

# Clase de Diferenciación - Análisis de Variable Real 1

Rudik Rompich

May 29, 2021

6/5/2021

Prop: Una función  $f: X \rightarrow Y$  es continua  $\Leftrightarrow$  si  $A \subset X$  se tiene que  $f(A) \subset \overline{f(A)}$ .

Dem: ( $\Rightarrow$ ) Sea  $f: X \rightarrow Y$  continua. y sabemos que  $f(A) \subset \overline{f(A)}$ .

$$\Rightarrow A \subset f^{-1}[f(A)] \subset f^{-1}[\overline{f(A)}]$$

cerrado

$$\Rightarrow A \subset \bar{A} \subset f^{-1}[\overline{f(A)}]$$

cerrado

$$\Rightarrow f(A) \subset f(\bar{A}) \subset f[f^{-1}[\overline{f(A)}]] = \overline{f(A)}$$

→



$\Leftarrow$  Suponemos que  $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ ,  $\forall A \subset X$ , y sea  $F$  un subconjunto cerrado de  $\mathbb{Y}$ .

A probar:  $f^{-1}(F) = A$  es un cerrado de  $X$ .

A probar:  $\{A = \bar{A}\}$ . Pero ya sabemos que

$A \subset \bar{A}$ . A probar:  $\bar{A} \subset A$ .

$$\Rightarrow f(\bar{A}) = f\left(\overline{f^{-1}(F)}\right) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} =$$

$$= \bar{F} = F$$

$$\bar{A} \subset f^{-1}(f(\bar{A})) \subset f^{-1}(F) = A$$

$$\Rightarrow \bar{A} \subset A \Rightarrow A = \bar{A} \Rightarrow A \text{ es cerrado}$$

$\Rightarrow f$  es continua.

D



Diferenciación

Def.: Sean  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a < c < b$ . Entonces,  
 $f$  es diferenciable en  $c$ , con derivada  $f'(c)$ ,

si  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$ .

Si este límite existe  $\forall c \in (a, b) \Rightarrow f$  es  
diferenciable en  $(a, b)$

Nota: ① La diferenciabilidad es una  
 propiedad local de las funciones.





② En la definición hagamos  $h = x - c$   
 $\Rightarrow x = c + h$ . Entonces:

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Lagrange

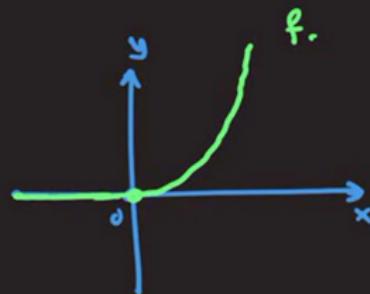
$$③ f'(c) = \frac{df}{dx}(c) = \underline{D_x}(c)$$

Leibniz

$$\dot{f}(c) = \frac{df}{dt}(c)$$

Newton

Ej: ① Sea  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$





.

Dorv.

Encontramos  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}^0 =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h = 0$$

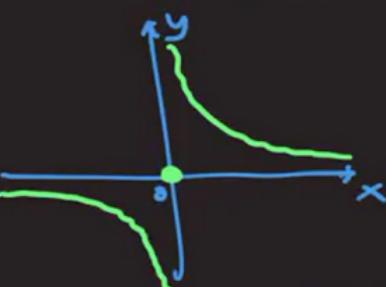
$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} 0 = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$





$$2) \text{ Sea } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ni f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$$



$$\text{Sea } c \neq 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{c+h} - \frac{1}{c}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{c} - \cancel{(c+h)}}{\cancel{h}(c+h)c} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{c+h}}{\cancel{c}} = -\frac{1}{c^2}$$

$$\text{Sea } c=0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(h)$$



$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t/h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t}{h^2}, \text{ el no existe}$$

$$\Rightarrow f'(0) \text{ no existe} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

$$3) \text{ Sean! } f(x) = \arg(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad y$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(x) = 0$ ,  $\forall x \neq 0$ ,  $f'(0)$  no existe (falla la continuidad)

$$g'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \quad g'(0) \text{ no exist.} \quad \text{cambio abrupto}$$



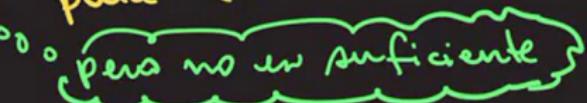
En este caso,  $g(x) = |x|$  es continua en  $x=0$   
y  $g'(0)$  no existe.

Si  $f$  es continua en  $x_0 \Rightarrow f$  es diferenciable.

Sin embargo:

continuidad +   $\Rightarrow$  diferenciable.

(i.e. La continuidad es una condición necesaria para la diferenciabilidad)

  
pero no es suficiente





Ej: ① Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s.t.  $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$$\text{Si } x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{\cancel{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) \leftarrow \text{no existe}$$

$\Rightarrow f'(0)$  no existe.

(Recordemos que  $f$  es continua en  $x=0$ ).

② Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s.t.  $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



$\Rightarrow f'(0) = 0$ . Además:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \underbrace{2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{\rightarrow 0} - \cos\left(\frac{1}{x}\right), \text{ no existe}$$

$\Rightarrow f'(x)$  no es continua en  $x=0$ .

(  $f$  es diferenciable en  $x=0$ , pero  $f'$  no es continua en  $x=0$  ).

Teorema: Si  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $c$ , entonces  $f$  es continua en  $c$ .

Dem: A probar:  $f$  es continua



i.e. A probar:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) - f(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} [f(x) - f(c)] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} [f(x) - f(c)] = \lim_{x \rightarrow c} [f(x) - f(c)] \left( \frac{x - c}{x - c} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow c} \left[ \left( \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) \cdot (x - c) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow c} \underbrace{\left( \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right)}_{\text{ }} \cdot \lim_{x \rightarrow c} (x - c) =$$

Def: una función  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es continuamente diferenciable en  $(a, b)$ , si  $f$  es diferenciable y  $f'$  continua sobre  $(a, b)$ .

Notación:  $f \in C^1(a, b)$

Prop: Si  $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  son diferenciables en  $c \in (a, b)$  y  $k \in \mathbb{R}$ , entonces:

$$1) (f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$$

$$2) (kf)'(c) = k f'(c).$$

$$3) (f \cdot g)'(c) = f'(c)g(c) + f(c) \cdot g'(c).$$

$$4) \text{ Si } g(c) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}$$



.. 5) (Regla de la cadena):

$$(g \circ f)'(c) = [g(f(c))]' \\ = g'(f(c)) \cdot f'(c).$$

Dem. - (3) Lím  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(c)g(c)}{x - c} =$

$$= \lim_{x \rightarrow c} \frac{(f(x)g(x) - f(c)g(x)) + (f(c)g(x) - f(c)g(c))}{x - c}$$

$$= \lim_{x \rightarrow c} \left[ \underbrace{\left( \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right)}_{f'(c)} g(x) + f(c) \underbrace{\left( \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right)}_{g'(c)} \right]$$

$\downarrow$  g diferencial  
 $\Rightarrow g$  continua

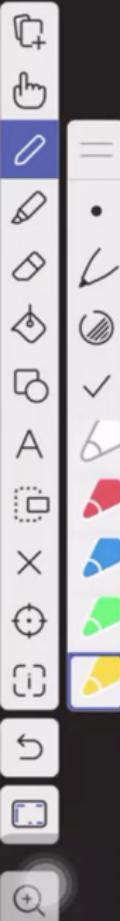
$$= f'(c) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) + f(c) g'(c)$$

↑  
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{g es diferenciable en } c \Rightarrow g \text{ es continua en } c \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c) \end{array} \right.$

$$= f'(c) g(c) + f(c) \cdot g'(c).$$

Def. Sea  $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que  $f$  tiene

- 1) un máximo local en  $c \in A$ , si existe una vecindad  $U$  de  $c$   $\exists f(x) \leq f(c), \forall x \in U$ .
- 2) un mínimo local en  $c \in A$ , si existe una vecindad  $U$  de  $c \exists f(x) \geq f(c), \forall x \in U$



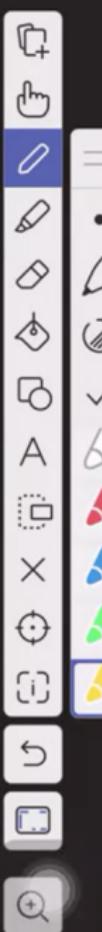


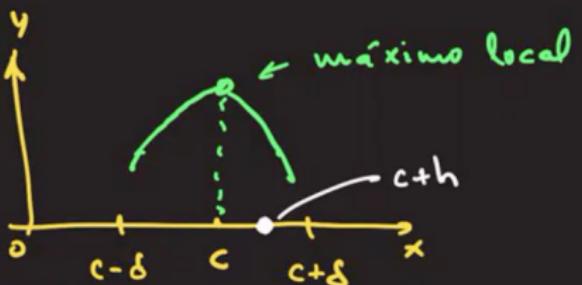
3) un valor extremo en  $C$ , si tiene un máximo o mínimo (local o global) en ese punto

### Teorema (valores extremos) (Fermat)

Si  $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un valor extremo local en un punto interior  $c \in A$ , y si  $f$  es diferenciable en  $c$ , entonces  $f'(c) = 0$ .

Dem: Suponga que  $f$  tiene un máximo local en  $c \in A \Rightarrow \exists$  una vecindad de  $c$ , digamos  $U = (c - \delta, c + \delta) \subseteq A$ ,  $\delta > 0 \Rightarrow f(x) \leq f(c)$ ,  $\forall x \in U$ .





$$\Rightarrow \text{Si } 0 < h < \delta \Rightarrow \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

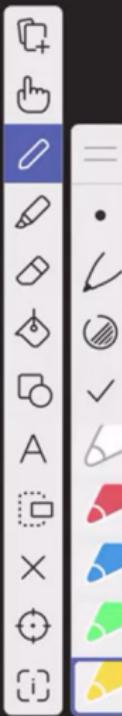
$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c) \leq 0 \quad \textcircled{I}$$

Por otro lado, si  $-\delta < h < 0$ , entonces:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0, \text{ por lo tanto}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c) \geq 0 \quad \textcircled{II}$$

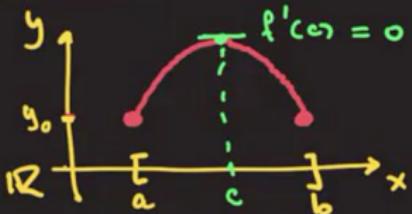
$\Rightarrow$  De  $\textcircled{I}$  y  $\textcircled{II}$ , se tiene que  $f'(c) = 0$



Dcf: Sea  $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Un punto interior  $c \in A$  es un punto crítico de  $f$ , si  $f$  no es diferenciable en  $c$  o si  $f'(c) = 0$ . El punto  $c$  es estacionario si  $f'(c) = 0$ .

Teorema (de Rolle):

Supongamos que  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $[a, b]$  y diferenciable en  $(a, b)$ , y es tal que  $f(a) = f(b)$ . Entonces,  $\exists c \in (a, b) \Rightarrow f'(c) = 0$ .



Dem: Como  $f$  es continua en  $[a, b] \Rightarrow f$  tiene máximos y mínimos globales en  $[a, b]$ . Entonces:

- 1) Si el máximo y mínimo se obtienen en los puntos frontales  $\Rightarrow f$  es constante en  $[a, b] \Rightarrow \exists c \in (a, b) \ni f'(c) = 0$ .
- 2) En otro caso, el máximo (o mínimo) global se alcanza en un punto interior de  $[a, b] \Rightarrow c \in (a, b)$ , y por el teorema anterior  $\Rightarrow f'(c) = 0$ .



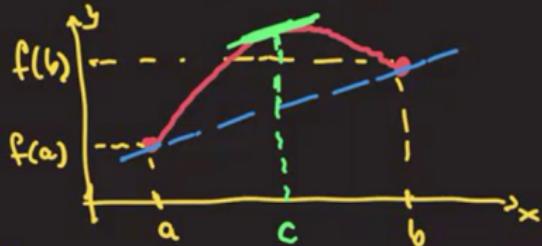


## Teorema (del Valor Medio) (Lagrange)

Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continua en  $[a, b]$  y diferenciable en  $(a, b)$ .

Entonces,  $\exists c \in (a, b) \ni$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Dem. Sea  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \ni$

$$g(x) = f(x) - f(a) - \left[ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] (x - a).$$

Notese que  $g(x)$  es continua en  $[a, b]$ , diferenciable en  $(a, b)$  y  $\Rightarrow g(a) = 0 = g(b)$

$\Rightarrow g$  satisface el teorema de Rolle, i.e.  $\exists c \in (a, b)$

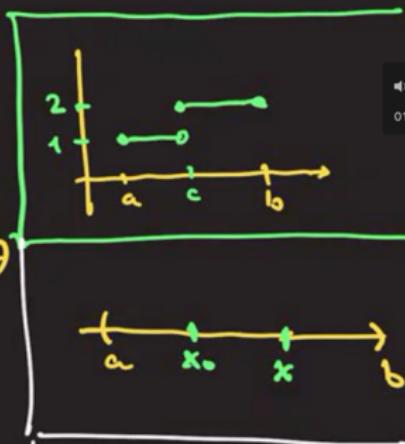
t. q:  $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$  □

Teorema: Si  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en la  
intervalo  $\boxed{(a, b)}$  y si  $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$   
es constante en el intervalo  $(a, b).$

Dem: Sea  $x_0 \in (a, b) \Rightarrow$  Por T.N.M,  
 $\exists c$  entre  $x_0$  y  $x, x \in (a, b)$  y

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0), \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$  es  
constante en  $(a, b).$



Corolario Sean  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables en  $(a, b)$ . Si  $f'(x) = g'(x)$ ,  $\forall x \in (a, b)$ , entonces  $f(x) = g(x) + C$ , para alguna constante  $C$ .

Dem. Sea  $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow h(x) := f(x) - g(x)$   
 $\Rightarrow h$  es diferenciable en  $(a, b)$  y se tiene  
que  $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ . Por el Teorema  
anterior,  $h(x) = C$ , donde  $C$  es alguna constante  $\Rightarrow f(x) - g(x) = C$ ,  $\forall x \in (a, b)$  P



## Teorema (Valor medio) (de Cauchy)

Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , funciones continuas en  $[a, b]$ , diferenciables en  $(a, b)$  y supongan que  $g'(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in (a, b)$ . Entonces,  $\exists c \in (a, b)$  tal que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)] \quad \checkmark$$

Dem: como  $g$  es continua y diferenciable en  $[a, b]$  y como  $g'(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in (a, b)$ , definamos:

$$h(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)]$$



⇒  $h(x)$  es continua en  $[a,b]$ , diferenciable en  $(a,b)$  y es t.g.  $h(a) = 0 = h(b)$ . Por el Teorema de Rolle,  $\exists c \in (a,b) \Rightarrow$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0$$

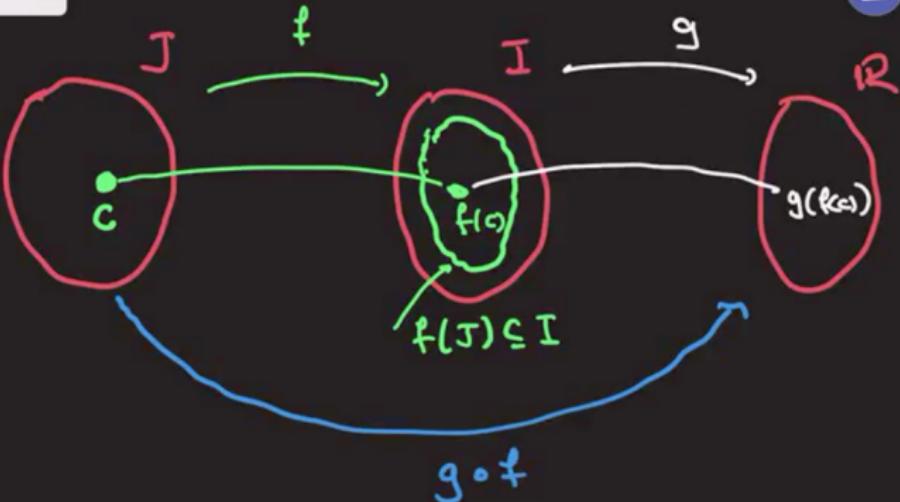


- Regla de la cadena (+técnica)
- Taylor
- criterio de 1<sup>a</sup> y 2<sup>da</sup> derivada
- Regla de L'Hôpital

Teorema (Regla de la cadena): Sean  $I$  y  $J$  intervalos de  $\mathbb{R}$ , sean  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f(J) \subseteq I$ , y sea  $c \in J$ . Si  $f$  es diferenciable en  $c$  y si  $g$  es diferenciable en  $f(c)$ , entonces  $g \circ f$  es diferenciable en  $c$ , y

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c).$$





Nota (para olvidar)

Prueba "natural" (incorrecta)

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(c)}{x - c} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow c} \left[ \left( \frac{g(f(x)) - g(f(c))}{f(x) - f(c)} \right)^2 \times \left( \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) \right] \\ &= g'(f(c)) \cdot f'(c) \end{aligned}$$

Note que, existe la posibilidad que  $f(x) = f(c)$  para  $x$  en una vecindad  $\leftarrow c$ , lo que invalida la generalidad del argumento.

---



Teorema (Caratheodory) Sea  $f$  una función definida en  $I \subseteq \mathbb{R}$  y sea  $c \in I$ . Entonces,  $f$  es una función diferenciable en  $c$  si y sólo si existe una función  $\varphi$  definida en  $I$ , que es continua en  $c$  y cumple:

$$f(x) - f(c) = \varphi(x) \cdot (x - c), \quad x \in I.$$

En este caso,  $\varphi(c) = f'(c)$

Dem: ( $\Leftarrow$ ) Sea  $\varphi$  continua en  $c$  y t.q.

$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c)$$

Si  $x - c \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \varphi(x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \varphi(c) \Rightarrow \varphi(c) = f'(c)$$

$\uparrow$   
 $\varphi$  es continua

( $\Rightarrow$ ) Suponemos que  $f$  es diferenciable en  $c$ , entonces: sea:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, & x \neq c \\ f'(c) & x = c \end{cases}$$

como  $f$  es diferenciable en  $c \Rightarrow f$  es continua en  $c \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \varphi(x) = f'(c)$ .



Si  $x \neq c \Rightarrow \varphi(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$

$$\Rightarrow f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c).$$

Si  $x = c$ , se cumple el resultado.  $\square$

Ej: Sea  $f(x) = x^3 \Rightarrow x^3 - c^3 = (x^2 + cx + c^2)(x - c)$

$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = x^2 + cx + c^2$$

$$\Rightarrow \varphi(c) = c^2 + c^2 + c^2 = 3c^2 = f'(c)$$



Dem. • Como  $f$  es diferenciable en  $c$ , entonces existe  $\varphi(x)$ , continua en  $c \Rightarrow$

$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c), \quad x \in J, \quad y$$

con  $f'(c) = \varphi(c)$ .

• Como  $g$  es diferenciable en  $f(c)$ , entonces existe  $\psi(x)$ , continua en  $f(c) \Rightarrow$

$$* \quad g(f(x)) - g(f(c)) = \psi(f(x)) [f(x) - f(c)]$$

donde  $f(x) \in f(J) \subset I$  y  $\psi(f(c)) = g'(f(c))$

Notar que:

$$\Rightarrow g(f(x)) - g(f(c)) = [(\psi \circ f)(x)] \cdot \varphi(x)(x-c)$$

$$= [(\psi \circ f)(x) \cdot \varphi(x)](x-c)$$

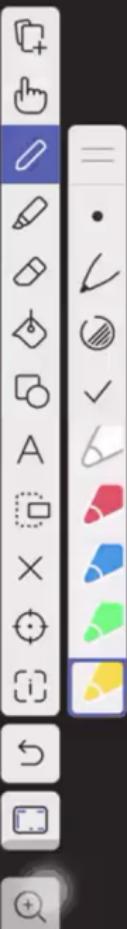
$$\Rightarrow \underbrace{[(\psi \circ f)(c)]}_{\text{continua}} \varphi(c) = \psi | f(c) \cdot \varphi(c)$$

$$= g'(f(c)) \cdot f'(c)$$

$\Rightarrow$  Por el teorema anterior

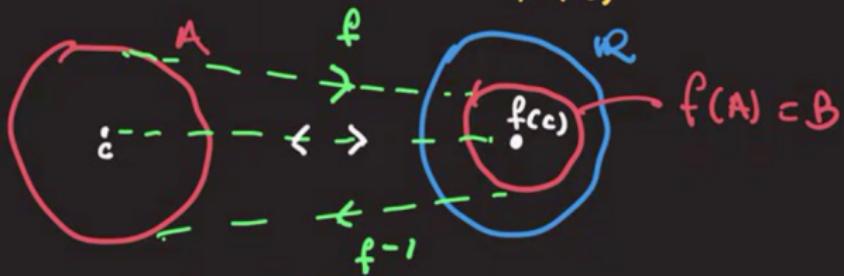
$$(g \circ f)^{-1}(c) = [(\psi \circ f)(x) \cdot \varphi(x)]$$

$$= g'(f(c)) \cdot f'(c). \quad \square$$



Prop: Supóngase que  $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función inyectiva sobre  $A$ , con inversa  $f^{-1}: B \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $B = f(A)$ . Asuma que  $f$  es diferenciable en el punto interior  $c \in A$  y que  $f^{-1}$  es diferenciable en  $f(c)$ , que es un punto interior de  $B$ . Entonces,  $f'(c) \neq 0$  y se cumple:

$$(f^{-1})' (f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$$



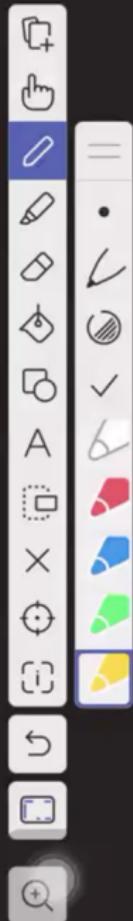
Dem: Sabemos que  $f^{-1}(f(x)) = x$ ,  $\forall x \in A$ .  
 como  $f$  es diferenciable en  $c$  y  $f^{-1}$  es diferen-  
 ciable en  $f(c)$ ; entonces, por la  
 regla de la cadena:

$$[f^{-1}(f(x))]' = (x)'$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(f(c)) \cdot f'(c) = 1. \text{ Si } f'(c) \neq 0$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}. \text{ Note que,}$$

si  $f'(c) = 0 \Rightarrow f^{-1}$  no es diferenciable en  $f(c)$ .  $\blacksquare$



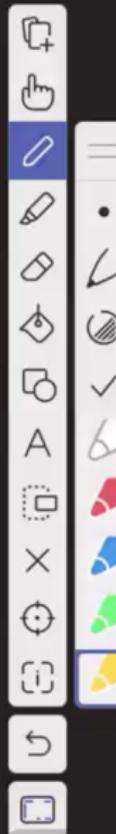
Nota .. ①  $(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$  . Si  $f(c) = d$   
 $\Rightarrow c = f^{-1}(d)$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(f^{-1}(d))}$$

$\overrightarrow{\in B}$

② Una versión menos restringida del Teorema  
 se llama Teorema de la función inversión.

Lema: Sean  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  una función  
 y  $c \in \mathbb{R}$  que es punto de acumulación de  $A$ .  
 Si  $a \leq f(x) \leq b$ ,  $\forall x \in A$ , entonces



Si  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  existe, se tiene que

$$a \leq \lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq b$$

Teorema: Suponga que  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable sobre  $(a, b)$ . Entonces,

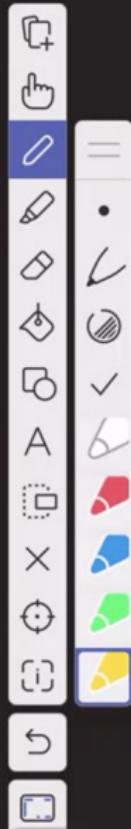
- ①  $f$  es crecientessi  $f'(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in (a, b)$ .
- ②  $f$  es decrecientessi  $f'(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in (a, b)$

Dem: ①:

$\text{Sea } h > 0$

$(\Rightarrow)$  Sea  $f$  creciente y sea  $x \in (a, b)$ . Entonces,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



por el lema anterior. Entonces,  $f'(x) \geq 0$ .

$(\Leftarrow)$  Supongamos que  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x \in (a, b)$ .

Sean:  $a < x < y < b$ .



Entonces, aplicando el Teorema del Valor medio,

$$\exists c \in (x, y) \ni \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \geq 0,$$

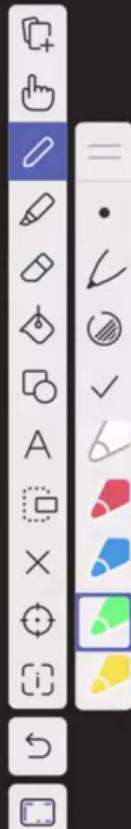
Como  $y - x > 0 \Rightarrow f(y) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$   
 $\Rightarrow f$  es creciente.



Teorema de Taylor:

Def: Sea  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  y supongamos que  $f$  tiene  $n$  derivadas:  $f', f'', \dots, f^{(n)}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 El polinomio de Taylor de grado  $n$  de  $f$  en  $c \in (a, b)$  es:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &:= f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{1}{2!} f''(c)(x-c)^2 + \cdots \\
 &\quad \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x-c)^n \\
 &= \sum_{k=0}^n a_k (x-c)^k, \text{ donde:} \\
 \text{coef. de Taylor} \rightarrow a_k &= \frac{f^{(k)}(c)}{k!}.
 \end{aligned}$$



Nota: Si se tiene que una función  $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$  se puede escribir:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

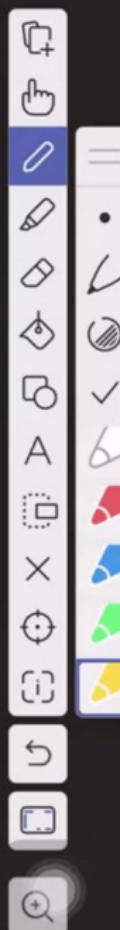
$\Rightarrow R_n(x)$  es el error entre  $f$  y  $P_n(x)$ .

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{Residuo}}$

Teorema (Taylor, con residuo de Lagrange)

Suponga que  $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$  tiene  $n+1$  derivadas en  $(a,b)$  y sea  $c \in (a,b)$ . Entonces,  $\forall x \in (a,b)$

$\exists \xi$  entre  $c$  y  $x$



$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k + R_n(x), \text{ donde}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}$$

Nota: Sea  $k=0 \Rightarrow f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!} (x-c)$

$$\Leftrightarrow \exists \xi \text{ entre } c \text{ y } x \ni \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi)$$

(i.e. el TVM es una restricción del Teorema de Taylor).



Dem, Fixemos  $x, c \in (a, b)$ . Entonces, para cualquier  $t \in (a, b)$ , considera:

$$g(t) = f(x) - \left[ f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!} (x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x-t)^n \right]$$

Nota: :  $g(x) = 0$ .

$$\Rightarrow g'(t) = -\cancel{f'(t)} - \cancel{f''(t)} \cdot (x-t) + \cancel{f'(t)} - \frac{\cancel{f'''(t)}}{2!} (x-t)^2 + \frac{\cancel{f''(t)} \cdot 2(x-t)}{2!} - \dots - \frac{\cancel{f^{(n+1)}(t)}}{n!} (x-t)^n +$$

$$g'(t) = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t) (x-t)^n \quad \left| \quad \frac{f^{(n)}(t)}{n!} n (x-t)^{n-1}$$



Considera, ahora, la función:

$$h(t) = g(\underline{t}) - \left( \frac{x-t}{x-c} \right)^{n+1} g(c)$$

$$\Rightarrow h(c) = g(c) - g(c) = 0$$

$$h(x) = \cancel{g(x)}^{\cancel{0}} - 0 = 0$$

$\Rightarrow$  Por Rolle  $\exists \xi$  entre  $x$  y  $c \ni$

$$h'(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow h'(t) = g'(t) + \frac{(n+1)}{(x-c)} \left( \frac{x-t}{x-c} \right)^n g(c)$$



$$\Rightarrow h'(\xi) = g'(\xi) + \frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(x-c)^{n+1}} g(c) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n + \frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(x-c)^{n+1}} g(c) = 0$$

$$\Rightarrow +\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(n+1)}{(x-c)^{n+1}} g(c)$$

$$\Rightarrow \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} = g(c) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)(x-c)^k}{k!}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)(x-c)^k}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}$$

□

## Teorema (Regla de L'Hôpital) (caso $\frac{0}{0}$ )

Supongamos que  $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  son diferenciables sobre  $(a, b)$  y  $\exists g'(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in (a, b)$ , y que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

Entonces, si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Dem.: Extendemos  $f$  y  $g$  de tal forma que

$$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

son funciones continuas sobre  $[a, b]$ , con

$$f(a) = g(a) = 0.$$



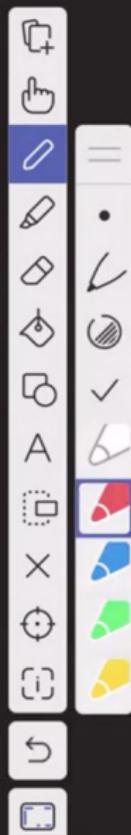
Sea  $x \in (a, b)$  y consideremos  $f$  y  $g$  extendidas en  $[a, x] \Rightarrow f$  y  $g$  son continuas en  $[a, x]$  y diferenciables en  $(a, x)$ , entonces, por el Teorema del Valor Medio de Lagrange, existe  $c \in (a, x) \ni$

$$g(x) - g(a) = \underbrace{g'(c)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(x-a)}_{\neq 0} \neq 0, \forall x \in (a, b)$$

Por el Teorema del valor medio de Cauchy:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

↑  
↑





$\Rightarrow$  Si  $x \rightarrow a^+$



$\Rightarrow c \rightarrow a^+$ . Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \square$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$g(x) = x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\boxed{g'(x) = 1 \neq 0} \text{ bx } \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0$$



Teorema: (Regla de L'Hôpital) (caso  $\frac{\infty}{\infty}$ )

Suponga que  $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones diferenciables sobre  $(a, b)$   $\Rightarrow g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$  y que  $\lim_{x \rightarrow a^+} |g(x)| = \infty$ . Entonces,

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

$$\text{Ej: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = 0$$

$x \in (0, 1/2)$

Dem: Como  $\lim_{x \rightarrow a^+} |g(x)| = \infty \Rightarrow g(x) \neq 0$ , para valores de  $x$  cerca de  $a$ . Entonces, podemos asumir, SPG, que  $g(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in (a, b)$ . Sean  $x, y \in (a, b)$ .  
 $\exists a < x < y < b \Rightarrow$  Considera  $f, g: [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 Como  $f, g$  son continuas en  $[x, y]$ , diferenciables en  $(x, y)$  y  $|g'(x) \neq 0|$  en  $(x, y)$ , entonces por el T.V.M. de Cauchy  $\exists c \in (x, y) \Rightarrow$

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Por T.V.M de Lagrange  
 $g(y) - g(x) \neq 0$ .



$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y) + f(y)}{g(x)} = \overbrace{\frac{f(x) - f(y)}{g(x)}}^{\text{green bracket}} + \frac{f(y)}{g(x)}$$

$$= \left( \underbrace{\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}}_{\text{green bracket}} \right) \cdot \left( \frac{g(x) - g(y)}{g(x)} \right) + \frac{f(y)}{g(x)}$$

$$= \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \left( \frac{g(x) - g(y)}{g(x)} \right) + \frac{f(y)}{g(x)}$$

$$1 - \frac{g(y)}{g(x)}$$

$\Rightarrow$  Consider:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \left( \frac{g(x) - g(y)}{g(x)} \right) + \frac{f(y)}{g(x)} - L \right|$$



$$= \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} - L \right|$$

$$= \left| \left( \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right) - \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| + \underbrace{\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)} \right|}_{\text{blue bracket}} + \left| \frac{f(y)}{g(x)} \right|$$

$|g(x)| \rightarrow \infty$

## Criterios para optimización:

Teorema (criterio de 1<sup>a</sup> derivada): Sean  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , una función continua en  $[a, b]$  y diferenciable en  $(a, c) \cup (c, b)$ .

Entonces,

(1) Si existe una vecindad  $(c-\delta, c+\delta)$ ,  $f'(x) \geq 0$ ,

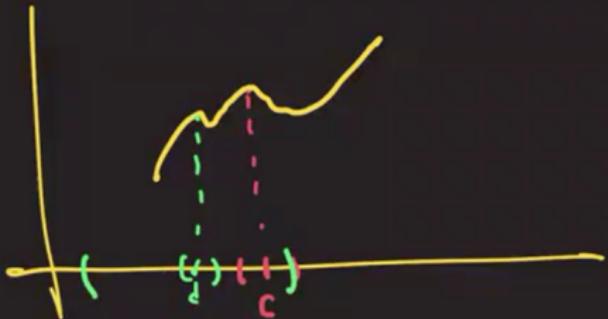
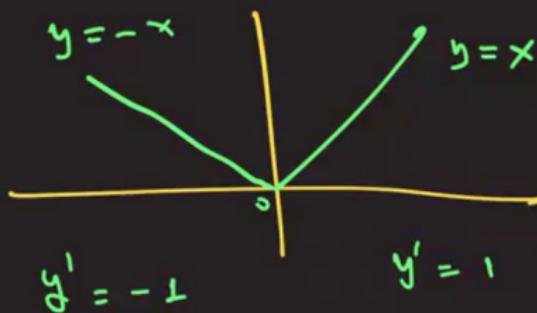
$\forall x \in (c-\delta, c)$  y  $f'(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in (c, c+\delta)$ , entonces  $f$  tiene un máximo relativo (local) en  $c$ .

$f$  tiene un mínimo relativo (local) en  $c$ .

(2) Si existe una vecindad  $(c-\delta, c+\delta)$  s.t.  $f'(x) \leq 0$ ,

$\forall x \in (c-\delta, c)$  y  $f'(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in (c, c+\delta)$ , entonces  $f$

tiene un mínimo relativo (local) en  $c$ .



Dem: (1) Sea  $\exists \bar{x} \in (c-\delta, c) \Rightarrow$  por el T.V.M,  $\exists c_x \in (\bar{x}, c)$

$$f(c) - f(\bar{x}) = f'(c_x) \cdot (c - \bar{x}).$$

Como  $f'(c_x) > 0$  y  $c - \bar{x} > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(c) - f(\bar{x}) > 0 \Rightarrow f(c) > f(\bar{x}), \forall x \in (c-\delta, c).$$

Si  $x \in (c, c+\delta) \Rightarrow$  el T.V.M  $\exists d_x \in (c, x) \ni$

$$f(x) - f(c) = f'(d_x)(x - c).$$

Como  $f'(x) \leq 0, \forall x \in (c, c+\delta)$  y  $x - c \geq 0$

$$\Rightarrow f(x) - f(c) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(c), \forall x \in (c, c+\delta)$$

$\Rightarrow f$  tiene máximo relativo en  $c$ .

(2) Similar.



Teorema (criterio de 2da derivada): Sea  $I$  un intervalo y  $x_0$  un punto interior de  $I$ , y sea  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $n \geq 2$ . Suponga que  $f', f'', \dots, f^{(n)}$  son continuas en  $x_0$ , y que:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ pero } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

- 1) Si  $n$  es par y  $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f$  tiene mínimo relativo en  $x_0$ .
- 2) Si  $n$  es par y  $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f$  tiene máximo relativo en  $x_0$ .
- 3) Si  $n$  es impar,  $\Rightarrow f$  no tiene máximo ni mínimo relativo en  $x_0$ .

Demo. (a) Aplicaremos el Teorema de Taylor a  $f(x)$  en  $x_0$ , y sea  $x \in I \ni x_0$  (suficientemente cerca de  $x_0$ ).

$$f(x) = P_{n-1}(x) + R_{n-1}(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n,$$

donde  $c$  es un punto entre  $x_0$  y  $x$ .

(b) Si  $f^{(n)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow$  existe un intervalo  $U$  que contiene a  $x_0 \ni f^{(n)}(x)$  tiene el mismo signo que  $f^{(n)}(x_0)$ ,  $x \in U$ .

Si  $x \in U \Rightarrow c \in U \Rightarrow f^{(n)}(c)$  y  $f^{(n)}(x_0)$  tienen el mismo signo.

1) Si  $n = 2$  y  $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$  para  $x \in U$ , se



Tiene que  $f^{(n)}(c) > 0$  y  $(x - x_0)^n > 0 \Rightarrow$

$$R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n > 0$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + R_{n-1}(x) > 0$$

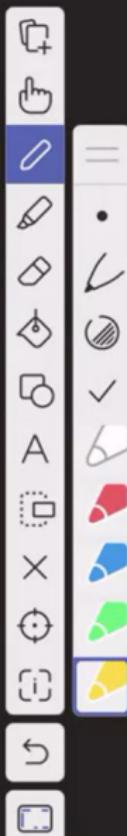
$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0), \forall x \in U$$

$\Rightarrow f$  tiene mínimo relativo en  $x_0$ .

(2) Si  $n$  es par y  $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f^{(n)}(c) < 0$  y  
 $(x - x_0)^n$  es positivo  $\Rightarrow R_{n-1} \leq 0$  y  $f(x) \leq f(x_0)$ ,

$\forall x \in U \Rightarrow f$  tiene máxima relativa en  $x_0$ .

(3) Si  $n$  es impar  $(x - x_0)^n > 0$ , si  $x > x_0$   
 $(x - x_0)^n < 0$ , si  $x < x_0$





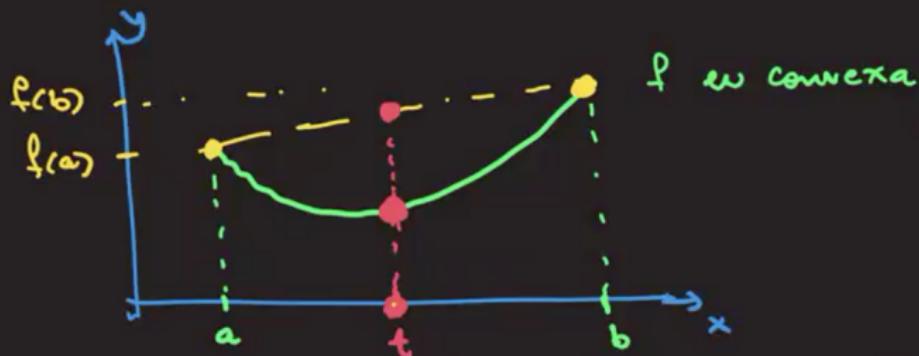
⇒ si  $x \in U \Rightarrow P_{n-1}(x)$  tendrá signos opuestos a la izquierda y derecha de  $x_0 \Rightarrow f$  no tiene máximos ni mínimos en  $x_0$ .  $\square$

Funciones convexas ① Sea  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que  $f$  es convexa sobre  $I$ , si  $\forall n, t \in I$  y  $\lambda \in [0, 1]$ , se tiene que

$$f(\lambda n + (1-\lambda)t) \leq \lambda f(n) + (1-\lambda) f(t).$$

②  $f$  es una función cóncava sobre  $I$  si  
 $-f$  es convexa sobre  $I$ .





$$(1-\lambda)a + \lambda b = t, \text{ para algún } \lambda \in [0,1]$$

$$\Rightarrow f(t) = f[(1-\lambda)a + \lambda b] \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

1) Desigualdad de Jensen

2) Teorema de las 3 cuerdas

3) Tesis

Teorema: Sea  $f$  una convexa y seaan  $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}$

i)  $w_j > 0$

ii)  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ .

Entonces, para  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , se cumple:

$$f(w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n) \leq w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n).$$

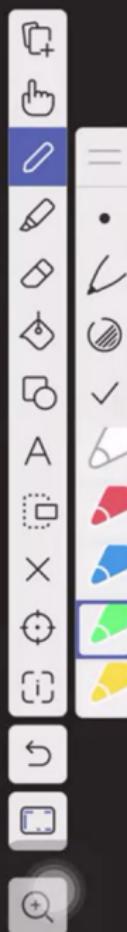
combinación convexo

combinación  
convexa

Dem: Por inducción sobre  $n$ .

i)  $n=1$ :  $f(w_1x_1) \leq w_1 f(x_1)$

$$\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_1) \Rightarrow \text{se tiene el resultado}$$



ii) Suponemos que la propiedad es válida para  $n = k - 1$ ; i.e. si  $w_j \geq 0$  y  $\sum_{j=1}^{k-1} w_j = 1$ ,

$$\Rightarrow f\left(\sum_{j=1}^{k-1} w_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{k-1} w_j f(x_j).$$

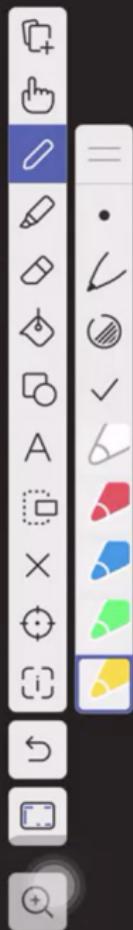
iii) Considera el caso  $n = k$ . Sean  $w_1, \dots, w_k$  números  $\geq 0$  y  $\sum_{j=1}^k w_j = 1$ .

Sea  $w_k = 1 \Rightarrow f(x_k) \geq f(x_k)$ .

$\Rightarrow$  Sea  $w_k < 1$ , se tiene:

$$w_1 + w_2 + \dots + w_{k-1} + w_k = 1$$

$$\Rightarrow w_1 + \dots + w_{k-1} = 1 - w_k$$



$$\Rightarrow \frac{w_1 + w_2 + \dots + w_{k-1}}{1-w_k} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{w_1}{1-w_k} + \frac{w_2}{1-w_k} + \dots + \frac{w_{k-1}}{1-w_k} = 1,$$

note que, además,  $\frac{w_j}{1-w_k} > 0$ ,  $j=1, \dots, k-1$

Entonces,

$$f\left(\frac{w_1}{1-w_k} x_1 + \frac{w_2}{1-w_k} x_2 + \dots + \frac{w_{k-1}}{1-w_k} x_{k-1}\right) \leq$$

$$\leq \frac{w_1}{1-w_k} f(x_1) + \dots + \frac{w_{k-1}}{1-w_k} f(x_{k-1}) \quad (\text{I})$$

Qdernás,  $f(x_k) \leq f(x_k)$   
 $\Rightarrow w_k f(x_k) \leq w_k f(x_k)$

(II)

$\Rightarrow \underbrace{(1-w_k)(I)}_{(II)} +$  Entonces:

$$*(1-w_k) f\left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{w_j}{1-w_k} x_j\right) \leq (1-w_k) \sum_{j=1}^{k-1} \frac{w_j}{1-w_k} f(x_j) + w_k f(x_k)$$

A

$$f\left[\underbrace{(1-w_k)}_{(1-w_k)} \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{w_j}{1-w_k}\right) x_j + w_k x_k\right] \leq (1-w_k) f\left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{w_j}{1-w_k} x_j\right) + w_k f(x_k)$$

$$\Rightarrow f(w_1 x_1 + \dots + w_k x_k) \leq \sum_{j=1}^k w_j f(x_j)$$

□



Prop: (Lema de las tres cuerdas):

Sea  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces,  $f$  es convexa si

$\forall x_1, x_2, x_3 \in I$ ,  $x_1 < x_2 < x_3$ , se tiene que.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

Dem. ( $\Rightarrow$ )



Sean  $x_1, x_2, x_3 \in I$ ,  $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \exists t \in [0, 1] \exists$

$$x_2 = (1-t)x_1 + t x_3$$

$$\Rightarrow x_2 = x_1 + t(x_3 - x_1)$$

$$\Rightarrow t = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \in [0, 1] ; \text{ además,}$$

$$1-t = 1 - \left( \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \right) = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \in [0, 1].$$

• Como  $f$  es convexa, entonces: (I)

$$\text{si } x_2 = (1-t)x_1 + t x_3 \Rightarrow f(x_2) \leq (1-t)f(x_1) + t f(x_3)$$

.. Restemos  $f(x_1)$  en (I):

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq (1-t)f(x_1) + t f(x_3) - f(x_1)$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq t f(x_3) - t f(x_1)$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq t [f(x_3) - f(x_1)]$$



$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq \left( \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \right) [f(x_3) - f(x_1)]$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

... multiplicaremos (I)  $x-1$  y sumemos  $f(x_3)$ :

$$\Rightarrow -f(x_2) \geq -[(1-t)f(x_1) + t f(x_3)]$$

$$\Rightarrow f(x_3) - f(x_2) \geq -f(x_1) + t f(x_1) - t f(x_3) + f(x_3)$$

$$\geq f(x_3) - f(x_1) - t [f(x_3) - f(x_1)]$$

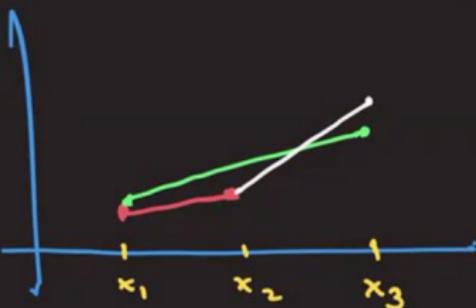
$$\geq [f(x_3) - f(x_1)] (1-t)$$



$$\Rightarrow f(x_3) - f(x_2) \geq \left( \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \right) [f(x_3) - f(x_1)]$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

( $\Leftarrow$ )



Prop: Sea  $I$  un intervalo y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa. Para cada  $a \in I$ , considere:

$$f_a: I - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$



Entonces,  $f_a(x)$  es creciente en  $I$ .

Dem: Sea  $a \in I$  y sean  $x, y \in I - \{a\}$ ,  $x < y$ .

i) Si  $a < x < y \Rightarrow$  aplicando el teorema anterior con  $x_1 = a$ ,  $x_2 = x$  y  $x_3 = y$ , se tiene

$$f_a(x) < f_y(x) \quad \text{y} \quad f_y(y) < f_a(y).$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \Rightarrow f_a(x) \leq f_a(y)$$

ii) Si  $x < y < a \Rightarrow \dots \Rightarrow f_a(x) \leq f_a(y)$ .

iii) Si  $x < a < y \Rightarrow \dots \Rightarrow f_a(x) \leq f_a(y) \quad \square$

