Universidad del Valle de Guatemala

MM2034 - 1 semestre - 2021

Licenciatura en matemática aplicada

ANÁLISIS DE VARIABLE REAL 1

Catedrático: Dorval Carías

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay

Carné: 19857

Correo: rom19857@uvg.edu.gt

1 de julio de 2021

Índice

1. Sucesiones

Definición 1. *Una sucesión es cualquier función cuyo dominio es un conjunto infinito contable, i.e.* $\mathbb{Z}^+, \mathbb{N}, \mathbb{Q}$.

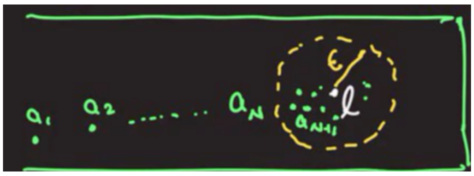
Ejemplo 1. $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R} \ni f(n) = \operatorname{sen} n$ *es una sucesión.*

Definición 2. *Se dice que la sucesión* (a_n) *converge al número* l*, denotado* $a_n \to l$*, si* $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ *si* $n \geq N \implies |a_n - l| < \varepsilon$.

NOTA. *Si existe* l*, entonces es el límite de* (a_n)*. Notación:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l.$$

Ejemplo 2. *Compruebe que* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.



Solución. Dado $\varepsilon > 0 \exists N = \underline{1/\varepsilon} \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \implies n > \frac{1}{\varepsilon}$. □

Teorema 1. *El límite de una sucesión, si existe, es único.*

Demostración. Suponemos que $a_n \to l$ y $a_n \to l'$.

1. Como $a_n \to l \implies$ Dado $\varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N_1 \implies |a_n - l| < \varepsilon/2$.

2. Como $a_n \to l' \exists N_2 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N_2$, entonces $|a_n - l|' < \varepsilon/2$.

3. Sea $N = \max\{N_1, N_2\} \implies$ para $n \geq N$, se cumple:

$$|l - l'| = |l - a_n + a_n - l'| = |(l - a_n) + (a_n - l')| \leq \underbrace{|l - a_n|}_{|a_n - l|} + |a_n - l'| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

i.e. $|l - l'| < \varepsilon$. Por la arbitrariedad de $\varepsilon \implies l = l'$.

$$\boxed{|l - l'| \leq \inf\{\in : \in > 0\}}$$

■

Teorema 2. *Una sucesión convergente es acotada.*

Demostración. Como $a_n \to l \implies$ Dado $\underline{\varepsilon = 1}\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \implies |a_n - l| < 1$. Entonces, $|a_n| - |l| \leq ||a_n| - |l|| \leq |a_n - l| < 1 \implies |a_n| - |l| < 1 \implies |a_n| < |l| + 1, \forall n \geq N. \implies$ Hagamos $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{n-1}|, \underbrace{|l| + 1}_{|a_n|, \forall n \geq N}\}$.
$\implies |a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{Z}^+. \implies (a_n)$ es acotada. ■

Teorema 3. *Si $a_n \to l \implies |a_n| \to |l|$.*

Demostración. Si $a_n \to l \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \in Z^+ \ni$ si $n \geq N \implies |a_n - l| < \varepsilon$. Por desigualdad triangular:

$$||a_n| - |l|| < |a_n - l| < \varepsilon \implies ||a_n| - |l|| < \varepsilon \implies |a_n| \to |l|.$$

■

Teorema 4. *Sean (a_n) y (b_n) sucesiones convergentes tal que $a_n \to l$ y $b_n \to l'$. Entonces:*

1. $(a_n + b_n) \to l + l'$.
2. $(a_n \cdot b_n) \to l \cdot l'$.

Demostración. 1. Sea $\varepsilon > 0 \implies \exists N_1 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ Si $n \geq N \implies |a_n - l| < \varepsilon/2 \implies \exists N_2 \in \mathbb{Z}^+ \in$ si $n \geq N_2 \implies |b_n - l'| < \varepsilon/2$. Hagamos $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Entonces, se tiene: $|(a_n+b_n)-(l+l')| = |(a_n-l)+(b_n-l')| \leq |a_n - l| + |b_n - l'| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \quad \forall n \geq N. \implies (a_n + b_n) \to l + l'$.

2. *a*) $|a_n b_n - l \cdot l'| = |a_n b_n - a_n l' + a_n l' - l \cdot l'| = |a_n(b_n - l') + (a_n - l) \cdot l'| \leq |a_n(b_n - l')| + |(a_n - l) \cdot l'| = |a_n| \cdot |b_n - l'| + |a_n - l| \cdot |l'|$.

   b) Como a_n es convergente. $\implies a_n$ es acotada. $\implies \exists M' \geq 0 \ni |a_n| \leq M', \forall n \in Z^+$.

   c) Hagamos $M = \text{máx}\{M', |l'|\}$

   d) Como $a_n \to l$ y $b_n \to l'$, entonces $\forall \varepsilon > 0$,

      1) $\exists N_1 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N_1 \implies |a_n - l| < \varepsilon$.

      2) $\exists N_2 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N_2 \implies |b_n - l'| < \varepsilon$.

   e) Hacemos $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Entonces:

$$|a_n \cdot b_n - l \cdot l'| \leq |a_n| \cdot |b_n - l'| + |a_n - l| \cdot |l'| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M} M = \varepsilon, n \geq N.$$

$$\implies a_n b_n \to l \cdot l'.$$

■