Universidad del Valle de Guatemala
Análisis de Variable Real 1 **4 de febrero de 2021**

Ejercicios Complementarios de Preparación para el Parcial 1

1. Revisión de pruebas de teoremas seleccionados:
   a) **Teorema de intervalos encajados**: Si (I_n) es cualquier sucesión de intervalos cerrados en $\mathbb{R}$, no vacíos y encajados, entonces existe un punto x que pertenece a cada intervalo.
   Nota: Estudiar el caso que los intervalos no son cerrados.
   b) **Teorema de Bolzano-Weierstrass**: Cada subconjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}^n$ tiene un punto de acumulación.

2. Sea X un espacio métrico. Demuestre que cualesquiera dos puntos de X pueden separarse mediante conjuntos abiertos disjuntos de X (Es decir, X es un Espacio de Hausdorff).

3. Sean X un conjunto no vacío y la función $d: X \times X \to \mathbb{R}$, que satisface las condiciones siguientes:
   a. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
   b. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

   Pruebe que d es una métrica sobre X.

4. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $d_1: X \times X \to \mathbb{R}$, definida por:
$$d_1(x,y) = ln\big(1 + d(x,y)\big), \quad \forall x, y \in X.$$
   Demuestre que $d_1$es una nueva métrica sobre X.

5. Sean A y B subconjuntos de un espacio métrico X, y pruebe las propiedades siguientes:
   a) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ (¿Se cumple la otra contención?)
   b) $int(A) \cup int(B) \subseteq int(A \cup B)$
   c) $int(A) \cap int(B) = int(A \cap B)$
   d) Presente un ejemplo de dos subconjuntos A y B de la recta real, tales que
$$int(A) \cup int(B) \neq int(A \cup B)$$
   e) $(\bar{A})^c = int(A^c)$
   f) $\bar{A} = \{x : d(x,A) = 0\}$

6. Describa el interior del conjunto de Cantor.

7. Sea X un espacio métrico y A un subconjunto de X. Se dice que A es *denso* (o *siempre denso*) si $\bar{A} = X$. Demuestre que los enunciados siguientes son equivalentes.
   a) A es denso.
   b) El único superconjunto cerrado de A es X.
   c) El único conjunto abierto disjunto de A es $\emptyset$.
   d) A intersecta a cada conjunto abierto no-vacío.
   e) A intersecta cada bola abierta.