Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

Análisis de Variable Compleja - Catedrático: Dorval Carías
9 de octubre de 2022

Tarea 4

Página 87: 5,6,7, 10 (**)
Página 95: 1, 2

1. Página 87

Problema 1 (Problema 5 - Conway). *Let γ be a closed rectifiable curve in $\mathbb{C}$ and $a \notin \{\gamma\}$. Show that for $n \geq 2$ $\int_\gamma (z-a)^{-n} dz = 0$.*

Demostración. Debemos probar que para $n \geq 2$,

$$0 = \int_\gamma (z-a)^{-n} dz = \int_\gamma \frac{1}{(z-a)^n} dz$$

Sea G una región y sea $f : G \to \mathbb{C}$ una función analítica tal que $f(z) = 1$. Por hipótesis, γ es un curva cerrada rectificable en $\mathbb{C}$ y $a \notin \{\gamma\}$, entonces por **teorema 4.4**, $n(\gamma; w)$ es una constante, en donde $w \in \mathbb{C} - G$ y además $n(\gamma; w) = 0, \forall w \in \mathbb{C} - G$. Entonces, se tiene la hipótesis del **corolario 5.9 al teorema de la fórmula integral de Cauchy**, tal que para $a \in G - \{y\}$

$$f^{(k)}(a) \cdot n(\gamma; a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz$$

Si $k = n - 1$ y además se tenía que $f(z) = 1$, tal que:

$$f^{(n-1)}(a) \cdot n(\gamma; a) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(1)}{(z-a)^{(n-1)+1}} dz$$

Ahora bien, nótese que para $n \geq 2$, $f^{(n-1)}(a)$ es 0, entonces:

$$0 \cdot n(\gamma; a) = \int_\gamma \frac{1}{(z-a)^n} dz$$
$$0 = \int_\gamma (z-a)^{-n} dz.$$

■

Problema 2 (Problema 6 - Conway). *Let f be analytic on $D = B(0;1)$ and suppose $|f(z)| \leq 1$ for $|z| < 1$. Show $|f'(0)| \leq 1$.*

Demostración. Usando el teorema de las desigualdades de Cauchy, se tiene $|f(z)| \leq 1$ para $|z| < 1$:

$$|f^k(z_0)| \leq \frac{k!}{R^k}M, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$

Tenemos que $z_0 = 0, R = 1, M = 1$ y $k = 1$, tal que:

$$\begin{aligned} |f^1(0)| &\leq \frac{1!}{1^1}1 \\ |f^1(0)| &\leq 1. \end{aligned}$$

■

Problema 3 (Problema 7 - Conway). *Let $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ for $0 \leq t \leq 2\pi$. Find $\int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$ for all positive integers n.*

Demostración. Debemos probar que para $n \geq 1$,

$$\int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$$

Sea G una región y sea $f : G \to \mathbb{C}$ una función analítica tal que $f(z) = z^n$. Por hipótesis, γ es un curva cerrada rectificable en $\mathbb{C}$ y $a \notin \{\gamma\}$, entonces por **teorema 4.4**, $n(\gamma; w)$ es una constante, en donde $w \in \mathbb{C} - G$ y además $n(\gamma; w) = 0, \forall w \in \mathbb{C} - G$. Entonces, se tiene la hipótesis del **corolario 5.9 al teorema de la fórmula integral de Cauchy**, tal que para $a = 1 \in G - \{y\}$

$$f^{(k)}(1) \cdot n(\gamma; 1) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-1)^{k+1}} dz$$

Si $k = n - 1$ y además se tenía que $f(z) = z^n$, tal que:

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(1) \cdot n(\gamma; 1) &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z^n}{(z-1)^{(n-1)+1}} dz \\ f^{(n-1)}(1) \cdot n(\gamma; 1) &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz \\ f^{(n-1)}(1) \cdot \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-1} dz\right) &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz \\ f^{(n-1)}(1) \cdot \left(\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+e^{it}) - 1} ie^{it} dz\right) &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz \\ f^{(n-1)}(1) \cdot (1) &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz \end{aligned}$$

Nótese que

$$
\begin{aligned}
n = 1 \quad & f^0(1) = z^n = (1)^0 = 1 \\
n = 2 \quad & f^1(1) = nz^{n-1} = 2 \cdot (1)^1 = 2 \\
n = 3 \quad & f^2(1) = (n-1)nz^{n-2} = (2) \cdot 3 \cdot (1)^1 = 6 \\
n = 4 \quad & f^3(1) = (n-2)(n-1)nz^{n-3} = (2)(3)(4)(1)(1)^1 = 24 \\
\vdots \quad & \\
n = k \quad & f^{k-1}(1) = n!
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n! &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz \\
\frac{2\pi i \cdot n!}{(n-1)!} &= \int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz \\
\frac{2\pi i \cdot n(n-1)!}{(n-1)!} &= \int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz \\
2n\pi i &= \int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz
\end{aligned}
$$

■

Problema 4 (Problema 10 - Conway)**.** *Use Cauchy's Integral Formula to prove the Cayley-Hamilton Theorem: If A is an $n \times n$ matrix over $\mathbb{C}$ and $f(z) = \det(z - A)$ is the characteristic polynomial of A then $f(A) = 0$. (This exercise was taken from a paper by C. A. McCarthy, Amer. Math. Monthly, 82 (1975), 390-391).*

Demostración. Considerando a [1], por la fórmula integral de Cauchy aplicada a matrices, tenemos:

$$
\begin{aligned}
f(A) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\det(zI - A)}{zI - A} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \det(zI - A)(zI - A)^{-1} dz
\end{aligned}
$$

Además, consideramos que las entradas (k, l) de $(zI-A)^{-1}$ son $((zI-A)^{-1})_{k,l} = [1/\det(zI-A)] \cdot c_{k,l}(z)$ en donde $c_{k,l}$ son los cofactores de $(zI - A)$ y además cada $c_{k,l}$ es un polinomio en $f(z)$ de lo grado a lo más $n - 1$.

$$
\begin{aligned}
f_{k,l}(A) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \det(zI - A) \cdot \frac{c_{k,l}}{\det(zI - A)} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma c_{k,l} \, dz \\
&= 0
\end{aligned}
$$

■

2. Página 95

Problema 5 (Problema 1 - Conway)**.** *Let G be a region and let $\sigma_1, \sigma_2 : [0,1] \to G$ be the constant curves $\sigma_1(t) \equiv a, \sigma_2(t) \equiv b$. Show that if γ is closed rectifiable curve in G and $\gamma \sim \sigma_1$ then $\gamma \sim \sigma_2$. (Hint: connect a and b by a curve.)*

Demostración. Debemos probar que $\gamma \sim \sigma_2$. Ahora bien, nótese que $\sim$ es una relación de equivalencia, entonces si demostramos la transitividad, la prueba está resuelta. Es decir, es necesario probar $\sigma_1 \sim \sigma_2$. Por la definición de homotopía, de la hipótesis $\sigma_1, \sigma_2 : [0,1] \to G$ dos curvas rectificables y sea $\Gamma[0,1] \times [0,1] \to G$ definido como $\Gamma(s,t) = t(b-a) + a$ tal que:

$$\begin{cases} \Gamma(s,0) = a = \sigma_1(s) \quad \text{y} \quad \Gamma(s,1) = b = \sigma_2(s) \quad (0 \leq s \leq 1) \\ \Gamma(0,t) = \Gamma(1,t) \quad (0 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos que $\sigma_1 \sim \sigma_2$ y aplicando transitividad, tenemos que:

$$(\gamma \sim \sigma_1) \wedge (\sigma_1 \sim \sigma_2) \implies \gamma \sim \sigma_2.$$

■

Problema 6 (Problema 2 - Conway)**.** *Show that if we remove the requirement "$\Gamma(0,t) = \Gamma(1,t)$ for all t "from Definition 6.1 then the curve $\gamma_0(t) = e^{2\pi i t}, 0 \leq t \leq 1$, is homotopic to the constant curve $\gamma_1(t) \equiv 1$ in the region $G = \mathbb{C} - \{0\}$.*

Demostración. De la definición de homotopía, tenemos $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to G - \{0\}$ son dos curvas rectificables cerradas en una región G; y si existe una función continua $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to G - \{0\}$ definido como $\Gamma(s,t) = e^{2\pi \cdot s \cdot i(1-t)}$ tal que

$$\begin{cases} \Gamma(s,0) = \gamma_0(s) \quad \text{y} \quad \Gamma(s,1) = 1 = \gamma_1(s) \quad (0 \leq s \leq 1) \end{cases},$$

cumpliendo la definición de homotopía sin la segunda restricción. ■

Referencias

[1] Charles A McCarthy. The cayley-hamilton theorem. *The American Mathematical Monthly*, 82(4):390–391, 1975.