UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

MM2034 - 1 SEMESTRE - 2021

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA APLICADA

ANÁLISIS DE VARIABLE REAL 1

Catedrático: Dorval Carías

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay

Carné: 19857

Correo: rom19857@uvg.edu.gt

20 de junio de 2021

Índice

1. Topología básica en $\mathbb{R}$

Definición 1. *Sea X un conjunto no vacío. Una familia de subconjuntos τ de X es una topología sobre X si:*

1. $\Phi, X, \in \tau$.
2. *Cualquier familia $\{A_i\}$ de elementos de τ es tal que $\cup_i A_i \in \tau$.*
3. *Si $A_1, A_2 \in \tau \implies A_1 \cap A_2 \in \tau$.*

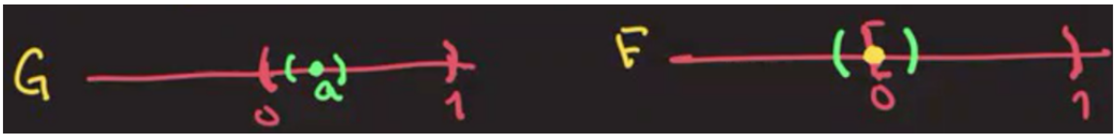
NOTA. *A los elementos de τ se les llama abiertos de X.*

Definición 2. *La familia θ de todos los subconjuntos abiertos de M es la topología de M y el par (M, θ) es el espacio topológico asociado al métrico M.*

NOTA. *En el caso de $\mathbb{R}^n$ se dice que se tiene el espacio topológico Euclidiano $\mathbb{R}^n$.*

Ejemplo 1. 1. *$\mathbb{R}^n$ es abierto. En efecto, $B_1(x) \subset \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n$.*

2. *$G = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ es abierto, pero $F = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ no lo es.*

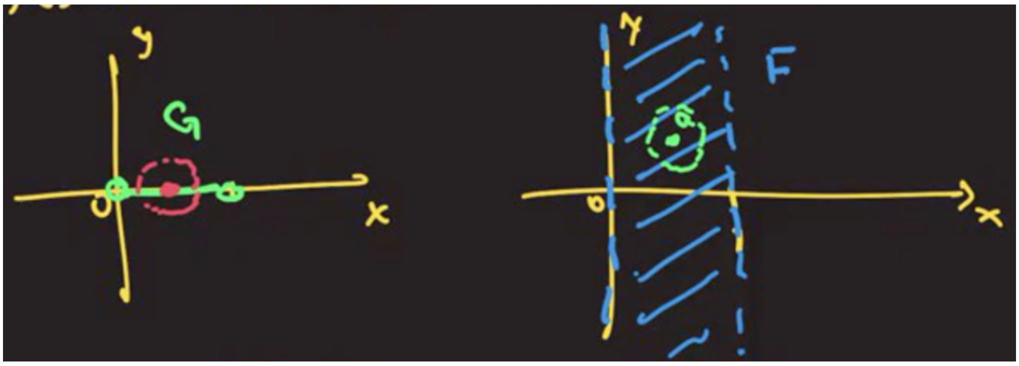


Ejemplo 2. 1. *$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ni x^2 + y^2 < 1\}$ es abierto.*

2. *$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ni x^2 + y^2 \leq 1\}$ no es abierto.*

Ejemplo 3. 1. *$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ni 0 < x < 1, y = 0\}$ no es abierto de $\mathbb{R}^2$.*

2. *$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ni 0 < x < 1\}$ es abierto de $\mathbb{R}^2$.*



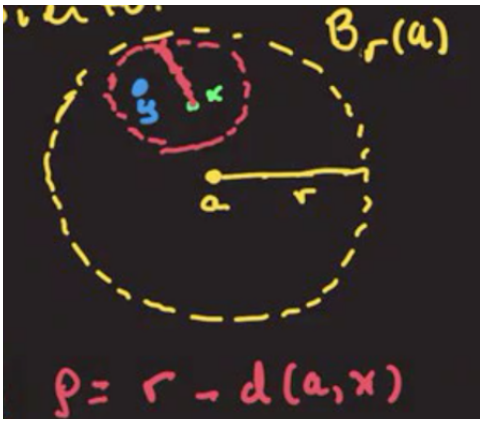
Ejemplo 4. Φ *es abierto.*

Proposición 1. *Una bola abierta es abierto.*

Demostración. Sea $x \in B_r(a)$ y considere la bola centrada en x y de radio $r - d(a,x)$. A probar: $B_{r-d(a,x)}(x) \subset B_r(a)$. Sea $y \in B_{r-d(a,x)}(x)$. Entonces,

$$\begin{aligned} d(a,y) &\leq d(a,x) + d(x,y) \\ &< d(a,x) + [r - d(a,x)] \\ &= r \end{aligned}$$

$\implies y \in B_r(a)$.



$\blacksquare$

Teorema 1. *Considere* $(\mathbb{R}^n, d)$*:*

1. Φ *y* $\mathbb{R}^n$ *son abiertos.*

2. *La intersección de dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ es abierto de $\mathbb{R}^n$.*

> *Por inducción, se deduce que la intersección finita de abiertos es abierto.*

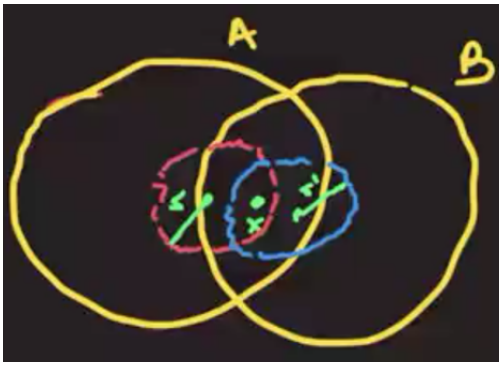
3. *La unión de cualquier colección de abiertos es un abierto de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración.

OK.

Sea A y B abiertos de $\mathbb{R}^n$. A probar: $A \cap B$ es abierto. Sea $x \in A \cap B$, entonces:

1. $x \in A$, abierto, $\implies \exists r > 0 \ni d(x, z) < r$, para $z \in A$.
2. $x \in B$, abierto, $\implies \exists r' > 0 \ni d(x, w) < r$, para $w \in B$.



$\implies$ Hagamos $r = \min\{r, r'\} \implies$ si $y \in \mathbb{R} \ni d(x, y) < r \implies y \in A$ y $y \in B \implies y \in A \cap B \implies A \cap B$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.

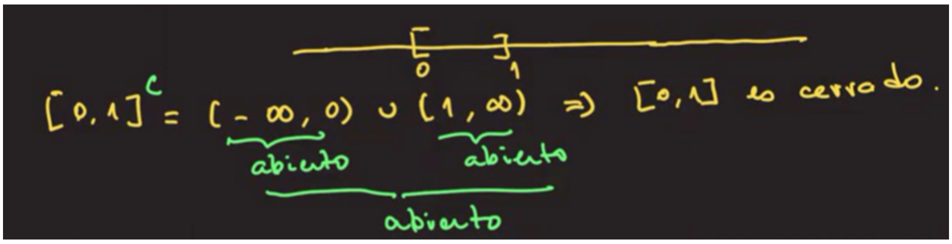
Sea $\{G_\alpha\}$ una colección cualquiera de abierto de $\mathbb{R}^n$, y sea $G = \cup_\alpha G_\alpha$. Si $x \in G \implies x \in G_\lambda$, para algún λ. Como G_λ es abierto $\implies \exists r > 0 \ni B_r(x) \subset G_\lambda \subset \cup_\alpha G_\alpha = G$. ■

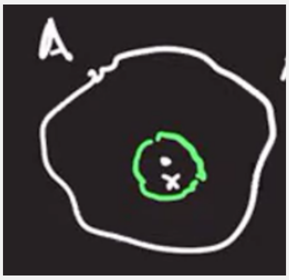
NOTA. *La intersección de una colección infinita de abierto no necesariamente es abierto. En efecto considere:*

$$
\begin{aligned}
A_n &= \{x \in \mathbb{R} \ni -\frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n}\}, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \\
A_1 &= (-1, 2) \\
A_2 &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \\
&\vdots \\
\implies A &= \cap_{n=1}^{\infty} A_n \\
&= [0, 1] \quad \text{¿Por qué cerrado?}
\end{aligned}
$$

> *Los A_n son abiertos (por se bolas abiertas de $\mathbb{R}$)*

Definición 3. *Un subconjunto $\mathbb{F}$ en el métrico (M, d) es cerrado si $\mathbb{F}^c$ es abierto.*



> 1. Abierto: bola abierta contenida en A es cada punto.
>
> 
>
>
> 2. Topología (colección de todos los abiertos) en el métrico.
> 3. F es cerrado si F^c es abierto.
> 4. Abierto y cerrado no son negación uno del otro.
>   a) Φ, $\mathbb{R}^n$ son abiertos y cerrados.
>   b) $[0, 1)$ no es abierto ni cerrado.

Definición 4. *Sea $x \in M$ (espacio métrico), entonces cualquier conjunto que contiene un abierto $A \ni x \in A$ es una vecindad de x.*

Ejemplo 5. *Sea*

1. $[0, 4)$ *es na vecindad de* e.

2. $(1, 3)$ *es vecindad abierta de* e.

3. $\mathbb{R}$ *es vecindad de* e.

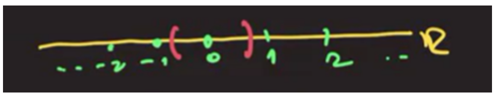
4. $(e - \varepsilon, e + \varepsilon)$ *es vecindad de* e, $\forall \varepsilon > 0$.

Definición 5. *Un punto $x \in M$ es punto interior de un conjunto $A \subseteq M$, si A es una vecindad de M.*

1. $[0, 1]$, $x = 0$ *y* $x = 1$; *no son puntos interiores. El resto de punto* $(0, 1)$ *son puntos interiores de* $[0, 1]$.

2. *En* $I = (0, 1)$, *todos son puntos interiores.*

3. $\mathbb{R} \cap \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

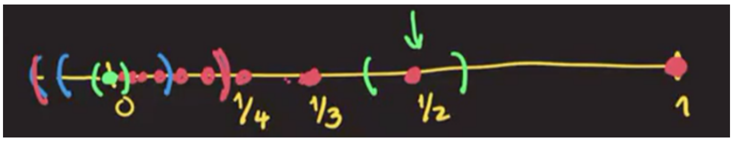


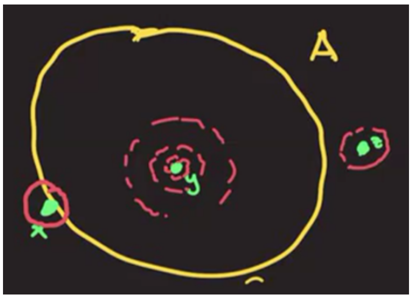
$\implies \mathbb{R} \cap \mathbb{Z}$ *no tiene puntos interiores.*

Definición 6. *Un punto x es un punto de acumulación (o punto límite) de un conjunto $A \subseteq M$, si cada vecindad de x contiene al menos un punto de A diferente de x. Es decir, si*

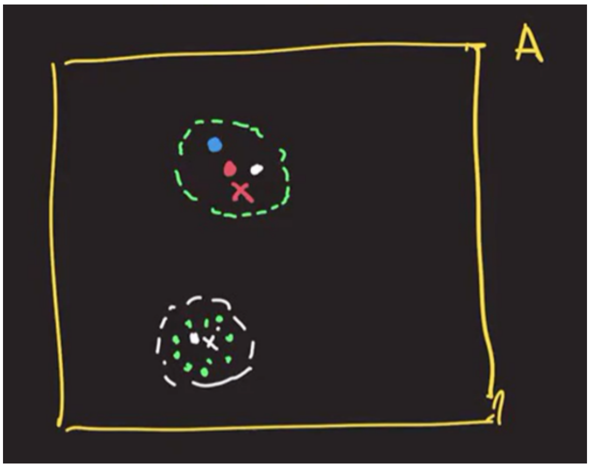
$$(B_r(x) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset, \quad \forall r > 0.$$

Ejemplo 6. $A = \{1, 1/2, 1/3, \cdots, 1/n, \cdots\} \subseteq \mathbb{R} \implies$ *$x = 0$ es un punto de acumulación de A.*





Definición 7. *El conjunto de todos los puntos interiores de A se llama interior de A (Notación: A° o $int(A)$).*



Es decir:

$$int(A) = \bigcup_{U \subset A,\ U \text{ es abierto.}} U$$

i.e $int(A)$ en el abierto más grande contenido.

Ejemplo 7. *1.* $int[0,1] = (0,1)$.

2. $int\mathbb{R} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.

3. $int\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

4. A *es abierto* $\iff A = int(A)$.

Ejemplo 8. *La cerradura de A es el conjunto:*

$$\overline{A} := \bigcap_{A \subset F,\ F \text{ cerrado}} F$$

NOTA. 1. *$\overline{A}$ es cerrado.*

2. *$\overline{A}$ es el cerrado más pequeño que contiene a A.*

3. *A es cerrado $\iff A = \overline{A}$.*

4. *Si F es un cerrado que contiene a $A \implies A \subset \overline{A} \subset F$.*

Definición 8. *La frontera de A (denotada $bd(A)$ o ∂A), se define*

$$\partial A := \overline{A} - int(A).$$

Ejemplo 9. *Sea $I = [0,1] \implies \overline{I} = [0,1] \implies int(I) = (0,1) \implies \partial A = \overline{I} - int(A) = \{0,1\}$.*

Definición 9. *El conjunto de todos los puntos de acumulación de un conjunto A se llama conjunto derivada de A. Notación: A'.*

Proposición 2. 1. *Si $A \subset B \implies A' \subset B'$.*

Demostración. Sea $x \in A'$ (i.e x es un punto de acumulación de A) $\implies \forall$ abierto $G \ni x \in G$, se tiene que

$$(G - \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Como $A \subset B \implies (G-\{x\}) \cap A \subset (G-\{x\}) \cap B \implies \emptyset \neq (G-\{x\}) \cap A \subset A \subset (G - \{x\}) \cap B \implies (G - \{x\}) \cap B \neq \emptyset, \forall G \ni x \in G \implies x \in B'$. ■

2. $(A \cup B)' = A' \cup B'$