Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2035 - Álgebra Moderna - Catedrático: Ricardo Barrientos
1 de diciembre de 2022

Tarea 25

Problemas 1, 2, 3, 4, 5 y 6, sección 5.7.

Problema 1 (Problema 1). *If $p(x)$ is solvable by radicals over F, prove that we can find a sequence of fields*

$$F \subset F_1 = F(\omega_1) \subset F_2 = F_1(\omega_2) \subset \cdots \subset F_k = F_{k-1}(\omega_k),$$

where $\omega_1^{r_1} \in F, \omega_2^{r_2} \in F_1, \ldots, \omega_k^{r_k} \in F_{k-1}, F_k$ containing all the roots of $p(x)$, such that F_k is normal over F.

Demostración. Esta deducción viene de un lema demostrado en clase, sea $f(x)$ soluble por radicales sobre $F \implies$ existe una cadena de campos $F = L_0 \subseteq \cdots \subseteq L_s \ni L_i = L_{i-1}(\alpha_i)$ y $\alpha_i^{t_i} \in L_{i-1}, t_1 \in \mathbb{Z}^+ \implies [L_1 : L_{i-1}] \in \mathbb{Z}^+ \implies$ por el teorema 5A, $[L_i = L_{i-1}(\alpha_i) : F] \in \mathbb{Z}^+ \implies$ por el teorema 3B/C/G, α_i es algebraico sobre $F \implies \exists f_(x) \in F[x]$, mónico, de grado mínimo e irreducible sobre $F \ni f_i(\alpha_i) = 0 \implies$ por el corolario 1 al lema 5.6, todas las raíces $f_i(x)$ son de multiplicidad 1 $\implies$ todas las raíces $f_i(x)$ son distintas. Entonces, sea $f(x) = \prod_{i=1}^{s} f_i(x) \in F[x]$, mónica. Sea K el campo de descomposición de $f(x)$ sobre $F \implies$ por el teorema 5PK es una extensión normal de F y $\alpha_1, \cdots, \alpha_s \in K \implies L_i = F(\alpha_1) \subseteq K \implies L_2 = L_1(\alpha_2) \subseteq K \implies L_s = L_{s-1}(\alpha_s) \subseteq K$. Para asegurar la existencia de la cadena repetida de campos, procédase por inducción sobre S:

- Si $s = 0 \implies F = L_0 = K$, cumple lo requerido.
- Supóngase el teorema válido para todos los enteros menores a s.
- Si $\delta_1, \cdots, \delta_m$ son todas las raíces de $f_1(x), \cdots, f_{s_4}(x)$ y $E = F(\delta_1, \cdots, \delta_n) \implies \alpha_1, \cdots, \alpha_s \in E \implies L_i = F(\alpha_i) \subseteq E \implies L_2 = L_1(\alpha_2) \subseteq E \implies \cdots \implies L_{s-1} = L_{s-2}(\alpha_{s-1}) \subseteq E$. De esto, $E = F(\delta_1, \cdots, \delta_m)$ es el campo de descomposición de $\prod_{i=1}^{s-1} f_i(x)$ sobre $F \implies$ por la hipótesis de inducción, existe una cadena de campo la requerida para E y F. Sean $\gamma_1, \cdots, \gamma_{gr(f_s)}$ las raíces de $f_s(x)$ y supóngase sin perdida de generalidad que $\alpha_s = \gamma$. Nótese que $K = F(\delta_1, \cdots, \delta_m, \gamma_1, \cdots, \gamma_{gr(f_s)}) =$

$F(\delta_1, \cdots, \delta_m)(\gamma_1, \cdots, \gamma_{gr(fs)}) = E(\gamma_1, \cdots, \gamma_{gr(f_s)})$, por el teorema 5P, una extensión normal de $F \implies$ por el lema 5.9,$\exists \sigma_i \in G(K,F) \ni \sigma_i(\alpha_s) = \sigma_(\gamma_i) = \gamma_i \implies \sigma_i(\alpha_s^{t_s}) = \sigma_i(\alpha_s)^{t_s} = \gamma_i^{t_s}$. Pero, $\alpha_s^{t_s} \in L_{s-1} \subseteq E$, una extensión normal de $F \implies E \subseteq K \implies$ por (i) del Teorema Fundamental de la Teoría de Galois (5Q) $K_{G(K,E)} = E \implies \gamma_{t_s} = \sigma_i(\gamma_s^{t_s}) = \gamma_s^{t_s} \in E \implies$ la cadena de campos que se obtiene (por hipótesis inductiva) con la cadena $E = E_0 \subseteq E_1 = E(\gamma_1) \subseteq E_2 = E_1(\gamma_2) \subseteq \cdots \subseteq E_{gr(f_s)} = E_{gr(f_s)-1}(\gamma_{gr(f_s)}) = K$, con $\gamma_i^{t_s} \in E \subseteq E_{i-1}$

■

Problema 2 (Problema 2)**.** *Prove that a subgroup of a solvable group is solvable.*

Demostración. Sea G un grupo soluble y sea H un subgrupo de G ($H \subseteq G$), por **lema 3.10** $\exists k \in \mathbb{N} \ni G^{(k)} = (e)$. A probar: $\exists k \in \mathbb{N} \ni H^{(k)} = (e)$.

Usando la deducción del lema 3.10: Si $G^{(k)} = (e)$, sean $N_0 = G, N_1 = G', \cdots, N_i = G^i, \cdots, N_k = G^{(k)} = (e) \implies G = N_0 \supseteq G' \supseteq \cdots \supseteq G^{(i)} \supseteq \cdots \supseteq G^{(k)} = (e), G^{(i)}$ es un subgrupo normal de $G^{(i-1)}$ y

$$\frac{N_{i-1}}{N_i} = \frac{G^{i-1}}{G^{(i)}}$$

es abeliano. Ahora bien, como $H \subseteq G$, supóngase que H es normal, entonces las intersecciones $H \cap N_i$ y $H \cap N_{i-1}$ también son normales, se vuelve a aplicar el mismo argumento:

$$\frac{H \cap N_{i-1}}{H \cap N_i} = \frac{H \cap G^{i-1}}{H \cap G^{(i)}}$$

es abeliano. Por lo tanto $\exists k \in \mathbb{N} \ni H^{(k)} = (e)$, probando que un subgrupo de un grupo soluble es soluble.

■

Problema 3 (Problema 3)**.** *Prove that S_4 is a solvable group.*

Demostración. Para demostrar que S_4 es un grupo soluble, usaremos el algoritmo desarrollado en el lema 3.10. Para esto, considérese todos los subgrupos de orden n de S_4, subclasificados por su clase de conjugación:

1	$\{e\}$
2	$\{e,(12)\}$, $\{e,(13)\}$, $\{e,(14)\}$, $\{e,(23)\}$, $\{e,(24)\}$, $\{e,(34)\}$
	$\{e,(12)(34)\}$, $\{e,(13)(24)\}$, $\{e,(14)(23)\}$
3	$\{e,(123),(132)\}$, $\{e,(124),(142)\}$, $\{e,(134),(143)\}$, $\{e,(234),(243)\}$
4	$\{e,(12),(34),(12)(34)\}$, $\{e,(13),(24),(13)(24)\}$, $\{e,(14),(23),(14)(23)\}$
	$\{e,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$
	$\{e,(1324),(12)(34),(1423)\}$, $\{e,(1234),(13)(24),(1432)\}$, $\{e,(1243),(14)(23),(1342)\}$
6	$\{e,(123),(132),(12),(13),(23)\}$, $\{e,(124),(142),(12),(14),(24)\}$, $\{e,(134),(143),(13),(14),(34)\}$, $\{e,(234),(243),(23),(24),(34)\}$
8	$\{e,(12),(34),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(1324),(1423)\}$, $\{e,(13),(24),(13)(24),(12)(34),(14)(23),(1234),(1432)\}$, $\{e,(14),(23),(14)(23),(12)(34),(13)(24),(1243),(1342)\}$
12	$\{e,(12)(34),(13)(24),(14)(23),(123),(132),(124),(142),(134),(143),$ $(234),(243)\}$
24	S_4

En donde, determinaremos los subgrupos normales, los cuales se definen como: un subgrupo es normal si es igual a todos los subgrupos conjugados (es decir, tiene un único elemento en su clase de conjungación). Considerando la tabla, se tiene la identidad, uno de las clases de conjugaciones de A_4, la única clase de A_{12} y S_4. Por la forma en el algoritmo está planteado en el lema 3.10, tomaremos al subgrupo normal definido por la clase de conjugación $\{e,(12),(34),(13)(24),(14)(23)\}$. Entonces, sea

$$(e) \subseteq \{e,(12),(34),(13)(24),(14)(23)\} \subseteq A_4 \subseteq S_4,$$

Nótese que todas los conjuntos son normales, lo que nos permite concluir que

$$\frac{A_4}{\{e,(12),(34),(13)(24),(14)(23)\}} \text{ y } \frac{S_4}{A_4}$$

son abelianos. Por la definición de soluble, S_4 es un grupo soluble.

■

Problema 4 (Problema 4)**.** *If G is a group, prove that all $G^{(k)}$ are normal subgroups of G.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre k.

- Paso base, si $k = 1$, entonces:

  $$G^{(1)} = \{x, y \in G | xyx^{-1}y^{-1}\},$$

  el cual es un subgrupo normal de G.

- Hipótesis inductiva, supóngase que todos los $G^{(i-1)}$ son subgrupos normales de G.

- Paso inductivo, debemos probar que todos los $G^{(i)}$ son subgrupos normales en G, sean $x, y \in G^{(i-1)}$ y $g \in G$. Por la hipótesis, $g(xyxy^{-1})g^{-1} \in G^{i-1}$, tal que por una de las caracterizaciones de los subgrupos normales:

  $$\begin{aligned} g(xyxy^{-1})g^{-1} &= gxyxy^{-1}g^{-1} \\ &= gx(gg^{-1})y(gg^{-1})x^{-1}(gg^{-1})y^{-1}g^{-1} \\ &= gx(g^{-1}g)y(g^{-1}g)x^{-1}(g^{-1}g)y^{-1}g^{-1} \\ &= g(x)g^{-1}g(y)g^{-1}g(x^{-1})g^{-1}g(y^{-1})g^{-1} \in G^i \end{aligned}$$

  Entonces, todos los $G^{(i)}$ son subgrupos normales de G.

■

Problema 5 (Problema 5)**.** *If N is a normal subgroup of G prove that N' must also be a normal subgroup of G.*

Demostración. Sea N un subgrupo normal de G, además sea $N' = \{a, b \in N | aba^{-1}b^{-1}\}$, además sea $\forall z \in N, \forall x \in G \ni zxz^{-1} \in N$. Sea entonces $x, y \in N \implies xyx^{-1}y^{-1} \in N' \implies \forall g \in G$,

$$\begin{aligned} g(xyxy^{-1})g^{-1} &= gxyxy^{-1}g^{-1} \\ &= gx(g^{-1}g)y(g^{-1}g)x^{-1}(g^{-1}g)y^{-1}g^{-1} \\ &= g(x)g^{-1}g(y)g^{-1}g(x^{-1})g^{-1}g(y^{-1})g^{-1} \\ &= (g(x)g^{-1})(g(y)g^{-1})(g(x^{-1})g^{-1})(g(y^{-1})g^{-1}) \in N \end{aligned}$$

Entonces N' es un subgrupo normal de G ■