SUCESIONES- Análisis de Variable Real 1

Rudik Rompich

June 1, 2021

Heine-Borel

- Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es compacto $\Rightarrow$ A es cerrado y acotado
- Si $A \subseteq \mathbb{R}$ que es cerrado y acotado $\Rightarrow$ A es compacto
- Producto cualquiera de compactos es compacto (Teorema de Tikonov)

Sucesiones

Def: Una sucesión es cualquier función cuyo dominio es un conjunto infinito contable, i.e.

$\mathbb{Z}^+, \mathbb{N}, \mathbb{Q}$

Ej: $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R} \ni f(n) = \operatorname{sen} n$ es una sucesión

Def: se dice que la sucesión (a_n) **converge** al número ℓ, denotado $a_n \to \ell$, si $\forall \epsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N$ ($>$) $\Rightarrow |a_n - \ell| < \epsilon$

Nota: Si existe ℓ, entonces es el límite de (a_n). Notación: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \ell$

Ej: Compruebe que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Dado $\epsilon > 0$ $\exists N = \underline{1/\epsilon \in \mathbb{Z}^+} \ni$

si $n \geq N \Rightarrow \underbrace{\left|\frac{1}{n} - 0\right|}_{} < \epsilon$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow \boxed{n > \frac{1}{\epsilon}}$$

Teorema: El límite de una sucesión, si existe, es único.

Dem.: Suponemos que $a_n \to l$ y $a_n \to l'$.

- Como $a_n \to l \Rightarrow$ Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $N_1 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N_1$ $\Rightarrow |a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$
- Como $a_n \to l'$ $\exists$ $N_2 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N_2$, entonces $|a_n - l'| < \epsilon/2$
- Sea $N = \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow$ para $n \geq N$, se cumple:

$$|l - l'| = |l - a_n + a_n - l'| = |(l - a_n) + (a_n - l')|$$

$$\le \underbrace{|\ell - a_n|}_{|a_n - \ell|} + |a_n - \ell'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

i.e. $|\ell - \ell'| < \epsilon$. Por la arbitrariedad de ϵ

$\Rightarrow \ell = \ell'$. $\square$

$$|\ell - \ell'| \le \inf\{\epsilon : \epsilon > 0\}.$$

<u>Teorema</u>: Una sucesión convergente es acotada.

<u>Dem</u>: Como $a_n \to \ell \Rightarrow$ Dado $\epsilon = 1$ $\exists$ $N \in \mathbb{Z}^+ \ni$

si $n \geq N \Rightarrow |a_n - \ell| < 1$. Entonces,

$$|a_n| - |\ell| \le \big||a_n| - |\ell|\big| \le |a_n - \ell| < 1$$

$\Rightarrow |a_n| - |\ell| < 1 \Rightarrow |a_n| < |\ell| + 1, \ \forall n \geq N$

$\Rightarrow$ Hagamos $M = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n-1}|, \underbrace{|\ell|+1}_{|a_n|,\ \forall n \geq N}\}$

$\Rightarrow |a_n| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow (a_n)$ es acotada. $\square$

<u>Teorema</u>: Si $a_n \to \ell \Rightarrow |a_n| \to |\ell|$

<u>Dem</u>: Si $a_n \to \ell \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N$

$\Rightarrow |a_n - \ell| < \epsilon$. Por desigualdad triangular:

$$\big||a_n| - |\ell|\big| < |a_n - \ell| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \big||a_n| - |\ell|\big| < \epsilon \Rightarrow |a_n| \to |\ell|. \quad \square$$

Teorema. Sean (a_n) y (b_n) sucesiones convergentes $\ni$ $a_n \to \ell$ y $b_n \to \ell'$. Entonces:

(1) $(a_n + b_n) \longrightarrow \ell + \ell'$

(2) $(a_n \cdot b_n) \longrightarrow \ell \cdot \ell'$.

Dem.

(1) Sea $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$

$\Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - \ell'| < \frac{\epsilon}{2}$

Hagamos $N = \max\{N_1, N_2\}$. Entonces, se tiene:

$$|(a_n + b_n) - (\ell + \ell')| = |(a_n - \ell) + (b_n - \ell')| \leq$$

$$\leq |a_n - \ell| + |b_n - \ell'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \ \forall n \geq N.$$

$\Rightarrow (a_n + b_n) \to \ell + \ell'$.

(2) • $|a_n b_n - l \cdot l'| = |a_n b_n - a_n l' + a_n l' - l \cdot l'|$

$= |a_n(b_n - l') + (a_n - l) \cdot l'|$

$\leq |a_n(b_n - l')| + |(a_n - l) \cdot l'|$

$= |a_n| \cdot |b_n - l'| + |a_n - l| \cdot |l'|$

•• Como a_n es convergente $\Rightarrow$ a_n es acotada

$\Rightarrow \exists\, M' \geq 0 \ni |a_n| \leq M',\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$

••• Hagamos $M = \text{máx}\{M', |l'|\}$

:: Como $a_n \to l$ y $b_n \to l'$, entonces $\forall \epsilon > 0$,

$\exists\, N_1 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - l| < \epsilon$

$\exists\, N_2 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - l'| < \epsilon$

$\therefore$ Hacemos $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$.

Entonces:

$$|a_n \cdot b_n - l \cdot l'| \leq |a_n| \cdot |b_n - l'| + |a_n - l| \cdot |l'|$$

$$< M \cdot \frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2M} M = \epsilon, \quad n \geq N$$

$\Rightarrow a_n b_n \to l \cdot l'$. $\square$

<u>Teorema</u> Si (a_n) converge a l, $l \neq 0$, entonces $a_n \neq 0$ a partir de algún $N \in \mathbb{Z}^+$ y

$$\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{l}.$$

$\underline{\text{Dem}}$: Por hipótesis: $a_n \longrightarrow \ell \Rightarrow |a_n| \rightarrow |\ell|$.

Sea $\epsilon = \frac{|\ell|}{2} \Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N$, entonces

seleccionar el ϵ

$$\underbrace{||a_n| - |\ell||} < \frac{|\ell|}{2} \Rightarrow -\left(|a_n| - |\ell|\right) < \frac{|\ell|}{2}$$

$$\Rightarrow -|a_n| + |\ell| < \frac{|\ell|}{2} \Rightarrow \frac{|\ell|}{2} < |a_n|, \ \forall n \geq N.$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{\ell - a_n}{a_n \cdot \ell}\right| = \frac{|\ell - a_n|}{|a_n||\ell|} = \frac{|a_n - \ell|}{|a_n| \cdot |\ell|} <$$

$$< \frac{|a_n - \ell|\,(2)}{|\ell| \cdot |\ell|} = \frac{2\,|a_n - \ell|}{|\ell|^2}$$

$$\frac{1}{|a_n|} < \frac{2}{|\ell|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_n} \longrightarrow \frac{1}{\ell}. \quad \square$$

Teorema:

(a) Si (a_n) es una sucesión de términos no negativos, $a_n \to l \Rightarrow l$ es no negativo.

(b) Si $a_n \to l$ y $b_n \to l'$, con $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ $\Rightarrow l \leq l'$.

$\square$

Corolario: Si $a_n \longrightarrow l$ y si $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha a_n \to \alpha l$ $\square$

Parcial

$(1-\lambda)x+\lambda y \,, \quad 0\le\lambda\le 1$

1.-

A probar: $B_r(w)$ es convexo, donde $w\in\mathbb{R}^n$.

Sea $\lambda\in(0,1) \Rightarrow |(1-\lambda)x+\lambda y - w| =$

$$= |(1-\lambda)x+\lambda y - w + \lambda w - \lambda w|$$

$$= |\lambda(y-w) + (1-\lambda)(x-w)|$$

$$\le |\lambda|\cdot|y-w| + |(1-\lambda)|\cdot|x-w|$$

$$= \lambda\cdot|y-w| + (1-\lambda)\cdot|x-w| < \lambda r + (1-\lambda) r$$

$$= r.$$

$\Rightarrow B_r(w)$ es convexa.

2.- Sean $x, y, a, b \in \mathbb{R}^+ \ni \frac{x}{y} < \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{x+a}{y+b} < \frac{a}{b}$

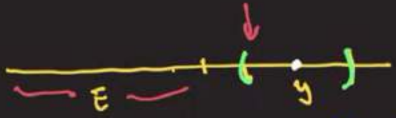
- A probar: $\frac{x}{y} < \frac{x+a}{y+b} \Leftrightarrow x(y+b) - (x+a)y < 0$

$$\Rightarrow \cancel{xy} + xb - \cancel{xy} - ay = y\left(\frac{x}{y}b - a\right) = \underbrace{yb}_{>0}\underbrace{\left(\frac{x}{y} - \frac{a}{b}\right)}_{<0} < 0$$

- De forma similar la otra desigualdad.

3.- $E \neq \phi$ y acotado sup. A probar: Si $y = \sup(E)$ $\Rightarrow y \in \overline{E}$.

Por contrapuesta: Si $y \notin \overline{E} \Rightarrow y \neq \sup(E)$



Si y no es punto límite $\Rightarrow \exists\, \epsilon>0 \ni E\cap(y-\epsilon, y+\epsilon) = \emptyset$

$\Rightarrow \exists\, x^* \in \mathbb{R} \ni x^* \geq w, \ \forall w \in E$ y $x^* \notin (y-\epsilon, y+\epsilon)$

5.- (Dubois) Hoja de Trabajo: $(\overline{B})^c = \text{int}(B^c)$

$\Rightarrow \overline{B} = [\text{int}(B^c)]^c \Rightarrow$ Hagamos $B = A^c$

$\Rightarrow \overline{(A^c)} = [\text{int}(A)]^c$. $\square$

<u>Sucesiones</u>: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell \iff \forall \epsilon > 0 \ \exists\ N \in \mathbb{Z}^+ \ni$

$N = N(\epsilon) \in \mathbb{Z}^+$

N_ϵ

si $n \geq N \Rightarrow |a_n - \ell| < \epsilon$.

conocido

<u>Ejs</u>:

1) Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n+1} = 1$.

<u>sol</u>: Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $N = 2/\epsilon \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N$

$\Rightarrow \left| \dfrac{n-1}{n+1} - 1 \right| < \epsilon$.

- $\left|\dfrac{n-1}{n+1} - 1\right| = \left|\dfrac{n-1-(n+1)}{n+1}\right| = \left|\dfrac{-2}{n+1}\right|$

$= \dfrac{2}{n+1} < \dfrac{2}{n} < \epsilon \Rightarrow \dfrac{n}{2} > \dfrac{1}{\epsilon} \Rightarrow n > \dfrac{2}{\epsilon}$

2) Compruebe que $\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right] = 0$

Prueba: Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $N = \frac{1}{4\epsilon^2} \in \mathbb{Z}^+$ $\ni$ si $n \geq N$

$$\Rightarrow \left|\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) - 0\right| < \epsilon.$$

$$\Rightarrow \left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)$$

$$= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \epsilon$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{n} > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{2\epsilon}$$

$$\Rightarrow n > \frac{1}{4\epsilon^2}$$

Nota: Considere las sucesiones:

$$\boxed{a_n = n} \quad y \quad b_n = (-1)^n$$

- Ambas sucesiones divergen (i.e. no converge)

Def: Se dice que (a_n) tiende a infinito $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = \infty\right)$, si $\forall M > 0 \ \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni a_n > M$.

Nota: La acotación de una sucesión no asegura su convergencia.

$\lim a_n = l$ ssi $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \Rightarrow$
$|a_n - l| < \epsilon$

Nota: Considere las sucesiones:

$$\boxed{a_n = n} \quad y \quad b_n = (-1)^n$$

- Ambas sucesiones divergen (i.e. no converge)

Def: Se dice que (a_n) tiende a infinito $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = \infty\right)$, si $\forall M > 0\ \exists\, n \in \mathbb{Z}^+ \ni a_n > M$.

Nota: La acotación de una sucesión no asegura su convergencia.

Teorema: Suponga (x_n), (y_n), (z_n) son sucesiones de números reales $\ni$

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Si $\lim x_n = \lim z_n \Rightarrow (y_n)$ converge

y $\lim x_n = \lim y_n = \lim z_n$.

<u>Dem.</u> Supóngase que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = w$.

Si $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{Z}^+ \ni |x_n - w| < \epsilon$ y $|z_n - w| < \epsilon$.

Si $\epsilon > 0\ \exists\, N_1 \in \mathbb{Z}^+ \ni |x_n - w| < \epsilon, \ \forall n \geq N_1$

Si $\epsilon > 0\ \exists\, N_2 \in \mathbb{Z}^+ \ni |z_n - w| < \epsilon, \ \forall n \geq N_2$

$\Rightarrow$ Hagamos $N = \max\{N_1, N_2\}$

Como $x_n \leq y_n \leq z_n \Rightarrow x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w,$
$\forall n \in \mathbb{Z}^+$

Nótese que: $-\epsilon < x_n - w < \epsilon$, y que.

$$-\epsilon < z_n - w < \epsilon$$

$$\Rightarrow -\epsilon < x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w < \epsilon$$

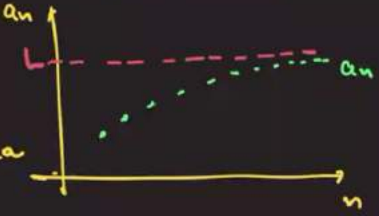
$$\Rightarrow -\epsilon < y_n - w < \epsilon \Leftrightarrow |y_n - w| < \epsilon, \ \forall n \geq N$$

$\Rightarrow$ Por la arbitrariedad de ϵ, $\lim_{n \to \infty} y_n = w$.

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} z_n.$$

$\square$

<u>Teorema</u> (convergencia monótona)



Sea $X = (x_n)$ una sucesión de números reales que es monótona creciente; i.e.

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots .$$

Entonces la sucesión (x_n) converge ssi (x_n) es acotada, en cuyo caso $\lim(x_n) = \sup\{x_n\}$

Teorema (Convergencia monótona): Sea (x_n) una sucesión de reales monótona creciente. Entonces, (x_n) converge ssi (x_n) es acotada, en cuyo caso $\lim (x_n) = \sup\{x_n\}$.

Dem:

($\Rightarrow$) Supongamos que (x_n) converge $\Rightarrow$ (x_n) es acotada. A probar: $\lim x_n = \sup\{x_n\}$.

Como (x_n) es convergente $\Rightarrow$ sea $x_n \longrightarrow \ell$, i.e.

$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \Rightarrow |x_n - \ell| < \epsilon$

$$\Rightarrow -\epsilon < x_n - \ell < \epsilon$$

$\Rightarrow \quad l - \epsilon < x_n < l + \epsilon$

$\Rightarrow$ Para $n \geq N$, se tiene $l+\epsilon$ es cota superior de (x_n). Entonces:

Existe ya que $\{x_n\}$ es acotada

$$l - \epsilon < \boxed{x_n} < \sup\{x_n\} < l + \epsilon$$

cota superior $\{x_n\}$

$\Rightarrow \quad l - \epsilon < \sup\{x_n\} < l + \epsilon$

$\Rightarrow \quad -\epsilon < \sup\{x_n\} - l \,| < \epsilon$

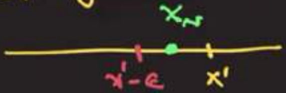
$\Rightarrow \quad |\sup\{x_n\} - l\,| < \epsilon$

$\Rightarrow \quad \underbrace{\lim x_n}_{l} = \sup\{x_n\}$

($\Leftarrow$) Supongamos que (x_n) es monótona creciente y acotada. Entonces $\exists\ x' = \sup\{x_n\}$. A probar: $\lim x_n = x'$.

Como $x' = \sup\{x_n\} \Rightarrow x' \geq x_n,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Por otro lado, por caracterización de supremo,



si $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists\ N \in \mathbb{Z}^+ \ni$

$x' - \epsilon < x_N$. Como la sucesión es monó-

elemento de la sucesión

tona creciente, se cumple que, $\forall n \geq N$,

$$x' - \epsilon < x_N \leq x_n \leq x' < x' + \epsilon$$

suc. creciente

x' es supremo

$$\Rightarrow \quad x' - \epsilon < x_n < x' + \epsilon \,, \quad \forall\, n \geq N$$

$$\Rightarrow \quad -\epsilon < x_n - x' < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad |x_n - x'| < \epsilon \,, \forall\, n \geq N \Rightarrow \lim x_n = x'.$$

$\square$

<u>Corolario</u>: Sea (x_n) una sucesión de reales que es monótona decreciente; i.e.

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots$$

Entonces, (x_n) es convergente ssi $\{x_n\}$ es acotado, en cuyo caso $\lim x_n = \inf \{x_n\}$. $\square$

Ej: Estudie la convergencia de la sucesión:

$a_0 = 0 \quad , \quad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \quad , \quad n = 0,1,2,\dots$

utilicemos el Teorema de convergencia monó-tona: (i.e. probemos que (a_n) es creciente y acotada).

i) (a_n) es creciente: por inducción sobre n.

•) $n=0$: $a_0 = 0 < a_1 = \sqrt{6}$

••) Suponemos para $n = k-1$

$$\Rightarrow a_{k-1} < a_k \quad \checkmark$$

•••) Probamos para $n = k+1$

$$\Rightarrow a_{k-1} < a_k \Rightarrow a_{k-1} + 6 < a_k + 6$$

$$\Rightarrow \sqrt{a_{k-1} + 6} < \sqrt{a_k + 6} \Rightarrow a_k < a_{k+1}$$

$$\Rightarrow (a_n) \text{ es creciente}$$

ii) (a_n) es acotada. Por inducción sobre n:

•) $n=0$; $a_0 = 0 < 3$

••) Suponemos para $n = k-1 \Rightarrow a_{k-1} < 3$

•••) Probamos para $n = k$;

$$\Rightarrow a_{k-1} < 3$$

$$\Rightarrow a_{k-1} + 6 < 9$$

$$\Rightarrow \sqrt{a_{k-1} + 6} < \sqrt{9}$$

$$\Rightarrow a_k < 3 .$$

$\Rightarrow$ (a_n) está acotada $\Rightarrow$ (a_n) converge.

iii) Como sabemos que (a_n) es convergente

$\Rightarrow$ si n es muy grande $\Rightarrow$ $a_n \to L$,

i.e.

$$\underset{L}{\cancel{a_{n+1}}} = \sqrt{\underset{L}{\cancel{a_n}} + 6}$$

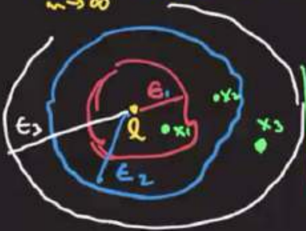
$$\Rightarrow \quad L^2 = L + 6 \Rightarrow L^2 - L - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (L-3)(L+2) = 0 \Rightarrow L = 3 \text{ o } \cancel{L=-2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 3$$

Nota: una interpretación alterna de la definición de límite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \quad \text{ssi} \quad \forall \epsilon>0 \; \exists N\in\mathbb{Z}^+ \ni \text{ si } n\geq N \Rightarrow |a_n-\ell|<\epsilon$$



Interpretación: cada bola centrada en ℓ tiene algún a_n.

Lema: $a_n \to \ell$ ssi $\underbrace{|a_n-\ell|}_{d(a_n,\ell)} \to 0$

Dem. $|a_n-\ell|\to 0$ ssi $\forall\epsilon>0\;\exists N\in\mathbb{Z}^+ \ni$ si $n\geq N \Rightarrow \big||a_n-\ell|-0\big| = \big||a_n-\ell|\big| = |a_n-\ell|<\epsilon$

$\Longleftrightarrow a_n\to\ell.$ $\square$

Teorema: un elemento l es un punto de acumulación de un conjunto A ssi existe una sucesión (x_n) de elementos de A, distinto de l, tal que $x_n \to l$

Dem:

$(\Leftarrow)$ Sea (x_n) una sucesión de elementos de $A \Rightarrow$ $x_n \to l \Rightarrow$ cada bola abierta centrada en l tiene un $x_n \in A \Rightarrow l$ es un punto de acumulación de A.

$(\Rightarrow)$ Sea l un punto de acumulación de $A \Rightarrow$ cada bola abierta centrada en l contiene un elemento $x_n \in A$. Entonces, podemos formar

La sucesión (x_n), de elementos de A diferentes de ℓ $\ni$ $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(\ell) \Rightarrow x_n \to \ell$. $\square$

__Teorema__: Un conjunto A es $\boxed{\text{cerrado}}$ ssi el límite de cada sucesión convergente de elementos de A está en A. $\square$

__Sucesiones de Cauchy__

Def: Una sucesión (x_n) de elementos de un espacio métrico (X, d) es una sucesión de Cauchy si $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n, m \geq N$

$$\Rightarrow \underbrace{d(x_n, x_m)}_{|x_n - x_m|} < \epsilon$$

Prop: Cada sucesión convergente es de Cauchy.

Dem: Sea $x_n \to l \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N$ $\Rightarrow |x_n - l| < \epsilon/2$. Suponga que $n, m \geq N$

$$\Rightarrow |x_n - x_m| = |(x_n - l) + (l - x_m)| \leq$$

$$\leq |x_n - l| + |x_m - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \Rightarrow$$ (x_n) es de Cauchy

$\square$

¿Cómo se prueba que: si (x_n) es de Cauchy $\Rightarrow$ (x_n) converge?

- Cada sucesión (x_n) de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ está acotada.

•• $\boxed{\text{Cada sucesión acotada en } \mathbb{R}^n \text{ tiene una subsucesión convergente}}$ Teorema de Bolzano-Weierstrass

••• Si (x_n) es de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ y tiene una subsucesión convergente a l $\Rightarrow$ $x_n \to l$

•••• Cada sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ es convergente.

Def: Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}^n$ y sea $r_1 < r_2 < \dots < r_n$ una sucesión de enteros positivos (estrictamente creciente), entonces la sucesión:

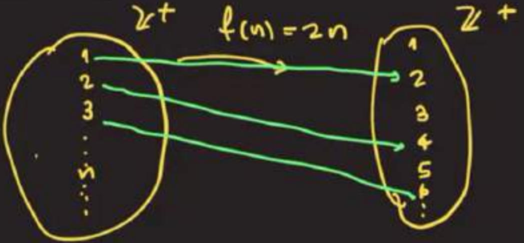
$$x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_n}, \dots$$

es una subsucesión de (x_n).

(x_n): $\quad x_1, x_2, x_3, \dots x_n, \dots$

$$x_{\underset{r_1}{2}} \qquad x_{\underset{r_2}{5}} \qquad x_{\underset{r_3}{8}} \quad \dots$$

(2)



<u>Nota</u>: sea $g:\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ una función estrictamente creciente.

•) Si $X = (x_n)$ es una sucesión sobre $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \quad X \circ g := (x_{g(n)})$ es una subsucesión de X.

Ej: 1) Dada la sucesión (x_n), entonces

i) La subsucesión (x_{2n}) se llama <u>sub-sucesión par</u> de (x_n)

ii) La subsucesión (x_{2n-1}) se llama <u>subsucesión</u> impar de (x_n)

2) Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$ y sea $m \in \mathbb{Z}^+$ (fijo). Entonces:

$$(x_{k+m-1})_{k \in \mathbb{Z}^+}$$ k-cola

es una subsucesión de (x_n)

(x_n) : $x_1, x_2, x_3, \ldots$

(x_{k+m-1}) : $x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots$

Teorema: Si $x_n \longrightarrow l$, entonces cualquier subsucesión de (x_n) también converge a l.

Dem.: Como $x_n \to l \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N$ $\Rightarrow |x_n - l| < \epsilon$. Sea $X' = (x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots)$ una subsucesión de $X = (x_n)$. Como $\boxed{r_n \geq n}$ $\Rightarrow r_n \geq N \Rightarrow |x_{r_n} - l| < \epsilon$. Entonces, $x_{r_n} \longrightarrow l$. $\square$

Corolario: Si $x_n \longrightarrow l$ y si $m \in \mathbb{Z}^+$ (fijo) $\Rightarrow$ $\Rightarrow X' = (x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)$ converge a l. $\square$

Teorema (Bolzano - Weierstrass)

Si (x_n) es acotada en $\mathbb{R}^n$, entonces (x_n) tiene una subsucesión convergente.

$(-1)^n$ es acotado y divergente

$((-1)^n)_{2n} \longrightarrow 1$

$((-1)^n)_{2n-1} \longrightarrow -1$

Teorema (Bolzano - Weierstrass)

Si (x_n) es acotada en $\mathbb{R}^n$, entonces (x_n) tiene una subsucesión convergente. $\square$

$(-1)^n$ es acotado y divergente

$((-1)^n)_{2n} \longrightarrow 1$

$((-1)^n)_{2n-1} \longrightarrow -1$

Teorema: Cada sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ es acotada.

$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n, m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \epsilon$

Dem: Sea (x_n) una sucesión de Cauchy.

$\Rightarrow$ Sea $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ Para $\boxed{m = N}$ y $n > N$, se tiene que $|x_n - x_m| < 1$. Por desigualdad triangular:

$$|x_n| - |x_m| < 1$$

$$\Rightarrow |x_n| < |x_m| + 1 \,, \quad n > N = m$$

$\Rightarrow$ Sea $C = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{m-1}|, \underbrace{|x_m| + 1}\}$

$\Rightarrow |x_n| \leq C,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow (x_n)$ es acotada. $\square$

③ __Teorema:__ Si una subsucesión x' de una sucesión de Cauchy x en $\mathbb{R}^n$ es convergente a $l \Rightarrow x \to l$.

Dem:

•) $X = (x_n)$ es de Cauchy, i.e., Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $N \in \mathbb{Z}^+$ $\ni$ si $n, m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \epsilon$.

••) Sea $X' = (x_{n_j})$ una subsucesión de X $\ni$ $x_{n_j} \to l$; i.e. $\exists$ $K \in \mathbb{Z}^+$, donde $K \in \{n_1, n_2, \dots\}$ tal que $|x_K - l| < \epsilon$ (esta condición la cumplen K y cualquier $n_j \geq K$)

$\Rightarrow$ Sea $\boxed{n \geq N}$ y sea $\boxed{m = K}$ $\Rightarrow$ se cumple que:

$$|x_n - l| = |(x_n - x_K) + (x_K - l)|$$
$$\leq |x_n - x_K| + |x_K - l| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

$\Rightarrow x_n \longrightarrow l \Rightarrow$ la sucesión de Cauchy (x_n) es convergente. $\square$

<u>Teorema</u> (****) (Criterio de convergencia de Cauchy)

Una sucesión (x_n) en $\boxed{\mathbb{R}^n}$ es convergente ssi (x_n) es de Cauchy.

<u>Dem:</u>

($\Rightarrow$) Por teorema anterior: si (x_n) converge $\Rightarrow$ (x_n) de Cauchy

($\Leftarrow$) Sea (x_n) de Cauchy, por 1, (x_n) es acotada; por 2, (x_n) tiene una subsucesión convergente; y, por 3, (x_n) converge. $\square$

Nota: Un espacio métrico en el que cada sucesión de Cauchy converge es un espacio completo.

(Ver tarea: Ejemplo de un espacio métrico que no es completo).

Ej: (*) Considere la sucesión (x_n) definida por:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}, \quad n > 2$$

Nota: (x_n) no es monótona: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1.5, \ldots$

(no aplica el Teorema de convergencia monótona)

A probar: (x_n) es de Cauchy

•) Nótese que $1 \leq x_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. En efecto, por inducción sobre n:

i) Probamos para $n = 1 \Rightarrow 1 \leq x_1 = 1 \leq 2$

* ii) Suponemos la propiedad para $n \leq k-1$

$$1 \leq x_{k-1} \leq 2$$

iii) Probamos para $n = k$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \leq x_{k-1} \leq 2 \\ 1 \leq x_{k-2} \leq 2 \end{array}\right\} +$$

$$2 \leq x_{k-1} + x_{k-2} \leq 4$$

$$\Rightarrow \quad 1 \le \frac{x_{k-1} + x_{k-2}}{2} \le 2$$

$$\Rightarrow \quad 1 \le x_k \le 2.$$

$$\Rightarrow \quad 1 \le x_n \le 2, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

••) $|x_n - x_{n+1}| = \cdot \ \cdot \ \cdot = \frac{1}{2^{\blacksquare}} \cdot |x_2 - x_1|$

$$\underset{m>n}{\Rightarrow} |x_n - x_m| = |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + \dots + (x_{m-1} - x_m)|$$

$\downarrow$

Stoltz - Cesàro

$$\Rightarrow \quad 1 \leq \frac{x_{k-1} + x_{k-2}}{2} \leq 2$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq x_k \leq 2.$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq x_n \leq 2, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

$$x_{n-1} - x_n$$

$$\downarrow$$

• $|x_n - x_{n+1}| = \left| x_n - \left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}\right) \right| = \frac{1}{2} |x_n - x_{n-1}|$

$= \frac{1}{2^2} |x_{n-1} - x_{n-2}| = \frac{1}{2^3} |x_{n-2} - x_{n-3}| = \cdots = \frac{1}{2^{n-1}} \overbrace{|x_2 - x_1|}^{1}$

•• Sea $m > n$, entonces.

$|x_n - x_m| = |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + \cdots + (x_{m-1} - x_m)|$

$\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m|$

$= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-2}}$

$$\Rightarrow |x_n - x_m| \leq \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right)$$

$$< \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \overset{2}{\left(\frac{1}{1-(1/2)}\right)} = \frac{2}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^{n-2}} < \epsilon \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{4} \Rightarrow 2^n > \frac{4}{\epsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > \underbrace{\log_2\left(\frac{4}{\epsilon}\right)}_{N}$$

Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $N = \log_2\left(\frac{4}{\epsilon}\right) \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n, m \geq N$

$\Rightarrow |x_n - x_m| < \epsilon \Rightarrow (x_n)$ es de Cauchy

$\Rightarrow (x_n)$ es convergente. (por el criterio de Cauchy)

¿ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ?$

$\Rightarrow \quad x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$; si $n \geq N$, entonces

$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2}(L + L) \Leftrightarrow L = L \Rightarrow$ este método no es útil para encontrar el límite.

Nota: Sabemos que (x_n) es convergente $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. Por teorema, buscamos una subsucesión convergente (ésta convergerá a L)

(•••) Considere la subsucesión (x_{2n-1})

$$\boxed{x_1 = 1} \qquad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$$

$$x_2 = 2$$

$$\boxed{x_3 = \frac{1+2}{2} = 1 + \frac{1}{2}} \qquad 1 + \frac{1}{2^{2n-3}}$$

x_n

$$x_4 = \frac{3/2 + 2}{2} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$x_5 = \frac{7/4 + 3/2}{2} = \frac{7}{8} + \frac{3}{4} = \underbrace{\frac{3}{4} + \frac{2}{8}} + \frac{5}{8}$$

$$= 1 + \frac{4}{8} + \frac{1}{8}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1$$

$$x_3 = 1 + 1/2$$

$$x_5 = 1 + 1/2 + 1/2^3$$

$$x_7 = 1 + 1/2 + 1/2^3 + 1/2^5$$

$$\vdots$$

$$\underline{x_{2n-1} = 1 + 1/2 + 1/2^3 + \dots + 1/2^{2n-3}}$$

$$\Rightarrow \quad x_{2n-1} = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots \frac{1}{4^{n-2}}\right)$$

$$2^{2n-4} = 2^{2 \cdot n} \cdot 2^{-4} = (2^2)^n \cdot (2^2)^{-2}$$

$$= 4^n \cdot 4^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1$$

$$x_3 = 1 + 1/2$$

$$x_5 = 1 + 1/2 + 1/2^3$$

$$x_7 = 1 + 1/2 + 1/2^3 + 1/2^5$$

$$\vdots$$

$$\boxed{x_{2n+1}}? \quad x_{2n-1} = 1 + 1/2 + 1/2^3 + \dots + 1/2^{2n-3}$$

$$\Rightarrow \quad x_{2n-1} = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots \frac{1}{4^{n-2}}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{1 - 1/4}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1-\cancel{(1/4)^{n-1}}}{1-1/4}\right]\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \lim x_{2n-1} = 5/3 \Rightarrow \lim (x_n) = \frac{5}{3}$$

Ej: Sea (a_n) la sucesión definida por:

$$a_1 = 1\ ,\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}.$$

Pruebe que (a_n) es de Cauchy.

• Nós temos que $a_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

$\Rightarrow a_n > 1$, $\forall n > 1$

• $|a_{n+1} - a_n| = \left|\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) - \left(1 + \frac{1}{a_{n-1}}\right)\right| =$

$= \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}}\right| = \left|\frac{a_{n-1} - a_n}{a_n \cdot a_{n-1}}\right| = \left|\frac{a_n - a_{n-1}}{a_n \cdot a_{n-1}}\right|$

$a_{n-1} \geq 1$

$a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}} \Rightarrow a_n \cdot a_{n-1} = a_{n-1} + 1 \geq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{a_n \cdot a_{n-1}} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow |a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}| \leq \frac{1}{2^2}|a_{n-1} - a_{n-2}| \leq \dots$

$\dots \leq \frac{1}{2^{n-1}}|a_2 - a_1|$

Sea $m > n$. Entonces:

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + \dots + (a_{n+1} - a_n)|$$

$$\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \dots + |a_{n+1} - a_n|$$

$$\leq \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{m-3}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n}} + \dots + \frac{1}{2^{m-3}} + \frac{1}{2^{m-2}}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n-1}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{1-1/2}\right) = \frac{2}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}}$$

$$\Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{1}{2^{n-2}}$$

$$\frac{1}{2^{n-2}} < \epsilon \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{4} \Rightarrow n > \log_2\left(\frac{4}{\epsilon}\right) \cdot +$$

Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $N = \log_2\left(\frac{4}{\epsilon}\right) \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$ si $n, m \geq N$

$\Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon \Rightarrow (a_n)$ es de Cauchy

$\Rightarrow (a_n)$ converge. Nō tne que:

Si $L = 1 + \frac{1}{L} \Rightarrow L^2 - L - 1 = 0$

$$\Rightarrow L = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \cancel{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

Ej: Pruebe que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, utilizando sucesiones de Cauchy.

Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \in \mathbb{Z}^+$. A probar, (S_n) es de Cauchy

Sean $m, n \geq N$ $(m > n)$: $\Rightarrow |S_m - S_n| = \left| \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right| =$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \left| \frac{1}{k^2} \right| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2}$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2 - k} \leq \sum_{k=N}^{m} \frac{1}{k^2 - k} = \sum_{k=N}^{m} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right]$$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \ni n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \ni$ si $n \geq N \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \epsilon, \ \forall p,$
$p = 1, 2, \ldots$

Ej: Probar que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge (utilizando Cauchy)

Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, la n-ésima suma parcial.

A probar: (S_n) converge (i.e. (S_n) es de Cauchy).

Sea $N \in \mathbb{Z}^+$ y considere $m, \boxed{n \geq N}$ $(m > n)$ $\Rightarrow$

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \right| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} <$$

$\boxed{n+1 > n \geq N}$

$$\leq \sum_{k=N}^{m} \frac{1}{k^2}$$

$$< \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^2-k} = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$$

Fracciones parciales

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k-1}$$

$$= \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$= \sum_{k=N}^{\infty} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{N-1} - \cancel{\frac{1}{N}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{N}} - \cancel{\frac{1}{N+1}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{N+1}} - \cancel{\frac{1}{N+2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{N+2}} - \frac{1}{N+3}\right) + \cdots$$

Cuando se calculen muchos términos, se tiene que:

$$|S_m - S_n| < \sum_{k=N}^{\infty} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right] = \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N+\infty}$$

$$\Rightarrow |S_m - S_n| < \frac{1}{N-1} < \epsilon \Rightarrow N-1 > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow N > \frac{1}{\epsilon} + 1$$

$\Rightarrow$ Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $N = \frac{1}{\epsilon} + 1$ $\ni$ si $n, m \geq N$ $\Rightarrow$ $|s_m - s_n| < \epsilon$ $\Rightarrow$ (s_n) es de Cauchy $\Rightarrow$ (s_n) converge $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge.

<u>Otros problemas de Convergencia</u>:

Ej: $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ $\quad$ $(n^{1/n}) : 1, 2^{1/2}, 3^{1/3}, \ldots$

$: 1, 1.4142, 1.4422, \ldots$

Nótese que $n^{1/n} = 1 + r_n$, donde (r_n) es una sucesión de números reales. A probar: $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Entonces,

$$n^{1/n} = 1 + r_n$$

$$\Rightarrow n = (1 + r_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot r_n^{n-k} \geq$$

$\Rightarrow$ Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $N = \frac{1}{\epsilon} + 1$ $\ni$ Si $n, m \geq N$ $\Rightarrow$

$|s_m - s_n| < \epsilon$ $\Rightarrow$ (s_n) es de Cauchy $\Rightarrow$ (s_n)

converge $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge.

<u>Otros problemas de Convergencia</u>:

Ej: $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ $\quad (n^{1/n}) : 1, 2^{1/2}, 3^{1/3}, \ldots$

$: 1, 1.4142, 1.4422, \ldots$

Nótese que $\boxed{n^{1/n} = 1 + r_n}$, donde (r_n) es una sucesión de números reales. A probar: $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Entonces,

$$n^{1/n} = 1 + r_n$$

$$\Rightarrow \quad n = (1 + r_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r_n^k \cdot 1^{n-k} \geq$$

Ej: $\forall a>0$, $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$

Ayuda: Utilice la desigualdad de Bernoulli

Desigualdad de Bernouilli:

$\forall \boxed{x>-1}$, se tiene que $(1+x)^n \geq 1+nx$

Por inducción sobre n:

i) $n=1$ $\quad (1+x)^1 = 1+1\cdot x$

ii) Suponemos la prop. para $n=k$, i.e. $(1+x)^k \geq 1+kx$

iii) Probamos para $n=k+1$

$$\Rightarrow (1+x)^k \geq 1+kx$$

$$\Rightarrow (1+x)^k(1+x) \geq (1+x)(1+kx)$$
$$= 1+kx+x+kx^2$$
$$= 1+(k+1)x+kx^2$$

6

$\geq 1 + (k+1)x \Rightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$

$\Rightarrow (1+x)^n \geq 1 + xn. \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$

$\dashv$

Sol: Nótese que $a^{1/n} = 1 + r_n$, donde (r_n) es una sucesión de reales positivos. A probar: $r_n \to 0$.

$$\Rightarrow a^{1/n} = 1 + r_n \Rightarrow a = (1+r_n)^n \underset{\uparrow \text{Bernoulli}}{\geq} 1 + n\cdot(r_n)$$

$$\Rightarrow a \geq 1 + n(r_n) \geq n(r_n)$$

$$\Rightarrow r_n \leq \frac{a}{n} \Rightarrow \text{si } n \to \infty \Rightarrow \frac{a}{n} \to 0 \Rightarrow r_n \to 0$$

$$\Rightarrow a^{1/n} \longrightarrow 1.$$

$$\Rightarrow n \geq \binom{n}{2} r_n^2 \cdot 1^{n-2} \Rightarrow n \geq \frac{n!}{2!(n-2)!} r_n^2$$

$$\Rightarrow \cancel{n} \geq \frac{\cancel{n}(n-1)}{2} r_n^2 \qquad \frac{n\cdot(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\cdot \cancel{(n-2)!}}$$

$$\Rightarrow r_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \Rightarrow \frac{2}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow r_n \longrightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 0.$$

Eliminación de Formas indeterminados

Motivación: Suponga que $a_n = 1/n$ y $b_n = 1/n$

nótese que $\lim a_n = \lim b_n = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{0}{0}, \text{ pero } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/n} = 1$$

i.e Se puede tener que $a_n \to 0$ y $b_n \to 0$, y que además, la sucesión $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ converge.

¿Hay generalizaciones?

<u>Teorema</u>: (Stolz - Cesàro) (caso $\frac{0}{0}$)

Sean (a_n) y (b_n) sucesiones de reales $\ni$:

i) $a_n \to 0$, $b_n \to 0$

ii) (b_n) es una sucesión estrictamente monótona; y

iii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell$ {probablemente, $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$}

Entonces, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \ell$.

Gorbatov.
Matemática Discreta
Editorial Mir

<u>Dem:</u> Sea (b_n) una sucesión decreciente.

<u>caso 1</u>: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow$ dado $\epsilon > 0$

$\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni \left| \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - \ell \right| < \epsilon$

$\Leftrightarrow \quad -\epsilon < \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - \ell < \epsilon$

$$\Rightarrow \ell-\epsilon < \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} < \epsilon+\ell$$

← como (b_n) es decreciente
$\Rightarrow b_{n+1}-b_n<0$

$$\Rightarrow (\ell-\epsilon)(b_{n+1}-b_n) > a_{n+1}-a_n > (\epsilon+\ell)(b_{n+1}-b_n) \quad (*)$$

Fijemos un $n\in\mathbb{Z}^+$ y escribamos $(*)$ para $n, n+1, \dots, n+p-1$. Luego, sumamos las $p+1$ desigualdades, obteniéndose lo siguiente:

$$(\ell-\epsilon)(\cancel{b_{n+1}}-b_n) > a_{n+1}-a_n > (\epsilon+\ell)(b_{n+1}-b_n)$$

$$(\ell-\epsilon)(\cancel{b_{n+2}}-\cancel{b_{n+1}}) > a_{n+2}-a_{n+1} > (\epsilon+\ell)(b_{n+2}-b_{n+1})$$

$$\vdots$$

$$(\ell-\epsilon)(b_{n+p}-\cancel{b_{n+p-1}}) > a_{n+p}-a_{n+p-1} > (\epsilon+\ell)\cdot(b_{n+p}-b_{n+p-1})$$

$$\Rightarrow (\ell-\epsilon)(b_{n+p}-b_n) > a_{n+p}-a_n > (\ell+\epsilon)(b_{n+p}-b_n)$$

Si $p \to \infty$, se tiene que $b_{n+p} \to 0$ y $a_{n+p} \to 0$

$$\Rightarrow (\ell-\epsilon)(-b_n) > -a_n > (\ell+\epsilon)(-b_n)$$

$$\Rightarrow (\ell-\epsilon)(b_n) < a_n < (\ell+\epsilon)(b_n)$$

Caso(1.1) $b_n > 0 \Rightarrow \ell-\epsilon < \frac{a_n}{b_n} < \ell+\epsilon$

$$\Rightarrow -\epsilon < \frac{a_n}{b_n} - \ell < \epsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} - \ell \right| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$$

Teorema (Stolz-Césaro) (caso $\frac{0}{0}$)

Sean (a_n) y (b_n) sucesiones de reales $\ni$ $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ y (b_n) es estrictamente monótona.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l.$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

Dem: Considérese (b_n) es estrictamente decreciente $(b_n > 0)$

Casos: ① $l \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n > N$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - l \right| < \epsilon$$

$$\Rightarrow -\epsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - l < \epsilon$$

$$\Rightarrow l - \epsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{\underbrace{b_{n+1} - b_n}_{<0}} < l + \epsilon$$

$$\Rightarrow (l-\epsilon)(b_{n+1} - b_n) > a_{n+1} - a_n > (l+\epsilon)(b_{n+1} - b_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{(l-\epsilon)(b_n - b_{n+1}) < a_n - a_{n+1} < (l+\epsilon)(b_n - b_{n+1})} \quad \forall n > N$$

Sea $p \in \mathbb{Z}^+$, entonces:

$$\frac{a_n - a_{n+p}}{b_n - b_{n+p}} = \frac{(a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \dots + (a_{n+p-1} - a_{n+p})}{b_n - b_{n+p}}$$

$$= \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+p}} + \frac{a_{n+1} - a_{n+2}}{b_n - b_{n+p}} + \dots + \frac{a_{n+p-1} - a_{n+p}}{b_n - b_{n+p}}$$

$$\Rightarrow \frac{(l-\epsilon)(b_n - b_{n+1})}{b_n - b_{n+p}} + \frac{(l-\epsilon)(b_{n+1} - b_{n+2})}{b_n - b_{n+p}} + \dots + \frac{(l-\epsilon)(b_{n+p-1} - b_{n+p})}{b_n - b_{n+p}}$$

$$\leq \frac{a_n - a_{n+p}}{b_n - b_{n+p}} \leq$$

$$\leq \frac{(l+\epsilon)(b_n - b_{n+1})}{b_n - b_{n+p}} + \dots + \frac{(l+\epsilon)(b_{n+p-1} - b_{n+p})}{b_n - b_{n+p}}$$

$$\Rightarrow \frac{(l-\epsilon)}{\cancel{b_n - b_{n+p}}} \cancel{(b_n - b_{n+p})} \leq \frac{a_n - a_{n+p}}{b_n - b_{n+p}} \leq \frac{(l+\epsilon)}{\cancel{b_n - b_{n+p}}} \cancel{(b_n - b_{n+p})}$$

Fijamos n y hacemos $p \to \infty$ $\quad a_{n+p} \longrightarrow 0$ y $b_{n+p} \to 0$

(hipótesis)

$$\Rightarrow l-\epsilon < \frac{a_n}{b_n} < l+\epsilon \Rightarrow -\epsilon < \frac{a_n}{b_n} - l < \epsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < \epsilon, \quad \forall n > N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

② $l = \infty$:

Sea $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni \forall n > N$, se tiene

que $$\frac{a_{n+1}-a_n}{\underbrace{b_{n+1}-b_n}_{<0}} > \epsilon.$$ Entonces

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n < \epsilon(b_{n+1} - b_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n - a_{n+1} > \epsilon(b_n - b_{n+1}), \quad n > N}$$

Sean $m, n > N \ni m > n$. Entonces

$$\Rightarrow a_n - a_m = (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \dots + (a_{m-1} - a_m)$$

$$= \sum_{k=n}^{m-1} (a_k - a_{k+1})$$

$$> \epsilon \sum_{k=n}^{m-1} (b_k - b_{k+1})$$

$$= \epsilon (b_n - b_m)$$

$\Rightarrow a_n - a_m > \epsilon (b_n - b_m)$. Dividimos por b_n.

$\Rightarrow \dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a_m}{b_n} > \epsilon \left(1 - \dfrac{b_m}{b_n}\right)$. Hacemos $m \to \infty$

$\Rightarrow \dfrac{a_n}{b_n} > \epsilon$ para $n > N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty.$

$\square$

Teorema (Stolz - Césaro): Sean (a_n) y (b_n) sucesiones de reales $\ni$ (b_n) es estrictamente creciente a ∞ y que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$

$\square$

Nota: El converso del Teorema Stolz-Cesaro no se cumple; en efecto, considere:

$$a_n = \frac{1}{3n-(-1)^n} \quad \text{ó} \quad b_n = \frac{1}{3n+(-1)^n}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, pero $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ no existe.

Teorema (converso de Stolz-Césaro): Sean (a_n) y (b_n) sucesiones $\ni$:

i) $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n < \dots$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}$

iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = L \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Entonces, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell$

$\square$

1.- Encuentre $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$

- Nótese que (n^3) es estrictamente creciente y $\lim_{n\to\infty} n^3 = \infty$

- Sean $(a_n) = (1^2+2^2+\cdots+n^2)$ y $(b_n) = (n^3)$

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = [1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2] - [1^2+2^2+\cdots+n^2]$$

$$= (n+1)^2 = n^2+2n+1$$

$$b_{n+1} - b_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2+3n+1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{3n^2+3n+1} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

2.- Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2\sqrt{e}+3\sqrt[3]{e}+\dots+n\sqrt[n]{e}}{n^2}$

Sol: Sea $a_n = 1+2\sqrt{e}+\dots+n\sqrt[n]{e}$; $b_n = n^2$.

Nótese que (b_n) es estrictamente creciente y $b_n \to \infty$. Además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)e^{1/(n+1)}}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)\cdot \lim_{n\to\infty} e^{1/n+1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)(1) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = 1/2.$$

3) Calcule $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(n+1)}$

Sol: Sean $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ y $b_n = \ln(n+1)$

Nótese que b_n es creciente y $b_n \to \infty$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\ln(n+1)-\ln(n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\ln(e)} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$