Universidad del Valle de Guatemala

MM2034 - 1 semestre - 2021

Licenciatura en matemática aplicada

ANÁLISIS DE VARIABLE REAL 1

Catedrático: Dorval Carías

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay
Carné: 19857
Correo: rom19857@uvg.edu.gt

30 de junio de 2021

Índice

1. Propiedades de $\mathbb{R}$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un campo.

Definición 1. *Un conjunto no vacío P de elementos de un campo $\mathbb{F}$ es una clase positiva si cumple:*

1. *Si $a, b \in P \implies a + b \in P$.*

2. *Si $a, b \in P \implies a \cdot b \in P$.*

3. *Si $a \in \mathbb{F}$, entonces:*

   a) *$a \in P$ o $a = 0$ o $-a \in P$. (Ley de tricotomía)*

NOTA. *Sea $N = \{-a : a \in P\}$ la clase negativa relativa a P. $\implies \mathbb{F} = P \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$.*

Ejemplo 1. 1. *$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un campo. Sea $P\{a/b \in \mathbb{Q} \ni a, b \in \mathbb{Z}^+\} \implies P$ es una clase positiva de $\mathbb{Q}$.*

2. *Sea $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, en las operaciones:*

+	0	1
0	0	1
1	1	0

*	0	1
0	0	0
1	0	1

$\implies (\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ *es un campo.*

   a) *Sea $P = \{0\}$. Cumple las propiedades: 1, 2. No cumple 3. $\implies P$ no es una clase positiva de $\mathbb{Z}_2$.*

   b) *Sea $P' = \{1\}$. No cumple el 1. $\implies P'$ no es clase positiva de $\mathbb{Z}_2$.*

Definición 2. *Sea P la clase positiva del campo $\mathbb{F}$, entonces se dice que $\mathbb{F}$ está ordenada por P (o que $\mathbb{F}$ es un campo ordenado).*

1. *Si $a \in P$, se dice que a es positivo. Notación $a > 0$.*

2. *Si $a \in P$ o $a = 0$, se dice que a es no negativo. Notación $a \geq 0$.*

3. *Si $a, b \in \mathbb{F}$ y $a - b \in P$, se escribe $a > b$.*

4. *Si $a, b \in \mathbb{F}$ y $a - b \in P$ o $a - b = 0$, se escribe $a \geq b$.*

Proposición 1. *Otras propiedades:*

1. *Si $a > b$ y $b > c \implies a > c$.*

2. *Si $a, b \in \mathbb{F}$, entonces*

   a) *$a > b$ o $a = b$ o $b > a$.*

3. *Si $a \geq b$ y $b \geq a \implies a = b$.*

Proposición 2. *Sea $\mathbb{F}$ un campo ordenado:*

1. *Si $a \neq 0 \implies a^2 > 0$.*

2. *1>0.*

3. *Si $n \in \mathbb{Z}^+ \implies n > 0$.*

Teorema 1. *Sean $a, b, c \in \mathbb{F}$.*

1. *Si $a > b \implies a + c > b + c$.*

2. *Si $a > b$ y $c > d \implies a + c > b + d$.*

3. *Si $a > b$ y $c > 0 \implies ac > bc$.*

4. *Si $a > b$ y $c < 0 \implies ac < bc$.*

5. *Si $a > 0 \implies a^{-1} > 0$.*

6. *Si $a < 0 \implies a^{-1} < 0$.*

Corolario 1.1. *Si $a > b \implies a > \frac{a+b}{2} > b$.*

NOTA. *Hagamos $b = 0$. Entonces, si $a > 0 \implies a > \frac{a}{2} > 0$. Entonces, en un campo ordenado no existe un número positivo menor.*

Teorema 2. *Si $ab > 0$, entonces, $a > 0$ y $b > 0$ o $a < 0$ y $b < 0$.*

Definición 3. *Sea $\mathbb{F}$ un campo una clase positiva P. Se define la función valor absoluto:*

$$|\cdot| : \mathbb{F} \to P \cup \{0\} \ni$$

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0. \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Teorema 3.

1. *$|a| = 0 \iff a = 0$.*
2. *$|-a| = |a|$.*
3. *$|ab| = |a| \cdot |b|$.*
4. *Si $c \geq 0 \implies |a| \leq c \iff -c \leq a \leq c$.*

NOTA. *Como $|a| \geq 0 \implies |a| \leq |a| \implies -|a| \leq a \leq |a|, \forall a$.*

Teorema 4 (Desigualdad triangular)**.** *Sean a y b elementos de un campo ordenado $\mathbb{F}$. Entonces,*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

NOTA (Desigualdad triangular)**.** *Si a, b son elementos del campo ordenado $\mathbb{F}$, entonces:*

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

Definición 4. *Un campo ordenado $\mathbb{F}$ es arquimediano si $\forall x \in \mathbb{F}\ \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni x < n$.*

NOTA. *La clase positiva P de $\mathbb{F}$ es arquimediana si $\forall x \in \mathbb{F}\ \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni n - x \in P$.*

Teorema 5. *Si $\mathbb{F}$ es un campo arquimediano, entonces:*

1. *Si $y > 0$ y $z > 0 \implies \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni ny > z$.*
2. *Si $z > 0 \implies \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni 0 < 1/n < z$.*
3. *Si $y > 0 \implies \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni n - 1 \leq y < n$.*

1.1. Supremo e Ínfimo

NOTA (Cota superior más pequeño)**.** *Sea $B \subseteq \mathbb{Q}$, $B \neq \mathbb{Q}$. Entonces, B es acotado superiormente si $k \in \mathbb{Q} \ni k \geq b$, $\forall b \in B$. En este caso k es cota superior de B.*

Ejemplo 2. *Considérese*

1. *Sea $\{a \in \mathbb{Q} \ni a < 4\}$. Este conjunto está acotado superiormente por 4 (pero también 5, 6,... son cotas superiores). Por otro lado, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ no es acotado.*

2. *Si $B \subseteq \mathbb{Q}, B \neq \mathbb{Q}$ y B es acotado superiormente, entonces la cota superior más pequeña de B es un número $k \in \mathbb{B}$ es un número $k \in \mathbb{Q} \ni$*

    a) *K es cota superior.*

    b) *Si c es cota superior de B, entonces $c \geq k$.*

3. *Si existe la cota superior más pequeña de B, esta es única. Suponga que k_1 y k_2 son cotas superiores más pequeñas. Entonces:*

    a) *Como k_1 es cota superior más pequeña y k_2 es cota superior $\implies k_2 \geq k_1$.*

    b) *Como k_2 es cota superior más pequeña y k_1 es cota superior. $\implies k_1 \geq k_2 \implies k_1 = k_2$.*

4. *Considérese el conjunto*

$$C = \{a \in \mathbb{Q} : a \geq 0 \text{ y } a^2 < 2\}.$$

Nótese que C está acotado superiormente. En efecto, si $a \in C \implies a^2 < 4 \implies a < 2 \implies 2$ es cota superior de C.

Ejemplo 3. *Ejemplos*

a) *¿Es 2 la menor cota superior de C? No, considere $a^2 < 9/4 \implies a < 3/2 = 1{,}5$.*

b) *Los números racionales: 2, 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 1.41422, 1.41214,... son cotas superiores de C.*

c) *C no tiene en $\mathbb{Q}$ una cota superior más pequeña. Nótese que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, debería ser la cota superior más pequeña de C.*

Definición 5. *El conjunto de números reales $\mathbb{R}$ es un campo ordenado que satisface:*

P1 $\forall x > 0$ *en* $\mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni x < n > y$.

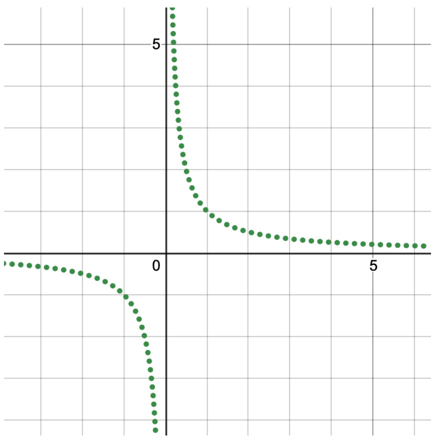
P2 *Cada subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que es acotado superiormente tiene una $\underbrace{\textit{cota superior más pequeña}}_{\textit{supremo}}$ en $\mathbb{R}$.*

NOTA. *Cada subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que es acotado inferiormente tiene una cota inferior más grande (**ínfimo**). En efecto si A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente, considere $-A$ y aplique el axioma del supremo.*

1. *Supremo de A:* $\sup A$.
2. *Ínfimo de A:* $\inf A$.

Ejemplo 4.

Considere $\left(\frac{1}{n}\right)$.



$\Longrightarrow$ $\inf\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Ejemplo 5.

$\sup[a,b]=b; \text{ínf}[a,b]=a.$

$\sup(a,b)=b; \text{ínf}(a,b)=a.$

NOTA. *1. Si el* $\sup A \in A \implies \sup A$ *es el máximo de* A*.*

2. Si el $\text{ínf}\, A \in A \implies \text{ínf}\, A$ *es el mínimo de* A*.*

Convenciones:

1. Si A no está acotada superiormente, entonces escribimos

$$\sup A = \infty$$

2. Si A no está acotado inferiormente, entonces escribimos

$$\text{ínf}\, A = -\infty$$

3. Si $A=\emptyset$ (Recordemos que cada número real es cota superior e inferior de $\emptyset$), se escribe:

$$\sup \emptyset = -\infty \text{ e } \text{ínf}\, \emptyset = \infty$$

NOTA. *En todo caso, se dice que el* $\sup A$ *e* $\text{ínf}\, A$ *existen si son un número finito.*

1.2. Espacios métricos

Definición 6. *Sea X un conjunto y*

$$d : X \times X \to \mathbb{R} \ni$$

$\forall a, b, c \in X$ *satisface:*

1. *Positividad.* $d(a, b) \geq 0$; $d(a, b) = 0 \iff a = b$.

2. *Simetría.* $d(a, b) = d(b, a)$.

3. *Desigualdad triangular.* $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, d)$, *entonces* (X, d) *es un espacio métrico y* d *es una métrica sobre* X *o una distancia sobre* X.

Proposición 3 (Reordenamiento de la desigualdad triangular)**.** *Si* (X, d) *es un espacio métrico y si* $a, b, c \in X$, *entonces:*

$$|d(a, b) - d(b, c)| \leq d(a, c).$$

Ejemplo 6. 1. *Sea* $X = \mathbb{R}$ *y* $d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni d_1(a, b) = |a - b|$. $\implies (\mathbb{R}, d_1)$ *es un espacio métrico. En efecto, sean* $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Entonces:*

a) *Por definición,* $d_1(a, b) = |a - b| \geq 0$.

1) *Si* $d(a, b) = |a - b| = 0 \implies a - b = 0 \implies a = b$.

2) *Si* $a = b \implies d(a, b) = |a - a| = |0| = 0$.

b) $d(a, b) = |a - b| = | - (a - b)| = |b - a| = d(b, a)$.

c) $d(a, b) = |a - b| = |(a - c) + (c - d)| \leq |a - c| + |c - b| = d(a, c) + d(c, b)$.

2. *Cada conjunto admite una métrica. Sea $X \neq \emptyset$, entonces se define la métrica discreta así: $d : X \times X \to \mathbb{R} \ni$*

$$d(a,b) = \begin{cases} 1, & a \neq b \\ 0, & a = b \end{cases}$$

$\implies$ *(X,d) es espacio métrico.*

Ejemplo 7 (Métrica Euclidiana en $\mathbb{R}^n$)**.** *Sea $X = \mathbb{R}^n$ y sean: $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Definamos: $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ni$*

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

$\implies$ *$(\mathbb{R}^n, d_2)$ es métrica.*

Lema 6. *Sean $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$, números reales cualquiera. Entonces, se cumplen:*

1. *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$
$$(\overline{a} \cdot \overline{b}) \leq \|\overline{a}\| \cdot \|\overline{b}\|$$

2. *Desigualdad de Minkowski*

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2\right]^{1/2} \leq \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right] + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right]^{1/2}$$

Ejemplo 8. *Considere $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ni$*

$$d_\infty(x,y) = \max\left\{|x_i - y_i| : i = 1, \cdots, n\right\}.$$

$\implies$ *d_∞ es una métrica en $\mathbb{R}^n$.*

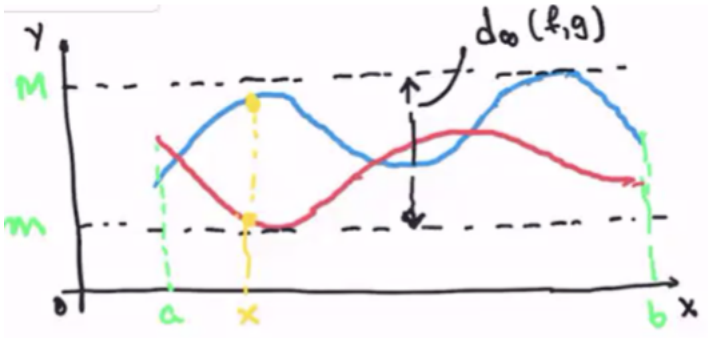
Ejemplo 9. *$x = (2, 3, 4)$ y $y = (-1, 2, 0)$.*

$$\implies d_\infty(x, y) = \text{máx}\{|2 - (-1)|, |3 - 2|, |4 - 0|\} = \text{máx}\{3, 1, 4\} = 4.$$

Ejemplo 10. *Sea $B([a, b])$ el conjunto de funciones acotadas definidas en $[a, b]$ y de valores reales. También se denota:*

$$l^\infty([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \ni |f(x)| \leq M, M > 0\}$$

. $\implies$ Dadas $f, g \in l^\infty[a, b]$.



$\implies d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|\}$, la cual es una métrica en $l^\infty[a, b]$ y se llama métrica o distancia del supremo.

Ejemplo 11. *Sea $C[a, b]$ el conjunto de funciones continuas sobre $[a, b]$ con valores reales. Entonces, si $f, g \in C[a, b]$, se tiene la métrica:*

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

sobre $C[a, b]$.

Definición 7. *Suponga que V es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y que:*

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R} \ni$$

$\forall x, y \in V$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ se cumplen:

1. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0.$

2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|.$

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Entonces, $\|\cdot\|$ *es una norma sobre* V *y decimos que* $(V, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado.*

NOTA. *Sea* V *un espacio vectorial normado. Entonces, considere:*

$$d : V \times V \to \mathbb{R} \ni$$

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Nótese que:

1. $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$*;*

   a*)* *Si* $x = y \implies d(x, y) = \|x - y\| = 0$.

   b*)* *Si* $d(x, y) = \|x - y\| = 0 \implies x - y = 0 \implies x = y$.

2. $d(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$.

3. $d(x, y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq \|x- <\|+|z-y\| = d(x, z)+d(z, y)$.
$\implies d(x, y) = \|x - y\|$ *es una métrica sobre* V*. Esta es la métrica inducida por la norma.*

1.3. HT1

Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada
14 de febrero de 2021
Rudik Roberto Rompich - Carné: 19857

Análisis de Variable Real 1 - Dorval Carías

HT 1 - Revisión

1. **Muestre que el campo $\mathbb{Q}$ de los racionales es arquimediano.**

Demostración. Por definición, un campo ordenado $\mathbb{F}$ tiene la propiedad arquimediana si $\forall x \in \mathbb{F} \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni x < n$. Entonces, sea $\mathbb{Q}$ el campo de los racionales, es decir $\exists$ unos elementos m y $n \ni \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ en donde $m \neq 0$ y $m, n \in \mathbb{Z}$. Entonces, se deben cumplir, según el Teorema 1.4.2 de Abbott (2012):

$$x \in \mathbb{Q}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ que satisfaga la desigualdad } n > x \tag{1}$$

$$\text{Dado cualquier número racional } y > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ que satisfaga } \frac{1}{n} < y \text{ o } 1 < ny \tag{2}$$

Para (1), supóngase $x = \frac{n}{m}$, entonces existen dos casos:

1. ($x < 0$), se cumple la propiedad (1) en todos los casos por definición.
2. ($x \geq 0$) Como sabemos $x = \frac{n}{m}$ y $m \neq 0$. Entonces, por definición de números racionales, se debe cumplir $m \geq 1$ en cualquier caso.

Para (2), si tomamos $y = \frac{n}{m} \implies m \cdot y = n \implies$ i.e. $n = my \geq y$ (como $m \geq 1$) $\implies n + 1 > y$, cumpliendo la propiedad (2).

$\therefore$ el campo $\mathbb{Q}$ es arquimediano. □

1. **¿Depende este resultado del orden definido en $\mathbb{Q}$?**

   En la argumentación de la prueba se asumió que $\mathbb{Q}$ era un campo ordenado. Por lo cual, se determinó que $\mathbb{Q}$ es un campo arquimediano. Sin embargo, no depende del orden definido, ya que solamente existe una relación que ordena a $\mathbb{Q}$ y que únicamente en esa relación puede ser ordenada; como se observa en la demostración anterior.

2. **Presente un ejemplo de un campo ordenado no arquimediano.**

Algunos ejemplos de campos no arquimedianos pero sí ordenados son: campo de Levi-Civita , los números hiperreales, números surreales, el campo de Dehn, y el campo de las funciones racionales. De los cuales, se consideró el campo de las *funciones racionales*.

Funciones racionales

Por definición de un campo ordenado, supóngase dos funciones $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}(x)$ y asumimos que $f < g \leftrightarrow f \neq g$ y que al substraer $g - f$ el resultado es un coeficiente positivo. Entonces, por las propiedades del orden, se deben cumplir:

1. Según la tricotomía, por cada $f \in \mathbb{Q}(x)$, se tiene que mantener $f > 0, f = 0$ o $0 > f$
2. Si hay tres elementos $f, g, h \in \mathbb{Q}(x)$ y $f < g$, entonces $f + h < g + h$
3. Si hay tres elementos $f, g, h \in \mathbb{Q}(x), f < g$ y $0 < h$, entonces $fh < gh$.

Demostración. Para mostrar que las funciones racionales son ordenadas, asúmase que $0 < f \leftrightarrow -f < 0$, entonces cualquier elemento de $\mathbb{Q}(x)$ puede escribir como $\frac{f(x)}{g(x)}$ donde $g > 0$. Por otra parte, si definimos $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \in \mathbb{Q}(x)$, en donde por definición $g_1 > 0$ y $g_2 > 0$, eso quiere decir que:

$$\implies \frac{f_1(x)}{g_1(x)} < \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \implies f_1(x)g_2(x) < f_2(x)g_1(x)$$

probando que las funciones racionales son ordenadas. □

Por otra parte queremos determinar que las funciones racionales no son arquimedeanas:

Demostración. Considérese un contraejemplo, tomando en cuenta las funciones racionales $f(x) = x$ y $g(x) = 1$. Se observa que si se toma un elemento $n \in \mathbb{N}$, siempre habrá una función $f(x) > n \cdot g(x)$, debido a que $\big(f - n \cdot g\big)(x) = x - n$ y afirmando que el coeficiente de $\big(f - n \cdot g\big)$ es 1, el cual debe ser positivo; incumpliendo la propiedad arquimediana. □

3. **Si a y b son elementos de un campo arquimediano F con $a < b$, demuestre que existe un racional $c \in F \ni a < c < b$.**

Demostración. Basándose en la deducción de Bartle and Sherbert (2000). Supóngase que c=0, por lo que se puede considerar $a > 0$. En donde $b - a > 0$. Siguiendo el corolario que dice si $t > 0$, entonces existe $n_t \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/n_t < t$. Se puede asumir que $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < b - a$. Por lo tanto, si se tiene $na + 1 < nb.$, aplicando nuevamente otro corolario que afirma: Si $b > 0$, entonces existe $n_b \in \mathbb{N}$ tal que $n_b - 1 \leq y \leq n$. Por lo que se tiene que: $na > 0$, entonces $m \in \mathbb{N}$ con $m - 1 \leq na < m$. Por lo tanto, $m \leq na + 1 < nb$, Mientras que $na < m < nb$. Entonces el número racional $r := m/n$ satisface $a < c < b$ □

4.

- Defina operaciones en $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + (\sqrt{2})y : x, y \in \mathbb{Q}\}$ de tal forma que sea un campo.

  Demostración. Por definición, asúmase que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$, por lo que las propiedades de asociatividad, conmutatividad y distributividad de la multiplicación sobre la suma son implícitas por ser un subcampo de $\mathbb{R}$. Entonces:

1. Cerradura bajo la adición. Dados $a_1, a_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, entonces $a_1 + a_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

   Sea $a_1 = x_1 + (\sqrt{2})y_1$ y $a_2 = x_2 + (\sqrt{2})y_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \implies a_1 + a_2 = x_1 + x_2 + (\sqrt{2})y_1 + (\sqrt{2})y_2 = x_1 + x_2 + (\sqrt{2})[y_1 + y_2] \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
2. Cerradura bajo la multiplicación. Dados $a_1, a_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, entonces $a_1 \cdot a_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

   Sea $a_1 = x_1 + (\sqrt{2})y_1$ y $a_2 = x_2 + (\sqrt{2})y_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \implies a_1 \cdot a_2 = (x_1+(\sqrt{2})y_1)(x_2+(\sqrt{2})y_2) = x_1 \cdot x_2+(\sqrt{2})y_2x_1+(\sqrt{2})y_1x_2+(\sqrt{2}y_1)\cdot(\sqrt{2}y_2) = x_1 \cdot x_2 + (\sqrt{2})[y_2x_1 + y_1x_2] + 2(y_1y_2) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
3. Inverso. Sea $a \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \implies \frac{1}{a} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$$\begin{aligned}(x + y\sqrt{2})^{-1} &= \frac{1}{x + y\sqrt{2}} \\ &= \frac{x}{x^2 - 2y^2} - \frac{y}{x^2 - 2y^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\end{aligned}$$

   en donde $x^2 - 2y^2 \neq 0$ porque $\sqrt{2}$ es irracional. $\implies \frac{1}{a} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$\therefore \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + (\sqrt{2})y : x, y \in \mathbb{Q}\}$ es un campo. □

- ¿Es un campo ordenado?

  Demostración. Dadas las propiedades de un campo ordenado (Sea P la clase positiva del campo $\mathbb{F}$, entonces se dice que $\mathbb{F}$ está ordenada por P (O que $\mathbb{F}$ es un campo ordenado):

  1. Si $a \in P$, se dice que a es positivo. Notación $a > 0$.
  2. Si $a \in$ P o $a = 0$, se dice que a es no negativo. Notación $a \geq 0$
  3. Si $a, b \in \mathbb{F}$ y $a - b \in P$,, se escribe $a > b$
  4. Si $a, b \in \mathbb{F}$ y $a - b \in P$ o $a - b = 0$, se escribe $a \geq b$

  Se propone un $a = x + (\sqrt{2}y)$. Debido a la relación $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset R \implies a > 0$ o $a \geq 0$, demostrando las propiedades (1) y (2). Por otra parte, se proponen dos elementos $x_1 + (\sqrt{2})x_2$ y $y_1 + (\sqrt{2})y_2$, tal que:

$$x_1 + (\sqrt{2})x_2 \leq y_1 + (\sqrt{2})y_2 \iff y_1 - x_1 + (x_2 - y_2)(\sqrt{2}) \geq 0$$

  Demostrando las propiedades (3) y (4). $\therefore \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + (\sqrt{2})y : x, y \in \mathbb{Q}\}$ es un campo ordenado.

  □

- ¿Es ordenado el campo de los complejos?

  Demostración. Asúmase un contraejemplo. Dígase un elemento $-i \in \mathbb{C}$. Entonces, se tienen dos casos: (i) Si $-i > 0$, es decir que si se eleva al cuadrado $(-i)^2 > 0 \implies -1 > 0$. Entonces se tiene que $-i < 0$. (ii) Si se eleva a una potencia 4 $\implies (-i)^4 > 0 \implies (-i)^2(-i)^2 = (-1)(-1) = 1 > 0$. Afirmando al mismo tiempo que $-1 > 0$ y $1 > 0$ ($\rightarrow\leftarrow$). Es decir, una contradicción en una de las propiedades de un campo ordenado (Si $0 < a < b$ y $0 < c < d$, entonces $ac < bd$). Por lo tanto, el campo de los complejos no es ordenado. $\square$

Referencias

Abbott, S. (2012). *Understanding analysis*. Springer Science & Business Media.

Bartle, R. G. and Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis*, volume 2. Wiley New York.

2. Topología básica en $\mathbb{R}$

Definición 8. *Sea X un conjunto no vacío. Una familia de subconjuntos τ de X es una topología sobre X si:*

1. $\Phi, X, \in \tau$.

2. *Cualquier familia $\{A_i\}$ de elementos de τ es tal que $\cup_i A_i \in \tau$.*

3. *Si $A_1, A_2 \in \tau \implies A_1 \cap A_2 \in \tau$.*

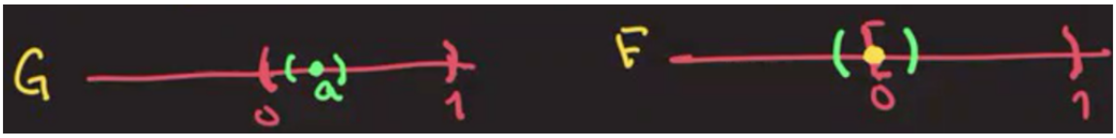
NOTA. *A los elementos de τ se les llama abiertos de X.*

Definición 9. *La familia θ de todos los subconjuntos abiertos de M es la topología de M y el par (M, θ) es el espacio topológico asociado al métrico M.*

NOTA. *En el caso de $\mathbb{R}^n$ se dice que se tiene el espacio topológico Euclidiano $\mathbb{R}^n$.*

Ejemplo 12. 1. *$\mathbb{R}^n$ es abierto. En efecto, $B_1(x) \subset \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n$.*

2. *$G = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ es abierto, pero $F = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ no lo es.*

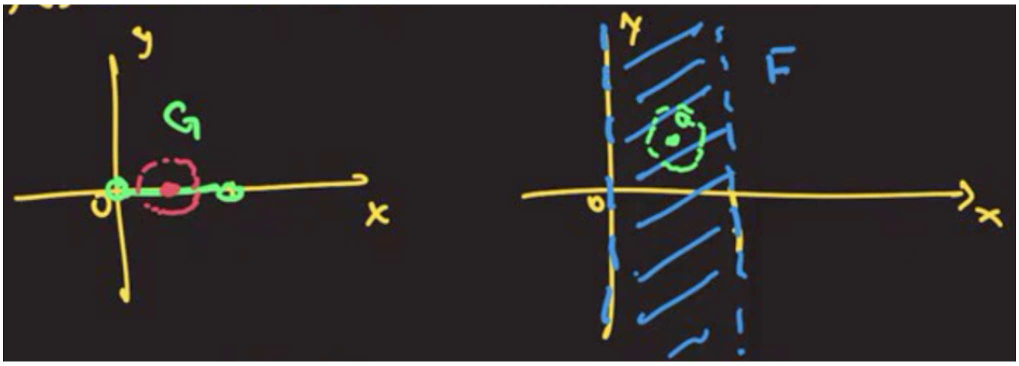


Ejemplo 13. 1. *$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ni x^2 + y^2 < 1\}$ es abierto.*

2. *$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ni x^2 + y^2 \leq 1\}$ no es abierto.*

Ejemplo 14. 1. *$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ni 0 < x < 1, y = 0\}$ no es abierto de $\mathbb{R}^2$.*

2. *$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ni 0 < x < 1\}$ es abierto de $\mathbb{R}^2$.*



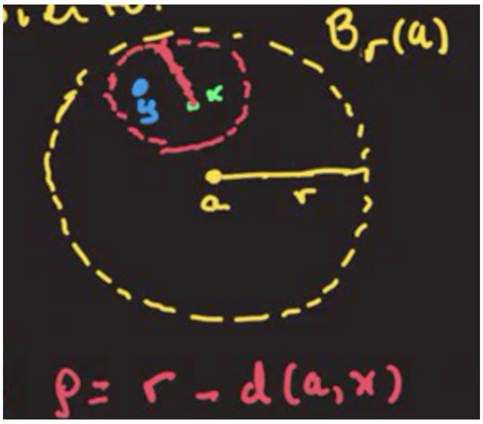
Ejemplo 15. Φ *es abierto.*

Proposición 4. *Una bola abierta es abierto.*

Demostración. Sea $x \in B_r(a)$ y considere la bola centrada en x y de radio $r - d(a,x)$. A probar: $B_{r-d(a,x)}(x) \subset B_r(a)$. Sea $y \in B_{r-d(a,x)}(x)$. Entonces,

$$\begin{aligned} d(a,y) &\leq d(a,x) + d(x,y) \\ &< d(a,x) + [r - d(a,x)] \\ &= r \end{aligned}$$

$\implies y \in B_r(a)$.



■

Teorema 7. *Considere* $(\mathbb{R}^n, d)$*:*

1. Φ *y* $\mathbb{R}^n$ *son abiertos.*

2. *La intersección de dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ es abierto de $\mathbb{R}^n$.*

> *Por inducción, se deduce que la intersección finita de abiertos es abierto.*

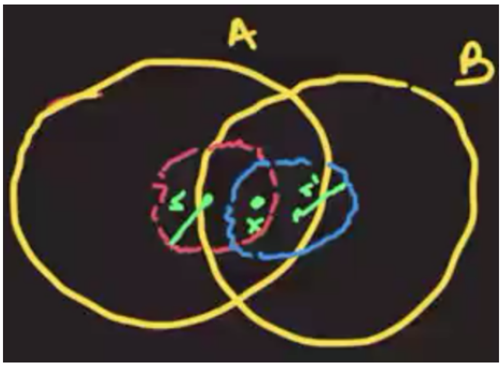
3. *La unión de cualquier colección de abiertos es un abierto de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. 1. OK.

2. Sea A y B abiertos de $\mathbb{R}^n$. A probar: $A \cap B$ es abierto. Sea $x \in A \cap B$, entonces:

   a) $x \in A$, abierto, $\implies$ $\exists r > 0 \ni d(x, z) < r$, para $z \in A$.

   b) $x \in B$, abierto, $\implies$ $\exists r' > 0 \ni d(x, w) < r$, para $w \in B$.

   $\implies$ Hagamos $r = \text{mín}\{r, r'\}$ $\implies$ si $y \in \mathbb{R} \ni d(x, y) < r$ $\implies$ $y \in A$ y $y \in B$ $\implies$ $y \in A \cap B$ $\implies$ $A \cap B$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.

3. Sea $\{G_\alpha\}$ una colección cualquiera de abierto de $\mathbb{R}^n$, y sea $G = \cup_\alpha G_\alpha$. Si $x \in G$ $\implies$ $x \in G_\lambda$, para algún λ. Como G_λ es abierto $\implies$ $\exists r > 0 \ni B_r(x) \subset G_\lambda \subset \cup_\alpha G_\alpha = G$.

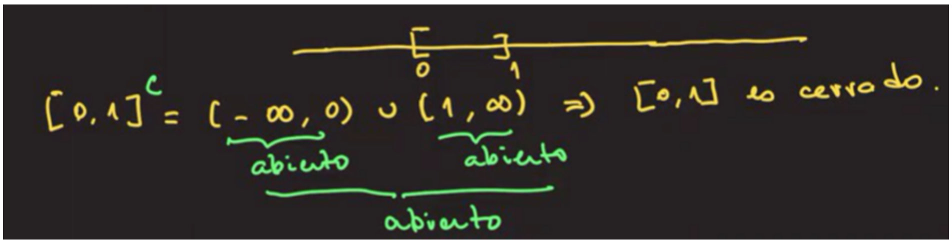
■

NOTA. *La intersección de una colección infinita de abierto no necesariamente es abierto. En efecto considere:*

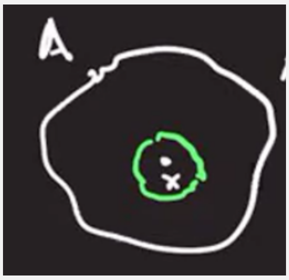
$$
\begin{aligned}
A_n &= \{x \in \mathbb{R} \ni -\frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n}\}, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \\
A_1 &= (-1, 2) \\
A_2 &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \\
&\vdots \\
\Longrightarrow \ A &= \cap_{n=1}^{\infty} A_n \\
&= [0, 1] \quad \text{¿Por qué cerrado?}
\end{aligned}
$$

Los A_n son abiertos (por se bolas abiertas de $\mathbb{R}$)

Definición 10. *Un subconjunto $\mathbb{F}$ en el métrico (M, d) es cerrado si $\mathbb{F}^c$ es abierto.*



1. Abierto: bola abierta contenida en A es cada punto.



2. Topología (colección de todos los abiertos) en el métrico.
3. F es cerrado si F^c es abierto.
4. Abierto y cerrado no son negación uno del otro.
   a) Φ, $\mathbb{R}^n$ son abiertos y cerrados.
   b) $[0, 1)$ no es abierto ni cerrado.

Definición 11. *Sea $x \in M$ (espacio métrico), entonces cualquier conjunto que contiene un abierto $A \ni x \in A$ es una vecindad de x.*

Ejemplo 16. *Sea*

1. $[0, 4)$ *es na vecindad de e.*

2. $(1, 3)$ *es vecindad abierta de e.*

3. $\mathbb{R}$ *es vecindad de e.*

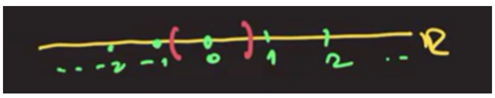
4. $(e - \varepsilon, e + \varepsilon)$ *es vecindad de e, $\forall \varepsilon > 0$.*

Definición 12. *Un punto $x \in M$ es punto interior de un conjunto $A \subseteq M$, si A es una vecindad de M.*

1. *$[0, 1]$, $x = 0$ y $x = 1$; no son puntos interiores. El resto de punto $(0, 1)$ son puntos interiores de $[0, 1]$.*

2. *En $I = (0, 1)$, todos son puntos interiores.*

3. $\mathbb{R} \cap \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

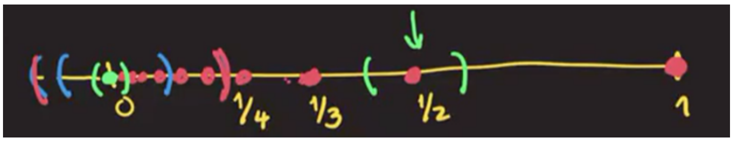


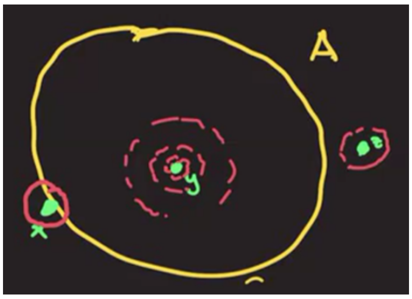
$\implies \mathbb{R} \cap \mathbb{Z}$ *no tiene puntos interiores.*

Definición 13. *Un punto x es un punto de acumulación (o punto límite) de un conjunto $A \subseteq M$, si cada vecindad de x contiene al menos un punto de A diferente de x. Es decir, si*

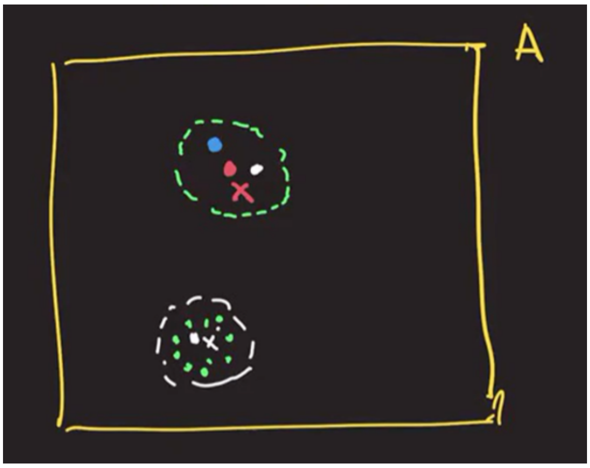
$$(B_r(x) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset, \quad \forall r > 0.$$

Ejemplo 17. *$A = \{1, 1/2, 1/3, \cdots, 1/n, \cdots\} \subseteq \mathbb{R} \implies x = 0$ es un punto de acumulación de A.*





Definición 14. *El conjunto de todos los puntos interiores de A se llama interior de A (Notación: A° o $int(A)$).*



Es decir:

$$int(A) = \bigcup_{U \subset A,\ U \text{ es abierto.}} U$$

i.e $int(A)$ en el abierto más grande contenido.

Ejemplo 18.

1. $int[0, 1] = (0, 1)$.

2. $int\mathbb{R} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.

3. $int\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

4. *A es abierto $\iff A = int(A)$.*

Ejemplo 19. *La cerradura de A es el conjunto:*

$$\overline{A} := \bigcap_{A\subset F,\ F\ cerrado} F$$

NOTA. 1. *$\overline{A}$ es cerrado.*

2. *$\overline{A}$ es el cerrado más pequeño que contiene a A.*

3. *A es cerrado $\iff A = \overline{A}$.*

4. *Si F es un cerrado que contiene a $A \implies A \subset \overline{A} \subset F$.*

Definición 15. *La frontera de A (denotada $bd(A)$ o ∂A), se define*

$$\partial A := \overline{A} - int(A).$$

Ejemplo 20. *Sea $I = [0,1] \implies \overline{I} = [0,1] \implies int(I) = (0,1) \implies \partial A = \overline{I} - int(A) = \{0,1\}$.*

Definición 16. *El conjunto de todos los puntos de acumulación de un conjunto A se llama conjunto derivada de A. Notación: A'.*

Proposición 5. *Si $A \subset B \implies A' \subset B'$.*

Demostración. Sea $x \in A'$ (i.e x es un punto de acumulación de A) $\implies \forall$ abierto $G \ni x \in G$, se tiene que

$$(G - \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Como $A \subset B \implies (G - \{x\}) \cap A \subset (G - \{x\}) \cap B \implies \emptyset \neq (G - \{x\}) \cap A \subset A \subset (G - \{x\}) \cap B \implies (G - \{x\}) \cap B \neq \emptyset, \forall G \ni x \in G \implies x \in B'$. ■

Proposición 6. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

Demostración. Tenemos:

($\supseteq$) Sabemos que

a) $A \subset A \cup B \implies A' \subset (A \cup B)'$.

b) $B \subset A \cup B \implies B' \subset (A \cup B)'$.

$\implies A' \cup B' \subset (A \cup B)'$.

($\subseteq$) A probar: $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$.

> *a*) $\iff$ Si $x \in (A \cup B)' \implies x \in A' \cup B'$.
>
> *b*) $\iff$ Si $x \notin A' \cup B' \implies x \notin (A \cup B)'$.

Sea $x \notin A' \cup B' \implies x \notin A'$ y $x \notin B'$. $\implies$ Como $x \notin A' \implies \exists G, \underbrace{abierto}_{x \in G}$, tal que $G \cap A \subset \{x\}$[1].

Como $x \notin B' \implies \exists H, \underbrace{abierto}_{x \in H}$, tal que $H \cap A \subset \{x\}$. Nótese que $G \cap H$ es abierto. Entonces, $x \in G \cap H$, y

$$(G \cap H) \cap (A \cup B) = (G \cap H \cap B) \subset \{x\} \cup \{x\} = \{x\}$$

$\implies x \notin (A \cup B)' \implies$ Si $x \notin A' \cup B' \implies x \in (A \cup B') \implies (A \cup B)' \subset A' \cup B' \implies (A \cup B)' = A' \cup B'$.

■

Proposición 7. *A es cerrado $\iff A' \subset A$.*

> *Un conjunto es cerrado $\iff$ contiene a sus puntos de acumulación.*

Demostración. Se tiene:

[1] $G \cap A = \emptyset$ o $\cancel{G \cap A = \{x\}}$

$(\implies)$ [2] Sea A cerrado y sea $p \notin A \implies p \in A^c$, pero A^c es un abierto $\ni p \in A^c$ y $A \cap A^c = \emptyset \implies p \notin A' \implies A' \subset A$.

$(\impliedby)$ A probar: $A' \subset A \implies A$ es $\underbrace{\textit{cerrado}}_{A^c \text{ es abierto}}$. Suponga que $A' \subset A$ y sea $p \in A^c$. $\implies p \notin A' \implies \exists G$, abierto, tal que: $p \in G$ y

$$(G - \{p\}) \cap A = \emptyset.$$

Como $p \notin A \implies G \cap A = \emptyset \implies G \subset A^c$. Entonces, si $p \in A^c \exists$ abierto $G \ni p \in G \subset A^c \implies A^c$ es abierto. $\implies A$ es cerrado.

■

Proposición 8. *Si F es un superconjunto cerrdo de cualquier conjunto A, entonces $A' \subset F$.*

Demostración. Sabemos que F es cerrado y $A \subset F$. Como $A \subset F \implies A' \subset F \implies A' \subset F'$. Como F es cerrado, entonces $F' \subset F \implies A' \subset F$. ■

Proposición 9. *$A \cup A'$ es cerrado.*

Proposición 10. $\overline{A} = A \cup A'$.

Demostración. $(\supseteq)$ Sabemos que $A \subset \overline{A}$. Por otra parte, $\implies A' \subset (\underbrace{\overline{A}}_{cerrado})' \subset \overline{A} \implies A' \subset \overline{A} \implies A \cup A' \subset \overline{A}$.

$(\subseteq)$ A probar: $\overline{A} \subset A \cup A'$. Entonces, $A \subset \underbrace{A \cup A'}_{cerrado} \implies A \subset \overline{A} \subset A \cup A'$.

$$\boxed{\overline{A} = \bigcap u \qquad u \text{ cerrado} \ni u \supset A}$$

■

[2] A probar:
$a)$ $A' \subset A \iff$ si $x \in A' \implies x \in A$
$b)$ $A' \subset A \iff$ si $x \notin A \implies x \notin A'$.

Proposición 11. *Si* $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.

Demostración. Si $A \subset B \implies A' \subset B' \implies A \cup A' \subset B \cup B' \implies \overline{A} \subset \overline{B}$. ■

Proposición 12. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Demostración. Tenemos:

($\subseteq$) A probar: $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Sabemos:

$$\begin{cases} A \subset \overline{A} \\ B \subset \overline{B} \end{cases} \implies A \cup B \subset \underbrace{\overline{A} \cup \overline{B}}_{cerrado}.$$

$$\implies A \cup B \subset \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}.$$

($\supseteq$)

$$\begin{cases} A \subset A \cup B & \implies \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \\ B \subset A \cup B & \implies \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \end{cases} \implies \overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

$$\implies \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

■

2.1. Axiomas de Kuratowski

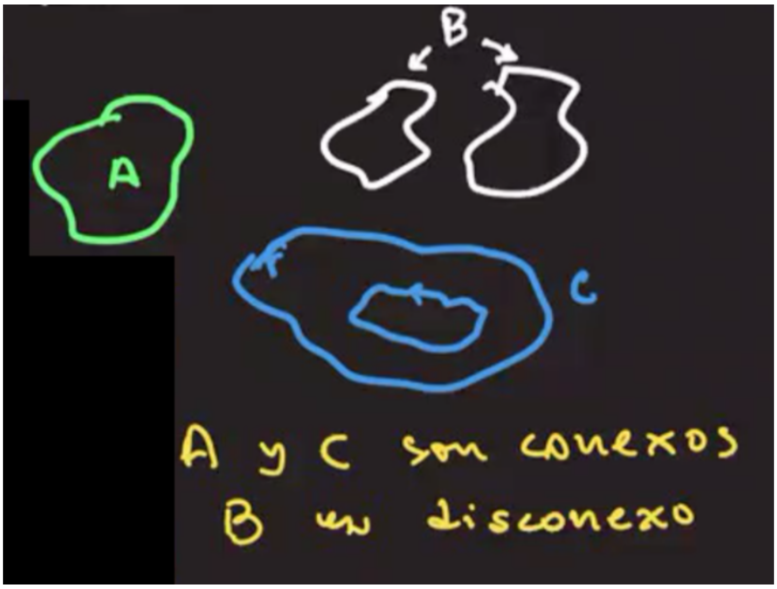
Se propone construir una topología de cerrados a partir de $K_1 - K_4$.

K_1 ; $\overline{\emptyset} = \emptyset$

K_2 ; $A \subset \overline{A}$.

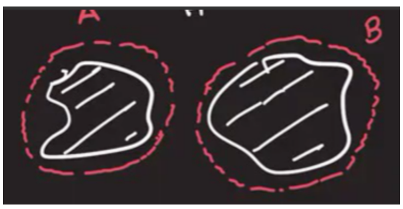
K_3 ; $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

K_4 ; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

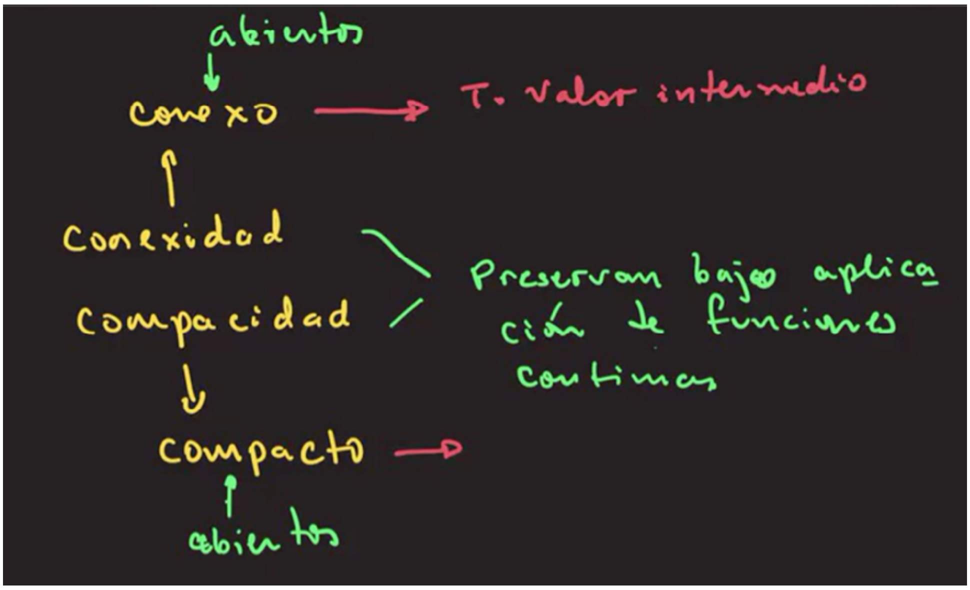


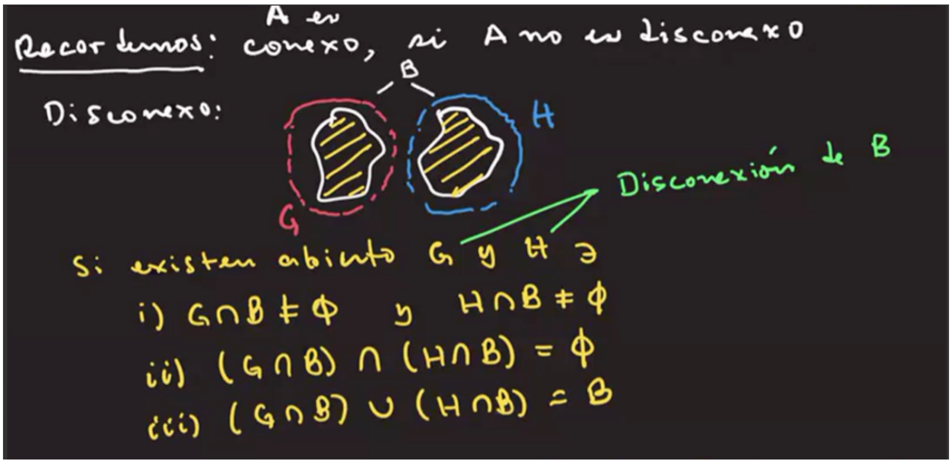
2.2. Conjuntos conexos

Definición 17. *Un subconjunto H del espacio métrico M es disconexo, si existen abiertos A y B $\ni$ $A \cap H \neq \emptyset, B \cap H \neq \emptyset, (A \cap H) \cap (B \cap H) = \emptyset$ y $(A \cap H) \cup (B \cap H) = H$.*



2.2.1. Resumen





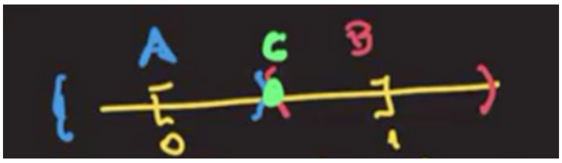
Ejemplo 21. *$\mathbb{Z}$ es disconexo en $\mathbb{R}$. En efecto, considere: $G = (-\infty, 1/2)$ y $H = (1/2, \infty)$. $\implies$ G y H son una disconexión de $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.*

Ejemplo 22. *$\mathbb{Q}$ es disconexo en $\mathbb{R}$. En efecto, sea la disconexión: $G = (-\infty, \pi)$ y $H = (\pi, \infty)$.*

Teorema 8. *$I = [0, 1]$ es conexo en $\mathbb{R}$.*

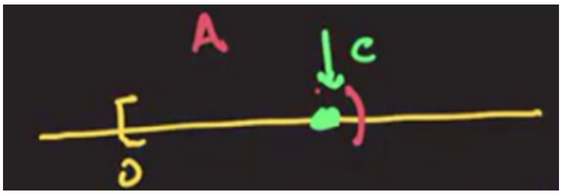
Demostración. Supóngase por el absurdo que A y B son una disconexión de I; i.e, $A \cap I$ y $B \cap I$ son no vacíos, disjuntos y su unión es I.

1. Suponga que $1 \in B$.



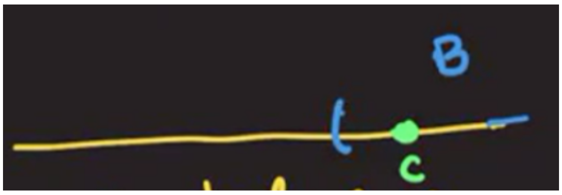
Como I es acotado. $\implies A \cap I$ y $B \cap I$ también son acotados. Entonces, por el principio del supremo, $\exists c = \sup(A \cap I) > 0$ y $c \in A \cup B$.

2. Si $c \in A$. $\implies c < 1$.



$\implies$ Como A es abierto $\implies \exists B_r(c) \subset A \implies \exists \alpha \in A \ni c < \alpha$. $(\rightarrow\leftarrow) \implies c \notin A$.

3. Si $c \in B$.



$\implies$ Como B es abierto $\implies \exists c_1 \in B \ni c_1 < c$ y es tal que $[c_1, c] \cap (A \cap I) = \emptyset$ (i.e c_1 es una cota superior de $A \cap I$ y es menor que c)$(\rightarrow\leftarrow)$. Entonces, que $c \in B$ $(\rightarrow\leftarrow)$. $\implies [0, 1]$ es conexo.

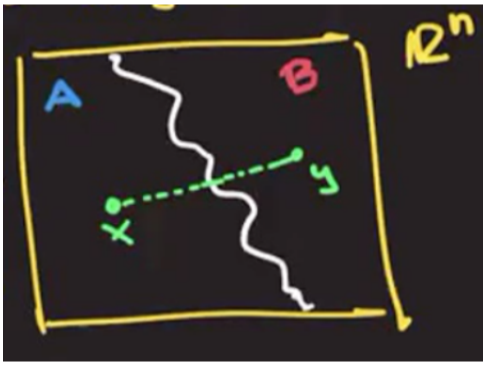
∎

Corolario 8.1. $(0, 1)$ *es conexo*[3].

Teorema 9. $\mathbb{R}^n$ *es conexo.*

Demostración. Supóngase, por el absurdo, que A y B son una disconexión de $\mathbb{R}^n$.

[3] Si x es un intervalo. $\implies x$ es conexo.



Sean $x \in A$ y $y \in B$, y considere el segmento de recta que une x con y:

$$S = \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\}$$

Sean:

$$A_1 = \{t \in \underbrace{\mathbb{R}}_{[0,1]} \ni (1-t)x + ty \in A\}$$
$$B_1 = \{t \in \underbrace{\mathbb{R}}_{[0,1]} \ni (1-t)x + ty \in B\}$$

$\implies A_1 \cap B_1 = \emptyset (\rightarrow\leftarrow)$, ya que A_1, B_1 serían una disconexión de $[0,1]$. Entonces, $\mathbb{R}^n$ es conexo. ■

Teorema 10. *Los únicos conjuntos abiertos y cerrados de $\mathbb{R}^n$ son $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Supóngase, por el absurdo, que $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$ y $A \neq \mathbb{R}^n$, es abierto y cerrado de $\mathbb{R}^n$. Como A es cerrado $\implies A^c = B$ es abierto. $\implies A \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = \mathbb{R}^n$. $\implies A$ y B forman una disconexión de $\mathbf{R}^n$ $(\rightarrow\leftarrow)$. $\implies$ Los únicos abiertos y cerrados de $\mathbf{R}^n$ son $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$. ■

Teorema 11. *Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es conexo $\iff$ es un intervalo.*

Demostración. Tenemos

($\Longleftarrow$) A probar: cada intervalo de $\mathbb{R}$ es un conexo. (Ver prueba de: $[0,1]$ es conexo).

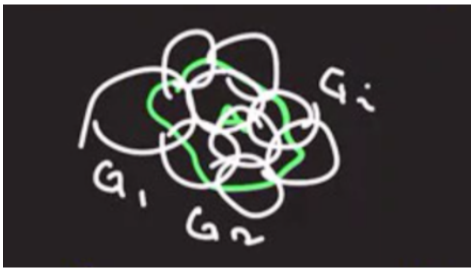
($\Longrightarrow$) Sea $C \subseteq \mathbb{R}$ conexo. A probar: C es un intervalo. Sean $a, b \in C \ni a < b$ y sea $x \in \mathbb{R} \ni a < x < b$. A probar: $x \in C$. Si $x \notin C \implies (-\infty, x)$ y (x, ∞) forman una disconexión de c. $(\rightarrow\leftarrow)$. $\implies x \in C \implies C$ es intervalo.

■

2.3. Compactos

Sea A un subconjunto del espacio métrico M. Decimos que la familia de abierto $\{G_i\}_{i\in I}$ de M es una cubierta abierta de A, si

$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$$

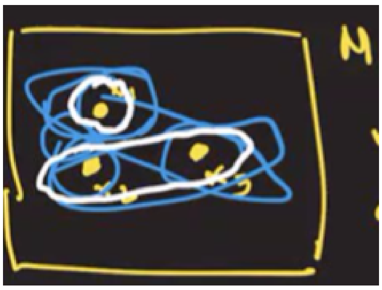


NOTA. *En el caso de M, la cubierta abierta debe cumplir:*

$$M = \bigcup_{i\in I} G_i$$

Definición 18. *Un subconjunto A del espacio métrico M es compacto si cada abierta de A tiene subcubierta finita*[4].

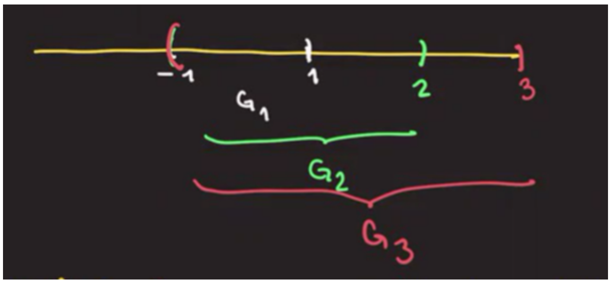
Ejemplo 23. *Sea $k = \{x_1, \cdots, x_n\}$ un subconjunto finito de $\mathbb{R}^n$ y sea $G = \{G_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de k (i.e $\bigcup_{i\in I} G_i \supseteq k$). Dado que k es finito, basta un número finito de los G_i para cubrir a k. $\implies$ es compacto.*



Ejemplo 24. *Sea $H = [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ no es compacto. En efecto, sea $G_n = (-1, n), n \in \mathbb{Z}^+$.*

---

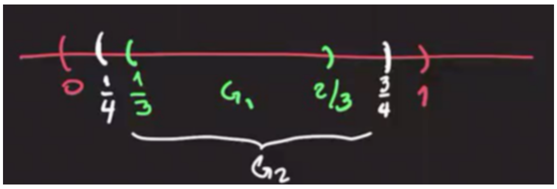
[4] Sigue cubriendo al conjunto A



$\implies$ *$G = \{G_n\}$ es una cubierta abierta de H. Suponga que $\{G_{n_1}, G_{n_2}, \cdots, G_{n_k}\}$ es una subcolección de G. Sea $M = \max\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$. $\implies$ $G_{n_i} \subseteq G_M$, $i = 1, \cdots, k$ $\implies$ $G_M = \bigcup_{i=1}^{k} G_{n_i}$, pero, en particupar, $M \notin \bigcup_{i=1}^{k} G_{n_i}$ $\implies$ $\{G_{n_1}, \cdots, G_{n_k}\}$ no cubre a H. Entonces, G no tiene subcubierta finita para H. $\implies$ H no es compacto.*

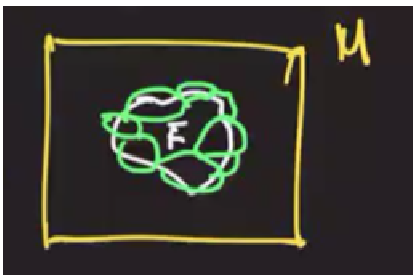
Ejemplo 25. *Sea $H = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ y considere:*

$$G_n = \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right), \quad n > 2.$$



$\implies$ *$G = \{G_n\}$ es una cubierta abierta de H, pero G no tiene subcubierta finita para H. $\implies$ H no es compacto.*

Proposición 13. *Sea F un cubconjunto cerrado de un espacio métrico M. Entonces, F es compacto.*



Demostración. Sea $G = \{G_i\}$ una cubiera abierta de F. Como F^c es abierto $\implies$ $\left(\bigcup_{i\in I} G_i\right) \cup F^c$ es cubierta abierta de M, i.e. $\left(\bigcup_{i\in I} G_i\right) \cup F^c = M$. $\cdots$ es compacto, existe una subcubierta finita M, $\{G_{i_1}, G_{i_2}, \cdots, G_{i_n}, F^c\}$, tal que:

$$G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \cdots \cup G_{i_n} \cup F^c = M$$

$\implies$ $\{G_{i_1}, \cdots, G_{i_n}\}$ es una subcubierta finita para F. $\implies$ es compacto. ■

Teorema 12 (Heine-Borel)**.** *Un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ es compacto $\iff$ es cerrado y acotado.*

Ejemplo 26. *Ejemplos.*

1. $(0,1)$ *no es compacto, ya que no es cerrado.*

2. $[0,1]$ *es compacto, por Heine-Borel.*

1. Si $S \subseteq \mathbb{R}$, compacto, $\implies$ S es cerrado y acotado.
2. Si $S \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado y acotado. $\implies$ S es secuencialmente compacto $\implies$ S es compacto.
3. Producto de una colección de conjuntos compacto. **(Teorema de Tíkonov -Tychonoff-)**

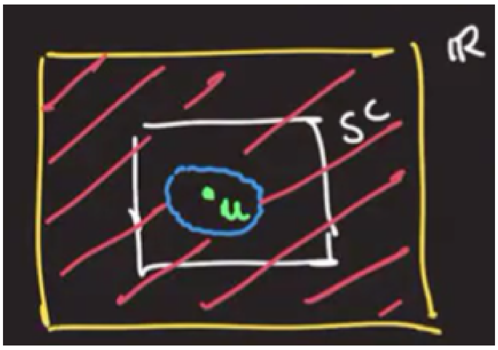
NOTA. *Un espacio métrico M es de Lindelof si cada cubierta abierta de M tiene una subcubierta contable.*

Teorema 13. *Si $S \subseteq \mathbb{R}$ es compacto, entonces S es cerrado y acotado.*

Demostración. A probar: S es acotado. Considere, para $m \in \mathbf{Z}^+$, $H_m = (-m, m)$. Como cada H_m es abierto y $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} H_m = \mathbb{R} \implies \{H_m : m \in \mathbb{Z}^+\}$ es cubierta abierta de S. Como S es compacto $\implies$ Hay una subcubierta finita $\{H_{m_1}, \cdots, H_{m_n}\}$ para S, i.e. $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_{m_n} = H_m = (-M, M) \implies M$ es acotado.

A probar: S es cerrado. $\iff$ S^c es abierto. Sea $u \in S^c$ y considere:

$$G_n = \{y \in \mathbb{R} : |y - u| > 1/n \quad n \in \mathbb{R}$$



Note que los G_n son abiertos y $\bigcup_{n=1}^{\infty} = \mathbb{R} - \{u\}$. Como $u \notin S \implies S \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \implies \{G_n\}$ es una cubierta abierta de S. Como S es compacto. $\implies$ $\exists m \in \mathbb{Z}^+ \ni S \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} G_n = G_m = \left[u - \frac{1}{m}, u + \frac{1}{m}\right]^c \implies S \cap \left(u - \frac{1}{m}, u + \frac{1}{m}\right) = \emptyset \implies \left(u - \frac{1}{m}, u + \frac{1}{m} \subset S^c\right) \implies S^c$ es abierto. $\implies S$ es cerrado. ■

Verificar. ¿Por qué Heine-Borel no aplica en un espacio métrico cualquiera? ¿Se cumple alguna de las implicaciones?

Teorema 14 (Heine-Borel)**.** *El jefe mayor*

1. *Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es compacto $\implies$ A es cerrado y acotado.*

2. *Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado y acotado $\implies$ A es compacto.*

3. *Teorema de Tikonov. Producto cualquiera de compactos es compacto.*

2.4. Hoja de repaso y parcial

Reales y topología.

Universidad del Valle de Guatemala
Análisis de Variable Real 1 **4 de febrero de 2021**

Ejercicios Complementarios de Preparación para el Parcial 1

1. Revisión de pruebas de teoremas seleccionados:
   a) **Teorema de intervalos encajados**: Si (I_n) es cualquier sucesión de intervalos cerrados en $\mathbb{R}$, no vacíos y encajados, entonces existe un punto x que pertenece a cada intervalo.
   Nota: Estudiar el caso que los intervalos no son cerrados.
   b) **Teorema de Bolzano-Weierstrass**: Cada subconjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}^n$ tiene un punto de acumulación.

2. Sea X un espacio métrico. Demuestre que cualesquiera dos puntos de X pueden separarse mediante conjuntos abiertos disjuntos de X (Es decir, X es un Espacio de Hausdorff).

3. Sean X un conjunto no vacío y la función $d: X \times X \to \mathbb{R}$, que satisface las condiciones siguientes:
   a. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
   b. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$
   Pruebe que d es una métrica sobre X.

4. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $d_1: X \times X \to \mathbb{R}$, definida por:
$$d_1(x,y) = ln\big(1 + d(x,y)\big), \quad \forall x,y \in X.$$
   Demuestre que $d_1$es una nueva métrica sobre X.

5. Sean A y B subconjuntos de un espacio métrico X, y pruebe las propiedades siguientes:
   a) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ (¿Se cumple la otra contención?)
   b) $int(A) \cup int(B) \subseteq int(A \cup B)$
   c) $int(A) \cap int(B) = int(A \cap B)$
   d) Presente un ejemplo de dos subconjuntos A y B de la recta real, tales que
$$int(A) \cup int(B) \neq int(A \cup B)$$
   e) $(\bar{A})^c = int(A^c)$
   f) $\bar{A} = \{x: d(x,A) = 0\}$

6. Describa el interior del conjunto de Cantor.

7. Sea X un espacio métrico y A un subconjunto de X. Se dice que A es *denso* (o *siempre denso*) si $\bar{A} = X$. Demuestre que los enunciados siguientes son equivalentes.
   a) A es denso.
   b) El único superconjunto cerrado de A es X.
   c) El único conjunto abierto disjunto de A es $\emptyset$.
   d) A intersecta a cada conjunto abierto no-vacío.
   e) A intersecta cada bola abierta.

Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada
Fecha de entrega: 13 de febrero de 2021
Rudik R. Rompich - Carné: 19857

Análisis de Variable Real 1 - Dorval Carías

Parcial 1

1. (10p) Se dice que $E \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si cuando $x, y \in E \Rightarrow (1-\lambda)x + \lambda y \in E$, para cada $0 \leq \lambda \leq 1$. Pruebe que las bolas en $\mathbb{R}^n$ son conjuntos convexos.

Demostración. Por definición de una bola abierta/cerrada en $\mathbb{R}^n$ se tiene que su centro x y su radio r tal que se cumpla:

$$|y - r| < r$$

Entonces, tenemos que $x, y \in E$, asumamos que $y = (z - x)$ y $x = (y - x)$, entonces hacemos la substitución:

$$|(1-\lambda)x + \lambda y| = |(1-\lambda)(y-x) + \lambda(z-x)| \tag{1}$$

Por la desigualdad triangular:

$$\begin{align} &\leq (1-\lambda)|(y-x)| + \lambda|(z-x)| \tag{2} \\ &= (1-\lambda)r + \lambda r \tag{3} \\ &= r \tag{4} \end{align}$$

$\therefore$ las bolas en $\mathbb{R}^n$ son conjuntos convexos. $\square$

2. (15 p) Sean $x, y, a, b \in \mathbb{R}^+ y$ suponga que $\frac{x}{y} < \frac{a}{b}$. Demuestre que $\frac{x}{y} < \frac{x+a}{y+b} < \frac{a}{b}$.

Demostración.

Caso I

$$= \frac{x}{y} < \frac{x+a}{y+b} \implies x(y+b) < (x+a)y \Rightarrow \tag{1}$$

$$\Rightarrow xy + xb < xy + ay \Rightarrow xb < ay \Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{a}{b} \tag{2}$$

Caso 2

$$\frac{x+a}{x+b} < \frac{a}{b} \Rightarrow (x+a)b < a(x+b) \tag{3}$$
$$\Rightarrow xb + ab < ay + ab => \quad xb < ay \implies \tag{4}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{a}{b} \tag{5}$$
$$\therefore \frac{x}{y} < \frac{x+a}{x+b} < \frac{a}{b} \tag{6}$$

□

3. (15 p) Sea E un subconjunto no vacío del conjunto de números reales que está acotado superiormente. Si $y = \sup(E)$, pruebe que $y \in \bar{E}$

Demostración. Si $y = sup(E)$, a probar: $y \in \overline{E}$ ($\overline{E} = E$ cerrado). Consideremos por el absurdo $y \notin \overline{E}$. Sabemos que $\forall \xi > 0 \exists x \in E \ni y - \xi < x < y$, eso implicaría que $y - \xi$ es una cota superior ($\rightarrow\leftarrow$). Entonces, y es un punto de acumulación de E. $\therefore y \in \overline{E}$ □

4. (20 p) Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, acotados y no vacíos. Demuestre que:

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$$

Demostración. Supóngase las siguientes variables: $p = \sup A, q = \sup B, r = \sup(A+B)$. Ahora, asumamos que existe un $a \in A$ y un $b \in B$. Entonces, sabemos por la definición de supremo que $a \leq p$ y que $b \leq q$, entonces aplicando una sumatoria a ambas variables: $a + b \leq p + q$, tal que $r \leq p + q$ se cumple.

Por otra parte, sabemos que $b \in B$ lo que quiere decir que $a \leq r - b \quad \forall a \in A$; que afirma que $r - b$ es una cota superior para A tal que $p \leq r - b$. Entonces, $y \leq r - p$ $\forall b \in B$, entonces $q \leq r - p$ y por lo tanto $p + q \leq q$. Al combinar estas dos desigualdades, finalmente tenemos que $w = p + q$, es decir:

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

□

5. (20p) Sean A y B subconjuntos de un espacio métrico X.

1. 5.1. Pruebe que $(\text{int}(A))^c = \overline{(A^c)}$

   Demostración.

   Se procede por medio de la doble contención:

   De ida $\subseteq$

   $$x \in (int(A))^c \implies x \notin int(A) \implies x \in \overline{(A^c)} \implies (\text{int}(A))^c \subseteq \overline{(A^c)} \tag{1}$$

   De regreso $\supseteq$

   $$x \in \overline{(A^c)} \implies x \notin int(A) \implies x \in (int(A))^c \tag{2}$$

□

2. 5.2. ¿Es cierto que $\text{int}(A \cap B) = \bar{A} \cap \bar{B}$?

   Demostración. Supóngase un contraejemplo en donde $A = [0,5]$ y $B = [4,5]$, tal que:

$$A = [0,5] \qquad B = [4,5] \tag{1}$$
$$\overline{A} = [0,5] \qquad \overline{B} = [4,5] \tag{2}$$

   Es decir:

$$A \cap B = [4,5] \qquad \overline{A} \cap \overline{B} = [4,5] \tag{3}$$
$$\text{int}(A \cap B) = (4,5) \tag{4}$$

   Esto implica que:

$$\text{int}(A \cap B) \neq \overline{A} \cap \overline{B} \tag{5}$$

   Lo que implica que no es cierta la igualdad. □

6. (20p) Sea (X,d) un espacio métrico. Se define $D(x,y) = \text{mín}(1, d(x,y))$.

1. 6.1. Pruebe que D es una métrica sobre X.

   Demostración. Por definición de espacio métrico tenemos, asumiendo $d(x,y) = D(x,y)$:

   a) $d(x,y) \geq 0$ o $d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$. Entonces, tenemos 2 casos para $min(1, d(x,y))$:
      1) (i) donde $min(1, d(x,y)) \geq 0$, se cumple.
      2) (ii) $min(1, d(x,y)) = 0$, se cumple.

      Por lo que se cumple la propiedad.

   b) $d(x,y) = d(y,x)$. Por lo que se tiene que $min(1, d(x,y)) = min(1, d(y,x))$, cumpliendo la propiedad.

   c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

      Entonces, tenemos:

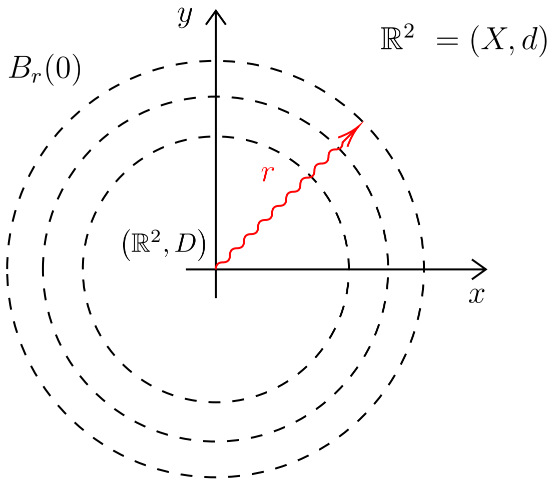
$$\begin{aligned} min(1, d(x,y)) &\leq min(1, d(x,z)) + min(1, d(z,y)) && (1)\\ &= min(2, 1 + d(x,z), 1 + d(z,y), d(x,z) + d(z,y)) && (2)\\ &= min(1, d(x,y)) && (3) \end{aligned}$$

      Cumpliendo la propiedad.

   $\therefore$ D es una métrica sobre X. □

2. Si (X,d) es $\mathbb{R}^2$ con su métrica usual, describa las bolas abiertas $B_r(0)$ en $(\mathbb{R}^2, D)$.

   Demostración. Considerando $\mathbb{R}^2 = (X,d)$ con su métrica usual y por otra parte las bolas abiertas $B_r(0)$ en $(\mathbb{R}^2, D)$:



$\square$

Las bolas se podrían describir como $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : D(X, 0) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : min(1, d(x, 0) < r\}$.