Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2035 - Álgebra Moderna - Catedrático: Ricardo Barrientos
25 de septiembre de 2022

Tarea 19

Problemas 2, 3 y 5, sección 3.10.

Problema 1 (Problema 2). *If p is a prime number, prove that the polynomial $x^n - p$ is irreducible over the rationals.*

Demostración. Nótese que $x^n - p$ se puede reescribir como:

$$f(x) = x^n - p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

en donde $a_0 = -p, a_n = 1$ y los demás coeficientes en 0. $\implies$ Aplicamos el criterio de Eisenstein y entonces suponemos que para p se tiene $p \not| a_n, p \not| a_n, p|a_1, p|a_2, \cdots, p|a_0, p^2 \not| a_0$. Por lo tanto, $f(x)$ es irreducible sobre los racionales. ■

Problema 2 (Problema 3). *Prove that the polynomial $1+x+\cdots+x^{p-1}$, where p is a prime number, is irreducible over the field of rational numbers. (Hint: Consider the polynomial $1+(x+1)+(x+1)^2+\cdots+(x+1)^{p-1}$, and use the Eisenstein criterion.)*

Demostración. Sea $f(x) = 1 + x + \cdots + x^{p-1}$, usando la sugerencia, nótese que la expresión anterior es equivalente a $f(x+1) = 1 + (x+1) + (x+1)^2 + \cdots + (x+1)^{p-1}$ la cual también es irreducible sobre el campo de los números racionales. Ahora bien, nótese que

$$\begin{aligned}
f(x+1) &= 1 + (x+1) + (x+1)^2 + \cdots + (x+1)^{p-1} \\
&= \frac{((x+1)-1)\left[1 + (x+1) + (x+1)^2 + \cdots + (x+1)^{p-1}\right]}{((x+1)-1)} \\
&= \frac{(x+1) + (x+1)^2 + (x+1)^3 + \cdots + (x+1)^p - 1 - (x+1) - (x+1)^2 - \cdots - (x+1)^{p-1}}{((x+1)-1)} \\
&= \frac{(x+1)^p - 1}{x}
\end{aligned}$$

Por teorema binomial,

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^{p-k} 1^k - 1}{x} = \frac{\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^{p-k} - 1}{x} \\
&= \frac{\binom{p}{0} x^p + \binom{p}{1} x^{p-1} + \binom{p}{2} x^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1} x^{p-(p-1)} + \binom{p}{p} x^{p-p} - 1}{x} \\
&= \frac{x^p + px^{p-1} + \binom{p}{2} x^{p-2} + \cdots + px + 1 - 1}{x} \\
&= x^{p-1} + px^{p-2} + \binom{p}{2} x^{p-3} + \cdots + p
\end{aligned}
$$

$\implies$ Por el criterio de Eisenstein, $f(x+1)$ es irreducible sobre los racionales. Por lo tanto, como $f(x+1)$ era equivalente a $f(x)$, $f(x)$ también es irreducible sobre los irracionales. ■

Problema 3 (Problema 5). *If a is rational and $x-a$ divides an integer monic polynomial, prove that a must be an integer.*

Demostración. Sea $a = m/n \in \mathbb{Q}$ y sea $f(x) = (a_0 + a_1 x + \cdots + (1) \cdot x^n)$ tenemos que

$$
\left(x - \frac{m}{n}\right) \Big| f(x),
$$

de esto, tenemos que $\exists g(x) \in \mathbb{Q}[x] \ni f(x) = \left(x - \frac{m}{n}\right) g(x)$. Sea entonces,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(x - \frac{m}{n}\right) g(x) \\
(a_0 + a_1 x + \cdots + x^n) &= \left(x - \frac{m}{n}\right) \frac{p}{q} \cdot g'(x), \quad (p,q) = 1 \\
&= (nx - m) \frac{p}{qn} \cdot g'(x)
\end{aligned}
$$

Por **proposición** $f(x)$ es primitivo en los enteros, por ser mónico. Entonces $p/qn = 1$.

$$
\begin{aligned}
&= (nx - m) \left(b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1}\right) \\
&= mb_0 + (nb_0 - mb_1) x + \cdots + nb_{n-1} x^n
\end{aligned}
$$

$\implies$ De esto, tenemos que

$$
a_0 = mb_0, a_1 = nb_0 - mb_1, \cdots, 1 = nb_{n-1}
$$

Pero nótese que entonces, que para que se cumpla la igual de arriba, $n = 1, -1$, por lo que m/n debe ser un entero. Por lo tanto, a es un entero. ■