Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada
8 de marzo de 2021
Rudik Roberto Rompich - Carné: 19857

Análisis de Variable Real 1 - Dorval Carías

HT 2

1. Ejercicios

Definiciones y Teoremas: (Se considerarán las definiciones y teoremas del libro de Bartle and Sherbert.

Definición 1. Se dice que una secuencia $X = (x_n)$ en $\mathbf{R}$ converge a un $x \in \mathbf{R}$, si para cada $\epsilon < 0$ existe un número natural $K(\epsilon)$ tales que para todos $n \geq K(\epsilon)$, los términos de x_n satisfacen $|x_n - x| < \epsilon$

Definición 2. Una $X = (x_n)$ de números reales se dice que es una secuecia de Cauchy si para cada $\epsilon > 0$ existe un número natural $H(\epsilon)$ tal que para todos los números naturales $n, m \geq H(\epsilon)$, los términos x_n, x_m satisfacen $|x_n - x_m| < \epsilon$

Definición 3. Una secuencia $X = (x_n)$ de números reales se dice que es acotada si existe un núm ero real $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Definición 4. Sea una secuencia $X = (x_n)$ de números reales. Se dice que es creciente si satisface $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq x_{n+1} \leq ...$

Teorema 1. **Teorema de la convergencia monótona**. Una secuencia monótona de números reales es convergente si y solo si es acotada. Es decir (en el caso de cota superior): Si $X = (x_n)$ es una secuencia acotada creciente, entonces: $\lim(x_n) = sup\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$

Teorema 2. Sea $X = (x_n : n \in \mathbf{N})$ una secuencia de números y sea $m \in \mathbf{N}$. Entonces la $m-$cola $X_m = (X_{m+n} : n \in \mathbf{N}$ de X converge si y solo si X converge. En este caso, $\lim X_m = \lim X$.

1.1. Problema 1

Demuestre que una secuencia monótona creciente y acotada es de Cauchy.

Demostración.

Por hipótesis, sabemos que existe una secuencia (x_n) que es acotada y monótona creciente. Asumamos que $u = \lim(x_n) = \sup\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ (por Teorema 1), $\epsilon > 0$ y $H(\epsilon) \in \mathbf{N}$. Definamos $H(\epsilon) = H$; entonces, por definición de supremo, se debe cumplir:

$$u - \epsilon < x_H \leq u \tag{1}$$

Por otra parte, supongamos $n \geq m \geq H$. Además, por hipótesis también sabemos que es una secuencia creciente, entonces tomamos la definición 4, en donde:

$$x_H \leq x_m \leq x_n \tag{2}$$

Es decir, si combinamos (1) y (2), tenemos:

$$u - \epsilon < x_H \leq x_m \leq x_n \leq u \tag{3}$$

Ahora bien, para determinar que es una secuencia de Cauchy, debemos comprobar que $|x_n - x_m| < \epsilon$ (según la definición 2). Notamos que se pueden sacar dos desigualdades de la expresión:

$$u - \epsilon < x_m \leq u \tag{4}$$
$$u - \epsilon < x_n \leq u \tag{5}$$

Notamos que la desigualdad (4) la podemos expresar como: $-1(u - \epsilon < x_m \leq u) \implies -u + \epsilon > -x_m \geq -u$. Entonces si sumamos los dos términos tenemos que:

$$-u \leq -x_m < -u + \epsilon \tag{6}$$
$$u - \epsilon < x_n \leq u \tag{7}$$
$$\implies (-u) + (u - \epsilon) < (x_n) + (-x_m) < (-u + \epsilon) + u \tag{8}$$
$$\implies -\epsilon < (x_n) + (-x_m) < \epsilon \tag{9}$$
$$\implies |(x_n) + (-x_m)| < \epsilon \tag{10}$$

Por lo tanto, (x_n) es una secuencia de Cauchy. □

1.2. Problema 2

Si $x_n = \sqrt{n}$, demuestre que (x_n) satisface que $|x_{n+1} - x_n| = 0$, pero no es una sucesión de Cauchy.

Demostración.

Consideremos $x_{n+1} = \sqrt{n+1}$, entonces la expresión:

$$|x_{n+1} - x_n| = |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| \tag{1}$$

Considerando que es necesario encontrar $\lim(|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|) = 0$. Se propone otra notación para tratar el problema. Primero, sabemos que $\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = 1$,por lo que se tiene:

$$= \left|\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)\right| \tag{2}$$

$$= \left|\frac{(n+1) + \sqrt{n}\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\sqrt{n+1} - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right| \tag{3}$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right| \tag{4}$$

Es decir, que tenemos $\lim\left(|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}|\right) = \lim\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right|\right) = 0$, para comprobarlo, usamos la definición 1, dado $\epsilon > 0$ entonces $\exists N = \left(\frac{1}{2\epsilon}\right)^2$ tal que $n \geq \left(\frac{1}{2\epsilon}\right)^2$ y que satisface $|x_n - x| < \epsilon$:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right| \leq \left|\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}}\right| = \left|\frac{1}{2\sqrt{n}}\right| < \epsilon \tag{5}$$

Despejando para n y tomando en cuenta el caso positivo:

$$n = \left(\frac{1}{2\epsilon}\right)^2 \tag{6}$$

Por lo tanto, sabemos que el límite de la secuencia es cero. Por otra parte, para comprobar que no es una secuencia de Cauchy, se propone un contraejemplo: $\frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} < \epsilon, n = n, m = 4n$, entonces se tiene:

$$|x_m - x_n| = |(\sqrt{4n}) - (\sqrt{n})| = |2(\sqrt{n}) - (\sqrt{n})| = |\sqrt{n}| \tag{7}$$

Entonces, sabemos que $\sqrt{n}$ siempre tiene que ser ≥ 1. Por lo tanto, no cumple con la definición 2, que afirma que se debe satisfacer $|x_n - x_m| < \epsilon$. Entonces, no es una sucesión de Cauchy. □

1.3. Problema 3

Si $x_1 < x_2$ son números reales arbitrarios y $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1})$ para $n > 2$, pruebe que (x_n) converge. Encuentre el límite.

La siguiente demostración, tomará como referencia el ejercicio resuelto en clase en donde $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

Demostración. Es necesario demostrar que (x_n) converge, es decir, tenemos dos posibilidades:

1. Si la serie es monótona se podría usar el Teorema de Convergencia Monótona. Propongamos $n = 1$, entonces se tiene $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) < x_2$. Entonces, (x_n) no es monótona y por lo tanto no se puede utilizar para demostrar convergencia.

2. Si (x_n) es una secuencia de Cauchy, entonces debe converger.

Procedemos a probar que (x_n) es de Cauchy (basándonos en la definición 2). Primero, ya que los términos son generados por un promedio, es necesario encontrar una relación entre $|x_n - x_{n+1}|$:

$$|x_n - x_{n+1}| = \left| x_n - \left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2} \right) \right| = \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}| \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2^2}|x_{n-1} - x_{n-2}| = \frac{1}{2^3}|x_{n-2} - x_{n-3}| = ... = \frac{1}{2^{n-1}}|x_2 - x_1| \tag{2}$$

En general, supongamos que $m > n$, entonces:

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + ... + (x_{m-1} - x_m)| \tag{3}$$

$$\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{x+2}| + ... + |x_{m-1} - x_m| \tag{4}$$

$$= \left[\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{m+1}} + ... + \frac{1}{2^{m-2}} \right] |x_2 - x_1| \tag{5}$$

$$= \left[\frac{1}{2^{n-1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-m-1}} \right) \right] |x_2 - x_1| \tag{6}$$

$$= \left[\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] |x_2 - x_1| \tag{7}$$

$$= \left[\frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \right) \right] |x_2 - x_1| \tag{8}$$

$$= \left[\frac{2}{2^{n-1}} \right] |x_2 - x_1| \tag{9}$$

$$= \left[\frac{1}{2^{n-2}} \right] |x_2 - x_1| \tag{10}$$

Es decir, que $|x_n - x_m| \leq [2^{2-n}]|x_2 - x_1|$. Entonces, dado $\epsilon > 0 \exists H = \log_2 \left(\frac{4|x_2 - x_1|}{\epsilon} \right) \in \mathbf{Z}^+ \ni$ si $n, m > H \implies |x_n - x_m| < \epsilon$ tal que:

$$[2^{2-n}]|x_2 - x_1| < \epsilon \implies [2^2 2^{-n}] < \frac{\epsilon}{|x_2 - x_1|} \implies \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{4|x_2 - x_1|} \tag{11}$$

$$\implies 2^n > \frac{4|x_2 - x_1|}{\epsilon} \implies \log_2(2^n) > \log_2 \left(\frac{4|x_2 - x_1|}{\epsilon} \right) \tag{12}$$

$$\implies n > \log_2 \left(\frac{4|x_2 - x_1|}{\epsilon} \right) \tag{13}$$

Por lo tanto, es una sucesión de Cauchy y por criterio de Cauchy, la sucesión debe converger. Como (x_n) converge, procedemos a encontrar su límite por la subsecuencia de números impares x_{2n-1}, es decir:

$$x_{2n-1} = x_1 + \frac{|x_2 - x_1|}{2} + \frac{|x_2 - x_1|}{2^3} + \frac{|x_2 - x_1|}{2^5} + ... + \frac{|x_2 - x_1|}{2^{2n-1}} \tag{14}$$

Como $x_2 > x_1$, entonces podemos quitar el valor absoluto. Se procede con lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{lím}(x_n) &= x_1 + \frac{2}{3}(x_2 - x_1) && (15)\\ &= x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_1 && (16)\\ &= \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 && (17) \end{aligned}$$

□

1.4. Problema 4

Sea $\alpha \in (0, 2)$. Considere la sucesión definida por:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + (1 - \alpha)x_{n-1}, \forall n \geq 1$$

Encuentre el límite de la sucesión en términos de α, x_0, x_1.

Demostración. Según las condiciones del problema, es necesario encontrar el límite de la sucesión en términos de α, x_0, x_1. Se propone, el método para sucesiones de recurrencia de segundo orden, es decir:

Tenemos:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + (1 - \alpha)x_{n-1} \tag{1}$$

Si asignamos arbitrariamente $x^2 = x_{x+1}, x = x_n$ y $1 = x_{n-1}$:

$$\begin{aligned} x^2 &= \alpha x + (1 - \alpha) && (2)\\ 0 &= x^2 - \alpha x + (a - 1) && (3) \end{aligned}$$

Aplicamos la fórmula de Vieta y encontramos que $x_1 = (\alpha - 1)$ y $x_2 = 1$, entonces se tiene:

$$x_{n+1} = C_1(\alpha - 1)^n + C_2(1)^n \tag{4}$$

Será necesario encontrar las constantes C_1 y C_2. Por hipótesis, sabemos que tiene que estar en términos de x_0, x_1, α y $n \geq 1$.

Para $n = 1$:

$$x_{1+1} = C_1(\alpha - 1)^1 + C_2(1)^1 \tag{5}$$

Para $n = 2$:

$$x_{2+1} = C_1(\alpha - 1)^2 + C_2(1)^2 \tag{6}$$

Entonces tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1(\alpha-1)^1 + C_2 = x_2 \\ C_1(\alpha-1)^2 + C_2 = x_3 \end{cases} \tag{7}$$

Consideremos también, que x_2 y x_3, tienen una igualdad con la expresión original:

$$x_2 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_0 \tag{8}$$
$$x_3 = \alpha x_2 + (1-\alpha)x_1 \tag{9}$$
$$= \alpha[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_0] + (1-\alpha)x_1 \tag{10}$$
$$= \alpha^2 x_1 + \alpha(1-\alpha)x_0 + (1-\alpha)x_1 \tag{11}$$
$$= (\alpha^2 - \alpha + 1)x_1 + (\alpha - \alpha^2)x_0 \tag{12}$$

Entonces, aplicando una substitución a la segunda ecuación de (7):

$$C_1 = \frac{x_2 - C_2}{(\alpha-1)} \tag{13}$$
$$\implies \left(\frac{x_2 - C_2}{(\alpha-1)}\right)(\alpha-1)^2 + C_2 = x_3 \tag{14}$$
$$\implies (x_2 - C_2)(\alpha-1) + C_2 = x_3 \tag{15}$$
$$\implies \alpha x_2 - x_2 - \alpha C_2 + 2C_2 = x_3 \tag{16}$$
$$\implies (2-\alpha)C_2 + (\alpha-1)x_2 = x_3 \tag{17}$$
$$C_2 = \frac{x_3 - (\alpha-1)x_2}{2-\alpha} \tag{18}$$

Ahora bien, se substituye C_2 y C_3 con los valores de encontrados en (8) y (12):

$$C_2 = \frac{(\alpha^2-\alpha+1)x_1 + (\alpha-\alpha^2)x_0 - (\alpha-1)[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_0]}{2-\alpha} \tag{19}$$
$$= \frac{(\alpha^2-\alpha+1)x_1 + (\alpha-\alpha^2)x_0 - (\alpha^2-\alpha)x_1 + (1-\alpha)^2 x_0}{2-\alpha} \tag{20}$$
$$= \frac{[(\alpha^2-\alpha+1) - (\alpha^2-\alpha)]x_1 + [(\alpha-\alpha^2) + (1-\alpha)^2]x_0}{2-\alpha} \tag{21}$$
$$= \frac{x_1 + [(\alpha-\alpha^2) + (1-2\alpha+\alpha^2)]x_0}{2-\alpha} \tag{22}$$
$$= \frac{x_1 + (1-\alpha)x_0}{2-\alpha} \tag{23}$$
$$\implies C_1 = \frac{x_2 - C_2}{\alpha-1} = \frac{[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_0] - \left(\frac{x_1+(1-\alpha)x_0}{2-\alpha}\right)}{\alpha-1} \tag{24}$$
$$= \frac{\frac{(\alpha x_1+(1-\alpha)x_0)(2-\alpha) - (x_1+(1-\alpha)x_0)}{2-\alpha}}{\alpha-1} = \frac{\frac{-(\alpha-1)^2 x_1}{2-\alpha}}{\alpha-1} \tag{25}$$
$$= \frac{-(\alpha-1)x_1}{2-\alpha} = \frac{(1-\alpha)x_1}{2-\alpha} \tag{26}$$

Es decir que tenemos, substituyendo en la ecuación (4):

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= C_1(\alpha-1)^n + C_2(1)^n && (27)\\ &= \frac{(1-\alpha)x_1}{2-\alpha}(\alpha-1)^n + \frac{x_1+(1-\alpha)x_0}{2-\alpha}(1)^n && (28)\\ &= \frac{(1-\alpha)x_1(\alpha-1)^n + (x_1+(1-\alpha)x_0)(1)^n}{2-a} && (29) \end{aligned}$$

Se puede asumir que $(1)^n = 1$ en todos los casos.

$$\begin{aligned} &= \frac{(1-\alpha)x_1(\alpha-1)^n + (x_1+(1-\alpha)x_0)}{2-a} && (30)\\ &= \frac{-(\alpha-1)x_1(\alpha-1)^n + (x_1+(1-\alpha)x_0)}{2-a} && (31)\\ &= \frac{-x_1(\alpha-1)^{n+1} + (x_1+(1-\alpha)x_0)}{2-a} && (32)\\ &= \frac{-x_1(\alpha-1)^{n+1} + x_1+(1-\alpha)x_0}{2-a} && (33)\\ &= \frac{[1-(\alpha-1)^{n+1}]x_1+(1-\alpha)x_0}{2-\alpha} && (34) \end{aligned}$$

Entonces, la convergencia de la serie dependerá de la siguiente expresión, en donde $\alpha \in (0,2)$:

$$\text{lím}(x_n) = \frac{[1-(\alpha-1)^{n+1}]x_1+(1-\alpha)x_0}{2-\alpha} \qquad (35)$$

□

1.5. Problema 5

Sea a un número positivo. Definamos la sucesión (x_n) por:

$$x_{n+1} = a + x_n^2, \forall n \geq 0, x_0 = 0$$

Encuentre una condición necesaria y suficiente para la convergencia de la sucesión.

Sucesión de forma recursiva

n=0:

$x_1 = a + x_0^2 = a$

n=1:

$x_2 = a + x_1^2 = a + a^2$

n=2:

$x_3 = a + x_2^2 = a + (a+a^2)^2$

n=3:

$x_4 = a + x_3^2 = a + [(a+a^2)^2]^2$

n=4:

$x_5 = a + x_4^2 = a + \left\{[(a+a^2)^2]^2\right\}^2$

$\vdots$

$x_{n+1} = a + x_n^2$

Demostración. Dado que es necesario encontrar una condición para que (x_n) converja, se propone utilizar el Teorema 2 relacionado a las $m-$colas. Es decir, supóngase que $\lim(x_n) = x$, entonces $\lim(x_{n+1}) = x$. Entonces, se tiene por hipótesis:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a + x_n^2 && (1)\\ x &= a + x^2 && (2)\\ 0 &= a - x + x^2 && (3) \end{aligned}$$

Se procede aplicando la fórmula de Vieta para ecuaciones cuadráticas, en donde, $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = a$. Es decir:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} && (4)\\ &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(a)}}{2(1)} && (5)\\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2} && (6) \end{aligned}$$

La convergencia de (x_n) depende del discriminante de la ecuación anterior. Nótese que, para generar soluciones reales, es necesario $\sqrt{1-4a} \geq 0$, entonces:

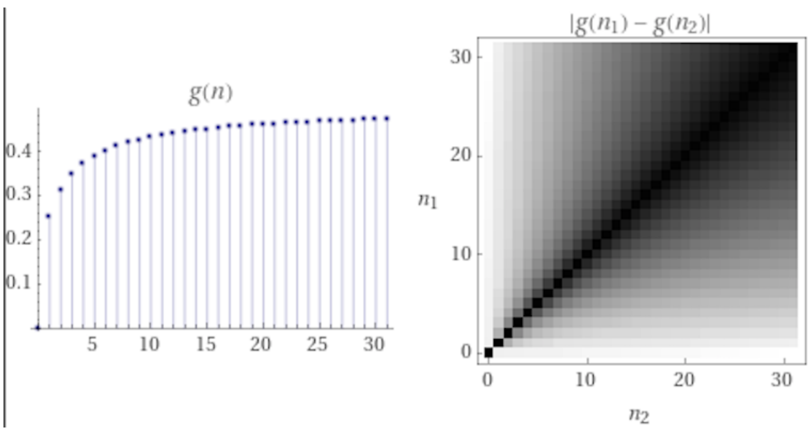
$$\begin{aligned} \sqrt{1-4a} &\geq 0 && (7)\\ 1 - 4a &\geq 0 && (8)\\ -4a &\geq -1 && (9)\\ a &\leq \frac{1}{4}. && (10) \end{aligned}$$

Entonces, esto quiere decir que la sucesión (x_n) definida por $x_{n+1} = a + x_n^2$ converge si y solo si $a \leq \frac{1}{4}$. □

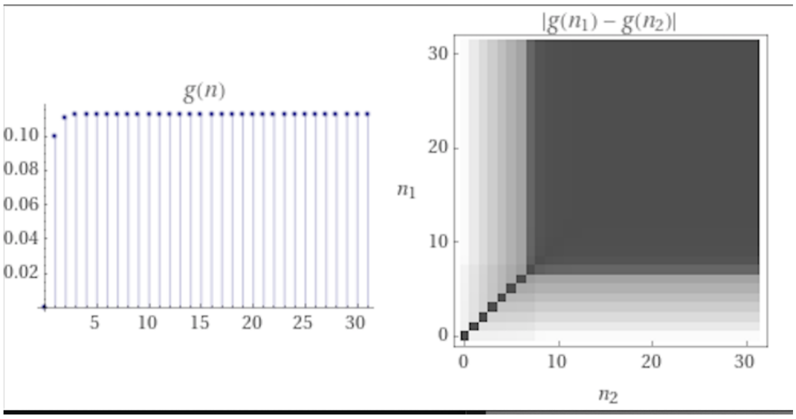
Por curiosidad, se utilizó *WolframAlpha* para comprobar que la condición es verdadera, con el siguiente comando (en donde α es variable):

$$x(0) = 0, x(n+1) = \alpha + (x(n))^2$$

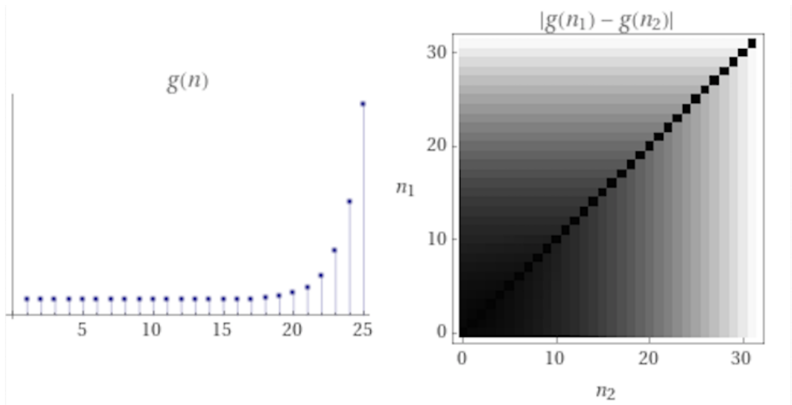
Con un $\alpha = 0{,}25$, la convergencia es evidente.



Con un $\alpha = 0{,}1$, la convergencia es evidente.



Con un $\alpha = 0{,}5$, no existe convergencia.



Por lo tanto, la condición parece cumplirse.

Referencias

Bartle, R. G. and Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis*, volume 1. Wiley New York.