Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2035 - Álgebra Moderna - Catedrático: Ricardo Barrientos
30 de noviembre de 2022

Tarea 23

Problemas 1, 2, 3, 4, 5 y 14, sección 5.5

Problema 1 (Problema 1)**.** *If F is of characteristic 0 and $f(x) \in F[x]$ is such that $f'(x) = 0$, prove that $f(x) = \alpha_0 \in F$.*

Demostración. Sea $f(x)$ de la forma:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_n x^n$$

y su derivada:

$$f'(x) = \alpha_1 + \cdots + (n-1)\alpha_{n-1} x^{n-2} + n\alpha_n x^{n-1} = 0$$

Entonces,

$$n\alpha_n = (n-1)\alpha_{n-1} = \cdots = \alpha_1 = 0.$$

Además, por la hipótesis, tenemos que F es de característica 0 $\implies n\alpha = 0, \forall \alpha \in F, n \in \mathbb{Z}$ es válido solo si $n = 0$ o $\alpha = 0$. Entonces, esto implica

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} = \cdots = \alpha_1 = 0$$

Por lo tanto,

$$f(x) = \alpha_0 \in F$$

■

Problema 2 (Problema 2)**.** *If F is of characteristic $p \neq 0$ and if $f(x) \in F[x]$ is such that $f'(x) = 0$, prove that $f(x) = g(x^p)$ for some polynomial $g(x) \in F[x]$.*

Demostración. Sea $f(x)$ de la forma:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_n x^n$$

y su derivada:

$$f'(x) = \alpha_1 + \cdots + (n-1)\alpha_{n-1} x^{n-2} + n\alpha_n x^{n-1} = 0$$

Entonces,

$$n\alpha_n = (n-1)\alpha_{n-1} = \cdots = \alpha_1 = 0.$$

Además, por la hipótesis, tenemos que F es de característica $p \neq 0 \implies n\alpha = 0, \forall \alpha \in F, n \in \mathbb{Z}$ es válido si $\alpha = 0$ o $p|n$. Es decir que para los coeficientes de x^c, los cuales no se hacen cero, tenemos el siguiente caso:

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_{pc}x^{pc} + \alpha_{p(c-1)}x^{p(c-1)} + \cdots + \alpha_p x^p + \alpha_0 \\ &= \alpha_{pc}(x^p)^c + \alpha_{p(c-1)}(x^p)^{c-1} + \cdots + \alpha_p(x^p) + \alpha_0 \end{aligned}$$

Ahora bien, nótese que la función anterior está evaluada por x^p, entonces

$$g(x) = \alpha_{pc}(x)^c + \alpha_{p(c-1)}x^{c-1} + \cdots + \alpha_p x + \alpha_0$$

Y al evaluar esta expresión por x^p, se tiene:

$$g(x^p) = \alpha_{pc}(x^p)^c + \alpha_{p(c-1)}(x^p)^{c-1} + \cdots + \alpha_p(x^p) + \alpha_0$$

Por lo tanto,

$$f(x) = g(x^p)$$

■

Problema 3 (Problema 3). *Prove that* $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ *and that* $(af(x))' = af'(x)$ *for* $f(x), g(x) \in F[x]$ *and* $\alpha \in F$.

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \alpha_n x^n \\ f'(x) &= \alpha_1 + \cdots + (n-1)\alpha_{n-1}x^{n-2} + n\alpha_n x^{n-1} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g(x) &= \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_{n-1}x^{n-1} + \beta_n x^n \\ g'(x) &= \beta_1 + \cdots + (n-1)\beta_{n-1}x^{n-2} + n\beta_n x^{n-1} \end{aligned}$$

Ahora bien, demostraremos las dos propiedades:

1. Sea

$$\begin{aligned} (f(x)+g(x))' &= (\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \alpha_n x^n + \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_{n-1}x^{n-1} + \beta_n x^n)' \\ &= ((\alpha_0+\beta_0) + (\alpha_1+\beta_1)x + \cdots + (\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})x^{n-1} + (\alpha_n+\beta_n)x^n)' \\ &= (\alpha_1+\beta_1) + \cdots + (n-1)(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})x^{n-2} + n(\alpha_n+\beta_n)x^{n-1} \\ &= (\alpha_1 + \cdots + (n-1)\alpha_{n-1}x^{n-2} + n\alpha_n x^{n-1}) + \\ &+ (\beta_1 + \cdots + (n-1)\beta_{n-1}x^{n-2} + n\beta_n x^{n-1}) \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

2. Sea

$$\begin{aligned}(af(x))' &= (a\left(\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \alpha_n x^n\right))' \\ &= a\alpha_1 x + \cdots + a(n-1)\alpha_{n-1}x^{n-2} + an\alpha_n x^n \\ &= a\left(\alpha_1 + \cdots + (n-1)\alpha_{n-1}x^{n-2} + n\alpha_n x^{n-1}\right) \\ &= af'(x)\end{aligned}$$

■

Problema 4 (Problema 4). *Prove that there is no rational function in $F(x)$ such that its square is x.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supóngase que hay una función racional $h(x)$ en $F[x]$ tal que:

$$\begin{aligned}\implies \quad & (h(x))^2 = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2 = x \\ \implies \quad & (f(x))^2 = xg(x)^2 \\ \implies \quad & f(x)f(x) = xg(x)g(x)\end{aligned}$$

Ahora bien, considérese los grados de esta igualdad

$$\begin{aligned}\operatorname{gr}(f(x)f(x)) &= \operatorname{gr}(f(x)) + \operatorname{gr}(f(x)) \\ &= 2\operatorname{gr}(f(x))\end{aligned}$$

y por otra parte,

$$\begin{aligned}\operatorname{gr}(xg(x)g(x)) &= \operatorname{gr}(xg(x)) + \operatorname{gr}(g(x)) \\ &= \operatorname{gr}(x) + \operatorname{gr}(g(x)) + \operatorname{gr}(g(x)) \\ &= 1 + 2\operatorname{gr}(g(x))\end{aligned}$$

Nótese que $2\operatorname{gr}(f(x))$ es par y $1 + 2\operatorname{gr}(g(x))$ es impar ($\rightarrow\leftarrow$). Por lo tanto, no hay una función racional en $F(x)$ tal que su cuadrado es x. ■

Problema 5 (Problema 5). *Complete the induction needed to establish the corollary to Theorem 5.5.1.*

Demostración. El corolario al Teorema 5.5.1 (Teorema K en nuestro caso), dice:

Toda extensión finita de un campo de característica 0 es simple.

A probar: Un argumento inductivo asegura que si $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son algebraicos sobre F entonces $\exists c \in F(\alpha_1, ..., \alpha_n) \ni F(c) = F(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Entonces, sea F un campo de característica 0 y procedemos por inducción sobre n:

- Cuando $n = 1$: α_1 es algebraico sobre F entonces $\exists c \in F(\alpha_1) \ni F(c) = F(\alpha)$, el cual se cumple por el Teorema K directamente.

- Supóngase que la propiedad se cumple para $k < n$, entonces si $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ son algebraicos sobre F, entonces $\exists c^* \in F(\alpha, \cdots, \alpha_{n-1}) \ni F(c^*) = F(\alpha, \cdots, \alpha_{n-1})$

- Paso inductivo, comprobaremos que la propiedades se cumple para cualquier n. Primero, nótese que:

$$\begin{aligned} F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) &= (F(\alpha, \cdots, \alpha_{n-1}), a_n) \\ &= (F(c^*), a_n) \\ &= F(c^*, a_n) \end{aligned}$$

  Ahora bien, nótese que ahora tenemos la hipótesis del Teorema 5K, lo que nos permite concluir que si $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ son algebraicos sobre F, entonces $\exists c \in F(c^*, a_n) \ni$

$$F(c) = F(c^*, a_n) = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n).$$

■

Problema 6 (Problema 14)**.** *If K is a finite, separable extension of F prove that K is a simple extension of F.*

Demostración. La demostración es por casos.

- Si F es de característica 0, es el mismo caso del **Problema 5**.

- Si F es de característica $p \neq 0$, entonces se aplica la **deducción del Teorema 5K** modificando el argumento de característica 0 en una de las contenciones:

  Sean $f(x), g(x) \in F[x]$ ambos irreducibles sobre F y $f(a) = f(b) = 0$. Sea k una extensión de F es la que $f(x)$ y $g(x)$ se factorizan como el producto de polinomios lineales en $K[x]$. Por el corolario al lema 5.6, todas las raíces de $f(x)$ y de $g(x)$ son distintos (i.e. no tienen raíces de multiplicidad 2 o mayor). Sean $\left\{a = a_1, \cdots, a_{gr(f)}\right\} \subseteq K$ las raices de $f(x)$ y $\left\{b = b_1, \cdots, b_{gr(g)}\right\} \subseteq K$ las raíces de $g(x)$.

  Si $j \neq 1 \implies$ la ecuación $a_i + \lambda b_j = a_1 + \lambda b_1 = a + \lambda b$ tiene una única solución en $K, a_i - a = \lambda (b - b_j) \implies \lambda = \frac{a_i - a}{b - b_j}$. Además, si F es de característica $p \neq 0$ $\implies F$ es infinito $\implies \exists \gamma \in F \ni a_i + \gamma b_j \neq a + \gamma b, \forall i = 1, \cdots, gr(f)$ y $j \neq 1$. Sea $c = a + \gamma b, c = a + \gamma b \in F(a, b) \implies F(c) \subset F(a, b)$.

  Como $g(b) = 0, b$ es raíz de $g(x) \in F[x] \implies b$ es raíz de $g(x) \in F(c)[x]$. Además, si $h(x) = f(c - \gamma x) \in F(c)[x]$ y $h(b) = f(c - \gamma b) = f(a) = 0$. $\implies$ existe una extensión de $F(c)$ sobre la cual $g(x)$ y $h(x)$ tienen a $x - b$ como factor común. Si $j \neq 1 \implies b_j \neq b$ es otra raíz de $g(x) \implies h(b_j) = f(c - \gamma b_j) \neq 0$ ya que $c - \gamma b_j$ no coincide con ninguna raíz de $f(x)$. Además, $(x - b)^2 \not| g(x) \implies (x - b)^2 / |(g(x), h(x)) \implies x - b = (g(x), h(x))$ sobre alguna extensión de $F(c)$. Por lema previo al lema 5,6, $x - b = (g(x), h(x))$ sobre $F(c)$. Entonces, $x - b \in F(c)[x] \implies b \in F(b) \implies a = c - \gamma b \in F(x) \implies F(a, b) \subseteq F(c)$.En resumen, $F(c) = F(a, b)$.

■