Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
E-mail: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2034 - Análisis de Variable Real 1 - Catedrático: Dorval Carías
16 de mayo de 2021

Parcial 3

1. Problemas de «Introduction to Real Analysis» de Bartle & Sherbert(3 edición).

1.1. Sección 5.2: Problema 14

Deje que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaga la relación $g(x+y) = g(x)g(y)$ para todo x, y en $\mathbb{R}$. Muestre que si g es continua en $x = 0$, entonces g es continua en cada punto de $\mathbb{R}$. Además, si tenemos $g(a) = 0$ para algún $a \in \mathbb{R}$, entonces $g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Dato interesante

Consultando en la literatura, se encontró que $g(x + y) = g(x)g(y)$ forma parte de las ecuaciones funcionales de Cauchy. Precisamente, el caso exponencial. Se puede consultar más a detalle en el capítulo 10 de Jung (2011).

Definición de continuidad de Bartle & Sherbert

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, sea $f : A \to \mathbb{R}$, sea $c \in A$. Se dice que f **es continuo en** c si dado cualquier número $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si x es cualquier punto de A que satisface $|x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - f(c)| < \epsilon$.

Demostración. Reordenando el problema, tenemos dos hipótesis: **(1)** g es continua en $x = 0$. **(2)** $g(a) = 0$ para algún $a \in \mathbb{R}$. A probar: **(1)** g es continua en cada punto de $\mathbb{R}$. **(2)** $g(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Comenzamos con la segunda hipótesis, tenemos $g(a) = 0$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Proponemos arbitrariamente que $y := x - a$, es decir $x := y + a$, ahora bien:

$$g(x) = g(y + a) = g(y)g(a) = g(y) \cdot 0 = 0$$

Por lo tanto, si $g(a) = 0$ para algún $a \in \mathbb{R}$, se cumple que $g(x) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$.

Por otra parte, por la primera hipótesis sabemos que g es continua en $x = 0$. $\implies$ Es necesario analizar el caso particular de $g(0)$ para determinar sus posibles valores y que $g(0)$ se mantenga continua, se propone encontrar sus *puntos fijos*:

$$g(0) = g(0 + 0) = g(0)g(0) = g(0)^2$$

$\implies$ Para que $g(0) = g(0)^2$ se cumpla solo pueden ocurrir dos situaciones: (a) $g(0) = 1$. (b) $g(0) = 0$.

El caso (b) es trivial ya que siempre se cumple, por la primera hipótesis. El caso interesante surge del caso (a) cuando $g(0) = 1$, tal que $g(c) \neq 0 \; \forall c \in \mathbb{R}$. Se propone utilizar lo siguiente para determinar la continuidad de todos los puntos en $\mathbb{R}$: Basándonos en la definición de continuidad, sea g una función continua en $c = 0$, entonces dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si x es cualquier punto de $\mathbb{R}$ que satisface $|x - 0| < \delta$, entonces $|g(x) - 1| < \epsilon$. Nótese que como queremos encontrar la continuidad en todos los puntos c:

$$\begin{aligned}|g(x + c) - g(c)| &= |g(x)g(c) - g(c)| \\ &= |g(c)||g(x) - 1|.\end{aligned}$$

Esto quiere decir, si elegimos arbitrariamente un $\delta = \epsilon/|g(c)|$, entonces $|x| < \delta$ implica que $|g(x) - 1| < |g(c)| \cdot (\epsilon/|g(c)|) = \epsilon$. $\therefore$ g es continua en c. $\square$

1.2. Sección 5.4: Problema 12

Muestre que si f es continua en $[0, \infty)$ y uniformemente continua en $[a, \infty)$ para alguna constante positiva a, entonces f es uniformemente continua en $[0, \infty)$.

Definición de continuidad uniforme de Bartle and Sherbert (2000)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$. Se dice que f es uniformemente continua sobre A si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon) > 0$ tal que si $x, u \in A$ son cualesquiera números que satisfacen $|x - u| < \delta(\epsilon)$, entonces $|f(x) - f(u)| < \epsilon$.

Teorema (Caracterización de la compacidad en $\mathbf{R}$) de Abbott (2012)

Un conjunto $K \subseteq \mathbf{R}$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

Teorema (Heine-Borel) de Abbott (2012)

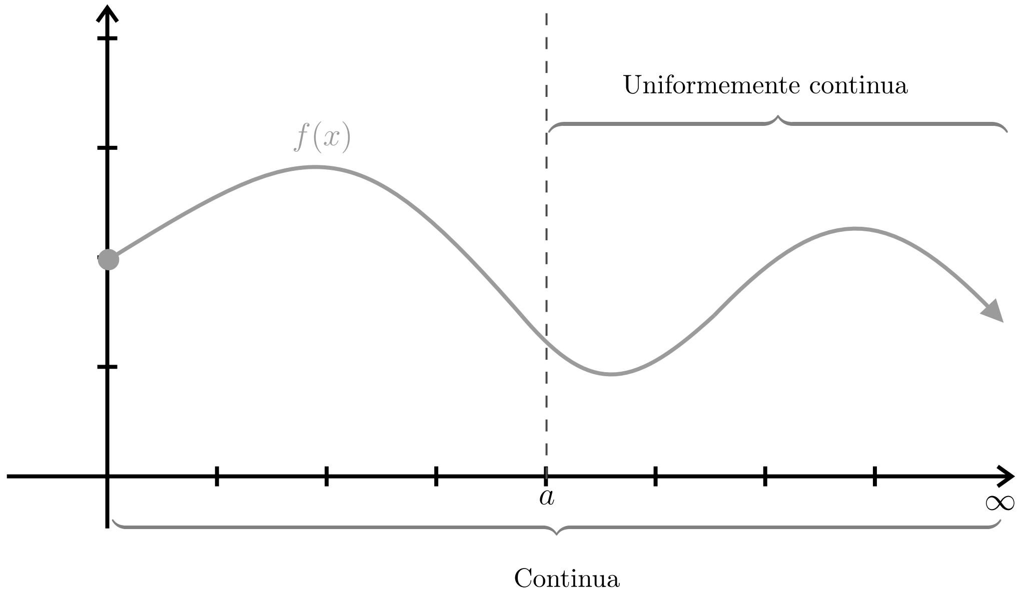
Sea K un subconjunto de $\mathbf{R}$. Todos los enunciados siguientes son equivalentes en el sentido que cualquier de ellos, implica los otros dos.

1. K es compacto.
2. K es cerrado y acotado.
3. Cada cubierta abierta para K tiene una subconvierta finita.

Teorema (Continuidad uniforme en conjuntos compactos) de Abbott (2012)

Una función que es continua en un conjnto compacto K es uniformemente continua en K.

Demostración. Por hipótesis tenemos que f es continua en $[0,\infty)$ y es uniformemente continua en $[a,\infty)$ para alguna constante positiva a. A probar: f es uniformemente continua en $[0,\infty)$. Es decir:



Nótese que lo que nos piden es demostrar que el intervalo $[0,a]$ es uniformemente continuo y posteriormente demostrar que $[0,\infty)$ es continuo.

$\Longrightarrow$ Sabemos que $[0,a]$ es acotado y cerrado. $\Longrightarrow$ Por Heine-Borel y la caracterización de la compacidad en $\mathbb{R}$, $[0,a]$ es compacto. $\Longrightarrow$ Por el teorema de la continuidad uniforme en conjuntos compactos, $[0,a]$ es uniformemente continua. $\Longrightarrow$ Para evitar lidiar con las situaciones que pueden darse alrededor de a, se preferirá trabajar con una de los cotas, es decir: $[0,a+1]$, que también es uniformemente continua.

Ahora, es necesario probar que $[0,\infty)$ es uniformemente continua. Procederemos con la definición de continuidad para los dos subconjuntos $[0,a+1]$ y $[a,\infty)$.

Notación

$$\delta_1(\epsilon)=\delta_1 \quad \text{y} \quad \delta_2(\epsilon)=\delta_2$$

$\Longrightarrow$ Dado $\epsilon>0$, existe un $0<\delta_1<1$ tales que $x,u\in[0,a+1]$ son cualesquiera números que satisfacen $|x-u|<\delta_1$, entonces $|f(x)-f(u)|<\epsilon$. Además, existe un $0<\delta_2<1$ tales que $x,u\in[0,\infty)$ son cualesquiera números que satisfacen $|x-u|<\delta_2$, entonces $|f(x)-f(u)|<\epsilon$. Ahora bien, elijamos arbitrariamente que $\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ tal que exista $\delta<1$ tales que $x,u\in[0,a+1]$ o $x,u\in[a,\infty)$ son cualesquiera números que satisfacen $|x-u|<\delta$, entonces:

$$|f(x)-f(u)|<\epsilon.$$

Por lo tanto, f es uniformemente continua. $\square$

2. Problemas de «Principles of Mathematical Analysis» de Rudin (3ra edición).

2.1. Capítulo 4: Problema 2

Si f es un mapeo continuo de un espacio métrico X en un espacio métrico Y, pruebe que:

$$f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$$

para cada conjunto $E \subset X$. ($\overline{E}$ denota la cerradura de E.) Muestre, con un ejemplo, $f(\overline{E})$ puede ser un subconjunto propio de $\overline{f(E)}$.

Teorema 4.8 de Rudin et al. (1976)

Un mapeo f de un espacio métrico X en un espacio métrico Y es continuo en X si y solo si $f^{-1}(V)$ es abierto en X para cada conjunto abierto V en Y.

Corolario

Un mapeo de un espacio métrico X en un espacio métrico Y es continuo si y solo si $f^{-1}(C)$ es cerrado en X para cada conjunto cerrado C en Y.

Definición 1.3 de Rudin et al. (1976)

Si A y B son conjuntos y si cada elemento de A es un elemento de B, decimos que A es un subconjunto de B, y escribimos $A \subset B$. Si, adicionalmente, hay un elemento de B que no está en A, entonces se dice que A es un conjunto propio de B.

Definición 2.2 de Rudin et al. (1976)

Sean A y B dos conjuntos y sea f un mapeo de A a B. Si $E \subset B$, f^{-1} denota el conjunto de todos los $x \in A$ tales que $f(x) \in E$. Llamamos f^{-1} la *imagen inversa* de E bajo f. Si $y \in B$, $f^{-1}(y)$ es el conjunto de todos los $x \in A$ tales que $f(x) = y$.

Definición (Cerradura) de Rudin et al. (1976)

Si X es un espacio métrico, si $E \subset X$, y si E' denota el conjunto de todos los puntos límites de E en X, entonces la cerradura de E es el conjunto $\overline{E} = E \cup E'$.

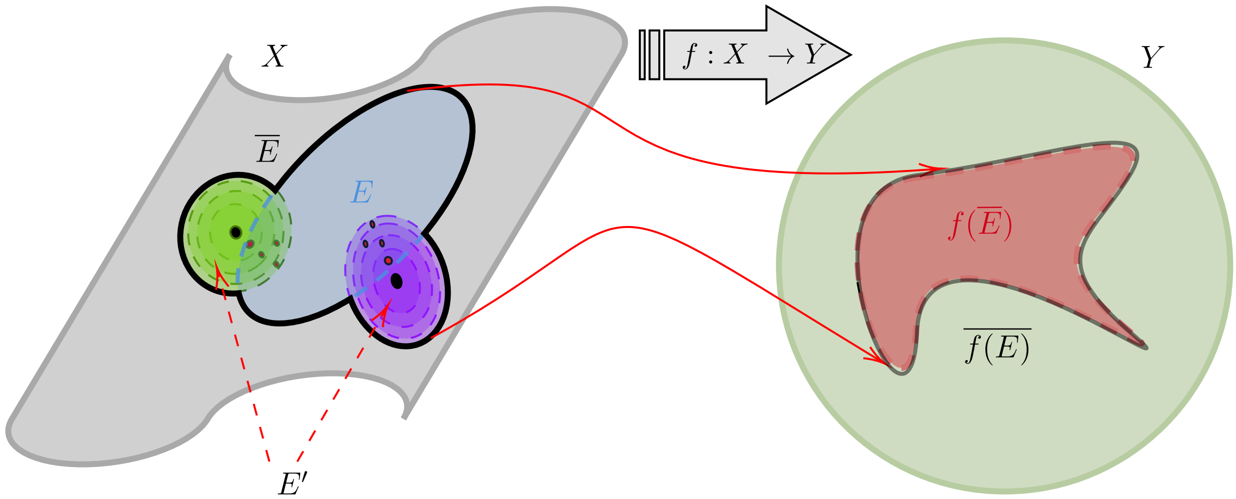
Definición (Punto de acumulación) de Rudin et al. (1976)

Sea X un espacio métrico y $E \subset X$. Un punto p es un punto de acumulación del subconjunto E si cada vecindad de p contiene un punto $q \neq p$ tal que $q \in E$.

Teorema 3.2.12 de Abbott (2012)

Para cualquier $A \subseteq \mathbb{R}$, la cerradura $\overline{A}$ es un conjunto cerrado y es el conjunto más pequeño que contiene a A.

Demostración. Por hipótesis, tenemos un mapeo continuo $f : X \to Y$, para cada conjunto $E \subset X$. A probar: $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$. Gráficamente, tenemos:



Nota 1

Como no sabemos que la función f es biyectiva y por lo tanto no podemos afirmar que tiene inversa, entonces f^{-1} representará a la preimagen.

Por la figura anterior, notamos que $\left(\overline{f(E)}\right)^c = Y - \overline{f(E)}$, que es un abierto de Y. $\implies$ Por el corolario del teorema 4.8 de Rudin et al. (1976), $f^{-1}(Y - \overline{f(E)})$ es un abierto de X. Ahora bien,

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y - \overline{f(E)}) &= f^{-1}(Y) - f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right) \\ &= X - f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right). \end{aligned}$$

Por lo cual, concluimos que $f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right)$ es un cerrado de X.

Nota 2

Sabemos por definición $E \subset \overline{E}$, en donde $\overline{E} = E' \cup E$.

Nota 3

Supóngase que tenemos un punto $x \in E$, entonces $f(x) \in f(E)$, aplicando la preimagen tenemos $x \in f^{-1}(f(E))$. La preimagen se define como

$$f^{-1}(f(E)) = \{x : f(x) \in f(E)\}.$$

Entonces, por la definición de preimagen, podemos concluir que

$$E \subset f^{-1}(f(E)).$$

$\implies$ Nótese que ahora podemos concluir,

$$E \subset \underbrace{f^{-1}(f(E)) \subset f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right)}_{\text{aplicando } f(E)\subset\overline{f(E)}}.$$

Nota 4

Hasta el momento, sabemos que $f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right)$ es un subconjunto cerrado y que $E \subset f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right)$. Ahora, nos interesa conocer si

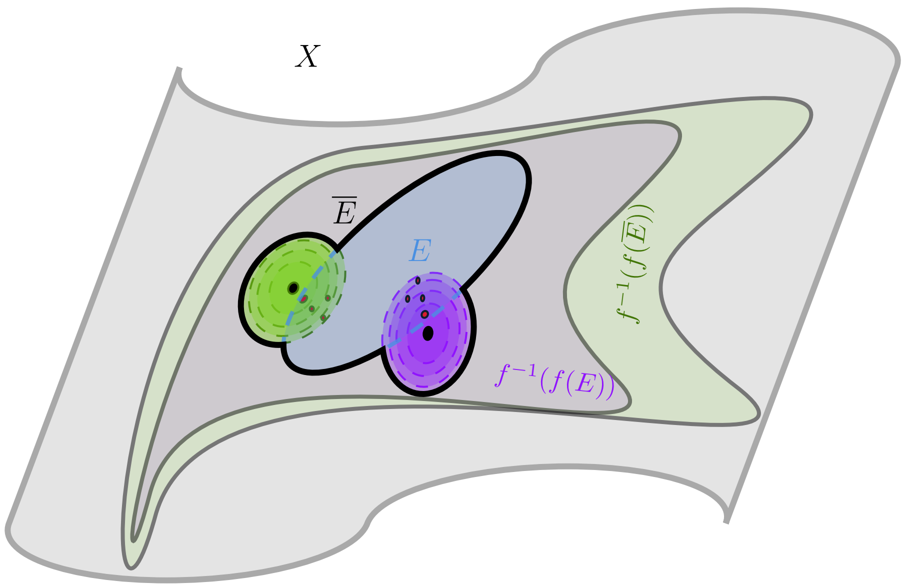
$$E \subset f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right) \implies \overline{E} \subset f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right).$$

Por el teorema 3.2.12 de Abbott (2012), sabemos que $\overline{E}$ es el subconjunto cerrado más pequeño que **contiene** a E (i.e. $E \subset \overline{E}$). Además, como ya sabíamos,

$$E \subset f^{-1}(f(E)) \subset f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right).$$

Entonces,

$$\overline{E} \subset f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right)$$



Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\overline{E} &\subset f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right)\\
f\left(\overline{E}\right) &\subset f\left(f^{-1}\left(\overline{f(E)}\right)\right)\\
f\left(\overline{E}\right) &\subset \overline{f(E)}
\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo

Muestre con un ejemplo, $f(\overline{E})$ puede ser un subconjunto propio de $\overline{f(E)}$.

Solución. Basándonos en la definición 1.3 de conjunto propio de Rudin et al. (1976). Es necesario encontrar un elemento $\overline{f(E)}$ que no está en $f(\overline{E})$, es decir que los dos conjuntos sean diferentes. Se propone una función continua definida en $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{es ampliamente conocida que es continua.}$$

Es decir, que tenemos $E = \mathbb{N}$. En donde $\mathbb{N} := [1, \infty)$. Por lo tanto, $E = \overline{E} = [1, \infty)$. Entonces, al aplicar el mapeo:

$$f(\overline{E}) = f(\mathbb{N}) = (0, 1]$$

Por lo que ahora, notamos que:

$$\overline{f(E)} = [0, 1]$$

Es decir, el 0 está en $\overline{f(E)}$, pero no en $f(\overline{E})$. Por lo tanto, es un subconjunto propio. □

2.2. Capítulo 4: Problema 6

Suponga E es compacto, pruebe que f es continua en E si y solo si su gráfica es compacta.
IMPORTANTE: El problema proporciona 2 comentarios:

Gráfica

Si f está definido sobre E, la gráfica de f es el conjunto de puntos $(x, f(x))$, para $x \in E$.

Caso particular

En particular, si E es un conjunto de números reales y f se evalúa con reales; la gráfica de f es un subconjunto del plano.

Nota 1

Para la argumentación de esta prueba, se tomó como referencia la aclaración de Paul (2020) respecto al producto topológico que es necesario que tenga la **gráfica** del problema; que aparentemente es una parte importante que Rudin et al. (1976) asumió sin especificarlo correctamente.
«Por ejemplo, supóngase:

1. Se tiene que $E = Y = [0, 1]$ bajo la métrica usual y $f(x) = x$ es el mapeo identidad. $\implies f$ es continuo.

Ahora bien,

2. Se define

$$d((e,y),(e',y')) = \begin{cases} 0, & e = e' \text{ and } y = y' \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Entonces d es una métrica que induce una topología discreta sobre G. Como se sabe que G es infinito, la colección $\big\{\{x\} \mid x \in G\big\}$ es una cubierta infinita de G por conjuntos abiertos sin una subcubierta finita. Es decir, G no es compacto.

Por estas razones, para este caso particular se utiliza una topología adherente al problema, que es el producto topológico definido como $E \times Y$, el cual G hereda como un subespacio.»

Definición de producto topológico de Naber and Naber (1997)

La definición trata con conceptos avanzados de topología, que de momento parecen muy abstractos, sin embargo es la literatura que fundamenta el producto topológico y reafirma lo de la **Nota 1**. Capítulo 1.3 - *Products and Locals Products* - Página 56 de Naber and Naber (1997).

Teorema 4.14 de Rudin et al. (1976)

Supóngase que f es un mapeo continuo de un espacio métrico compacto X en un espacio métrico Y. Entonces $f(Y)$ es compacto.

Demostración. Primero, vamos a reescribir el problema incluyendo el concepto de gráfica con su topología especificada en la nota 1 y la definición de producto topológico. Es decir, que tenemos un mapeo $f : E \to Y$ para las métricas E y Y, en donde E es un compacto.

Notación

Vamos a denotar G como la gráfica y se define como,

$$G := \{\Psi(x) = (x, f(x)) \mid x \in E\}$$

Entonces, nos piden probar,

$$f \text{ es continua} \iff \Psi \subset E \times Y \text{ es compacto.}$$

$\boxed{\to}$ Sabemos que f es continua y que E es compacto. A probar: $\Psi \subset E \times Y$ es un compacto.

Ahora bien nos interesa encontrar un mapeo continuo que sea compacto, por lo que asumimos que existen un par de puntos $(x,y), x \in E, y \in Y$, con una métrica definida como:

$$\rho\left(\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right)\right) = d_E\left(x_1, x_2\right) + d_Y\left(y_1, y_2\right),$$

basado en la definición usual de Rudin et al. (1976). Por las propiedades de la gráfica $\Psi(x)$ debe ser continua si f es continua. Por otro lado, sea $x \in X$ y dado $\varepsilon > 0$. Elegimos arbitrariamente un $\eta > 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f(u)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

si $d_E(x, y) < \eta$. Entonces, nuevamente, elegimos arbitrariamente un $\delta = \min\left(\eta, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Por lo tanto, se puede observar que

$$\rho(\Psi(x), \Psi(u)) < \varepsilon$$

si $d_E(x, u) < \delta$. Como sabemos que $\Psi(x)$ es continuo, entonces por la siguiente desigualdad

$$\rho(\Psi(x), \Psi(u)) \geq d_Y(f(x), f(u))$$

observamos que f debe ser continua. Finalmente, basándonos en el teorema 4.14 de Rudin et al. (1976) se deduce que la gráfica de una función f sobre un conjunto compacto E es compacto.

$\boxed{\leftarrow}$ Sabemos que $\Psi \subset E \times Y$ y E son compactos. A probar: f es continua.

Ahora, por contrapuesta: asumamos que f no es continuo en un punto x. $\implies$ Hay una sucesión de puntos x_n que convergen a x tales que $f(x_n)$ no convergen a $f(x)$. $\implies$ Por Bolzano-Weierstrass de Abbott (2012), si ninguna subsucesión de $f(x_n)$ converge, entonces la sucesión $\{(x_n, f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene ninguna subsucesión convergente, y por lo tanto su gráfica no es compacta. $\implies$ Ahora bien, si una subsucesión de $f(x_n)$ converge, dígase $f(x_{n_k}) \to z$, pero $z \neq f(x)$. $\implies$ La gráfica de f falla en contener los puntos límite de (x, z), y por lo tanto no es cerrado. Por el teorema de Heine-Borel de Abbott (2012), entonces no es compacta.

$\square$

2.3. Capítulo 4: Problema 15

Pruebe que cada mapeo continuo abierto de R^1 dentro de R^1 es monótono.

Mapeo abierto

Llámese un mapeo *abierto* de X dentro de Y,si $f(V)$ es un conjunto abierto en Y cuando V es un conjunto abierto de X.

$$V \in X$$

$$f(V) \in Y$$

Definición 4.28 de monótono de Rudin et al. (1976)

Sea f real en (a, b). Entonces f se dice que es monótonamente creciente en (a, b) si $a < x < y < b$ implica $f(x) \leq f(y)$. Si la última desigualdad es revertida, se obtiene la definición de una función monótonamente decreciente. La clase de funciones monótonas consisten de ambas: funciones monótonas crecientes y decrecientes.

Demostración. Supóngase que f no es continua y no es monótona, por la definición de monótona de Rudin et al. (1976) existen puntos $a < b < c$ con $f(a) < f(b)$ y $f(c) < f(b)$, definidos en los reales. Entonces el valor máximo de f en el intervalo cerrado de $[a, c]$ se asume que es un punto de u en el intervalo abierto (a, c). Si además hay un punto v en el intervalo abierto (a, c) donde f asume su valor mínimo en $[a, c]$, entonces $f(a, c) = [f(v), f(u)]$. Si ninguno de tales puntos v existe, entonces $f(a, c) = (d, f(u)]$, donde $d = \min(f(a), f(c))$. Por lo que podemos concluir que en cualquier caso, $f((a, c))$ no es abierto. $\square$

Referencias

Abbott, S. (2012). *Understanding analysis.* Springer Science & Business Media.

Bartle, R. G. and Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis.* Wiley New York.

Jung, S.-M. (2011). *Hyers-Ulam-Rassias stability of functional equations in nonlinear analysis*, volume 48. Springer Science & Business Media.

Naber, G. L. and Naber, G. L. (1997). *Topology, geometry, and gauge fields.* Springer.

Paul, S. (2020). Question about metric and compactness. Mathematics Stack Exchange. URL:https://math.stackexchange.com/q/3534792 (version: 2020-02-05).

Rudin, W. et al. (1976). *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-hill New York.