Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2034 - Análisis de Variable Real 1 - Catedrático: Dorval Carías
31 de mayo de 2021

HT 5

Las siguientes definiciones/teoremas (demostrados) fueron vistos en clase:

Definición de funciones convexas

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ se dice que f es convexa sobre I, si $\forall\ s, t \in I$ y $\lambda \in [0, 1]$, se tiene que:

$$f(\lambda s + (1-\lambda)t) \leq \lambda f(s) + (1-\lambda) f(t).$$

1. f es función cóncava sobre I si $-f$ es convexa sobre I.

Teorema (Desigualdad de Jensen)

Sea f una función convexa y $w_1, w_2, \cdots, w_n$, tal que:

1. $w_j \geq 0$.
2. $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$.

Entonces para $x_1, x_2, \cdots, x_n$, se cumple:

$$f\left(w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n\right) \leq w_1 f(x_1) + \cdots + w_n f(x_n).$$

Que es igual a

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} w_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j).$$

Lema (De las tres cuerdas)

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, entonces f es convexa si y solo si $\forall\ x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, se tiene que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

1. Problema 1

Si I es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es convexa, entonces f tiene derivadas laterales y por lo tanto es continua en todo punto $a \in I^\circ$ ($\text{int}(I)$).

De hecho:

$$f'(a^-) = \sup\{f_a(x) : x \in I, x < a\} \quad \text{y} \quad f'(a^+) = \text{ínf}\,\{f_a(x) : x \in I, x > a\}$$

Notación

Conjunto F, se define:

$$F := f_a(x) : x \in I, x < a$$

Lema 2.3.4 de Bartle and Sherbert (2000)

An upper bound u of a nonempty set S in $\mathbb{R}$ is the supremum of S if and only if for every $\epsilon > 0$ there exists an $s_\epsilon \in S$ such that $u - \epsilon < s_\epsilon$.

Teorema 1.7 de Tiel (1984)

Theorem. Let $f : I \to \mathbb{R}$ be convex. Then
(a) On int (I), f'_- is left-continuous and f'_+ is right-continuous.

Demostración.

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{z \downarrow x} \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \geqslant \lim_{z \downarrow x} f'_+(z)$$

whenever $x < z < y$. Passing to the limit as $y \downarrow x$, we obtain

$$f'_+(x) \geqslant \lim_{z \downarrow x} f'_+(z).$$

6 Since f'_+ is non-decreasing (Theorem 1.6) we have

$$f'_+(x) \leqslant \lim_{z \downarrow x} f'_+(z).$$

We conclude that $f'_+(x) = \lim_{z \downarrow x} f'_+(z)$, which proves the right-continuity of f'_+. The left-continuity of f'_- can be proved in a similar way.

Aclaración

El teorema 1.6 que se menciona hace referencia al mismo teorema que se intentará demostrar. Sin embargo, en el libro citado, la demostración es una versión distinta y no utiliza supremo ni ínfimo.

□

Demostración. Por hipótesis, tenemos que $a \in I^\circ$. Además, sabemos por la **propiedad 1** (al principio del problema 2) que $f_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ es creciente en I. Ahora bien, sea $z \in I$, tal que $a < z$. Por lo que se tiene que:

$$f_a(x) \leq f_a(z), \qquad x, z \in I, \quad x < a < z.$$

Entonces, ahora tenemos 2 casos (derivada por la izquierda y por la derecha):

1. Derivada por la izquierda. Sea $f'(a^-) = \sup\{F\}$. Dado $\varepsilon > 0$, por definición de supremo de Lema 2.3.4 de Bartle and Sherbert (2000) que existe un $x_\varepsilon \in I$ con $x_\varepsilon < a$ tal que $\sup\{F\} - \varepsilon < f_a(x_\varepsilon)$. Considérese: $\delta := a - x_\varepsilon > 0$, para $a - \delta < x < a$ por lo que se tiene:
$$\sup\{F\} - \varepsilon < f_a(x_\varepsilon) \le f_a(x) \le \sup\{F\},$$
en donde
$$|f_a(x) - \sup\{F\}| < \varepsilon.$$
Por lo tanto, $\lim_{x\to a^-} f_a(x) = \sup\{F\}$.

2. Derivada por la derecha. Sea $f'(a^+) = \inf\{F\}$. Usando la definición de supremo de Lema 2.3.4 de Bartle and Sherbert (2000) para ínfimo, tenemos que existe un $x_\varepsilon \in I$ con $x_\varepsilon > a$ tal que $\inf\{F\} - \varepsilon > f_a(x_\varepsilon)$. Considérese: $\delta := a - x_\varepsilon > 0$, para $a - \delta > x > a$ por lo que se tiene:
$$\inf\{F\} - \varepsilon > f_a(x_\varepsilon) \ge f_a(x) \ge \inf\{F\},$$
en donde
$$|f_a(x) - \inf\{F\}| < \varepsilon.$$
Por lo tanto, $\lim_{x\to a^+} f_a(x) = \inf\{F\}$.

Finalmente, por el teorema 1.8 de Tiel (1984) las derivadas laterales de la función son continuas en I°.

□

2. Problema 2

Propiedad 1

Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Para cada $a \in I$. Considere $f_a : I - \{a\} \to \mathbb{R} \ni$:
$$f_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
Entonces, $f_a(x)$ es creciente en I.

Sea I un intervalo y f una función con primera derivada continua en I, los enunciados siguientes son equivalentes.

Nota

(3) $\implies$ (1) $\iff$ (2). $\therefore$ (3) $\implies$ (2).

1. f es convexa.

   Demostración. (1) $\implies$ (2). Por hipótesis sabemos que $f : I \to \mathbb{R}$ es convexa y es diferenciable. Por la **propiedad 1** (demostrada en clase), $\forall\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, se tiene que:
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \le \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}.$$

Es decir
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}.$$
Ahora bien, como sabemos que f es diferenciable, consideremos la definición de derivada lateral $\ni$
$$\lim_{x_2\to x_1^+} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \lim_{x_3\to x_4^-} \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3} \implies f'(x_1) \leq f'(x_4).$$
$\therefore$ f' es creciente. $\square$

2. f' es creciente.

Demostración. (2) $\implies$ (1). Por hipótesis sabemos que f' es creciente. Supóngase $\forall x_1, x_2, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Se tiene por el **teorema del valor medio** de Bartle and Sherbert (2000), $\exists\ u, v \ \ni u \in (x_1, x_2)$ y $v \in (x_2, x_3)$; entonces:
$$f'(u) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \qquad \text{y} \qquad f'(v) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$
Como sabíamos que f' es creciente, entonces:
$$f'(u) \leq f'(v) \implies \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$
$\therefore$ f es convexa por la **propiedad 1** (demostrada en clase). $\square$

3. $\forall\ a, x \in I$, se tiene $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$.

Demostración. (3) $\implies$ (1). A probar que f es una función convexa. Se propone tratar el problema con dos casos distintos para x. Sean $s, t \in I$ y $\lambda \in [0,1]$, además $a := \lambda y + (1-\lambda)x$, es decir:

a) Caso 1.
$$f(s) \geq f(a) + f'(a)(s-a), \qquad a := \lambda s + (1-\lambda)t.$$
Entonces:
$$\begin{aligned} f(s) &\geq f(a) + f'(a)(s-a) \\ &\geq f(\lambda s + (1-\lambda)t) + f'(\lambda s + (1-\lambda)t)(s - (\lambda s + (1-\lambda)t)) \\ &\geq f(\lambda s + (1-\lambda)t) + f'(\lambda s + (1-\lambda)t)(s - (\lambda s + t - \lambda t)) \\ &\geq f(\lambda s + (1-\lambda)t) + f'(\lambda s + (1-\lambda)t)(s - \lambda s - t + \lambda t) \\ &\geq f(\lambda s + (1-\lambda)t) + f'(\lambda s + (1-\lambda)t)(s-t)(1-\lambda) \\ &\geq f(\lambda s + (1-\lambda)t) - f'(\lambda s + (1-\lambda)t)(t-s)(1-\lambda) \end{aligned}$$
Ahora, multiplicando por λ.
$$\lambda f(s) \geq \lambda \left[f(\lambda s + (1-\lambda)t) - f'(\lambda s + (1-\lambda)t)(t-s)(1-\lambda) \right].$$

b) Caso 2.
$$f(t) \geq f(a) + f'(a)(t-a), \qquad a := \lambda s + (1-\lambda)t.$$
Entonces:
$$\begin{aligned} f(t) &\geq f(a) + f'(a)(t-a) \\ &\geq f(\lambda s + (1-\lambda)t) + f'(\lambda s + (1-\lambda)t)(t - (\lambda s + (1-\lambda)t)) \\ &\geq f(\lambda s + (1-\lambda)t) + f'(\lambda s + (1-\lambda)t)(t - \lambda s - t + \lambda t) \\ &\geq f(\lambda s + (1-\lambda)t) + f'(\lambda s + (1-\lambda)t)\lambda(t-s) \end{aligned}$$
Ahora, multiplicando por $(1-\lambda)$.
$$(1-\lambda)f(t) \geq (1-\lambda)\left[f(\lambda s + (1-\lambda)t) + f'(\lambda s + (1-\lambda)t)\lambda(t-s)\right].$$
Si sumamos las desigualdades de ambos casos, tenemos:
$$\lambda f(s) + (1-\lambda)f(t) \geq f(\lambda s + (1-\lambda)t).$$
Por lo tanto, f es convexa.

□

3. Problema 3

Teorema caracterización monótono (demostrado en clase)

Suponga que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a,b). Entonces,
(1) f es creciente ssi $f'(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in (a,b)$.
(2) f es decreciente ssi $f'(x) \leqslant 0, \quad \forall x \in (a,b)$

Teorema importante

Para resolver los siguientes problemas que se presentan, primero se demostrará *con un método alternativo* el siguiente teorema de Bartle and Sherbert (2000).

Teorema 6.4.6

Let I be an open interval and let $f : I \to \mathbb{R}$ have a second derivative on I. Then f is a convex function on I if and only if $f''(x) \geq 0$ for all $x \in I$.

Demostración. Es un teorema de caracterización, por lo cual:

1. $(\to)$ Trivial. Por el teorema resuelto en el **Problema 1**, sabemos que f' es creciente. Ahora bien, por el teorema de caracterización monótono (demostrado en clase) sabemos que $f''(x) \geq 0$.

2. $(\leftarrow)$ Se tomará en cuenta la idea de Tiel (1984). Sea $x, y \in I, x < y$ y $\lambda \in (0,1)$. Por **teorema del valor medio** de Bartle and Sherbert (2000), sabemos que existe

$$\xi_1, \xi_2, x < \xi_1 < \lambda x + (1-\lambda) y < \xi_2 < y$$

y

$$\xi_3, \xi_1 < \xi_3 < \xi_2$$

tal que

$$\begin{aligned} & f(\lambda x+(1-\lambda) y)-\lambda f(x)-(1-\lambda) f(y) \\ & \quad=\lambda[f(\lambda x+(1-\lambda) y)-f(x)]+(1-\lambda)[f(\lambda x+(1-\lambda) y)-f(y)] \\ & \quad=\lambda(1-\lambda)(y-x) f^{\prime}\left(\xi_1\right)+(1-\lambda) \lambda(x-y) f^{\prime}\left(\xi_2\right) \\ & \quad=\lambda(1-\lambda)(y-x)\left(\xi_1-\xi_2\right) f^{\prime \prime}\left(\xi_3\right) \leqslant 0 .\end{aligned}$$

Por lo tanto f es convexo.

□

Compruebe que la función:

1. $f(x) = e^x$ es convexa.

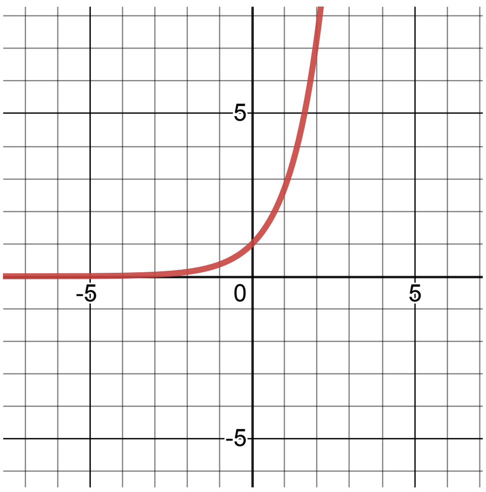


Figura 1: $f(x) = e^x$

Demostración. Por el **teorema importante**, entonces se tiene:

$$\implies f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x \implies f''(x) = e^x.$$

Entonces, $f''(x) \geq 0$. Por lo tanto, es una función convexa. □

2. $f(x) = \ln x$ es cóncava.

Demostración. Por la definición de cóncavo, se probará: $f(x) = -\ln x$ es convexa. Por el **teorema importante**:

$$\implies f(x) = -\ln x \implies f'(x) = -\frac{1}{x} \implies f''(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Entonces, $f''(x) \geq 0$. Por lo tanto, es una función convexa. Por la definición, entonces $f(x) = \ln x$ es cóncava. □

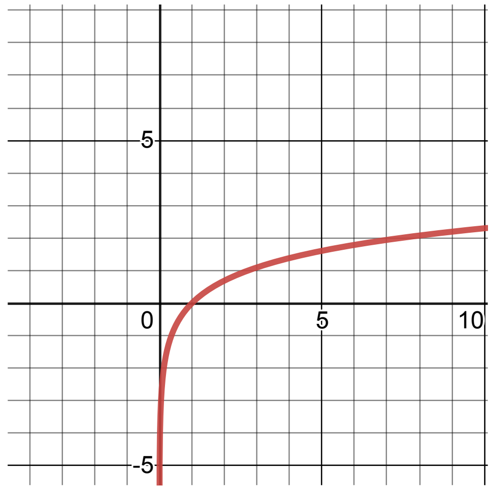
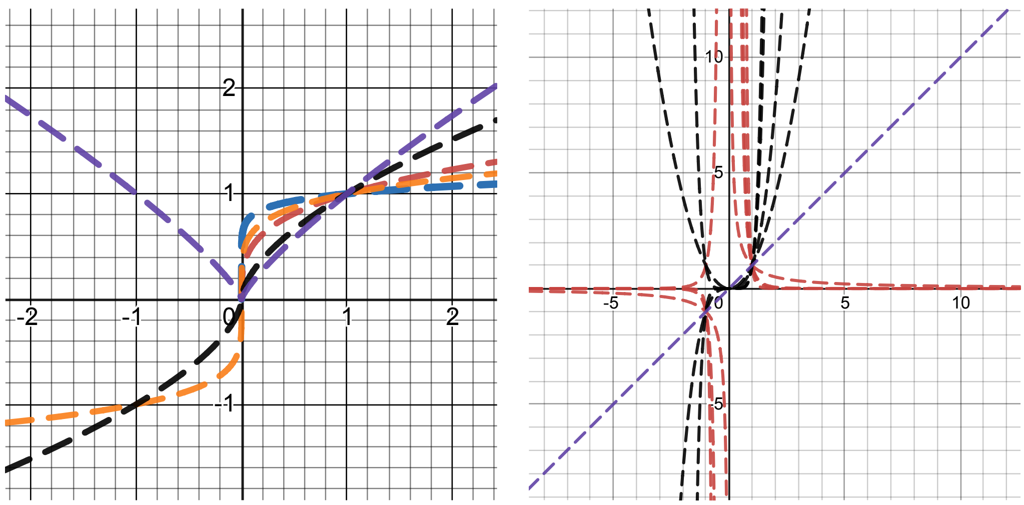


Figura 2: $f(x) = \ln x$

3. $f(x) = x^\alpha$, es $\begin{cases} \text{Convexa, si} & \alpha \leq 0 \text{ o } \alpha \geq 1 \\ \text{Cóncava, si} & 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$



(a) $\alpha \leq 0$ o $\alpha \geq 1$ (b) $0 \leq \alpha \leq 1$

Figura 3: $f(x) = x^\alpha$

Demostración. Comenzamos calculando la segunda derivada:

$$\implies f(x) = x^\alpha \implies f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \implies f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}. \tag{1}$$

Análogamente:

$$\implies f(x) = -x^\alpha \implies f'(x) = -\alpha x^{\alpha-1} \implies f''(x) = -\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}. \tag{2}$$

Nótese que tenemos dos casos:

a) $f(x) = x^\alpha$ es convexa, $\alpha \leq 0$ o $\alpha \geq 1$. Es decir, tenemos:

$$\alpha \in (-\infty, 0] \qquad \text{o} \qquad \alpha \in [1, \infty).$$

Considérese la segunda derivada obtenida en (1), por el **teorema importante** la condición se cumple trivialmente para $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$; ya que $f''(x) \geq 0$ en todos los casos. Por lo tanto es convexa.

b) $f(x) = x^\alpha$ es cóncava, $0 \leq \alpha \leq 1$. Es decir, tenemos:

$$a \in [0, 1].$$

Por la definición de cóncavo, se probará x^α es convexa. Considérese la segunda derivada de $f(x) = -x^\alpha$ obtenida en (3), por el **teorema importante** la condición se cumple trivialmente para $\alpha \in [0, 1]$; ya que $f''(x) \geq 0$ en todos los casos. Por lo tanto es convexa y por la definición de función cóncava, x^α es cóncava en $a \in [0, 1]$.

$\square$

Referencias

Bartle, R. G. and Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis.* Wiley New York.

Tiel, J. v. (1984). *Convex analysis.* Number BOOK. John Wiley.