0$.



Teorema (de Rolle): Suponga que $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), y es tal que $f(a)=f(b)$. Entonces, $\exists\, c\,(a,b) \ni f'(c)=0$.

Proyectos Blackboard 75

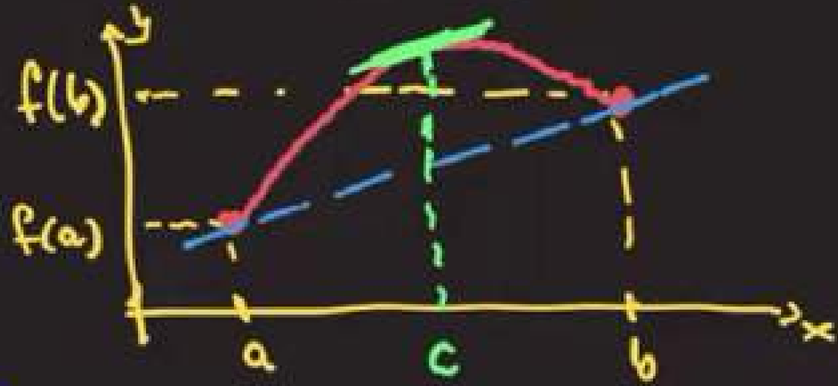
<u>Dem:</u> Como f es continua en $[a,b] \Rightarrow f$ tiene máximo y mínimo global en $[a,b]$. Entonces:

1) Si el máximo y mínimo se obtienen en los punto frontero $\Rightarrow f$ es constante en $[a,b] \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \ni f'(c) = 0$.

2) En otro caso, el máximo (o mínimo) global se alcanza en un punto interior de $[a,b] \Rightarrow c \in (a,b)$, y por el teorema anterior $\Rightarrow f'(c) = 0$. $\square$

19 / 19

Teorema (del valor medio) (Lagrange)



Sea $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b). Entonces, $\exists\ c \in (a,b) \ni$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Dem. Sea $g:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \ni$

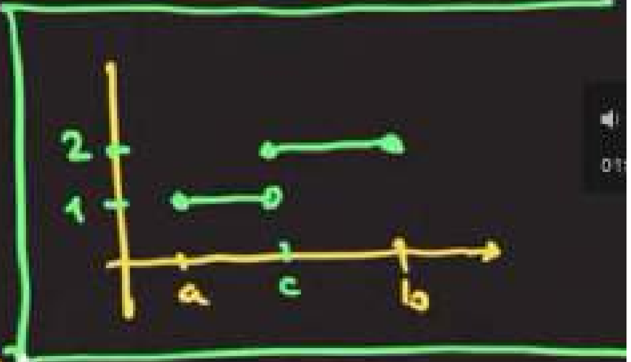
$$g(x) = f(x) - f(a) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a).$$

Nótese que $g(x)$ es continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y $\ni g(a)=0=g(b)$

$\Rightarrow$ g satisface el teorema de Rolle, i.e. $\exists\, c \in (a,b)$

t.q.: $$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0. \quad \square$$

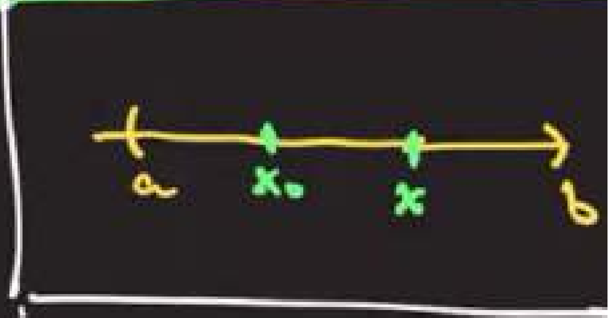
<ins>Teorema</ins>: Si $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre $\boxed{(a,b)}$ y si $f'(x)=0$, $\forall\, x \in (a,b) \Rightarrow f$ es constante sobre (a,b).



<ins>Dem</ins>: Sea $x_0 \in (a,b) \Rightarrow$ Por T.V.M., $\exists\, c$ entre x_0 y x, $x \in (a,b)$ y $x \neq x_0$ $\ni$

$$f'(c) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0)$, $\forall\, x \in (a,b) \Rightarrow f$ es constante en (a,b).



Proyectos Blackboard 75

Corolario Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en (a,b). Si $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in (a,b)$, entonces $f(x) = g(x) + C$, para alguna constante C.

Dem: Sea $h : (a,b) \to \mathbb{R} \ni h(x) := f(x) - g(x)$ $\Rightarrow h$ es diferenciable en (a,b) y se tiene que $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$. Por el Teorema anterior, $h(x) = C$, donde C es alguna constante $\Rightarrow f(x) - g(x) = C$, $\forall x \in (a,b)$ $\blacksquare$

Teorema (Valor medio) (de Cauchy)

Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, funciones continuas en $[a,b]$, diferenciables en (a,b) y suponga que $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$. Entonces, $\exists\, c\in(a,b)$ tal que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad ✓$$

$$f'(c)\left[g(b)-g(a)\right]=g'(c)\left[f(b)-f(a)\right] \quad ✓$$

Dem: como g es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b) y como $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$, definamos:

$$h(x):=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(x)-g(a)\right]$$

$\Rightarrow h(x)$ es continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y es t.q. $h(a) = 0 = h(b)$. Por el Teorema de Rolle, $\exists\, c \in (a,b) \Rightarrow$

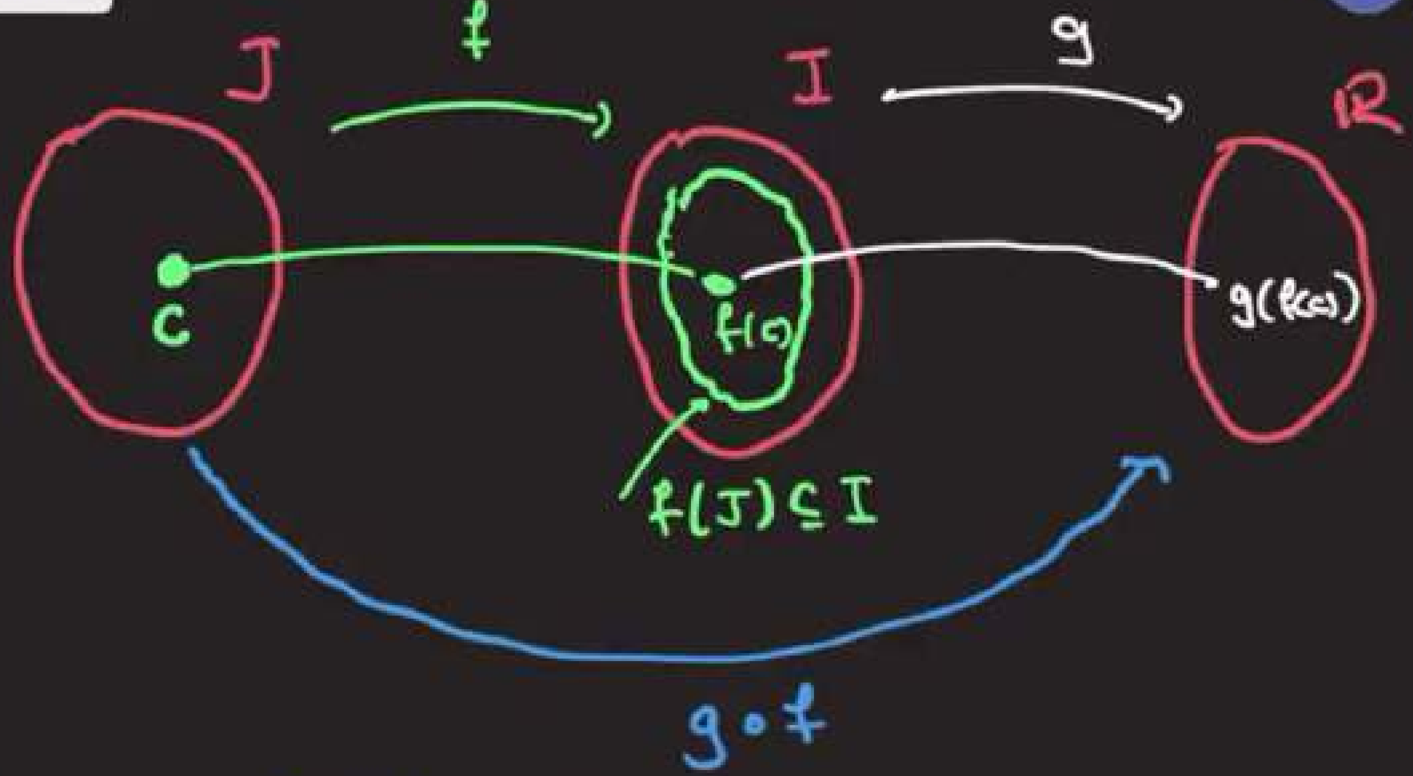
$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0$$

$\square$

- Regla de la cadena (+técnica)
- Taylor
- Criterio de 1^a y 2^{da} derivada
- Regla de L'Hôpital

Teorema (Regla de la cadena): Sean I y J intervalos de $\mathbb{R}$, sean $g: I \to \mathbb{R}$, $f: J \to \mathbb{R}$ y $f(J) \subseteq I$, y sea $c \in J$. Si f es diferenciable en c y si g es diferenciable en $f(c)$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en c, y

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c).$$



Nota (para olvidar)

Prueba "natural" (incorrecta)

$$\lim_{x\to c} \frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(c)}{x-c} =$$

Proyectos Blackboard 80

$$= \lim_{x\to c}\left[\left(\frac{g(f(x)) - g(f(c))}{f(x) - f(c)}\right)\cdot\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)\right]$$

$$= g'(f(c))\cdot f'(c)$$

Note que, existe la posibilidad que $f(x) = f(c)$ para x en una vecindad de c, lo que invalida la generalidad del argumento.

4 / 5

Proyectos | Blackboard 80

Teorema (Carathēodory) Sea f una función definida en $I \subseteq \mathbb{R}$ y sea $c \in I$. Entonces, f es una función diferenciable en c ssi existe una función φ definida en I, que es continua en c y cumple:

$$f(x) - f(c) = \varphi(x) \cdot (x-c), \quad x \in I.$$

En este caso, $\varphi(c) = f'(c)$

Dem: $(\Leftarrow)$ Sea φ continua en c y t.q.

$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c).$$

Si $x-c \neq 0 \Rightarrow$

1/6

Proyectos Blackboard 80

$$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \Rightarrow \lim_{x\to c} \varphi(x) =$$

$$= \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \varphi(c) \Rightarrow \varphi(c) = f'(c)$$

φ es continua

$(\Rightarrow)$ Suponemos que f es diferenciable en c, entonces: sea:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}, & x \neq c \\ f'(c) & x = c \end{cases}$$

como f es diferenciable en $c \Rightarrow f$ es continua en $c \Rightarrow \lim_{x\to c} \varphi(c) = f'(c)$.

Proyectos Blackboard 80

Si $x \neq c \Rightarrow \varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$

$\Rightarrow f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c).$

Si $x = c$, se cumple el resultado. $\square$

Ej: Sea $f(x) = x^3 \Rightarrow x^3 - c^3 = (x^2 + cx + c^2)(x-c)$

$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c)$

$\Rightarrow \varphi(x) = x^2 + cx + c^2$

$\Rightarrow \varphi(c) = c^2 + c^2 + c^2 = 3c^2 = f'(c)$

3/8

Proyectos Blackboard 80

<u>Dem:</u> • Como f es diferenciable en c, entonces existe $\varphi(x)$, continua en c $\ni$

$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c), \quad x \in J, \text{ y}$$

con $f'(c) = \varphi(c)$.

•• Como g es diferenciable en $f(c)$, entonces existe $\psi(x)$, continua en $f(c)$ $\ni$

$$* \quad g(f(x)) - g(f(c)) = \psi(f(x))\left[f(x) - f(c)\right],$$

donde $f(x) \in f(J) \subset I$ y $\psi(f(c)) = g'(f(c))$

Nótese que:

0:15 5/9

Proyectos Blackboard 80

$$\Rightarrow g(f(x)) - g(f(c)) = [(\psi \circ f)(x)] \cdot \varphi(x)(x-c)$$

$$= \left[(\psi \circ f)(x) \cdot \varphi(x)\right](x-c)$$

$$\Rightarrow \underbrace{[(\psi \circ f)(c)]\varphi(c)}_{\text{continua}} = \psi(f(c)) \cdot \varphi(c)$$

$$= g'(f(c)) \cdot f'(c)$$

$\Rightarrow$ Por el teorema anterior

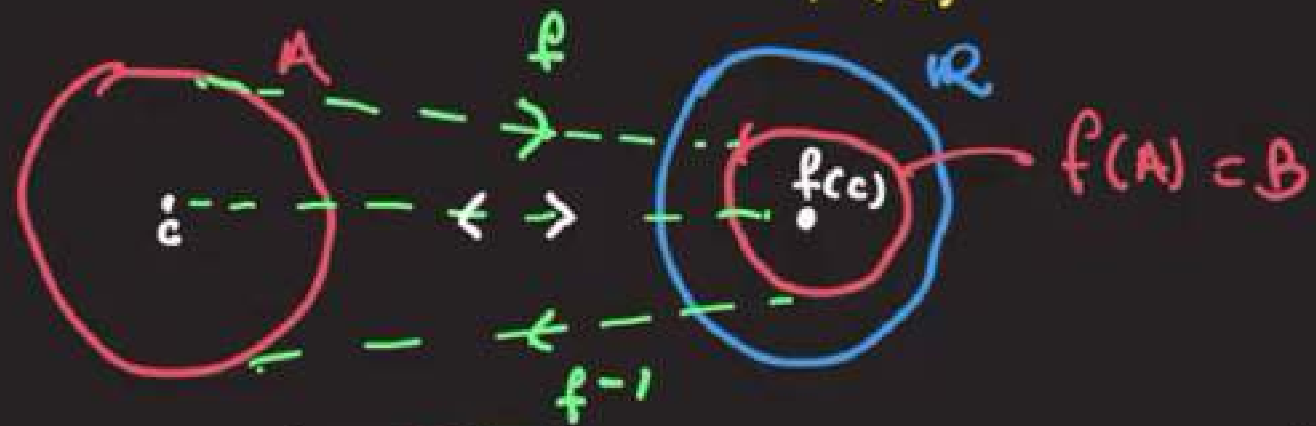
$$(g \circ f)'(c) = [(\psi \circ f)(x) \cdot \varphi(x)]$$

$$= g'(f(c)) \cdot f'(c). \qquad \square$$

6 / 10

Prop: Supóngase que $f: A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función inyectiva sobre A, con inversa $f^{-1}: B\to\mathbb{R}$, donde $B=f(A)$. Asuma que f es diferenciable en el punto interior $c\in A$ y que f^{-1} es diferenciable en $f(c)$, que es un punto interior de B. Entonces, $f'(c)\neq 0$ y se cumple:

$$(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$$



Dem: Sabemos que $f^{-1}(f(x)) = x$, $\forall x \in A$. Como f es diferenciable en c y f^{-1} es diferenciable en $f(c)$; entonces, por la regla de la cadena:

$$[f^{-1}(f(x))]' = (x)'$$

$\Rightarrow (f^{-1})'(f(c)) \cdot f'(c) = 1$. Si $f'(c) \neq 0$

$\Rightarrow (f^{-1})' f(c) = \dfrac{1}{f'(c)}$. Note que, si $f'(c) = 0 \Rightarrow f^{-1}$ no es diferenciable en $f(c)$. $\square$

Nota. ① $(f^{-1})'(f(c)) = \dfrac{1}{f'(c)}$. si $f(c)=d$
$\Rightarrow c = f^{-1}(d)$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(\underbrace{d}_{\in B}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(d))}$$

② una versión menos restringida del Teorema se llama Teorema de la función inversión.

Lema: Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ una función y $c \in \mathbb{R}$ que sea punto de acumulación de A. Si $a \leq f(x) \leq b$, $\forall x \in A$, entonces

Proyectos Blackboard 83

si $\lim_{x\to c} f(x)$ existe, se tiene que

$$a \le \lim_{x\to c} f(x) \le b$$

<u>Teorema</u>: Suponga que $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a,b). Entonces,

① f es creciente ssi $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in(a,b)$

② f es decreciente ssi $f'(x)\le 0$, $\forall x\in(a,b)$

<u>Dem</u>: ①:

$h>0$

($\Rightarrow$) Sea f creciente y sea $x\in(a,b)$. Entonces,

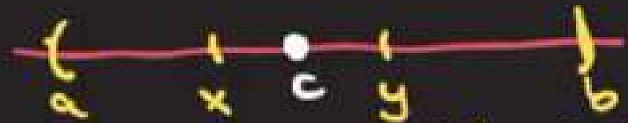
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

4 / 4

por el lema anterior. Entonces, $f'(x) \geq 0$.

($\Leftarrow$) Suponemos que $f'(x) \geq 0$, $\forall\, x \in (a,b)$.

Sean: $a < x < y < b$.



Entonces, aplicando el Teorema del Valor medio,

$$\exists\, c \in (x,y) \ni \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) \geq 0,$$

Como $y-x>0 \Rightarrow f(y)-f(x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$

$\Rightarrow f$ es creciente. $\square$

<u>Teorema de Taylor:</u>

Def: Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y suponga que f tiene n derivadas: $f', f'', \dots, f^{(n)}:(a,b)\to\mathbb{R}$.

El polinomio de Taylor de grado n de f en $c\in(a,b)$ es:

$$P_n(x) := f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (x-c)^k, \text{ donde:}$$

coef. de Taylor $\rightarrow$ $a_k = \dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}$

Proyectos   Blackboard 83

Nota: Si se tiene que una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ se puede escribir:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$\Rightarrow$ $R_n(x)$ es el $\underbrace{\text{error}}$ entre f y $P_n(x)$.

Residuo

Teorema (Taylor, con residuo de Lagrange)

Suponga que $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ tiene $n+1$ derivadas en (a,b) y sea $c\in(a,b)$. Entonces, $\forall\, x\in(a,b)$ $\exists\, \xi$ entre c y x $\ni$

7/7

Proyectos Blackboard 83

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + R_n(x), \quad \text{donde}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Nota: Sea $k=0 \Rightarrow$ $\exists\ \xi$ entre c y $x \ni$ $f(x) = \underbrace{f(c)}_{P_0(x)} + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-c)$

$\Leftrightarrow \exists\ \xi$ entre c y $x \ni \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(\xi)$

(i.e. el TVM es una restricción del Teorema de Taylor).

8 / 8

Dem, Fijemos $x, c \in (a,b)$. Entonces, para cualquier $t \in (a,b)$, considere:

$$g(t) = f(x) - \left[f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right]$$

Nota: : $g(x) = 0$.

$$\Rightarrow g'(t) = -\cancel{f'(t)} - f''(t)\cdot(\cancel{x-}t) + \cancel{f'(t)} - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \frac{f''(t)\cdot 2(\cancel{x}-t)}{\cancel{2!}} \cdots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1}.$$

$$\boxed{g'(t) = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}$$

Considere, ahora, la función:

$$h(t) = g(t) - \left(\frac{x-t}{x-c}\right)^{n+1} g(c)$$

$$\Rightarrow \quad h(c) = g(c) - g(c) = 0$$

$$h(x) = \cancel{g(x)}^{\,0} - 0 = 0$$

$\Rightarrow$ Por Rolle $\exists\ \xi$ entre x y c $\ni$

$$h'(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow \quad h'(t) = g'(t) + \frac{(n+1)}{(x-c)}\left(\frac{x-t}{x-c}\right)^{n} g(c)$$

Proyectos Blackboard 83

$$\Rightarrow h'(\xi) = g'(\xi) + \frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(x-c)^{n+1}} g(c) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)\cancel{(x-\xi)^n} + \frac{(n+1)\cancel{(x-\xi)^n}}{(x-c)^{n+1}} g(c) = 0$$

$$\Rightarrow +\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(n+1)}{(x-c)^{n+1}} g(c)$$

$$\Rightarrow \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} = g(c) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)(x-c)^n}{k!}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)(x-c)^k}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \square$$

11 / 11

Teorema (Regla de L'Hôpital) (caso $\frac{0}{0}$)

Suponga que $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables sobre (a,b) $\ni$ $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$, y que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$

Entonces, si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

Dem: Extendemos f y g de tal forma que

$$f, g : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R},$$

son funciones continuas sobre $[a,b)$, con $f(a) = g(a) = 0$.

Sea $x \in (a,b)$ y consideremos f y g extendidas en $[a,x] \Rightarrow f$ y g son continuas en $[a,x]$ y diferenciables en (a,x), entonces, por el Teorema del Valor Medio de Lagrange, existe $c \in (a,x) \ni$

$$g(x) - g(a) = \underbrace{g'(c)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(x-a)}_{\neq 0} \neq 0, \ \forall x \in (a,b)$$

Por el Teorema del valor medio de Cauchy:

$$\frac{f(x) - \cancelto{0}{f(a)}}{g(x) - \cancelto{0}{g(a)}} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$\Rightarrow$ Si $x \to a^+$

$\Rightarrow c \to a^+$. Entonces,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \qquad \square$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$g(x) = x \Rightarrow \lim_{x\to 0} x = 0$

$\boxed{g'(x) = 1 \neq 0,}\ \forall x$ ✓

$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$

Proyectos Blackboard 83

Teorema: (Regla de L'Hôpital) (caso $\frac{\infty}{\infty}$)

Suponga que $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ son funciones diferenciables sobre $(a,b) \ni g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$ y que $\lim_{x\to a^+}|g(x)|=\infty$. Entonces,

$$\text{si } \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L \Rightarrow \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$

Ej: $$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to 0}x=0$$

$x\in(0,1/2)$

15 / 15

Proyectos Blackboard 83

Dem: Como $\lim\limits_{x\to a^+} |g(x)| = \infty \Rightarrow g(x) \neq 0$, para valores de x cerca de a. Entonces, podemos asumir, SPG, que $g(x) \neq 0$, $\forall\, x \in (a,b)$. Sean $x, y \in (a,b)$ $\ni a < x < y < b \Rightarrow$ considere $f, g : [x,y] \to \mathbb{R}$.

Como f, g son continuas en $[x,y]$, diferenciables en (x,y) y $\boxed{g'(x) \neq 0}$ en (x,y), entonces por el T.V.M. de Cauchy $\exists\, c \in (x,y) \ni$

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Por T.V.M de Lagrange $g(y) - g(x) \neq 0$.

16 / 16

Proyectos Blackboard 83

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y) + f(y)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}$$

$$= \left(\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}\right) \cdot \left(\frac{g(x) - g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}$$

$$= \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \left(\frac{g(x) - g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}$$

$$1 - \frac{g(y)}{g(x)}$$

$\Rightarrow$ Considere:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \left(\frac{g(x) - g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} - L \right|$$

17 / 17

Proyectos   Blackboard 83

$$= \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} - L \right|$$

$$= \left| \left(\frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right) - \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right|} + \underbrace{\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)} \right|} + \underbrace{\left| \frac{f(y)}{g(x)} \right|}$$

$|g(x)| \longrightarrow \infty$

18 / 18

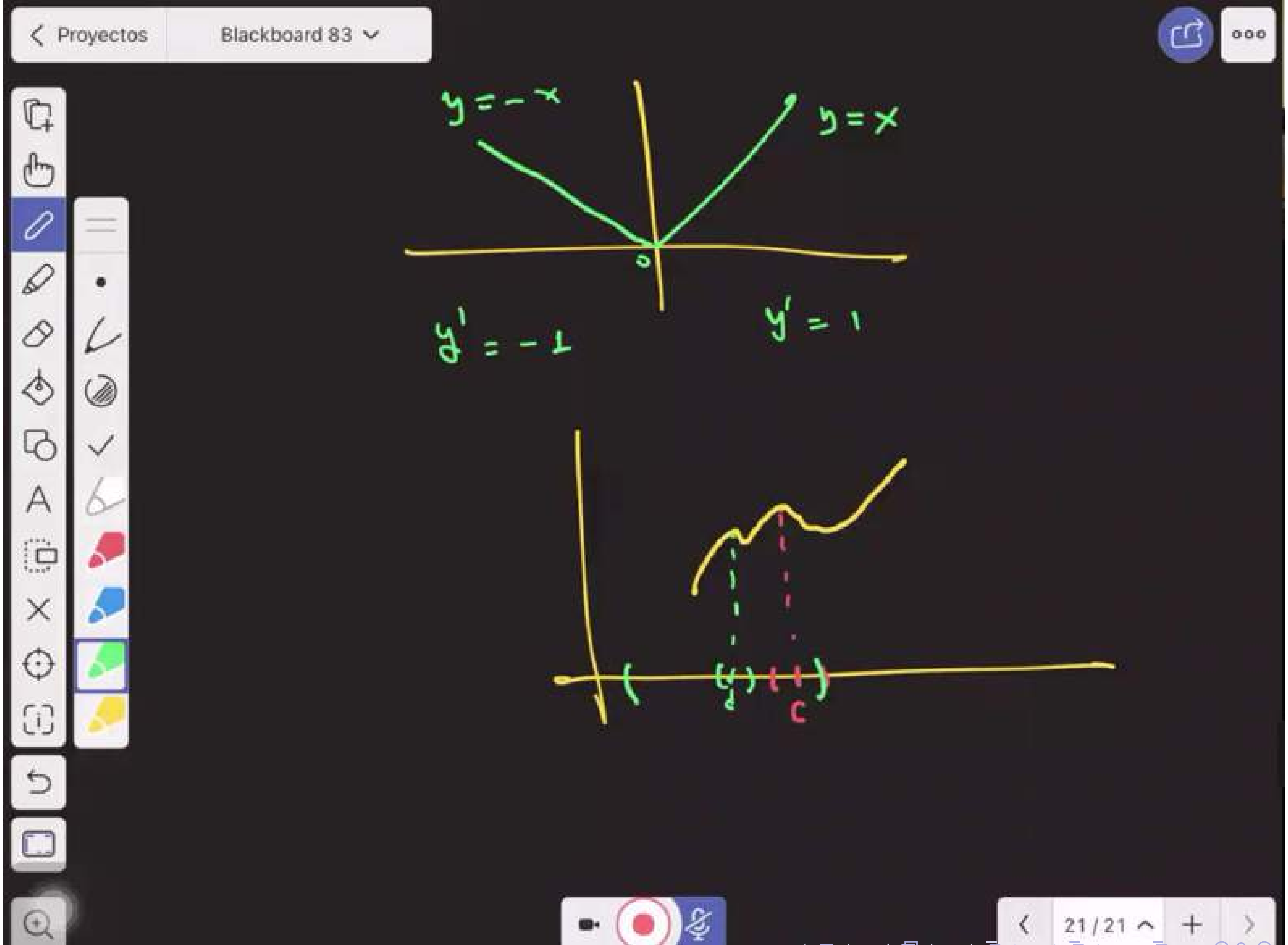
Criterios para optimización:

Teorema (criterio de 1ª derivada): Sean $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, una función continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,c) y (c,b).

Entonces,

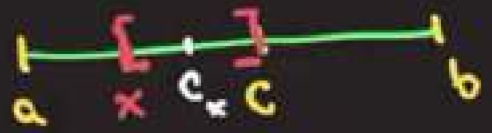
(1) Si existe una vecindad $(c-\delta, c+\delta) \ni f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (c-\delta, c)$ y $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (c, c+\delta)$, entonces f tiene un máximo relativo (local) en c.

(2) Si existe una vecindad $(c-\delta, c+\delta) \ni f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (c-\delta, c)$ y $f'(x) \geq 0$, $\forall x\,(c, c+\delta)$, entonces f tiene un mínimo relativo (local) en c.


Proyectos
Blackboard 83
y = -x
y = x
0
y' = -1
y' = 1
c
21 / 21

Dem: (1) Sea $x \in (c-\delta, c)$ $\delta > 0$ $\Rightarrow$ por el T.V.M, $\exists\, c_x \in (x,c) \ni$

$$f(c) - f(x) = f'(c_x)\cdot(c-x).$$



Como $f'(c_x) \geq 0$ y $c-x>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(c)-f(x)\geq 0 \Rightarrow f(c)\geq f(x), \forall x\in(c-\delta,c).$

Si $x\in(c,c+\delta) \Rightarrow$ el T.V.M $\exists\, d_x \in (c,x) \ni$

$$f(x)-f(c) = f'(d_x)(x-c).$$

Como $f'(x)\le 0, \forall x \in (c, c+\delta]$ y $x-c\geq 0$

$\Rightarrow f(x)-f(c)\le 0 \Rightarrow f(x)\le f(c), \forall x (c,c+\delta)$

$\Rightarrow$ f tiene máximo relativo en c.

(2) similar. $\square$

< Proyectos | Blackboard 83

Teorema (criterio de 2^{da} derivada): Sea I un intervalo y x_0 un punto interior de I, y sea $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$. Suponga que $f', f'', \dots, f^{n}$ son continuas en x_0, y que:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ pero } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

1) Si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f$ tiene mínimo relativo en x_0.

2) Si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f$ tiene máximo relativo en x_0

3) Si n es impar, $\Rightarrow f$ no tiene máximo ni mínimo relativo en x_0.

22 / 22

Dem: (•) Apliquemos el Teorema de Taylor a $f(x)$ en x_0, y sea $x_1 \in I \ni$ (suficientemente cerca de x_0).

$$f(x_1) = P_{n-1}(x_1) + R_{n-1}(x_1) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x_1 - c)^n,$$

donde c es un punto entre x_0 y x_1.

(••) Si $f^{(n)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ existe un intervalo U que contiene a $x_0 \ni f^{(n)}(x)$ tiene el mismo signo que $f^{(n)}(x_0)$, $x \in U$.

Si $x_1 \in U \Rightarrow c \in U \Rightarrow f^{(n)}(c)$ y $f^{(n)}(x_0)$ tienen el mismo signo.

1) Si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ para $x \in U$, se

tiene que $f^{(n)}(c) > 0$ y $(x-x_0)^n \geq 0 \Rightarrow$

$$R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \overbrace{R_{n-1}(x)}^{\geq 0}$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0),\ \forall x \in U$$

$\Rightarrow f$ tiene mínimo relativo en x_0.

(2) Si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f^{(n)}(c) < 0$ y $(x-x_0)^n$ es positivo $\Rightarrow R_{n-1} \leq 0$ y $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in U \Rightarrow f$ tiene máximo relativo en x_0.

(3) Si n es impar
$(x-x_0)^n > 0$, si $x > x_0$
$(x-x_0)^n < 0$, si $x < x_0$

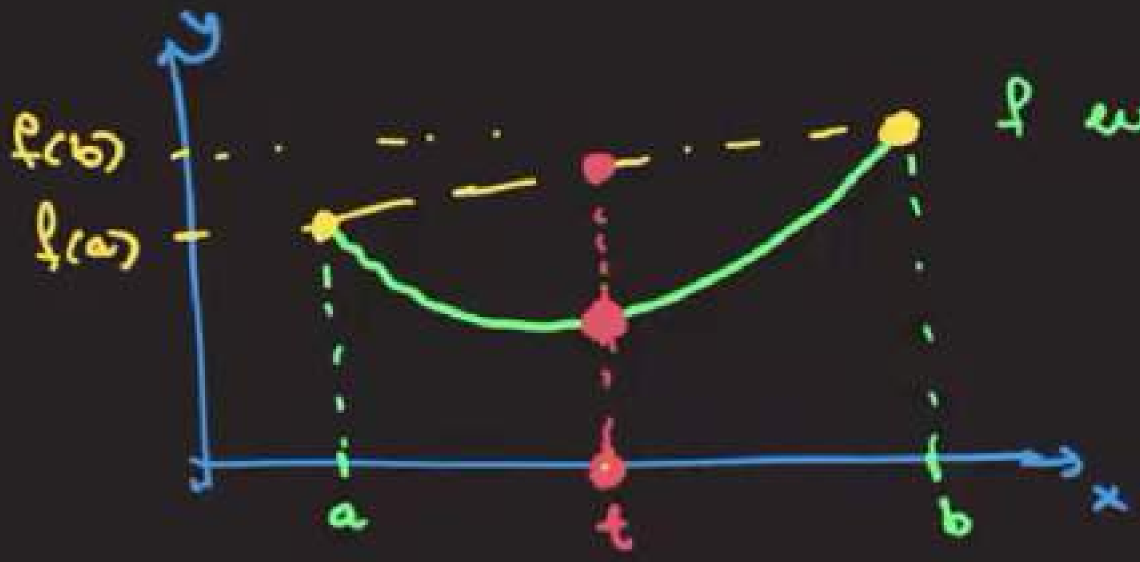
Proyectos Blackboard 83

$\Rightarrow$ si $x \in U \Rightarrow R_{n-1}(x)$ tendrá signos opuestos a la izquierda y derecha de $x_0 \Rightarrow f$ no tiene máximo ni mínimo en x_0. $\square$

Funciones convexas (1) Sea $f: I \to \mathbb{R}$, se dice que f es convexa sobre I, si $\forall s, t \in I$ y $\lambda \in [0,1]$, se tiene que

$$f(\lambda s + (1-\lambda)t) \leq \lambda f(s) + (1-\lambda) f(t).$$

(2) f es una función cóncava sobre I si $-f$ es convexa sobre I.



$(1-\lambda)a + \lambda b = t$, para algún $\lambda \in [0,1]$

$$\Rightarrow f(t) = f\left[(1-\lambda)a + \lambda b\right] \leq (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b)$$

1) • Desigualdad de Jensen

2) • Teorema de las 3 cuerdas

3) • SSi

<u>Teorema</u>: Sea f una convexa y sean $w_1, \dots, w_n \ni$

i) $w_j \geq 0$

ii) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$.

Entonces, para $x_1, x_2, \dots, x_n$, se cumple:

$$f(\underbrace{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}_{\text{combinacion convexo}}) \leq w_1 \underbrace{f(x_1) + \dots + w_n f(x_n)}_{\text{combinación convexa}},$$

<u>Dem</u>: Por inducción sobre n.

i) $n=1$: $f(w_1 x_1) \leq w_1 f(x_1)$

$\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_1) \Rightarrow$ se tiene el resultado

ii) Suponemos que la propiedad es válida para $n = K-1$; i.e. Si $w_j \geq 0$ y $\sum_{j=1}^{K-1} w_j = 1$,

$$\Rightarrow \quad f\left(\sum_{j=1}^{K-1} w_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{K-1} w_j f(x_j).$$

iii) Considere el caso $n = K$. Sean $w_1, \dots, w_K$ números $\ni$ $w_j \geq 0$ y $\sum_{j=1}^{K} w_j = 1$.

Sea $w_K = 1 \Rightarrow f(x_K) \geq f(x_K)$.

$\Rightarrow$ Sea $w_K < 1$, se tiene:

$$w_1 + w_2 + \dots + w_{K-1} + w_K = 1$$

$$\Rightarrow w_1 + \dots + w_{K-1} = 1 - w_K$$

Proyectos Blackboard 91

$$\Rightarrow \frac{w_1 + w_2 + \cdots + w_{k-1}}{1 - w_k} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{w_1}{1-w_k} + \frac{w_2}{1-w_k} + \cdots + \frac{w_{k-1}}{1-w_k} = 1 ,$$

note que, además, $\frac{w_j}{1-w_k} \geqslant 0$, $j = 1, \dots, k-1$

Entonces,

$$f\left(\frac{w_1}{1-w_k} x_1 + \frac{w_2}{1-w_k} x_2 + \cdots + \frac{w_{k-1}}{1-w_k} x_{k-1}\right) \leq$$

$$\leq \frac{w_1}{1-w_k} f(x_1) + \cdots + \frac{w_{k-1}}{1-w_k} f(x_{k-1}) \quad \text{(I)}$$

4/4

Además, $f(x_k) \leq f(x_k)$ ✓ (II)

$$\Rightarrow \quad w_k f(x_k) \leq w_k f(x_k)$$

$\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} (1-w_k)(\mathrm{I}) \\ (\mathrm{II}) \end{matrix}\right\} +$ Entonces:

$$* \quad \underbrace{(1-w_k)\, f\left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{w_j}{1-w_k}\, x_j\right)}_{A} + w_k f(x_k) \leq (1-w_k) \sum_{j=1}^{k-1} \frac{w_j}{1-w_k} f(x_j) + w_k f(x_k)$$

$$f\left[(1-w_k) \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{w_j}{1-w_k}\right) x_j + w_k x_k\right] \leq (1-w_k)\, f\left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{w_j}{1-w_k}\, x_j\right) + w_k f(x_k)$$

$$\Rightarrow \quad f(w_1 x_1 + \dots + w_k x_k) \leq \sum_{j=1}^{k} w_j f(x_j) \qquad \square$$

Prop: (Lema de las tres cuerdas):

Sea $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces, f es convexa ssi $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, se tiene que:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

Dem: $(\Rightarrow)$

Sean $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \exists\, t \in [0,1] \ni$

$$x_2 = (1-t)x_1 + t x_3$$

$$\Rightarrow x_2 = x_1 + t(x_3 - x_1)$$

Proyectos Blackboard 91

$$\Rightarrow t = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \in [0,1] \text{ ; además,}$$

$$1 - t = 1 - \left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\right) = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \in [0,1].$$

- Como f es convexa, entonces: (I)

Si $x_2 = (1-t)x_1 + t x_3 \Rightarrow f(x_2) \leq (1-t)f(x_1) + t f(x_3)$

- - Restemos $f(x_1)$ en (I):

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq (\cancel{1}-t) f(x_1) + t f(x_3) - \cancel{f(x_1)}$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq t f(x_3) - t f(x_1)$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq t \left[f(x_3) - f(x_1) \right]$$

7 / 7

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq \left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\right)\left[f(x_3) - f(x_1)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

... Multipliquemos (I) $\times -1$ y sumemos $f(x_3)$;

$$\Rightarrow -f(x_2) \geq -\left[(1-t) f(x_1) + t f(x_3)\right]$$

$$\Rightarrow f(x_3) - f(x_2) \geq -f(x_1) + t f(x_1) - t f(x_3) + f(x_3)$$

$$\geq f(x_3) - f(x_1) - t\left[f(x_3) - f(x_1)\right]$$

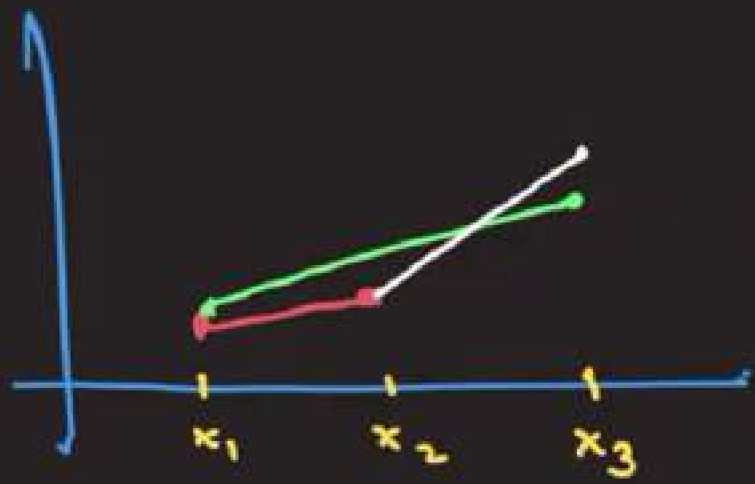
$$\geq \left[f(x_3) - f(x_1)\right](1-t)$$

Proyectos　Blackboard 91

$$\Rightarrow f(x_3) - f(x_2) \geq \left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right)\left[f(x_3) - f(x_1) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

$(\Leftarrow)$



Prop: Sea I un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Para cada $a \in I$, considere:

$$f_a : I - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} \ni$$

$$f_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Entonces, $f_a(x)$ es creciente en I.

Dem: Sea $a \in I$ y sean $x, y \in I - \{a\}$, $x < y$.

i) Si $a < x < y \Rightarrow$ aplicando el teorema anterior con $x_1 = a$, $x_2 = x$ y $x_3 = y$, se ti

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \Rightarrow f_a(x) \leq f_a(y)$$

ii) Si $x < y < a \Rightarrow \ldots \Rightarrow f_a(x) \leq f_a(y)$.

iii) Si $x < a < y \Rightarrow \ldots \Rightarrow f_a(x) \leq f_a(y)$ $\square$

6.1. HT4

Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2034 - Análisis de Variable Real 1 - Catedrático: Dorval Carías
16 de mayo de 2021

HT 4

1. Problema 1.

Sea $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface $[f(x)]^2 = 1, \forall x \in (0,1)$. Pruebe que $f \equiv 1$ o $f \equiv -1$.

Notación

$f \equiv 1$ hace referencia a:

$$f(x) = 1, \qquad \forall\, x \in (0,1).$$

Análogamente, $f \equiv -1$ hace referencia a:

$$f(x) = -1, \qquad \forall\, x \in (0,1).$$

Demostración. A probar: $f \equiv 1$ o $f \equiv -1$. Sabemos que $f(x)$ es una función continua, en donde,

$$[f(x)]^2 = f(x)f(x).$$

Por el inciso a del teorema 5.2.2 de Rudin et al. (1976) entonces $[f(x)]^2$ debe ser continua en (0,1) también.

Teorema 5.2.2 de Bartle and Sherbert (2000)

Let $A \subseteq \mathbb{R}$, let f and g be continuous on A to $\mathbb{R}$, and let $b \in \mathbb{R}$.

1. The functions $f+g, f-g, fg$, and bf are continuous on A.
2. If $h : A \to \mathbb{R}$ is continuous on A and $h(x) \neq 0$ for $x \in A$, then the quotient f/h is continuous on A.

Ahora bien, nótese que:

$$\implies [f(x)]^2 = 1 \implies f(x) = \pm\sqrt{1} = \pm 1, \qquad \forall\, x \in (0,1).$$

Considérese la definición 6.1.1 de diferenciabilidad de Bartle and Sherbert (2000).

Definición 6.1.1. de Bartle and Sherbert (2000)

Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be an interval, let $f : I \to \mathbb{R}$, and let $c \in I$. We say that a real number L is the derivative of f at c if given any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta(\varepsilon) > 0$ such that if $x \in I$ satisfies $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$, then

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \varepsilon$$

In this case we say that f is differentiable at c, and we write $f'(c)$ for L. In other words, the derivative of f at c is given by the limit

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

provided this limit exists. (We allow the possibility that c may be the endpoint of the interval.)

Sea $c \in (0, 1)$. Dado un $\epsilon > 0$ tal que exista $\delta(\epsilon) > 0$, entonces tenemos 2 casos ($f(x) = \pm 1$):

1. $$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right| = \left| \frac{1 - 1}{x - c} \right| = 0 < \epsilon$$

2. $$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right| = \left| \frac{(-1) - (-1)}{x - c} \right| = 0 < \epsilon$$

$\implies$ f es diferenciable en c y $f'(c) = 0$. $\implies$ Ahora tomemos en cuenta el inciso 2 del teorema 5.11 de Rudin et al. (1976).

Teorema 5.11 de Rudin et al. (1976)

Suppose f is differentiable in (a, b).

1. If $f'(x) \geq 0$ for all $x \in (a, b)$, then f is monotonically increasing.
2. If $f'(x) = 0$ for all $x \in (a, b)$, then f is constant.
3. If $f'(x) \leq 0$ for all $x \in (a, b)$, then f is monotonically decreasing.

$\implies$ f es constante en $(0, 1)$. Ahora tenemos que $f(x) = c, \quad \forall\, x \in (0, 1)$. Por lo cual, regresamos a la expresión original, en donde:

$$\implies [c]^2 = 1 \implies c = \pm\sqrt{1} \implies c = \pm 1.$$

$\therefore\ f \equiv 1$ o $f \equiv -1$. $\square$

2. Problema 2.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$. Pruebe que f es constante.

Demostración. A probar: f es constante. Nótese que la expresión se puede escribir como:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y||x-y|$$

Ahora bien, por el valor absoluto solo se están considerando los valores positivos; es posible dividir la expresión por $|x-y|$, preservando la desigualdad.

$$\begin{aligned}
&\implies \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq \frac{|x-y||x-y|}{|x-y|} \\
&\implies \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq |x-y| \\
&\implies \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq |x-y|
\end{aligned}$$

Ahora, consideremos la definición 6.1.1 de Bartle and Sherbert (2000),

Definición 6.1.1. de Bartle and Sherbert (2000)

Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be an interval, let $f : I \to \mathbb{R}$, and let $c \in I$. We say that a real number L is the derivative of f at c if given any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta(\varepsilon) > 0$ such that if $x \in I$ satisfies $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$, then

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - L\right| < \varepsilon$$

In this case we say that f is differentiable at c, and we write $f'(c)$ for L. In other words, the derivative of f at c is given by the limit

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

provided this limit exists. (We allow the possibility that c may be the endpoint of the interval.)

Por las condiciones del problema, sabemos que el límite del lado izquierdo debe existir. Por lo cual, tenemos que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$, tal que:

$$\implies \underbrace{\lim_{x \to y-} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|}_{\text{definición}} \leq \lim_{x \to y} |x-y| = 0 \implies f'(y) \leq 0 \xRightarrow{y \text{ es un número arbitrario}} f'(y) = 0.$$

Entonces, ahora tomamos en cuenta el inciso 2 del teorema 5.11 de Rudin et al. (1976).

Teorema 5.11 de Rudin et al. (1976)

Suppose f is differentiable in (a, b).

1. If $f'(x) \geq 0$ for all $x \in (a, b)$, then f is monotonically increasing.
2. If $f'(x) = 0$ for all $x \in (a, b)$, then f is constant.
3. If $f'(x) \leq 0$ for all $x \in (a, b)$, then f is monotonically decreasing.

$\therefore$ f es constante.

$\square$

3. Problema 3.

Pruebe que si la función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene derivada acotada sobre I, entonces f es uniformemente continua sobre I.

Demostración. A probar: f es uniformemente continua sobre I. Por hipótesis, tenemos que f tiene derivada acotada sobre I, que se puede expresar como:

$$|f'(x)| \leq M, \qquad \forall\, x \in I.$$

Notamos que se cumplen las condiciones para aplicar el teorema del Valor Medio de Bartle and Sherbert (2000).

Teorema del Valor Medio 6.2.4 de Bartle and Sherbert (2000).

Suppose that f is continuous on a closed interval $I := [a, b]$, and that f has a derivative in the open interval (a, b). Then there exists at least one point c in (a, b) such that

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Ahora, nos interesa que la función sea Lipschitz para aplicar ciertas propiedades previamente demostradas en clase. Entonces, sean $a, b \in I$, tal que:

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= |f'(c)||b - a| \\ &= |f'(c)(b - a)| \\ &\leq K|b - a|. \end{aligned}$$

Definición 5.4.4 de Bartle and Sherbert (2000).

Let $A \subseteq \mathbb{R}$ and let $f : A \to \mathbb{R}$. If there exists a constant $K > 0$ such that

$$|f(x) - f(u)| \leq K|x - u|$$

for all $x, u \in A$, then f is said to be a Lipschitz function (or to satisfy a Lipschitz condition) on A.

Ahora bien, ya que sabemos que es una función Lipschitz, podemos aplicar el teorema 5.4.5 de Bartle and Sherbert (2000).

Teorema 5.4.5 de Bartle and Sherbert (2000).

If $f : A \to \mathbb{R}$ is a Lipschitz function, then f is uniformly continuous on A

$\therefore$ f es uniformemente continua sobre I.

$\square$

4. Problema 4.

Sea $f(x)$ una función diferenciable en a. Encuentre:

$$\lim_{n \to a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x - a}, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Demostración. Considérese la definición de diferenciabilidad de Bartle and Sherbert (2000), por lo cual sabemos:

$$f'(a) = \lim_{n\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Por otra parte, también se considerará el caso en donde,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} &= \lim_{n\to a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x-a} \\
&= \lim_{n\to a}(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\
&= a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1} \\
&= a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1} + a^{n-1} \\
&= na^{n-1}
\end{aligned}$$

Definición 6.1.1. de Bartle and Sherbert (2000)

Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be an interval, let $f : I \to \mathbb{R}$, and let $c \in I$. We say that a real number L is the derivative of f at c if given any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta(\varepsilon) > 0$ such that if $x \in I$ satisfies $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$, then

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \varepsilon$$

In this case we say that f is differentiable at c, and we write $f'(c)$ for L. In other words, the derivative of f at c is given by the limit

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

provided this limit exists. (We allow the possibility that c may be the endpoint of the interval.)

Entonces, el límite se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x - a} &= \lim_{n\to a} \frac{a^n f(x) - a^n f(a) + a^n f(a) - x^n f(a)}{x - a} \\
&= \lim_{n\to a} \frac{(a^n f(x) - a^n f(a)) - (x^n f(a) - a^n f(a))}{x - a} \\
&= \lim_{n\to a} \frac{a^n f(x) - a^n f(a)}{x - a} - \lim_{n\to a} \frac{x^n f(a) - a^n f(a)}{x - a} \\
&= \lim_{n\to a} \frac{a^n (f(x) - f(a))}{x - a} - \lim_{n\to a} \frac{f(a)(x^n - a^n)}{x - a} \\
&= a^n \lim_{n\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f(a) \lim_{n\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\
&= a^n f'(a) - na^{n-1} f(a), \qquad n \in \mathbb{Z}^+.
\end{aligned}$$

□

5. Problema 5.

Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua y diferenciable en $(0, 1)$ que satisface:

1. $f(0) = 0$.

2. Existe $M > 0$ tal que $|f'(x)| \leq M|f(x)|, x \in (0,1)$

Demuestre que $f(x) = 0, x \in [0,1]$.

Demostración. Supóngase por contradicción que $f(x) \neq 0$ en el intervalo $[0,1]$. Como la función es continua en el intervalo $[0,1]$, el teorema 5.3.4 de Bartle and Sherbert (2000) nos asegura que debe haber un máximo y un mínimo absoluto en $[0,1]$.

Teorema 5.3.4 (Máximo-Mínimo) de Bartle and Sherbert (2000)

Let I $:= [a,b]$ be a closed bounded interval and let $f : I \to \mathbb{R}$ be continuous on I. Then f has an absolute maximum and an absolute minimum on I.

Definición 5.3.3 de Bartle and Sherbert (2000)

Let $A \subseteq \mathbb{R}$ and let $f : A \to \mathbb{R}$. We say that f has an absolute maximum on A if there is a point $x^* \in A$ such that

$$f(x^*) \geq f(x) \quad \text{for all} \quad x \in A$$

We say that f has an absolute minimum on A if there is a point $x_* \in A$ such that

$$f(x_*) \leq f(x) \quad \text{for all} \quad x \in A$$

We say that x^* is an absolute maximum point for f on A, and that x_* is an absolute minimum point for f on A, if they exist.

$\implies$ Existe un máximo y un mínimo en absoluto. Sea el máximo absoluto $b \in [0,1]$ tal que $|f(b)| \geq M|f(x)|, \quad \forall\, x \in [0,1]$. Sin pérdida de generalidad, asumamos que,

$$f(b) > 0.$$

Además, notamos que se cumplen las condiciones para aplicar el teorema del Valor Medio de Bartle and Sherbert (2000) en el intervalo $[0,b]$, en donde b tiene 2 casos posibles: (1) $b < 1$, (2) $b = 1$. El caso en donde $b > 1$ lo descartamos porque queda fuera del intervalo $[0,1]$.

Teorema del Valor Medio 6.2.4 de Bartle and Sherbert (2000).

Suppose that f is continuous on a closed interval $I := [a,b]$, and that f has a derivative in the open interval (a,b). Then there exists at least one point c in (a,b) such that

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

$\implies$ Tenemos $f(b) - f(0) = f'(c)(b-0)$. Despejamos para $f'(c)$ tal que,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = \frac{f(b)}{b}$$

Entonces, analizamos los casos individualmente:

1. Si $b < 1$ entonces $f'(c) = f(b)/b > f(b) \geq M|f(c)|$, en donde contradice que
$$|f'(x)| \leq M|f(c)|.$$
2. Si $b = 1$ entonces $f'(c) = f(b)/1 > |f(c)|$, en donde a contradice que
$$|f'(x)| \leq M|f(c)|.$$

$\square$

Referencias

Bartle, R. G. and Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis*. Wiley New York.

Rudin, W. et al. (1976). *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-hill New York.

6.2. HT5

Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2034 - Análisis de Variable Real 1 - Catedrático: Dorval Carías
31 de mayo de 2021

HT 5

Las siguientes definiciones/teoremas (demostrados) fueron vistos en clase:

Definición de funciones convexas

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ se dice que f es convexa sobre I, si $\forall\ s, t \in I$ y $\lambda \in [0, 1]$, se tiene que:

$$f(\lambda s + (1 - \lambda)t) \leq \lambda f(s) + (1 - \lambda)f(t).$$

1. f es función cóncava sobre I si $-f$ es convexa sobre I.

Teorema (Desigualdad de Jensen)

Sea f una función convexa y $w_1, w_2, \cdots, w_n$, tal que:

1. $w_j \geq 0$.
2. $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$.

Entonces para $x_1, x_2, \cdots, x_n$, se cumple:

$$f(w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n) \leq w_1f(x_1) + \cdots + w_nf(x_n).$$

Que es igual a

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} w_jx_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} w_jf(x_j).$$

Lema (De las tres cuerdas)

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, entonces f es convexa si y solo si $\forall\ x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, se tiene que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

1. Problema 1

Si I es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es convexa, entonces f tiene derivadas laterales y por lo tanto es continua en todo punto $a \in I^{\circ}$ ($\text{int}(I)$).

De hecho:

$$f'(a^-) = \sup\{f_a(x) : x \in I, x < a\} \quad \text{y} \quad f'(a^+) = \inf\{f_a(x) : x \in I, x > a\}$$

Notación

Conjunto F, se define:

$$F := f_a(x) : x \in I, x < a$$

Lema 2.3.4 de Bartle and Sherbert (2000)

An upper bound u of a nonempty set S in $\mathbb{R}$ is the supremum of S if and only if for every $\epsilon > 0$ there exists an $s_\epsilon \in S$ such that $u - \epsilon < s_\epsilon$.

Teorema 1.7 de Tiel (1984)

Theorem. Let $f : I \to \mathbb{R}$ be convex. Then
(a) On int (I), f'_- is left-continuous and f'_+ is right-continuous.

Demostración.

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{z \downarrow x} \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \geqslant \lim_{z \downarrow x} f'_+(z)$$

whenever $x < z < y$. Passing to the limit as $y \downarrow x$, we obtain

$$f'_+(x) \geqslant \lim_{z \downarrow x} f'_+(z).$$

6 Since f'_+ is non-decreasing (Theorem 1.6) we have

$$f'_+(x) \leqslant \lim_{z \downarrow x} f'_+(z).$$

We conclude that $f'_+(x) = \lim_{z \downarrow x} f'_+(z)$, which proves the right-continuity of f'_+. The left-continuity of f'_- can be proved in a similar way.

Aclaración

El teorema 1.6 que se menciona hace referencia al mismo teorema que se intentará demostrar. Sin embargo, en el libro citado, la demostración es una versión distinta y no utiliza supremo ni ínfimo.

$\square$

Demostración. Por hipótesis, tenemos que $a \in I^{\circ}$. Además, sabemos por la **propiedad 1** (al principio del problema 2) que $f_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ es creciente en I. Ahora bien, sea $z \in I$, tal que $a < z$. Por lo que se tiene que:

$$f_a(x) \leq f_a(z), \qquad x, z \in I, \quad x < a < z.$$

Entonces, ahora tenemos 2 casos (derivada por la izquierda y por la derecha):

1. Derivada por la izquierda. Sea $f'(a^-) = \sup\{F\}$. Dado $\varepsilon > 0$, por definición de supremo de Lema 2.3.4 de Bartle and Sherbert (2000) que existe un $x_\varepsilon \in I$ con $x_\varepsilon < a$ tal que $\sup\{F\} - \varepsilon < f_a(x_\varepsilon)$. Considérese: $\delta := a - x_\varepsilon > 0$, para $a - \delta < x < a$ por lo que se tiene:
$$\sup\{F\} - \varepsilon < f_a(x_\varepsilon) \leq f_a(x) \leq \sup\{F\},$$
en donde
$$|f_a(x) - \sup\{F\}| < \varepsilon.$$
Por lo tanto, $\lim_{x \to a^-} f_a(x) = \sup\{F\}$.

2. Derivada por la derecha. Sea $f'(a^+) = \inf\{F\}$. Usando la definición de supremo de Lema 2.3.4 de Bartle and Sherbert (2000) para ínfimo, tenemos que existe un $x_\varepsilon \in I$ con $x_\varepsilon > a$ tal que $\inf\{F\} - \varepsilon > f_a(x_\varepsilon)$. Considérese: $\delta := a - x_\varepsilon > 0$, para $a - \delta > x > a$ por lo que se tiene:
$$\inf\{F\} - \varepsilon > f_a(x_\varepsilon) \geq f_a(x) \geq \inf\{F\},$$
en donde
$$|f_a(x) - \inf\{F\}| < \varepsilon.$$
Por lo tanto, $\lim_{x \to a^+} f_a(x) = \inf\{F\}$.

Finalmente, por el teorema 1.8 de Tiel (1984) las derivadas laterales de la función son continuas en I°.

□

2. Problema 2

Propiedad 1

Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Para cada $a \in I$. Considere $f_a : I - \{a\} \to \mathbb{R} \ni$:
$$f_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
Entonces, $f_a(x)$ es creciente en I.

Sea I un intervalo y f una función con primera derivada continua en I, los enunciados siguientes son equivalentes.

Nota

$(3) \implies (1) \iff (2). \therefore (3) \implies (2).$

1. f es convexa.

   Demostración. (1) $\implies$ (2). Por hipótesis sabemos que $f : I \to \mathbb{R}$ es convexa y es diferenciable. Por la **propiedad 1** (demostrada en clase), $\forall\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, se tiene que:
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \leq \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}.$$

Es decir
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}.$$
Ahora bien, como sabemos que f es diferenciable, consideremos la definición de derivada lateral $\ni$
$$\lim_{x_2\to x_1^+} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \lim_{x_3\to x_4^-} \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3} \implies f'(x_1) \leq f'(x_4).$$

$\therefore$ f' es creciente. □

2. f' es creciente.

Demostración. (2) $\implies$ (1). Por hipótesis sabemos que f' es creciente. Supóngase $\forall x_1, x_2, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Se tiene por el **teorema del valor medio** de Bartle and Sherbert (2000), $\exists\ u, v\ \ni u \in (x_1, x_2)$ y $v \in (x_2, x_3)$; entonces:
$$f'(u) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \qquad \text{y} \qquad f'(v) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$
Como sabíamos que f' es creciente, entonces:
$$f'(u) \leq f'(v) \implies \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

$\therefore$ f es convexa por la **propiedad 1** (demostrada en clase). □

3. $\forall\ a, x \in I$, se tiene $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$.

Demostración. (3) $\implies$ (1). A probar que f es una función convexa. Se propone tratar el problema con dos casos distintos para x. Sean $s, t \in I$ y $\lambda \in [0,1]$, además $a := \lambda y + (1-\lambda)x$, es decir:

a) Caso 1.
$$f(s) \geq f(a) + f'(a)(s-a), \qquad a := \lambda s + (1-\lambda)t.$$
Entonces:
$$\begin{aligned}
f(s) &\geq f(a) + f'(a)(s-a) \\
&\geq f(\lambda s + (1-\lambda)t) + f'(\lambda s + (1-\lambda)t)(s - (\lambda s + (1-\lambda)t)) \\
&\geq f(\lambda s + (1-\lambda)t) + f'(\lambda s + (1-\lambda)t)(s - (\lambda s + t - \lambda t)) \\
&\geq f(\lambda s + (1-\lambda)t) + f'(\lambda s + (1-\lambda)t)(s - \lambda s - t + \lambda t) \\
&\geq f(\lambda s + (1-\lambda)t) + f'(\lambda s + (1-\lambda)t)(s-t)(1-\lambda) \\
&\geq f(\lambda s + (1-\lambda)t) - f'(\lambda s + (1-\lambda)t)(t-s)(1-\lambda)
\end{aligned}$$
Ahora, multiplicando por λ.
$$\lambda f(s) \geq \lambda \left[f(\lambda s + (1-\lambda)t) - f'(\lambda s + (1-\lambda)t)(t-s)(1-\lambda) \right].$$

b) Caso 2.
$$f(t) \geq f(a) + f'(a)(t-a), \qquad a := \lambda s + (1-\lambda)t.$$
Entonces:
$$\begin{aligned} f(t) &\geq f(a) + f'(a)(t-a) \\ &\geq f(\lambda s + (1-\lambda)t) + f'(\lambda s + (1-\lambda)t)(t - (\lambda s + (1-\lambda)t)) \\ &\geq f(\lambda s + (1-\lambda)t) + f'(\lambda s + (1-\lambda)t)(t - \lambda s - t + \lambda t) \\ &\geq f(\lambda s + (1-\lambda)t) + f'(\lambda s + (1-\lambda)t)\lambda(t-s) \end{aligned}$$
Ahora, multiplicando por $(1-\lambda)$.
$$(1-\lambda)f(t) \geq (1-\lambda)\left[f(\lambda s + (1-\lambda)t) + f'(\lambda s + (1-\lambda)t)\lambda(t-s)\right].$$
Si sumamos las desigualdades de ambos casos, tenemos:
$$\lambda f(s) + (1-\lambda)f(t) \geq f(\lambda s + (1-\lambda)t).$$
Por lo tanto, f es convexa.

□

3. Problema 3

Teorema caracterización monótono (demostrado en clase)

Suponga que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a,b). Entonces,
(1) f es creciente ssi $f'(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in (a,b)$.
(2) f es decreciente ssi $f'(x) \leqslant 0, \quad \forall x \in (a,b)$

Teorema importante

Para resolver los siguientes problemas que se presentan, primero se demostrará *con un método alternativo* el siguiente teorema de Bartle and Sherbert (2000).

Teorema 6.4.6

Let I be an open interval and let $f : I \to \mathbb{R}$ have a second derivative on I. Then f is a convex function on I if and only if $f''(x) \geq 0$ for all $x \in I$.

Demostración. Es un teorema de caracterización, por lo cual:

1. $(\to)$ Trivial. Por el teorema resuelto en el **Problema 1**, sabemos que f' es creciente. Ahora bien, por el teorema de caracterización monótono (demostrado en clase) sabemos que $f''(x) \geq 0$.

2. $(\leftarrow)$ Se tomará en cuenta la idea de Tiel (1984). Sea $x, y \in I, x < y$ y $\lambda \in (0,1)$. Por **teorema del valor medio** de Bartle and Sherbert (2000), sabemos que existe

$$\xi_1, \xi_2, x < \xi_1 < \lambda x + (1-\lambda) y < \xi_2 < y$$

y

$$\xi_3, \xi_1 < \xi_3 < \xi_2$$

tal que

$$\begin{aligned} & f(\lambda x+(1-\lambda) y)-\lambda f(x)-(1-\lambda) f(y) \\ & \quad=\lambda[f(\lambda x+(1-\lambda) y)-f(x)]+(1-\lambda)[f(\lambda x+(1-\lambda) y)-f(y)] \\ & \quad=\lambda(1-\lambda)(y-x) f^{\prime}\left(\xi_1\right)+(1-\lambda) \lambda(x-y) f^{\prime}\left(\xi_2\right) \\ & \quad=\lambda(1-\lambda)(y-x)\left(\xi_1-\xi_2\right) f^{\prime \prime}\left(\xi_3\right) \leqslant 0 . \end{aligned}$$

Por lo tanto f es convexo.

□

Compruebe que la función:

1. $f(x) = e^x$ es convexa.

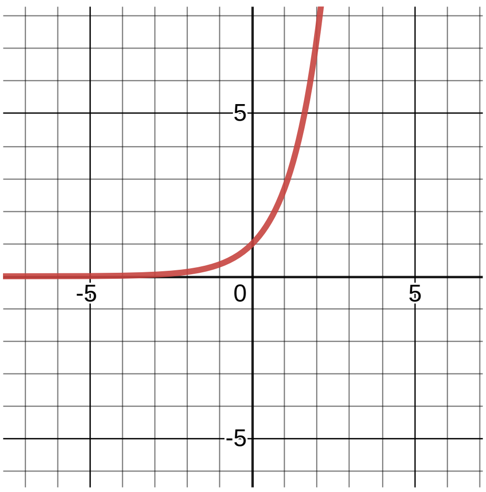


Figura 1: $f(x) = e^x$

Demostración. Por el **teorema importante**, entonces se tiene:

$$\implies f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x \implies f''(x) = e^x.$$

Entonces, $f''(x) \geq 0$. Por lo tanto, es una función convexa. □

2. $f(x) = \ln x$ es cóncava.

Demostración. Por la definición de cóncavo, se probará: $f(x) = -\ln x$ es convexa. Por el **teorema importante**:

$$\implies f(x) = -\ln x \implies f'(x) = -\frac{1}{x} \implies f''(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Entonces, $f''(x) \geq 0$. Por lo tanto, es una función convexa. Por la definición, entonces $f(x) = \ln x$ es cóncava. □

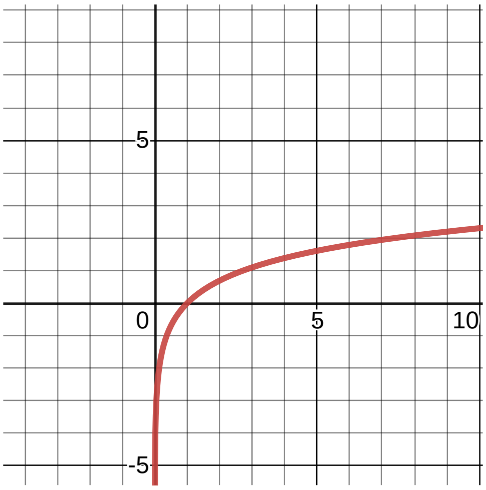
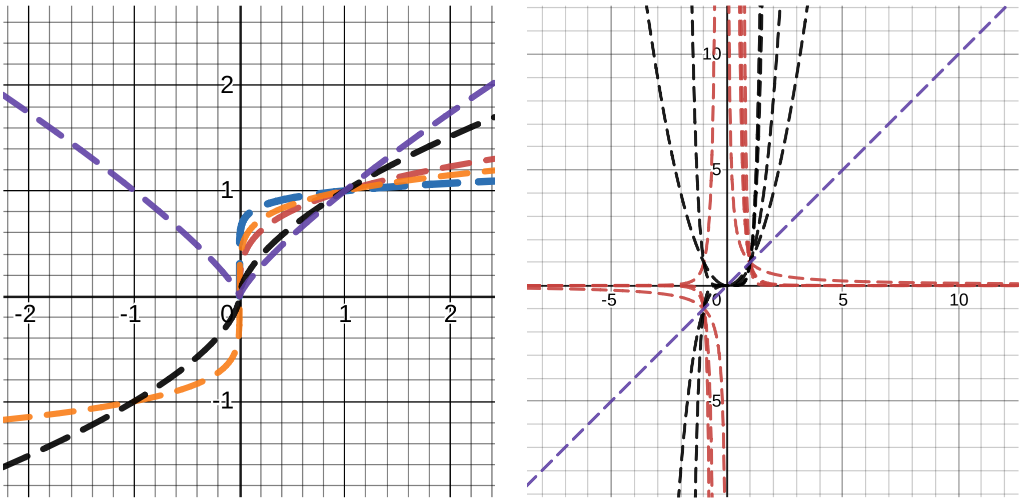


Figura 2: $f(x) = \ln x$

3. $f(x) = x^{\alpha}$, es $\begin{cases} \text{Convexa, si} & \alpha \leq 0 \text{ o } \alpha \geq 1 \\ \text{Cóncava, si} & 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$



(a) $\alpha \leq 0$ o $\alpha \geq 1$ (b) $0 \leq \alpha \leq 1$

Figura 3: $f(x) = x^{\alpha}$

Demostración. Comenzamos calculando la segunda derivada:

$$\implies f(x) = x^{\alpha} \implies f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \implies f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}. \tag{1}$$

Análogamente:

$$\implies f(x) = -x^{\alpha} \implies f'(x) = -\alpha x^{\alpha-1} \implies f''(x) = -\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}. \tag{2}$$

Nótese que tenemos dos casos:

a) $f(x) = x^{\alpha}$ es convexa, $\alpha \leq 0$ o $\alpha \geq 1$. Es decir, tenemos:

$$\alpha \in (-\infty, 0] \qquad \text{o} \qquad \alpha \in [1, \infty).$$

Considérese la segunda derivada obtenida en (1), por el **teorema importante** la condición se cumple trivialmente para $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$; ya que $f''(x) \geq 0$ en todos los casos. Por lo tanto es convexa.

b) $f(x) = x^\alpha$ es cóncava, $0 \leq \alpha \leq 1$. Es decir, tenemos:

$$a \in [0, 1].$$

Por la definición de cóncavo, se probará x^α es convexa. Considérese la segunda derivada de $f(x) = -x^\alpha$ obtenida en (3), por el **teorema importante** la condición se cumple trivialmente para $\alpha \in [0, 1]$; ya que $f''(x) \geq 0$ en todos los casos. Por lo tanto es convexa y por la definición de función cóncava, x^α es cóncava en $a \in [0, 1]$.

$\square$

Referencias

Bartle, R. G. and Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis.* Wiley New York.

Tiel, J. v. (1984). *Convex analysis.* Number BOOK. John Wiley.

6.3. HT6

Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2034 - Análisis de Variable Real 1 - Catedrático: Dorval Carías
6 de junio de 2021

HT 6

Las siguientes definiciones/teoremas (demostrados) fueron vistos en clase:

Homeomorfismo

Un homeomorfismo es una función bicontinua y biyectiva entre dos espacios topológicos. Es decir:

$$f : (x, \tau_x) \to (y, \tau_y).$$

$\implies$ f es homeomorfismo si y solo si:

1. f es continua.
2. f es biyectiva (i.e f tiene inversa).
3. La inversa de f es continua.

En este caso, x y y son espacios homeomorfos, es decir topológicamente indistinguibles.

Definición de continuidad

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in A$. Se dice que f es continua en x_0, si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. (i.e. Si $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \ni$ si $x \in A$, $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.)

Definición de continuidad uniforme

Una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua sobre A si, $\forall\ \varepsilon\ \exists\ \delta > 0 \ni x, x' \in A, |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Definición de Lipschitz

Si $f : I \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que f es Lipschitz, si $\exists\ A > 0 \ni$

$$|f(x) - f(x')| \leq A|x - x'|, \forall x, x' \in I.$$

Definición de punto fijo

x_0 es un punto fijo de una función f si y solo si $f(x_0) = x_0$.

Teorema del Valor Intermedio - Bolzano (Demostrado en clase)

Sea H un subconjunto de $\mathbb{R}$ y sea f una función continua y acotada sobre H con valores en $\mathbb{R}$. Si $k \in \mathbb{R} \ni$

$$\inf\{f(x) : x \in H\} < k < \sup\{f(x) : x \in H\}.$$

$\implies \exists\, c \in H \ni f(c) = k.$

1. Problema 1

Definición del valor intermedio

Si $f(a) < c < f(b)$, entonces $f(x) = c$ para algún x entre a y b.

Teorema 1 (Demostrado en clase)

La imagen de un compacto bajo un mapeo continuo es compacto.

Definición de punto límite de Rudin et al. (1976)

Si p es un punto límite de un conjunto E, entonces cada vecindad de p contiene infinitos puntos contables de E.

Caracterización secuencial de compacto (Demostrado en clase)

Un subconjunto K de $\mathbb{R}$ es compacto si y solo si cada sucesión en K tiene una subsucesión que converge a un punto en K.

Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua ssi f tiene la propiedad del valor intermedio y mapea conjuntos compactos en conjuntos compactos.

Demostración. Nótese que es una prueba de ida y de vuelta.

$\boxed{\rightarrow}$ A probar: f tiene la propiedad del valor intermedio y mapea conjuntos compactos en conjuntos compactos. Por hipótesis sabemos que f es continua, entonces por el teorema del valor intermedio de Bolzano f debe tener la propiedad del valor intermedio.

$$\implies \exists\, c \in \mathbb{R} \ni f(c) = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, por la caracterización secuencial de compactos, nos garantiza que el subconjunto que mapea la función es compacto en un intervalo $[a, b]$ si cada sucesión en el subconjunto tiene una subsucesión que converge a algún punto en el subconjunto (a mayor detalle en la prueba de regreso). Además, por el teorema 1, la compacidad de conjuntos compactos se preserva bajo un mapeo continuo.

$\boxed{\leftarrow}$ Por contradicción. Sea asume que f no es continua. Además, tenemos:

a) Una función mapea conjuntos compactos en conjuntos compactos. Además, nótese que por Heine-Borel, un conjunto compacto es cerrado y acotado. Entonces, tenemos una función f que mapea $[a, b] \to [a, b]$.

b) Considérese la caracterización secuencial del compacto. Entonces dígase que si $x_n \to x_0$. Pero ahora, nótese que nos dicen que f tiene la propiedad del valor intermedio tal que:

$$f(x_0) < c < f(x_n), \qquad c \in [a, b] \text{ y } \forall\ n.$$

Entonces, $f(z_n) = c$, en donde $z_n \in (x_0, x_n)$. Por lo que podemos asumir que, $z_n \to x_0$. Ahora, notamos que x_0 debe ser un **punto límite** del conjunto z, tal que $f(z) = c$; sin embargo, por el inciso **a** sabemos que $[a, b]$ es cerrado, pero z no pertenece al conjunto x_0. $(\to\leftarrow)$ Entonces f debe ser continua.

$\square$

2. Problema 2

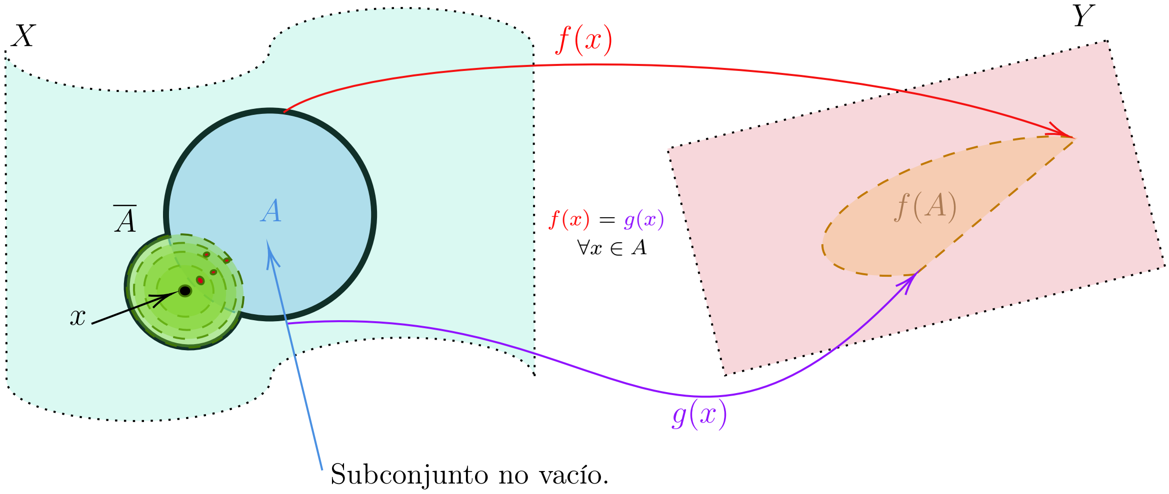
Teorema 3.2 de Rudin et al. (1976)

Let $\{p_n\}$ be a sequence in a metric space X.

1. $\{p_n\}$ converges to $p \in X$ if and only if every neighborhood of p contains all but finitely many of the terms of $\{p_n\}$
2. If $p \in X, p' \in X$, and if $\{p_n\}$ converges to p and to p', then $p' = p$.
3. If $\{p_n\}$ converges, then $\{p_n\}$ is bounded.
4. If $E \subset X$ and if p is a limit point of E, then there is a sequence $\{p_n\}$ in E such that $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.

Sean X y Y espacios métricos y sea A un subconjunto no vacío de X. Si f y g son mapeos continuos de X en Y, tales que $f(x) = g(x), \forall x \in A$, demuestre que $f(x) = g(x), \forall\ x \in \overline{A}$.

Demostración. A probar: $f(x) = g(x),\ \forall\ x \in \overline{A}$. Observamos que el problema consiste:



Sea x_n una sucesión en el espacio métrico X. Entonces el inciso 4 del teorema 3.2 de Rudin et al. (1976) nos garantiza que si $A \subset X$ y si x es un punto límite (de acumulación) de A, entonces hay una sucesión $\{x_n\}$ en A tal que:

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Ahora por hipótesis, si usamos el mapeo continuo de X en Y, tales que:

$$f(x_n) = g(x_n), \qquad \text{para cada } n.$$

Por lo tanto, $f(x_n) = g(x_n)$ están en el espacio métrico Y; lo que implicaría

$$f(x) = g(x), \qquad x \in \overline{A}.$$

□

3. Problema 3

Definición 4.28 (Funciones monótonas) de Rudin et al. (1976)

Let f be real on (a, b). Then f is said to be monotonically increasing on (a, b) if $a < x < y < b$ implies $f(x) \leq f(y)$. If the last inequality is reversed, we obtain the definition of a monotonically decreasing function. The class of monotonic functions consists of both the increasing and the decreasing functions.

Teorema 1 (Fue dejado como tarea demostrarlo)

Sea f continua e inyectiva en $I = [a, b]$. Entonces es estrictamente monótona en I.

Demostración. Vamos a tomar como referencia la deducción de Walker (2012). Entonces, por hipótesis tenemos que f es continua e inyectiva. Como es inyectiva, se sabe que $f(a) \neq f(b)$. Entonces, ahora tenemos dos casos:

1. $f(a) < f(b)$ entonces f es estrictamente creciente. Entonces tenemos que $f(a) < f(b)$. Entonces, consideremos el teorema del valor medio del Bolzano, tal que $f(a) < f(x) < f(b)$ para todo $a < x < b$. $\implies y \in [x, b] \ni f(y) = f(a)$. Pero entonces, eso implicaría que que no es inyectiva $(\rightarrow\leftarrow)$. De la misma forma, $f(x) \geq f(b)$ no sería posible. Digamos $x < y \in I$, tenemos que $f(x) \geq f(y)$, entonces por el teorema del valor medio de Bolzano existe un $z \in [a, x]$ tal que $f(z) = f(y)$. Por lo tanto, f no sería inyectiva $(\rightarrow\leftarrow)$.

2. $f(a) > f(b)$ entonces f es estrictamente decreciente. La prueba es la misma al inciso anterior, pero con los signos cambiados.

$\therefore$ $x < y \in I$ y entonces tenemos $f(x) < f(y)$. Además tenemos $f(x) > (y)$; que son estrictamente creciente y decreciente respectivamente. $\square$

Pruebe que si $f : [a, b] \to [a, b]$ es un homeomorfismo, entonces a y b son puntos fijos de f, o $f(a) = b$ y $f(b) = a$.

Demostración. Conocemos $f : [a, b] \to [a, b]$ es un homeomorfismo si y solo si: (1) Es biyectiva. (2) Función continua. (3) La inversa de la función es continua. Por el teorema 1, las condiciones se cumplen trivialmente:

1. Si f es creciente. Entonces:

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)] = [a, b].$$

   a y b son puntos fijos de f. Es decir, por la definición de punto fijo.

$$f(a) = a \qquad \text{y} \qquad f(b) = b.$$

2. Si f es decreciente. Entonces:

$$f([a, b]) = [f(b), f(a)] = [a, b].$$

   Tal que:

$$f(a) = b \qquad \text{y} \qquad f(b) = a.$$

$\square$

4. Problema 4

Sea $f : \mathbb{R} \to (-1, 1), f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

Notación

Nótese que la función se puede reescribir como:

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & ,-\infty < x < 0 \\ \frac{x}{1+x} & ,0 \leq x < \infty \end{cases}$$

1. Pruebe que f es un homeomorfismo.

Demostración. Considérese la definición de homeomorfismo.

a) **Comprobar f es continua**. Tómese como referencia la definición de continuidad. Tenemos 2 casos:

1) $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Sea $x_0 \in [0, \infty)$. Entonces, si $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta := \text{mín}\{0, 2\varepsilon\} > 0$, tal que:

$$|x - x_0| < \delta.$$

$$\begin{aligned}\implies |f(x) - f(x_0)| &= \left|\frac{x}{1+x} - \frac{x_0}{x_0}\right| = \left|\frac{x(1+x_0) - x_0(1+x)}{(1+x)(1+x_0)}\right| \\ &= \left|\frac{x + xx_0 - x_0 - x_0x}{(1+x)(1+x_0)}\right| = \left|\frac{x - x_0}{(1+x)(1+x_0)}\right| = \\ &= \frac{1}{|(1+x)(1+x')|} \cdot |x - x'| \leq \frac{1}{2} \cdot |x - x'|.\end{aligned}$$

Entonces, ahora tenemos

$$\frac{1}{2} \cdot |x - x_0| < \epsilon \implies |x - x_0| < 2\epsilon.$$

Por lo cual, seleccionamos $\delta := \text{mín}\{0, 2\varepsilon\}$.

2) $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Mismo argumento que el anterior con el signo e intervalo cambiado.

Por lo tanto, f es continua.

b) **Comprobar f es biyectiva**. Es decir, primero probaremos que es inyectiva y luego sobreyectiva.

1) Inyectiva. Tenemos dos casos:

a' $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Entonces, se proponen dos funciones:

$$f(x_1) = \frac{x_1}{1-x_1} \quad y \quad f(x_2) = \frac{x_2}{1-x_2}.$$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \implies x_1(1-x_2) = x_2(1-x_1) \implies \\ &\implies x_1 - x_1x_2 = x_2 - x_2x_1 \implies x_1 = x_2. \therefore \text{ Es inyectiva.}\end{aligned}$$

b' $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Mismo argumento que el inciso anterior, únicamente el signo cambiado.

$\therefore f$ es inyectiva.

2) Sobreyectiva. Tenemos dos casos:

a' $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Entonces, debemos despejar para x. Se propone:

$$y = \frac{x}{1-x}.$$

$$\implies y = \frac{x}{1-x} \implies y(1-x) = x \implies y - yx = x \implies$$
$$y = xy + x \implies y = x(y+1) \implies x = \frac{y}{y+1}. \therefore \text{ Es sobreyectiva.}$$

b' $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Mismo argumento que el inciso anterior, únicamente el signo cambiado.

$\therefore f$ es sobreyectiva.

$\therefore$ Una función inyectiva y sobreyectiva es biyectiva.

$c)$ **Comprobar f^{-1} es biyectiva**. Nuevamente, tenemos 2 casos:

1) $f(x) = \frac{x}{1-x}$. En donde $f(x)^{-1} = \frac{x}{x+1}$. Sea $x_0 \in (-\infty, 0)$. Entonces, $\forall \ \epsilon > 0 \ \exists \ \delta := \min\{2\varepsilon, 0\} > 0$, tal que:

$$|x - x_0| < \delta.$$

$$\implies |f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{x}{x+1} - \frac{x_0}{x_0+1}\right| = \left|\frac{x(x_0+1) - x_0(x+1)}{(x+1)(x_0+1)}\right| =$$
$$= \left|\frac{xx_0 + x - x_0x - x_0}{(x+1)(x_0+1)}\right| = \left|\frac{x - x_0}{(x+1)(x_0+1)}\right| = \frac{1}{|(x+1)(x_0+1)|} \cdot |x - x_0|$$

Entonces:
$$\frac{1}{|(x+1)(x_0+1)|} \cdot |x - x_0| \leq \frac{1}{2}|x - x_0| < \varepsilon.$$
$$\implies |x - x_0| < 2\varepsilon.$$

Por lo cual, seleccionamos arbitrariamente $\delta := \min\{2\varepsilon, 0\}$.

2) $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Mismo argumento del inciso anterior con los signos cambiados.

Por lo tanto, la inversa de f es continua.

$\therefore$ f es un homeomorfismo. □

2. Demuestre que f es Lipschitz.

Demostración. Tenemos dos casos:

$a)$ $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Debemos probar que $\exists \ A > 0$:

$$|f(x) - f(x')| \leq A|x - x'|, \forall \ x, x' \in I.$$

$$\implies \left|\frac{x}{1+x} - \frac{x'}{1+x'}\right| = \left|\frac{x(1+x') - x'(1+x)}{(1+x)(1+x')}\right| = \left|\frac{x + xx' - x' - x'x}{(1+x)(1+x')}\right| =$$
$$= \left|\frac{x - x'}{(1+x)(1+x')}\right| = \frac{1}{|(1+x)(1+x')|} \cdot |x - x'| \leq \frac{1}{2} \cdot |x - x'|.$$

b) $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Mismo argumento que el anterior con el signo cambiado.

$\therefore$ $f(x)$ es Lipschitz. □

Teorema 1 de Lipschitz (demostrado en clase)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ es Lipschitz de orden α. $\implies$ f es continuamente uniforme.

3. Deduzca que f es uniformemente continua.

   Demostración. Por el teorema 1 de Lipschitz (demostrado en clase), para el caso particular en donde $\alpha = 1$, entonces podemos concluir que f es uniformemente continua. □

5. Problema 5

Mapeo expansivo

Sea X un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Un mapeo $f : X \to X$ es expansivo si

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|, \quad \forall\ x, y \in X.$$

Demuestre que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y expansiva, entonces es un homeomorfismo con inversa Lipschitz.

Literatura

Para la realización de esta prueba, se consultaron las siguientes fuentes:

1. Georgiev and Zennir (2020). El teorema 1.9.6 se ofrece una de las generalizaciones y trata un caso específico de un teorema similar.
2. Carothers (2000). Este libro profundiza en las definiciones de homeomorfismos desde su punto analítico y topológico.
3. Brouwer (1911). Teorema de la invarianza del dominio (deducción avanzada con temas de topología).

Demostración. A probar: f es un homeomorfismo ([1] biyectiva, [2] continua, [3] inversa continua) que su inversa es Lipschitz. Por hipótesis tenemos un subconjunto $\mathbb{R}$ y un mapeo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuo tal que:

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|, \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}.$$

$\implies$ Nótese que la inyectividad se cumple trivialmente y además por hipótesis sabemos que es continua. Hace falta comprobar que posee la sobreyectividad para ser biyectiva; y finalmente, comprobar que su inversa también es continua. Estos dos factores se demuestran por el teorema de la invarianza del dominio de Brouwer (**literatura - inciso 3**). Por lo tanto, tenemos que f es un homeomorfismo. $\implies$ f tiene inversa. Por lo tanto, podemos asumir, tomando como referencia el caso general de **literatura - inciso 1**:

$$|x - y| \geq |f^{-1}(x) - f^{-1}(y)|.$$

Que claramente es Lipschitz con $\alpha = 1, A = 1$. □

Referencias

Brouwer, L. E. (1911). Beweis der invarianz des n-dimensionalen gebiets. *Mathematische Annalen*, 71(3):305–313.

Carothers, N. L. (2000). *Real analysis*. Cambridge University Press.

Georgiev, S. G. and Zennir, K. (2020). *Multiple Fixed-point Theorems and Applications in the Theory of ODEs, FDEs and PDEs*. CRC Press.

Rudin, W. et al. (1976). *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-hill New York.

Walker, P. (2012). *Examples and theorems in analysis*. Springer Science & Business Media.

6.4. Parcial 4

Universidad del Valle de Guatemala
Análisis de Variable Real 1 **31 de mayo de 2021**

Examen Parcial 4

1. Estudie la diferenciación de las funciones siguientes en $x = 0$.

   1.1. $f(x) = \sqrt{|x|}$

   1.2. $g(x) = x|x|$

2. Suponga que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones continuas sobre $[a, b]$ y diferenciables sobre (a, b). Además, suponga que $f_1(a) = f_2(a)$ y $f_1(b) = f_2(b)$. Pruebe que existe $x_0 \in (a, b)$, tal que $f_1'(x_0) = f_2'(x_0)$.

3. Se sabe que $f(x)$ es una función continua en $[-7,0]$, diferenciable en $(-7,0)$, $f(-7) = -3$, y que $f'(x) \leq 2, \forall x$. ¿Cuál es el mayor valor posible que puede tomar $f(0)$?

4. Sea $f(x)$ una función continua sobre $[a, b], a > 0$, y diferenciable sobre (a, b). Pruebe que existe $c \in (a, b)$, tal que:
$$\frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = f(c) - cf'(c)$$
   Ayuda: Utilice el Teorema del Valor Medio de Cauchy.

5. Sea $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $c, d \in (a, b), c < d$, entonces para cada α entre $f'(c)$ y $f'(d)$, existe $\mu \epsilon (c, d)$, tal que $f'(\mu) = \alpha$.

Cada problema vale 20 puntos

6.5. Parcial 5

Universidad del Valle de Guatemala
Análisis de Variable Real 1 **4 de junio de 2021**

Examen Parcial 5

1. Números irracionales:
   1.1. Pruebe que $\sqrt{2}$ es un número irracional.
   1.2. Demuestre que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es un número irracional.
   1.3. Pruebe que entre cualesquiera dos números reales hay un número irracional.

2. Sucesiones:
   2.1. Dado que la sucesión (w_n) de números reales satisface:
   $$|w_{n+1}-w_n| \leq \lambda |w_n - w_{n-1}|,\ n = 2,3,\ldots,$$
   para algún $0<\lambda<1$, demuestre que (w_n) converge.
   2.2. Utilice el resultado anterior para probar que la sucesión (v_n), dada por
   $$v_1 = 1, \qquad v_{n+1} = \frac{1}{3+v_n}\ , n = 1,2,\ldots$$
   es convergente. Encuentre el límite.

3. Sean $I=[0,1]$ y $g: I \to I$ un mapeo continuo, tal que $g \circ g = g$. Sea G el conjunto de todos los puntos fijos de g en I.
   3.1. Pruebe que G no es vacío.
   3.2. Demuestre que G es un intervalo.

4. Sea $h: [a,b] \to \mathbb{R}$ un mapeo continuo y con segunda derivada en (a,b), y que además satisface $h''(x) = kh(x)$, para alguna constante positiva k. Pruebe que:
   $$|h(x)| \leq \max_{x\in[a,b]}\{|h(a)|, |h(b)|\}$$

Cada problema vale 25 puntos
Cierre de CANVAS: 11h00