Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2034 - Análisis de Variable Real 1 - Catedrático: Dorval Carías
8 de abril de 2021

Parcial 2 - Revisión

1. Problema 1

1. Utilice la definición para probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-5n+7} = 1$

Demostración.

$$\begin{aligned}\left|\frac{n^2+1}{n^2-5n+7}-1\right| &= \left|\frac{n^2+1-(n^2-5n+7)}{n^2-5n+7}\right| = \left|\frac{5n-6}{n^2-5n+7}\right| \\ &= \left|\frac{5n-6}{\left(n-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right| = \frac{5n-6}{\left(n-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &< \frac{5n-6}{\left(n-\frac{5}{2}\right)^2}\end{aligned} \tag{1}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{5n-6}{\left(n-\frac{5}{2}\right)^2} < \epsilon &\implies 5n-6 < \epsilon\left(n-\frac{5}{2}\right)^2 \\ &\implies 5n-6 < \epsilon\left(n^2-5n+\frac{25}{4}\right) \\ &\implies 20n-24 < 4\epsilon\left(n^2-5n+\frac{25}{4}\right) \\ &\implies 20n-24 < \epsilon\left(4n^2-20n+25\right) \\ &\implies 4\epsilon n^2-20\epsilon n+25\epsilon-20n+24 > 0 \\ &\implies 4\epsilon n^2-(20\epsilon+20)n+25\epsilon+24 > 0\end{aligned} \tag{2}$$

Se tiene: $a = 4\epsilon$, $b = -20(\epsilon+1)$ y $c = 25\epsilon + 24$. Aplicando la fórmula de Vieta:

$$\begin{aligned} n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{20(\epsilon+1) \pm \sqrt{20^2(\epsilon+1)^2 - 4(4\epsilon)(25\epsilon+24)}}{2(4\epsilon)} \\ &= \frac{20(\epsilon+1) \pm \sqrt{20^2(\epsilon+1)^2 - 400\epsilon^2 - 384\epsilon}}{8\epsilon} \\ &= \frac{20(\epsilon+1) \pm \sqrt{416\epsilon+400}}{8\epsilon} \\ &= \frac{20(\epsilon+1) \pm \sqrt{16(26\epsilon+25)}}{8\epsilon} \\ &= \frac{20(\epsilon+1) \pm 4\sqrt{(26\epsilon+25)}}{8\epsilon} \\ &= \frac{10(\epsilon+1) \pm 2\sqrt{(26\epsilon+25)}}{4\epsilon} \\ &= \frac{5(\epsilon+1) \pm \sqrt{(26\epsilon+25)}}{2\epsilon} \end{aligned} \tag{3}$$

$\therefore$ Dado $\epsilon > 0, \exists \quad n = \frac{5(\epsilon+1)\pm\sqrt{26\epsilon+25}}{2\epsilon} \in \mathbb{Z}^+$ si $N \geq n \implies |\frac{n^2+1}{n^2-5n+7} - 1| < \epsilon$. □

2. Pruebe que la sucesión $a_n = (-1)^n$ diverge.

Teorema (Criterio de la Divergencia)

Si una sucesión $X = (x_n)$ de números reales, tiene cualquiera de las siguientes dos propiedades, entonces X es divergente.

a) X tiene dos subsucesiones convergentes $X' = (x_{nk})$ y $X'' = (x_{rk})$ de los cuales sus límites no son iguales.

b) X no es acotada.

Demostración. Se tiene $A = a_n = (-1)^n$. Es decir, se propone plantear los casos para n pares e impares. Se tiene: $A' = (a_{2n}) = (-1)^{2n} = \{1, 1, 1, ..., 1\}$ que converge a 1 y $A'' = (a_{2n-1}) = (-1)^{2n-1} = \{-1, -1, -1, ..., -1\}$ que converge a -1. Por lo tanto, considerando el Criterio de la Divergencia inciso **a**, (a_n) diverge. □

2. Problema 2

¿Es acotado el conjunto $\left\{\frac{1}{x^2-3} : x \in \mathbb{Q}\right\}$? Justifique su respuesta.

Definición (Subconjunto acotado)

Un subconjunto S de $\mathbb{R}$ se dice que es acotado si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha \leq s \leq \beta \quad \forall s \in S$$

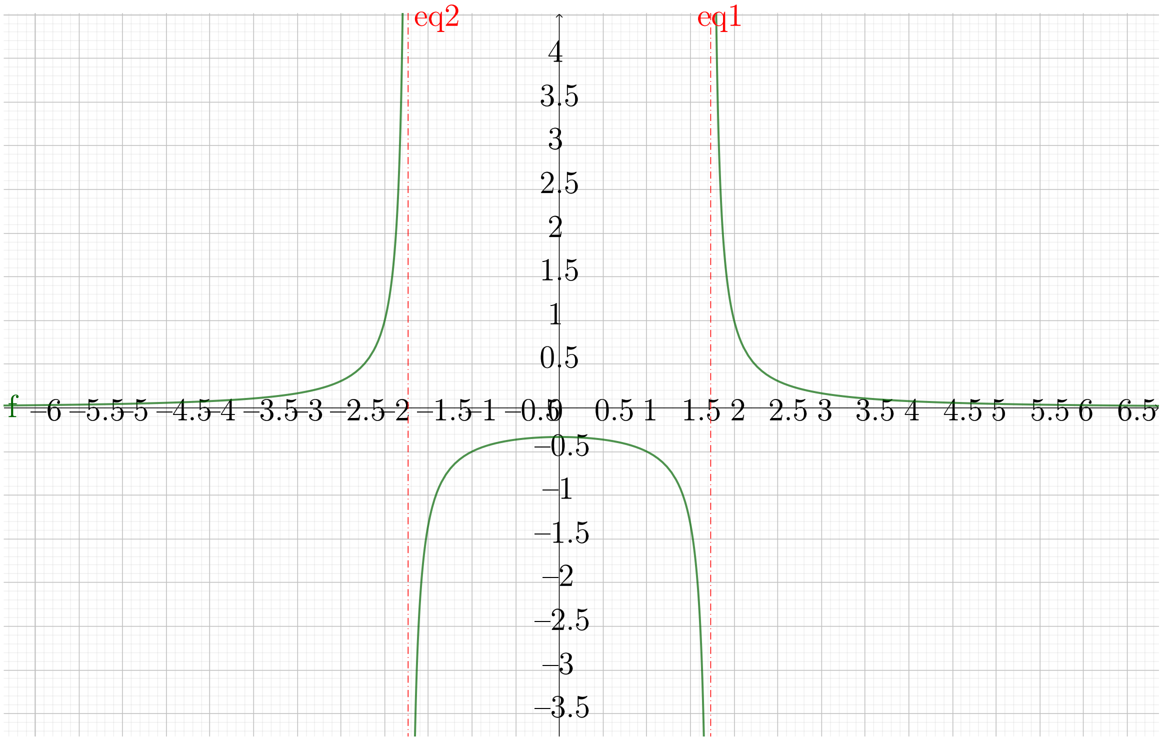

Figura 1: Gráfica de $\frac{1}{x^2-3}$ con cotas en $x = \pm\sqrt{3}$

Intuitivamente (véase la Figura 1) se sabe que el conjunto S no es acotado por las asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^+} S = \infty \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}^-} S = -\infty \qquad \lim_{x\to-\sqrt{3}^+} S = -\infty \qquad \lim_{x\to-\sqrt{3}^-} S = \infty$$

Demostración. Se nombrará al conjunto $S = \{\frac{1}{x^2-3} : x \in \mathbb{Q}\}$. Por contradicción, supóngase que $\beta = \sup S$. Nótese que $2 \in S$, entonces se debe cumplir que $\beta \geq 2$. Ahora considérese $\beta + 1$, es decir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\beta+1)^2-3} &= \frac{1}{\beta^2+2\beta+1-3} && (1)\\
&\leq \frac{1}{\beta^2-3+2(2)+1} = \frac{1}{\beta^2-3+5} && (2)\\
&< \frac{1}{\beta^2-3} && (3)\\
&< \sqrt{3} && (4)
\end{aligned}$$

Lo que quiere decir que $\beta + 1 \in S$. Causando una contradicción ya que $\beta = \sup S$.
$\therefore$ S no está acotada. □

Discusión interesante: **https://math.stackexchange.com/questions/4088277/**

3. Problema 3

Estudie la convergencia de la sucesión:

$$x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2}, n = 1, 2, \ldots$$

En el caso que la sucesión sea convergente, encuentre el límite.

Teorema de colas

Sea $X = (x_n : n \in \mathbb{N})$ una secuencia de números reales y sea $m \in \mathbb{N}$. Entonces la $m-$cola $X_m = (x_{m+n} : n \in \mathbb{N})$ de X converge si y solo si X converge. En este caso $\lim X_m = \lim X$.

Teorema Convergencia Monótona

Una sucesión de números reales es convergente si y solo si es acotada. Además:

1. Si $X = (x_n)$ es una sucesión acotada creciente, entonces:
$$\lim(x_n) = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$
2. Si $Y = (y_n)$ es una sucesión acotada decreciente, entonces:
$$\lim(y_n) = \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Convergencia numérica

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2 && (1)\\
x_2 &= \frac{1}{x_1} + \frac{x_1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5 && (2)\\
x_3 &= \frac{1}{x_2} + \frac{x_2}{2} = \frac{17}{12} \approx 1,417 && (3)\\
x_4 &= \frac{1}{x_3} + \frac{x_3}{2} = \frac{577}{408} \approx 1,414 && (4)\\
x_5 &= \frac{1}{x_4} + \frac{x_4}{2} = \frac{665857}{470832} \approx 1,414 && (5)\\
&\vdots && (6)\\
x_{n+1} &= \frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2} \approx 1{,}414 && (7)
\end{aligned}$$

Puntos fijos

Considerando el *teorema de colas* se tiene $\lim x_{n+1} = \lim x_n = X$. Entonces:

$$\Longrightarrow X = \frac{1}{X} + \frac{X}{2} = \frac{2+X^2}{2X} \tag{1}$$

$$\Longrightarrow 2X^2 = 2 + X^2 \tag{2}$$

$$\Longrightarrow X^2 = 2 \tag{3}$$

$$\Longrightarrow X = \sqrt{2}, -\sqrt{2} \tag{4}$$

Se nota que $X \neq -\sqrt{2}$. Por lo tanto, $X = \sqrt{2}$.

Demostración. Al hacer un cálculo directo (véase el cuadro de *convergencia numérica*) se muestra que $x_1 = 2, x_2 = 3/2, x_3 = 17/12, ..., x_{n+1} \approx 1,414$. $\Longrightarrow$ Se propone una acotación, tal que $\sqrt{2} < x_2 < x_1$. Por inducción, se mostrará que $\sqrt{2} < x_n$ o $x_n > \sqrt{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Por el cuadro de *convergencia numérica*, se sabe que la condición es válida para $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Ahora bien, si $n = k$:

$$x_k > \sqrt{2} \qquad k \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Se quiere probar que $x_{k+1} > x_k$:

$$x_{k+1} = \frac{1}{x_k} + \frac{x_k}{2} > \frac{1}{(\sqrt{2})} + \frac{(\sqrt{2})}{2} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \tag{2}$$

tal que $x_{k+1} > \sqrt{2}$. Por lo tanto, $x_n > \sqrt{2}$ se cumple para $n \in \mathbb{N}$. Por lo que la sucesión es acotada. Ahora se quiere probar que la sucesión es monótona decreciente. Por inducción se mostrará que $x_n > x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Se sabe que la condición se cumple para $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Ahora, supóngase $x_k > x_{k+1}$ para algún k:

$$\Longrightarrow x_k > x_{k+1} \Longrightarrow \frac{x_k}{2} > \frac{x_{k+1}}{2} \tag{3}$$

$$\Longrightarrow x_k > x_{k+1} \Longrightarrow \frac{1}{x_k} > \frac{1}{x_{k+1}} \tag{4}$$

Sumando (3) y (4) se tiene:

$$\begin{gathered} \Longrightarrow x_k + x_k > x_{k+1} + x_{k+1} \Longrightarrow 2x_k > 2x_{k+1} \Longrightarrow x_k > x_{k+1} \\ \Longrightarrow \frac{1}{x_k} + \frac{x_k}{2} > \frac{1}{x_{k+1}} + \frac{x_{k+1}}{2} \end{gathered} \tag{5}$$

Por lo consecuente, considerando (5) se tiene:

$$\Longrightarrow x_{k+1} = \frac{1}{x_k} + \frac{x_k}{2} > \frac{1}{x_{k+1}} + \frac{x_{k+1}}{2} = x_{k+2} \tag{6}$$

Se tiene que $x_k > x_{k+1}$ lo que implica $x_{k+1} > x_{k+2}$. Por lo tanto, $x_n > x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$; es decir, la secuencia es monótona decreciente. Se ha demostrado que la secuencia está acotada y es monótona decreciente. Por el *teorema convergecia monótona*, sabemos que la sucesión (x_n) es convergente a un límite de por lo menos $\sqrt{2}$. Por hipótesis se conoce $x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2} \forall n \in N$, el $n-$ésimo término en la 1-cola de x_1 de x tiene una simple relación algebraica al n-ésimo término de x. Por el cuadro de *punto fijos* sabemos:

$$X = \frac{1}{X} + \frac{X}{2}$$

del cual, se tiene $X = \lim x_n = \sqrt{2}$. □

4. Problema 4

Suponga (a_n) es una sucesión monótona que contiene una subsucesión que es de Cauchy. Demuestre que (a_n) también es de Cauchy.

Teorema Convergencia Monótona

Una sucesión de números reales es convergente si y solo si es acotada. Además:

1. Si $X = (x_n)$ es una sucesión acotada creciente, entonces:

$$\lim(x_n) = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

2. Si $Y = (y_n)$ es una sucesión acotada decreciente, entonces:

$$\lim(y_n) = \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Una sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión convergente.

Teorema de subsucesiones convergentes

Sea $X = (x_n)$ una subsucesión acotada de números reales y que un $x \in \mathbb{R}$ tenga la propiedad de que cada subsucesión convergente de X converge a x. Entonces la sucesión X converge a x.

Demostración. Por hipótesis, se sabe que la sucesión es monótona ssi es acotada y que tiene una subsucesión de Cauchy, es decir que la subsucesión converge; por lo que se tiene el *teorema de Bolzano-Weierstrass*. Ahora bien, considerando el *teorema de subsucesiones convergentes*; se sabe que (x_n) es acotada y que su única subsucesión es convergente, entonces (x_n) también es convergente. Por lo tanto, por el criterio de Cauchy, una sucesión convergente también es de Cauchy. □

5. Problema 5

Suponga que la sucesión (a_n) satisface la condición

$$|a_{n+1} - a_{n+2}| < \lambda\, |a_n - a_{n+1}|$$

con $\lambda \in (0,1)$. Pruebe que (a_n) converge.

Definición (Sucesión contractiva)

Se dice que una sucesión (x_n) de números reales es *contractiva* si existe una constante C, $0 < C < 1$, tal que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n|$$

para todos los $n \in \mathbb{N}$. El número C es llamado la constante de la sucesión contractiva.

Definición (sumatoria de una progresión geométrica)

Si $r \in \mathbb{R}, r \neq 1$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$1 + r + r^2 + ... + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Teorema

Cada sucesión contractiva es una sucesión de Cauchy y por lo tanto, es convergente.

Caso específico

Si $0 < b < 1$, entonces $\lim(b^n) = 0$

Demostración. Considérese el desarrollo hecho en el teorema 3.5.8 de Bartle and Sherbert (2000). Sin pérdida de generalidad, la condición se plantea como una *sucesión contractiva*:

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| < \lambda|a_{n+1} - a_n|$$

Se propone una serie de acotaciones:

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| < \lambda|a_{n+1} - a_n| < \lambda^2|a_n - a_{n-1} < \lambda^3|a_{n-1} - a_{n-2}| < ... < \lambda^n|a_2 - a_1|$$

Ahora, para $m > n$, se estima $|x_m - x_n|$ aplicando la desigualdad triangular y luego se utiliza la sumatoria de una *progresión geométrica*:

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| && (1)\\
&\leq \left(\lambda^{m-2} + \lambda^{m-3} + \cdots + \lambda^{n-1}\right)|a_2 - a_1| = \lambda^{n-1}\left(\frac{1 - \lambda^{m-n}}{1 - \lambda}\right)|a_2 - a_1| && (2)\\
&\leq \lambda^{n-1}\left(\frac{1}{1 - \lambda}\right)|a_2 - a_1| && (3)
\end{aligned}$$

Se sabe que $\lambda \in (0,1)$, entonces $\lim(\lambda^n) = 0$ (veáse el caso específico). Por lo tanto, (x_n) es una sucesiónde Cauchy. Considerando el criterio de Cauchy, se sabe que (x_n) es una sucesión convergente. □

Referencias

Bartle, R. G. and Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis*, volume 2. Wiley New York.