Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada
Fecha de entrega: 13 de febrero de 2021
Rudik R. Rompich - Carné: 19857

Análisis de Variable Real 1 - Dorval Carías

Parcial 1

1. (10p) Se dice que $E \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si cuando $x, y \in E \Rightarrow (1-\lambda)x + \lambda y \in E$, para cada $0 \leq \lambda \leq 1$. Pruebe que las bolas en $\mathbb{R}^n$ son conjuntos convexos.

Demostración. Por definición de una bola abierta/cerrada en $\mathbb{R}^n$ se tiene que su centro x y su radio r tal que se cumpla:

$$|y - r| < r$$

Entonces, tenemos que $x, y \in E$, asumamos que $y = (z - x)$ y $x = (y - x)$, entonces hacemos la substitución:

$$|(1-\lambda)x + \lambda y| = |(1-\lambda)(y-x) + \lambda(z-x)| \tag{1}$$

Por la desigualdad triangular:

$$\leq (1-\lambda)|(y-x)| + \lambda|(z-x)| \tag{2}$$

$$= (1-\lambda)r + \lambda r \tag{3}$$

$$= r \tag{4}$$

$\therefore$ las bolas en $\mathbb{R}^n$ son conjuntos convexos. □

2. (15 p) Sean $x, y, a, b \in \mathbb{R}^+ y$ suponga que $\frac{x}{y} < \frac{a}{b}$. Demuestre que $\frac{x}{y} < \frac{x+a}{y+b} < \frac{a}{b}$.

Demostración.

Caso I

$$= \frac{x}{y} < \frac{x+a}{y+b} \implies x(y+b) < (x+a)y \Rightarrow \tag{1}$$

$$\Rightarrow xy + xb < xy + ay \Rightarrow xb < ay \Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{a}{b} \tag{2}$$

Caso 2

$$\frac{x+a}{x+b} < \frac{a}{b} \Rightarrow (x+a)b < a(x+b) \tag{3}$$
$$\Rightarrow xb + ab < ay + ab => \quad xb < ay \implies \tag{4}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{a}{b} \tag{5}$$
$$\therefore \frac{x}{y} < \frac{x+a}{x+b} < \frac{a}{b} \tag{6}$$

□

3. (15 p) Sea E un subconjunto no vacío del conjunto de números reales que está acotado superiormente. Si $y = \sup(E)$, pruebe que $y \in \bar{E}$

Demostración. Si $y = sup(E)$, a probar: $y \in \overline{E}$ ($\overline{E} = E$ cerrado). Consideremos por el absurdo $y \notin \overline{E}$. Sabemos que $\forall \xi > 0 \exists x \in E \ni y - \xi < x < y$, eso implicaría que $y - \xi$ es una cota superior ($\rightarrow\leftarrow$). Entonces, y es un punto de acumulación de E. $\therefore y \in \overline{E}$ □

4. (20 p) Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, acotados y no vacíos. Demuestre que:

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$$

Demostración. Supóngase las siguientes variables: $p = \sup A, q = \sup B, r = \sup(A+B)$. Ahora, asumamos que existe un $a \in A$ y un $b \in B$. Entonces, sabemos por la definición de supremo que $a \leq p$ y que $b \leq q$, entonces aplicando una sumatoria a ambas variables: $a + b \leq p + q$, tal que $r \leq p + q$ se cumple.

Por otra parte, sabemos que $b \in B$ lo que quiere decir que $a \leq r - b \quad \forall a \in A$; que afirma que $r - b$ es una cota superior para A tal que $p \leq r - b$. Entonces, $y \leq r - p$ $\forall b \in B$, entonces $q \leq r - p$ y por lo tanto $p + q \leq q$. Al combinar estas dos desigualdades, finalmente tenemos que $w = p + q$, es decir:

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

□

5. (20p) Sean A y B subconjuntos de un espacio métrico X.

1. 5.1. Pruebe que $(\text{int}(A))^c = \overline{(A^c)}$

   Demostración.

   Se procede por medio de la doble contención:

   De ida $\subseteq$

   $$x \in (int(A))^c \implies x \notin int(A) \implies x \in \overline{(A^c)} \implies (\text{int}(A))^c \subseteq \overline{(A^c)} \tag{1}$$

   De regreso $\supseteq$

   $$x \in \overline{(A^c)} \implies x \notin int(A) \implies x \in (int(A))^c \tag{2}$$

□

2. 5.2. ¿Es cierto que $\text{int}(A \cap B) = \bar{A} \cap \bar{B}$?

Demostración. Supóngase un contraejemplo en donde $A = [0, 5]$ y $B = [4, 5]$, tal que:

$$A = [0,5] \qquad B = [4,5] \tag{1}$$
$$\overline{A} = [0,5] \qquad \overline{B} = [4,5] \tag{2}$$

Es decir:

$$A \cap B = [4,5] \qquad \overline{A} \cap \overline{B} = [4,5] \tag{3}$$
$$\text{int}(A \cap B) = (4,5) \tag{4}$$

Esto implica que:

$$\text{int}(A \cap B) \neq \overline{A} \cap \overline{B} \tag{5}$$

Lo que implica que no es cierta la igualdad. □

6. (20p) Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $D(x, y) = \text{mín}(1, d(x, y))$.

1. 6.1. Pruebe que D es una métrica sobre X.

Demostración. Por definición de espacio métrico tenemos, asumiendo $d(x, y) = D(x, y)$:

a) $d(x, y) \geq 0$ o $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$. Entonces, tenemos 2 casos para $min(1, d(x, y))$:
   1) (i) donde $min(1, d(x, y)) \geq 0$, se cumple.
   2) (ii) $min(1, d(x, y)) = 0$, se cumple.

   Por lo que se cumple la propiedad.

b) $d(x, y) = d(y, x)$. Por lo que se tiene que $min(1, d(x, y)) = min(1, d(y, x))$, cumpliendo la propiedad.

c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

   Entonces, tenemos:

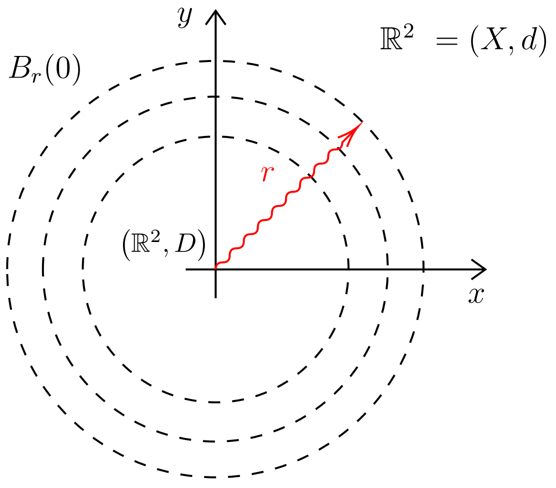
$$\begin{aligned} min(1, d(x,y)) &\leq min(1, d(x,z)) + min(1, d(z,y)) && (1)\\ &= min(2, 1 + d(x,z), 1 + d(z,y), d(x,z) + d(z,y)) && (2)\\ &= min(1, d(x,y)) && (3) \end{aligned}$$

   Cumpliendo la propiedad.

$\therefore$ D es una métrica sobre X. □

2. Si (X, d) es $\mathbb{R}^2$ con su métrica usual, describa las bolas abiertas $B_r(0)$ en $(\mathbb{R}^2, D)$.

Demostración. Considerando $\mathbb{R}^2 = (X, d)$ con su métrica usual y por otra parte las bolas abiertas $B_r(0)$ en $(\mathbb{R}^2, D)$:



$\square$

Las bolas se podrían describir como $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : D(X, 0) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : min(1, d(x, 0) < r\}$.