Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2034 - Análisis de Variable Real 1 - Catedrático: Dorval Carías
16 de mayo de 2021

HT 3

Esta hoja de trabajo se resolvió en un video, se puede encontrar aquí:
https://www.youtube.com/watch?v=nSHzDTNnpCk

Problema

La función de Takagi - Van der Waerden se define como,

$$f_r(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} \psi(r^n x), \qquad r = 2, 3, \ldots$$

donde $\psi(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z})$, la distancia de x al entero más cercano. Determinar que es continua para todos los reales x pero no es diferenciable para ningún real x.

Demostración. □

Para demostrar continuidad, se puede consultar la demostración de Shidfar and Sabetfakhri (1990). Para demostrar que no es diferenciable se tomará como referencia el caso general de Spurrier (2004); a la vez, se tomará como referencia el caso específico

$$f_r(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} \psi(r^n x), \qquad r = 2, 3, \ldots$$

desarrollado por Allaart (2014):

« Considerando Billingsley (1982), asúmase $\psi_k(x) := r^{-k} \psi\left(r^k x\right), k \in \mathbb{Z}_+$, y sea $\psi_k^+(x)$ denota la derivada del lado derecho de ψ_k en x. Entonces ψ_k^+ no es ambigua y evaluada en $\{-1, 1\}$. Se fija $x \in [0, 1)$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $u_n = j_n / 2r^n$ y $v_n = (j_n + 1)/2r^n$, donde $j_n \in \mathbb{Z}_+$ es elegido tal que $u_n \leq x < v_n$. Nótese que para $k \leq n$ ψ_k es lineal en $[u_n, v_n]$, entonces

$$\frac{\psi_k(v_n) - \psi_k(u_n)}{v_n - u_n} = \psi_k^+(x), \quad 0 \leq k \leq n$$

Primero supóngase que r es par; entonces $\psi_k(v_n) - \psi_k(u_n) = 0$ para $k > n$, y entonces

$$m_n := \frac{f_r(v_n) - f_r(u_n)}{v_n - u_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_k(v_n) - \psi_k(u_n)}{v_n - u_n} = \sum_{k=0}^{n} \psi_k^+(x)$$

Esto implica que $m_{n+1} - m_n = \pm 1$, y entonces m_n no puede tener un límite finito. Ahora supóngase que r es impar. Entonces para $k \geq n$

$$\psi_k(v_n) - \psi_k(u_n) = \frac{(-1)^{j_n}}{2r^k}$$

usando la 1-periocidad de ψ. Por lo que, desde que sabemos que $v_n - u_n = 1/2r^n$,

$$m_n := \frac{f_r(v_n) - f_r(u_n)}{v_n - u_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k^+(x) + (-1)^{j_n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{r^{k-n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k^+(x) + (-1)^{j_n} \frac{r}{r-1}$$

Ahora es claro que $m_{n+1} - m_n$ puede tomar solo valores finitos, el cero no es uno de ellos, y por lo que m_n no puede tener un límite finito definido: $n \to \infty$. Por lo tanto, f_r no tiene una derivada finita$x$. No es diferenciable.»

Referencias utilizadas:

1. Allaart and Kawamura (2012)
2. Allaart (2014)
3. BL (1930)
4. Hailpern (1976)
5. Jarnicki and Pflug (2015)
6. Rajwade and Bhandari (2007)
7. Takagi (1973)
8. BL (1930)
9. Shidfar and Sabetfakhri (1990)
10. Billingsley (1982)

Referencias

Allaart, P. C. (2014). On the level sets of the takagi–van der waerden functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 419(2):1168–1180.

Allaart, P. C. and Kawamura, K. (2012). The takagi function: a survey. *Real Analysis Exchange*, 37(1):1–54.

Billingsley, P. (1982). Van der waerden's continuous nowhere differentiable function. *The American Mathematical Monthly*, 89(9):691–691.

BL, v. d. W. (1930). Ein einfaches beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen funktion. *Mathematische Zeitschrift*, 32:474–475.

Hailpern, B. (1976). Continuous non-differentiable functions. *Pi Mu Epsilon Journal*, 6(5):249–260.

Jarnicki, M. and Pflug, P. (2015). Continuous nowhere differentiable functions. *Springer Monographs in Mathematics, New York*.

Rajwade, A. and Bhandari, A. K. (2007). *Surprises and counterexamples in real function theory*. Springer.

Shidfar, A. and Sabetfakhri, K. (1990). On the hölder continuity of certain functions. In *Exposition. Math*, volume 8, pages 365–369.

Spurrier, K. G. (2004). Continuous nowhere differentiable functions. *South Carolina Honors College*.

Takagi, T. (1973). A simple example of the continuous function without derivative. *The collected papers of Teiji Takagi*, pages 5–6.