Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada
14 de febrero de 2021
Rudik Roberto Rompich - Carné: 19857

Análisis de Variable Real 1 - Dorval Carías

HT 1 - Revisión

1. **Muestre que el campo $\mathbb{Q}$ de los racionales es arquimediano.**

Demostración. Por definición, un campo ordenado $\mathbb{F}$ tiene la propiedad arquimediana si $\forall x \in \mathbb{F} \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni x < n$. Entonces, sea $\mathbb{Q}$ el campo de los racionales, es decir $\exists$ unos elementos m y $n \ni \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ en donde $m \neq 0$ y $m, n \in \mathbb{Z}$. Entonces, se deben cumplir, según el Teorema 1.4.2 de Abbott (2012):

$$x \in \mathbb{Q}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ que satisfaga la desigualdad } n > x \tag{1}$$

$$\text{Dado cualquier número racional } y > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ que satisfaga } \frac{1}{n} < y \text{ o } 1 < ny \tag{2}$$

Para (1), supóngase $x = \frac{n}{m}$, entonces existen dos casos:

1. ($x < 0$), se cumple la propiedad (1) en todos los casos por definición.
2. ($x \geq 0$) Como sabemos $x = \frac{n}{m}$ y $m \neq 0$. Entonces, por definición de números racionales, se debe cumplir $m \geq 1$ en cualquier caso.

Para (2), si tomamos $y = \frac{n}{m} \implies m \cdot y = n \implies$ i.e. $n = my \geq y$ (como $m \geq 1$) $\implies n + 1 > y$, cumpliendo la propiedad (2).

$\therefore$ el campo $\mathbb{Q}$ es arquimediano. $\square$

1. **¿Depende este resultado del orden definido en $\mathbb{Q}$?**

   En la argumentación de la prueba se asumió que $\mathbb{Q}$ era un campo ordenado. Por lo cual, se determinó que $\mathbb{Q}$ es un campo arquimediano. Sin embargo, no depende del orden definido, ya que solamente existe una relación que ordena a $\mathbb{Q}$ y que únicamente en esa relación puede ser ordenada; como se observa en la demostración anterior.

2. **Presente un ejemplo de un campo ordenado no arquimediano.**

Algunos ejemplos de campos no arquimedianos pero sí ordenados son: campo de Levi-Civita , los números hiperreales, números surreales, el campo de Dehn, y el campo de las funciones racionales. De los cuales, se consideró el campo de las *funciones racionales*.

Funciones racionales

Por definición de un campo ordenado, supóngase dos funciones $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}(x)$ y asumimos que $f < g \leftrightarrow f \neq g$ y que al substraer $g - f$ el resultado es un coeficiente positivo. Entonces, por las propiedades del orden, se deben cumplir:

1. Según la tricotomía, por cada $f \in \mathbb{Q}(x)$, se tiene que mantener $f > 0, f = 0$ o $0 > f$
2. Si hay tres elementos $f, g, h \in \mathbb{Q}(x)$ y $f < g$, entonces $f + h < g + h$
3. Si hay tres elementos $f, g, h \in \mathbb{Q}(x), f < g$ y $0 < h$, entonces $fh < gh$.

Demostración. Para mostrar que las funciones racionales son ordenadas, asúmase que $0 < f \leftrightarrow -f < 0$, entonces cualquier elemento de $\mathbb{Q}(x)$ puede escribir como $\frac{f(x)}{g(x)}$ donde $g > 0$. Por otra parte, si definimos $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \in \mathbb{Q}(x)$, en donde por definición $g_1 > 0$ y $g_2 > 0$, eso quiere decir que:

$$\implies \frac{f_1(x)}{g_1(x)} < \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \implies f_1(x)g_2(x) < f_2(x)g_1(x)$$

probando que las funciones racionales son ordenadas. □

Por otra parte queremos determinar que las funciones racionales no son arquimedeanas:

Demostración. Considérese un contraejemplo, tomando en cuenta las funciones racionales $f(x) = x$ y $g(x) = 1$. Se observa que si se toma un elemento $n \in \mathbb{N}$, siempre habrá una función $f(x) > n \cdot g(x)$, debido a que $\big(f - n \cdot g\big)(x) = x - n$ y afirmando que el coeficiente de $\big(f - n \cdot g\big)$ es 1, el cual debe ser positivo; incumpliendo la propiedad arquimediana. □

3. **Si a y b son elementos de un campo arquimediano F con $a < b$, demuestre que existe un racional $c \in F \ni a < c < b$.**

Demostración. Basándose en la deducción de Bartle and Sherbert (2000). Supóngase que c=0, por lo que se puede considerar $a > 0$. En donde $b - a > 0$. Siguiendo el corolario que dice si $t > 0$, entonces existe $n_t \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/n_t < t$. Se puede asumir que $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < b - a$. Por lo tanto, si se tiene $na + 1 < nb.$, aplicando nuevamente otro corolario que afirma: Si $b > 0$, entonces existe $n_b \in \mathbb{N}$ tal que $n_b - 1 \leq y \leq n$. Por lo que se tiene que: $na > 0$, entonces $m \in \mathbb{N}$ con $m - 1 \leq na < m$. Por lo tanto, $m \leq na + 1 < nb$, Mientras que $na < m < nb$. Entonces el número racional $r := m/n$ satisface $a < c < b$ □

4.

- Defina operaciones en $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + (\sqrt{2})y : x, y \in \mathbb{Q}\}$ de tal forma que sea un campo.

  Demostración. Por definición, asúmase que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$, por lo que las propiedades de asociatividad, conmutatividad y distributividad de la multiplicación sobre la suma son implícitas por ser un subcampo de $\mathbb{R}$. Entonces:

1. Cerradura bajo la adición. Dados $a_1, a_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, entonces $a_1 + a_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

   Sea $a_1 = x_1 + (\sqrt{2})y_1$ y $a_2 = x_2 + (\sqrt{2})y_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \implies a_1 + a_2 = x_1 + x_2 + (\sqrt{2})y_1 + (\sqrt{2})y_2 = x_1 + x_2 + (\sqrt{2})[y_1 + y_2] \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
2. Cerradura bajo la multiplicación. Dados $a_1, a_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, entonces $a_1 \cdot a_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

   Sea $a_1 = x_1 + (\sqrt{2})y_1$ y $a_2 = x_2 + (\sqrt{2})y_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \implies a_1 \cdot a_2 = (x_1+(\sqrt{2})y_1)(x_2+(\sqrt{2})y_2) = x_1 \cdot x_2 + (\sqrt{2})y_2x_1 + (\sqrt{2})y_1x_2 + (\sqrt{2}y_1)\cdot(\sqrt{2}y_2) = x_1 \cdot x_2 + (\sqrt{2})[y_2x_1 + y_1x_2] + 2(y_1y_2) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
3. Inverso. Sea $a \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \implies \frac{1}{a} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$$\begin{aligned}(x + y\sqrt{2})^{-1} &= \frac{1}{x + y\sqrt{2}} \\ &= \frac{x}{x^2 - 2y^2} - \frac{y}{x^2 - 2y^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\end{aligned}$$

   en donde $x^2 - 2y^2 \neq 0$ porque $\sqrt{2}$ es irracional. $\implies \frac{1}{a} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$\therefore \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + (\sqrt{2})y : x, y \in \mathbb{Q}\}$ es un campo. □

- ¿Es un campo ordenado?

  Demostración. Dadas las propiedades de un campo ordenado (Sea P la clase positiva del campo $\mathbb{F}$, entonces se dice que $\mathbb{F}$ está ordenada por P (O que $\mathbb{F}$ es un campo ordenado):

  1. Si $a \in P$, se dice que a es positivo. Notación $a > 0$.
  2. Si $a \in$ P o $a = 0$, se dice que a es no negativo. Notación $a \geq 0$
  3. Si $a, b \in \mathbb{F}$ y $a - b \in P$,, se escribe $a > b$
  4. Si $a, b \in \mathbb{F}$ y $a - b \in P$ o $a - b = 0$, se escribe $a \geq b$

  Se propone un $a = x + (\sqrt{2}y)$. Debido a la relación $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset R \implies a > 0$ o $a \geq 0$, demostrando las propiedades (1) y (2). Por otra parte, se proponen dos elementos $x_1 + (\sqrt{2})x_2$ y $y_1 + (\sqrt{2})y_2$, tal que:

$$x_1 + (\sqrt{2})x_2 \leq y_1 + (\sqrt{2})y_2 \iff y_1 - x_1 + (x_2 - y_2)(\sqrt{2}) \geq 0$$

  Demostrando las propiedades (3) y (4). $\therefore \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + (\sqrt{2})y : x, y \in \mathbb{Q}\}$ es un campo ordenado.

  □

- ¿Es ordenado el campo de los complejos?

  Demostración. Asúmase un contraejemplo. Dígase un elemento $-i \in \mathbb{C}$. Entonces, se tienen dos casos: (i) Si $-i > 0$, es decir que si se eleva al cuadrado $(-i)^2 > 0 \implies -1 > 0$. Entonces se tiene que $-i < 0$. (ii) Si se eleva a una potencia 4 $\implies (-i)^4 > 0 \implies (-i)^2(-i)^2 = (-1)(-1) = 1 > 0$. Afirmando al mismo tiempo que $-1 > 0$ y $1 > 0$ ($\rightarrow\leftarrow$). Es decir, una contradicción en una de las propiedades de un campo ordenado (Si $0 < a < b$ y $0 < c < d$, entonces $ac < bd$). Por lo tanto, el campo de los complejos no es ordenado. $\square$

Referencias

Abbott, S. (2012). *Understanding analysis*. Springer Science & Business Media.

Bartle, R. G. and Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis*, volume 2. Wiley New York.