SUCESIONES DE FUNCIONES - Análisis de Variable Real 1

Rudik Rompich

June 1, 2021

Sucesiones de Funciones (Cauchy, 1821)
(Weierstrass, Varios)

Nota: ① Una función $f: X \to \mathbb{R}$ está acotada superiormente, si $\exists\, c \in \mathbb{R} \ni |f(x)| < c, \ \forall x \in X$

② El supremo de f, $\sup(f) := \sup\{f(x) : x \in X\}$
el ínfimo de f, $\inf(f) := \inf\{f(x) : x \in X\}$

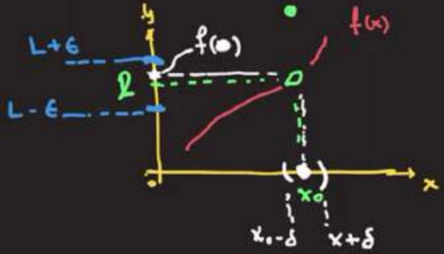
③ Una función está acotada superiormente si $\sup(f) < \infty$.
Una función está acotada inferiormente si $\inf(f) > -\infty$

Def: Sean $I \subseteq \mathbb{R}$, un intervalo y x_0 un punto de acumulación de I. Sea f una función definida en I (excepto posiblemente en x_0). Se dice que $l \in \mathbb{R}$ es el límite de $f(x)$ en x_0,

i.e. $$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$$

si $\forall \epsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ni 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

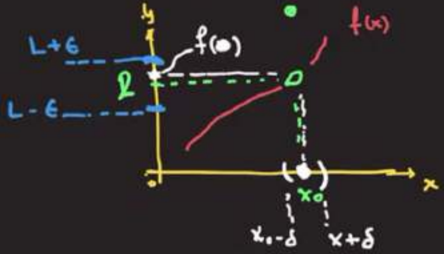


Def: (Cauchy) Sean $I \subseteq \mathbb{R}$, un intervalo y x_0 un punto de acumulación de I. Sea f una función definida en I (excepto posiblemente en x_0). Se dice que $l \in \mathbb{R}$ es el límite de $f(x)$ en x_0,

i.e.
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \;, = f(x_0)$$

si $\forall \epsilon > 0 \;\exists\; \delta > 0 \ni 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$



* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ ssi $\forall \epsilon > 0 \ \boxed{\exists\, N \in \mathbb{Z}^+} \ni \forall n > N$

se tiene que $|a_n - \ell| < \epsilon$

* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ ssi $\forall \epsilon > 0 \ \exists \boxed{\delta > 0 \ni}$ si

$\boxed{0 < |x - c| < \delta} \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

Ej: 1) Compruebe que $\lim\limits_{x\to x_0} (2x+3) = 2x_0 + 3$

Dem: $\boxed{\text{Dado } \epsilon > 0}$ $\exists \ \delta = \underline{\qquad\qquad} > 0 \ni$ si

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |(2x+3) - (2x_0+3)| < \epsilon$

Sucio: $\left|(2x+3)-(2x_0+3)\right| = \left|2x+\cancel{3}-2x_0-\cancel{3}\right| =$

$$= \left|2x-2x_0\right| = 2\left|x-x_0\right| < \epsilon$$

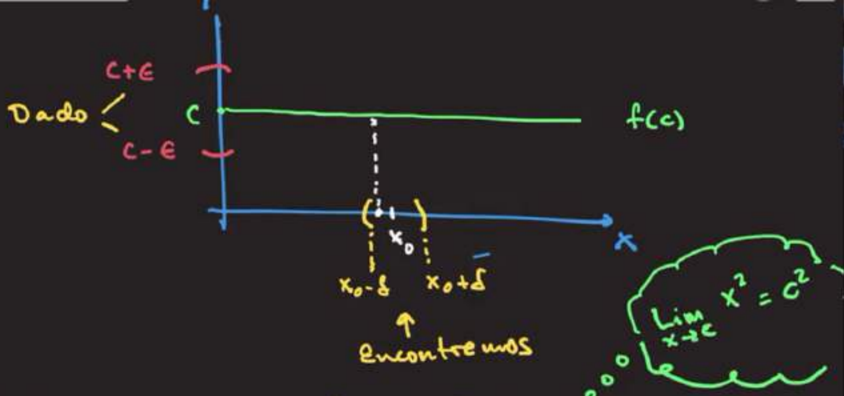
$$\Rightarrow \left|x-x_0\right| < \boxed{\frac{\epsilon}{2} = \delta}$$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ (c es una constante real)

Dem: Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $\delta = \_\_\_\_ > 0 \ni$ si

$$0 < |x - x_0| \Rightarrow |c - c| < \epsilon$$

Respaldo: $|c - c| = 0 < \epsilon$



3) *** Compruebe que $\lim_{x \to 3} (x^2 - 1) = 8$

Dem: Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $\delta =$ ______ > 0 $\ni$ si $\boxed{0 < |x-3| < \delta}$

$\Rightarrow |(x^2 - 1) - 8| < \epsilon.$

Respaldo: $|(x^2-1)-8| = |x^2-9| = |(x+3)(x-3)|$

$= |x+3| \cdot \underbrace{|x-3|}.$

$= |x+3| \cdot |x-3| < \epsilon$

$\Rightarrow \quad |x-3| < \dfrac{\epsilon}{|x+3|} < \dfrac{\epsilon}{|x|} = \delta$ ¡cuidado!

δ debe ser un número real

δ

Hagamos $|x-3| < 1 \Rightarrow -1 < x-3 < 1$
(supuesto)

$\Rightarrow$ Sumamos 6

$\Rightarrow \quad 5 < x+3 < 7 \Rightarrow 5 < \boxed{|x+3| < 7}$

$\Rightarrow |(x^2-1)-8| = |x+3| \cdot |x-3| < 7 \cdot |x-3|$

$= 7\cdot|x-3| < \epsilon \Rightarrow |x-3| < \frac{\epsilon}{7} \swarrow \delta$

$\Rightarrow$ seleccionamos $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{7}, 1\right\}$

Ej: Compruebe que $\lim\limits_{x\to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$, si $c>0$

<u>Dem</u>: Dado $\epsilon>0 \; \exists \; \delta = \_\_\_\_\_ > 0 \ni$ si

$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| < \epsilon$

<u>Respaldo</u>: $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| = \left|\frac{c-x}{xc}\right| = \frac{|x-c|}{|x|\cdot c} =$

$= |x-c|\cdot \frac{1}{|x|\cdot c}$; Suponemos que $|x-c|$

Supongamos que $|x-c| < \frac{1}{2}c \leftarrow \delta$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}c < x - c < \frac{1}{2}c$. Sumando c

$\Rightarrow c - \frac{1}{2}c < x < \frac{1}{2}c + c$

$\Rightarrow \frac{1}{2}c < x < \frac{3}{2}c \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{2}{c}$

$x < \frac{3}{2}c \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{2}{3c} > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{|x|c} < \frac{2}{c^2}$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| = |x-c| \cdot \frac{1}{|x| \cdot c} < |x-c| \cdot \frac{2}{c^2} < \epsilon$

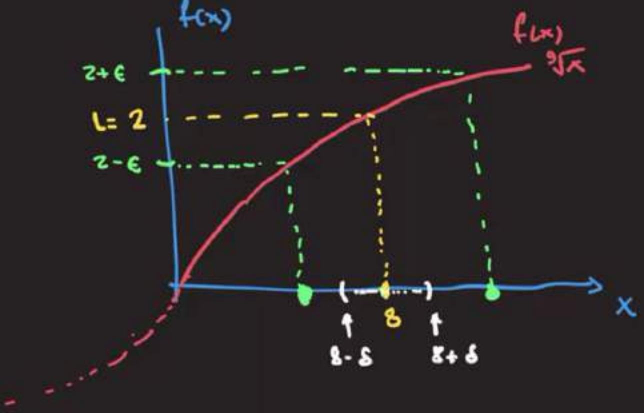
$\Rightarrow |x-c| < \frac{\epsilon c^2}{2} \leftarrow \delta$

Problema (***) : $\lim\limits_{x \to 8} \sqrt[3]{x} = 2.$

Ej: Compruebe que $\lim_{x \to 8} \sqrt[3]{x} = 2$

Sol: $\cancel{\forall}$ Dado $\epsilon > 0 \ \exists \ \delta = \_\_\_\_ > 0 \ \ni$ si $|x-8| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |\sqrt[3]{x} - 2| < \epsilon$



Respaldo: Dado $\epsilon > 0$, debemos encontrar $\delta > 0 \ni$

Si $|x-8| < \delta \Rightarrow \boxed{|\sqrt[3]{x} - 2| < \epsilon}$

$\Rightarrow -\epsilon < \sqrt[3]{x} - 2 < \epsilon \Rightarrow 2 - \epsilon < \sqrt[3]{x} < 2 + \epsilon$

$\Rightarrow (2-\epsilon)^3 < x < (2+\epsilon)^3$

$\Rightarrow (2-\epsilon)^3 \leq 8 - \delta \quad$ y $\quad 8 + \delta \leq (2+\epsilon)^3$

$\Rightarrow \delta \leq 8 - (2-\epsilon)^3 \quad$ y $\quad \delta \leq (2+\epsilon)^3 - 8$

$\Rightarrow \delta = \min\{8 - (2-\epsilon)^3, (2+\epsilon)^3 - 8\}$

$\Rightarrow$ Sol: Dado $\epsilon > 0 \ \exists \ \delta = \min\{8 - (2-\epsilon)^3, (2+\epsilon)^3 - 8\} > 0 \ \ni$

Si $|x-8| < \delta \Rightarrow |\sqrt[3]{x} - 2| < \epsilon$.

Nota: Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, entonces es único.

En efecto, suponga que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y que $\lim_{x\to a} f(x) = b'$. Entonces, Dado $\epsilon > 0$,

$\exists \delta_1 > 0 \ni$ si $|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \frac{\epsilon}{2}$

$\exists \delta_2 > 0 \ni$ si $|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b'| < \frac{\epsilon}{2}$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces: si $|x-a| < \delta \Rightarrow$

$$|b-b'| = |(b-f(x)) + (f(x)-b')| \leq$$

$$\leq |f(x)-b| + |f(x)-b'|$$

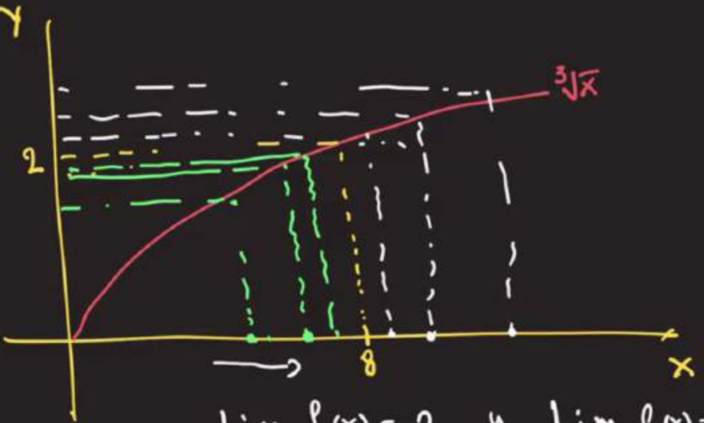
$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por la arbitrariedad de ϵ, se tiene que $b = b'$. $\square$

Teorema (Caracterización secuencial de límite)

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y suponga que c es un punto de acumulación de A. Entonces,

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ ssi $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$, para cada sucesión (x_n) en $A \ni \lim_{n \to \infty} x_n = c$.



$$\lim_{x \to 8^-} f(x) = 2 \quad y \quad \lim_{x \to 8^+} f(x) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 8} f(x) = 2$$

Teorema (Caracterización secuencial de límite)

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y suponga que c es un punto de acumulación de A. Entonces,

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ ssi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$, para cada sucesión (x_n) en $A \ni \lim_{n\to\infty} x_n = c$.

Dem:

($\Rightarrow$) Suponga que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y que (x_n) es una sucesión de elementos de $A \ni \lim_{n\to\infty} x_n = c$.

números reales

A probar: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Dado $\underline{\epsilon > 0}$ $\exists\ \delta > 0 \ni$ si $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

También, $\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $\underline{n \geq N} \Rightarrow |x_n - c| < \delta$

$\Rightarrow |f(x_n) - L| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = L.$ ✓

($\Leftarrow$) A probar $\lim_{x \to c} f(x) = L.$

Por contrapuesta, suponemos que $\lim_{x \to c} f(x) \neq L$ (o bien, el límite no existe). Es decir, existe $\epsilon_0 > 0$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ni$ si $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

$\exists \epsilon_0 > 0 \ni \forall \delta > 0$, se cumple que: si $|x - c| < \delta$

$|f(x) - L| \geq \epsilon_0$

También, $\exists\, N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $\underline{n \geq N} \Rightarrow |x_n - c| < \delta$

$\Rightarrow |f(x_n) - L| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$

$(\Leftarrow)$ A probar $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

Por contrapuesta, supongamos que $\lim_{x\to c} f(x) \neq L$

(o bien, el límite no existe).

(x_n)

$\uparrow$

$\exists$ una sucesión $\ni$ $x_n \to c$, pero $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq L$

También, $\exists\, N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \Rightarrow |x_n - c| < \delta$

$\Rightarrow |f(x_n) - L| < \epsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L.$

$(\Leftarrow)$ A probar $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L.$

Por contrapuesta, suponemos que $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq L$

(o bien, el límite no existe).

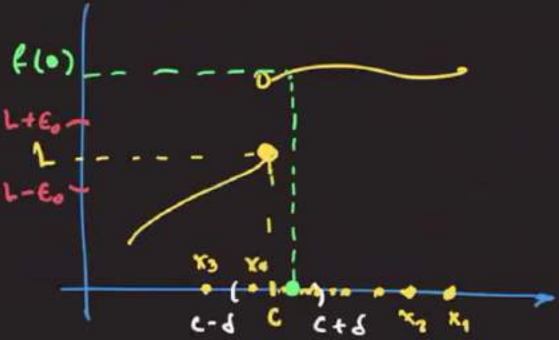
(x_n)

$\exists$ una sucesión $\ni$ $x_n \to c$, pero $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq L$

Como $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq L \Rightarrow \exists\, \epsilon_0 > 0 \ni \forall \delta > 0\ \exists x \in A,$

con $|x - c| < \delta$ y tal que $|f(x) - L| \geq \epsilon_0$

$$\lim_{x \to c} f(x) \neq L$$



Considere la sucesión (x_n) formada así:

i) $x_n \in A$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$;

ii) Dado $\delta > 0$, $|x_n - c| < \frac{1}{n}$.

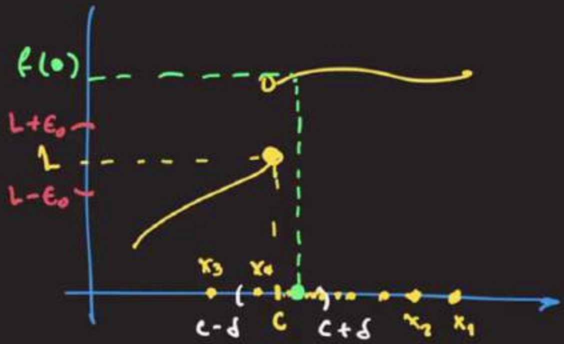
$\delta = \frac{1}{n}$

Nótese que $\lim\limits_{n\to} (x_n) = c \Rightarrow$

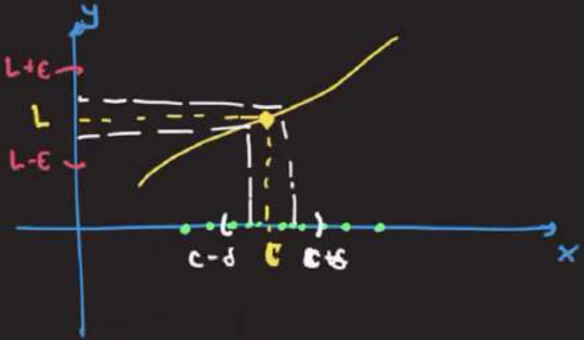
Podemos encontrar un $x_n \in A \ni |x_n - c| < \frac{1}{n}$ y

$\ni |f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$. Entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq L$

$$\lim_{x \to c} f(x) \neq L$$



<u>**Corolario**</u>: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea c un punto de acumulación de A. Entonces, el $\lim_{x \to c} f(x)$ <u>no</u> existe si se cumple alguna de las siguientes



y
L+ε
L
L-ε
c-δ
c
c+δ
x

1) Existen sucesiones (x_n) y (y_n) en A $\ni$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = c \text{ , pero}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$$

2) Existe una sucesión (x_n) en A $\ni$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$,

pero $(f(x_n))$ diverge.

Ej: Considere la función $sgn: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\ni$

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0} sgn(x)$ no existe.

En efecto: considere las sucesiones:

$$x_n := \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

, pero:

$$y_n := -\frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} sgn(x_n) = \lim_{n\to\infty} sgn\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} sgn(y_n) = \lim_{n\to\infty} sgn\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1$$

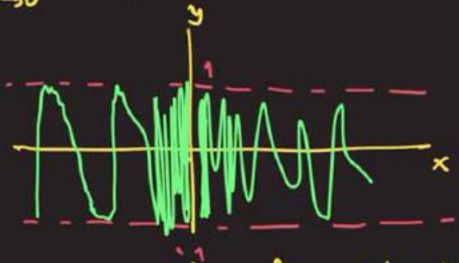
$\Rightarrow \lim_{x\to 0} sgn(x)$ no existe.

Ej: Sea $f: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R} \ni f(x) = \frac{1}{x}$. "Sabemos" que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ no existe. Sea $x_n = \frac{1}{n}$, entonces

$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$; Pero $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/n)} = \lim_{n\to\infty} n \to \text{diverge.} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \text{ no existe}$$

Ej: El $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe.



En efecto, considere las siguientes sucesiones

$$x_n := \frac{1}{2n\pi} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

$$y_n := \frac{1}{2n\pi + \pi/2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0}$$ además,

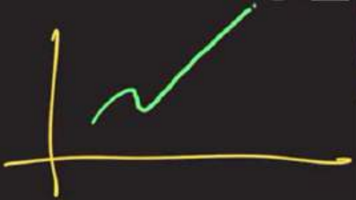
$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(2n\pi) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

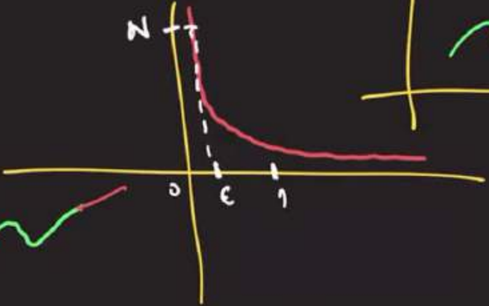
$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) =$$

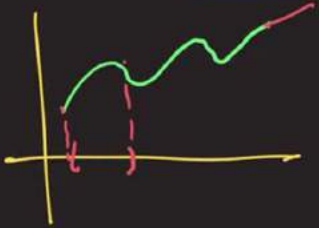
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\overset{0}{\cancel{\operatorname{sen} 2n\pi}} \cos\frac{\pi}{2} + \overset{1}{\cancel{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}} \overset{1}{\cancel{\cos 2n\pi}} \right] = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ no existe.}$$







$[0, \infty)$

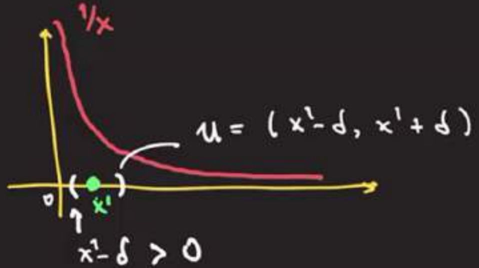
$[0, 1]$

$(0, 1]$

$(c, 1] \,, \quad c > 0$

Def: Dadas $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y c un punto de acumulación de A, se dice que f es localmente acotada en c si existe una vecindad $\mathcal{U}$ de c $\ni$ f es acotada en $\mathcal{U} \cap A$.

Ej.



$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$ es acotada en $\mathcal{U}$ (y en $\mathcal{U} \cap \mathbb{R}$)

$\Rightarrow f$ es acotada localmente en x'

Teorema: Suponga que la función $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y que c es un punto de acumulación de A.

Si $\lim_{x \to c} f(x)$ existe $\Rightarrow$ f es localmente acotada en c.

Dem.: Sea $\lim_{x \to c} f(x) = L$. $\Rightarrow$ sea $\epsilon = 1 \Rightarrow \exists\ \delta > 0 \ni$ si $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1$. Sea $U = (c-\delta, c+\delta)$

$\Rightarrow$ si $x \in A \cap U$, se tiene:

$$|f(x)| = |(f(x) - L) + L| \leq |f(x) - L| + |L|$$
$$< 1 + |L|, \quad \forall x \in A \cap U$$

$\Rightarrow f(x)$ está localmente acotada en $A \cap U$. $\square$

por la izquierda en c, denotado

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L \quad \ldots \quad \lim_{x \uparrow c} f(x) = L$$

sii, $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \ni c - \delta < x < c$ y $x \in A$

$\Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Teorema: Sean $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y c un punto de acumulación de $\{x \in A \ni x > c\}$ y $\{x \in A \ni x < c\}$.

Entonces,
$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \ldots \quad L \in \mathbb{R}$$

ssi $\displaystyle\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L$

Dem:

($\Rightarrow$) Sabemos que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$; i.e. Dado $\epsilon > 0$

$\exists\, \delta > 0 \ni$ si $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

$\Leftrightarrow \quad -\delta < x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

$\Leftrightarrow \quad c - \delta < x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

Nótese que: $\quad$ centrada en c

En particular, si $c < x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$;

y, si $c - \delta < x < c \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L = \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$.

($\Leftarrow$) Suponga que $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$

En decir, dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ $\ni$

$$c - \delta_1 < x < c \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon, \quad y$$

$$c < x < c + \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

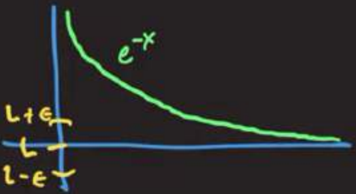
$$\Rightarrow c - \delta_1 < x < c + \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

δ $\Rightarrow$ Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$\Rightarrow c - \delta < x < c + \delta \Leftrightarrow |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = L. \qquad \square$$

<u>Def:</u>



$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$$

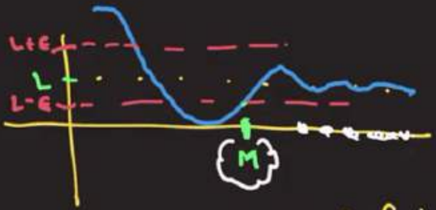
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Nota: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1) Si A no está acotado superiormente, entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L,$$

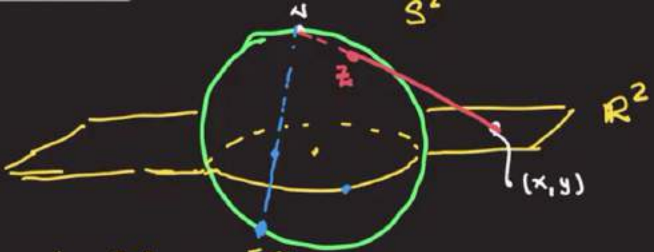
ssi $\forall \epsilon > 0 \ \exists \ M \in \mathbb{R} \ni$ si $x \in A$ y $x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.



2) Si A no está acotado inferiormente, entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

ssi $\forall \epsilon > 0 \ \exists \ M \in \mathbb{R} \ni$ si $x \in A$ y $x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.



Proyección Estereográfica
Esfera de Riemann

Propiedades de Límites

Prop: Suponga que $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y que c es un punto de acumulación de A. Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in A$, y si $\lim_{x \to c} f(x)$ y $\lim_{x \to c} g(x)$ existen, entonces

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x).$$

Dem: Supongamos que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c} g(x) = M$, y por el absurdo $L > M$.

Considere $\epsilon = \boxed{\dfrac{L-M}{2}} > 0 \Rightarrow$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ $\ni$:

si $x \in A$ y $|x-c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ $\quad L - f(x)$

si $x \in A$ y $|x-c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \epsilon$ $\quad M - g(x)$

$\Rightarrow$ Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow$ si $x \in A$, $|x-c| < \delta \Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= [f(x) - L] + [L-M] + [M - g(x)] \\ &> -\epsilon + [L-M] - \epsilon \\ &= (L-M) - 2\underset{\uparrow \frac{L-M}{2}}{\epsilon} > 0 \Rightarrow f(x) > g(x) \end{aligned}$$

$(\longrightarrow\leftarrow)$.

Prop: Suponga que $f, g, h : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y que c es un punto de acumulación de A. Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in A$ y si $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \to c} g(x) = L.$$

Dem: Por el teorema anterior:

- $\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x) \Rightarrow L \leq \lim_{x \to c} g(x)$
- $\lim_{x \to c} g(x) \leq \lim_{x \to c} h(x) \Rightarrow \lim_{x \to c} g(x) \leq L$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} g(x) = L$$

- Falta el argumento de la existencia de $\lim_{x \to c} g(x)$.

Prop: Suponga que $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y que c es un punto de acumulación de A. Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c} g(x) = M$, entonces:

1) $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$

2) $\lim_{x \to c} k f(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$.

3) $\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$

4) $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} f(x) \Big/ \lim_{x \to c} g(x)$, $M \neq 0$.

Dem:

1) Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ $\ni$

Si $x \in A$ y $|x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon/2$

Si $x \in A$ y $|x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \epsilon/2$

Sea $\boxed{\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0}$. Entonces, si $x \in A$, $|x - c| < \delta$, entonces:

$$|[f(x) + g(x)] - (L + M)| = |[f(x) - L] + [g(x) - M]| \leq$$

$$\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = L + M.$$

3) Como $g(x)$ tiene límite en $c \Rightarrow g(x)$ es localmente acotada en $c \Rightarrow \exists K>0$ y $\exists \delta_0 > 0 \ni |g(x)| < K$, $\forall x \in A, |x-c| < \delta_0$. Además, $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0 \ni$

si $x \in A, |x-c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon/2K$

si $x \in A, |x-c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \epsilon/2|L|$

$\Rightarrow$ si $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\} \Rightarrow$ para $x \in A, |x-c| < \delta$,

$$\Rightarrow |f(x)\cdot g(x) - L\cdot M| = |f(x)\,g(x) - L\,g(x) + L\,g(x) - LM|$$

$$= |[f(x) - L]\,g(x) + L\,[g(x) - M]|$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - L|}\cdot \underbrace{|g(x)|} + |L|\cdot \underbrace{|g(x) - M|}$$

$$\leq \boxed{\frac{\epsilon}{2K}}\,K + |L|\cdot \boxed{\frac{\epsilon}{2\cdot|L|}} = \epsilon$$