Axiomática de la teoría de Conjuntos

October 31, 2019

1 Preliminares

Nota: Durante el siglo XIX se realizó un proceso de fundamentación de la Matemática, en el cual se fueron precisando los conceptos básicos. Fregue presentó lo que debería haber sido la culminación de este proceso: ***una teoría de axiomática de Conjuntos***: Un sistema de axiomas a partir de los cuales podían demostrarse los resultados básicos aceptados por los matemáticos y, a partir de ellos, los teoremas matemáticos.
Pero, Russel descubrió que la axiomática de Fregue era contadictoria. Como uno de los axiomas de Fregue afirmaba la existencia del conjunto Y = $\{X|\phi(X)\}$, Russel aplicó $\phi(X) \equiv X \notin X$. Entonces, debería existir un conjunto R=$\{X|X\notin X\}$, llevando a la contradicción $R\in R \iff R\notin R$.

Nota: La primera teoría axiomática construida por un matemático a gusto de los matemáticos fue la de Zermelo, evitando la paradoja de Russell por debilitar el axioma de formación de conjuntos de Fregue. Postulando la existencia de Y = $\{X\in U|\phi(X)\}$, donde U es un conjunto.Este axioma sólo permite definir conjuntos a partir de otros conjuntos, por lo que Zermelo tuvo que añadir otros axiomas para garantizar la existencia de los conjuntos necesarios que no podían obtenerse como subconjunto de otros conjuntos conocidos.

2 La lógica de la teoría de Conjuntos

Nota:La axiomática se construye sobre el **postulado** que existe una relación binaria fundamental llamada $\in$.

- La relación $\in$ no tiene definición.
- (El concepto de) Conjunto no tiene definición.

Nota: No es necesario que tengan una definición. Lo que se quiere es hablar con todo rigor lógico sin preocuparse del significado de los términos. Es decir, todo teorema matemático podrías formularse como:

Si se admite que los conjuntos (sea lo que sea), junto con la relación de pertenencia (sea lo que sea), cumplen unos axiomas dados, entences tal afirmación es cierta.
La Lógica Matemática permite que esas cuestiones no afecten a la fundamentación Matemática: se puede dar unos axiomas y deducir a partir de ellos con todo rigor.

Nota: El primer paso es indicar los símbolos del lenguaje Matemático. Una alternativa es considerar el lenguaje de la teoría de Conjuntos que consta de 12 símbolos: (,), $\neg$, $\Longrightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\Longleftrightarrow$, $\forall$, $\exists$, $|$, $=$, $\in$, más una lista potencial de símbolos llamados variables: x, y, z, α, β, x_1, x_2, ...

Nota: La distinción de término, fórmula y expresión está contenida en las reglas:

1. Toda variable es un término.
2. Si t_1 y t_2 son términos, entonces $(t_1 = t_2)$ y $(t_1 \in t_2)$ son fórmulas.
3. Si α y β son fórmulas, entonces $\neg\alpha$, $(\alpha \Longrightarrow \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \Longleftrightarrow \beta)$ son fórmulas.
4. Si α es una fórmula y X es una variable entonces $\forall X\alpha$ y $\exists X\alpha$ son fórmulas.
5. Si α es una fórmula y X es una variable, entonces $X|\alpha$ es un término.

Nota: Estas reglas permiten determinar sin ambigüedad si alguna cadena de símbolos es una expresión (un término o una fórmula) o si, por el contario es no expresiva.

Nota: El símbolo $\equiv$ indican que el miembro izquierdo es una abreviatura del miembro derecho (no una mera equivalencia lógica).

3 Axiomática

Nota: $A \subseteq B \equiv \forall X\ ((X \in A \Longrightarrow (X \in B)))$.

1 (Axioma de extensionalidad)
$\forall X\, \forall Y\ (\forall U\ (U \in X \Longleftrightarrow U \in Y) \Longrightarrow X = Y\ )$.
Nota: Dos conjuntos tiene los mismo elementos entonces son iguales. El recíproco es un caso particular de un principio lógico.

2 (Axioma del conjunto vacío)
$\exists X\ (\forall U\ (U \notin X))$.
Nota: Este axioma afirma la existencia de un conjunto que no tiene elementos, el cual es único.

$\emptyset \equiv X \mid (\forall U\ (U \notin X))$.

3 (Axioma del par)
$\forall X\, \forall Y\, \exists Z\, \forall U\ (U{\in}Z \iff U{=}X \vee U{=}Y)$.
Nota: Este axioma afirma que dados dos conjuntos X e Y , existe un tercer conjunto Z cuyos elementos son exactamente X e Y, el cuál es único.
$\{X,Y\} \equiv Z \mid \forall U\ (U{\in}Z \iff U{=}X \vee U{=}Y)$.
$\{X\} \equiv \{X,X\}$. *Es decir, todo conjunto pertenece a otro conjunto.*
También, se ve que existen infinitos conjuntos: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, *etc.*

4 (Axioma de la unión)
$\forall X\, \exists Y\, \forall U\ (U{\in}Y \iff \exists V\ (U{\in}V \wedge V{\in}X))$.
Nota: Este axioma afirma que, dado un conjunto X, existe un conjunto Y cuyos elementos son los elementos de los elementos de X, el cual es único.
$\bigcup_{V\in X} V \equiv Y \mid \forall U\ (U{\in}Y \iff \exists V\ (U{\in}V \wedge V{\in}X))$.

Teorema 1 $\forall X\, \forall Y\, \exists Z\, \forall U\ (U{\in}Z \iff U{\in}X \vee U{\in}Y)$.
Nota: $Z = \bigcup_{V\in\{X,Y\}} V$, *el cual es único.*
$X{\cup}Y \equiv Z \mid \forall U\ (U{\in}Z \iff U{\in}X \vee U{\in}Y)$.

5 (Axioma de partes)
$\forall X\, \exists Y\, \forall U\ (U{\in}Y \iff U{\subseteq}X)$.
Nota: El conjunto Y es único por el axioma de extensionalidad.
$P(X) \equiv Y \mid \forall U\ (U{\in}Y \iff U{\subseteq}X)$.

6 (Esquema axiomático de especificación)
Para cada fórmula $\phi(U)$ *del lenguaje de la teoría de conjuntos (tal vez con más variables libres, además de X), la fórmula siguiente es un axioma:*
$\forall X\, \exists Y\, \forall U\ (U{\in}Y \iff U \in X \wedge \phi(U))$.
Nota: La teoría de conjuntos de Zermelo tiene infinitos axiomas. Ello se debe a que éste es un esquema axiomático, es decir, una regla que determina infinitas fórmulas que la teoría acepta como axiomas.
Una vez más, X es único, luego, $\{U{\in}X \mid \phi(U)\} \equiv Y \mid \forall U\ (U{\in}Y \iff U \in X \wedge \phi(U))$.
La noción de "propiedad" queda completamente precisada al sustituirla por la "fórmula".

Nota: Por ejemplo, si se aplica el esquema de especificación a un conjunto X y la fórmula ϕ(U) $\equiv$ U$\in$Y, se obtiene la existencia del conjunto X$\cap$Y $\equiv$ $\{$U$\in$X $\mid$ U$\in$Y$\}$.

Si se aplica el esquema de especificación a un conjunto X y la fórmula ϕ(U) $\equiv$ U$\notin$Y, se obtiene la existencia del conjunto X$\backslash$Y $\equiv$ {U$\in$X | U$\notin$Y}.

Nota: (X,Y) $\equiv$ {{X},{X,Y}}.

Teorema 2 *$\forall A\ \forall B\ \exists C\ \forall U\ (U \in C \iff \exists X\in A\ \exists Y\in B\ U = (X,Y))$.*
Nota: C={U$\in$P(P(A$\cup$B)) | $\exists$X$\in$A $\exists$Y$\in$B U = (X,Y)}.
Como es único, A$\times$B $\equiv$ C | $\forall$U (U$\in$C $\iff$ $\exists$X$\in$A $\exists$Y$\in$B U = (X,Y)).
Permitiendo, para cada fórmula ϕ(X, Y), el término {(X,Y)$\in$A$\times$B | ϕ(X,Y)} $\equiv$ {U$\in$A$\times$B | $\exists$X$\in$A $\exists$Y$\in$B (U = (X,Y) $\wedge$ ϕ(X,Y))}. A partir de aquí se puede definir y demostrar los conceptos y teoremas relacionados con relaciones y funciones.

Nota: X'=X$\cup${X}.

7 (Axioma de infinitud)
$\exists Y\ (\emptyset\in Y \wedge \forall X\ X\in Y \Longrightarrow X'\in Y)$.
Nota:
0$\equiv$ $\emptyset$.
1$\equiv$ 0' $\equiv$ $\emptyset\cup\{\emptyset\}$={0}.
2$\equiv$ 1' $\equiv$ 1$\cup${1}={0,1}.
3$\equiv$ 2' $\equiv$ 2$\cup${2}={0,1,2}.
Nótese que Y es un conjunto infinito.
Y inductivo $\equiv$ $\emptyset\in Y \wedge \forall X\ X\in Y \Longrightarrow X'\in Y$.
El axioma de infinitud afirma que existe un conjunto inductivo Y. Se puede construir el conjunto N={U$\in$ Y|$\forall$Z$\subseteq$ Y(Z inductivo$\Longrightarrow$U$\in$Z)}, es decir, N es el conjunto de los elementos Y que pertenecen a todos los subconjuntos inductivos de Y.

Teorema 3 *$\exists$N (N inductivo $\wedge$ $\forall$Y (Y inductivo $\Longrightarrow$ N$\subseteq$Y)).*

Nota: Como N es único, entonces $\mathbb{N}$ $\equiv$N| (N inductivo $\wedge$ $\forall$Y (Y inductivo $\Longrightarrow$ N$\subseteq$Y)). Es decir, el conjunto de naturales es el menor conjunto inductivo.

Teorema 4 (Axiomas de Peano)

1. *$0\in\mathbb{N}$.*
2. *$\forall n\in\mathbb{N}\ n'\in\mathbb{N}$.*
3. *$\neg\exists n\in\mathbb{N}\ 0=n'$.*
4. *$\forall m\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\ (m'=n' \Longrightarrow m=n)$.*
5. *$\forall X\subseteq\mathbb{N}\ ((0\in X \wedge \forall m\ (m\in X \Longrightarrow m'\in X))\Longrightarrow X=\mathbb{N})$.*

4 Inclusión de axiomas sobre la teoría de Zermelo

Nota: La teoría de Zermelo presenta inconvenientes para trabajar con resultados más profundos de la teoría de conjuntos: ordinales y cardinales infinitos. Fraenkel arregló el problema añadiendo el *esquema axiomático del reemplazo.*
Para toda fórmula ϕ(X,Y), tal vez con más variables libres, la fórmula siguiente es un axioma:

8 (Esquema axiomático del reemplazo)
$\forall A\ (\forall X{\in}A\ \forall Y \forall Z\ (\phi(X,Y) \wedge \phi(X,Z) \Longrightarrow Y{=}Z) \Longrightarrow \exists B\ \forall Y\ (Y{\in}B \iff \exists X{\in}A\ \phi(X,Y)).$
Nota: Este esquema afirma que si la fórmula $\phi(X,Y)$ define una función sobre un subconjunto de A, es decir, si a cada X∈A se le puede asociar a lo más un conjunto Y que cumpla $\phi(X,Y)$, entonces existe un conjunto B que contiene a todos los conjuntos de Y que se puede asignar a los elementos de A.
A partir del esquema del reemplazo se puede demostrar el esquema de especificación, por lo que la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF) es la que resulta de susituir la especificación por el reemplazo.

9 (Axioma de reguralidad de von Newman)
$\forall X\ \exists Y\ (Y{\in}X \wedge\ Y{\cap}X{=}\emptyset).$
Nota: Este axioma prohibe la existencia de $X{=}\{X\}$ o ($X{=}\{Y\}$ y $Y{=}\{X\}$). Garantiza que todo conjunto puede construirse a partir del conjunto vacío en una cantidad finita o infinita de pasos.

10 (Axioma de elección)
$$\forall X\ \exists F\ (F\colon X \longrightarrow \bigcup_{V\in X} V \wedge \forall U{\in}X(U{\neq}\emptyset {\Longrightarrow} F(U){\in}U)).$$
Nota: Este axioma afirma que para toda familia X de conjuntos existe una "función de elección" F que asigna a cada uno de ellos U uno de sus elementos (siempre que U≠∅). Además, este axioma es crucial para la demostración de resultados importantes: la existencia de bases en espacios vectoriales, la existencia de clausura algebraica, el teorema de Tychonoff sobre compacidad de un producto de espacios topológicos, el teorema de Hann-Banach sobre extensión de funcional lineales, etc.

Nota: La axiomática de Zermelo (o de Zermelo-Fraenkel) evita la paradojas de la teoría de conjuntos negando la existencia de las clases que las provocan.

Teorema 5 $\neg\exists R \forall X\ (X{\in}R \iff X{\notin}X).$
Nota: La diferencia con la teoría de Frege es que ésta postulaba la existencia de R, mientras los axiomas de ZF lo evitan.

Teorema 6 $\neg\exists V\, \forall X\; X\in V$.
Nota: No existe ningún conjunto que contenga a todos los conjuntos.

5 Bibliografía

- Ivorra, C. La axiomática de la teoría de conjuntos (https://www.uv.es/=ivorra/Libros/Axiomas.pdf)