**Universidad del Valle de Guatemala**
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

**Estudiante:** Rudik Roberto Rompich
**Correo:** rom19857@uvg.edu.gt
**Carné:** 19857

MM2035 - Álgebra Moderna - Catedrático: Ricardo Barrientos
24 de septiembre de 2022

---

# Tarea 17

Problemas 1 y 4, sección 3.8.

**Problema 1** (Problema 1)**.** *Find all the units in $J[i]$.*

***Demostración.*** Sabemos que $J$ es un anillo euclideano y sea ahora $r = x + yi \in R - \{0\}$, entonces por **proposición** demostrada en clase $r$ es una unidad de $R \iff d(r) = d(1)$. Es decir entonces que para $r$ tenemos:

$$d(r) = x^2 + y^2 = d(1) = 1^2 + 0^2 = 1,$$

entonces las posibles soluciones son: $x = 0, y = \pm 1$ o $x = \pm 1+, y = 0$. Es decir, $i, -i, 1, -1$ son las posibles soluciones de $J[i]$. ∎

**Problema 2** (Problema 4)**.** *Prove that if $p$ is a prime number of the form $4n + 3$, then there is no $x$ such that $x^2 \equiv -1 \mod p$.*

***Demostración.*** Por reducción al absurdo, supóngase que existe un $x$ tal que $x^2 \equiv -1 \mod p$. Ahora bien, considérese el pequeño teorema de Fermat, tal que

$$\begin{aligned}
&\implies x^p \equiv x \\
&\iff x^{4n+3} \equiv x \mod p \\
&\iff x^{4n}x^3 \equiv 1 \cdot x \mod p \\
&\iff x^{4n}x^3 \equiv ((1 \mod p)(x \mod p)) \mod p
\end{aligned}$$

Entonces, se tiene $x^{4n} \equiv 1 \mod p$ y $x^3 \equiv x \mod p$. Nótese que si consideramos a $n = 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
&\implies x^4 \equiv 1 \mod p \\
&\iff x^2x^2 \equiv ((1 \mod p)(1 \mod p)) \mod p
\end{aligned}$$

Es decir, $x^2 \equiv 1 \mod p$, lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Por lo tanto, se cumple que no existe un $x$ tal que $x^2 \equiv -1 \mod p$. ∎