Lógica Matemática

October 10, 2022

1 Axiomática del Cálculo de Proposiciones

Nota: La lógica es el estudio del razonamiento. Entonces, la lógica matemática es el estudio del razonamiento matemático.

Es claro que es imposible probar todas las leyes matemáticas. Existen ciertas leyes llamadas axiomas, que se aceptan sin pruebas; las leyes restantes llamadas teoremas, son probadas a partir de los axiomas.

Hay en Matemática, definiciones de conceptos en términos de otros conceptos. Hay ciertos conceptos llamados conceptos básicos que se dejan indefinidos; los conceptos restantes llamados conceptos derivados, son definidos en términos de los conceptos básicos.

Definición 1 *Un sistema axiomático es una teoría (edificio que se puede construir) consistente en: conceptos básicos, conceptos derivados, axiomas y teoremas.*

Ejemplo: Geometría plana y Teoría de números reales

Nota: Los postulados son verdades evidentes y los axiomas son verdades no evidentes. Ambos se aceptan.
Un axioma (o teorema) puede ser visto en dos formas:
1) como un enunciado (independiente del significado y expresión sintáctica) y
2) como el significado de un enunciado (expresión semántica).

Definición 2 *El estudio de los axiomas y teoremas como enunciados es un estudio sintáctico de los sistemas axiomáticos.*

Definición 3 *El estudio del significado de los enunciados es llamado el estudio semántico de los sistemas axiomáticos.*

Definición 4 *Un sistema formal es la parte sintáctica de un sistema axiomático.*
Nota: Importa como se relacionan los enunciados.

Nota: La primera parte de un sistema formal es un Lenguaje.
Para especificar un lenguaje, se debe especificar, primero, todos sus símbolos.

Definición 5 *Cualquier secuencia finita de símbolos de un lenguaje es llamado una expresión de ese lenguaje.*

Definición 6 *Una fórmula es una expresión en el lenguaje que enuncia algo.*

Nota: La segunta parte del sistema formal consiste de los axiomas.
Y la tercera parte del sistema formal consiste de las Reglas de Inferencia que dan la forma de concluir teoremas a partir de los axiomas.

Ejemplo: Axiomática del Cálculo de Proposiciones (sistema de Hilbert-Ackermann).
1) Se da un alfabeto por una lista ilimitada de letras: a, b, c, ..., x, y, z, a_1, b_1, ..., x_1, y_1, z_1, a_2, ...
2) Una lista de símbolos llamados conectivos $\{-, \vee\}$.
Nota:
El símbolo $\Rightarrow$ aparece como una abreviatura: $a \Rightarrow b := \overline{a} \vee b$.
El símbolo $\wedge$ aparece como una abreviatura: $a \wedge b := \overline{\overline{a} \vee \overline{b}}$.
El símbolo $\Leftrightarrow$ aparece como una abreviatura: $a \Leftrightarrow b := (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$.
3) Sintáxis:
3.1) Toda variable proposicional (letra) es una fórmula.
3.2) Si A es una fórmula, entonces $\overline{A}$ es una fórmula.
3.3) Si A y B son fórmulas, cualquier relación de ellas utilizando conectivos es una fórmula.
4) Axiomas:

$$\begin{array}{l}
(HA)_1:\ (x \vee x) \Rightarrow x \\
(HA)_2:\ x \Rightarrow (x \vee y) \\
(HA)_3:\ (x \vee y) \Rightarrow (y \vee x) \\
(HA)_4:\ (x \Rightarrow y) \Rightarrow [(z \vee x) \Rightarrow (z \vee y)]
\end{array}$$

5) Reglas de deducción:
5.1) Modus Ponens (MP)
Si A es un teorema y $A \Rightarrow B$ es un teorema, donde A y B son fórmulas, entonces B es un teorema
Notación: $\vdash$:Es teorema

Entonces,
$\vdash$ A
$\underline{\vdash \text{A}\Rightarrow\text{B}}$
$\vdash$ B
5.2) Regla de sustitución
Sea A un teorema en que aparezca la letra x. Si se sustituye x por una fórmula cualquiera, se sigue obteniendo un teorema.

Ejemplo:
$\vdash$ x$\Rightarrow$x$\vee$y (teorema por axioma $(\text{HA})_2$)
$\vdash$ x$\Rightarrow$[x$\vee$(x$\Rightarrow$y)] (x$\Rightarrow$y|y)$(\text{HA})_2$

Definición 7 *Una demostración de una fórmula A es una secuencia de fórmulas*
A_1
A_2
$\vdots$
A_n
En donde cada A_i es un axioma o se obtiene de los A_1, A_2,..., A_{i-1} por aplicación de la regla de deducción.

Ejemplo de teoremas

Teorema 1 $\vdash x\Rightarrow x\vee x$
Dem:

$$\begin{array}{ll} A_1\text{: } \vdash x\Rightarrow x\vee y & (HA)_2 \\ A_2\text{: } \vdash x\Rightarrow x\vee x & (x|y)_{A_1} \\ & \square \end{array}$$

Teorema 2 (Silogismo hipotético) $\vdash (x\Rightarrow y)\Rightarrow[(z\Rightarrow x)\Rightarrow(z\Rightarrow y)]$
Dem:

$$\begin{array}{ll} A_1\text{: } \vdash (x\Rightarrow y)\Rightarrow[(z\vee x)\Rightarrow(z\vee y)] & (HA)_4 \\ A_2\text{: } \vdash (x\Rightarrow y)\Rightarrow[(\overline{z}\vee x)\Rightarrow(\overline{z}\vee y)] & (\overline{z}\ |z)_{A_1} \\ A_3\text{: } \vdash (x\Rightarrow y)\Rightarrow[(z\Rightarrow x)\Rightarrow(z\Rightarrow y)] & \textit{por abreviatura} \\ & \square \end{array}$$

Teorema 3 (Principio del tercio excluído) $\vdash \overline{x}\vee x$
Dem:

A_1*:* $\vdash x \vee x \Rightarrow x$	*(HA)*$_1$
A_2*:* $\vdash x \Rightarrow x \vee x$	*Teorema anterior*
A_3*:* $\vdash (x \Rightarrow y) \Rightarrow [(z \Rightarrow x) \Rightarrow (z \Rightarrow y)]$	*Teorama anterior*
A_4*:* $\vdash [(x \vee x) \Rightarrow x] \Rightarrow [(x \Rightarrow (x \vee x)) \Rightarrow (x \Rightarrow x)]$	$(x \vee x \mid x)_{A_3}$, $(x \mid y)_{A_3}$, $(x \mid z)_{A_3}$
A_5*:* $\vdash [(x \Rightarrow (x \vee x)) \Rightarrow (x \Rightarrow x)]$	*MP* A_1, A_4
A_6*:* $\vdash x \Rightarrow x$	*MP* A_2, A_5
A_7*:* $\vdash \overline{x} \vee x$	*por abreviatura*
	$\square$

Teorema 4 $\vdash x \Rightarrow \overline{\overline{x}}$
Dem:

A_1*:* $\vdash x \vee y \Rightarrow y \vee x$	*(HA)*$_3$
A_2*:* $\vdash \overline{x} \vee x \Rightarrow x \vee \overline{x}$	$(\overline{x} \mid x)_{A_1}$,$(x \mid y)_{A_1}$
A_3*:* $\vdash \overline{x} \vee x$	*por teorema anterior*
A_4*:* $\vdash x \vee \overline{x}$	*MP* A_2,A_3
A_5*:* $\vdash \overline{x} \vee \overline{\overline{x}}$	$(\overline{x} \mid x)_{A_4}$
A_6*:* $\vdash x \Rightarrow \overline{\overline{x}}$	*por abreviatura*
	$\square$

Ejercicio: Demuestre que $\vdash \overline{\overline{x}} \Rightarrow$x

Nota[Reglas Derivadas]:
Sean A, B y C fórmulas
0) Reglas S
$\vdash$ A$\Rightarrow$B
$\vdash$ B$\Rightarrow$C
$\vdash$ A$\Rightarrow$C
Dem:

A_1: $\vdash$ (x$\Rightarrow$y)$\Rightarrow$[(z$\Rightarrow$x)$\Rightarrow$(z$\Rightarrow$y)]	por teorema anterior
A_2: $\vdash$ (B$\Rightarrow$C)$\Rightarrow$[(A$\Rightarrow$B)$\Rightarrow$(A$\Rightarrow$C)]	$(C \mid y)_{A_1}$ $(A \mid z)_{A_1}$, $(B \mid x)_{A_1}$)
A_3: $\vdash$ (A$\Rightarrow$B)$\Rightarrow$(A$\Rightarrow$C)	MP A_2,$\vdash$ B$\Rightarrow$C
A_4: $\vdash$ A$\Rightarrow$C	MP A_3,$\vdash$ A$\Rightarrow$B
	$\square$

Ejemplo: Demuestre que $\vdash \overline{x} \vee$x, utilizando la regla S.
Dem:

A_1: $\vdash$ x$\Rightarrow$x$\vee$x	por teorema anterior
A_2: $\vdash$ x$\vee$x$\Rightarrow$x	(HA)$_1$
A_3: $\vdash$ x$\Rightarrow$x	Regla S A_1, A_2
A_4: $\vdash \overline{x} \vee$x	por abreviatura
	$\square$

1) De $\vdash$ A se deduce $\vdash$ A$\vee$B, para cualquier fórmula B.

Dem:

A_1: $\vdash$ x$\Rightarrow$x$\vee$y	por teorema anterior
A_2: $\vdash$ A$\Rightarrow$A$\vee$B	$(A\|x)_{A_1}$, $(B\|y)_{A_1}$
A_3: $\vdash$ A	por hipótesis
A_4: $\vdash$ A$\vee$B	MP A_2, A_3
	$\square$

2) De $\vdash$ A$\vee$A se deduce $\vdash$ A

Dem:

A_1: $\vdash$ x$\vee$x$\Rightarrow$x	$(HA)_1$
A_2: $\vdash$ A$\vee$A$\Rightarrow$A	$(A\|x)_{A_1}$
A_3: $\vdash$ A$\vee$A	por hipótesis
A_4: $\vdash$ A	MP A_2, A_3
	$\square$

3) De $\vdash$A$\vee$B se deduce $\vdash$ B$\vee$A

Dem:

A_1: $\vdash$ x$\vee$y$\Rightarrow$y$\vee$x	$(HA)_3$
A_2: $\vdash$ A$\vee$B$\Rightarrow$B$\vee$A	$(A\|x)_{A_1}$, $(B\|y)_{A_1}$
A_3: $\vdash$ A$\vee$B	por hipótesis
A_4: $\vdash$ B$\vee$A	MP A_2, A_3
	$\square$

4) De $\vdash$ A$\Rightarrow$B se deduce $\vdash$ C$\vee$A$\Rightarrow$C$\vee$B para cualquier fórmula C

Dem:

A_1: $\vdash$ (x$\Rightarrow$y)$\Rightarrow$[(z$\vee$x)$\Rightarrow$(z$\vee$y)]	$(HA)_4$
A_2: $\vdash$ (A$\Rightarrow$B)$\Rightarrow$[(C$\vee$A)$\Rightarrow$(C$\vee$B)]	$(A\|x)_{A_1}$, $(B\|y)_{A_1}$, $(C\|z)_{A_1}$
A_3: $\vdash$ A$\Rightarrow$B	por hipótesis
A_4: $\vdash$ C$\vee$A$\Rightarrow$C$\vee$B	MP A_2, A_3
	$\square$

5) De $\vdash$ A$\Rightarrow$B se deduce $\vdash$ $\overline{\overline{A}}$ $\Rightarrow$B

Dem:

A_1: $\vdash$ $\overline{\overline{x}}$ $\Rightarrow$x	por ejercicio anterior
A_2: $\vdash$ $\overline{\overline{A}}$ $\Rightarrow$A	$(A\|x)_{A_1}$
A_3: $\vdash$ A$\Rightarrow$B	por hipótesis
A_4: $\vdash$ $\overline{\overline{A}}$ $\Rightarrow$B	Reglas S A_2, A_3
	$\square$

6) De $\vdash$ $\overline{\overline{A}}$ $\Rightarrow$B se deduce $\vdash$ A$\Rightarrow$B

Dem:

A_1: $\vdash x \Rightarrow \overline{\overline{x}}$	por teorema anterior
A_2: $\vdash A \Rightarrow \overline{\overline{A}}$	$(A\|x)_{A_1}$
A_3: $\vdash \vdash \overline{\overline{A}} \Rightarrow B$	por hipótesis
A_4: $\vdash A \Rightarrow B$	Reglas S A_2, A_3
	$\square$

7) De $\vdash$ A, $\vdash$ B se deduce $\vdash$ A$\Rightarrow$ B

Dem:

A_1: $\vdash x \Rightarrow x \vee y$	por teorema anterior
A_2: $\vdash B \Rightarrow B \vee \overline{A}$	$(B\|x)_{A_1}$, $(\overline{A},y)_{A_1}$
A_3: $\vdash B$	por hipótesis
A_4: $\vdash B \vee \overline{A}$	MP A_2, A_3
A_5: $\vdash \overline{A} \vee B$	por regla derivada 3 A_4
A_3: $\vdash A \Rightarrow B$	por abreviatura
	$\square$

8) De $\vdash$ A$\Rightarrow$C, $\vdash$ B$\Rightarrow$C se deduce $\vdash$ (A$\vee$B)$\Rightarrow$C

Dem:

A_1: $\vdash B \Rightarrow C$	por hipótesis
A_2: $\vdash A \vee B \Rightarrow A \vee C$	por regla derivada 4 A_1
A_3: $\vdash A \Rightarrow C$	por hipótesis
A_4: $\vdash C \vee A \Rightarrow C \vee C$	por regla derivada 4 A_3
A_5: $\vdash x \vee y \Rightarrow y \vee x$	$(HA)_3$
A_6: $\vdash A \vee C \Rightarrow C \vee A$	$(A\|x)_{A_5}$, $(C\|y)_{A_5}$
A_7: $\vdash A \vee B \Rightarrow C \vee A$	Regla S A_2, A_6
A_8: $\vdash A \vee B \Rightarrow C \vee C$	Regla S A_7, A_4
A_9: $\vdash x \vee x \Rightarrow x$	$(HA)_1$
A_{10}: $\vdash C \vee C \Rightarrow C$	$(C\|x)_{A_9}$
A_{11}: $\vdash A \vee B \Rightarrow C$	Regla S A_8, A_{10}
	$\square$

Ejemplo: Sistema Gentzen.

1) Sistema de contectivos $\{\vee, \wedge, \Rightarrow, -, \Leftrightarrow\}$

2) Reglas de deducción:

2.1) Modus Pones

2.2) Regla de sustitución

3) Axiomas:

G_1: $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$

G_2: $(x \Rightarrow y) \Rightarrow [(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow z)]$

G_3: $x \Rightarrow [y \Rightarrow (x \wedge y)]$

G_6: $x \Rightarrow (x \vee y)$

G_7: $y \Rightarrow (x \vee y)$

G_9: $(x \Rightarrow y) \Rightarrow [(x \Rightarrow \overline{y}) \Rightarrow \overline{x}]$

G_{11}: (x⇒y)⇒[(y⇒x)⇒(x⇔y)]
G_4: (x∧y)⇒x
G_5: (x∧y)⇒y
G_8: (x⇒z)⇒[(y⇒z)⇒[(x∨y)⇒z]]
G_{10}: $\overline{\overline{x}}$ ⇒x
G_{12}: (x⇔y)⇒(x⇒y)
G_{13}: (x⇔y)⇒(y⇒x)

Ejercicio: Probar que la teoría de Hibert-Ackerman y la teoría de Gentzen son equivalentes (es decir, $\tau_{HA} \approx \tau_{Gentzen}$ o $\tau_{HA} \subseteq \tau_{Gentzen}$ y $\tau_{Gentzen} \subseteq \tau_{HA}$).
Nota: Los axiomas de τ_{HA} sean teoremas de $\tau_{Gentzen}$ y viceversa.

Nota: Si se remplaza G_{10} por G_{10}^*: $\overline{x}$ ⇒(x⇒y), se obtiene el llamado Sistema Intuicionista de Gentzen.

Ejercicio: Demostrar que $\tau_{HA} \nsubseteq \tau_{Gentzen}$. Es decir, éste no lo puede deducir utilizando este sistema Intuicionista (G_{10}^*).
Demostrar G_{10} no es teorema ($\overline{\overline{x}}$ ⇒x).
Nota: En este sistema, se tienen algunas expresiones que son tautologías, pero no son teoremas, por ejemplo:
1) x∨$\overline{x}$
2) $\overline{\overline{x}}$ ⇒x
3) $(\overline{x \wedge y})$⇒$(\overline{x} \vee \overline{y})$
4) [(x⇒y)∧(y⇒z)]⇒(x⇒z)

Ejercicio: Si se sustituye G_{10}^* por G_{10}^{**}: $\overline{x}$∨x, entonces se tiene la equivalencia con τ_{HA}.
Observaciones:
a) $\vdash_{\text{i}}$ x⇒x, pero $\nvdash_{\text{i}}$ $\overline{x}$∨x (no puede ser considerado como abreviatura).
b) $\vdash_{\text{i}}$ (x∨x)⇒x, pero $\nvdash_{\text{i}}$ $(\overline{x \vee x})$∨x.
c) $\vdash_{\text{i}}$ (x∨x)⇒x, pero $\nvdash_{\text{i}}$ ($\overline{x}$ ⇒x)⇒x (Ley de Clavius).

1.1 Otras demostraciones HA

Teorema 5 $\vdash$ *x⇒(y ∨ x)*
Dem:

$$\begin{array}{ll} A_1\text{: } \vdash x \Rightarrow (x \vee y) & (HA)_2 \\ A_2\text{: } \vdash (x \vee y) \Rightarrow (y \vee x) & (HA)_3 \\ A_3\text{: } \vdash x \Rightarrow (y \vee x) & \textit{Regla S } A_1, A_2 \\ & \square \end{array}$$

Teorema 6 $\vdash$ *(p ∨ (q ∨ r))⇒(q ∨(p ∨ r))*

Dem:

A_1: $\vdash x \Rightarrow (y \vee x)$	por teorema 5
A_2: $\vdash r \Rightarrow (p \vee r)$	$(r\|x)_{A_1}, (p\|y)_{A_1}$
A_3: $\vdash (q \vee r) \Rightarrow (q \vee (p \vee r))$	Regla 4 A_2
A_4: $\vdash (p \vee (q \vee r)) \Rightarrow (p \vee (q \vee (p \vee r)))$	Regla 4 A_3
A_5: $\vdash (x \vee y) \Rightarrow (y \vee x)$	$(HA)_3$
A_6: $\vdash (p \vee (q \vee (p \vee r))) \Rightarrow ((q \vee (p \vee r)) \vee p)$	$(p\|x)_{A_5}, (q \vee (p \vee r)\|y)_{A_5}$
A_7: $\vdash (p \vee (q \vee r)) \Rightarrow ((q \vee (p \vee r)) \vee p)$	Regla S A_4,A_6
A_8: $\vdash x \Rightarrow (x \vee y)$	$(HA)_2$
A_9: $\vdash p \Rightarrow (p \vee r)$	$(p\|x)_{A_8}, (r\|y)_{A_8}$
A_{10}: $\vdash (p \vee r) \Rightarrow (q \vee (p \vee r))$	$(p \vee r\ \|x)_{A_1}, (q\|y)_{A_1}$
A_{11}: $\vdash p \Rightarrow (q \vee (p \vee r))$	Regla S A_9,A_{10}
A_{12}: $\vdash ((q \vee (p \vee r)) \vee p) \Rightarrow ((q \vee (p \vee r)) \vee (q \vee (p \vee r)))$	Regla 4 A_{11}
A_{13}: $\vdash (p \vee (q \vee r)) \Rightarrow ((q \vee (p \vee r)) \vee (q \vee (p \vee r)))$	Regla S A_7, A_{12}
A_{14}: $\vdash (x \vee x) \Rightarrow x$	$(HA)_1$
A_{15}: $\vdash ((q \vee (p \vee r)) \vee (q \vee (p \vee r))) \Rightarrow (q \vee (p \vee r))$	$(q \vee (p \vee r)\|x)_{A_{14}}$
A_{16}: $\vdash (p \vee (q \vee r)) \Rightarrow (q \vee (p \vee r))$	Regla S A_{13},A_{15}

□

Teorema 7 $\vdash (p \vee (q \vee r)) \Rightarrow ((p \vee q) \vee r))$
Dem:

A_1: $\vdash (x \vee y) \Rightarrow (y \vee x)$	$(HA)_3$
A_2: $\vdash (q \vee r) \Rightarrow (r \vee q)$	$(q\|x)_{A_1}$, $(r\|y)_{A_1}$
A_3: $\vdash (p \vee (q \vee r)) \Rightarrow (p \vee (r \vee q))$	Regla 4 A_2
A_4: $\vdash (p \vee (q \vee r)) \Rightarrow (q \vee (p \vee r))$	por teorema 6
A_5: $\vdash (p \vee (r \vee q)) \Rightarrow (r \vee (p \vee q))$	$(q\|r)_{A_4}$, $(r\|q)_{A_4}$
A_6: $\vdash (p \vee (q \vee r)) \Rightarrow (r \vee (p \vee q))$	Regla S A_3, A_5
A_7: $\vdash (r \vee (p \vee q)) \Rightarrow (p \vee q) \vee r))$	$(r\|x)_{A_1}, (p \vee q\|y)_{A_1}$
A_8: $\vdash (p \vee (q \vee r)) \Rightarrow (p \vee q) \vee r))$	Regla S A_6,A_7

□

Teorema 8 $\vdash ((p \vee q) \vee r)) \Rightarrow (p \vee (q \vee r))$
Dem:

A_1: $\vdash (x \vee y) \Rightarrow (y \vee x)$	$(HA)_3$
A_2: $\vdash ((p \vee q) \vee r) \Rightarrow (r \vee (p \vee q))$	$(p \vee q \mid x)_{A_1}$, $(r \mid y)_{A_1}$
A_3: $\vdash (p \vee (q \vee r)) \Rightarrow (q \vee (p \vee r))$	*por teorema 6*
A_4: $\vdash (r \vee (p \vee q)) \Rightarrow (p \vee (r \vee q))$	$(r \mid p)_{A_3}$, $(p \mid q)_{A_3}$, $(q \mid r)_{A_3}$
A_5: $\vdash ((p \vee q) \vee r) \Rightarrow (p \vee (r \vee q))$	*Regla S* A_2, A_4
A_6: $\vdash (r \vee q) \Rightarrow (q \vee r)$	$(r \mid x)_{A_1}$, $qr \mid y)_{A_1}$
A_7: $\vdash (p \vee (r \vee q)) \Rightarrow (p \vee (q \vee r))$	*Regla 4* A_6
A_8: $\vdash ((p \vee q) \vee r) \Rightarrow (p \vee (q \vee r))$	*Regla S* A_5, A_7

□

Teorema 9 $\vdash p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q))$
<u>*Dem*</u>:

A_1: $\vdash \overline{x} \vee x$	*por teorema 3*
A_2: $\vdash (x \vee y) \Rightarrow (y \vee x)$	$(HA)_3$
A_3: $\vdash (\overline{x} \vee x) \Rightarrow (x \vee \overline{x})$	$(\overline{x} \mid x)_{A_2}, (x \mid y)_{A_2}$
A_4: $\vdash x \vee \overline{x}$	*MP* A_1, A_3
A_5: $\vdash (\overline{p} \vee \overline{q}) \vee \overline{\overline{p} \vee \overline{q}}$	$(\overline{p} \vee \overline{q} \mid x)_{A_4}$
A_6: $\vdash ((p \vee q) \vee r)) \Rightarrow (p \vee (q \vee r))$	*por teorema 8*
A_7: $\vdash ((\overline{p} \vee \overline{q}) \vee \overline{\overline{p} \vee \overline{q}})) \Rightarrow (\overline{p} \vee (\overline{q} \vee \overline{\overline{p} \vee \overline{q}}))$	$(\overline{p} \mid x)_{A_6}$, $(\overline{q} \mid q)_{A_6}, (\overline{\overline{p} \vee \overline{q}} \mid r)_{A_6}$
A_8: $\vdash \overline{p} \vee (\overline{q} \vee \overline{\overline{p} \vee \overline{q}})$	*MP* A_5, A_7
A_9: $\vdash p \Rightarrow (q \Rightarrow \overline{\overline{p} \vee \overline{q}})$	*por abreviatura* $\Rightarrow$ $a \Rightarrow b := \overline{a} \vee b$
A_{10}: $\vdash p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q))$	*por abreviatura* $\wedge$ $a \wedge b := \overline{\overline{a} \vee \overline{b}}$

□

Teorema 10 $\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$
<u>*Dem*</u>:

A_1: $\vdash x \Rightarrow \overline{\overline{x}}$	*por teorema 4*
A_2: $\vdash q \Rightarrow \overline{\overline{q}}$	$(q \mid x)_{A1}$
A_3: $\vdash (\overline{p} \vee q) \Rightarrow (\overline{p} \vee \overline{\overline{q}})$	*Regla 4* A_2
A_4: $\vdash (x \vee y) \Rightarrow (y \vee x)$	$(HA)_3$
A_5: $\vdash (\overline{p} \vee \overline{\overline{q}}) \Rightarrow (\overline{\overline{q}} \vee \overline{p})$	$(\overline{p} \mid x)_{A4}, (\overline{\overline{q}} \mid y)_{A4}$
A_6: $\vdash (\overline{p} \vee q) \Rightarrow (\overline{\overline{q}} \vee \overline{p})$	*Regla S* A_3, A_5
A_7: $\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$	*por abreviatura* $\Rightarrow$ $a \Rightarrow b := \overline{a} \vee b$

□

Teorema 11 $\vdash ((p \wedge q) \Rightarrow p)$
<u>*Dem*</u>:

A_1: $\vdash x \Rightarrow (x \vee y)$	$(HA)_2$
A_2: $\vdash \overline{p} \Rightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$	$(\overline{p}\vert x)_{A_1}$, $(\overline{q}\vert y)_{A_1}$
A_3: $\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$	*por teorema 10*
A_4: $\vdash (\overline{p} \Rightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})) \Rightarrow (\overline{\overline{p} \vee \overline{q}} \Rightarrow \overline{\overline{p}})$	$(\overline{p}\vert p)_{A3}$, $(\overline{p} \vee \overline{q}\vert q)_{A3}$
A_5: $\vdash (\overline{\overline{p} \vee \overline{q}} \Rightarrow \overline{\overline{p}})$	*MP* A_2, A_4
A_6: $\vdash \overline{\overline{x}} \Rightarrow x$	*por ejercicio*
A_7: $\vdash \overline{\overline{p}} \Rightarrow p$	$(p\vert x)_{A_6}$
A_8: $\vdash (\overline{\overline{p} \vee \overline{q}} \Rightarrow p)$	*Regla S* A_5, A_7
A_9: $\vdash ((p \wedge q) \Rightarrow p)$	*por abreviatura* $\wedge$ $a \wedge b := \overline{\overline{a} \vee \overline{b}}$
	$\square$

Ejercicio: Demuestre que $\vdash ((\overline{q} \Rightarrow \overline{p}) \Rightarrow (p \Rightarrow q))$

Ejercicio: Demuestre que $\vdash ((p \wedge q) \Rightarrow q)$

1.2 Teorema de la Deducción

Notación:
Sea $\Gamma = A_1, ..., A_n$ (A_i es fórmula para i=1,...,n).
$\Gamma \vdash B_n$: La fórmula B_n puede deducirse de la lista Γ.
Nota: Si $\Gamma = \emptyset \Rightarrow \vdash B_n$ (es decir, B_n es teorema).

Teorema 12 *Si $\vdash A \Rightarrow B$, entonces $A \vdash B$.*

Teorema 13 (Teorema de la Deducción)
1) Si $A \vdash B$, entonces $\vdash A \Rightarrow B$
2) Sea $m>1$. Si $\underbrace{A_1, ..., A_{m-1}}_{\Gamma}$, $A_m \vdash B$, entonces $\Gamma \vdash (A_m \Rightarrow B)$

Ejemplo:
$\Gamma = A_1, A_2. A_3, A_4, A_5$ y se tiene que $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 \vdash B$
$\Rightarrow \underbrace{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5}_{\Gamma} \vdash (A_6 \Rightarrow B)$
$\Rightarrow A_1, A_2, A_3, A_4 \vdash A_5 \Rightarrow (A_6 \Rightarrow B)$
$\Rightarrow A_1, A_2, A_3 \vdash A_4 \Rightarrow (A_5 \Rightarrow (A_6 \Rightarrow B))$
$\Rightarrow A_1, A_2 \vdash A_3 \Rightarrow (A_4 \Rightarrow (A_5 \Rightarrow (A_6 \Rightarrow B)))$
$\Rightarrow A_1 \vdash A_2 \Rightarrow (A_3 \Rightarrow (A_4 \Rightarrow (A_5 \Rightarrow (A_6 \Rightarrow B))))$
$\Rightarrow \vdash A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (A_3 \Rightarrow (A_4 \Rightarrow (A_5 \Rightarrow (A_6 \Rightarrow B)))))$

Nota: Con el teorema de la deducción es "sencillo" obtener: i) teoremas y ii) reglas de deducción.

Regla de Deducción:
1) Regla de expansión: De A se infiere A∨B.
2) Regla de contracción: De A∨A se infiere A.
3) Regla asociativa: De A∨(B∨C) se infiere (A∨B)∨C.
4) Regla de corte (cut rule): De A∨B y de $\overline{A}$∨C se infiere B∨C.
Dem:

A_1:	$\vdash$ A∨B	por hipótesis
A_2:	$\vdash \overline{A}$∨C	por hipótesis
A_3:	$\vdash x \Longrightarrow \overline{\overline{x}}$	por teorema 4
A_4:	$\vdash B \Longrightarrow \overline{\overline{B}}$	$(B\|x)_{A_3}$
A_5:	$\vdash A \vee B \Longrightarrow A \vee \overline{\overline{B}}$	regla 4 A_4
A_6:	$\vdash A \vee \overline{\overline{B}}$	MP A_1,A_5
A_7:	$\vdash \overline{\overline{B}} \vee A$	regla 3 A_4
A_8:	$\vdash \overline{B} \Longrightarrow A$	por abreviatura $\Longrightarrow a \Longrightarrow b := \overline{a} \vee b$
A_9:	$\vdash \overline{B} \Longrightarrow C$	Regla S A_8,A_2
A_{10}:	$\vdash \overline{\overline{B}} \vee C$	por abreviatura $\Longrightarrow a \Longrightarrow b := \overline{a} \vee b$
A_{11}:	$\vdash \overline{\overline{x}} \Longrightarrow x$	por ejercicio
A_{12}:	$\vdash \overline{\overline{B}} \Longrightarrow B$	$(B\|x)_{A_{11}}$
A_{13}:	$\vdash C \vee \overline{\overline{B}} \Longrightarrow C \vee B$	Regla 4 A_{12}
A_{14}:	$\vdash C \vee \overline{\overline{B}}$	Regla 3 A_{10}
A_{15}:	$\vdash C \vee B$	MP A_{14}, A_{13}
A_{16}:	$\vdash$ B∨C	Regla 3 A_{15}

□

Teorema 14 *Si* $\vdash A \vee B$ *entonces* $\vdash B \vee A$.
Dem:

$\vdash \overline{A} \vee A$ *por teorema anterior*
$\vdash A \vee B$ *por hipótesis*
$\vdash B \vee A$ *por Regla de corte*
□

Nota: Incluye a Gentzen no al intuicionista.

Teorema 15 (Detachment rule) *Si* $\vdash A$ *y* $\vdash A \Rightarrow B$, *entonces* $\vdash B$.
Dem:

$\vdash A$ *por hipótesis*
$\vdash A \vee B$ *por regla de expansión*
$\vdash A \Rightarrow B$ *por hipótesis*
$\vdash \overline{A} \vee B$ *por abreviatura*
$\vdash B \vee B$ *por regla de corte*
$\vdash B$ *por regla de contracción*
□

Nota: Incluye a Gentzen no al intuicionista.

Corolario 16 *Si* $\vdash A_1, \vdash A_2, \vdash A_3, ..., \vdash A_n$ *y* $\vdash A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (... \; A_n \Rightarrow B))$*, entonces* $\vdash B$.

Teorema 17 (Teorema de la deducción) *Se A una fórmula en una teoría T. Para cualquier fórmula B de T,* $\vdash A \Rightarrow B$ *ssi B es teorema en T[A] (T incluye a la fórmula A).*

Corolario 18 *Sea* $A_1, A_2, ..., A_n$ *fórmulas en T. Para cada fórmula B en T,* $\vdash_T A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (... \Rightarrow (A_n \Rightarrow B)))$ *ssi* $\vdash B$ *en* $T[A_1, A_2, ..., A_n]$.

1.3 Consistencia y completud

Definición 8 *Una teoría es contradictoria, si A y* $\overline{A}$ *son válidas.*
Nota: Un sistema se dice inconsistente si dos fórmulas, una de las cuales es la negación o contradicción de la otra, pueden ambas demostrarse como teorema dentro del sistema. Es decir, un sistema es consistente si no contiene fórmula alguna en que tanto la fórmula como su negación sean demostrables como teoremas, dentro del mismo.
Un método de demostración de la consistencia de un sistema deductivo formal es encontrar una intepretación del mismo en la que todos los axiomas y teoremas son proposiciones verdaderas.
Para demostrar la consistencia de un sistema es suficiente encontrar una interpretación en la que todos sus axiomas sean verdaderos.

Nota: De $\vdash$ A se deduce que A es tautología (consistencia o adecuada).

Definición 9 *Una teoría es completa si toda expresión tiene significado en el sistema.*
Nota: Todo tiene una interpretación en el sistema.
La noción de compleción (o completud) deductiva es muy importante. El término "compleción" se usa en varios sentidos. Un sistema deductivo es completo si toda las fórmulas deseadas se pueden demostrar dentro del mismo. Si se tiene un critero extrasistemático para la verdad de las proposiciones respecto a la materia para la que fue construido el sistema deductivo, entonces se puede llamar completo al sistema cuando todas sus fórmulas que se convierten en proposiciones verdaderas en la intepretacion que se propone son fórmulas demostrables o teoremas en el sistema.

Nota: De A es tautología se tiene $\vdash$ A (completud deductiva).

Definición 10 *Los axiomas de un sistema deductivo se dice que son independientes si ninguno de ellos puede deducirse como teorema de los otros.*
Nota: Para demostrar que algún axioma en particular es independiente, es suficiente encontrar una interpretación que haga falso al axioma en cuestión y verdadero los axiomas restantes. Una interpretación tal demostrará que el axioma en cuestión no es deducible, como teorema, de los restantes, porque si lo fuera seria verdadero en cualquier asignación de significados que hiciera verdaderos a los demás. Si para cada axioma es posible encontrar una interpretación tal, esto demostrará que el conjunto de axiomas es independientes.