Clase de Diferenciación - Análisis de Variable Real 1

Rudik Rompich

May 29, 2021

Proyectos Blackboard 75

6/5/2021.

Prop: una función $f: X \to Y$ es continua (ssi) $\forall A \subset X$ se tiene que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Dem: ($\Rightarrow$) Sea $f: X \to Y$ continua. y sabemos que $f(A) \subset \overline{f(A)}$.

$$\Rightarrow \quad A \subset f^{-1}[f(A)] \subset f^{-1}[\underbrace{\overline{f(A)}}_{\text{cerrado}}]$$

$$\Rightarrow \quad A \subset \bar{A} \subset \underbrace{f^{-1}[\overline{f(A)}]}_{\text{cerrado}}$$

$$\Rightarrow \quad f(A) \subset f(\bar{A}) \subset f[f^{-1}[\overline{f(A)}]] = \overline{f(A)}$$

00:04:51 -01:29:01 1/2

($\Leftarrow$) Supongamos que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$, $\forall A \subset X$, y sea F un subconjunto cerrado de Y.

A probar: $f^{-1}(F) = A$ es un cerrado de X.

A probar: $A = \bar{A}$. Pero ya sabemos que $A \subset \bar{A}$. A probar: $\bar{A} \subset A$.

$$\Rightarrow \quad f(\bar{A}) = f\left(\overline{f^{-1}(F)}\right) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} =$$

$$= \bar{F} = F$$

$$\bar{A} \subset f^{-1}(f(\bar{A})) \subset f^{-1}(F) = A$$

$\Rightarrow \bar{A} \subset A \Rightarrow A = \bar{A} \Rightarrow A$ es cerrado

$\Rightarrow f$ es continua. $\square$

Diferenciación

Def: Sean $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ y $a < c < b$. Entonces, f es diferenciable en c, con derivada $f'(c)$, si

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \quad \therefore \text{el límite existe}$$

Si este límite existe $\forall c \in (a,b) \Rightarrow f$ es diferenciable en (a,b)

Nota: ① La diferenciabilidad es una propiedad local de las funciones.

② En la definición hagamos $h = x - c$

$\Rightarrow x = c + h$. Entonces:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Lagrange

③ $f'(c) = \dfrac{df}{dx}(c) = D_x(c)$ — Leibniz

$$\dot{f}(c) = \frac{df}{dt}(c)$$

Newton

Ej: ① Sea $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

Encontremos $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-\cancel{f(0)}^{\,0}}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0.$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0^+} h = 0$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0^-} 0 = 0$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$$

2) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \ni f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$

Sea $c \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{c+h}-\frac{1}{c}}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{c}-(\cancel{c}+\cancel{h})}{\cancel{h}(c+h)c} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{(c+\underbrace{h}_{0})c} = -\dfrac{1}{c^2}$

Sea $c=0 \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} f(h)$

Proyectos Blackboard 75

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1/h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} \text{ , el no existe}$$

$$\Rightarrow f'(0) \text{ no existe} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

3) Sean: $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$ y

$$g(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(x) = 0, \ \forall x \neq 0$, $f'(0)$ no existe (falla la continuidad

$g'(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$, $g'(0)$ no exis. cambio abrupto

7 / 8

Proyectos Blackboard 75

En este caso, $g(x) = |x|$ es continua en $x =$

y $g'(0)$ no existe.

Si f es continua en $x_0 \not\Rightarrow f$ es diferenciable.

Sin embargo:

continuidad + $\boxed{}$ $\Rightarrow$ diferenciable.

i.e. la continuidad es una condición necesaria para la diferenciabilidad ... pero no es suficiente

00:57:26 -00:36:26

8 / 8

Proyectos Blackboard 75

Ej: ① Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Si $x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Si $x = 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - \cancel{f(0)}^{\,0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h} \operatorname{sen}(1/h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) \leftarrow$ no existe

$\Rightarrow f'(0)$ no existe.

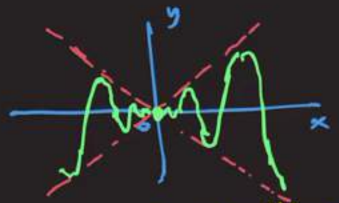
(Recordemos que f es continua en $x=0$).

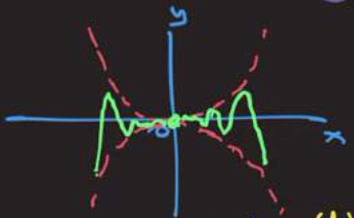
② Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ & \end{cases}$

9/9

01:06:21 -00:27:31

Proyectos Blackboard 75





$$f(x) = \begin{cases} x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Si $x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = 2x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow$ Si $x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - \cancel{f(0)}^{\,0}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^{\cancel{2}}\,\text{sen}(1/h)}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h\to 0} h\,\text{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = 0$

01:11:30 -00:22:22
10 / 10

$\Rightarrow f'(0) = 0$. además:

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \underbrace{2x \,\text{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right)}_{\to 0} - \cos\left(\tfrac{1}{x}\right), \text{ no existe}$$

$\Rightarrow f'(x)$ no es continua en $x=0$.

(f es diferenciable en $x=0$, pero f' no es continua en $x=0$).

<u>Teorema</u>: Si $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable en c, entonces f es continua en c.

<u>Dem</u>: A probar: f es continua

Proyectos
Blackboard 75

i.e. A probar: $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to c} f(x) - f(c) = 0$$

$\lim_{x\to c} f(c)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to c} \left[f(x) - f(c) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to c} \left[f(x) - f(c) \right] = \lim_{x\to c} \left[f(x) - f(c) \right] \left(\cdot \frac{x-c}{x-c} \right)$$

$$= \lim_{x\to c} \left[\left(\frac{f(x) - f(c)}{x-c} \right) \cdot (x-c) \right]$$

$$= \lim_{x\to c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x-c} \right) \cdot \lim_{x\to c} (x-c) =$$

Dorv
01:22:02 -00:11:50
12 / 12

Def: una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es continuamente diferenciable en (a,b), si f es diferenciable y f' continua sobre (a,b).

Notación: $f\in C^1(a,b)$

Prop: Si $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ son diferenciables en $c\in(a,b)$ y $k\in\mathbb{R}$, entonces:

1) $(f+g)'(c)=f'(c)+g'(c)$
2) $(kf)'(c)=kf'(c)$.
3) $(f\cdot g)'(c)=f'(c)g(c)+f(c)\cdot g'(c)$.
4) Si $g(c)\neq 0 \Rightarrow \left(\dfrac{f}{g}\right)'(c)=\dfrac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{(g(c))^2}$

Proyectos | Blackboard 75

5) (Regla de la cadena):

$$(g \circ f)'(c) = [g(f(c))]'$$

$$= g'(f(c)) \cdot f'(c).$$

Dem.- (3) $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x) \cdot g(x) - f(c)\,g(c)}{x - c} =$

$$= \lim_{x \to c} \frac{\left(f(x)\,g(x) - f(c)\,g(x)\right) + \left(f(c)\,g(x) - f(c)\,g(c)\right)}{x - c}$$

$$= \lim_{x \to c} \left[\underbrace{\left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right)}_{f'(c)} g(x) + f(c) \cdot \underbrace{\left(\frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right)}_{g'(c)} \right]$$

g diferencial

$\Rightarrow$ g continua

14 / 14

$$= f'(c) \cdot \lim_{x \to c} g(x) + f(c)\, g'(c)$$

g es diferenciable en $c \Rightarrow$ g es continua en c

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} g(x) = g(c)$$

$$= f'(c)\, g(c) + f(c) \cdot g'(c).$$

Def: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f tiene

1) un máximo local en $c \in A$, si existe una vecindad U de $c \ni f(x) \leq f(c)$, $\forall x \in U$.

2) Un mínimo local en $c \in A$, si existe una vecindad U de $c \ni f(x) \geq f(c)$, $\forall x \in U$

< Proyectos | Blackboard 75

3) un **valor extremo** en c, si tiene un máximo o mínimo (local o global) en ese punto.

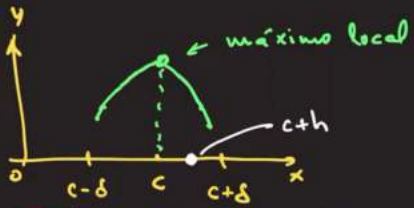
Teorema (valores extremos) (Fermat)

Si $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un valor extremo local en un punto interior $c \in A$, y si f es diferenciable en c, entonces $f'(c) = 0$.

Dem: Suponga que f tiene un máximo local en $c \in A \Rightarrow \exists$ una vecindad de c, digamos $U = (c-\delta, c+\delta) \subseteq A$, $\delta > 0 \ni f(x) \leq f(c)$, $\forall x \in U$.

MIX 1:10 16 / 16

Proyectos Blackboard 75



$\Rightarrow$ Si $\boxed{0 < h < \delta}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c) \leq 0$ (I)

Por otro lado, si $-\delta < h < 0$, entonces:

$\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$, por lo tanto

$\lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c) \geq 0$ (II)

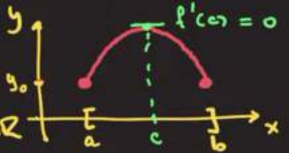
$\Rightarrow$ De (I) y (II), se tiene que $f'(c)=0$ □

7:28 17 / 17

Proyectos Blackboard 75

<u>Def:</u> Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Un punto interior $c \in A$ es un <u>punto crítico</u> de f, si f no es diferenciable en c o si $f'(c) = 0$. El punto c es <u>estacionario</u> si $f'(c) = 0$.

<u>Teorema (de Rolle):</u>



Suponga que $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), y es tal que $f(a) = f(b)$. Entonces, $\exists\, c\, (a,b) \ni$ $f'(c) = 0$.

MIX 7:55 18 / 18

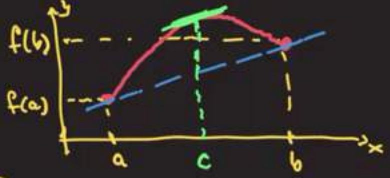
Dem: Como f es continua en $[a,b] \Rightarrow f$ tiene máximo y mínimo global en $[a,b]$. Entonces:

1) Si el máximo y mínimo se obtienen en los punto frontera $\Rightarrow f$ es constante en $[a,b] \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \ni f'(c) = 0$.

2) En otro caso, el máximo (o mínimo) global se alcanza en un punto interior de $[a,b] \Rightarrow c \in (a,b)$, y por el teorema anterior $\Rightarrow f'(c) = 0$. $\square$

Teorema (del valor medio) (Lagrange)

Sea $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b).



Entonces, $\exists\ c \in (a,b) \ni$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Dem/. Sea $g:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R} \ni$

$$g(x)=f(x)-f(a)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a).$$

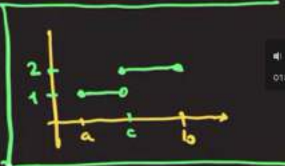
Nótese que $g(x)$ es continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y $\ni g(a)=0=g(b)$

$\Rightarrow g$ satisfe el teorema de Rolle, i.e. $\exists\, c \in (a,b)$ t.q.:

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

□

Teorema: Si $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre $\boxed{(a,b)}$ y si $f'(x) = 0,\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ es constante sobre (a,b).



Dem: Sea $x_0 \in (a,b) \Rightarrow$ Por T.V.M., $\exists\, c$ entre x_0 y x, $x \in (a,b)$ y $x \neq x_0$, $\ni$

$$f'(c) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0),\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ es constante en (a,b).

Corolario Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en (a,b). Si $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in (a,b)$, entonces $f(x) = g(x) + c$, para alguna constante c.

Dem. Sea $h : (a,b) \to \mathbb{R} \ni h(x) := f(x) - g(x)$ $\Rightarrow$ h es diferenciable en (a,b) y se tiene que $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$. Por el Teorema anterior, $h(x) = c$, donde c es alguna constante $\Rightarrow f(x) - g(x) = c$, $\forall x \in (a,b)$ $\blacksquare$

Teorema (Valor medio) (de Cauchy)

Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, funciones continuas en $[a,b]$, diferenciables en (a,b) y suponga que $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$. Entonces, $\exists\, c \in (a,b)$ tal que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$f'(c)\,[g(b)-g(a)] = g'(c)\,[f(b)-f(a)]$$

Dem: Como g es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b) y como $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$, definamos:

$$h(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,[g(x)-g(a)]$$

$\Rightarrow h(x)$ es continua en $[a,b]$, diferenciable en (a,b) y es t.q. $h(a) = 0 = h(b)$. Por el Teorema de Rolle, $\exists\, c \in (a,b) \Rightarrow$

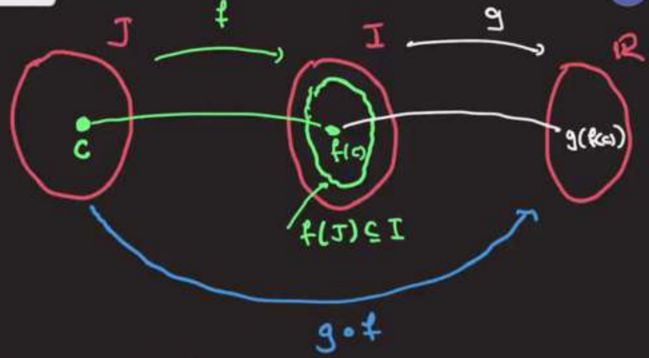
$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0 \qquad \square$$

- Regla de la cadena (+Técnica)
- Taylor
- Criterio de 1ª y 2ª derivada
- Regla de L'Hôpital

Proyectos Blackboard 80

Teorema (Regla de la cadena): Sean I y J intervalos de $\mathbb{R}$, sean $g: I \to \mathbb{R}$, $f: J \to \mathbb{R}$ y $f(J) \subseteq I$, y sea $c \in J$. Si f es diferenciable en c y si g es diferenciable en $f(c)$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en c, y

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c).$$



Nota (para olvidar)

Prueba "natural" (incorrecta)

$$\lim_{x \to c} \frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(c)}{x - c} =$$

$$= \lim_{x \to c} \left[\left(\frac{g(f(x)) - g(\overset{d}{\cancel{f(c)}})}{f(x) - \underset{d}{\cancel{f(c)}}} \right) \times \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) \right]$$

$$= g'(f(c)) \cdot f'(c)$$

Note que, existe la posibilidad que $f(x) = f(c)$ para x en una vecindad de c, lo que invalida la generalidad del argumento.

Proyectos Blackboard 80

Teorema (Carathéodory) Sea f una función definida en $I \subseteq \mathbb{R}$ y sea $c \in I$. Entonces, f es una función diferenciable en c ssi existe una función φ definida en I, que es continua en c y cumple:

$$f(x) - f(c) = \varphi(x) \cdot (x-c), \quad x \in I.$$

En este caso, $\varphi(c) = f'(c)$

Dem: $(\Leftarrow)$ Sea φ continua en c y t.q.

$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c).$$

Si $x - c \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \Rightarrow \lim_{x\to c} \varphi(x) =$$

$$= \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \varphi(c) \Rightarrow \varphi(c) = f'(c)$$

φ es continua

($\Rightarrow$) Supongamos que f es diferenciable en c, entonces: sea:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}, & x \neq c \\ f'(c) & x = c \end{cases}$$

como f es diferenciable en $c \Rightarrow f$ es continua en $c \Rightarrow \lim_{x\to c} \varphi(c) = f'(c)$.

< Proyectos | Blackboard 80

Si $x \neq c \Rightarrow \varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$

$\Rightarrow f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c).$

Si $x = c$, se cumple el resultado. $\square$

Ej: Sea $f(x) = x^3 \Rightarrow x^3 - c^3 = (x^2 + cx + c^2)(x-c)$

$\uparrow$

$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c)$

$\Rightarrow \varphi(x) = x^2 + cx + c^2$

$\Rightarrow \varphi(c) = c^2 + c^2 + c^2 = 3c^2 = f'(c)$

3/8

Dem: • Como f es diferenciable en c, entonces existe $\varphi(x)$, continua en c $\ni$

$$f(x)-f(c)=\varphi(x)(x-c),\quad x\in J,\ \text{y}$$

con $f'(c)=\varphi(c)$.

•• Como g es diferenciable en $f(c)$, entonces existe $\psi(x)$, continua en $f(c)$ $\ni$

$$* \quad g(f(x))-g(f(c))=\psi(f(x))\left[f(x)-f(c)\right],$$

donde $f(x)\in f(J)\subset I$ y $\psi(f(c))=g'(f(c))$

Nótese que:

$$\Rightarrow g(f(x)) - g(f(c)) = [(\psi \circ f)(x)] \cdot \varphi(x)(x-c)$$

$$= [(\psi \circ f)(x) \cdot \varphi(x)] (x-c)$$

$$\Rightarrow \underbrace{[(\psi \circ f)(c)] \varphi(c)}_{\text{continua}} = \psi(f(c)) \cdot \varphi(c)$$

$$= g'(f(c)) \cdot f'(c)$$

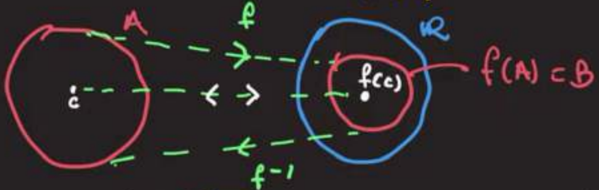
$\Rightarrow$ Por el teorema anterior

$$(g \circ f)'(c) = [(\psi \circ f)(x) \cdot \varphi(x)]$$

$$= g'(f(c)) \cdot f'(c). \qquad \square$$

Prop: Supóngase que $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva sobre A, con inversa $f^{-1}: B \to \mathbb{R}$, donde $B = f(A)$. Asuma que f es diferenciable en el punto interior $c \in A$ y que f^{-1} es diferenciable en $f(c)$, que es un punto interior de B. Entonces, $f'(c) \neq 0$ y se cumple:

$$(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$$



Dem: Sabemos que $f^{-1}(f(x)) = x$, $\forall x \in A$. Como f es diferenciable en c y f^{-1} es diferenciable en $f(c)$; entonces, por la regla de la cadena:

$$[f^{-1}(f(x))]' = (x)'$$

$\Rightarrow (f^{-1})'(f(c)) \cdot f'(c) = 1$. Si $f'(c) \neq 0$

$\Rightarrow (f^{-1})' f(c) = \dfrac{1}{f'(c)}$. Note que, si $f'(c) = 0 \Rightarrow f^{-1}$ no es diferenciable en $f(c)$. $\square$

Proyectos Blackboard 83

Nota: ① $(f^{-1})'(f(c)) = \dfrac{1}{f'(c)}$. si $f(c)=d$ $\Rightarrow c=f^{-1}(d)$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(f^{-1}(d))}$$

$\in B$

② una versión menos restringida del Teorema se llama Teorema de la función inversión.

Lema: Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ una función y $c \in \mathbb{R}$ que es punto de acumulación de A.

Si $a \le f(x) \le b$, $\forall x \in A$, entonces

3 / 3

si $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, se tiene que

$$a \leq \lim_{x \to c} f(x) \leq b$$

<u>Teorema</u>: Suponga que $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable sobre (a,b). Entonces,

① f es creciente ssi $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$.

② f es decreciente ssi $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a,b)$

<u>Dem</u>: ①:

$h>0$

$(\Rightarrow)$ Sea f creciente y sea $x \in (a,b)$. Entonces,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

por el lema anterior. Entonces, $f'(x) \geq 0$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$.

Sean: $a < x < y < b$.

Entonces, aplicando el Teorema del Valor medio,

$$\exists\, c \in (x,y) \ni \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) \geq 0,$$

Como $y-x>0 \Rightarrow f(y)-f(x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$

$\Rightarrow f$ es creciente. $\square$

Teorema de Taylor:

Proyectos Blackboard 83

Def: Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y suponga que f tiene n derivadas: $f', f'', \dots, f^{(n)}:(a,b)\to\mathbb{R}$.
El polinomio de Taylor de grado n de f en $c\in(a,b)$ es:

$$P_n(x) := f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (x-c)^k, \text{ donde:}$$

coef. de Taylor $\rightarrow$ $a_k = \dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}$

Nota: Si se tiene que una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ se puede escribir:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$\Rightarrow$ $R_n(x)$ es el error entre f y $P_n(x)$.

Residuo

Teorema (Taylor, con residuo de Lagrange)

Suponga que $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ tiene $n+1$ derivadas en (a,b) y sea $c\in(a,b)$. Entonces, $\forall x\in(a,b)$ $\exists\,\xi$ entre c y x $\ni$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + R_n(x), \quad \text{donde}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Nota: Sea $k=0 \Rightarrow \exists\, \xi$ entre c y $x \ni$

$$f(x) = \underbrace{f(c)}_{P_0(x)} + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-c)$$

$\Leftrightarrow \exists\, \xi$ entre c y $x \ni \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(\xi)$

(i.e. el TVM es una restricción del Teorema de Taylor).

Dem, Fijamos $x, c \in (a,b)$. Entonces, para cualquier $t \in (a,b)$, considere:

$$g(t) = f(x) - \left[f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right]$$

Nota: : $g(x) = 0$.

$$\Rightarrow g'(t) = -\cancel{f'(t)} - f''(t)\cdot(x-t) + \cancel{f'(t)} - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \frac{f''(t)\cdot \cancel{2}(x-t)}{\cancel{2!}} \cdots \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1}$$

$$g'(t) = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$$

Considere, ahora, la función:

$$h(t) = g(t) - \left(\frac{x-t}{x-c}\right)^{n+1} g(c)$$

$$\Rightarrow h(c) = g(c) - g(c) = 0$$

$$h(x) = \cancel{g(x)}^{0} - 0 = 0$$

$\Rightarrow$ Por Rolle $\exists\ \xi$ entre x y c $\ni$

$$h'(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow h'(t) = g'(t) + \frac{(n+1)}{(x-c)}\left(\frac{x-t}{x-c}\right)^{n} g(c)$$

$$\Rightarrow h'(\xi) = g'(\xi) + \frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(x-c)^{n+1}}\, g(c) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)\, \cancel{(x-\xi)^n} + \frac{(n+1)\cancel{(x-\xi)^n}}{(x-c)^{n+1}}\, g(c) = 0$$

$$\Rightarrow +\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(n+1)}{(x-c)^{n+1}}\, g(c)$$

$$\Rightarrow \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} = g(c) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)(x-c)^n}{k!}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)(x-c)^k}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \square$$

Teorema (Regla de L'Hôpital) (caso $\frac{0}{0}$)

Suponga que $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables sobre $(a,b) \ni g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$, y que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$

Entonces, si $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Dem: Extendemos f y g de tal forma que

$$f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R},$$

son funciones continuas sobre $[a, b)$. con $f(a) = g(a) = 0$.

Sea $x \in (a,b)$ y consideremos f y g extendidas en $[a,x] \Rightarrow f$ y g son continuas en $[a,x]$ y diferenciables en (a,x), entonces, por el Teorema del Valor Medio de Lagrange, existe $c \in (a,x) \ni$

$$g(x) - g(a) = \underbrace{g'(c)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(x-a)}_{\neq 0} \neq 0, \ \forall x \in (a,b)$$

Por el Teorema del valor medio de Cauchy:

$$\frac{f(x) - \cancel{f(a)}^{0}}{g(x) - \cancel{g(a)}^{0}} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$\Rightarrow$ Si $x \to a^+$

$\Rightarrow c \to a^+$. Entonces,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \qquad \square$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$g(x) = x \Rightarrow \lim_{x\to 0} x = 0$

$\boxed{g'(x) = 1 \neq 0,}\ \forall x$ ✓

$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$

Teorema: (Regla de L'Hôpital) (caso $\frac{\infty}{\infty}$)

Suponga que $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables sobre $(a,b) \ni g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$ y que $\lim_{x \to a^+} |g(x)| = \infty$. Entonces,

$$\text{Si } \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Ej: $$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to 0} x = 0$$

$x \in (0, 1/2)$

Proyectos Blackboard 83

Dem: Como $\lim_{x\to a^+} |g(x)| = \infty \Rightarrow g(x) \neq 0$, para valores de x cerca de a. Entonces, podemos asumir, SPG, que $g(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$. Sean $x, y \in (a,b)$ $\ni a < x < y < b \Rightarrow$ considere $f, g : [x,y] \to \mathbb{R}$. Como f, g son continuas en $[x,y]$, diferenciables en (x,y) y $\boxed{g'(x) \neq 0}$ en (x,y), entonces por el T.V.M. de Cauchy $\exists\, c \in (x,y) \ni$

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Por T.V.M de Lagrange
$g(y) - g(x) \neq 0.$

16 / 16

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y) + f(y)}{g(x)} = \frac{\overbrace{f(x) - f(y)}}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}$$

$$= \left(\frac{f(x) - f(y)}{\underbrace{g(x) - g(y)}} \right) \cdot \left(\frac{g(x) - g(y)}{g(x)} \right) + \frac{f(y)}{g(x)}$$

$$= \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \left(\frac{g(x) - g(y)}{g(x)} \right) + \frac{f(y)}{g(x)}$$

$$1 - \frac{g(y)}{g(x)}$$

$\Rightarrow$ Considere:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \left(\cancel{\frac{g(x) - g(y)}{g(x)}} \right) + \frac{f(y)}{g(x)} - L \right|$$

$$= \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} - L \right|$$

$$= \left| \left(\frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right) - \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right|} + \underbrace{\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)} \right|} + \underbrace{\left| \frac{f(y)}{g(x)} \right|}$$

$$|g(x)| \longrightarrow \infty$$

Proyectos Blackboard 83

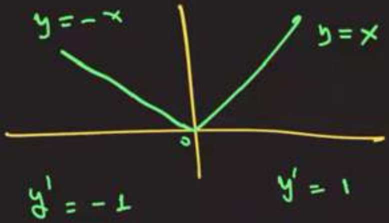
Criterios para optimización:

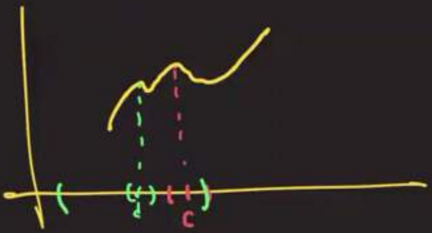
Teorema (criterio de 1ª derivada): Sean $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, una función continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,c) y (c,b). Entonces,

(1) Si existe una vecindad $(c-\delta, c+\delta) \ni f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (c-\delta, c)$ y $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (c, c+\delta)$, entonces f tiene un máximo relativo (local) en c.

(2) Si existe una vecindad $(c-\delta, c+\delta) \ni f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (c-\delta, c)$ y $f'(x) \geq 0$, $\forall x (c, c+\delta)$, entonces f tiene un mínimo relativo (local) en c.

20 / 20


y = -x
y = x
0
y' = -1
y' = 1

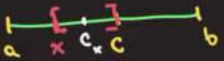

c

Proyectos Blackboard 83

$\delta > 0$

Dem: (1) Sea $x \in (c-\delta, c) \Rightarrow$ por el T.V.M, $\exists\, c_x \in (x,c) \ni$

$$f(c) - f(x) = f'(c_x)\cdot(c-x).$$



Como $f'(c_x) \geq 0$ y $c - x > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(c) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f(c) \geq f(x),\ \forall x \in (c-\delta, c).$

Si $x \in (c, c+\delta) \Rightarrow$ el T.V.M $\exists\, d_x \in (c, x) \ni$

$$f(x) - f(c) = f'(d_x)(x-c).$$

Como $f'(x) \leq 0,\ \forall x \in (c, c+\delta)$ y $x - c \geq 0$

$\Rightarrow f(x) - f(c) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(c),\ \forall x\, (c, c+\delta)$

$\Rightarrow f$ tiene máximo relativo en c.

(2) Similar. $\square$

Teorema (criterio de $2^{\underline{da}}$ derivada): Sea I un intervalo y x_0 un punto interior de I, y sea $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$. Suponga que $f', f'', \dots, f^{n}$ son continuas en x_0, y que:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ pero } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

1) Si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f$ tiene mínimo relativo en x_0.
2) Si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f$ tiene máximo relativo en x_0
3) Si n es impar, $\Rightarrow f$ no tiene máximo ni mínimo relativo en x_0.

Dem: (•) Apliquemos el Teorema de Taylor a $f(x)$ en x_0, y sea $x_1 \in I \ni$ (suficientemente cerca de x_0).

$$f(x_1) = P_{n-1}(x_1) + R_{n-1}(x_1) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x_1 - c)^n,$$

donde c es un punto entre x_0 y x_1.

(••) Si $f^{(n)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ existe un intervalo U que contiene a $x_0 \ni f^{(n)}(x)$ tiene el mismo signo que $f^{(n)}(x_0)$, $x \in U$.

Si $x_1 \in U \Rightarrow c \in U \Rightarrow f^{(n)}(c)$ y $f^{(n)}(x_0)$ tienen el mismo signo.

1) Si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ para $x \in U$, se

tiene que $f^{(n)}(c) > 0$ y $(x-x_0)^n \geq 0 \Rightarrow$

$$R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \overset{\geq 0}{R_{n-1}(x)}$$

$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0), \forall x \in U$

$\Rightarrow f$ tiene mínimo relativo en x_0.

(2) Si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f^{(n)}(c) < 0$ y $(x-x_0)^n$ es positivo $\Rightarrow R_{n-1} \leq 0$ y $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in U \Rightarrow f$ tiene máximo relativo en x_0.

(3) Si n es impar $(x-x_0)^n > 0$, si $x > x_0$

$(x-x_0)^n < 0$, si $x < x_0$

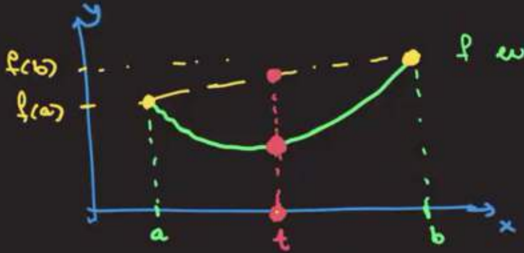
$\Rightarrow$ si $x \in U \Rightarrow R_{n-1}(x)$ tendrá signos opuestos a la izquierdo y derecha de $x_0 \Rightarrow f$ no tiene máximo ni mínimo en x_0. $\square$

Funciones convexas (1) Sea $f: I \to \mathbb{R}$, se dice que f es convexa sobre I, si $\forall s, t \in I$ y $\lambda \in [0,1]$, se tiene que

$$f(\lambda s + (1-\lambda)t) \leq \lambda f(s) + (1-\lambda) f(t).$$

(2) f es una función cóncava sobre I si $-f$ es convexa sobre I.

Proyectos Blackboard 83



f es convexa

$(1-\lambda)a + \lambda b = t$, para algún $\lambda \in [0,1]$

$$\Rightarrow f(t) = f\left[(1-\lambda)a + \lambda b\right] \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

1) • Desigualdad de Jensen

2) • Teorema de las 3 cuerdas

3) • $\boxed{\text{Ssi}}$

26 / 26

Teorema: Sea f una convexa y sean $w_1, \dots w_n \ni$

i) $w_j \geq 0$

ii) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$.

Entonces, para $x_1, x_2, \dots, x_n$, se cumple:

$$f(\underbrace{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}_{\text{combinacion convexo}}) \leq \underbrace{w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n)}_{\text{combinación convexa}}.$$

Dem: Por inducción sobre n.

i) $n=1$: $f(w_1 x_1) \leq w_1 f(x_1)$

$\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_1) \Rightarrow$ se tiene el resultado

Proyectos Blackboard 91

ii) Suponemos que la propiedad es válida para $n = K-1$; i.e. Si $w_j \geq 0$ y $\sum_{j=1}^{K-1} w_j = 1$,

$$\Rightarrow f\left(\sum_{j=1}^{K-1} w_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{K-1} w_j f(x_j).$$

iii) Considere el caso $n = K$. Sean $w_1, \dots, w_K$ números $\ni$ $w_j \geq 0$ y $\sum_{j=1}^{K} w_j = 1$.

Sea $w_K = 1 \Rightarrow f(x_K) \geq f(x_K)$.

$\Rightarrow$ Sea $w_K < 1$, se tiene:

$$w_1 + w_2 + \dots + w_{K-1} + w_K = 1$$

$$\Rightarrow w_1 + \dots + w_{K-1} = 1 - w_K$$

$$\Rightarrow \frac{w_1 + w_2 + \cdots + w_{k-1}}{1 - w_k} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{w_1}{1-w_k} + \frac{w_2}{1-w_k} + \cdots + \frac{w_{k-1}}{1-w_k} = 1,$$

note que, además, $\frac{w_j}{1-w_k} \geq 0$, $j = 1, \ldots, k-1$

Entonces,

$$f\left(\frac{w_1}{1-w_k} x_1 + \frac{w_2}{1-w_k} x_2 + \cdots + \frac{w_{k-1}}{1-w_k} x_{k-1}\right) \leq$$

$$\leq \frac{w_1}{1-w_k} f(x_1) + \cdots + \frac{w_{k-1}}{1-w_k} f(x_{k-1}) \quad (\mathrm{I})$$

Proyectos Blackboard 91

Además, $f(x_k) \le f(x_k)$ ✓ (II)

$$\Rightarrow \omega_k f(x_k) \le \omega_k f(x_k)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} (1-\omega_k)(\mathrm{I}) \\ (\mathrm{II}) \end{matrix}\right\} +$$ Entonces:

$$* \ \underbrace{(1-\omega_k)\, f\left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\omega_j}{1-\omega_k} x_j\right) + \omega_k f(x_k)}_{A} \le (1-\omega_k)\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\omega_j}{1-\omega_k} f(x_j) + \omega_k f(x_k)$$

$$f\left[(1-\omega_k)\sum_{j=1}^{k-1}\left(\frac{\omega_j}{1-\omega_k}\right)x_j + \omega_k x_k\right] \le (1-\omega_k)\, f\left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\omega_j}{1-\omega_k} x_j\right) + \omega_k f(x_k)$$

$$\Rightarrow f(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_k x_k) \le \sum_{j=1}^{k} \omega_j f(x_j) \qquad \square$$

5 / 5

Proyectos Blackboard 91

Prop: (Lema de las tres cuerdas):
Sea $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces, f es convexa ssi $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, se tiene que:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

Dem: $(\Rightarrow)$

Sean $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \exists\, t \in [0,1] \ni$

$$x_2 = (1-t)x_1 + t x_3$$

$$\Rightarrow x_2 = x_1 + t(x_3 - x_1)$$

$$\Rightarrow t = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \in [0,1] \;;\; \text{además,}$$

$$1 - t = 1 - \left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\right) = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \in [0,1].$$

- Como f es convexa, entonces: (I)

Si $x_2 = (1-t)x_1 + t x_3 \Rightarrow f(x_2) \le (1-t) f(x_1) + t f(x_3)$

- Restamos $f(x_1)$ en (I):

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \le (\cancel{1}-t) f(x_1) + t f(x_3) - \cancel{f(x_1)}$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \le t f(x_3) - t f(x_1)$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \le t \left[f(x_3) - f(x_1) \right]$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq \left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\right)\left[f(x_3) - f(x_1)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

... multipliquemos (I) $\times -1$ y sumemos $f(x_3)$;

$$\Rightarrow -f(x_2) \geq -\left[(1-t)f(x_1) + t f(x_3)\right]$$

$$\Rightarrow f(x_3) - f(x_2) \geq -f(x_1) + t f(x_1) - t f(x_3) + f(x_3)$$

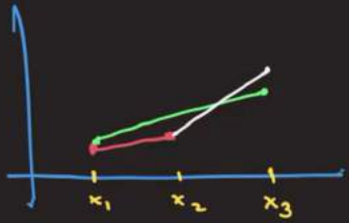
$$\geq f(x_3) - f(x_1) - t\left[f(x_3) - f(x_1)\right]$$

$$\geq \left[f(x_3) - f(x_1)\right](1-t)$$

$$\Rightarrow f(x_3) - f(x_2) \geq \left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right)\left[f(x_3) - f(x_1)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

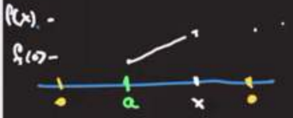
$(\Leftarrow)$



Prop: Sea I un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Para cada $a \in I$, considere:

$$f_a : I - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} \ni$$

$$f_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$



Entonces, $f_a(x)$ es creciente en I.

Dem: Sea $a \in I$ y sean $x, y \in I - \{a\}$, $x < y$.

i) Si $a < x < y \Rightarrow$ aplicando el teorema anterior con $x_1 = a$, $x_2 = x$ y $x_3 = y$, se ti

Proyectos Blackboard 91

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \Rightarrow f_a(x) \leq f_a(y)$$

ii) Si $x<y<a \Rightarrow \ldots \Rightarrow f_a(x) \leq f_a(y)$.

iii) Si $x<a<y \Rightarrow \ldots \Rightarrow f_a(x) \leq f_a(y)$ $\square$

11 / 11