Universidad del Valle de Guatemala

MM2034 - 2 semestre - 2022

Licenciatura en matemática aplicada

Análisis de Variable Compleja

Catedrático: Dorval Carías

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay
Carné: 19857
Correo: rom19857@uvg.edu.gt

17 de noviembre de 2022

Índice

1. Números complejos

Clase: 06/07/2022

Notas:

- $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ donde:

  - $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ni (a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$.

  - $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ni (a, b) * (c, d) = (ac.db, ad + bc)$.

  $\implies$ es un campo.

- $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

- $\mathbb{C}$ no es totalmente ordenado. Supóngase por el absurdo, que $\mathbb{C}$ tiene orden total. Considere: $i \geq \vee i \leq 0$:

  - Si $i \geq 0 \implies i^2 \geq 0 \implies -i \geq 0 (\rightarrow\leftarrow)$

  - Si $i \leq 0 \implies -i \geq 0 \implies (-i)^2 \geq 0 \implies -1 \geq 0 (\rightarrow\leftarrow)$

  - ¿Puede ordenarse $\mathbb{C}$? Orden lexicográfico y de diccionario.

- Representación polar. Sea $z = a + bi \in \mathbb{C} \implies r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\theta = \tan^{-1}(b/a) \mod (2\pi)$. $\implies z = a + bi = r\cos\theta + i\sin\theta = r[\cos\theta + i\sin\theta] = re^{i\theta}$.

- Supongamos la identidad de Euler, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ y $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$. $\implies \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ y $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

- Exponencial compleja.

  Definición 1. *Si $z = x + yi\mathbb{C}$, entonces:*

  $$\exp(z) = e^z := e^x(\cos y + i \sin y) = (2{,}71...)^x(\cos y + i \sin y)$$

- Propiedades.

  Proposición 1. $e^x e^w = e^{x+w}, \forall z, w \in \mathbb{C}$

Proposición 2. *e^z es periódica.*

Demostración. Supóngase que $e^{z+w} = e^z, \forall x \in \mathbb{C}. \implies e^w = e^0 \implies e^w = 1$. Sea $w = s + ti \implies e^{s+ti} = 1 \implies e^s e^{ti} = 1$. Si $s = 0 \implies e^{ti} = 1 \implies \cos t + i \sin t = 1 \implies \cos t = 1$ y $\sin t = 0. \implies t = 2\pi k$, para $k \in \mathbb{Z}. \implies w = 2\pi ki$, para $k \in \mathbb{Z}. \implies e^z$ es periódica con período $2\pi k, k \in \mathbb{Z}^+$. ∎

Clase: 12/07/2022

Proposición 3. $\forall z, w \in \mathbb{C}, |z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \arg(z * w) = \arg z + \arg w \pmod{2\pi}$

Demostración. Sean $x = r_1[\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1], w = r_2[\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2] \implies zw = r_1 r_2[\cos t_1 + i \sin\theta_1] * [\cos\theta_2 + i \sin\theta_2] = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \implies |x * w| = r_1 r_2 = |z||w| \implies \arg(z * w) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z + \arg w \pmod{2\pi}$ ∎

Proposición 4 (De Moivre)**.** *Sea $z = r[\cos\theta i \sin\theta]$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces:*

$$z^n = r^n \left[\cos n\theta + i \sin n\theta\right]$$

Demostración. Por inducción sobre n

1. $n = 1$: $z = r\left[\cos\theta + i \sin\theta\right]$
2. Suponemos que $z^k = r^k[\cos k\theta + i \sin k\theta]$
3. $z^{k+1} = z \cdot z^k = r[\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta] \cdot r^k[\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta] = r^{k+1}[\cos(k+1)\theta + i \sin(k+1)\theta]$

∎

Problema 1. *Dado $w \in \mathbb{C}$, encuentre $z \in \mathbb{C} \ni z^n = w, n \in \mathbb{Z}^+, n > 1$*

Solución. Sean: $w = r[\cos\theta + i\sin\theta], z = \rho[\cos\phi + i\sin\phi] \implies z^n = w \iff \rho^n[\cos n\phi + i\sin n\phi] = r[\cos\theta + i\sin\theta] \implies \rho^n = r \implies \rho = r^{1/n}$ y $n\phi = \theta + 2\pi k \implies \phi = \theta/n + 2\pi k/n, \quad k = 0, 1, \cdot, n-1.$

$$\implies z_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\theta/n + 2\pi k/n\right) + i\sin\left(\theta/n + 2\pi k/n\right)\right], k = 0, 1, \cdots, n-1$$

□

Ejemplo 1. *Encuentre las raíces cúbicas de 1+i:*

Solución. A resolver: $z^3 = 1 + i. \implies 1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\pi/4 + i\sin\pi/4\right]$

$$\implies z_k = (\sqrt{2})^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\pi/4 + 2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/4 + 2\pi k}{3}\right)\right], k = 0, 1, 2$$

□

Proposición 5. *Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces:*

1. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
3. $\overline{(z/w)} = \bar{z}/\bar{w}, w \neq 0$
4. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. *Además, si* $z \neq 0 \implies z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$
5. $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$
6. *Re* $Z = (z + \bar{z})/2$; *Im* $z = (z - \bar{z})/zi$
7. $\bar{\bar{z}} = z$

Demostración. 1. Sean $z = a + bi, w = c + di \implies \overline{z + w} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w}$.

2. Sea $\overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = \overline{(ac - bd) + i(ad + bc)} = (ac - bd) - i(ad + bc)$ y se desarrolla el otro lado.

3. Sea $\bar{z} = \overline{\frac{z \cdot w}{w}} = \overline{(z/w) \cdot w} = \overline{(z/w)} \cdot \bar{w} = \bar{z}/\bar{w} = \overline{(z/w)}$

4. Sea $z = a + bi \implies z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$. Entonces $z \cdot z^{-1} = 1 \implies \bar{z}(z \cdot z^{-1}) = \bar{z} \implies (\bar{z}z)z^{-1} = \bar{z} \implies z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$

■

Proposición 6. *Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces:*

1. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
2. *Si* $w \neq 0 \implies |z/w| = |z|/|w|$
3. $|\operatorname{Re} z| \leq |z|; |\operatorname{Im} z| \leq |z|$
4. $|z| = |\bar{z}|$
5. $|z + w| \leq |z| + |w|$
6. $|z - w| \geq ||z| - |w||$

Demostración. 1. OK

2. $|z| = |(z/w) \cdot w| = |(z/w)||w| \implies |z|/|w| = |z/w|$
3. Sea $z = a + bi \implies b^2 \geq 0 \implies a^2 + b^2 \geq a^2 \implies \sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{a^2} \implies |z| \geq |\operatorname{Re} z|$
4. Si $z = a + bi \implies |\bar{z}| = |a - bi| = |a + (-b)i| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |z|$
5. $|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$
6. $|z| = |(z-w)+w| \leq |z-w| + |w| \implies |z| - |w| \leq |z-w|$ y $|w| = |(w-z)+z| \leq |w-z| + |z| = |z-w| + |z|$. Tenemos $-|z| + |w| \leq |z-w|$ y $-(|z| - |w|) \leq |z-w|$. Por lo tanto, $||z| - |w|| \leq |z-w|$.

■

Ejemplo 2. *Si w es n-ésima raíz de la unidad, $w \neq 1$, entonces*

$$1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0$$

Solución. $w^n = 1 \implies w^n - 1 = 0 \implies (w-1)(1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1}) = 0$.
Como $w \neq 1 \implies 1 + w + w^2 + \cdot + w^{n-1} = 0$. $\square$

Ejemplo 3. *1.* $\arg \bar{z} = -\arg z (\mod 2\pi)$

2. $\arg(z/w) = \arg z - \arg w, w \neq 0 (\mod 2\pi)$

Solución. 1. $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \implies \arg(z \cdot \bar{z}) = \arg |z|^2 = 0 \implies \arg(z) + \arg(\bar{z}) = 0 \quad (\mod 2\pi)$

2. $\arg z = \arg(\frac{z}{w} \cdot w) = \arg(z/w) + \arg(w), \qquad \mod 2\pi$

$\square$

Clase: 14/07/2022

Ejemplo 4. *1. Encuentre las raíces cuadradas de* $-15 - 8i$

Solución. Solución 1: $z^2 = -15 - 8i = 17[\cos \underbrace{\theta}_{\theta+2\pi k} + i \sin \underbrace{\theta}_{\theta+2\pi k}]$, donde $\cos\theta = -15/17$, $\sin\theta = -8/17$. $\implies z_k = (17^{1/2})\left[\cos\frac{\theta+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{2}\right]$, $k = 0, 1$.

$(-15 - 8i) = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$

De esto tiene:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt{17}\,[\cos\theta/2 + i\sin\theta/2] \\
&= \sqrt{17}\left[-\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}}i\right] = -1 + 4i \\
z_1 &= \sqrt{17}\,[\cos(\theta/2 + \pi) + i\sin(\theta/2 + \pi)] = -\sqrt{17}\,[\cos\theta/2 + i\sin\theta/2] \\
&= -\sqrt{17}\left[-\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}}i\right] = 1 - 4i
\end{aligned}$$

Tenemos:

$$\cos\theta/2 = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{15}{17}}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$$

(signo + no se toma en cuenta)

$$\sin\theta/2 = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 + \frac{15}{17}}{2}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

(signo - no se toma en cuenta)

□

Solución. [Segunda solución] Sean $a + bi$ las raíces cuadradas. $\implies (a + bi)^2 = -15 - 8i \implies (a^2 - b^2) + 2abi = -15 - 8i \implies a^2 - b^2 = -15$ y $2ab = -8 \implies ab = -4 \implies b = -4/a$. Entonces, reemplazamos: $\implies a^2 - (-4/a)^2 = -15 \implies \frac{a^4 - 16}{a^2} = -15 \implies a^4 + 15a^2 - 16 = 0 \implies (a^2 + 16)(a^2 - 1) = 0$. Por lo tanto, $a^2 = -16$ o $a^2 = 1$, $a = \pm 4i$ o $a = \pm 1$. (Se excluye la parte imaginaria, ya que queremos un real).

Si $a = 1 \implies b = -4$ y $a = -1 \implies b = 4$. Entonces las raíces cuadradas son $1 - 4i$ y $-1 + 4i$. □

Ejemplo 5. *Resuelva la ecuación:*

$$z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$$

Solución. Tenemos:

$$\begin{aligned} z &= frac{-}(2i-3) \pm \sqrt{(2i-3)^2 - 4(5-i)}2 \\ &= \frac{3 - 2i \pm \sqrt{-4 - 12i + 9 - 20 + 4i}}{2} \\ &= \frac{3 - 2i \pm \sqrt{-15 - 8i}}{2} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 6. *Demuestre que los ceros de un polinomio con coeficientes reales ocurre en pares conjugados.*

Demostración. Supóngase que $a + bi$ es raíz de:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

nótese que $a_0 \neq, a_1, \cdots, a_n, a, b \in \mathbb{R}$. A probar: $a - bi$ es raíz. Sea $a + bi = re^{i\theta}$. Entonces:

$$a_0 r^n e^{in\theta} + a_1 r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} + \cdots + a_n = 0$$

Tomando conjugado: $\implies a_0 r^n e^{-in\theta} + a_0 r^{n-1} e^{-i(n-1)\theta} + \cdots + a_n = 0 \implies re^{i\theta} = \overline{a + bi} = a - bi$ es raíz del polinomio. ■

Ejemplo 7. *Pruebe que la suma y producto de todas las raíces de*

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0, a_0 \neq 0,$$

son $-a_1/a$ y $(-1)^n a_n/a_0$, respectivamente.

Demostración. Sea $z_1, z_2, \cdots, z_n$ las raíces del polinomio. $\Longrightarrow$ $a_0(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) = 0.$ $\Longrightarrow$ $a_0\,[z^n]$. Entonces $a_0\,[z^n - (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)z^{n-1} + \cdots + (-1)^n z_1 \cdots z_n] = 0$. Por comparación $a_0(z_1 + \cdots + z_n) = 1$ y $(-1)^n a_0 z_1 \cdots z_n = a_n$ ■

Ejemplo 8. *Compruebe que, si* $z_1 = r_1\,[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1]$ *y* $z_2 = r_2\,[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$, *entonces:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Demostración. Sea

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1]}{r_1[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]} * \frac{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} = \cdots$$

■

Ejemplo 9. *Calcule* $(1 + i)^{100}$.

Solución. Sea

$$\begin{aligned}(1+i)^{100} &= \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{1000} \\ &= 2^{500}\,[\cos 250\pi + i\sin 250\pi] \\ &= 2^{500}\end{aligned}$$

□

Ejemplo 10. *Encuentre el número pares ordenados* $(a, b), a, b \in \mathbb{R} \ni (a+bi)^{2002} = a - bi$.

Solución. Sea $z = a + bi \Longrightarrow z^{2002} = \overline{z} \Longrightarrow |z^{2000}| = |\overline{z}| \Longrightarrow |z|^{2000} - |z| = 0 \Longrightarrow |z|\,[|z|^{2001} - 1] = 0 \Longrightarrow |z| = 0$ o $|z| = 1$.

1. Si $|z| = 0 \Longrightarrow z = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ es solución.
2. Si $|z| = 1 \Longrightarrow z^{2002} = \overline{z} \Longrightarrow z^{2003} = z \cdot \overline{z} = |z| \Longrightarrow z^{2003} = 1$. Entonces, en este caso, se tiene 2003 pares ordenados. $\Longrightarrow$ Tenemos 2004 pares ordenados.

$\square$

Ejemplo 11 (**). *Dos polígonos regulares están inscritos en el mismo circulo. El primer polígono tiene 1982 lados y el segundo 2973 lados. ¿Cuántos vértices comunes tienes los polígonos?*

Solución. $\square$

Clase: 19/07/2022

Proposición 7. *Si* $n|q| \implies$ *cada raíz de* $z^n - 1 = 0$ *es raíz de* $z^9 - 1 = 0$.

Demostración. Como $n|q \implies \exists p \in \mathbb{Z}^+ \ni q = np$. Entonces: $z^q - 1 = z^{np} - 1 = (z^n)^p - 1 = (z^n - 1)(1 + z^n + (z^n)^2 + \cdots + (z^n)^{p-1}) = 0$. ■

Teorema 1. *Las raíces comunes de* $z^m - 1 = 0$ *y* $z^n - 1 = 0$ *son las raíces de* $z^d - 1 = 0$, *donde* $d = \mathrm{MCD}(m, n)$.

Demostración. Sea

- [$\Longleftarrow$] Como d/n y $d|m$. Por la propiedad anterior, las raíces de $z^d - 1 = 0$ son las raíces de $z^n - 1 = 0$ y de $z^m - 1 = 0$.

- [$\Longrightarrow$] Sea w una raíz de $z^n - 1 = 0$ y de $z^m - 1 = 0 \implies w^n = 1$ y $w^m = 1$. Sean $x, y \in \mathbb{R} \ni d = mx + ny$ (por Bezout). Nótese que: $w^{ny} = 1$ y $w^{mx} = 1 \implies w^{ny+mx} = 1 \implies w^d = 1 \implies w$ es raíz de $z^d - 1 = 0$.

■

Presentar la última sección del libro Conway. Francotirador en la esfera que le dispara al polo norte. Mecanismo de compactificación de la esfera de Riemann.

1.1. Función analítica.

Definición 2. *Sea $f : A \to \mathbb{C}$, donde A es un abierto de $\mathbb{C}$. La función f es diferenciable (en el sentido de los complejos) en $z_0 \in A$, si existe*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} := f'(z_0)$$

NOTA. *1. La función f es analítica sobre A, si es complejo diferenciable en cada $z \in A$.*

2. Algunas presentaciones utilizan holomorfa como sinónimo de analítica.

3. La frase ***analítica en*** *z_0 significa que f es analítica en una vecindad de z_0.*

Teorema 2. *Si $f'(z_0)$ existe $\implies$ f es continua en z_0.*

Demostración. A probar:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \iff \lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] = 0$$

Sea

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \\
&= f'(z_0) \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

■

Proposición 8. *Suponga que f y g son funciona analíticas sobre A, donde A es un abierto de $\mathbb{C}$. Entonces,*

1. $af + bg$ es analítica sobre A, y

$$(af + bg)' = af' + bg',$$

$a, b \in \mathbb{C}$.

2. $f \cdot g$ es analítica sobre A y

$$(fg)' = f'g + fg'$$

3. Si $g(z) \neq 0, \forall z \in A, f/g$ es analítica sobre A y:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

*4. Cualquier polinomio es una función **analítica sobre todo** $\mathbb{C}$ (una función entera).*

Teorema 3 (Regla de la cadena)**.** *Sean $f : A \to \mathbb{C}$ y $g : B \to \mathbb{C}$ analíticas sobre los abiertos A y B de $\mathbb{C}$, respectivamente; y sea $f(A) \subset B$. Entonces, la composición de funciones $g \circ f : A \to \mathbb{C} \ni (g \circ f)(z) = g(f(z))$ es analítica sobre A, y se cumple:*

$$[(g \circ f)(z)]' = [g(f(z))]' = g'(f(z)) \cdot f'(z)$$

Demostración. [Esquema] Si $f(z) = w$ y $f(z_0) = w_0$, entonces:

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{w - w_0} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Si $z \to z_0 \implies g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$.

Nótese que $w = w_0$ no es imposible $\implies$ el argumento puede fallar. ■

Demostración. Sea $f(z_0) = w_0$, y definamos para $w_0 \in B$:

$$h(w) = \begin{cases} \frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0} - g'(w_0), & w \neq w_0 \\ 0, & w = w_0 \end{cases}$$

$$h(f(z)) = \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - w_0} - g'(w_0), w \neq w_0$$

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = [h(f(z)) + g(w_0)] \left[\frac{f(z) - w_0}{z - z_0}\right]$$

Si $z \to z_0$:

$$\frac{d}{dz} g(f(z_0)) = [0 + g'(w_0)]\, f'(z_0)$$

■

Clase: 19/07/2022

Definición 3 (Región)**.** *Conexo (por trayectorias) y abierto.*

Definición 4 (Conexo)**.** *No disconexo.*

Definición 5 (Disconexo)**.** *A es disconexo si existen abierto G y H en la topología $\mathcal{X} \ni G \cap A \neq 0, H \cap A \neq \varnothing, G \cap H = \varnothing, (G \cap A) \cup (H \cap A) = A$.*

Definición 6 (Conexo por trayectorias)**.** *A es conexo por trayectorias si $\exists$ una curva $\gamma \ni \gamma : [a, b] \to A \ni \gamma(a) = x, \gamma(b) = y, \gamma([a, b]) \subset A, \gamma$ es diferenciable.*

Proposición 9. *Sea $A \subset \mathbb{C}$ una región, y sea $f : A \to \mathbb{C}$ una función analítica. Si $f'(z) = 0$ sobre A, entonces $f(z)$ es constante sobre A.*

Demostración. Sean $z_1, z_2 \in A \implies f(z_1) = f(z_2)$. Como A es conexo por trayectorias $\implies$ existe una curva $\gamma(t)$ que une a z_1 con z_2. Entonces,

$$\frac{d}{dz} f(\gamma(t)) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$$

Si $f = u + iv \implies \frac{d}{dt} u(\gamma(t)) = 0$ y $\frac{d}{dt} v(\gamma(t)) = 0. \implies u(\gamma(t)) = \mathrm{const}_1$ y $c(\gamma(t)) = \mathrm{const}_2$. Entonces, f es una función constante. ■

1.2. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

NOTA. *1. Suponga que $f(z)$ es analítica en $z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces la medida de error de aproximación de $f'(z_0)$ se define:*

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)$$

2. Como f es analítica en z_0, entonces $z \to z_0 \implies \varepsilon(z) \to 0$.

3. Despeje:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \varepsilon(z) \cdot (z - z_0),$$

i.e., cerca de z_0, $f(z)$ puede aproximarse por una función lineal.

Teorema 4 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann (CR))**.** *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sea u y v funciones de valores reales definidas de U. Entonces, la función*

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

es analítica sobre U ssi se safisfacen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \wedge \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

para cada $(x, y) \in U$. En este caso, se tiene que:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Clase: 28/07/2022

Demostración. Tenemos:

- ($\implies$) Suponemos que $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un abierto de u de $\mathbb{C}$. Sea $(x_0, y_0) \in u$. Nótese:

$$f'(z_0) \approx \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

  donde $\Delta z = z - z_0$.

1. $z \to z_0$ por el eje real, entonces: sea $z = z_0 + \Delta z = z_0 + \Delta x \implies$

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta x} - \frac{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)}{\delta x} \right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta x} \right] \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

2. $z \to z_0$ por el eje imaginario, i.e. $z = z_0 + i\Delta y$.

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{f(x_0 + i(y_0 + \Delta y)) - f(x_0 + iy_0)}{i\Delta y} \right] \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} \right] \\
&= \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

- ($\impliedby$) Nótese que $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Suponemos que $u(x, y)$ y $v(x, y)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y que sus segundas derivadas son continuas. Entonces:

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \varepsilon_1(x, y) \|(x - x_0, y - y_0)\|$$

con $\varepsilon_1(x, y) \to 0$, cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$. Además,

$$v(x, y) - v(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \varepsilon_2(x, y) \|(x - x_0, y - y_0)\|$$

con $\varepsilon_2(x, y) \to 0$, cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$. Sea $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $f(z_0) = f(x_0, y_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$.

$\implies f(x,y)-f(x_0,y_0)=[u(x,y)-u(x_0,y_0)]+i[v(x,y)-v(x_0,y_0)] \implies$ $\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+\varepsilon_1(x,y)\cdot\|(x-x_0,y-y_0)\|\right]$ $+i\left[\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)+\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)+\varepsilon_2(x,y)\cdot\|(x-x_0,y-y_0)\|\right] =$ $\left[\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right](x-x_0)+\left[\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right](y-y_0)+\varepsilon_1(x,y)\cdot\|(x-x_0,y-y_0)\|+$ $\varepsilon_2(x,y)\|(x-x_0,y-y_0)\| = \left[\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right](x-x_0)+\left[-\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial x}\right](y-y_0)+\varepsilon_1(x,y)\|(x-x_0,y-y_0)\|+\varepsilon_2(x,y)\|(x-x_0,y-y_0)\| =$ $\left[\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right][(x-x_0)+i(y-y_0)]+\varepsilon_1\|(,)\|+\varepsilon_2\|(,)\| = \left[\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right](z-z_0)+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\|(x-x_0,y-y_0)\|$. Entonces, cuando $z\to z_0$, se tiene que $\varepsilon_1(x,y)+\varepsilon_2(x,y)=\varepsilon(x,y)$. $\implies f(z)-f(z_0)=$ $\left[\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right](z-z_0)+\varepsilon(z)\|(z-z_0)\|$

■

Clase: 02/08/2022

Ejemplo 12. *Sea $f(z)=e^z$; si $z=x+iy$.* $\implies f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y \implies$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y; \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y; \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y$$

$\implies$ *se verifican las ecuaciones de C-R, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \implies f(z)=e^z$ es analítica en todo $\mathbb{C}$ (entera). Entonces*

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^x(\cos y+i\sin y)=e^xe^{iy}=e^{x+iy}=e^z.$$

Ejemplo 13. *Sea $f(z)=\operatorname{Re}(z)$; sea $z=x+iy \implies f(x+iy)=\underbrace{x}_{u(x,y)}+i0$. Entonces:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1\neq\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Por lo tanto, $f(z)=\operatorname{Re}$ no es analítica, $\forall z\in\mathbb{C}$.

Ejemplo 14. *Sea* $f(z) = |z|^2$*; sea* $z = x + iy \implies f(x + iy) = x^2 + y^2 + i0$. *Entonces:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$\implies \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, *si* $x = 0$*; además* $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}$, *si* $y = 0$. *Las ecuaciones de C-R, se cumplen en* $(0, 0)$.

1.2.1. Ecuaciones de Cauchy-Riemann en polares

Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $x = r\cos\theta$ y $y = r\sin\theta$.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \cos\theta\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \sin\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \sin\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -r\sin\theta\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + r\cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = r\sin\theta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + r\cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

De esto, se tiene:

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = r\frac{\partial u}{\partial r}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$

$$\implies \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Problema 2. *Pruébese que, si se cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en polares, entonces*

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

Ejemplo 15. *Sea* $f(z) = 1/z$, *sea* $z = re^{i\theta} \implies f(z) = 1/re^{i\theta} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}\cos\theta - \frac{i}{r}\sin\theta \implies u(r,\theta) = (1/r)\cos\theta$ *y* $v = -(1/r)\sin\theta$. *Entonces*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\cos\theta \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\cos\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\sin\theta \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\sin\theta$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial r}$$

Entonces:

$$f(z) = \frac{1}{z},$$

es analítica, $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$. *Entonces:*

$$\begin{aligned}
f'(z) &= e^{-i\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right] \\
&= e^{-i\theta}\left[-\frac{1}{r^2}\cos\theta + i\frac{1}{r^2}\sin\theta\right] \\
&= -\frac{e^{-i\theta}}{r^2}e^{-i\theta} \\
&= -\frac{e^{-2i\theta}}{r^2} \\
&= -\frac{1}{(re^{i\theta})^2} \\
&= -\frac{1}{z^2}
\end{aligned}$$

NOTA. *Sea* $f = u + iv$ *analítica en una región* $D \subseteq \mathbb{C} \implies$ *se cumples las ecuaciones de Cauchy-Riemman.*

$$\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(i.e. $u(x,y)$ *es solución de la ecuación de Laplace en dos variables.* $u(x,y)$ *es una función armónica). Similarmente,* $v(x,y)$ *es una función armónica.*

Ejemplo 16. *Sabemos que* $f(z) = e^z$ *es analítica en todo* $\mathbb{C} \implies u(x,y) = e^x \cos y$ *y* $v(x,y) = e^x \sin y$ *son armónicas.*

NOTA. *Suponga que* $u(x,y)$ *(dada) es armónica. Se quiere encontrar una función* $v(x,y)$ *(?) tal que*

1. $v(x,y)$ *es armónica.*

2. $f = u + iv$ *es analítica.*

A la función $v(x,y)$ *se le llama conjugada armónica de* $u(x,y)$*.*

Ejemplo 17. *Sea $u(x,y) = xy^3 - x^3y$. Nótese que u es una función armónica. Como*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \implies$$

si $u = xy^3 - x^3y$

$$\implies \frac{\partial u}{\partial x} = y^3 - 3x^2y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Ahora

$$v(x,y) = \int (y^3 - 2x^2y)dy = \frac{y^4}{3} - \frac{3}{2}x^2y^2 + \phi(x)$$

Por otra parte

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -3xy^2 + \phi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Entonces

$$-3xy^2 + \phi'(x) = -3x^2y^2 + x^3$$

$$\phi'(x) = x^3 \implies \phi(x) = \frac{x^4}{4}$$

Entonces

$$v(x,y) = \frac{y^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{x^4}{4}$$

Clase: 11/08/2022

2. Topología General

Definición 7. *Sea X un conjunto no vacío. Una clase $\tau \subseteq P(X)$ es una* ***topología*** *sobre X si:*

1. $\Phi, X \in \tau$
2. *La unión de cualquier clase de elementos de τ es un elemento de τ.*
3. *La intersección de cualquier clase finita de miembros de τ está en τ.*

NOTA.

1. *Un* ***espacio topológico*** *es el par (X, τ)*
2. *A los miembros de τ se les llama abiertos de X.*
3. *A los elementos de X se les llama puntos.*

Ejemplo 18. *Sea X un espacio métrico, y sea τ la clase de todos los subconjuntos de X que son abiertos en el sentido analítico (términos de la métrica generando bolas abiertas, unión de bolas abiertas). Esta topología, se llama topología usual del espacio métrico.*

Ejemplo 19. *Sea $X \neq \varnothing$ y $\tau = \underbrace{P(X)}_{\text{topología discreta}}$, el potencia de X. $\implies (X, P(X))$ es un espacio discreto. Sea*

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$\implies \tau = \{\varnothing, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

Ejemplo 20. *Sea $X \neq \varnothing$ y $\tau = \{\varnothing, X\}$. $\implies (X, \tau)$ es un espacio indiscreto.*

$$\bigcup \varnothing = \varnothing; \qquad \bigcap \varnothing = X$$

Ejemplo 21. *Sea $X = \{a, b, c\} \implies$*

1. $\tau_1 = \{X, \varnothing, \{a\}\}$
2. $\tau_2 = \{X, \varnothing, \{b, c\}\}$

NOTA. 1. *Un espacio topológico es* ***metrizable*** *si dada la topología del espacio, existe al menos una métrica que genera a dicha topología .*

Proposición 10. *Si X es metrizable $\implies$ X es métrico.*

2. *Existen espacios topológicos que no son metrizables $\implies$ teoría topológica es más amplia que la analítica.*

NOTA. *¿Se hereda la propiedad de ser espacio topológico? No.*

Ejemplo 22. *Sea Y un subconjunto de una topología. Para que Y sea espacio topológico:*

1. *Se dota a Y de una topología propia.*

2. *Se dota a Y de la topología relativa:*

$$\tau_y = \{G \cap Y : \forall G \in \tau\}$$

$\implies$ *Y es un subespacio de X.*

NOTA. *Dado el espacio topológico (X, τ) y $Y \subseteq X$, probemos que $\tau_y = \{Y \cap G : \forall G \in \tau\}$ es topología para Y.*

1. *Como $\varnothing, X \in \tau \implies \varnothing \cap Y = \varnothing \in \tau_y$ y $X \cap Y = Y \in \tau_y \implies \varnothing, Y \in \tau_y$.*

2. *Sea $\{H_i\}_{i \in Z}$, una clase cualquier de elementos de $\tau_y \implies \exists G_i \in \tau \ni H_i = Y \cap G_i, \forall i$. Entonces, $\bigcup_i H_i = \bigcup_i [Y \cap G_i] = Y \cap [\bigcup_i G_i] \in \tau_y$*

3. *Sean $H_1, H_2 \in \tau_y \implies H_i = Y \cap G_i, G_i \in \tau, i = 1, 2$. Entonces:*

$$H_1 \cap H_2 = (Y \cap G_1) \cap (Y \cap G_2) = Y \cap (G_1 \cap G_2) \in \tau_y$$

Por lo tanto, τ_y es topología para Y.

Definición 8. *Sean (X, τ) y (Y, τ') espacios topológicos y f un mapeo de X en Y. Entonces, f es:*

1. *Continuo, si $\forall G \in \tau'$, se tiene que $f^{-1}(G) \in \tau$*

2. *Mapeo abierto, si* $\forall H \in \tau$*, se tiene* $f(H) \in \tau'$

NOTA. *Cualquier imagen* $f(X)$*, donde* X *es espacio topológico y* f *es un mapeo continuo, es una imagen continua de* X*.*

Definición 9. *Un* ***homeomorfismo*** *es un mapeo entre espacios topológicos que es biyectivo, continuo y abierto (bicontinuo).*

NOTA.

1. *Si existe un homeomorfismo entre los espacios topológicos* X *y* Y*, se dice que estos espacios son homeomorfos.*

2. *Dos espacios homeomorfos se diferencian en la naturaleza de sus puntos y son topológicamente indistinguibles.*

3. *"Ser homeomorfo a.*^{es} *una relación de equivalencia de la clase de espacios topológicos.*

Definición 10. *Una propiedad topológica si, cuando la tiene un espacio* X*, la tiene también cualquier imagen homeomorfa de* X*.*

$$f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$$

NOTA. *El objecto de estudio de la topología (como rama de la matemática, es encontrar y caracterizar las propiedades topológicas.)*

Definición 11. *Un conjunto* F *es cerrado en el espacio* (X, τ)*, si* $F^c \in \tau$*.*

Proposición 11. *La intersección de cualesquiera dos topologías de* X *es una topología de* X*.*

Demostración. Sean τ_1, τ_2 topologías sobre X.

1. $\varnothing, X \in \tau_1$ y a $\tau_2 \implies \varnothing, X \in \tau_1 \cap \tau_2$.

2. Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una colección de subconjuntos de $\tau_1 \cap \tau_2 \implies G_i \in \tau_1 \cap \tau_2, \forall i \implies G_i \in \tau_1$ y $G_i \in \tau_2, \forall i \implies \cup_i G_i \in \tau_1$ y $\cup_i G_i \in \tau_2 \implies \cup_i G_i \in \tau_1 \cap \tau_2$.

3. Si $G_1, G_2 \in \tau_1 \cap \tau_2 \implies G_1, G_2 \in \tau_1$ y $G_1, G_2 \in \tau_2 \implies G_1 \cap G_2 \in \tau_1$ y $G_1 \cap G_2 \in \tau_2 \implies G_1 \cap G_2 \in \tau_1 \cap \tau_2 \implies \tau_1 \cap \tau_2$ es topología sobre X.

■

NOTA. *Sea $X = \{a, b, c\}$ y sean las topologías $\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ y $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\} \implies \tau_1 \cup \tau_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}$ no es topología sobre X.*

Definición 12. *Una sucesión (a_n) de puntos del espacio topológico (X, τ) converge a un punto $b \in X$ (i.e. $\lim a_n = b$) si y solo si, $\forall G \in \tau$ que contiene a b, $\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n > N \implies a_n \in G$.*

Ejemplo 23. *Sea (X, τ) un espacio indiscreto y (a_n) una sucesión en X.*

Clase: 23/08/2022

3. Sección en $\mathbb{C}$

NOTA. 1. *Una curva o contorno en $\mathbb{C}$ es un mapeo continuo:*

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

2. *Una curva en C^1-por tramos (primera derivada continua) si existe una partición $\{a = a_1 < a_2 < \cdot < a_n = b\}$ de $[a,b] \ni$*

   a) *γ es diferenciable sobre (a_i, a_{i+1})*

   b) *γ' es continua sobre $[a_i, a_{i+1}]$*

En esta teoría todas las curvas son C^1-por tramos.

Definición 13. *Sea $h : [a,b] \to \mathbb{C} \ni h(t) = u(t) + iv(t)$.*

$$\implies \int_a^b h(t)dt := \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

Definición 14. *Sea f una función continua y definida sobre un abierto $A \subseteq \mathbb{C}$ y $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva C^1 por tramos tal que $\gamma([a,b]) \subset A$, entonces:*

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

NOTA. 1. *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva, $t \to \gamma(t)$. $\implies -\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \ni (-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t) \implies -\gamma$ es la curva opuesta de γ.*

2. *Sea* $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ *y* $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{C} \ni$

$$\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$$

$\implies \gamma_1 + \gamma_2 : [a,c] \to \mathbb{C} \ni$

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b,c] \end{cases}$$

curva suma de γ_1 *con* γ_2*.*

Proposición 12. 1. *Sea* $\int_\gamma [c_1 f + c_2 g] = c_1 \int_\gamma f + c_2 \int_\gamma g$*,* f, g *funciones continuas,* γ *es una curva de* C^1 *por tramos. Es decir, la integral de línea es lineal.*

2. $\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f$

3. $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$

Definición 15. *Sea* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *una curva* C^1-*por tramos. Una curva suave* (C^1-) *por tramos* $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{C}$ *es una reparametrización de* γ *si* $\exists$ *una función* C^1*,*$\alpha : [a,b] \to [\tilde{a}, \tilde{b}] \ni \alpha'(t) > 0, \alpha(a) = \tilde{a}, \alpha(b) = \tilde{b}$ *y* $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\alpha(t))$*.*

Proposición 13. *Si* $\tilde{\gamma}$ *es reparametrización de* γ*, entonces*

$$\int_\gamma f = \int_{\tilde{\gamma}} f,$$

para cualquier función f *continua y definida sobre un abierto que contenga a* $\gamma([a,b])$*.*

Demostración. Sea $\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$, donde $\gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\tilde{\gamma}(\alpha(t))}{dt} = \tilde{\gamma}'(\alpha(t)) \frac{d\alpha(t)}{dt} \implies \int_\gamma f = \int_a^b f(\tilde{\gamma}(\alpha(t))) \tilde{\gamma}'(\alpha(t)) \frac{d(\alpha(t))}{dt} dt \implies$ sea $\alpha(t) = s$, tal que $\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\tilde{\gamma}(s)) \tilde{\gamma}'(s) ds = \int_{\tilde{\gamma} f}$. ■

Proposición 14. *Sea f una función continua sobre un abierto $A \subseteq \mathbb{C}$ y γ una curva C^1-por tramos sobre $[a,b]$. Si $\exists M \geq 0 \ni |f(z)| \leq M, \forall z \in A$, entonces*

$$\left| \int_\gamma f \right| \leq M \cdot l(\gamma),$$

donde $l(\gamma)$ es la longitud de γ sobre $[a,b]$. ($\int_a^b (\gamma'(t))dt$)

Demostración.

1. Sea $g : [a,b] \to \mathbb{C} \ni g(t) = u(t) + iv(t) \implies \int_a^b g(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt \implies \operatorname{Re}\int_a^b g(t)dt = \int_a^b u(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re} g(t)dt$.

2. A probar: $\left|\int_a^b g(t)dt\right| \leq \int_a^b |g(t)|dt$. Sea $\int_a^b g(t)dt = re^{i\theta}, r, \theta$ fijos, $r > 0$. $\implies r = e^{-i\theta}\int_a^b g(t)dt = \int_a^b e^{-i\theta}g(t)dt \implies r = \operatorname{Re}\int_a^b e^{-i\theta}g(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re}[e^{-i\theta}g(t)]dt \leq \int_a^b |e^{-i\theta}g(t)|dt = \int_a^b |e^{-i\theta}| \cdot |g(t)|dt = \int_a^b |g(t)|dt \implies |r| = r = \left|e^{-i\theta}\int_a^b g(t)dt\right| = |e^{-i\theta}| \cdot |\int_a^b g(t)dt| = |\int_a^b g(t)dt| \leq \int_a^b |g(t)|dt$.

3. $\left|\int_\gamma f\right| = |\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)|dt = \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|dt \leq \int_a^b M \cdot |\gamma'(t)|dt = M\int_a^b |\gamma'(t)|dt = M \cdot l(\gamma)$.

$\blacksquare$

Proposición 15 (Teorema fundamental del cálculo para integrales de línea)**.** *Supóngase que $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es C^1- por tramos y que F está definida y es analítica sobre el abierto A que contiene a $\gamma([a,b])$. Suponga que F' es continua (es redundante). $\implies \int F'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.*

Demostración. Sea $F(\gamma(t)) = g(t) = u(t) + iv(t) \implies F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = g'(t) = u'(t) + iv'(t)$.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F'(t)dt &= \int_a^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \\
&= \int_a^b [u'(t) + iv'(t)]dt \\
&= \int_a^b u'(t)dt + i\int_a^b v'(t)dt \\
&= u(t)|_a^b + iv(t)|_a^b \\
&= u(b) - u(a) + i[v(b) - v(a)] \\
&= [u(b) + iv(b)] - [u(a) + iv(a)] \\
&= g(b) - g(a) \\
&= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))
\end{aligned}$$

■

Clase: 25/08/2022

Proposición 16. *Sea f una función definida y analítica sobre una región (Dominio: abierto y conexo)$G \subset \mathbb{C}$, y si $f'(z) = 0, \forall z \in G$, entonces f es constante.*

Demostración. Sea $z_0 \in G$ un punto en G (fijo) y sea cualquier $z \in G \implies$ por el T.F.C.

$$\int_\gamma f'(z)dz = f(z) - f(z_0),$$

donde γ es una curva que une z_0 con z. $\implies$ como $f'(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C} \implies \int_\gamma f'(z)dx = 0 \implies f(z) = f(z_0), \forall z \in G \implies f$ es constante. ■

Ejemplo 24. *1. Sean $z_1 = 1, z_0 = -1$ y $f(z) = 3z^2$. $\implies \int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma 3z^2dz = z^3|_{z_0}^{z} = 1^3 - (-1)^3 = 2$. Para cualquier curva γ.*

2. Sea $z_1 = -1, z_0 = 1$ y $f(z) = 1/z$.

a) *Considere γ: el semicirculo unitario superior.Sea* $\gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = \int_0^\pi \frac{1}{e^{it}} \cdot i e^{it} dt = \pi i$$

b) *Considere γ: el semicirculo unitario inferior.Sea* $\gamma(t) = e^{-it}, \quad 0 \leq t \leq \pi$

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = \int_0^\pi \frac{1}{e^{-it}} \cdot (-i) e^{-it} dt = -\pi i$$

Teorema 5 (Independencia de trayectorias)**.** *Suponga que f es una función continua sobre una región $G \subseteq \mathbb{C}$. Los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *Las integrales son independientes de la curva: si $z_0, z_1 \in G$ y si γ_1, γ_2 son curvas de z_0 a z_1 sobre G, entonces:*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

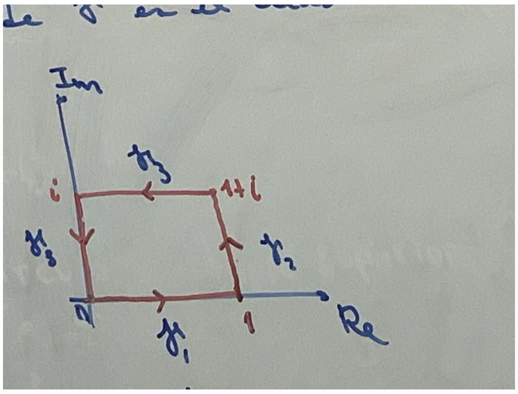
2. *Las integrales sobre las curvas cerradas son cero. Si γ es curva cerrada en G, entonces*

$$\int_\gamma f = 0$$

3. *Existe una antiderivada para f sobre G. Existe una función F definida y analítica sobre $G \ni$*

$$F'(z) = f(z), \forall z \in G$$

Ejemplo 25. *1. Calcule $\int_\gamma xdz$, donde γ es el cuadrado unitario.*



$$
\begin{aligned}
\int_\gamma xdz &= \int_\gamma \mathrm{Re}(z)dz \\
&= \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} \mathrm{Re}(z)dz \\
&= \int_{\gamma_1} \mathrm{Re}(z)dz + \int_{\gamma_2} \mathrm{Re}(z)dz + \int_{\gamma_3} \mathrm{Re}(z)dz + \int_{\gamma_4} \mathrm{Re}(z)dz
\end{aligned}
$$

Un caso de parametrización:

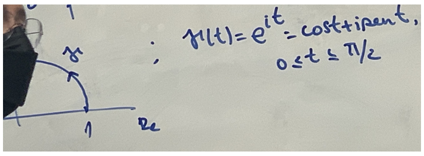
$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &: [0,1] \to \mathbb{C} \ni \gamma_1(t) = t + 0i \\
\gamma_2 &: [1,2] \to \mathbb{C} \ni \gamma_2(t) = 1 + i(t-1) \\
\gamma_3 &: [2,3] \to \mathbb{C} \ni \gamma_3(t) = (3-t) + i \\
\gamma_1 &: [3,4] \to \mathbb{C} \ni \gamma_4(t) = 0 + (4-t)i
\end{aligned}
$$

Tenemos las integrales:

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} f &= \int_0^1 z \cdot 1dt = \frac{1}{2} \\
\int_{\gamma_2} f &= \int_1^2 1 \cdot idt = i \\
\int_{\gamma_3} f &= \int_2^3 (3-t)(-1)dt = -\frac{1}{2} \\
\int_{\gamma_4} f &= \int_3^4 0dt = 0
\end{aligned}
$$

Entonces la suma es i.

Ejemplo 26. *Calcule $\int_\gamma e^z dz$, donde γ es la parte del circulo unitario que une 1 con i.*



1. *T.F.C $\implies \int_\gamma e^z dz = e^i - e^1$*
2. *Por definición*

$$\int_\gamma e^z dz = \int_0^{\pi/2} e^{\cos t + i\sin t}[-\sin t + \cos t]dt$$

Ejemplo 27. *Calcule $\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$, donde $\gamma(t) = a + re^{it}, 0 \le t \le 2\pi$*

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} &= \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{a + re^{it} - a}dt \\ &= \int_0^{2\pi} idt \\ &= 2\pi i\end{aligned}$$

Ejemplo 28. *Encuentre un número $M \ni \left|\int_\gamma \frac{dz}{z^2+2}\right| \le M$, donde γ es el semicirculo unitario superior.*

Solución. Si $|f(z)| = |\frac{1}{z^2+z}| \le K, K \ge 0$, entonces:

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^2+z}\right| \le K \cdot l(\gamma)$$

Sea

$$|z^2+2| = |2+z^2| \ge |2| - |z^2| = 2 - |z|^2 = 2 - 1 = 1 \implies |\frac{1}{z^2+2}| \le 1$$

Además, $l(\gamma) = \pi(1) = \pi$.

$$\implies \left|\frac{dz}{z^2+2}\right| \le \pi$$

□

Teorema 6 (De Cauchy - Versión intuitiva)**.** *Suponga que f es analítica sobre y en el interior de una curva cerrada y simple γ. Entonces,*

$$\int_\gamma f = 0$$

Clase: 30/08/2022

Teorema 7 (Green)**.** *Sea γ una curva cerrada, simple, orientada positivamente y suave por tramos en la región D del plano acotada por γ. Si $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ tienen derivadas continuas sobre D, entonces:*

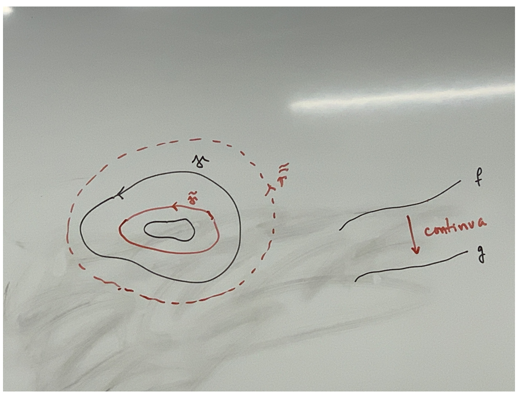
$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

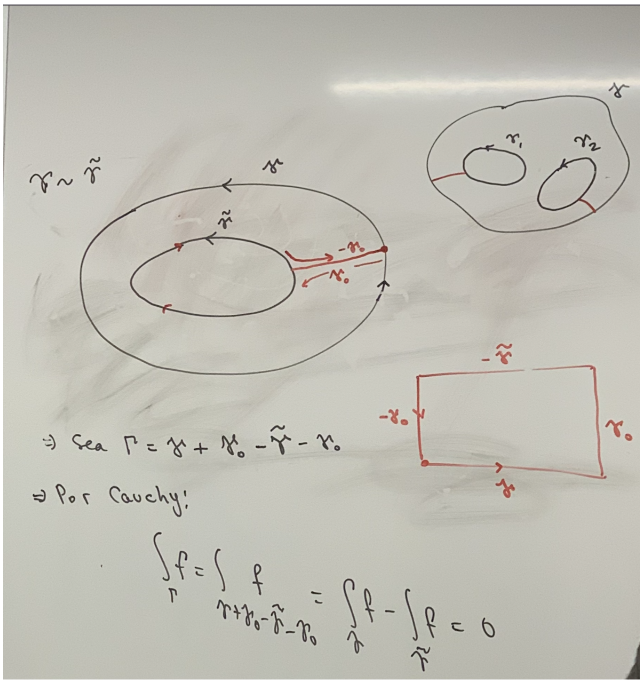
Teorema 8 (Curva de Jordan)**.** *Una curva cerrada y simple secciona el plano $\mathbb{R}^2$ en dos subconjuntos conexos, uno de ellos acotado.*

Demostración. Sea $f = u + iv$, una función analítica sobre y en el interior de $\gamma \implies \int_\gamma f = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) = \int_\gamma [(udx - vdy) + i(udy + vdx)] = \int_\gamma [udx - vdy] + i\int_\gamma [vdx + udy] = \iint_D \left[-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] dxdy + i \iint_D \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] dxdy$. Ambas integrales se hacen 0 por Cauchy-Riemman. ∎

Teorema 9 (de Deformación)**.** *Sea f analítica sobre una región A y sea γ una curva cerrada y simple sobre A. Suponga que γ es homotópica a otra curva $\tilde{\gamma}$ sin salir de A. Entonces,*

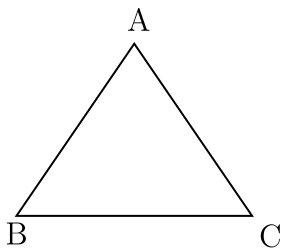
$$\int_\gamma f = \int_{\tilde{\gamma}} f$$





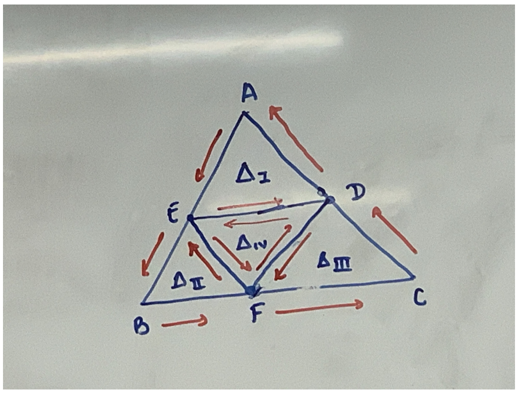
Clase: 01/09/2022

Teorema 10 (Cauchy-Gourset). *Sea f analítica en el interior y sobre el triángulo ABC dado:*



Entonces, $\int_{ABCA} f$

Demostración. Tenemos



$$
\begin{aligned}
\oint_{ABCA} f &= \int_{DAE} f + \int_{EBF} f + \int_{FCD} f \\
&= \left[\int_{DAE} f + \int_{ED} f\right] + \left[\int_{EBF} f + \int_{FE} f\right] + \left[\int_{FCD} f + \int_{DF} f\right] \\
&+ \left[-\int_{ED} f - \int_{FE} f - \int_{DF} f\right] \\
&= \oint_{DAED} f + \oint_{EBFE} + \oint_{FCDF} f + \left[\int_{DE} f + \int_{EF} f + \int_{FD} f\right] \\
&= \oint_{DAED} + \oint_{EBFE} f + \oint_{FCDF} f + \oint_{DEFD} f
\end{aligned}
$$

Ahora bien,

$$
\left|\oint_{\Delta} f(z)dz\right| \leq \left|\oint_{\Delta_1} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\Delta_2} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\Delta_3} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\Delta_4} f(z)dz\right|
$$

Sea

$$
\left|\oint_{\Delta_1} f(x)dx\right| = \max_i \left|\oint_{\Delta_i} f(z)dz\right|
$$

$$
\left|\oint_{\Delta} f(x)dz\right| \leq 4\left|\oint_{\Delta_1} f(z)dz\right|
$$

Repitiendo este proceso para Δ_i, se tiene que:

$$\left|\oint_{\Delta_1} f(x)dx\right| \leq 4\left|\oint_{\Delta_2} f(z)dz\right|$$

$$\implies \left|\oint_{\Delta} f(x)dx\right| \leq 4^2\left|\oint_{\Delta_2} f(z)dz\right|$$

Luego de n etapas en este procesos:

$$\left|\oint_{\Delta} f(x)dx\right| \leq 4^n\left|\oint_{\Delta_n} f(z)dz\right|$$

Nótese que $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta \cdots \supset \Delta_n, \cdots$. Es decir, se tiene una sucesión anidada de triángulos.

Entonces, existe z_0 que pertenece a todos los triángulos.

Lema 11. *Sea f analítica en una región R que contiene al punto z_0. Entonces,*

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z - z_0),$$

donde $\eta \to 0$ cuando $z \to z_0$.

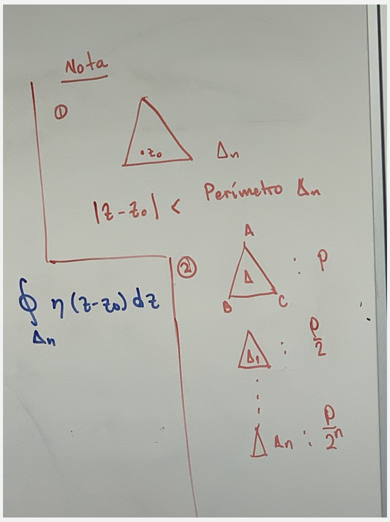
Demostración. Sea $\eta = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)$. Como f es diferenciable en z_0, entonces si $z \to z_0 \implies \eta = 0$. Por lo tanto, $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z - z_0)$ ■

Como f es analítica en z_0, entonces:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) * (z - z_0) + \eta(z - z_0),$$

donde, se cumple que, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni |\eta| < \varepsilon$, cuando $|z - z_0| < \frac{p}{2^n} < \delta$. Ahora

$$\begin{aligned}\oint_{\Delta_n} f(zdz) &= \oint_{\Delta_n} f(z_0)dz + f'(z_0)\oint_{\Delta_n} (z - z_0)dz + \oint_{\Delta_n} \eta(z - z_0)dz \\ &= \oint_{\Delta_n} \eta(z - z_0)dz\end{aligned}$$



Entonces

$$
\begin{aligned}
\left|\oint_{\Delta_n} f(zdz)\right| = \left|\oint_{\Delta_n} \eta(z-z_0)dz\right| &\leq |\eta|\cdot|z-z_0|l(\Delta_n) \\
&< \varepsilon\frac{p}{2^n}\frac{p}{2^n} \\
&= \frac{\varepsilon p^2}{4^n}
\end{aligned}
$$

$$
\implies \left|\oint_{\Delta} f(z)dz\right| \leq 4^n\left|\oint_{\Delta_n} f(z)dz\right| < 4^n\varepsilon\frac{p^2}{4^n} = \varepsilon p^2
$$

Por la arbitrariedad de ε, $\oint_\Delta f(z)dz = 0$. ■

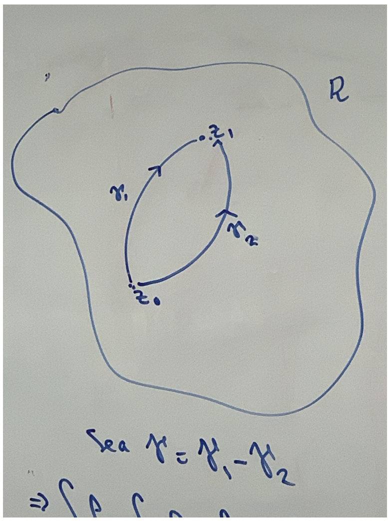
Definición 16 (R es simplemente conexo)**.** *Tenemos:*

1. *R es conexo.*
2. *Cada curva cerrada sobre R es homotópica a un punto.*

Teorema 12. *Suponga que f es una función analítica sobre una región simplemente conexa. Entonces, para cualesquiera curvas γ_1 y γ_2 que unen z_0 con z, en A, se tiene que:*

$$
\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f
$$

Demostración. Tenemos:



Sea $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$.

$$\implies \int_\gamma f = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f = 0.$$

■

Clase: 01/09/2022

NOTA. 1. *Intuitivamente, el índice de una curva cerrada γ es el número de veces que la curva gira con respecto a un punto.*

2. *Sea* $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi \implies \int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$

$$\implies 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z}.$$

Sea $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2n\pi \implies \int_\gamma \frac{dz}{z} = 2n\pi i$

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z}$$

3. Sea $\tilde{\gamma}$ una curva cerrada que puede deformarse en γ sin pasar por 0.

$$\int_{\tilde{\gamma}} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z}$$

$$\implies n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{dz}{z}$$

Definición 17. *Sea γ una curva cerrada en $\mathbb{C}$ y sea $z_0 \in \mathbb{C} \ni z_0 \notin \gamma$. El índice de γ con respecto a z_0 es:*

$$I(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

Teorema 13. *Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva suave y cerrada, y sea $z_0 \notin \gamma$. Entonces,*

$$I(\gamma; z_0) \in \mathbb{Z}$$

Demostración. Sea $g(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z_0} ds \implies g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}$. Nótese que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} e^{-g(t)} \left[\gamma(t) - z_0\right] &= -e^{-g(t)} \cdot g'(t) \left[\gamma(t) - z_0\right] + e^{-g(t)} \cdot \gamma'(t) \\
&= e^{-g(t)} \left[\gamma'(t) - g'(t)[\gamma(t) - z_0]\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\implies e^{-g(t)}[\gamma(t) - z_0]$ es constante sobre $[a, b]$. $\implies$ El valor de esta función es $e^{-g(a)}[\gamma(a) - z_0] \implies e^{-g(a)}[\gamma(a) - z_0] = e^{-g(b)}[\gamma(b) - z_0] \implies e^{-g(a)} = e^{-g(b)}$. Como $g(a) = 0 \implies e^{-g(b)} = 1. \implies \pm g(b)$ debe ser un múltiplo entero de $2\pi i \implies g(b) = \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z_0} ds = \int \frac{dz}{z-z_0} = 2n\pi i, n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto,

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \in \mathbb{Z}$$

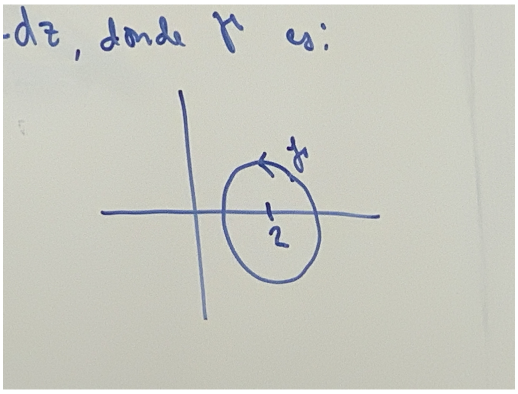
■

Teorema 14 (Fórmula integral de Cauchy)**.** *Sea $f(z)$ una función analítica sobre y en el interior de una curva cerrada, suave y simple γ, que está sobre una región $R \subseteq \mathbb{C}$. Entonces,*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz$$

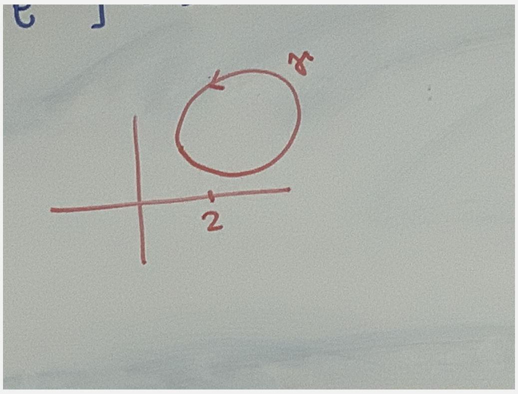
$$\iff \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a) 2\pi i$$

Ejemplo 29. *Calcule $\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z-2} dz$, donde γ es:*



$\implies \int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z-2} dz = 2\pi i [e^{(2)^2}] = 2e^4 \pi i$

Ejemplo 30. *Calcule $\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z-2} dz$*



Demostración. Calculemos $\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz$. Sea γ homotópica a $\tilde{\gamma}(z) = a + \varepsilon e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi \implies \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\varepsilon e^{it})}{a+\varepsilon e^{it} - a} \cdot \varepsilon i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{it}) dt$. Si $\varepsilon \to 0 i \ni \int_0^{2\pi} f(a) dt = 2\pi i f(a)$ ■

Teorema 15 (Fórmula integral de Cauchy - Versión 2)**.** *Sea F analítica sobre una región $R \subseteq \mathbb{C}$. Sea γ una curva cerrada y suave en R que es homotópica a un punto, y sea $z_0 \in R, z_0 \notin \gamma$. Entonces,*

$$f(z_0) \cdot I(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Clase: 08/09/2022

Problema 3 (FIC)**.** *Sea f analítica sobre una región $A \subseteq \mathbb{C}$, γ una curva cerrada en A que es homotópica a un punto, y $z_0 \in A \ni z_0 \notin \gamma$. Entonces,*

$$f(z_0) \cdot I(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Demostración. Sea

$$\begin{aligned}\int \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0) + f(z_0)}{z - z_0} dz \\ &= \int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + f(z_0) \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} \\ &= \int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + f(z_0)(2\pi i) I(\gamma; z_0)\end{aligned}$$

A probar:

$$\int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

Recordemos que, si f es analítica sobre A, entonces:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z - z_0),$$

donde $\eta \to 0$, cuando $z \to z_0$

$$\iff \eta = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)$$

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= \underbrace{\int_\gamma f'(z_0)dz}_{0, TFC} + \int_\gamma \eta dz \\
&= 0 + \int_\gamma \eta dz
\end{aligned}
$$

Sea $\tilde{\gamma}$ una curva cerrada, homotópica a γ y para $\delta > 0$, $\tilde{\gamma}$ debe estar contenida en $B = \{z : |z - z_0| < \delta\}$ para cada $\varepsilon > 0$. Para los elementos de B, en particular para los puntos de $\tilde{\gamma}$, se tiene que $|\eta| < \varepsilon$, donde $\delta = \delta(\varepsilon)$. Entonces, por M-L,

$$
\int_\gamma \eta dz = 0.
$$

■

Teorema 16 (FIC, para derivadas). *Sea f analítica sobre una región A. Entonces, existen todas las derivadas de f sobre A. Además, para $z_0 \in A$ y cualquier γ, curva cerrada y homotópica a un punto sobre $A \ni z_0 \notin \gamma$, entonces:*

$$
f^{(k)}(z_0) \cdot I(\gamma; z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\psi)}{(\psi - z_0)^{k+1}} d\psi
$$

Proposición 17 (Desigualdades de Cauchy). *Sea f analítica sobre una región A y γ un círculo simple en A con radio R y centro en z_0. Suponga que $D = \{z : |z - z_0| < R\}$ también está en A. Asuma qeu $|f(z)| \leq M, \forall z \in \gamma, z_0 \notin \gamma$. Entonces,*

$$
|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{R^k} M, \quad k = 0, 1, 2, \cdots
$$

Demostración. Sea

$$
|f^{(k)}(z_0)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \right| \cdot \left| \int_\gamma \frac{f(\psi)}{(\psi - z_0)^{k+1}} d\psi \right|.
$$

Como

$$
\left| \frac{f(\psi)}{(\psi - z_0)^{k+1}} \right| \leq \left| \frac{M}{(\psi - z_0)^{k+1}} \right| \leq \frac{M}{|\psi - z_0|^{k+1}} = \frac{M}{R^{k+1}}
$$

Entonces, por ML, $|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{2\pi} \cdots \frac{M}{R^{k+1}} \cdot 2\pi R = \frac{k!M}{R^k}$ ■

Teorema 17. *(Liouville) Si f es una función entera y si $\exists M \geq 0 \ni |f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.*

Demostración. Sabemos que, para cualquier circulo de radio R y centro en $z_0 \in \mathbb{C}$, se tiene que $|f'(z_0)| \leq M/R \to_{R\to\infty} 0 \implies f'(z_0) = 0$. Como $\mathbb{C}$ es conexo, entonces f es constante.

■

Clase: 20/09/2022

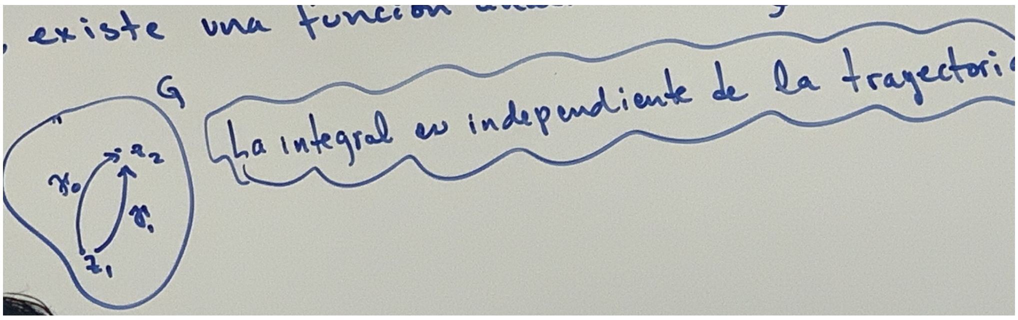
Teorema 18 (Fundamental del álgebra (Gauss))**.** *Sean $a_0, a_1, \cdots, a_n$, números complejos $n \geq 1, a_n \neq 0$. Si $p(x) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, entonces existe $z_0 \in \mathbb{C} \ni p(z_0) = 0$*

Demostración. Suponga, por el absurdo que $p(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Sea $f(z) = \frac{1}{p(z)}$. Como $p(z) \neq 0 \implies f(z)$ es entera (cociente de funciones analíticas), y además, como $a_n \neq 0, f(z)$ no es constante. A probar: f es acotada $\forall z \in \mathbb{C} \implies$ Por Liouville, f es constante ($\to\leftarrow$). ■

Lema 19. *Sea f una función continua sobre la región $G \subseteq \mathbb{C}$. Sean $z_1, z_2 \in G$ y γ_0 y γ_1, curvas que unen a z_1 y z_2 en $G \ni$*

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

Entonces, existe una función analítica $F \ni F'(z) = f(z), \forall z \in G$.



Demostración. Sea $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\psi)d\psi$, tal que

- Como f es continua en $G \implies f$ es continua en $z \in G \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni |w - z| < \delta \implies |f(w) - f(z)| < \varepsilon$
- Sea $w \in D(z, \delta)$, y sea ρ la recta que une w con z.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| &= \left| \frac{F(w) - F(z) - f(z)(w - z)}{w - z} \right| \\
&= \left| \frac{\int_{\gamma+\rho} f - \int_{\gamma} f - f(z) \int_{\rho} 1 \cdot d\psi}{w - z} \right| \\
&= \left| \frac{\int_{\rho} f - f(z) \int_{\rho} 1 d\psi}{w - z} \right| \\
&= \frac{1}{|w - z|} \left| \int_{\rho} [f(\psi) - f(z)] d\psi \right| \\
&< \frac{1}{|w - z|} \in |w - z| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

■

Teorema 20 (Morera)**.** *Sea f una función continua sobre una región $G \subseteq \mathbb{C}$, y suponga que $\int_{\gamma} f = 0$, para cualquier curva cerrada γ sobre G. Entonces, f es analítica sobre G y se tiene que $f = F'$, para alguna función analítica F sobre G.*

Teorema 21 (Cauchy-recordatorio)**.** *Si f es analítica sobre y en el interior de una curva cerrada γ, entonces*

$$\int_\gamma f = 0$$

Demostración. Como f es continua sobre G y la integral es independiente de la trayectoria $\implies \exists F$, función analítica sobre G, tal que $F' = f \implies F'' = f' \implies f$ es analítica sobre G. ∎

3.1. Series

Definición 18. *Una serie de números complejos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge a S, denotado $\sum a_k = S$, si la sucesión $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ converge a S.*

Definición 19. *La sucesión $(z_n) \subseteq \mathbb{C}$ es de Cauchy si y solo si $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n, m \geq N \implies |z_n - z_m| < \varepsilon$.*

Teorema 22. *Tenemos,*

1. *Si $\lim a_n$ existe $\implies$ es única.*

2. *Una sucesión (z_n) es convergente si y solo si (z_n) es de Cauchy.*

NOTA.

1. *(z_n) es de Cauchy, si $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni |z_n - z_{m+p}| < \varepsilon, \forall n \geq N, \forall p = 1, 2, 3, \cdots$*

2. *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge (si y solo si)* $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni n \geq N \implies |\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon, \forall p = 1, 2, \cdots$*

3. *En (2) hagamos $p = 1$. $\implies$ si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge $\implies |a_n| \to 0$*

4. *Nótese que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ es tal que la serie diverge aunque $|1/k| \to 0$. (El converso de (3) no se cumple).*

Definición 20. *Una serie en los complejos $\sum a_k$ converge absolutamente, si $\sum |a_k|$ converge.*

Teorema 23. *Si $\sum a_k$ sobre $\mathbb{C}$ es absolutamente convergente $\implies \sum a_k$ converge.*

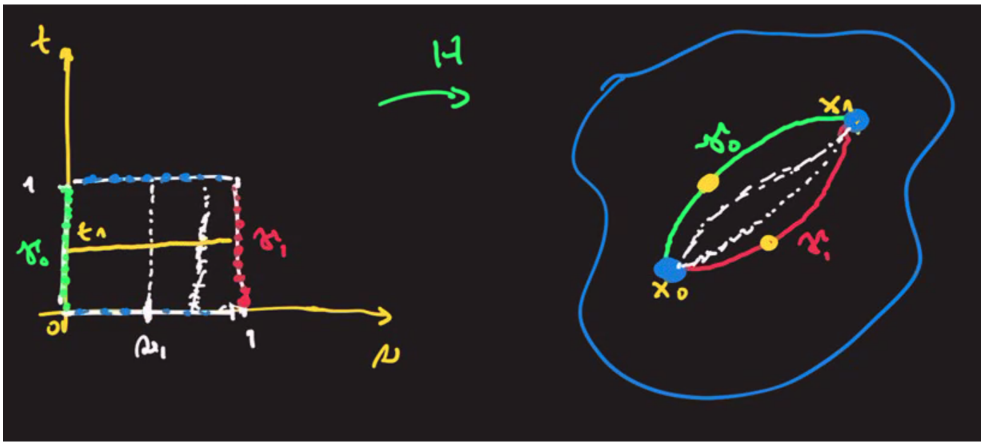
Clase: 27/09/2022

3.2. Homotopía (visión complementaria)

Definición 21. *Suponga que* $\gamma_0 : [0,1] \to G$ *y* $\gamma_1 : [0,1] \to G$ *son curvas continuas en* G *que unen los puntos* x_0 *y* $x_1 \in G \subseteq X$ *(espacio topológico). Se dice que* γ_0 *es homotópica a* γ_1*, denotado* $\gamma_0 \sim \gamma_1$*, si existe una función continua:*

$$H : [0,1] \times [0,1] \to G \ni$$

$$H(0,t) = \gamma_0$$
$$H(s,0) = x_0$$
$$H(1,t) = \gamma_1$$
$$H(s,1) = x_1$$



Ejemplo 31. *Sea* $X = \mathbb{R}^2$*, entonces el segmento de recta que une* $(0,0)$ *con* $(1,1)$ *es homotópico al segmento de parábola que une estos puntos.*

Sea $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \ni$

$$H(s,t) = (t, t^{s+1}) \ni$$

$$H(0,t) = (t,t) = \gamma_0$$
$$H(s,0) = (0,0) = x_0$$
$$H(1,t) = (t,t^2) = \gamma_1$$
$$H(s,1) = (1,1) = x_1$$

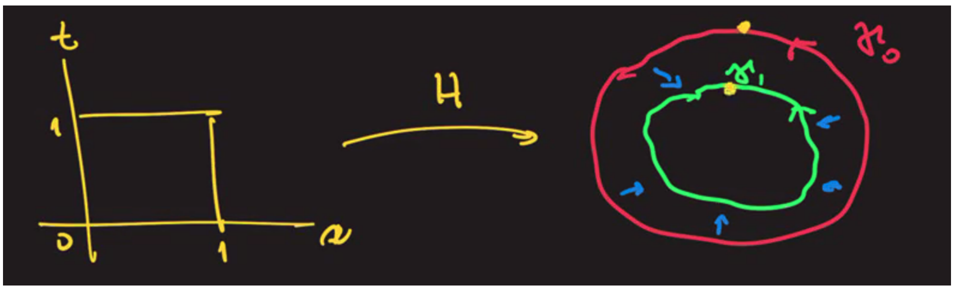
Nótese que la homotopía no necesariamente es única. En efecto, sea:

$$H_1(s,t) = (1-t)\gamma_0(t) + s\gamma_1$$
$$H_2(s,t) = (t, (1-s)t + st^2)$$

Demostración. Sean $\gamma_0 : [0,1] \to G$ y $\gamma_1 : [0,1] \to G$ curvas cerradas simples y continuas en el subconjunto G del espacio topológico X. Se dice que γ_0 es homotópica como curva cerrada a γ_1 sobre G, si existe una función continua

$$H : [0,1] \times [0,1] \to G \ni$$

$$H(0,t) = \gamma_0$$
$$H(1,t) = \gamma_1$$
$$H(s,0) = H(s,1)$$



$\blacksquare$

Ejemplo 32. *El círculo* $\gamma_0(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ *es homotópico a* $\gamma_1(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t), t \in [0, 2\pi]$ *si y solo si*

$$\gamma_0(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$
$$\gamma_1(t) = (2\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), t \in [0,1]$$

Entonces, sea $H : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2 \ni$

$$H(s,t) = ((1+s)\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)\,,$$

en donde $H(0,t) = \gamma_0; H(1,t) = \gamma_1, H(s,0) = (1+s,0) = H(s,1)$.

NOTA. *Sea* $\gamma : [0,1] \to X \ni \gamma(t) = x_0$. *Nótese que* γ *es una función continua que se le conoce como curva constante (en un punto* $x_0 \in X$*).*

Definición 22. *Un conjunto conexo* A *del espacio topológico* X *es simplemente conexo si cada curva cerrada* γ *sobre* A *es homotópica a un punto en* A *(i.e.* $\gamma \sim x_0$*)*

3.3. Series

Proposición 18. *Sea*

- *Si* $|r| < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$
- *Si* $|r| \geq 1$*, la serie diverge.*

Demostración. Sea $S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

1. Si $|r| < |$ y si $l. \implies$ la sucesión (s_n) converge a $1/1 - r$.
2. Si $|r| > 1$ y $n \to \infty \implies r^{n+1}$ diverge a $+\infty \implies (s_n)$ diverge.
3. Si $r = 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$. En este caso, $\lim_{n\to\infty} 1 \neq 0 \implies$ la serie diverge.

$\blacksquare$

Clase: 29/09/2022

Proposición 19. *Si* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *son de términos positivos y si* $0 < \lim \frac{a_n}{b_n} < \infty$*, entonces ambas series divergen o ambas series convergen.*

Demostración. Suponga que

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = L < \infty,$$

entonces $\forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N$, se cumple

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \varepsilon$$

$$\implies b_n(L - \varepsilon) < a_n < b_n(L + \varepsilon)$$

Si b_n converge $\implies$ como $a_n < b_n(L + \varepsilon), \forall n \geq N \implies \sum a_n$ converge.

Si b_n diverge $\implies b_n(L - \varepsilon) < a_n, \forall n \geq N \implies \sum a_n$ diverge $\blacksquare$

Proposición 20. *Si* $\sum b_k$ *converge y* $0 \leq a_k \leq b_k$*, entonces* $\sum a_n$ *converge.* *Si* $\sum c_k$ *diverge y* $0 \leq c_k \leq d_k$*, entonces* $\sum d_k$ *diverge.*

Demostración. Como $\sum b_k$ converge $\implies$ la sucesión de sumas parciales de $\sum b_k$ converge $\implies$ dicha sucesión es de Cauchy. $\implies$ $\forall k$ y $\forall p$, se tiene:

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+p} \leq b_{k+1} + b_{k+2} + \cdots + b_{k+p},$$

entonces, la sucesión de sumas parciales de $\sum a_k$ es de Cauchy $\implies$ es convergente.

■

Clase: 04/10/2022

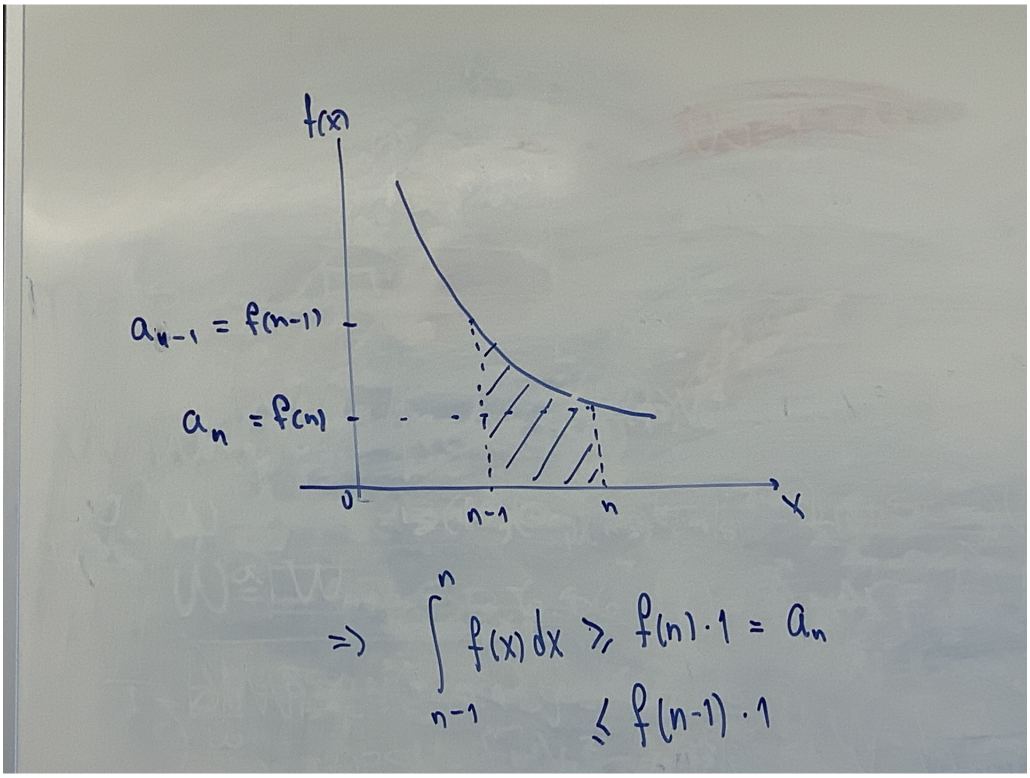
Ejemplo 33. *Sea la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p > 0 \implies a_n = \frac{1}{n^p}$ *(positivo y decreciente). Entonces, sea* $f(x) = 1/x^p (f(n) = 1/n^p)$. *Sea entonces, Si* $p \neq 1$*:*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{\infty} \tag{1}$$

Si $p > 1$ *converge, si* $p < 1$ *diverge.*

El otro caso, si $p = 1$ *diverge.*

Teorema 24 (Criterio de la integral)**.** *Suponga que* f *es una función positiva y decreciente en* $[1, \infty)$. *Entonces, la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge ssi* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *converge donde* $f(k) = a_k, \forall k \in \mathbb{Z}^+$.



Demostración. Se tiene:

- ($\Longleftarrow$) Suponga que $\int_1^\infty f(x)dx$ converge. Se tiene:

$$f(2)+f(3)+\cdots+f(k) \le \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \cdots + \int_{k-1}^k f(x)dx$$

$$a_2+a_3+\cdots+a_k \le \int_1^k f(x)dx$$

$$a_1+\cdots+a_k \le a_1 + \int_1^k f(x)dx$$

  Si $S_k = a_1+\cdots+a_k \implies S_k$ es una sucesión creciente y acotada superiormente $\implies S_k$ converge $\implies \sum_{n=1}^\infty a_k$ converge.

- ($\Longrightarrow$) Suponga que $\int_1^\infty f(x)dx$ diverge. Nótese que

$$\int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \cdots + \int_k^{k+1} f(x)dx \le a_1+a_2+\cdots+a_k$$

  Entonces

$$\int_1^{k+1} f(x)dx \le a_1+\cdots+a_k = S_k$$

  Entonces, la sucesión S_k está acotada inferiormente por una integral divergente, entonces $\sum_{n=1}^\infty a_n$ diverge.

■

Proposición 21 (Criterio de la raíz)**.** *Sea* $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1$. *Si* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *es t.q., (si para* $n \ge N$, *se tiene que...)* $a_n \ge 0$,

$$\sqrt[n]{a_n} \le \alpha,$$

entonces $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *converge.*

Demostración. Nótese que, $\forall n \geq N$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_n} &\leq \alpha \\ a_n &\leq \alpha^n \\ \sum_{n=N}^{\infty} a_n &\leq \sum_{n=N}^{\infty} \alpha^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n, \end{aligned}$$

donde $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ converge por ser serie geométrica. Entonces, por el criterio de comparación $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

> **NOTA.** *Nótese que si $\forall n \geq N$ se tiene que*
>
> $$\sqrt[n]{a_n} > 1 \implies a_n > 1 \implies \lim_{n\to\infty} a_n \leq 0$$
>
> *Entonces, por criterio de divergencia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.*

■

Proposición 22 (Criterio de la razón)**.** *Suponga que para algún $r < 1, a_n > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r,$$

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Demostración. Sabemos que

$$a_{n+1} \leq a_n r$$

Entonces,

$$\begin{aligned} a_{n+2} &\leq a_{n+1} \cdot r \leq a_n r^2 \\ &\vdots \\ a_{n+k} &\leq a_n r^k \end{aligned}$$

para $n \geq N$, se tiene que

$$a_{N+k} \leq a_N r^k$$

Entonces

$$\begin{aligned}|S_{N+k} - S_N| &= \left|\sum_{n=N}^{N+k} a_n\right| \\ &= \sum_{k=n}^{N+k} a_n \\ &\leq a_N r^k\end{aligned}$$

Como $r < 1 \implies S_n$ es de Cauchy. $\implies S_n$ converge $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ■

Teorema 25 (Convergencia absoluta). *Si $\sum a_k$ converge absolutamente $\implies$ $\sum a_k$ converge.*

Demostración. Si $\sum a_k$ converge absolutamente $\implies |a_k|$ converge $\implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni n \geq N$,

$$|S_{n+p} - S_n| = \sum_{k=n}^{n+p} |a_k| < \varepsilon, \forall p = 1, 2, \cdots$$

Además, sea S'_n la sucesión de sumas parciales de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Entonces,

$$\left|S'_{n+p} - S'_n\right| = \left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$$

Entonces, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. ■

Ejemplo 34. *Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Considere*

$$\begin{aligned}\left|\frac{z^n}{n}\right| &= \frac{|z|^n}{n} \\ &\leq |z|^n = r^n\end{aligned}$$

Entonces, tenemos $|z| \leq r$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} r^n,$$

la cual converge para $r < 1 \implies$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge absolutamente y uniformemente en:

$$A_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r < 1\}$$

Clase: 06/10/2022

Teorema 26 (M-test de Weierstrass)**.** *Sea $g_n(z)$ una sucesión de funciones definidas sobre $A \subseteq \mathbb{C}$, suponga que existe una sucesión de números reales $M_n \geq 0 \ni$ satisfacen:*

1. $|g_n(z)| \leq M_n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *converge.*

Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ converge uniformemente y absolutamente.

Demostración. Por hipótesis, sabemos $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge $\implies \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N$ entonces, $|\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k| < \varepsilon, \forall p = 1, 2, \cdots$. De nuevo, si $n \geq N$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |g_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_n < \varepsilon, \forall p = 1, 2, \cdots, \forall z \in A.$$

Por el criterio de Cauchy, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ converge absoluta y uniformemente. ∎

Ejemplo 35. *Considere la serie siguiente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+z^2}$, donde $z \in \mathbb{C} - \{ni : n \in \mathbb{Z}^+\}$*

1. *Nótese que (tomando convergencia absoluta),*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{n^2+z^2}\right|}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2}{n^2+z^2}\right| = 1$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge $\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+z^2}$ converge absolutamente $\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+z^2}$ converge.

2. *Sea D un subconjunto acotado de $\mathbb{C} - \{ni : n \in \mathbb{Z}^+\}$. Es dcir, $\exists c \geq 0 \ni |z| \leq c, \forall z \in D$. Entonces,*

$$|n^2 + z^2| \geq |n^2| - |z^2| = |n|^2 - |z|^2 \geq n^2 - c^2$$

Entonces,

$$\left| \frac{1}{n^2 + z^2} \right| \leq \frac{1}{n^2 - c^2} = M_n.$$

A probar: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - c^2}$ converge.

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{1}{n^2 - c^2}}{\frac{1}{n^2}} \right| = 1$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - c^2}$ converge. Entonces, por el $M-$test, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}$ converge absoluta y uniformemente sobre D.

Proposición 23. *Sea $\gamma : [a, b] \to A \subseteq \mathbb{C}$, una curva sobre la región A, y sea (f_n) una sucesión de funciones continuas definidas sobre $\gamma([a, b])$, que converge uniformemente a una función f sobre $\gamma([a, b])$. Entonces,*

$$\int_\gamma f_n \to_{unif} \int_\gamma f$$

Proposición 24. *Sabemos que f_n es continua $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ y que $f_n \to_{unif} f \implies f$ es continua $\implies f$ es integrable. Además, dado $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N$, entonces $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in \gamma([a, b])$*

$$\left| \int_\gamma f_n - \int_\gamma f \right| = \left| \int_\gamma (f_n - f) \right| \leq \int_\gamma |f_n - f| < \varepsilon \cdot l(\gamma)$$

Por la arbitrariedad de ε, se tiene que $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$

Clase: 11/10/2022

Teorema 27 (De convergencia analítica)**.** *Sea A un conjunto abierto de $\mathbb{C}$ y sea (f_n) una sucesión de funciones analíticas definidas sobre A. Si $f_n \to_{unif} f$ sobre cada disco cerrado contenido en A, entonces f es analítica. Además, $f'_n \to f'$ puntualmente sobre A y uniformemente sobre cada disco cerrado en A.*

Demostración. Tenemos

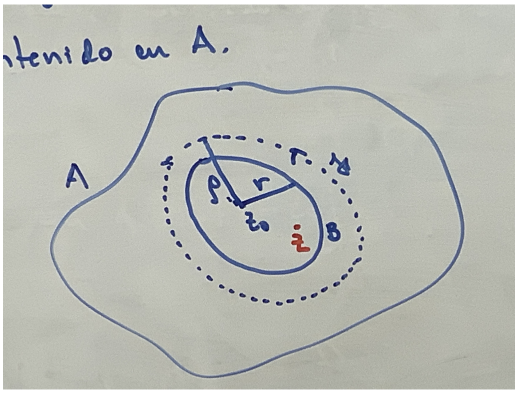
1. Sea $z_0 \in A$ y sea $B = \{z : \underbrace{|z - z_0|}_{\in A} \leq r\} = D_r[z_0] \subseteq A$
2. Nótese que $D_r[z_0]$ es simplemente conexo.
3. Como $f_n \to_{unif} f$ sobre cada $D_r[z_0] \implies f_n \to_{unif} f$ sobre $D_r(z_0)$.
4. Como f_n es analítica, $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \implies f_n$ es continua. Entonces, f es continua en el disco abierto $D_r(z_0)$.

$\implies$ como f_n es analítica sobre el simplemente conexo $D_r(z_0)$, por el teorema de Cauchy $\int_\gamma f_n = 0$, para cualquier curva cerrada γ en $D_r(z_0)$. Entonces por la propiedad anterior, $\int_\gamma f = 0$, y por Morera, f es analítica sobre $D_r(z_0)$. ■

Demostración. Sea

1. Sea $z_0 \in A$ y sea $B = \{z : \underbrace{|z - z_0|}_{\in A} \leq r\} = D_r[z_0] \subseteq A$.

2. Sea γ centrado en z_0 y con radio $\rho > r$ y contenido en A.



$\forall z \in B$, se tiene:

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(\psi)}{(\psi - z)^2} d\psi$$

y

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\psi)}{(\psi - z)^2} d\psi$$

3. Como $f_n \to_{unif} f$ sobre discos cerrados en $A \implies f_n \to_{unif} f$ es $\{z : |z - z_0| \leq \rho\} \subset A \implies$ Dado $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \implies |f_n(\psi) - f(\psi)| < \varepsilon, \forall \psi \in \gamma$

4. Entonces,

$$\begin{aligned} |f_n'(z) - f'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \frac{f_n(\psi) - f(\psi)}{(\psi - z)^2} d\psi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi\rho \end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_n(\psi) - f(\psi)}{(\psi - z)^2} \right| &\leq \frac{\varepsilon}{|\psi - z|^2} \left[\frac{\varepsilon}{(p - r)^2} \right] \\ &= \frac{\varepsilon\rho}{(\rho - r)^2} \end{aligned}$$

con $|\psi - z| > \rho - r \implies \frac{1}{|\psi - z|} < \frac{1}{\rho - r}$

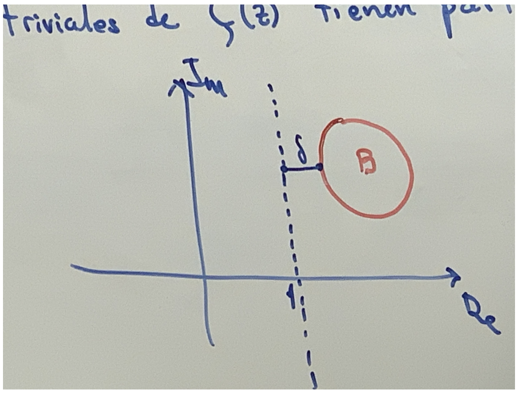
■

Ejemplo 36. *Muestre que la función ζ de Riemann definida*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

es analítica sobre $A = \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$

> *Hipótesis de Riemann(1859): Todos los ceros no triviales de $\zeta(z)$ tienen parte real igual a $1/2$.*



con distancia δ

Solución. Sea B un disco cerrado contenido en A y con distancia δ de la vertical $\operatorname{Re} z = 1$. A probar: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ converge uniformemente sobre B. Nótese que, si $z = x + iy \in B$, entonces

$$\begin{aligned} |n^{-z}| &= |e^{-z\log n}| \\ &= |e^{-(x+iy)\log n}| \\ &= |e^{-x\log n}| = n^{-x}, x \geq 1 + \delta \end{aligned}$$

Entonces, si $z \in B \implies |n^{-z}| \leq n^{-(1+\delta)} = M_n$. Además, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$ converge por p-series $\implies$ por M-test se tiene $\zeta(z)$ converge uniformemente sobre cada disco cerrado $B \subseteq A \implies \zeta(z)$ es analítica sobre A. □

4. Producto cartesiano generalizado

Sea X_α un conjunto $\forall a \in A$. El producto cartesiano de los X_α es el conjunto

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \left\{ x : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha : x(\alpha) \in X_\alpha, \forall \alpha \in A \right\}$$

Ejemplo 37. *Sea* $A = \{1, 2\}, X_1 = \{a, e, i\}, X_2 = \{o, u\}$.

1. *Primera función*

$$X_1(1) = a$$
$$X_1(2) = o$$

2. *Segunda función*

$$X_2(1) = a$$
$$X_2(2) = u$$

3. *Tercera función*

$$X_3(1) = e$$
$$X_3(2) = o$$

4. *Cuarta función*

$$X_4(1) = e$$
$$X_4(2) = u$$

5. *Quinta función*

$$X_5(1) = i$$
$$X_5(2) = o$$

6. Sexta función

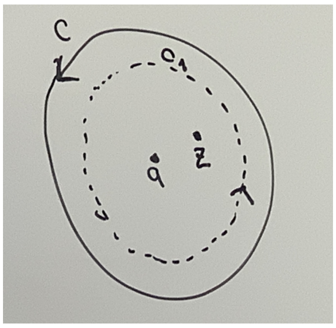
$$X_6(1) = i$$
$$X_6(2) = u$$

Clase: 11/10/2022

Teorema 28 (Taylor)**.** *Si $f(z)$ es analítica en el interior de un círculo C con centro en $z = a$, $\forall z$ en el interior de C, se tiene que:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}}_{a_n}(z-a)$$

Demostración. Sea



Sea z un punto interior del círculo c_1 centrado en a y contenido en el interior de C.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{f(w)}{w-z}dz$$

Sea

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(w-a)-(z-a)} \\
&= \frac{1}{w-a}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{w-a}\right)}\right] \\
&= \left|\frac{z-a}{w-a}\right| \\
&= \frac{|z-a|}{|w-a|} < 1
\end{aligned}$$

Sea ahora

$$
\begin{aligned}
\frac{1-\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n}{1-\frac{(z-a)}{w-a}} &= 1+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)+\cdots+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n-1} \\
\frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{w-a}\right)} &= 1+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2+\cdots\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n-1}+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} \\
\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-a}\left[1+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2+\cdots++\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n-1}\right]+ \\
&\quad+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{w-z}\right) \\
&= \frac{1}{w-a}+\frac{(z-a)}{(w-a)^2}+\cdots+\frac{(z-a)^{n-1}}{(w-a)^n}+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\cdot\frac{1}{w-z} \\
\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(w)}{w-z}dw &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{1}{w-a}dw+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{(z-a)}{(w-a)^2}dw+\cdots+ \\
&\quad+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(w)(z-a)^{n-1}}{(w-a)^n}dw+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{\left(f(w)\frac{z-a}{w-a}\right)^n}{w-z}dw \\
f(z) &= f(a)+f'(a)(z-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)(a)}}{(n-1)!}(z-a)^{n-1}+R_n
\end{aligned}
$$

donde

$$
R_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(w)(z-a)^n}{(w-z)(w-a)^n}dw
$$

A probar: si $n\to\infty \implies R_n\to 0$. Nótese que

$$
\left|\frac{z-a}{w-a}\right|^n=\mu^n<1
$$

Además, $|w-z|=|(w-a)-(z-a)|\geq|(w-a)|-|(z-a)|=r_1-|z_1-a|$

Entonces,

$$
\frac{1}{w-z}\leq\frac{1}{r_1-|z-a|}
$$

Como f es continua sobre c_1, entonces $\exists M\geq 0\ni|f(w)|\leq M,\forall w\in c_1$. Entonces

$$
\begin{aligned}
|r_n| &= \frac{1}{2\pi i}\left|\frac{f(w)}{w-z}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n dw\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{[r_1-(z-a)]}\cdot\mu^n(2\pi r_1)
\end{aligned}
$$

Cuando $n\to\infty 0$ ■

Clase: 18/10/2022

Lema 29. *Suponga que $r_0 \geq 0$ y es tal que $|a_n|r_0^n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$, con $M \geq 0$. Entonces, para $r < r_0$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, converge absoluta y uniformemente sobre los conjuntos:*

$$A_r = \{z : |z - z_0| \leq r\}$$

Teorema 30. *Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge para $z = z_0 \neq 0$. Entonces, la serie converge*

1. *absolutamente para $|z| < |z_0|$*
2. *uniformemente para $|z| \leq |z_1|$ donde $|z_1| < |z_0|$*

Demostración. Como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ converge $\implies \lim_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$

Demostración. Dado $\varepsilon = 1 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \implies |a_n z_0^n - 0| < 1 \implies$ $|a_n| < |/|z_0|^n, \forall n \geq N$ ■

■

Proposición 25. *La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ tienen el mismo radio de convergencia y sea $0 < |z_0| < R$. Como la serie converge en $z = z_0 \neq 0$, entonces, $\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni |a_n| < 1/|z_0|^n, \forall n \geq N$. Por otro lado,*

$$|n a_n z^{n-1}| \leq n \cdot 1/|z_0|^n \cdot |z|^{n-1}, \forall n \geq N$$

Nótese que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\frac{1}{|z_0|^{n+1}|z|^n}}{n \cdot \frac{1}{|z_0|^n}|z|^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1 \implies |z| < |z_0|$$

Teorema 31. *Para cualquier región (disco cerrado) que está contenido en su círculo de convergencia, una serie de potencias:*

1. *Representa una función continua $f(z)$*
2. *Puede integrarse término a término y se obtiene la integral de $f(z)$*
3. *Puede derivarse término a término y se obtiene $f'(z)$*

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \implies f$ es analítica en z_0

4.1. Serie de Laurent

Clase: 25/10/2022

Teorema 32 (Laurent)**.** *Sean* $0 \leq r_1 < r_2$*,* $z_0 \in \mathbb{C}$ *y considere la región* $A = \{z \in \mathbb{C} : r < |z_1 - z_0| < r_2\}$*. Sea* f *una función analítica sobre* A*. Entonces,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

donde ambas series convergen absolutamente sobre A *y uniformemente sobre los conjuntos*

$$B_{\rho_1, \rho_2} = \{z : \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\},$$

$r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$*. Si* γ *es un círculo centrado en* z_0 *y con radio* r*,* $r_1 < r < r_2$*, entonces:*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\psi)}{(\psi - z_0)^{n+1}} d\psi, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \\ b_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\psi)(\psi - z_0)^{n-1} d\psi, \quad n = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

La expansión de Laurent para $f(x)$ *es única.*

Tenemos el residuo de la serie:

$$b_1 : \mathrm{Res}(f, z_0)$$

Ejemplo 38. *Encuentre la serie de Laurent de la función* $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$*, sobre:*

1. $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$

Solución. Sea

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} \\ &= \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{(1-1/z)} \end{aligned}$$

Ya que $|z| > \implies \frac{1}{|z|} = |1/z| < 1$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n \\ &= \frac{1}{z^2}\left[1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right] \\ &= \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots \end{aligned}$$

□

2. $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$

Solución. Sea

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} \\ &= \frac{1}{z(1-z)} \\ &= -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(1-z)} \\ &= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad 0<|z|<1 \\ &= -\frac{1}{z}\left[1+z+z^2+\cdots\right] \\ &= -\frac{1}{z}-1-z-z^3-\cdots \end{aligned}$$

□

Ejemplo 39. *Encuentre la serie de Laurent de*

$$f(z) = \frac{z+1}{z}, \quad z_0 = 0, r_1 = 0, r_2 = +\infty$$

Solución. Sea

$$f(z) = \frac{z+1}{z} = 1 + \frac{1}{z}$$

$\square$

Ejemplo 40. *Encuentre el desarrollo de Laurent de*

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}, z_0 = i, r_1 = 0, r_2 = 2$$

Solución. Sea

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{z^2+1} = \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-i} \\ &= \frac{1/2}{z+i} + \frac{1/2}{z-i} \end{aligned}$$

Nótese que $(1/2)/(z+i)$ es una función analítica en una vecindad de $z_0 = i$.

$$\begin{aligned} \frac{1/2}{z+i} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2i+(z-i)}\right] \\ &= \frac{1}{4i}\left[\frac{1}{1-\left[-\frac{(z-i)}{2i}\right]}\right] \end{aligned}$$

Nótese que $\left|-\frac{(z-i)}{2i}\right| = \left|\frac{z-i}{2}\right| < 2/2 = |$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{(z-i)}{2i}\right]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{4i}\cdot\left(\frac{1}{2i}\right)^n\right](z-i)^n \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{4i}\cdot\left(\frac{1}{2i}\right)^n\right](z-i)^n + \frac{1/2}{z-i}$$

$\square$

Definición 23. *Tenemos:*

1. *Si f es analítica sobre una región A que contiene una vecindad **pinchada** de z_0, entonces z_0 es una **singularidad** aislada de f.*

2. *Sea z_0 una singularidad aislada de f y suponga que un número finito de las b_n son no nulos. Entonces, z_0 es un polo de f.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_k}{(z - \underbrace{z_0}_{\text{polo de orden } k})^k}$$

> *Si z_0 es un polo de orden 1, entonces z_0 es un polo simple.*

3. *Si un número infinito de $b_k \neq 0$, entonces z_0 es una singularidad esencial.*

4. *Al coeficiente b_1 se le llama residuo de f en z_0. $\mathrm{Res}(f; z_0)$.*

5. *Si $b_k = 0, \forall k = 1, 2, \cdots$, entonces z_0 es una singularidad removible.*

6. *Una función que es analítica en una región A excepto para polos en A se dice una función **meromorfa** en A.*

Teorema 33. *Sea f una función analítica sobre una región A, que tiene una singularidad aislada z_0, con residuo $\mathrm{Res}(f; z_0) = b_1$. Si γ es cualquier círculo cerrado alrededor de z_0 en A, cuyo interior, excepto z_0, está contenido en A, entonces:*

$$\int_\gamma f(z)dz = b_1 \cdot 2\pi i$$

Demostración. Por el teorema de Laurent,

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\psi)(\psi - z_0)^{1-1} d\psi.$$

■

Teorema 34. *Sea f analítica sobre una región A y suponga que f tiene una singularidad aislada en z_0.*

1. z_0 es removible ssi se cumple alguna de las condiciones siguientes:

a) *f es acotada en una vecindad pinchada de z_0*

b) *Límite,*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) \quad \textit{existe}$$

c) *Límite*

$$\lim_{z\to z_0} f(z-z_0)f(z) = 0$$

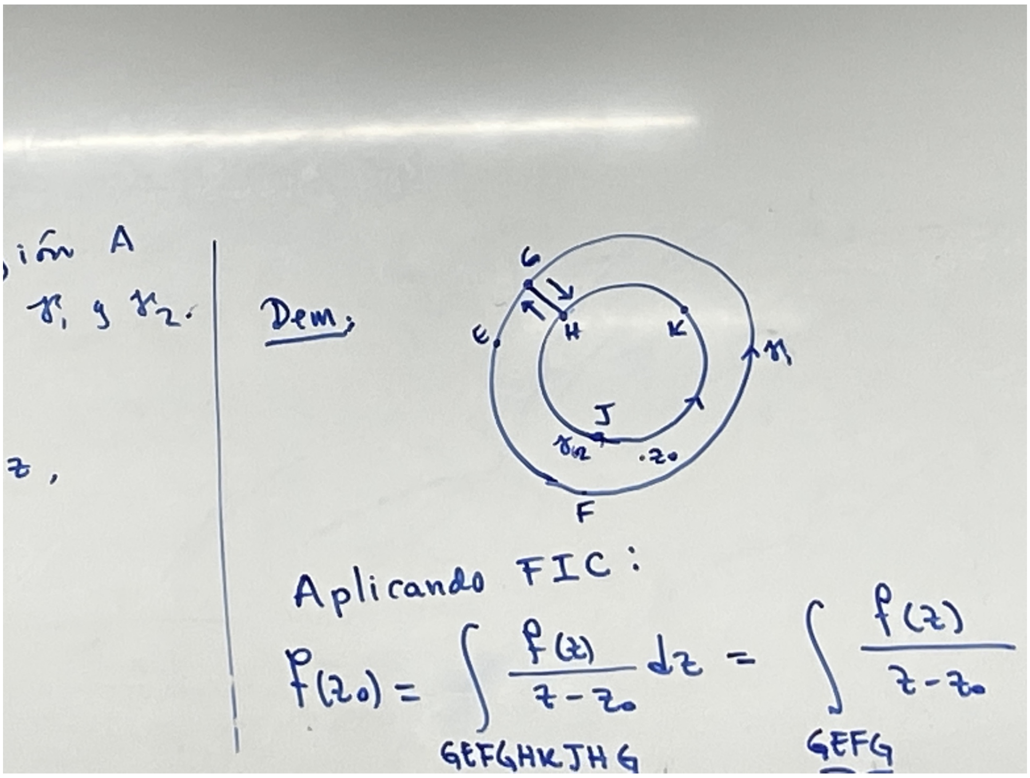
2. z_0 es un polo simple ssi $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ existe y no es 0. Además $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \mathrm{Res}(f; z_0)$.

Clase: 03/11/2022

Lema 35. *Sea $f(z)$ analítica en una región A acotada por los círculos concéntricos γ_1 y γ_2. Si $z_0 \in A$, entonces:*

$$f(z_0) = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0}dz - \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

Demostración. Sea

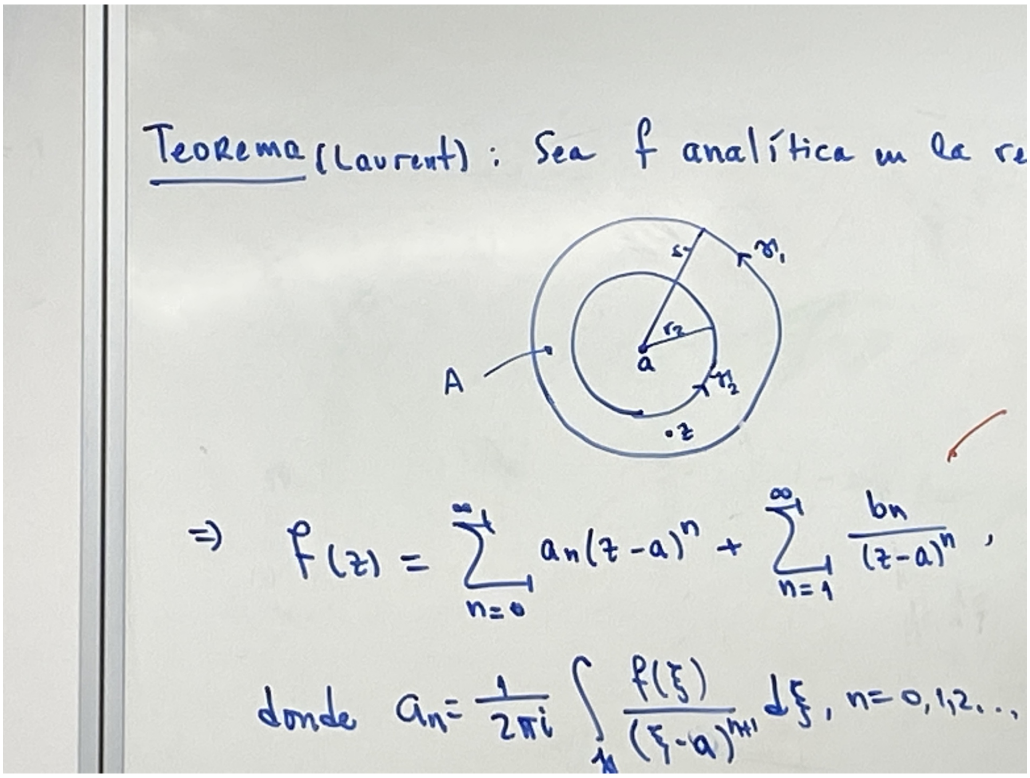


Aplicando FIC:

$$
\begin{aligned}
f(z_0) &= \int_{GEFGHJHG} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \\
&= \int_{\underbrace{GEFG}_{\gamma_1}} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \int_{GH} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \int_{\underbrace{HKJH}_{-\gamma_2}} \frac{f(z)}{z-z_0} + \int_{HG} \frac{f(z)}{z-z_0} dz
\end{aligned}
$$

■

Teorema 36 (Laurent)**.** *Sea f analítica en la región A:*



$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n} \\
a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\psi)}{(\psi - a)^{n+1}} d\psi, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \\
b_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} f(\psi)(\psi - a)^{n+1} d\psi, n = 1, 2, \cdots
\end{aligned}
$$

Tenemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Demostración. Por lema,

$$f(z) = \int_{\gamma_1} \frac{f(\psi)}{\psi - z} d\psi - \int_{\gamma_2} \frac{f(\psi)}{\psi - z} d\psi$$

Para γ_1:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\psi-a} &= \frac{1}{(\psi-a)-(z-a)} \\ &= \frac{1}{(\psi-a)}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{\psi-a}\right)}\right]\end{aligned}$$

Nótese que $\left|\frac{z-a}{\psi-a}\right| = \frac{|z-a|}{|\psi-a|} < 1$

Entonces nótese que

$$\begin{aligned}\implies \quad & 1+\left(\frac{z-a}{\psi-a}\right)+\left(\frac{z-a}{\psi-a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-a}{\psi-a}\right)^{n-1} = \frac{1-\left(\frac{z-a}{\psi-a}\right)^n}{1-\left(\frac{z-a}{\psi-a}\right)} \\ \implies \quad & \frac{1}{1-\frac{(z-a)}{(\psi-a)}} = 1+\left(\frac{z-a}{\psi-a}\right)+\cdots+\left(\frac{z-a}{\psi-a}\right)^{n-1}+\frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{\psi-a}\right)}\left(\frac{z-a}{\psi-a}\right)^n \\ \implies \quad & \frac{1}{\psi-z} = \frac{1}{\psi-a}+\frac{(z-a)}{(\psi-a)^2}+\cdots+\frac{(z-a)^{n-1}}{(\psi-a)^n}+\frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{\psi-a}\right)}\cdot\frac{(z-a)^n}{(\psi-a)^{n+1}}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1}\frac{f(\psi)d\psi}{\psi-z} &= \int_{\gamma_1}\frac{f(\psi)d\psi}{\psi-a}+\left[\int_{\gamma_2}\frac{f(\psi)}{(\psi-a)^2}d\psi\right](z-a)+ \\ &\quad+\left[\int_{\gamma_1}\frac{f(\psi)}{(\psi-a)^n}d\psi\right](z-a)^{n-1}+\underbrace{\int_{\psi_1}\frac{f(\psi)}{\psi-z}\left(\frac{z-a}{\psi-a}\right)^n d\psi}_{u_n} \\ &= a_0(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots+a_{n-1}(z-a)^{n-1}+u_n\end{aligned}$$

Para γ_2 :

$$\frac{1}{\psi-z} = -\frac{1}{z-\psi} = -\frac{1}{(z-a)-(\psi-a)} = -\frac{1}{z-a}\left[\frac{1}{1-\frac{\psi-a}{z-a}}\right]$$

Nótese que $\left|\frac{z-a}{z-a}\right| < 1$:

$$= -\left[\frac{1}{z-a} + \frac{(\psi - a)}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{(\psi - a)^{n-1}}{(z-a)n} + \frac{1}{1-\left(\frac{\psi - a}{z-a}\right)}\frac{(\psi - a)^n}{(z-a)^{n+1}}\right]$$

Entonces

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(\psi)}{(\psi - z)} d\psi = -\left[\int_{\gamma_2} \frac{f(\psi)}{z-a}(\psi - a) d\psi + \cdots + \int_{\gamma_2} \frac{f(\psi)}{(z-a)^n}(\psi - a)^{n-1} d\psi \right.$$
$$\left. + \underbrace{\int_{\gamma_2} \frac{f(\psi)}{(z-a)^n} \cdot \frac{(\psi - a)^n}{z - \psi} d\psi}_{v_n}\right]$$

Entonces,

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + u_n + \frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{(z-a)^n} + v_n$$

A probar: $u_n \to_{n\to\infty} 0$

Tenemos que

$$|u_n| = \left|\int_{\gamma_1} \frac{f(\psi)}{\psi - z}\frac{(z-a)^n}{(\psi - a)^n}\right| \leq \frac{2\pi r_1 \cdot \underbrace{|f(\psi)|}_{M} \lambda^n}{r_1 - |z-a|} \to_{n\to\infty} 0$$

Sea $\lambda = \left|\frac{z-a}{\psi - a}\right|$, en donde

$$|\psi - z| = |(\psi - a) - (z-a)| \geq |\psi - a| - |z-a| = r_1 - |z-a|$$

■

Clase: 03/11/2022

Teorema 37 (de Residuos). *Sea $f(z)$ una función analítica en el interior y sobre una curva cerrada y simple γ, excepto en un número finito de discontinuidades aisladas $a, b, c, \cdots$ en el interior de γ, cuyos residuos son $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \cdots$, respectivamente. Entonces,*

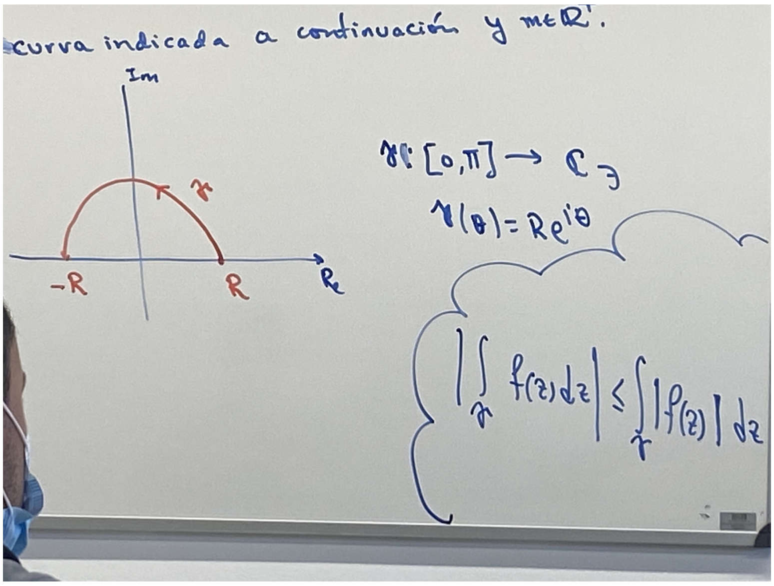
$$\int_\gamma f = 2\pi i \left[a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \cdots\right]$$

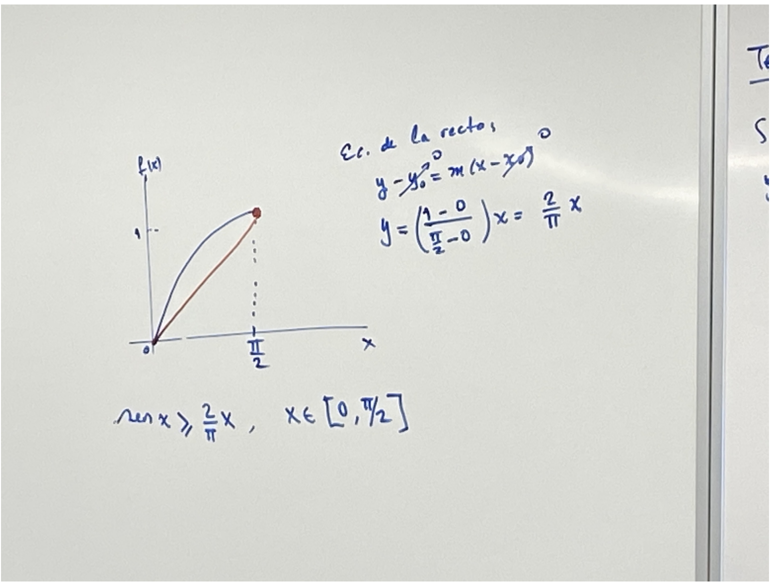
Aplicaciones

Lema 38. *Sea $|F(z)| \leq M/R^k$, donde $z = Re^{i\theta}, k > 0$ y M es una constante. Entonces,*

$$\lim_{R\to\infty} \int_\gamma e^{imz} F(z) dz = 0,$$

de γ es la curva indicada a continuación y $m \in \mathbb{R}^+$.





Demostración. Sea

$$
\begin{aligned}
\left|\int_\gamma e^{imz} F(x)dz\right| &= \left|\int_0^\pi e^{imRe^{i\theta}} F(Re^{i\theta}) \cdot iRe^{i\theta} d\theta\right| \\
&= \left|\int_0^\pi e^{-mR\sin\theta + imR\cos\theta} \cdot F(Re^{i\theta}) \cdot iRe^{i\theta} d\theta\right| \\
&\leq \int_0^\pi \left|e^{-mR\sin\theta + imR\cos\theta}\right| |F(Re^{i\theta})| \cdot |iRe^{i\theta}| d\theta \\
&\leq \int_0^\pi e^{-mR\sin\theta} \frac{M}{R^k} \cdot R d\theta \\
&= \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^\pi e^{-mR\sin\theta} d\theta
\end{aligned}
$$

Nótese que: $\sin\theta \geq 2\theta/\pi, \theta \in [0, \pi/2]$, tal que $e^{-Rm\sin\theta} \leq e^{-Rm(2\theta/\pi)}$. Además, sea $\alpha = \theta/2$ y $2d\alpha = d\theta$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin(2\alpha)} d\alpha \\
&\leq \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR\frac{2}{\pi}(2\alpha)} d\alpha \\
&= \frac{2M}{R^{k-1}} \left(\frac{-\pi}{4\pi R}\right) e^{-mR\frac{4}{\pi}\alpha} \Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{-M\pi}{R^k(2m)} \left[e^{-2mR} - 1\right] \to_{R\to\infty} 0
\end{aligned}
$$

■

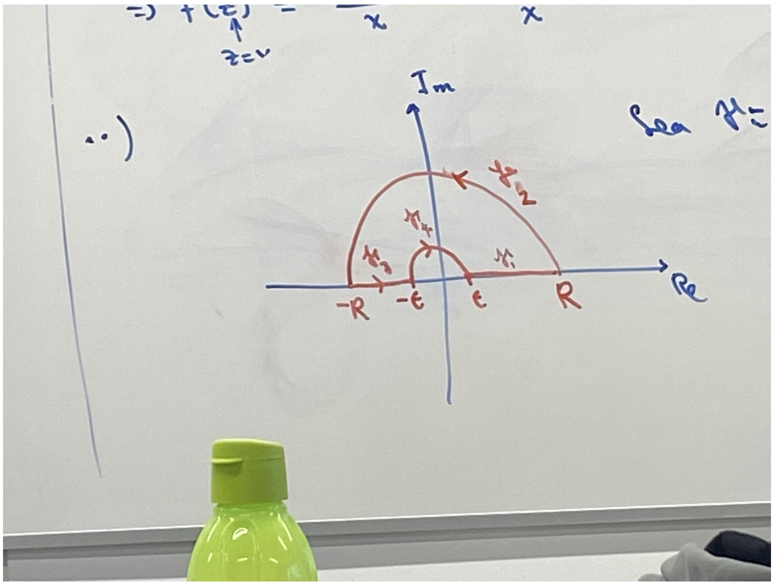
Ejemplo 41. *Compruebe que*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Solución. Sea

1. Sea $f(z) = \frac{e^{iz}}{z} = \frac{\cos z}{z} + i\frac{\sin z}{z}$. Si $z = x + iy$, con $y = 0$, entonces $f(x) = \frac{\cos x}{x} + i\frac{\sin x}{x}$

2. Sea la trayectoria:



Sea $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, donde

$$\gamma_1(t) = t + 0i, \varepsilon \leq t \leq R$$
$$\gamma_2(t) = Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$$
$$\gamma_3(t) = t + 0i, -R \leq t \leq -\varepsilon$$
$$\gamma_4(t) = \varepsilon e^{it}, \pi \leq t \leq 0$$

3. Tenemos por teorema de Cauchy

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

De esto,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f + \int_{\gamma_4} f &= 0 \\ \underbrace{\int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t}}_{A} + \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}} \cdot iRe^{it}}{Re^{it}}dt + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t}df + \int_\pi^0 \frac{e^{i\varepsilon e^{it}} \cdot i\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}} &= 0 \end{aligned}$$

Sea

a) Integral C:

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t}dt =$$

$t = -\tau$,$dt = -d\tau$

$$\begin{aligned} &= \int_R^\varepsilon \frac{e^{-i\tau}}{-\tau}(-1)d\tau \\ &= \frac{R}{\varepsilon}\frac{e^{-i\tau}}{\tau}d\tau = -\frac{\varepsilon}{R}\frac{e^{-i\tau}}{\tau}d\tau \\ &= -\int_\varepsilon^R \frac{e^{-it}}{t}dt \end{aligned}$$

b) Integral $A + C$:

$$\begin{aligned} A + C &= \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t}dt - \int_\varepsilon^R \frac{e^{-it}}{t}dt \\ &= \int_\varepsilon^R \frac{(e^{it} - e^{-it})}{t}dt \\ &= 2i\int_\varepsilon^R \frac{\sin t}{t}dt \end{aligned}$$

c) Integral B

$$i\int_0^\pi e^{iRe^{it}}dt \to_{R\to\infty} 0$$

d) Integral D:

$$i\int_{\pi}^{0} e^{i\varepsilon e^{it}}dt \to_{\varepsilon\to 0} i\int_{\pi}^{0} dt = i\int_{\pi}^{0} dt = -i\int_{0}^{\pi} = -i\pi$$

Entonces,

$$2i\int_{0}^{\infty} \frac{\sin t}{t}dt = i\pi$$

□

Clase: 03/11/2022

Teorema 39. *Sea $f(z)$ una función analítica en el interior sobre una curva cerrada y simple γ, excepto en un polo a de orden m en el interior de γ. Entonces,*

$$a_{-1} = \mathrm{Res}(f;a) = \lim_{z\to a} \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]$$

Demostración. Como f tiene un polo de orden m en a, entonces,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{a_{-m}}{(z-a)^m}$$

Entonces

$$(z-a)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^{n+m} + \frac{a_{-1}(z-a)^m}{z-a} + \frac{a_{-1}(z-a)^m}{z-a} + \frac{a_{-2}(z-a)^m}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{a_{-m}(z-a)^m}{(z-a)^m}$$

Entonces $(z-a)^m f(z)$ es analítica, por lo que

$$\frac{d^{m-1}(z-a)^m f(z)}{dz^{m-1}} = \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^{n+m} + (m-1)!a_{,1}$$

Si $z \to a$:

$$\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}(z-a)^m f(z)}{dz^{m-1}} = (m-1)!a_{-1}$$

■

NOTA. *Sea*

1. *Si* $f(z)$ *tiene un cero de orden (multiplicidad algebraica)* m *en* $z_0 \implies$ $g(z) = 1/f(z)$ *tiene un polo de orden* m *en* z_0.

2. *Suponga que* f *es analítica en* $0 < |z - z_0| < \varepsilon$

   a) f *tiene singularidad removible en* z_0, *si*

   $$\lim_{z \to z_0} f(z) \cdot (z - z_0) \quad \textit{existe}$$

   b) $f(z)$ *tiene un 0 de orden* n *en* z_0 *si:*

   $$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^n},$$

   existe y es diferente de cero.

   c) $f(z)$ *tiene un polo de orden* n *en* z_0 *si*

   $$\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)^n$$

   existe y es diferente de cero.

Ejemplo 42. *Sea* $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$

1. *Sea* $\operatorname{Res}(f; z = 1) = \lim_{z \to 1} f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z}{(z+1)^2} = \frac{1}{4}$

2. *Sea*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f; z = -1) &= \lim_{z \to -1} \frac{d}{dz}(z+1)^2 f(z) \\
&= \lim_{z \to -1} \frac{d}{dz} \frac{z}{z-1} \\
&= \lim_{z \to -1} \frac{(z-1) - z}{(z-1)^2} = -1/4
\end{aligned}$$

Ejemplo 43. *Compruebe que*

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2 + 1} dz = \frac{\pi}{2} e^{-m}, m > 0$$

Solución. Sea

1. Sea

$$f(z) = \frac{e^{imz}}{z^2+1} = \frac{\cos mz}{z^2+1} + i\frac{\sin mz}{z^2+1}$$

   Nótese que si $z = x \implies \operatorname{Re} f(z) = \frac{\cos mx}{x^2+1}$

2. Sea

   Sea entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f; z=i) &= \lim_{z - i}(z-i)\frac{e^{imz}}{(z+i)(z-i)} \\ &= \frac{e^{-m}}{2i} = -i\frac{e^{m}}{2}\end{aligned}$$

   Entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z=i)$$

   Entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

   De esto

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^\pi \frac{e^{imRe^{it}}}{(Re^{it})^2+1} iRe^{it}dt$$

   A probar que:

$$\left|\frac{1}{z^2+1}\right| \le \frac{M}{R^k}$$

   Sea

$$|z^2+1| \ge |z|^2 - 1 = R^2 - 1 \implies \left|\frac{1}{z^2+1}\right| \le \frac{1}{R^2-1}$$

   Entonces si $R \to \infty \implies \int_\gamma f = 0$. Sea

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f &= \int_{-R}^{R} \frac{e^{imt}}{t^2+1}dt \\ &= \int_{-R}^{R} \left[\frac{\cos mt}{t^2+1} + i\frac{\sin mt}{t^2+1}\right] dt\end{aligned}$$

Entonces

$$\int_{\gamma_2} f = 2\pi i \operatorname{Res}(f; z = i) = 2\pi i \left(-\frac{i}{2}e^{-m}\right)$$
$$= \pi e^{-m}$$

Por partidad:

$$2\int_0^R \frac{\cos mt}{t^2+1}dt = \pi e^{-m}$$

$$R \to \infty \implies \int_0^\infty \implies \int_0^\infty \frac{\cos mt}{t^2+1}dt = \frac{\pi}{2}e^{-m}$$

$\square$

Clase: 17/11/2022

Engel-Demidovich

Ejemplo 44. *Compruebe*

$$\int_0^\infty \sin x^2 dz = \int_0^\infty \cos x^2 dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Solución. Sea

1. Sea $f(z) = e^{iz^2} = \cos z^2 + i\sin z^2$. Si $z = x \implies f(z) = \cos x^2 + i\sin x^2$

2. Sea

$\square$