Clase de Diferenciación - Análisis de Variable Real 1

Rudik Rompich

June 1, 2021

Def: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in A$. Se dice que f es continua en x_0, sii $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, i.e. si $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ni$ si $x \in A$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Nota: ① $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- $f(x_0)$ está definida ①
- $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe ②
- Se cumple la igualdad ① y ②

② La continuidad es una propiedad local de la función.

③ La función es continua en $B \subseteq A$, sii f es continua en cada punto de B.

④ **Notaciones:** ① $\mathbb{R}^A$: el conjunto de funciones de A en $\mathbb{R}$

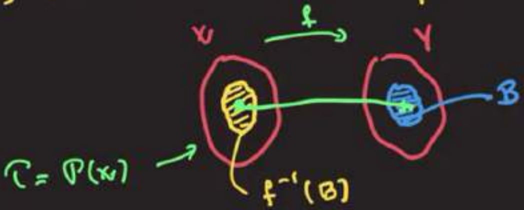
② $C(A)$: el conjunto de funciones continuas en A

Algunas propiedades de funciones:

Sea $f: X \to Y$. Entonces:

1) Si $A \subseteq X \Rightarrow f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$ es la imagen de A.

2) Si $B \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(B) = \{ x \in X \ni f(x) \in B \}$



Propiedades de la Imagen.

1) $f(\phi) = \phi$

2) Si $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$

3) $f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$

4) $f(\bigcap_i A_i) \subseteq \bigcap_i f(A_i)$

Propiedades de la preimagen:

1) $f^{-1}(\phi) = \phi$

2) $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$

3) $f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$

4) $f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i)$

<u>Dem</u>: 1) $f(\phi) = \{ f(x) : \underbrace{x \in \phi}_{\nexists} \} = \phi$

2) Sea $\boxed{A_1 \subseteq A_2}$ y sea $\boxed{y \in f(A_1)}$. A probar!

$y \in f(A_2)$

como $y \in f(A_1) \Rightarrow \exists x \in A_1 \ni f(x) = y$.

Pero, como $x \in A_1 \Rightarrow x \in A_2 \Rightarrow y = f(x) \in f(A_2)$

3) $(\subseteq)$ A probar: $f(\bigcup_i A_i) \subseteq \bigcup_i f(A_i)$; i.e.

Si $y \in f(\bigcup_i A_i) \Rightarrow y \in \bigcup_i f(A_i)$

- Sea $y \in f(\bigcup_i A_i) \Rightarrow \exists x \in \bigcup_i A_i \ni f(x) = y$

$\Rightarrow x \in A_i$, para algún i. $\Rightarrow f(x) = y \in f(A_i)$

para algún i, $\Rightarrow$ $y = f(x) = \bigcup_i f(A_i)$

$(\supseteq)$ A probar: $\bigcup_i f(A_i) \subseteq f(\bigcup_i A_i)$. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Si $y \in \bigcup_i f(A_i) \Rightarrow y \in f(\bigcup_i A_i)$

- Sea $y \in \bigcup_i f(A_i) \Rightarrow y \in f(A_i)$, para algún i

$\Rightarrow \exists\, x \in A_i \ni f(x) = y$. Entonces, $x \in A_i \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \bigcup_i A_i \Rightarrow y = f(x) \in f(\bigcup_i A_i)$.

$\Rightarrow f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$

4) A probar: $f(\bigcap_i A_i) \subseteq \bigcap$

- Si $y \in f(\bigcap_i A_i) \Rightarrow \exists\, x \in \bigcap_i A_i \ni f(x) = y$.

$\Rightarrow x \in A_i, \forall i \Rightarrow y = f(x) \in f(A_i), \forall i$

$\Rightarrow y \in \bigcap_i f(A_i)$. Entonces,

$$f(\bigcap_i A_i) \subseteq \bigcap_i f(A_i).$$

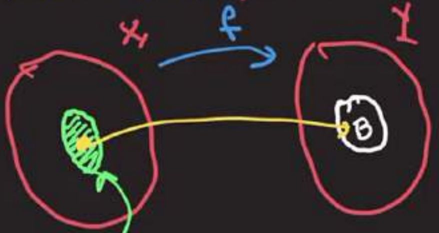
La contención $\bigcap_i f(A_i) \subseteq f(\bigcap_i A_i)$ **NO** se cumple necesariamente. En efecto, considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(x) = 1$; sea $A = (0,1)$ y $B = (1,2)$:

$\Rightarrow f(A) \cap f(B) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$

$f(A \cap B) = f[(0,1) \cap (1,2)] = f(0$

$$\Rightarrow f(A)\cap f(B) = \{1\} \not\subseteq \phi = f(A\cap B) \qquad \perp$$

Nota.



$$f^{-1}(B) = \{x \in X \ni f(x) \in B\}$$

5) A probar: $f^{-1}(\phi) = \phi$

- $f^{-1}(\phi) = \{x \in X : \underbrace{f(x) \in \phi}_{\text{Falso}}\} = \phi$

6) A probar: Si $B_1 \subseteq Y$, $B_2 \subseteq Y \ni B_1 \subseteq B_2$

$\Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$..

- Sea $x \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow f(x) \in B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f(x) \in B_2$

  $\Rightarrow x \in f^{-1}(B_2)$

7) A probar! $f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$

($\subseteq$) A probar: $f^{-1}(\bigcup_i B_i) \subseteq \bigcup_i f^{-1}(B_i)$

- Sea $x \in f^{-1}(\bigcup_i B_i) \Rightarrow f(x) \in \bigcup_i B_i \Rightarrow f(x) \in B_i$, para algún i $\Rightarrow x \in f^{-1}(B_i)$, para ese i.

  $\Rightarrow x \in \bigcup_i f^{-1}(B_i)$.

($\supseteq$) A probar $\bigcup_i f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}(\bigcup_i B_i)$

- Sea $x \in \bigcup_i f^{-1}(B_i) \Rightarrow x \in f^{-1}(B_i)$, para algún i.

$\Rightarrow f(x) \in B_i \Rightarrow f(x) \in \bigcup_i B_i \Rightarrow x \in f^{-1}(\bigcup_i B_i)$.

$\Rightarrow \quad f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$.

8) $f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i)$

($\subseteq$) A probar: $f^{-1}(\bigcap_i B_i) \subseteq \bigcap_i f^{-1}(B_i)$

- Sea $x \in f^{-1}(\bigcap_i B_i) \Rightarrow f(x) \in \bigcap_i B_i \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \in B_i,\ \forall i \Rightarrow x \in f^{-1}(B_i),\ \forall i \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \bigcap_i f^{-1}(B_i)$

$(\supseteq)$ A probar: $\bigcap_i f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}(\bigcap_i B_i)$

- Sea $x \in \bigcap_i f^{-1}(B_i) \Rightarrow x \in f^{-1}(B_i), \forall i$

$\Rightarrow f(x) \in B_i, \forall i \Rightarrow f(x) \in \bigcap B_i \Rightarrow x \in f^{-1}(\bigcap_i B_i)$

$\Rightarrow f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i).$

$\square$

<u>Prop</u>: $f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c$; $f: X \to Y$ $\Rightarrow B^c = Y - B$

<u>Dem</u>: $(\subseteq)$ A probar: $f^{-1}(B^c) \subseteq [f^{-1}(B)]^c$

- Sea $x \in f^{-1}(B^c) \Rightarrow f(x) \in B^c \Rightarrow f(x) \notin B$

$\Rightarrow x \notin f^{-1}(B)$

00:45:09

17 / 17

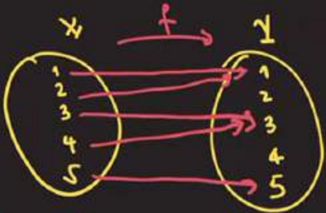
($\supseteq$) A probar: $[f^{-1}(B)]^c \subseteq f^{-1}(B^c)$.

Sea $x \in [f^{-1}(B)]^c \Rightarrow x \notin f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \notin B$

$\Rightarrow f(x) \in B^c \Rightarrow x \in f^{-1}(B^c)$.

$\Rightarrow f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c$. $\square$

Nota:



$f^{-1}[\underbrace{\{1,3\}}_{\subseteq Y}] = \underbrace{\{1,2,3,4\}}_{\subseteq X}$; $f^{-1}[\underbrace{\{2,4\}}_{\subseteq Y}] = \emptyset$

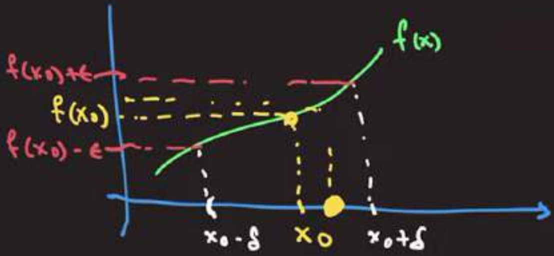
Nota ① Retorno a la definición de continuidad:

• La función $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $\boxed{x_0 \in I}$

si $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ni$ si $x \in I$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ ... $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

②

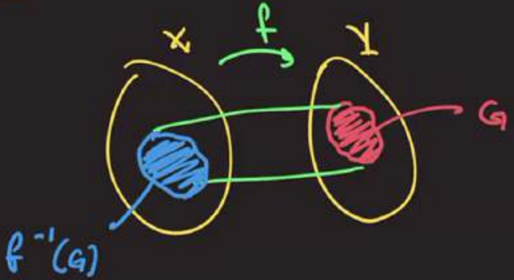


Dado $\epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ni f[I \cap V_\delta(x_0)] \subseteq V_\epsilon(f(x_0))$

Teorema: Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Los enunciados siguientes son equivalentes:

1) f es continua en D.

2) Si G es un abierto de $\mathbb{R} \Rightarrow$ existe un abierto G_1 de $\mathbb{R}$ $\ni$ $G_1 \cap D = f^{-1}(G)$



Def: un homeomorfismo es una función bicontinua y biyectiva entre dos espacios topológicos.

Es decir: $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y) \Rightarrow f$ es homeomorfismo ssi

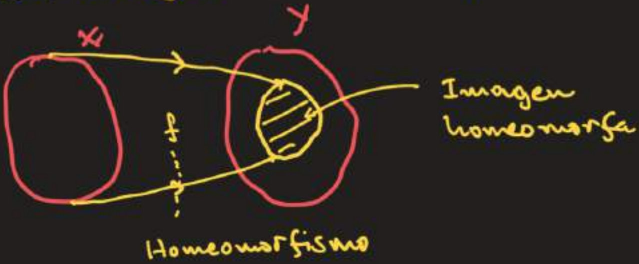
i) f es continua

ii) f es biyectiva (i.e f tiene inversa)

iii) La inversa de f es continua.

En este caso, X & Y son espacios homeomorfos; i.e son topológicamente indistinguibles.

Def: Una propiedad topológica es una propiedad que, si la tiene el espacio topológico dominio la tiene cada imagen homeomorfa.



Nota: ① Las propiedades topológicas son el objeto de estudio de la Topología y el Análisis.

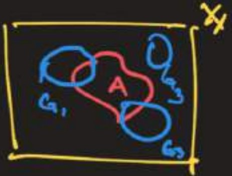
Topología: No hay métrica

Análisis: Hay métrica.

② Un espacio metrizable es un espacio topológico (X, τ) con la propiedad que existe al menos una métrica en X, cuya clase de abiertos generada es τ.

Nota: Sea A un subconjunto no vacío del espacio topológico (X, τ). Considere la clase siguiente:

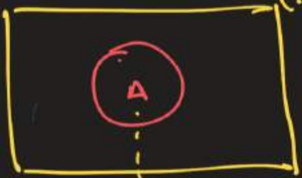
$$\tau_A = \{ A \cap G : G \in \tau \}$$



$\Rightarrow$ τ_A es una topología sobre A (la topología relativa de A)

Nota :

(X,τ)



(A,τ^*)

Espacio topológico nuevo

τ^* cualquier otra topología $\neq \tau_A$

(X,τ)

(A,τ_A)

A es un subespacio de X (topológico)

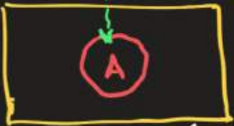
¿Qué pasa con los esp. métricos?

(M,d)

(A,d^*), d^* es métrica, $d^* \neq d$.

$(A, d'|_A)$

(M,d')



Subespacio métrico

<u>Teorema</u>: Sea $f: \boxed{D \subseteq \mathbb{R}} \to \mathbb{R}$. Entonces, los enunciados siguientes son equivalentes:

1) f es continua sobre D.

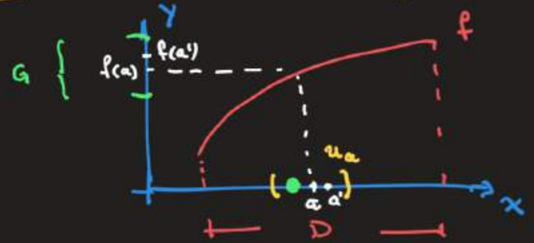
2) Si G es un abierto de $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\exists$ un abierto G_1 de $\mathbb{R}$ $\ni$ $f^{-1}(G) = G_1 \cap D$ ... abierto de D

3) Si H es un cerrado de $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\exists$ un cerrado H_1 de $\mathbb{R}$ $\ni$ $f^{-1}(H) = H_1 \cap D$

⌈Sea $f: D \to \mathbb{R}$; f es continua en D ssi $\forall$ G abierto de $\mathbb{R}$, se tiene que $f^{-1}(G)$ es abierto de D.

<u>Nota</u>: Probaremos: 1) $\Rightarrow$ 2) y 2) $\Rightarrow$ 1)
El resto: ejercicio)

Dem: (1)⇒(2) Suponemos que f es continua en D.



$f^{-1}(G)$ es abierto de D

Si $a \in D \Rightarrow f$ es continua en $a \Rightarrow$ Dada la vecindad $\boxed{G \text{ de } f(a)}$, existe una vecindad U_a de a $\ni$ si: $x \in U \cap D \Rightarrow f(x) \in G$. Entonces, se repite

$f(a) \in G \Leftrightarrow a \in f^{-1}(G)$

el argumento para cada $a \in f^{-1}(G)$ ∘∘∘ $a \ni f(a) \in G$

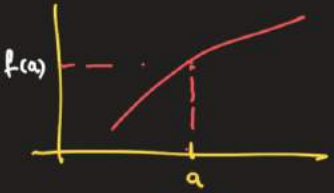
$$\Rightarrow \quad G_1 = \bigcup_{a \in f^{-1}(G)} U_a \leftarrow \text{abiertas}$$

, el cual es abierto de $\mathbb{R}$ y es t.q. si $x \in G_1 \cap D \Rightarrow f(x) \in G$

$\Rightarrow f^{-1}(G) = D \cap G_1.$

$\Leftarrow$) 1) Sea $a \in D$. A probar f es continua en a.

Sea G una vecindad abierta cualquiera de $f(a)$



$\Rightarrow$ Por (2): existe un abierto $G_1 \ni f^{-1}(G) = G_1 \cap D$

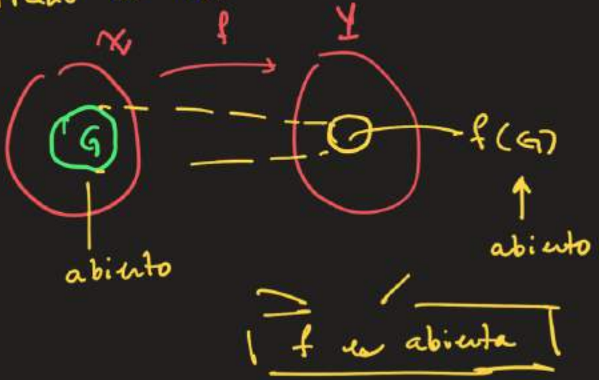
Si $f(a) \in G \Rightarrow a \in f^{-1}(G) = G_1 \cap D \Rightarrow a \in G_1$

↑ vecindad de a

$\Rightarrow$ Si $x \in G_1 \cap D \Rightarrow x \in f^{-1}(G) \Leftrightarrow f(x) \in G.$

Def: 1) $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es <u>abierta</u>, si para cada abierto G de D, se tiene que $f(G)$ es abierto de $\mathbb{R}$.

2) $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es <u>cerrada</u>, si para cada cerrado H de D, se tiene que $f(H)$ es cerrado de $\mathbb{R}$.



Ej: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(x) = x^2$. Considere $A = (-1, 1) \Rightarrow f(A) = [0, 1) \Rightarrow f$ no es abierta.

Conjetura:

1) Si f es biyectiva $\Rightarrow f$ es abierta
2) Si f es biyectiva y $\boxed{\text{continua}} \Rightarrow f$ es abierta *

? 3) Si f es continua $\not\Rightarrow f$ es abierta

Ej: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(x) = x^2$. Considere $A = (-1, 1) \Rightarrow f(A) = [0, 1) \Rightarrow f$ no es abierta.

Conjetura:

1) Si f es bigectiva $\Rightarrow f$ es abierta
2) Si f es biyectiva y $\boxed{\text{continua}} \Rightarrow f$ es abierta

? 3) Si f es continua $\not\Rightarrow f$ es abierta *

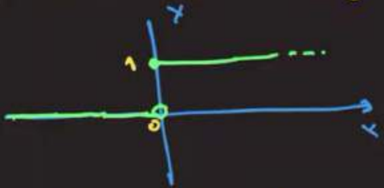
Ej: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, un cerrado cualquiera $\Rightarrow f(A) = \{1\} =$

$$= \Big[\underbrace{\underbrace{(-\infty, 1)}_{\text{abierto}} \cup \underbrace{(1, \infty)}_{\text{abierto}}}_{\text{abierto}}\Big]^c$$

, el cual es un cerrado de $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x) = 1$ es una función cerrada. Sin embargo, $f(\underbrace{(0,1)}_{\text{abierto}}) = \underbrace{\{1\}}_{\text{cerrado}} \Rightarrow f$ no es abierta.

Ej: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$



$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) \text{ no existe.}$$

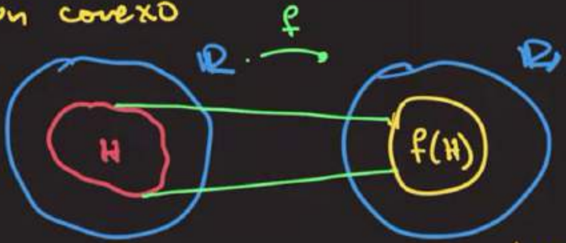
$\Rightarrow f$ es discontinua en $x = 0$.

Sea $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$, el cual es un cerrado $\Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(\underbrace{\{0\}}_{\text{cerrado de } \mathbb{R}}) = \underbrace{(-\infty, 0)}_{\text{abierto de } \mathbb{R}} \Rightarrow f$ no es continua.

$f: H \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

<u>Teorema</u>: Sea $H \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto conexo y f una función continua sobre H. Entonces, $f(H)$ es un conexo



Γ $D \subseteq \mathbb{R}$ es <u>disconexo</u>, si existen abiertos disjuntos A y B ∋ $A \neq \phi$, $B \neq \phi$, $D \cap A \neq \phi$, $D \cap B \neq \phi$, y cumplen:

$$(D \cap A) \cap (D \cap B) = \phi$$

$$(D \cap A) \cup (D \cap B) = D$$

Blackboard 30

$$p \Rightarrow q$$

H es conexo — f(H) es conexo

f continua

Supuesto $p \wedge \bar{q}$

→ H es conexo y f(H) es disconexo

→ f es continua

Blackboard 30

Dem: Sea H un convexo de $\mathbb{R}$ y f una función continua. Supóngase, por el absurdo, que $f(H)$ es disconexo. $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Existen abiertos disjuntos y no vacíos

A y B de $\mathbb{R}$, $\ni$

$$[f(H) \cap A] \cap [f(H) \cap B] = \phi$$

$$[f(H) \cap A)] \cup [f(H) \cap B] = f(H)$$

Por la continuidad de f, existen abiertos no vacíos

A_1 y B_1 de X, $\ni$ $f^{-1}(A) = \underbrace{A_1 \cap H}_{\text{abierto de } H}$

Top. rel.

y $f^{-1}(B) \overset{!}{=} \underbrace{B_1 \cap H}_{\text{abierto de } H}$

Entonces,

$$(A_1 \cap H) \cap (B_1 \cap H) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) =$$

$$= f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\phi) = \phi \qquad *$$

$$(A_1 \cap H) \cup (B_1 \cap H) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) =$$

$$= f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(f(H)) = H$$

$\Rightarrow$ A_1 y B_1 forman una disconexión de H $(\rightarrow\leftarrow)$

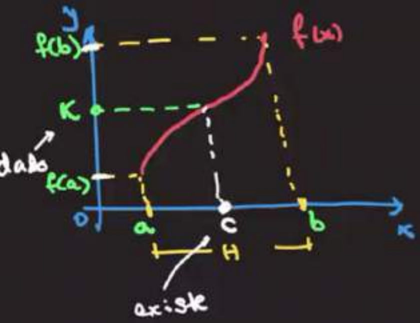
$\Rightarrow$ $f(H)$ es conexo. $\square$

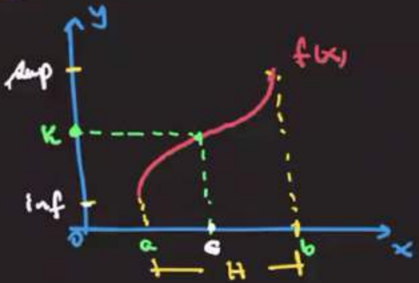
<u>Teorema</u> (del valor intermedio) (Bolzano)

Sea H un subconjunto de $\mathbb{R}$ y sea f una función continua y acotada sobre H con valores en $\mathbb{R}$. Si $K \in \mathbb{R}$ $\ni$

$$\inf\{f(x) : x \in H\} < K < \sup\{f(x) : x \in H\},$$

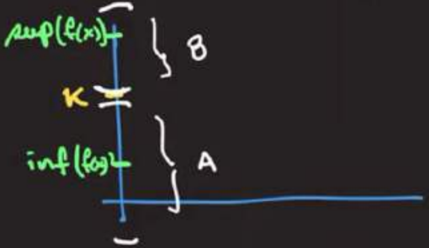
$$\Rightarrow \exists\, c \in H \ni f(c) = K.$$





Dem: Sean H convexo de $\mathbb{R}$, y f continua y acotada sobre H. ($\Rightarrow f(H)$ es convexo)

Considere: $A=\{t\in\mathbb{R} \ni t<K\}$ y $B=\{t\in\mathbb{R} \ni t>K\}$



Nótese que A y B son abiertos no vacíos y disjuntos de $\mathbb{R}$, $\Rightarrow$ como f es continua, existen A_1 y B_1 abiertos de $\mathbb{R}$, tales que:

$$f^{-1}(A)=A_1\cap H \quad \& \quad f^{-1}(B)=B_1\cap H$$

Si f no toma el valor de $k \Rightarrow A_1$ y B_1 forman un disconexión de H ($\rightarrow\leftarrow$). Entonces f tiene que tomar el valor de k, i.e. $\exists$ $c \in H \ni f(c) = k$. $\square$

Problemas:

1. ¿Es cierto que si una función f cumple con la propiedad del valor intermedio, entonces f es continua.

2. Puede que, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es inyectiva y tiene la propiedad del valor intermedio, $\Rightarrow$ f es estrictamente monótona.

• Si $K \in \mathbb{R} \ni \inf\{f(x) : x \in H\} < K < \sup\{f(x) : x \in H\}$

$\Rightarrow \exists\, c \in H \ni f(c) = K.$ f: acotada

convexo

La propiedad del valor intermedio.

Teorema: Si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y si $f : K \to \mathbb{R}$ es continua sobre K $\Rightarrow f(K)$ es un compacto.

$$f(K) \subseteq \bigcup_{\alpha} G_{\alpha} \Rightarrow K \subseteq f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha} G_{\alpha}\Big)$$

$$K = \bigcup_{\alpha} \underbrace{f^{-1}(G_{\alpha})}$$

Teorema: Si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y $f: K \to \mathbb{R}$ es continua sobre K, entonces $\boxed{f(K) \text{ es compacto}}$ (La compacidad se preserva bajo mapeos continuos).

Dem. Sea $G = \{G_\alpha\}$ una cubierta abierta de $f(K)$; i.e. $f(K) \subseteq \bigcup_\alpha G_\alpha$, G_α abierto.

$$\Rightarrow f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_\alpha G_\alpha\right)$$

$$\Rightarrow K \subseteq \bigcup_\alpha \underbrace{f^{-1}(G_\alpha)}_{\substack{\text{abierto}, \forall \alpha, \\ \text{en el dominio}}}$$

f es continua
G_α es abierto

$\{f^{-1}(G_\alpha)\}$ es cub. abierta de

Como K es compacto $\Rightarrow$ existen

$$\{f^{-1}(G\ ), f^{-1}(G\ ), \dots, f^{-1}(G\ )\} \ni$$

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_i)$$

$$\Rightarrow f(K) \subseteq f\left[\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_i)\right]$$

$$\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f\left[f^{-1}(G_i)\right]$$

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

$\Rightarrow f(K)$ es compacto. $\square$

Como K es compacto $\Rightarrow$ existen

$$\{f^{-1}(G_{\alpha_1}), f^{-1}(G_{\alpha_2}), \dots, f^{-1}(G_{\alpha_n})\} \ni$$

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_{\alpha_i})$$

$$\Rightarrow f(K) \subseteq f\left[\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_i)\right]$$

$$\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f\left[f^{-1}(G_i)\right]$$

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

$\Rightarrow f(K)$ es compacto. $\square$

Teorema (caracterización secuencial de compacto)

Un subconjunto K de $\mathbb{R}$ es compacto ssi cada sucesión en K tiene una subsucesión que converge a un punto en K.

Dem:

($\Rightarrow$) Como $K \subseteq \mathbb{R}$, es compacto, entonces por Heine-Borel, K es cerrado y acotado.

- Como K es acotado y si (x_n) es una sucesión cualquiera en K $\Rightarrow$ (x_n) es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$,

Por el teorema de Bolzano-Weierst

$\Rightarrow$ (x_n) tiene una subsucesión convergente.
i.e. existe la subsucesión $(x_{n_k}) \ni$
$x_{n_k} \longrightarrow c$.

$\therefore$ Como K es cerrado $\Rightarrow$ K contiene a todos sus puntos límite. En particular, $c \in K$.

$(\Leftarrow)$ Ejercicio.

<u>Ayuda</u>: Pruebe utilizando contrapuesta por casos.

$$q \Rightarrow p \iff \bar{p} \Rightarrow \bar{q}$$

$\bar{p}$: K no es compacto $\rightarrow$ K no es cerrado / K no es acotado

Teorema: La imagen de un compacto bajo un mapeo continuo es compacto.

Dem: Sea K un compacto y f una función continua. A probar: $f(K)$ es compacto.

- Sea (y_n) una sucesión en $f(K)$. Entonces,

$$\exists\, x_n \in K \ni x_n = f(y_n),\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$\uparrow$ forman una sucesión en K

Como K es compacto $\Rightarrow$ (x_n) tiene una subsucesión (x_{n_k}) que converge a c.

Como f es continua $\Rightarrow$ la subsucesión

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \longrightarrow f(c) \in f(K). \Rightarrow f(K) \text{ es compacto.}$$

Nota ① Recordemos (Heine-Borel):

$K \subseteq \mathbb{R}$ es compacto ssi K es cerrado y acotado

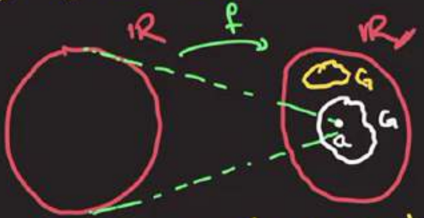
② Si $\{K_\alpha\}$ es colección de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$, entonces $\prod_\alpha K_\alpha$ es compacto (Teorema de Tychonoff Tikonov)

③ • Un conjunto cerrado y acotado en un espacio métrico (X, ρ), ¿Es compacto?

•• Si K es un conjunto compacto en el métrico (X, ρ), ¿Es cerrado y acotado?

Ejemplos:

1) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ni$ $f(x) = a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Entonces, f es continua.

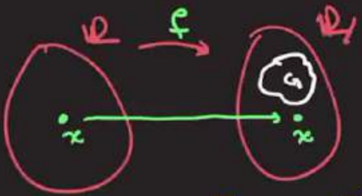


$\Rightarrow$ Sea G un abierto cualquiera de $\mathbb{R}$,

entonces: $$f^{-1}(G) = \begin{cases} \mathbb{R} & , a \in G \\ \phi & , a \notin G \end{cases}$$

Como $\mathbb{R}$ y ϕ son abiertos de $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f es continua.

2) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_I \ni f(x)=x \Rightarrow f$ es continua.



Sea G un abierto de $\mathbb{R}_I \Rightarrow f^{-1}(G)=G$, el cual es un abierto de $\mathbb{R} \Rightarrow f$ es continua.

3) (**) Suponga que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son funciones continuas. Entonces,

$$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

es continua.

$$\mathbb{R} \qquad\qquad \mathbb{R}' \qquad\qquad \mathbb{R}''$$

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(g^{-1}(H)) \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & g^{-1}(H) \arrow[l] \arrow[r, bend left, "g"] & H \arrow[l] \end{tikzcd}$$

4) Considere la función siguiente:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ni$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(Función de Dirichlet)

f es discontinua en cada $x \in \mathbb{R}$.

Continuidad (cont...)

Nota: 1) Criterio de continuidad: una función $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $c \in A$ ssi para cada sucesión $(x_n) \subset A \ni x_n \to c$, se tiene que $f(x_n) \to f(c)$.

2) Criterio de discontinuidad: Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ y $c \in A$. Entonces, f es discontinua en c ssi existe una sucesión $(x_n) \subset A \ni x_n \to c$ y $f(x_n) \not\to f(c)$.

Nota: 1) Sea $x \in \mathbb{Q}$ y considere la sucesión de irracionales $\left(x + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \left(x + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = x \in \mathbb{Q}.$$

*2) Sea $y \in \mathbb{I}rr \Rightarrow$ considere $\boxed{}$ de racionales, tal que cumple $\lim_{n\to\infty} \boxed{} = y$.

Ej: Considere la función de Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I}rr. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ es discontinua en cada punto.

En efecto:

i) Sea $c \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ sea (x_n) una sucesión de irracionales $\ni$ $x_n \longrightarrow c \Rightarrow f(x_n) = (0)$ (la sucesión constante cero) $\Rightarrow$

$$f(x_n) \not\longrightarrow f(c) = 1$$
$$(0)_n \longrightarrow 0$$

ii) Sea $d \in \mathbb{I}rr$ y sea (y_n) una sucesión de racionales $\ni$ $y_n \longrightarrow d \Rightarrow f(y_n) = (1)$ (la sucesión constante 1) $\Rightarrow$

$$f(y_n) \not\longrightarrow f(d) = 0$$
$$(1) \longrightarrow 1$$

Def: Un conjunto A es <u>denso</u> en B si

$$\bar{A} = B.$$

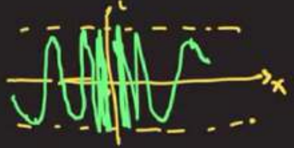
Ej: $\boxed{\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}}$; $\bar{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}_{rr}$ son densos en $\mathbb{R}$).

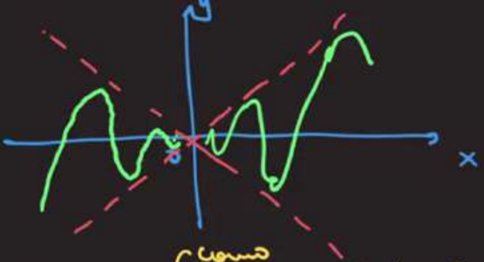
* Ver en Bartle & Sherbert: ① función Thomae

② Continuidad de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $\mathbb{R}$.

Ej: Considere $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Entonces, $f(x)$ es continua, $\forall x \in \mathbb{R}$.





i) Sea $x \neq 0 \Rightarrow$ como $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ son continuas, $\forall x \neq 0 \Rightarrow f(x) = x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ es continua.

ii) Sea $c = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, se tiene que:

$$|f(x) - f(\underset{c}{0})| = \left|x\,\text{sen}\,\frac{1}{x} - 0\right| = \left|x\,\text{sen}\,\frac{1}{x}\right| \leq |x|$$

$\Rightarrow$ Si $x \to 0 \Rightarrow |f(x) - 0| \to 0 \Rightarrow f$ es continua en $x = 0$.

Nota: 1) $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está **acotada** en A, si $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in A$.

$\uparrow \in \mathbb{R}!$

2) $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **no está acotada** en A, si $\forall M > 0$ $\exists$ $x_M \in A$ $\ni$ $|f(x_M)| > M$.

Teorema: Sea $I = [a, b]$ un compacto y $f: I \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, f está acotada en I.

Nota: 1) $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está acotada en A, si $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in A$.

$\uparrow \in \mathbb{R}!$

2) $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no está acotada en A, si $\forall M > 0$ $\exists$ $x_M \in A$ $\ni$ $|f(x_M)| > M$.

Teorema: Sea $I = [a, b]$ un compacto y $f: I \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, f está acotada en I.

Dem: Supóngase, por el absurdo, que f no está acotada en I.

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \ \exists \underset{\uparrow (x_n)}{x_n} \in I \ni |f(x_n)| > n.$$

$\Rightarrow$ Como I es compacto $\Rightarrow$ I es acotado $\Rightarrow$ $(x_n) \subseteq I$ es acotada $\Rightarrow$ existe (x_{n_k}) subsucesión de (x_n) $\ni$ $x_{n_k} \to x'$. Como I cerrado $\Rightarrow$ $x' \in I$. Pero f es continua en I $\Rightarrow$ f es continua en x' $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\underbrace{f(x_{n_k})}_{} \to f(x')$ $\Rightarrow$ $(f\underbrace{(x_{n_k})}_{})$ está acotada $(\rightarrow\leftarrow)$. Entonces, f está acotada. $\square$

Def: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que:

1) f tiene <u>máximo absoluto en A</u>, si $\exists\, x' \in A \ni$ $f(x') \geq f(x)$, $\forall x \in A$.

2) f tiene <u>mínimo absoluto en A</u>, si $\exists\, x'' \in A \ni$ $f(x'') \leq f(x)$, $\forall x \in A$.

Teorema (del valor extremo) (Weierstrass)

Sea I un compacto y, si $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f tiene máximo y mínimo absolutos en I.

- Como $\phi \neq f(I) \subseteq \mathbb{R}$, y como I es compacto,
$\Rightarrow f(I)$ es compacto $\Rightarrow f(I)$ es acotado.
$\Rightarrow f(I)$ tiene supremo, digamos s;
i.e. $s = \sup\{f(x) : x \in I\}$.

A probar: $\exists\, x' \in I \ni f(x') = s$.

-- Considere el número $s - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$
$s - \frac{1}{n}$ no es cota superior de $f(I)$; i.e.,
$\exists\, x_n \in I \ni s - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$
$\uparrow (x_n)$

--- Como I es compacto $\Rightarrow I$ es acotado.
Dada $(x_n) \subseteq I \Rightarrow (x_n)$ es acotada

$\Rightarrow$ Por Bolzano-Weierstrass, (x_n) tiene una subsucesión $(x_{n_k}) \ni x_{n_k} \longrightarrow x' \in I$ (I es cerrado).

Además, como f es continua en I, f es continua en x' $\Rightarrow f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x')$

$\Rightarrow$ Como $s - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq s$

$\Rightarrow$ Para k grande, y aplicando el teorema de compresión, se tiene que

$$s \leq f(x') \leq s$$

$\Rightarrow \exists\, x' \in I \ni f(x') = s$. $\Rightarrow f$ alcanza su máximo absoluto en I.

$\square$

Nota: $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in A$ si,

$\forall \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \ni$ si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Def: Una función $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua (sobre A) si, $\forall \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \ni \forall\ x, x' \in A, |x - x'| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon$.

- Dado $\epsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\epsilon$ $> 0 \ni$ si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$
  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
- Dado $\epsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\epsilon$ $> 0 \ni$ si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$
  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
- Dado $\epsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\epsilon,$ $> 0 \ni$ si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$

Nota: $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in A$ si,

$\forall \epsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 \ni$ si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Def: Una función $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua (sobre A) si, $\forall \epsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 \ni \forall\, x, x' \in A$, $|x - x'| < \delta$ $\Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon$.

Nota:

1) Continuidad uniforme $\Rightarrow$ continuidad. En general, el converso es falso. En efecto, sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(x) = x^2$. Supóngase f es uniformemente continua

y hagamos $\epsilon = 1$. Entonces, debe existir $\delta = \delta(\epsilon) > 0 \ni \forall x, x' \in \mathbb{R}$, si $|x - x'| < \delta \Rightarrow$
$|f(x) - f(x')| = |x^2 - (x')^2| < 1$.

Sean $x = \frac{\delta}{2}$ y $x' = \frac{\delta}{2} + \frac{2}{\delta}$. Entonces,

$$|x - x'| = \left|\frac{\delta}{2} - \left(\frac{\delta}{2} + \frac{2}{\delta}\right)\right| = \left|-\frac{2}{\delta}\right| = \frac{2}{\delta} < \delta, \text{ y}$$

$$|x^2 - (x')^2| = \left|\frac{\delta^2}{4} - \left(\frac{\delta}{2} + \frac{2}{\delta}\right)^2\right| = \left|\cancel{\frac{\delta^2}{4}} - \left(\cancel{\frac{\delta^2}{4}} + 2 + \frac{4}{\delta^2}\right)\right|$$

$$= \left|-2 - \frac{4}{\delta^2}\right| = 2 + \boxed{\frac{4}{\delta^2}} > 1$$

*2) Si el dominio de una función es acotado, la continuidad uniforme también puede fallar.

3) La continuidad uniforme se hereda por subconjuntos.

(funciones afines)

Ej: 1) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\underline{\alpha = 0} \Rightarrow f(x) = \beta$ (constante) $\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists \ \delta = 1 > 0 \ni$

$\forall x, x' \in \mathbb{R} \ni |x - x'| < 1 \Rightarrow |f(x) - f(x')| = |\beta - \beta| = 0 < \epsilon$

$\Rightarrow$ como $\delta = 1$ no depende de x' y $x \Rightarrow$ la continuidad es uniforme.

$\underline{\alpha \neq 0}$: $\forall \epsilon > 0 \ \exists \ \delta = \underline{\epsilon / |\alpha|} \ni \forall x, x' \in \mathbb{R} \ni |x - x'| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(x')| = |(\alpha x + \beta) - (\alpha x' + \beta)| =$

$= |\alpha (x - x')| = |\alpha| \cdot |x - x'| < \epsilon \Rightarrow f(x) = \alpha x + \beta$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

2) Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces, es uniformemente continua. En efecto,

Dado $\epsilon > 0 \ \exists \ \delta = \underline{\epsilon} > 0 \ni \forall x, x' \in \mathbb{R} \ni$ si $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| = |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x'|$

$$= \left| 2 \underbrace{\cos\left(\frac{x+x'}{2}\right)}_{} \operatorname{sen}\left(\frac{x-x'}{2}\right) \right|$$

$$\leq 2 \left| \operatorname{sen}\left(\frac{x-x'}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \frac{x-x'}{2} \right| = |x - x'| < \epsilon .$$

<u>Teorema</u> (***) Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ un compacto. Si $f: K \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f es uniformemente continua.

Lipschitz $\exists\, A \ni$

$$|f(x) - f(y)| \leq A\,|x-y|$$

$$\boxed{\delta = \delta(\epsilon, x)}$$

Nota: una función $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **no** es uniformemente continua si:

① $\exists\, \epsilon_0 > 0 \ni \forall \delta > 0\ \exists\, x_\delta, x'_\delta \ni$ si $|x_\delta - x'_\delta| < \delta \Rightarrow$

$|f(x_\delta) - f(x'_\delta)| > \epsilon_0.$

② $\exists\, \epsilon_0 > 0$ y dos sucesiones (x_n) y (x'_n) en $A \ni$

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x'_n) = 0$ y $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \epsilon_0.$

Teorema: (continuidad sobre compactos): Sea $f \in \boxed{C(A)}$ y sea $K \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ un compacto. Entonces, f es uniformemente continua.

conjunto de funciones continuas de A en $\mathbb{R}$.

Dem: Supongamos, por el absurdo que existen $\epsilon_0 > 0$ y sucesiones (x_n) y (x_n') en $K \subseteq \mathbb{R}$ $\ni$

$$\lim_{n \to \infty} (x_n - x_n') = 0 \quad y \quad |f(x_n) - f(x_n')| \geq \epsilon_0 .$$

Como K es compacto $\Rightarrow$ existe una subsucesión (x_{n_k}) de $\boxed{(x_n)}$ $\ni \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in K$

$\Rightarrow$ se cumple también que $\lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = x_0$.

como f es continua en K, entonces

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k})$$

$(\rightarrow \leftarrow)$ 1

$\square$

<u>Prop</u>: Si $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua sobre A y si $(x_n) \subset A$ es de Cauchy $\Rightarrow$ $(f(x_n))$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$

en A

Teorema: una función $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua en (a,b) ssi f puede extenderse a una función continua sobre $[a,b]$.

Dem: ($\Leftarrow$) Suponga que f tiene una extensión continua $\tilde{f}:[a,b] \to \mathbb{R}$. Como $[a,b]$ es compacto $\Rightarrow \tilde{f}$ es uniformemente continua. Además, la continuidad uniforme se hereda por subconjuntos, i.e $\tilde{f}\big|_{(a,b)} = f$

$\Rightarrow f$ es uniformemente continua sobre (a,b)

($\Rightarrow$) Ejercicio. $\square$

Def: Si $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que f es Lipschitz, si $\exists\ A > 0 \ni$:

$$|f(x) - f(x')| \leq A\,|x - x'|, \quad \forall\, x, x' \in I$$

Nota: ① Si f es Lipschitz y $x \neq x'$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \right| \leq A$$

i.e. la pendiente de la cuerda que une a los puntos $(x, f(x))$ y $(x', f(x'))$ está acotada por A, $\forall\, x, x' \in I$, $x \neq x'$.

② Si f es Lipschitz con $A<1$, entonces es una contracción.

③ Se dice que f es Lipschitz de orden α, $0<\alpha\leq 1$, si $\exists\, A>0 \ni$:

$$|f(x)-f(x')| \leq A\cdot|x-x'|^{\alpha}, \quad \forall x,x'\in I$$

Ej: ① Sabemos que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x'| \leq |x-x'|$

$\Rightarrow f(x)=\operatorname{sen} x$ es Lipschitz con $A=1$, $\forall x,x'\in\mathbb{R}$
sobre $\mathbb{R}$

② Sea $f(x)=\alpha x+\beta$ sobre $\mathbb{R}$. Entonces,

$$|f(x)-f(x')| = |(\alpha x+\beta)-(\alpha x'+\beta)| = |\alpha|\cdot|x-x'|$$

$\Rightarrow$ si $\alpha\neq 0 \Rightarrow f$ es Lipschitz sobre $\mathbb{R}$ con $A=|\alpha|$

Ejercicio: i) Estudie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(x) = x^2$, y su relación con las funciones de Lipschitz

ii) Repita el inciso anterior, si $f: (a,b) \to \mathbb{R}$.

Teorema: Si $f: I \to \mathbb{R}$ es Lipschitz de orden α $\Rightarrow$ f es uniformemente continua.

Dem: Sea $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists\ \delta = \left(\frac{\epsilon}{A}\right)^{1/\alpha} > 0$, si tiene que, $\forall\ x, x' \in I \ni |x - x'| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(x')| \leq A|x - x'|^\alpha = A\delta^\alpha = A\left(\frac{\epsilon}{A}\right)^{\alpha/\alpha} = \epsilon.$$

$\Rightarrow f$ es uniformemente continua. $\square$

7/7

Teorema (punto fijo): Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f$ es una contracción. Entonces, f tiene un punto fijo único.

⌜**Def**: x_0 es punto fijo de una función f ssi $f(x_0) = x_0$.⌟

$$f(x) = x$$

$$x_0 \quad , x_{n+1} = \boxed{f(x_n)}$$

$$\downarrow$$

si (x_n) es de Cauchy

$$\Rightarrow \quad x_0 = f(x_0)$$

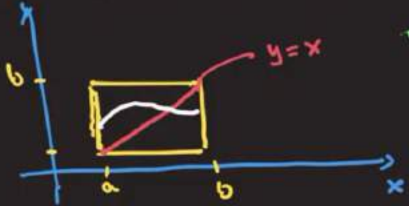
$$x = \tan x$$

<u>Teorema</u> (punto fijo): Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \ni f$ es una contracción. Entonces, f tiene un punto fijo único.

<u>Def</u>: x_0 es punto fijo de una función f ssi $f(x_0)=x_0$.

Sea $f:[a,b]\to[a,b] \ni f$ es una contracción. Entonces $\exists$ un punto fijo único para f (i.e. $\exists!\, x_0\in[a,b] \ni f(x_0)=x_0$)

- Sea $\boxed{x_{n+1}=f(x_n)}$



(x_n) es de Cauchy

Teoremas de Punto Fijo

Teorema (Punto fijo de Banach)

Sea I un intervalo cerrado y sea $f: I \to \mathbb{R}$ una contracción. Entonces $\exists!\, x_0 \in I \ni f(x_0) = x_0$.

Dem: Sabemos que $\exists\, c,\ 0 < c < 1 \ni$

$$|f(b) - f(a)| \leq c\,|b - a|, \quad \forall\, a, b \in I.$$

Sea $x_1 \in I$, y sea $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow$ Nótese que $|x_3 - x_2| \leq c \cdot |x_2 - x_1|$. En general

$|f(x_2) - f(x_1)|$

$$|x_{n+1}-x_n| \le c\,|x_n - x_{n-1}| \le c^2\,|x_{n-1}-x_{n-2}| \le \dots$$
$$\le c^{n-1}\,|x_2 - x_1|$$

A probar: (x_n) es de Cauchy.

Sea $m>n$. Entonces,

$$|x_m - x_n| \le |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1}-x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1}-x_n|$$
$$\le c^{m-2}\cdot|x_2-x_1| + c^{m-3}|x_2-x_1| + \dots + c^{n-1}|x_2-x_1|$$
$$\le (c^{m-2}+c^{m-3}+\dots+c^{n-1})\cdot|x_2-x_1|$$
$$\le c^{n-1}(1+c^2+\dots)\cdot|x_2-x_1| = \frac{\overset{\to 0}{c^{n-1}}}{1-c}|x_2-x_1|$$

Si n es grande, $|x_m-x_n| \to 0 \Rightarrow$

la sucesión (x_n) es de Cauchy $\Rightarrow (x_n)$ converge es convergente; i.e. $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Entonces, como f es continua, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_0.$$

El punto fijo es único. En efecto, suponga que x e y son puntos fijos de f. Entonces,

$$|x-y| = |f(x) - f(y)| \le c\,|x-y|$$

$$\Rightarrow |x-y| \le c\,|x-y| \Rightarrow c = 1 \; (\rightarrow \leftarrow)$$

(contradice el supuesto que f es contracción; i.e. $0 < c < 1$). $\square$

$\tan x = x$

$x=0$ es pto. fijo.

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = \tan x_n$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x_{n+1} = \underbrace{\arctan x_n}_{f(x)}} \quad \leftarrow$$ converge a un punto

$$\Rightarrow |f'(x)| = \left|\frac{1}{1+x^2}\right| < 1 \Rightarrow f(x) \text{ es contractante.}$$

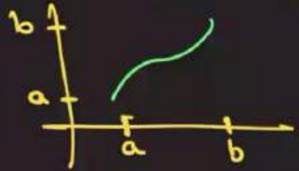
$$x^3 - x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \underbrace{x^3+1}_{f}}$$

Teorema (Punto fijo de Brouwer): Sea X un subconjunto no vacío, convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$, y sea $f: X \to X$ una función continua, $\Rightarrow f$ tiene punto fijo en X. □

Caso especial $n = 1$: Un subconjunto no vacío, convexo y compacto de $\mathbb{R}$ es un intervalo $I = [a,b]$; además, si $f: [a,b] \to [a,b]$ es continua $\Rightarrow f$ tiene punto fijo.

$f(b) \geq a$

$f(a) \leq b$



Dem: Sea $g(x) = f(x) - x$. Entonces,

$$g(a) = f(a) - a \geq 0$$
$$g(b) = f(b) - b \leq 0$$

además, nótese que $g(x)$ es continua en $[a,b]$

$\Rightarrow$ Por el teorema del valor intermedio: $\exists\, x_0 \in [a,b]$ tal que $g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$

$\Rightarrow x_0$ es punto fijo de f. $\square$

• Ecuaciones funcionales: (Ecuación de Cauchy):

Encuentre todas las funciones $f \ni$

$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \ni f(x+y) = f(x) + f(y).$

El inicio de la solución es buscar puntos fijos.

Sea $x = y = 0 \Rightarrow f(0+0) = f(0) + f(0)$

$$\Rightarrow f(0) = 2f(0)$$

$$\Rightarrow f(0) = 0$$

$$\vdots$$

Sea $x = y \Rightarrow f(2x) = 2f(x)$

$$\vdots$$

$$f(kx) = k f(x) \leftarrow \text{inducción}$$

$k \in \mathbb{Z}^+$

Teoría de la aproximación

$$f(x) \boxed{\overset{\approx}{=}} \sum_{n=1}^{k} a_n x^n$$

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \ni f(x+y) = f(x) + f(y).$$

El inicio de la solución es buscar puntos fijos.

Sea $x = y = 0 \Rightarrow f(0+0) = f(0) + f(0)$

$$\Rightarrow f(0) = 2f(0)$$

$$\Rightarrow f(0) = 0$$

$$\vdots$$

Sea $x = y \Rightarrow f(2x) = 2f(x)$

$$\vdots$$

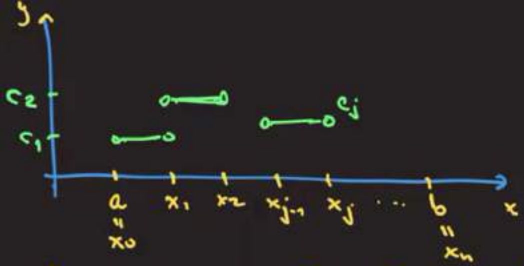
$$f(kx) = k\,f(x) \leftarrow \text{inducción}, \quad k \in \mathbb{Z}^{+}$$

Teoría de la aproximación

Def: Sean I un intervalo con puntos frontera a y b $\ni$ $a < b$.

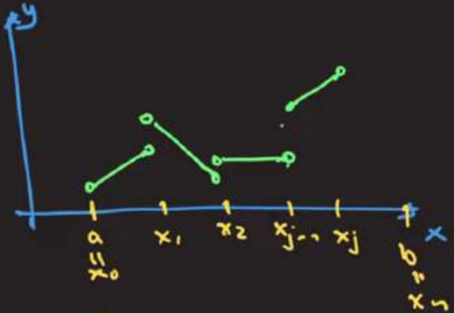
i) Una función $f: I \to \mathbb{R}$ es escalonada si se tienen conjuntos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ y $\{c_1, \dots, c_n\} \ni \; a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ y

$$f(x) = c_j, \; \forall x \in (x_{j-1}, x_j), \; j = 1, \dots, n.$$



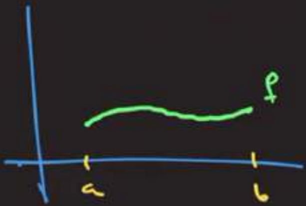
ii) una función $g: I \to \mathbb{R}$ es lineal por tramos, si existe un conjunto $\{x_0, \dots, x$

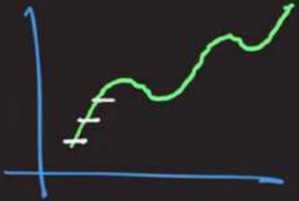
t.q. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ y $g(x) = \alpha_j x + \beta_j$,
para $x \in (x_{j-1}, x_j)$, $1 \leq j \leq n$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$.



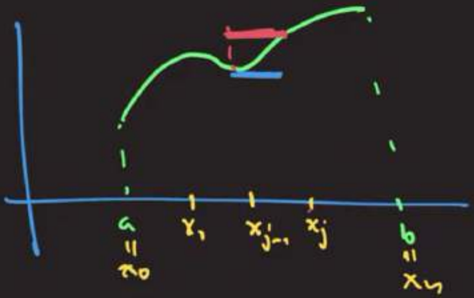
<u>Teorema</u> (aproximación por funciones escalón).
Dada cualquier $f \in C[a,b]$ y $\forall \epsilon > 0$ $\exists$ una función escalonada $\phi_\epsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\ni$

$$|f(x) - \Phi_\varepsilon(x)| < \varepsilon \quad , \quad \forall x \in [a,b]$$





Darboux



$$|f(x) - \Phi_\epsilon(x)| < \epsilon \ , \quad \forall x \in [a,b]$$