UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

MM2034 - 2 SEMESTRE - 2022

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA APLICADA

Álgebra Moderna 2

Catedrático: Ricardo Barrientos

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay

Carné: 19857

Correo: rom19857@uvg.edu.gt

13 de octubre de 2022

Índice

1. Teoría de Anillos

Clase: 05/07/2022

Definición 1. *Un conjunto no vacío R es un* ***anillo*** *si en R están definidas dos operaciones binarias denotadas por $+$ y $\cdot$, tales que si $r_1, r_2, r_3 \in R$:*

1. $r_1 + r_2 \in R$.
2. $(r_1 + r_2) + r_3 = r_1 + (r_2 + r_3)$
3. $\exists 0 \in R \ni 0 + r = r + 0 = r, \forall r \in R$
4. *Si* $r \in R \implies \exists -r \in R \ni r + (-r) = (-r) + r = 0$
5. $r_1 + r_2 = r_2 + r_2$
6. $r_1 \cdot r_2 \in R$
7. $r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3) = (r_1 \cdot r_2) \cdot r_3$
8. $r_1(r_2+r_3) = r_1r_2+r_1r_3$ *(distributividad izquierda) y* $(r_1+r_2)r_3 = r_1r_2+r_1r_3$ *(distributividad derecha)*

NOTA. $(R, +, \cdot)$

Definición 2. *Si $(R, +, \cdot)$ es un anillo en el que existe $1 \in R$ tal que $1 \cdot r = r \cdot 1 = r, \forall r \in R$, entonces R es un anillo con elemento neutro multiplicativo.* ***Suele llamarse anillo con unidad en la literatura****.*

Definición 3. *Si $(R, +, \cdot)$ es un anillo en el que si $r_1, r_2 \in R$ (arbitrario) entonces $r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1$, entonces R es un anillo conmutativo.*

Definición 4. *Si $(R, +, \cdot)$ es un anillo tal que $(R - \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano, entonces $(R, +, \cdot)$ es un campo.*

Construcción de los números racionales.

Ejemplo 1. *1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con elemento neutro multiplicativo.*

2. $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *es un anillo conmutativo, pero no tiene un elemento neutro multiplicativo.*

3. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *es un campo* ***(¡ejercicio!)****. (Campo finito más pequeño)*

4. $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ *es un campo.*

5. $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ *es un anillo conmutativo con neutro multiplicativo.*

6. $(\mathbb{Q}_{2\times 2}, +, \cdot)$ *es un anillo no conmutativo con neutro multiplicativo.*

$$\left(\mathbb{Q}_{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Q} \right\}\right)$$

7. $(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{R})$ *es campo.*

8. *Cuaterniones reales de Hamilton. Sea* $Q = \{\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\}$ *con las operaciones y reglas siguientes:*

   a) $i^2 = j^2 = k^2 = -1; ij = -ji = k; jk = -kj; ki = -ik = j$. *Nótese que* $(\{1, -1, i, j, k, -i, -j, -k\}, \cdot)$ *es un grupo no abeliano de orden 8.*

   b) $(\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k) + (\beta_0 + \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k) = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)i + (\alpha_2 + \beta_2)j + (\alpha_3 + \alpha_3)k$

   c) $\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k = \beta_0 + \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k$, *si y solo si* $\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2$ *y* $\alpha_3 = \beta_3$.

   d) $(\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k)(\beta_0 + \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k) = \alpha_0\beta_0 + \alpha_0\beta_1 i + \alpha_0\beta_2 j + \alpha_0\beta_3 k + \alpha_1\beta_0 i - \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 ij + \cdots = (a_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_2\beta_2) + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)i + (\alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_3\beta_1)j + (\alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0)k$

$\implies$ $(Q, +, \cdot)$ *es un anillo no conmutativo con* $0 = 0 + 0i + 0j + 0k$ *como elemento neutro aditivo,* $1 = 1 + 0i + 0j + 0k$ *como elemento neutro multiplicativo y para* $\alpha_0+\alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k \in Q-\{0\} \implies \alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 \neq 0$ *y* $(\alpha_0 + \alpha_1, i + \alpha_2 j + \alpha_3 k)^{-1} = \frac{\alpha_0}{\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2} i - \frac{\alpha_2}{\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2} j - \frac{\alpha_3}{\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2} k \in Q$ *(**¡Ejercicio!**)*

Los anillos no conmutativos, con neutro multiplicativo e inversos multiplicativos (de elementos no nulos), como los cuaterniones de Hamilton se llaman Anillos de División o Semicampos.

NOTA. *Por simplicidad y cuando el contexto lo permita un anillo* $(R, +, \cdot)$ *se abreviará* R*.*

Definición 5. *Si* R *es un anillo,* $r \in R - \{0\}$ *es un Divisor de Cero si existe* $a \in R - \{0\}$ *o* $b \in R - \{0\}$ *tales que* $r \cdot a = 0$ *o* $b \cdot r = 0$*.*

Definición 6. *Si* R *es un anillo conmutativo que no tiene divisores de cero es un **dominio entero**.*

Ejemplo 2. *El anillo de los* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *es un dominio entero.*

Clase: 12/07/2022

Lema 1 (3.1)**.** *Si* R *es un anillo, entonces para* $r_1, r_2 \in R$*.*

1. $r_1 \cdot 0 = 0 \cdot r_1 = 0$
2. $r_1 \cdot (-r_2) = (-r_1) \cdot (r_2) = -(r_1 \cdot r_2)$
3. $(-r_1) \cdot (-r_2) = r_1 r_2$ *Si además* R *tiene neutro multiplicativo 1, entonces:*
4. $(-1) \cdot r_1 = r_1$
5. $(-1)(-1) = 1$

Demostración. 1. Usando la ley distributiva derecha, $r_1 \cdot 0 = r_1 \cdot (0 + 0) = r_1 \cdot 0 + r_1 \cdot 0 \implies$ Por la ley de cancelación en $(R, +)$, $r_1 \cdot 0 = 0$. Ahora usando la ley de distributividad izquierda tenemos $0 \cdot r_1 = (0 + 0) \cdot r_1 = 0 \cdot r_1 + 0 \cdot r_1$, y de nuevo, por la ley de cancelación en el grupo $(R, +)$, $0 \cdot r_1 = 0$.

2. $r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot (-r_2) = r_1 \cdot (r_2 - r_2) = r_1 \cdot 0 = 0 \implies$ por el (2) del lema 2.1, unicidad de los inversos en los grupos, $r_1 \cdot (-r_2) = -r_1 \cdot r_2$. Un argumento similar verifica que $(-r_1) \cdot r_2 = -(r_1 \cdot r_2)$

3. $(-r_1) \cdot (-r_2) = -(r_1 \cdot (-r_2)) = -(-(r_1 \cdot r_2)) = r_1 \cdot r_2$

4. Si $\exists 1 \in R$, neutro multiplicativo $\implies r_1 + (-1) \cdot r_1 = (1)r_1 + (-1)r_1 = (1-1)r_1 = 0 \cdot r_1 = 0 \implies$ Lema 2.1, unicidad de inverso $(-1)r_1 = -r_1$.

5. Caso especial de (iv), haciendo $r_1 = -1 \implies (-1)(-1) = -(-1) = 1$.

■

NOTA (El principio de las casillas)**.** *Para $n, m \in \mathbb{Z}^+, n > m$, si n objetos se distribuyen en m casillas, entonces alguna casilla recibe 2 o más objetos. De manera equivalente, si n objetos se distribuyen en n casillas, de forma que ninguna casilla recibe más de un objeto, entonces todas las casillas reciben exactamente un objeto.*

Lema 2 (3.2)**.** *Un dominio entero finito es un campo.*

Demostración. Sea D un dominio entero finito y $D = \{x_1, \cdots, x_n\}, n \in \mathbb{Z}^+$. Debemos encontrar: neutro multiplicativo e inversos multiplicativos. Sea $a \in D - \{0\}$ y considérese $ax_a, \cdots, ax_n$. Si $ax_i = ax_j$ con $i \neq j \implies 0 = ax_i - ax_j = a(x_i - x_j) \implies$ Como $a \neq 0$ y D es un dominio entero, y por lo tanto, carece de divisores de 0. $\implies x_i = x_j$ con $i \neq j (\rightarrow\leftarrow) \implies ax_1, \cdots, ax_n$ son todos distintos y para el principio de las casillas $D = \{ax_a, \cdots, ax_n\} \implies$ Como $a \in D \implies \exists i, 1 \leq i \leq n \ni a = ax_{i_0} = x_{i_0}a$. Si $d \in D \implies \exists i_d, 1 \leq i_d \leq n \ni d = ax_{i_d} \implies dx_{i_d} = (ax_{i_d})x_{i_d} = (x_{i_d}a)x_{i_d} = x_{i_d}(ax_{i_d}) = x_{i_d}a = ax_{i_d} = d \implies x_{i_d} = 1$ es neutro multiplicativo de D. Pero $1 \in D \implies \exists i_1, 1 \leq$ ■

Corolario 2.1. *Si p es un número primo, entonces $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ es un campo.*

Demostración. Se sabe que $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Si p es un número primo y $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_p \ni \bar{a}\bar{b} = \bar{0} \implies ab \equiv 0 \mod p \implies p|ab \implies p|a$ o $p|b \implies a \equiv 0 \mod p$ o $b \equiv 0 \mod p \implies \bar{a} = \bar{0}$ o $\bar{b} = \bar{0} \implies \mathbb{Z}_p$ carece de divisores de 0 $\implies \mathbb{Z}_p$ es un dominio entero $\implies$ por el lema 3.2, $\mathbb{Z}_p$ es un campo. ■

Definición 7. *Si $(R, +, \cdot)$ y $(R, \oplus, \odot)$ son anillos y $\phi : R \to R'$ es una función, entonces ϕ es un homomorfismo.*

1. $\phi(r_1 + r_2) = \phi(r_1) \oplus \phi(r_2)$
2. $\phi(r_1 \cdot r_2) = \phi(r_1) \odot \phi(r_2)$

Lema 3 (3.3)**.** *Si R y R' son anillos y $\phi : R \to R'$ es un homomorfismo entonces:*

1. $\phi(0) = 0'$
2. $\phi(-r) = -\phi(r), \forall r \in R.$

Demostración. Se deduce directamente del hecho que $(R, +)$ y $(R', +)$ son grupos y del lema 2.14. ■

Ejemplo 3. *Si $\phi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6 \ni \phi(\bar{a}) = \bar{0} \implies \phi(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) = \bar{0} = \bar{0} + \bar{0} = \phi(\bar{a}_1) + \phi(\bar{a}_2)$ y $\phi(\bar{a}_1\bar{a}_2) = \phi(\bar{a}_1)\phi(\bar{a}_2)$*

que la imagen homomórfica de un neutro multiplicativo no necesariamente es neutro multiplicativo.

Proposición 1. *Si R es un anillo con elemento neutro multiplicativo 1, R' un dominio entero y $\phi : R \to R'$ es un homomorfismo tal que $k_\phi \neq R$, entonces $\phi(1)$ es neutro multiplicativo de R'.*

Demostración. Tarea. ■

Proposición 2. *Si R es un anillo con elemento neutro 1, R' es un anillo y $\phi : R \to R'$ es un homomorfismo sobreyectivo, entonces $\phi(1)$ es neutro multiplicativo de R'*

Demostración. Tarea. ■

Definición 8. *Si R y R' son anillos y $\phi : R \to R'$ es un homomorfismo, entonces el kernel de ϕ es $k_\phi : \{r \in R : \phi(r) = 0\}$*

Lema 4 (3.4)**.** *Si R y R' son anillos y $\phi : R \to R'$ es un homomorfismo, entonces:*

1. *$(K_\theta, +)$ es un subgrupo de $(R, +)$*

2. *Si $k \in \phi_\theta$ y $r \in R \implies kr, rk \in k_\theta$, es decir el núcleo de θ atrapa productos.*

Demostración.
1. Lema 2.15

2. Si $k \in k_\theta$ y $r \in R \implies \theta(kr) = \theta(k)\theta(r) = 0' \cdot \theta(r) = 0' = \theta(r) \cdot 0' = \theta(r)\theta(k) = \theta(rk) \implies kr, rk \in K_\theta$

■

Ejemplo 4.
1. *Si R es un anillo y $\phi : R \to R \ni \phi(r) = r \implies \phi$ es el homomorfismo identidad.*

2. *Si $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{m + n\sqrt{2} : m, n \in \mathbb{Z}\} \implies (\mathbb{Z}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ con $+$ y $\cdot$ la suma y producto usuales de números reales, es un anilo (¡ejercicio!). Si $\phi : \mathbb{Z}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Z}(\sqrt{2}) \ni \phi(m \cdot n\sqrt{2}) = m \cdot n\sqrt{2}$. Si $m_1 + n_1\sqrt{2}, m_2 + n_2\sqrt{2} \in \mathbb{Z}(\sqrt{2}) \implies \phi((m_1 + n_1\sqrt{2}) + (m_2 + n_2\sqrt{2})) = \cdots = \phi(m_1 + n_1\sqrt{2})\phi(m_2 + n_2\sqrt{2}) \implies \phi$ es homomorfismo y $k_\theta = \{m + n\sqrt{2} : \phi(m + n\sqrt{2}) = m - n\sqrt{2} = 0 = 0 - 0\sqrt{2}\} = \{0\} \implies \phi$ es un homomorfismo inyectivo.*

3. *Si $\theta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \ni \phi(a) = \bar{a}$. Sean $a, b \in \mathbb{Z} \implies \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Z}, a = nq_1 + \bar{a}$ y $b = nq_2 + \bar{b}$ con $0 \leq \bar{a} < n$ y $0 \leq \bar{b} < n$. Además, $\exists q_3 \in \mathbb{Z} \ni a + b = q_3 + n + a + b$, con $a \leq \overline{a+b} < n$ y $\exists q_4 \in \mathbb{Z} \ni ab = q_4 n + \overline{ab}$ con $0 \leq \overline{ab} < n$. Ahora bien, nótese lo siguiente: $(nq_1 + nq_2) + \bar{a} + \bar{b} = (nq_1 + \bar{a}) + (nq_2 + \bar{b}) = a + b = q_3 n + qb$. Eso quiere decir: $\overline{a+b} - (\bar{a} - \bar{b}) = nq_3 - (nq_1 + nq_2) = n(q_3 - q_1 - q_2) \implies n | \overline{a+b} - (\bar{a} + \bar{b}) \implies \overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b} \mod n$. Además, $(n^2 q_1 q_2 + nq_1\bar{b} + nq_2\bar{a}) + \bar{a}\bar{b} = \cdots$. Por lo tanto, ϕ es homomorfismo, y $k_\phi = n\mathbb{Z}$.*

Clase: 14/07/2022

Ejemplo 5. *Sea* $\mathcal{C}([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ni f \text{ es continua}\} \implies (\mathcal{C}([0,1]), +, \cdot)$, *con* $+$ *y* $\cdot$ *la suma y producto usuales de funciones de variable real y valores reales, es un anillo (¡ejercicio!). Sea además,* $\phi : (\mathcal{C}([0,1]), +, \cdot) \to (\mathbb{R}, +, \cdot) \ni \phi(f) = f(1/2) \implies \phi$ *si* $f_1, f_2 \in \mathcal{C}([0,1]) \implies \phi(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(1/2) = f_1(1/2) + f_2(1/2) = \phi(f_1) + \phi(f_2)$ *y* $\phi(f_1 \cdot f_2) = (f_1 \cdot f_2)(1/2) = f_1(1/2)f_2(1/2) = \phi(f_1)\phi(f_2) \implies \phi$ *es un homomorfismo. Si* $\alpha \in \mathbb{R} \implies$ *sea* $f : [0,1] \to \mathbb{R} \ni f(x) = \alpha \implies f \in \mathcal{C}([0,1]) \ni f(1/2) = \alpha \implies \phi(f) = \alpha \implies \phi$ *es sobreyectivo. Además* $k_\phi = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \ni f(1/2) = 0\}$.

NOTA. *Obsérvese que estos cinco ejemplos, aunque ilustrativos, consideran únicamente anillos conmutativos.*

Definición 9. *Si* R *y* R' *son anillos, un homomorfismo* $\phi : R \to R'$ *biyectiva es un isomorfismo*

Lema 5 (3.5)**.** *Un homomorfismo sobreyectivo de anillos es un isomorfismo, si y solo si, su núcleo es trivial.*

Demostración. Se deduce directamente del lema 2.16. ■

Definición 10. *Si* R *es un anillo, un subconjunto no vacío* U *de* R *es un* ***ideal*** *o* ***ideal bilateral*** *si:*

1. $(U, +)$ *es un subgrupo de* $(R, +)$.

2. *Para todos* $u \in U$ *y* $r \in R$, $ur, ru \in U$ *(i.e.* U ***atrapa*** *o* ***absorbe*** *productos.)*

Lema 6 (3.6)**.** *Si* R *es un anillo y* U *es un ideal de* R*, entonces* R/U *es un anillo y es una imagen homomórfica de* R.

Tenemos:

$$R/U = \{u + r : r \in R\},$$

donde ¿$u + r$*?:*

1. $(U, +)$ *es un subgrupo normal de* $(R, +)$.

Demostración. $(U,+)$ es subgrupo normal de $(R,+)$ $\implies$ por el teorema $2C$, $(R/U,+)$ es grupo, donde $(u+r_1)+(u+r_2) = u+(r_1+r_2)$. Defínase ahora $\cdot : R/U \to R/U \ni \cdot(u+r_1, u+r_2) = (u+r_1)(u+r_2) = u+r_1r_2$. Sean $r_1, r_2, r_3, r_4 \in R \ni u+r_1 = u+r_3$ y $u+r_2 = u+r_4 \implies r_1 \equiv r_3 \mod U$ y $r_2 \equiv r_4 \mod U \implies r_1 - r_3 \in U$ y $r_2 - r_4 \in U \implies$ dado que U atrapa productos, $r_1r_2 - r_3r_2 = (r_1 - r_3)\cdot r_2 \in U$ y además $r_3r_2 - r_3r_4 = r_3(r_2 - r_4) \in U \implies r_1r_2 - r_3r_4 = r_1r_2 + 0 - r_3r_4 = r_1r_2 + (-r_3r_2 + r_3r_2) - r_3r_4 = (r_1r_2 - r_3r_2) + (r_3r_2 - r_3r_4) \in U \implies r_1r_2 \equiv r_3r_4 \mod U \implies U + r_1r_2 = U + r_3r_4 \implies (U+r_1)(U+r_2) = U+r_1r_2 = U+r_3r_4 = (U+r_3)(U+r_4) \implies$ el producto de clases laterales en R/U es una función bien definida, y con lo cual, la cerradura está bien asegurada. Si $U+r_1, U+r_2, U+r_3 \in R/U \implies (U+r_1)+(U+r_2)(U+r_3) = (U+r_1r_2)(U+r_3) = U+(r_1r_2)r_3 = U+r_1(r_2r_3) = (U+r_1)(U+r_2r_3) = (U+r_1)((U+r_2)(U+r_3)) \implies .$ Además, $((U+r_1)+(U+r_2))(u+r_3) = (U+(r_1+r_2))(U+r_3) = U+(r_1+r_2)r_3 = U+(r_1r_3+r_2r_3) = (U+r_1r_3)(U+r_2r_3) = (U+r_1)(U+r_3)+(U+r_2)(U+r_3)$ y $(U+r_1)((U+r_2)+(U+r_3)) = (U+r_1)(U+(r_2+r_3)) = U+r_1(r_2+r_3) = U+(r_1r_2+r_1r_3) = (U+r_1r_2)+(U+r_1r_3) = (U+r_1)(U+r_2)+(U+r_1)(U+r_3) \implies$ se cumplen las distributividades izquierda y derecha $\implies (R/U,+,\cdot)$ es un anillo. Considérese $\sigma : (R,+) \to (R/U,+) \ni \sigma(r) = u + r$ canónico, el cual se sabe que es sobreyectivo, con lo cual $(R/U,+)$ es una imagen homomórfica de $(R,+)$. Pero $\sigma(r_1r_2) = U+r_1r_2 = (U+r_1)(U+r_2) = \sigma(r_1)\sigma(r_2) \implies \sigma : (R,+,\cdot) \to (R/U,+,\cdot)$ es un homomorfismo sobreyectivo y $(R/U,+,\cdot)$ es una imagen homomórfica de $(R,+,\cdot)$. ■

Definición 11. *Si R es un anillo y U es un ideal de R, entonces R/U es el **anillo cociente** de R sobre U.*

Teorema 7 (3A (primer teorema de isomorfismos))**.** *Si R y R' son anillos y $\phi : R \to R'$ es un homomorfismo sobreyectivo, entonces $R' \approx R/K_\phi$. Además, existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de ideales de R' y el conjunto de ideales de R que contienen a K_ϕ. Esta correspondencia biyectiva, puede obtenerse asociando a cada ideal U' de R' el ideal de R, $\phi^{-1}(U')$, con lo cual $R/\phi^{-1}(U) \approx R/U'$.*

Demostración. Se deduce directamente del lema 2.17 y los teoremas 2D y 2B. ■

Lema 8 (3.7)**.** *Si R es un anillo conmutativo con elemento neutro multiplicativo cuyos únicos ideales son (0) y R, entonces R es un campo.*

Demostración. Sea $a \in R - \{0\}$ y considérese $R_a = \{ra : r \in R\}$. Nótese que si $r_1 a, r_2 a \in Ra \implies r_1 a - r_2 a = (r_1 - r_2)a \in Ra$ ya que $r_1 - r_2 \in R \implies$ por el corolario al lema 2.3, $(Ra, +)$ es un sugrupo de $(R, +)$. Sea $x \in R, ra \in Ra \implies (ra)x = x(ra) = (xr)a \in Ra$ ya que $xr \in R \implies Ra$ atrapa productos en $R \implies Ra$ es un ideal de $R \implies Ra = (0)$ o $Ra = R$. Pero como $1 \in R$ y $a \neq 0 \implies a = 1 - a \in Ra \implies Ra \neq (0) \implies Ra = R$. Pero además, como ■

Definición 12 (Ideal maximal)**.** *Si R es un anillo, y M es un ideal de R, $M \neq R$, entonces M es un* ***ideal maximal*** *de R, siempre que si U es un ideal de R tal que $M \subseteq U \subseteq R$, entonces $M = U$ o $U = R$.*

Clase: 19/07/2022

Ejemplo 6. *Sea U un ideal de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Como $(U, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$. $\implies$ siendo $(\mathbb{Z}, +)$ cíclico e infinito, si $U \neq (0) \implies (U, +)$ es también cíclico e infinito $\implies \exists n_0 \in \mathbb{Z} \ni U = (n_0) = n_0\mathbb{Z}$. Efectivamente, $U = (n_0)$ es un ideal de $\mathbb{Z}$, ya que si $m \in \mathbb{Z}$ y $u \in U \implies \exists x \in \mathbb{Z} \ni u = xn_0 \implies mu = m(xn_0) = (mx)n_0 \in U$, ya que $mx \in \mathbb{Z}$, y efectivamente, U atrapa productos en $\mathbb{Z}$. ¿Para qué valores de n_0, U es un ideal maximal de $\mathbb{Z}$? Sea p un número primo y U un ideal de $\mathbb{Z} \ni (p) \subseteq U \subseteq \mathbb{Z}$. Ahora bien, $\exists u_0 \in \mathbb{Z} \ni U = (u_0) = u_0\mathbb{Z} \implies (p) \subseteq (u_0) \subseteq \mathbb{Z}$.*

Recordatorio.

$$(p) = p\mathbb{Z} = \{px : x \in \mathbb{Z}\}$$

Nótese que $p = p \cdot 1 \in p\mathbb{Z} = (p) \subseteq (u_0) = u_0\mathbb{Z} \implies u_0 | p$.

Generados tamaños.

$$\underbrace{(a)}_{pequeo} \subseteq \underbrace{(b)}_{grande} \implies \underbrace{b}_{pequeo} \mid \underbrace{a}_{grande}$$

Como p es un número primo, $u_0 = 1$ o $u_0 = p \implies (u_0) = (1) = \mathbb{Z}$ o $(u_0) = (p) \implies (p)$ es un ideal maximal de $\mathbb{Z}$. Sea M un ideal maximal de $\mathbb{Z} \implies \exists m \in \mathbb{Z} \ni M = (m_0) = m_0\mathbb{Z}$.

y además si U es un ideal de $\mathbb{Z} \ni M \subseteq U \subseteq \mathbb{Z} \implies \exists u_0 \in \mathbb{Z} \ni U = (u_0) \implies (m_0) \subseteq (u_0) \subseteq (1) \implies (m_0) = (u_0)$ o $(u_0) = (1) \implies (m_0) \subseteq (u_0)$ y $(u_0) \subseteq (m_0)$ y $(1) \subseteq (u_0)$ y $(u_0) \subseteq (1) \implies m_0|u_0$ y $u_0|m_0$.

$\implies$ *si $a|m_0 \implies (m_0) \subseteq (a) \subseteq \mathbb{Z} \implies$ siendo (m_0) un ideal de $\mathbb{Z} \implies (m_0) = (a)$ o $(a) = \mathbb{Z} \implies a \in (a) \subseteq (m_0)$ o $a = 1$. $\implies m_0|a$ o $a = 1 \implies m_0 = a$ o $1 = a \implies m_0$ es primo. En el anillo $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (m)$ es un ideal maximal de $\mathbb{Z}$, si y solo si, m es primo.*

Ejemplo 7. *Sea $M = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f(1/2) = 0\}$ un ideal de $(\mathcal{C}[0,1], +, \cdot)$. Sea U un ideal de $\mathcal{C}([0,1]) \ni M \subset U \implies \exists g \in U - M \implies g : [0,1] \to \mathbb{R}$, continua y $g(1/2) \neq 0$. Sea $h : [0,1] \to \mathbb{R} \ni h(x) = g(x) - g(1/2) \implies h(1/2) = 0$ y $h(x)$ es continua en $[0,1] \implies h \in M \subseteq U \implies h \in U \implies g - h \in U$, pero $(g-h)(x) = g(x) - h(x) = g(x) - g(x) + g(1/2) = g(1/2) \neq 0$ y $g(1/2) \in U \implies 1/g(1/2) \in \mathcal{C}([0,1])$ y como U es ideal, atrapa productos. $\implies 1 = g\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{g\left(\frac{1}{2}\right)} \in U \implies$ si $f(x) \in \mathcal{C}([0,1])$, como U atrapa productos $f(x) = f(x) \cdot 1 \in U \implies \mathcal{C}([0,1]) \subseteq U \subseteq \mathcal{C}([0,1]) \implies U = \mathcal{C}([0,1]) \implies M$ es un ideal maximal de $\mathcal{C}([0,1])$. Ahora bien, si $\gamma \in [0,1]$, sea $M_\gamma = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \ni f(\gamma) = 0\}$. $\implies$ usando el mismo argumento se demuestra que M_γ es un ideal maximal de $\mathcal{C}([0,1])$. Además, si M es un ideal maximal del anillo de $\mathcal{C}([0,1]) \implies \exists \gamma \in [0,1] \ni M = M_\gamma$. Entonces, existe una biyección entre los elementos de $[0,1]$ y los ideales maximales del anillo $\mathcal{C}([0,1], +, \cdot)$.*

Teorema 9 (3B)**.** *Si R es un anillo conmutativo con elemento neutro multiplicativo y M es un ideal de R, entonces M es un ideal maximal de R, si y solo si, R/M es un campo.*

Demostración. Sea

- [$\implies$] Se sabe que $(R/M, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo. Considérese el homomorfismo canónico $\sigma : R \to R/M \ni \sigma(r) = M + r$ y $K_\sigma = M \implies$ por el teorema 3A,existe una correspondencia biyectiva entre los ideales de R/M y los ideales de R que contienen a $K_\sigma = M \implies$ Como M es ideal maximal, los únicos ideales de R que contienen a M son R y $M \implies$ los únicos ideales de R/M son (M) y R/M. Además, como R tiene elemento neutro multiplicativo 1, $M + 1$ es el elemento neutro multiplicativo de R/M, entonces por el lema 3.7, R/M es campo.

- [$\impliedby$] Si $(R/M, +, \cdot)$ es un campo $\implies (M)$ y R/M son los únicos ideales de $R/M \implies$ aplicando de nuevo el teorema 3A al homomorfismo canónico, por la correspondencia biyectiva, los únicos ideales de R que contienen a M son R y M. $\implies M$ es un ideal maximal de R.

■

Clase: 21/07/2022

Definición 13. *Si R y R' son anillos y $\phi : R \to R'$ es un homomorfismo inyectivo, entonces se dice que ϕ* ***sumerge*** *a R en R', o que ϕ es una* ***inmersión*** *de R en R' o que con la acción de ϕ, R puede sumergirse en R'. Si R puede sumergirse en R', entonces R' es un* ***Sobre Anillo*** *o una* ***Extensión*** *de R.*

Teorema 10 (3C)**.** *Todo dominio entero puede sumergirse en un campo.*

Demostración. Sea D un dominio entero y defínase en $D \times D - \{0\}$ la relación binaria $\sim \ni$ si $a, m \in D$ y $b, n \in D - \{0\} \implies (a, b) \sim (m, n)$ si y solo si, $an = mb$. Nótese que:

- $ab = ba \implies (a, b) \sim (a, b), \forall (a, b) \in D \times D - \{0\} \implies \sim$ es reflexiva.

- Si $(a, b) \sim (m, n) \implies an = mb \implies mb = na \implies (m, n) \sim (a, b) \implies \sim$ es simétrica.

- Si $(a_1,b_1) \sim (a_2,b_2)$ y $(a_2,b_2) \sim (a_3,b_3) \implies a_1b_2 = b_1a_2$ y $a_2b_3 = b_2a_3 \implies a_1b_2b_3 = b_1a_2b_3$ y $a_2b_3b_1 = b_2a_3b_1 \implies a_1b_3b_2 = a_2b_1b_3 = a_3b_1b_2 = (a_1b_3 - a_3b_1)b_2 \implies$ como $b_2 \neq 0$ y D carece de divisores de cero $\implies a_1b_3 - a_3b_1 = 0 \implies a_1b_3 = b_1a_3 \implies (a_1,b_1) \sim (a_3,b_3) \implies \sim$ es transitiva. $\implies \sim$ es una relación de equivalencia, y para $(a,b) \in D\times D - \{0\}$, sea $[(a,b)]$ la clase de equivalencia de (a,b) respecto a $\sim$, es decir $[(a,b)] \in D \times D - \{0\}/\sim$.

Sea $+$: $D \times D - \{0\}/\sim \times D \times D - \{0\}/\sim \to D \times D - \{0\}/\sim \ni$

$$+\left([(a,b)],[(m,n)]\right) = [(a,b)] + [(m,n)] = [(an+bm,bn)]$$

Si $a_1,a_2,m_1,m_2 \in D, b_1,b_2,n_1,n_2 \in D - \{0\} \ni [(a_1,b_1)] = [(a_1,b_1)]$ y $[(m_1,n_1)] = [(m_2,n_2)] \implies (a_1,b_1) \sim (a_2,b_2)$ y $(m_1,n_1) \sim (m_2,n_2) \implies a_1b_2 = b_1a_2$ y $m_1n_2 = n_1m_2$. Entonces $[(a_1,b_1)] + [(m_1,n_1)] = [(a_1n_1 + b_1m_1, b_1n_2)] \implies a_1b_2n_1n_2 = b_1a_2n_1n_2$ y $m_1n_2b_1b_2 = n_1m_2b_1b_2 \implies a_1n_1b_2n_2 = b_1n_1a_2n_2$ y $b_1m_1b_2n_2 = b_1n_1b_2m_2 \implies a_1n_1b_2n_2 + b_1m_1b_2n_2 = b_1n_1a_2n_2 + b_1n_1b_2m_2 \implies (a_1n_1 + b_1m_1)(b_2n_2) = (b_1n_1)(a_2n_2 + b_2m_2) \implies (a_1n_1 + b_1m_1, b_1n_1) \sim (a_2n_2 + b_2m_2, b_2n_2 \implies [(a_1n_1 + b_1m_1b_1n_1)] = [(a_2\cdots)] \implies [(a_1,b_1)] + [(m_1,n_1)] = [(a_1n_1 + b_1m_1, b_1n_1)] = [(a_2m_2 + b_2m_2, b_2n_2)] = [(a_2,b_2)] + [(m_2,n_2)] \implies$ las imágenes de $+$ son invariantes a cambios en los representantes de las clases de equivalencia. $\implies +$ es una función bien definida. $\implies (D \times D - \{0\}/\sim, +)$ es cerrada.

Si $[(a,b)], [(m,n)] \in D \times D - \{0\}/\sim \implies [(a,b)] + [(m,n)] = [(an+bm,bn)] = [(mb+na,nb)] = [(m,n)] + [(a,b)] \implies (D \times D - \{0\}/\sim, +)$ es conmutativa.

Si $[(a,b)], [(c,d)], [(e,f)] \in D \times D - \{0\}/\sim \implies ([(a,b)] + [(c,d)]) + [(e,f)] = [(ad+bc,bd)] + [(e,f)] = [(ad+bc)f + (bd)e, (bd)f] = [(adf + bcf + bde, bdf)] = [(adf + bcf + bde, bdf)] = [a(df) + b(cf+de), b(df)] = [(a,b)] + [(cf+de,df)] = [(a,b)] + ([c,d] + [(d,f)]) \implies (D \times D - \{0\}/\sim, +)$ es asociativo.

Si $b \in D - \{0\}$, entonces $[(0,b)] \in D \times D - \{0\}/\sim$ y si $[(c,d)] \in D \times D - \{0\}/\sim \implies [(0,b)] + [(c,d)] = [(0 \cdot +bc, bd)] = [(0 + bc, bd)] = [(bc, bd)]$. Peor $(bc)d = (bd)c \implies [(bc, db)] = [(c,a)] \implies [(0,b)] + [(c,d)] = [(bc, bd)] = [(c,d)], \forall [(c,d)] \in D \times D - \{0\}/\sim \implies [(0,b)]$ es neutro de $(D \times D - \{0\}/\sim, +)$.

Si $[(a,b)] \in D \times D - \{0\}/\sim \implies a \in D$ y $b \in D - \{0\} \implies -a \in D \implies [(-a,b)] \in D \times D - \{0\}/\sim \ni [(a,b)] + [(-a,b)] = [(ab + b(-a), bb)] = [(ab - ab, bb)] = [(0, bb)] = [(0,b)] \implies [(-a,b)] = -[(a,b)] \implies$ todo elemento de $D \times D - \{0\}/\sim$ tiene inverso aditivo. $\implies (D \times D - \{0\}/\sim, +)$ es grupo abeliano.

Sea ahora $\cdot : D \times D - \{0\}/\sim \times D \times D - \{0\}/\sim \to D \times D - \{0\}/\sim \ni \cdot([(a,b)], [(m,n)]) = [(a,b)] \cdot [(m,n)] = [(am, bn)]$. Sea $a_1, a_2, m_1, m_2 \in D, b_1, b_2, n_1, n_2 \in D - \{0\} \ni [(a_1, b_1)] = [(a_2, b_2)]$ y $[(m_1, n_1)] = [(m_2, n_2)] \implies a_1 b_2 = b_1 a_2$ y $m_1 n_2 = n_1 m_2 \implies (a_1 b_2)(m_1 n_2) = (b_1 a_2)(n_1 m_2) \implies (a_1 m_1)(b_2 n_2) = (b_1 n_1)(a_2 m_2) \implies [(a_1 m_1, b_1 n_1)] = [(a_2 m_2, b_2 n_2)]$. Entonces, $[(a_1, b_1)][(m_1, n_1)] = [(a_1 m_1, b_1 n_1)] = [(a_2 m_2, b_2 n_2)] = [(a_2, b2)][(m_2, n_2)] \implies$ las imágnes de $\cdot$ son invariantes a cambios en los representates de las clases de equivalencia $\implies \cdot$ es una función bien definida $\implies (D \times D - \{0\}/\sim -\{[0,b]\}, \cdot)$

$(D \times D - \{0\}/\sim -\{[(0,b)]\}, \cdot)$ es connmutativo.

Si $[(a,b)], [(c,d)], [(e,f)] \in D \times D - \{0\}/\sim \implies ([(a,b)] \cdot [(c,d)]) \cdot ([(e,f)]) = [(ac, bd)][(e,f)] = [((ac)e, (bd)f)] = [a(ce), b(df)] = [(a,b)] \cdot [(ce, df)] = [(a,b)] \cdot ([(c,d)] \cdot [(e,f)]) \implies (D \times D - \{0\}/\sim -\{[0,b]\}, \cdot)$ es asociativo.

Si $b \in D - \{0\} \implies [(b,b)] \in D \times D - \{0\}/\sim$ y si $[(c,d)] \in D \times D - \{0\}/\sim \implies [(b,b)] \cdot [(c,d)] = [(bc, bd)] = [(c,d)] \implies [(b,b)]$ es neutro multiplicativo de $(D \times D - \{0\}/\sim -\{[(0,b)]\}, \cdot)$

Si $a, b \in D - \{0\} \implies [(a,b)] \in D \times D - \{0\}/\sim -\{[(0,b)]\} \implies [(b,a)] \in D \times D - \{0\}/\sim -\{[(0,b)]\} \ni [(a,b)] \cdot [(b,a)] = [(ab, ba)] = [(ab, ab)]$, el neutro multiplicativo de $D \times D - \{0\}/\sim -\{[(0,b)]\} \implies [(b,a)] = [(a,b)]^{-1} \implies$ todo elemento de $(D \times D - \{0\}/\sim -\{[(0,b)], \cdot\})$ tiene inverso. $\implies (D \times D - \{0\}/\sim -\{[(0,b)]\}, \cdot)$ es un grupo abeliano.

Si $[(a,b)], [(c,d)], [(e,f)] \in D \times D - \{0\}/\sim \implies ([(a,b)] + [(c,d)]) \cdot [(e,f)] = [(ade + cbe, bdf)] = [((ade + cbe)f, (b+f)f)] = [(ae)(df) + (bf)(ce), (bf)(df)] = [(ae, bf)] + [(ce, df)] \implies$ Se cumplen las leyes distributivas en $(D \times D - \{0\}/\sim, +, \cdot)$ se cumplen las leyes distributivas.

$\implies (D \times D - \{0\}/\sim, +, \cdot)$ es un campo.

Si $b \in D - \{0\}$, sea $\phi : D \to D \times D - \{0\}/\sim \to \phi(d) = [(db, b)]$. Si $d_1, d_2 \in D \implies \phi(d_1 + d_2) = [((d_1 + d_2)b, b)] = [((d_1 + d_2)bb, bb)] = [((d_1 b + d_2 b, bb))] = [(d_1 b, b)] + [(d_2 b, b)] = \phi(d_1) + \phi(d_2)$. Además, $\phi(d_1 d_2) = [((d_1 d_2)b, b)] = [((d_1 d_2)bb, bb)] = [((d_1 b(d_2 b)), bb)] = [(d_1 b, b)][(d_2 b, b)] = \phi(d_1)\phi(d_2) \implies \phi$ es homomorfismo.

Si $d \in K_\phi \implies \phi(d) = [(db, b)] = [(0, b)] \implies (db, b) \sim (0, b) \implies (db)b = 0 \cdot b = 0 \implies d(bb) = 0$. Como $b \neq 0 \implies$ y como D no tiene divisores de 0, entonces $bb \neq 0 \implies$ de nuevo, como D no tiene divisores de cero, $d = 0 \implies K_\phi = (0) \implies \phi$ es inyectivo. $\implies \phi$ es una inmersión. $\implies D$ está sumergido en el campo $D \times D - \{0\}/\sim$. ■

Definición 14. *Si D es un dominio entero, el campo construido en la prueba del teorema 3C se llama **Campo de Cocientes** de D.*

Ejemplo 8. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *es un dominio entero y* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *es un campo de cocientes.*

Clase: 26/07/2022

Definición 15. *Un dominio entero R es un **Anillo Euclideano** si existe una función $d : R - \{0\} \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, llamada $d-$valor tal que si $a, b \in R - \{0\}$, entonces:*

1. $d(a) \leq d(ab)$.
2. $\exists q, r \in R \ni a = bq + r$, *donde* $r = 0$ *o* $d(r) < d(b)$.

Ejemplo 9. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *con* $d(n) = |n|$, *el valor absoluto de* $n \in \mathbb{Z}$, *es un anillo euclideano.*

Teorema 11 (3D). *Si R es un anillo euclideano y U es un ideal de R, entonce existe: $a_0 \in R$ tal que $U = \{a_0 r : r \in R\} = (a_0)$.*

Demostración. Si $U = \{0\} \implies$ sea $a_0 = 0 \implies U = \{0\} = \{0 \cdot r : r \in R\} = (0)$.

Si $U \neq \{0\} \implies \exists a \in U \ni a \neq 0$. Sea $a_0 \in U - \{0\} \ni d(a_0)$ es mínimo. Siendo R anillo euclideano existen $q, r \in R \ni u = aq + r$, con $r = 0$ o $d(r) < d(a_0)$. Si $r = 0 \implies u = aq \in (a)$. Pero $a \in U$ y U atrapa productos $\implies aq \in U \implies r = u - aq \in U$. Si $r \neq 0 \implies r \in U$ y $d(r) < d(a_0)$ no es mínimo en U $(\rightarrow\leftarrow)$. $\implies U \subseteq (a) \subseteq U \implies U = (a)$. ■

Corolario 11.1. *Todo anillo euclideano tiene elemento neutro multiplicativo.*

Demostración. Si R es un anillo euclideano $\implies R$ es ideal de $R \implies$ por el teorema 3D $\exists a_0 \in R \ni R = (a_0)$, ya que $R \neq (0) \implies r \in R \implies \exists x_1 \in R \ni r = a_0 x_1$. En particular, $a_0 \in R \implies \exists x_0 \in R \ni a_0 = a_0 x_0 \implies r x_0 = (x_r a_0) x_0 = x_r(a_0 x_0) = x_r a_0 = a_0 x_r = r \implies x_0$ es neutro multiplicativo de R. ■

Definición 16. *Un dominio entero R con elemento neutro multiplicativo es un **Anillo de Ideales Principales** si para todo ideal A de R existe $a_0 \in R$ tal que $A = (a) = \{ar : r \in R\}$*

Corolario 11.2. *Todo anillo euclideano es un anillo de ideales principales.*

Definición 17. *Si R es un anillo conmutativo, $r_1, r_2 \in R, r_1 \neq 0$, entonces r_1 divide a r_2 si existe $r_3 \in R$ tal que: $r_2 = r_1 r_3$, denotado por $r_1 | r_2$.*

Proposición 3. *Si R es un anillo conmutativo y $r_1, r_2, r_3 \in R - \{0\}$, entonces:*

1. *Si $r_1 | r_2$ y $r_2 | r_3 \implies r_1 | r_3$*

2. *Si $r_1 | r_2$ y $r_1 | r_3 \implies r_1 | (r_2 \pm r_3)$*

3. *Si $r_1 | r_2 \implies r_1 | r_2 r_3$*

Demostración. Tenemos:

1. Si $r_1 | r_2$ y $r_2 | r_3 \implies \exists x_1, x_2 \in R \ni r_2 x_1 r_1$ y $r_3 = x_2 r_2 \implies r_3 = x_2(x_1 r_1) = (x_2 x_1) r_1 \implies r_1 | r_3$.

2. $r_1 | r_2$ y $r_1 | r_3 \implies \exists x_1, x_2 \in R \ni r_2 = x_1 r_1$ y $r_2 \pm r_3 = (x_1 r_1) \pm (x_2 r_1) = (x_1 \pm x_2) r_2 \implies r_1 | (r_2 \pm r_3)$

3. Si $r_1|r_2 \implies \exists x \in R \ni r_2 = xr_1 \implies r_2r_3 = r_3r_2 = r_3(xr_3) = (r_3xr_1), x_3 \in R \implies r_1|r_2r_3$.

$\blacksquare$

Clase: 28/07/2022

Definición 18. *Si R es un anillo conmutativo y $r_1, r_2 \in R$, entonces $d \in R$ es **Máximo Común Divisor** de r_1 y r_2 si:*

1. *$d|r_1$ y $d|r_2$ (d es divisor común de r_1 y r_2)*

2. *Si $c|r_1$ y $c|r_2 \implies c|d$*

Lema 12 (3.8)**.** *Si R es un anillo euclideano y $r_1, r_2 \in R$, entonces un máximo común divisor $d \in R$ de r_1 y r_2. Además, existen $\alpha, \beta \in R$ tales que:*

$$d = \alpha r_1 + \beta r_2$$

Demostración. Sea $A = \{\delta r_1 + \gamma r_2 : \delta, \gamma \in R\}$. Sean $\delta_1, \delta_2, \alpha_1, \alpha_2 \in R \ni \delta_1 r_1 + \gamma_1 r_2, \delta_2 r_1 + \gamma_2 r_2 \in A$ y $(\delta_1 r_1 + \gamma_1 r_2) - (\delta_2 r_1 + \delta_2 r_2) = (\delta_1 \delta_2) r_1 + (\gamma_1 - \gamma_2) r_2 \in A$, ya que $\delta_1 - \delta_2, \gamma_1 - \gamma_2 \in R \implies$ por el corolario al lema 2.3 $(A, +)$ es un subgrupo de $(R, +)$. Además, si $\delta, \gamma, r \in R \implies \gamma r_1 + \gamma r_2 \in A$ y $(\delta r_1 + \delta r_2) r = (\delta r_1) r + (\delta r_2) r = (\delta r) r_1 + (\delta r) r_2 \in A$, ya que δr y $\gamma r \in R \implies A$ atrapa productos en $R \implies A$ es un ideal de R. Siendo R un anillo euclideano, por el teorema 3D, R es un anillo de ideales principales $\implies \exists a \in R \ni A = (a) \implies a|\delta r_1 + \gamma r_2, \forall \delta, \gamma \in R$. Además, por el corolario al teorema 3D, $\exists 1 \in R \ni 1$ es neutro multiplicativo de R. Entonces, en particular cuando $\delta = 1$ y $\gamma = 0 \implies a|1 \cdot r_1 + 0 \cdot r_2 = r_1$ y cuando $\delta = 0$ y $\gamma = 1 \implies a|0 \cdot r_1 + 1 \cdot r_2 = r_2 \implies a$ es divisor común de r_1 y r_2. En particular, $a = a \cdot 1 \in A \implies \exists \delta_a, \gamma_a \in R \ni a = \delta_a r_1 + \delta_a r_2$. Si $c \in R \ni c|r_1$ y $c|r_2 \implies c|\gamma_a r_1$ y $c|\delta_a r_2 \implies c|\gamma_a r_1 + \gamma_a r_2 = a \implies a = \delta_a r_1 + \gamma_a r_2$ es máximo común divisor de r_1 y r_2. $\blacksquare$

Definición 19. *Sea R un anillo con elemento neutro multiplicativo 1, entonces $a \in R$ es una **Unidad** de R si existe $b \in R$ tal que $ab = 1$.*

Lema 13 (3.9). *Si R es un dominio entero con elemento neutro multiplicativo 1 y $r_1, r_2 \in R - \{0\}$ tales que $r_1|r_2$ y $r_2|r_1$, entonces existe $u \in R$, unidad de R, tal que $r_1 = ur_2$.*

Demostración. Si $r_1|r_2 \implies \exists x_1 \in R \ni r_2 = x_1 r_1$ y por otro lado $r_2|r_1 \implies \exists x_2 \ni r_1 = x_2 r_2 \implies r_1 = x_2(x_1 r_1) = (x_2 x_1) r_1 \implies 0 = r_1 - (x_2 x_1) r_1 = 1 \cdot r_1 - (x_2 x_1) r_1 = (1 - x_1 x_2) \cdot r_1 \implies$ siendo R un dominio entero, y por ello carece de divisores de 0, y además $r_1 \neq 0 \implies 0 = 1 - x_1 x_2 \implies x_1 x_2 = 1 \implies x_1, x_2$ son unidades de R. ■

Definición 20. *Si R es un anillo conmutativo con elemento neutro multiplicativo, $r_1, r_2 \in R$ y $u \in R$ es unidad de R tales que $r_1 = ur_2$, entonces r_1 y r_2 son elementos **asociados**.*

Proposición 4. *En un anillo conmutativo con elemento neutro multiplicativo la relación ser asociado de es de equivalencia.*

Demostración. Sea R un anillo conmutativo con neutro multiplicativo 1. Entonces,

1. Si $r \in R \implies r = 1 \cdot r$, y como $1 \cdot 1 = 1$, i.e. es unidad de R, entonces r es asociado de r, $\forall r \in R$

2. Si r_1 es asociado a $r_2 \implies \exists u \in R$, unidad de $R \ni r_1 = ur_2 \implies u^{-1} \in R$ y también es unidad de $R \implies r_2 = u^{-1} r_1 \implies r_2$ es asociado a r_1.

3. Si r_1 es asociado de r_2 y r_2 es asociado a $r_3 \implies \exists u_1, u_2 \in R$, unidades de $R \ni r_1 = u_1 r_2$ y $r_2 = u_2 r_3 \implies r_1 = u_1(u_2 r_2) = (u_1 u_2) r_3$. Pero $u_2^{-1} u_1^{-1} \in R \ni \cdots u_1 u_2$ es unidad de $R \implies r_1$ es asociado a r_3 .

■

Proposición 5. *Si R es un anillo conmutativo con el neutro multiplicativo 1, $r_1, r_2 \in R$ y $d_1, d_2 \in R$ son máximos comunes divisores de r_1 y r_2 entonces d_1 y d_2 son asociados.*

Demostración. Si d_1 es máximo común divisor de r_1 y $r_2 \implies d_1|r_1$ y $d_1|r_2$, pero como d_2 es máximo común divisor de r_1 y $r_2 \implies d_1|d_2$. Un argumento simétrico verifica que $d_1|d_2 \implies$ por el lema 2.9, $\exists u \in R$, unidad de $R \ni d_1 = ud_2 \implies d_1$ y d_2 son asociados. ■

Definición 21. *Si R es un anillo conmutativo con elemento neutro multiplicativo, r_1 y $r_2 \in R$, entonces el **Máximo Común Divisor** de r_1 y r_2, denotado por (r_1, r_2) es la clase de equivalencia a la asociación de cualesquiera máximo común divisor de r_1 y r_2.*

Clase: 02/08/2022

Lema 14 (3.10)**.** *Si R es un anillo euclideano $r_1, r_2 \in R - \{0\}$ y r_2 no es una unidad de R, entonces $d(r_1) < d(r_1 r_2)$.*

Demostración. Considérese $(r_1) = \{r_1 \cdot r : r \in R\}$, un ideal de R. Por la condición (i) de la definición de anillo euclideano, $d(r_1) \leq d(r_1 r_2)$. Nótese que $r_1 r_2 \in (r_1)$ y si se supone $d(r_1) = d(r_1 r_2) \implies$ por el argumento usado por la prueba del teorema 3D, el d-valor de r_1 es mínimo en $(r_1) \implies d(r_1 r_2)$ también es mínimo en $(r_1) \implies$ todo elemento de (r_1) es múltiplo de $r_1 r_2 \implies (r_1) \subseteq (r_1 r_2) \implies r_1 r_2 | r_1 \implies \exists x \in R \ni r_1 = (r_1 r_2)x = r_1(r_2 x) \implies 0 = r_1 - r_2(r_2 x) = r_1 \cdot 1 - r_1(r_2 x) = r_1(1 - r_2 x) \implies$ como $r_1 \neq 0$ y R es dominio entero y por lo tanto carece de divisores de 0.

$$0 = 1 - r_2 x \implies 1 = r_2 x \implies$$

r_2 es unidad $(\rightarrow\leftarrow)$. $\implies d(r_1) < d(r_1 r_2)$ ■

Definición 22. *Si R es un anillo euclideano, $\pi \in R$ es un **Elemento Primo** de R, si π no es una unidad de R y si $\pi = r_1 r_2$, entonces r_1 ó r_2 es una unidad de R.*

Proposición 6. *Si R es un anillo euclideano y $r \in R - \{0\}$, entonces r es una unidad de R, si y solo si, $d(r) = d(1)$.*

Demostración. Tenemos

- ($\Longrightarrow$) Si r es unidad de $R \implies \exists u \in R \ni ru = 1 \implies$ por (1) de la definición de anillo euclideano, $d(r) \leq d(ru) = d(1) \leq d(1r) = d(r) \implies d(r) = d(1)$

- ($\Longleftarrow$) Si $d(r) = d(1) \implies \exists q_1\sigma \in R \ni 1 = q\sigma$ con $\sigma = 0$ o $d(\sigma) < d(r) = d(1)$. Si $\sigma \neq 0 \implies d(\sigma) < d(1) = d(1{\cdot}\sigma) = d(\sigma)(\rightarrow\leftarrow) \implies 1 = qr \implies r$ es una unidad de R.

$\blacksquare$

Lema 15 (3.11 - Existencia de las factorizaciones primas)**.** *Si R es un anillo euclideano y $r \in R - \{0\}$, entonces r puede factorizarse como el producto de un número finito de elementos primos de R.*

Demostración. Procediendo por inducción sobre $d(r)$:

- Si $d(r) = d(1) \implies r$ es una unidad de $R \implies$ es el producto de 0 elementos primos de R, y el lema es válido.

- Supóngase el lema válido para todo $x \in R - \{0\} \ni d(x) < d(r)$

- Si r es un elemento primo de $R \implies r$ se factoriza como el producto de 1 elemento primero de R. Supóngase que r no es una unidad de R y que existen $a, b \in R - \{0\}$ ninguno unidad de R tales que $r = ab \implies$ por (i) de la definición de anillo euclideano, $d(a) \leq d(ab) = d(r) \implies$ por la hipótesis inductiva $\exists m \in \mathbb{Z}^+, \pi_1, \cdots, \pi_m \ni a = \prod_{i=1}^m \pi_i$. Además, también por el lema 3.10, $d(b) < d(ba) = d(ab) = d(r) \implies$ por la hipótesis inductiva $\exists n \in \mathbb{Z}^+, \pi'_1, \cdots, \pi'_n$ elementos primos de $R \ni b = \prod_{j=1}^n \pi'_j \implies r = ab = \left(\prod_{i=1}^m \pi_i\right)\left(\prod_{j=1}^n \pi'_j\right)$

$\blacksquare$

Definición 23. *Si R es un anillo euclideano y $r_1, r_2 \in R - \{0\}$, entonces r_1 y r_2 son* ***Primos Relativos*** *si (r_1, r_2) es una unidad de R.*

NOTA. *Se sabe que el* (r_1, r_2) *es la clase de equivalencia respecto a la asociación de algún máximo común divisor de* r_1 *y* r_2*. También se sabe que todo unidad es asociado a 1, es decir, sin perdida de generalidad se puede afirmar que en un anillo euclideano* r_1 *y* r_2 *son primos relativo* $\iff (r_1, r_2) = 1$

Lema 16 (3.12)**.** *Si* R *es un anillo euclideano,* $r_1, r_2, r_3 \in R - \{0\}$ *tales que* $r_1|r_2r_3$ *y* $(r_1, r_2) = 1$ *entonces* $r_1|r_2$.

Demostración. Por el lema 3.8, $\exists \lambda, \mu \in R \ni 1 = (r_1, r_2) = \lambda r_1 + \mu r_2 \implies r_3 = r_1\lambda r_1 + r_3\mu r_2 = r_1(r_3\lambda) + r_2(r_3\mu)$. Pero $r_1|r_2r_3 \implies \exists x \in R \ni r_2r_3 = r_1x \implies r_3 = r_1(r_3\lambda) + (r_2r_3)\mu = r_1(r_3\lambda) + (r_1x)\mu = r_1(r_3\lambda) + r_1(x\mu) = r_1(r_3\lambda + x\mu) \implies r_1|r_3$. ∎

Proposición 7. *Si* R *es un anillo euclideano,* π *es un elemento primo de* R *y* $r \in R - \{0\}$*, entonces* $\pi|r$ *o* $(\pi, r) = 1$.

Demostración. Tenemos $(\pi, r)|\pi \implies (\pi, r) = \pi$ o $(\pi, 1) = 1$ (o cualquiera de esta unidad) $\implies$ si $\pi = (\pi, r)|r$ o $(\pi, r) = 1$. ∎

Lema 17 (3.13)**.** *Si* R *es un anillo euclideano,* π *es un elemento primo de* R*.* $r_1, r_2 \in R - \{0\} \ni \pi|r_1r_2$*, entonces*

Demostración. Si $\pi \not| r_1 \implies (\pi, r_1) = 1 \implies$ por el lema 3.12, $\pi|r_2$. Un argumento simétrico, asegura $\pi \not| r_2 \implies \pi|r_1$ ∎

Corolario 17.1. *Si* R *es un anillo euclideano,* π *es un elemento primo de* R *y* $r_1, \cdot, r_n \in R - \{0\}$ *y* $\pi| \prod_{i=1}^{n} \pi_i$ *entonces existe* i*,* $1 \leq i \leq n \ni \pi|r_i$.

Demostración. Por inducción matemática y el lema 3.13. ∎

Clase: 04/08/2022

Teorema 18 (3E (unicidad de la factorización)). *Si R es un anillo euclideano y $r \in R - \{0\}$ que no es una unidad de R y existen $m, n \in \mathbb{Z}^+ n, \pi_1, \cdots, \pi_m, \pi'_1, \cdots, \pi'_n$ elementos primos de R tales que*

$$r = \prod_{i=1}^{m} \pi_i = \prod_{j=1}^{n} \pi'_j,$$

entonces $m = n$ y cada π_i es asociado de algún π'_j, para $1 \leq i, j \leq m$ y recíprocamente cada π'_k es asociado de algún π_k, $1 \leq k, l \leq m$.

Demostración. Sea

$$\pi_1 \left(\prod_{i=2}^{m} \pi_i \right) = \prod_{i=1}^{m} \pi_i = \prod_{j=1}^{m} \pi'_j$$

$$\pi_1 | \prod_{j=1}^{n} \pi'_j$$

$\implies$ por el lema 3.13, $\exists j, 1 \leq j \leq n \ni \pi_i | \pi'_j$. Pero, como π_1 y π'_j son elementos primos de $R \implies \exists u_1$, unidad de $R \ni \pi'_j = u_1 \pi_1$. ∎

Corolario 18.1. *Todo elemento de un anillo euclideano tiene una única factorización prima, salvo asociación.*

NOTA (Anillo euclideano). *Tenemos:*

1. *Dominio entero*
    a) *Campo de cocientes*
    b) *Anillo conmutativo*
    c) *$\nexists$ divisores de cero*
2. *d-valor*
3. *Algoritmo de la división*
4. *Neutro multiplicativo*
5. *Anillo de ideales principales*
6. *Máximo común divisor único, excepto asociación*
7. *Lema de Bezzóut*
8. *U es unidad y $r \in R \implies d(r) = d(ur)$*
9. *Propiedades aritméticas de la divisibilidad.*
10. *Es unidad $\iff d(u) = d(1)$*
11. *r_1 y r_2 asociados $\iff d(r_1) = d(r_2)$.*

Lema 19 (3.14). *Si R es un anillo euclideano y $r_0 \in R$, entonces (r_0) es un elemento primo de R.*

Clase: 09/08/2022

Definición 24. *El conjunto $\mathbb{Z}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}, i = \sqrt{-1}\}$ es el conjunto de los **Enteros Gaussianos**.*

Proposición 8. *Sea $(\mathbb{Z}(i), +, \cdot)$, donde $+, \cdot$ son las operaciones usuales de números complejos es un dominio entero.*

Teorema 20 (3F). *Sea $(\mathbb{Z}(i), +, \cdot)$ es un anillo euclideano.*

Demostración. Considérese la función

$$d : \mathbb{Z} - \{0\} \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \ni d = (a + bi) = a^2 + b^2$$

De esta definición, $d(a+bi) \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \forall a+bi \in \mathbb{Z}(i) - \{0\}$. Además, si $a_1+b_1i, a_2+b_2i \in \mathbb{Z}(i) - \{0\} \implies d((a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i)) = d((a_1a_2 - b_1b_2) + (b_1a_2 + a_1b_2)i) = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (b_1a_2 + a_1b_2)^2 = \cdots = a_1^2(a_2^2 + b_2^2) + b_1^2(a_2^2 + b_2^2) = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = d(a_1 + b_1i)d(a_2 + b_2i)$. Ahora bien, si $0 = d(a + bi) = a^2 + b^2 \implies a = b = 0 \implies d(a + bi) > 0, \forall a + bi \in \mathbb{Z}(i) - \{0\} \implies d(a + bi) \geq 1, \forall a + bi \in \mathbb{Z}(i) - \{0\} \implies d(a_1 + b_1i)d(a_2 + b_2i) = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \geq a_1^2 + b_1^2 = d(a_1 + b_1i) \implies d$ es un $d-$valor para $\mathbb{Z}(i)$.

Considérese el caso especial $n \in \mathbb{Z}$ y $a + bi \in \mathbb{Z}(i) \implies$ por el algoritmo de la división en $\mathbb{Z}, \exists q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z} \ni a = q_1n + r_1$ y $b = q_2n + r_2$, con $0 \leq r_2 < n$ y $0 \leq r_2 < n$. Si $0 \leq r_1 < n/2$ y $0 \leq r_2 < n/2$, sean $\delta_1 = q_1, \delta_2 = q_2, \sigma_1 = r_1$ y $\sigma_2 = r_2$. Si $n/2 < r_1 < n \implies -n/2 > -r_1 > -n \implies n/2 \geq n - r_1 > 0 > -n/2 \implies |n - r_1| < n/2 \implies$ sean $\delta_1 = q_1 + 1$ y $\delta_1 = r_1 - n \implies a = 1_1n + r_1 = q_1n + n - n + r_1 = (q_1 + 1)n + (r_1 - n) = \delta_1n + \sigma_1$, con $|\sigma_1| < n/2$. De igual forma, si $n/2 < r_2 < n$, sean $\delta_2 = q_2 + 1$ y $\delta_2 = r_2 - n \implies b = q_2n + r_2 = q_2n + n - n + r_2 = (q_2 + 1)n + (r_2 - n) = \delta_2n + \sigma_2, |\sigma_2| < n/2$. Entonces, $a + bi = (\delta_1n\sigma_1) + (\delta_2n + \sigma_2)i = \delta_1n + \sigma_1 + \delta_2ni + \sigma_2i = (\delta_1 + \delta_2i)n + (\sigma_1 + \sigma_2i)$, con $d(\sigma_1 + \sigma_2i) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 < n^2/4 + n^2/4 = n^2/2 < n^2 = d(n + 0i) = d(n)$, con $\sigma_1 + \sigma_2i, \sigma_1 + \sigma_2i \in \mathbb{Z}(i)$

Sean ahora $a_1 + b_1i, a_2 + b_2i \in \mathbb{Z}(i)$ y $a_2 + b_2i \neq 0 \implies (a_2 + b_2i)\overline{(a_2 + b_2i)} = (a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i) = a^2 + b_2^2 \in \mathbb{Z}^+$. Además, $(a_1 + b_1i)\overline{(a_2 + b_2i)} = (a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i) \in \mathbb{Z}(i) \implies$ aplíquese el caso especial a $(a_2 + b_2i)\overline{(a_2 + b_2i)} \in \mathbb{Z}^+$ y $(a_1 + b_1i)\overline{a_2 + b_2i} \in \mathbb{Z}(i) \implies \exists \delta_1, \delta_2, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{Z} \ni (a_1 + b_1i)\overline{(a_2 + b_2i)} = (\delta_1 + \delta_2i)\left[(a_2 + b_2i)\overline{(a_2 + b_2i)}\right] + (\sigma_1 + \sigma_2i) \ni d(a_2 + b_2i)d(\overline{(a_2 + b_2i)}) = d\left((a_2 + b_2i)\overline{(a_2 + b_2i)}\right) > d(\sigma_1 + \sigma_2i) = d\left((a_1 + b_1i)\overline{(a_2 + b_2i)} - (\sigma_1 + \sigma_2i)\left[(a_2 + b_2i)\overline{(a_2 + b_2i)}\right]\right) = d\left(\left[(a_1 + b_1i) - (\sigma_1 + \sigma_2i)(a_2 + b_2i)\overline{(a_2 + b_2i)}\right]\right) = d\left((a_1 + b_1i) - (\delta_1 + \delta_2i)(a_2 + b_2i)\right)d\left(\overline{a_2 + b_2i}\right) \implies d(a_2 + b_2i) >$

$d\left((a_1+b_1i)-(\delta_1+\delta_2i)(a_2+b_2i)\right)$. Sea $R_1 + R_2i \in \mathbb{Z}(i) \ni R_1 + R_2i = (a_1+b_1i)(\delta_1+\delta_2i)(a_2+b_2i)$. Es conclusión, $\delta_1+\delta_2i, R_1+R_2i \in \mathbb{Z}(i) \ni a_1+b_1i = (\delta_1+\delta_2)(a_2+b_2i)+(R_1+R_2i)$, con $R_1+R_2 = 0$ o $d(R_1+R_2i) < d(a_2+b_2i)$. ■

Clase: 11/08/2022

Teorema 21 (Wilson)**.**

Lema 22 (3.15)**.** *Sea p un número primo y supóngase que para $c \in \mathbb{Z}, (c,p) = 1$ existen $x, y \in \mathbb{Z}$, tales que: $cp = x^2 + y^2$, entonces existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $p = a^2 + b^2$.*

Demostración. Nótese que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un subanillo de $(\mathbb{Z}(i), +, i)$ y p es un elemento primo de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Supóngase que p es elemento primo de $(\mathbb{Z}(i), +, \cdot)$, pero por hipótesis, $cp = x^2 + y^2 = (x+yi)(x-yi) \implies$ por el lema 3.13, $p|x+yi$ o $p|x-yi \implies p|x+yi \implies \exists u+iv \in \mathbb{Z}(i) \ni x+iy = p(u+iv) = pu+i(pv) \implies x = pu, y = pv \implies x-iy = pu-i(pv) = p(u-iv) \implies p|x-yi \implies p^2|(x+iy)(x-iy) = cp \implies p|c \implies 1 = (p,c) > p(\rightarrow\leftarrow) \implies p$ no es elemento primo de $\mathbb{Z}(i) \implies a+bi, \alpha+\beta i \in \mathbb{Z}(i)$, ninguno de los dos unidades de $\mathbb{Z}(i) \ni p = (a+bi)(\alpha+\beta i) \implies d(a+bi) = a^2+b^2 \neq 1$ y $d(\alpha-\beta i) = \alpha^2+\beta^2 \neq 1$. Pero $p = (a+bi)(\alpha+\beta i) = (a\alpha b\beta)+(a\beta+b\alpha)i \implies a\beta+b\alpha = 0 \implies p = (a\alpha-b\beta)-0 = (a\alpha-b\beta)-(a\beta+b\alpha)i = a\alpha-a\beta i-b\beta-b\alpha i = a(\alpha-\beta i)-bi(\alpha-\beta i) = (a-bi)(\alpha-\beta i)$. Entonces $p^2 = pp = (a+bi)(\alpha+\beta i)(a-bi)(\alpha-\beta i) = (a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2) \implies a^2+b^2|p^2$ y como $\alpha^2+\beta^2 > 1$ y $a^2+b^2 < p^2 \implies a^2+b^2 = 1$ o $a^2+b^2 = p \implies p = a^2+b^2$. ■

Lema 23 (3.16)**.** *Si p es un número primo de la forma $4n+1$, entonces la congruencia $x^2 \equiv -1 \mod p$ tiene solución.*

Demostración. Sea $x = \left(\frac{p-1}{2}\right)! \implies$ como p es de la forma $4n+1 \implies x = \left(\frac{p-1}{4}\right)$ tiene un número par de factores $\implies x = \prod_{i=1}^{p-1/2} i = \prod_{i=1}^{p-1/2} -i$. Ahora bien, $p-k \equiv -k \mod p \implies x^2 = x \cdot x = \left(\prod_{i=1}^{p-1/2} i\right)\left(\prod_{i=1}^{p-1/2} -i\right) = \left(\prod_{i=1}^{(p-1)/2} i\right)\left(\prod_{i=1}^{(p-1)/2} p-i\right) = \left(\prod_{i=1}^{(p-1)/2} i\right)\left(\prod_{i=\frac{p-1}{2}+1}^{p-1} i\right) = \prod_{i=1}^{p-1} i = (p-1) = \equiv -1 \mod p$. ■

Teorema 24 (3.6 - Fermat). *Si p es un número primo de la forma $4n+1$, entonces existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $p = a^2 + b^2$.*

Demostración. Por el lema 3.15, $\exists x \in \mathbb{Z} \ni x^2 \equiv -1 \mod p$ y elíjase $x \ni 0 \leq x \leq p-1$. Si $x < p/2 \implies (p-x)^2 = p^2 - 2px + x^2 \equiv -1 \mod p$ y $|p-x| = |p-x| = |x-p| < p/2$. De cualquier forma, siempre es posible elegir X de manera que $|x| \leq p/2$ y $p|x^2+1 \implies \exists c \in \mathbb{Z} \ni pc = x^2 + 1 \leq p^2/4 + 1 < p^2 \implies p \not| c \implies (p,c) = 1 \implies$ por el lema 3.15 $\exists a, b \in \mathbb{Z} \ni p = a^2 + b^2$. ■

Definición 25. *Si F es un campo, el conjunto de polinomios en la variable x con coeficientes en F o sobre F es $F[x] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i : a_i \in F \ \wedge n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\}$.*

Clase: 16/08/2022

Definición 26. *Si F es un campo,*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x_i, \quad q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in F[x],$$

entonces:

1. *$p(x) = q(x)$, si y solo si, $m = n$ y $a_i = b_i, 1 \leq i \leq m$.*
2. *$p(x) + q(x) = \sum_{k=0}^{\text{máx}\{m,n\}} (a_k + b_k) x^k, a_k = 0$ para $k > m$ y $b_k = 0$ para $k > n$*
3. *$p(x)q(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{l=0}^{k} a_k b_{k-l} \right) x^k, a_l = 0$ para $l > m$ y $b_{k-l} = 0$ para $k - l > n$.*

Proposición 9. *Si F es un campo, entonces $(F[x], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con elemento neutro multiplicativo.*

Definición 27. *Si F es un campo y $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in F[x], a_n \neq 0$, entonces el **grado** de $f(x)$ es $gr(f) = n$. No está definido el grado del polinomio cero y si $gr(f) = 0$, entonces $f(x)$ se dice constante.*

Lema 25 (3.17). *Si F es un campo y $f(x), g(x) \in F[X] - \{0\}$, entonces $gr(fg) = gr(f) + gr(g)$.*

Demostración. Se deduce directamente de la definición de producto en $F[x]$. ■

Corolario 25.1. *Si F es un campo y $f(x), g(x) \in F[x] - \{0\}$, entonces $gr(f) \leq gr(fg)$*

Demostración. Sea $0 \leq gr(g) \implies gr(f) = gr(f) + 0 \leq gr(f) + gr(g) = gr(fg)$. ■

Corolario 25.2. *Si F es un campo, entonces $(F[x], +, \cdot)$ es un dominio entero.*

Definición 28. *Si F es un campo, entonces el campo de cocientes del dominio entero $(F[X], +, \cdot)$ es $(F(x), +, \cdot)$, el campo de las funciones racionales en x sobre F.*

Proposición 10. *Si F es un campo, entonces la función* $\mathrm{gr} : F[X] - \{0\} \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ *cumple:*

1. $\mathrm{gr}(f) \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \forall f \in F[X] - \{0\}$
2. $\mathrm{gr}(f) \leq \mathrm{gr}(f, g), \forall f, g \in F[X] - \{0\}$

Lema 26 (3.18 - Algoritmo de la división)**.** *Si F sea un campo, $f(x), g(x) \in F[X]$ y $g(x) \neq 0$, entonces existen $q(r), r(x) \in F[X]$ tales que $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, con $r(x) < 0$ o $gr(r) < gr(g)$.*

Demostración. Si $gr(f) < gr(g) \implies q(x) = 0$ y $r(x) = f(x)$ ■

Teorema 27 (3H)**.** *Si F es un campo, entonces $(F[X], +, \cdot)$ es un anillo euclideano.*

Demostración. Se deduce directamente de las definiciones y propiedades de $F[X]$ y gr y del lema 3.18. ■

Lema 28 (3.19)**.** *Si F es un campo, entonces $(F[x], +, \cdot)$ es un anillo de ideales principales.*

Demostración. Se deduce directamente de los teoremas 3D y 3H. ■

Lema 29 (3.20)**.** *Si F es un campo, entonces $f(x), g(x) \in F[X] - \{0\}$ siempre tiene un máximo común divisor $d(x) \in F[x]$ y es tal que existen $\lambda(x), \delta(x) \in F[x]$ tales que $d(x) = \lambda(x)f(x) + \delta(x)g(x)$.*

Demostración. Se deduce directamente del teorema 3H y el lema 3.8 ∎

Definición 29. *Si F es un campo, $p(x) \in F[X]$ es irreducible sobre F si $p(x) = g(x)h(x)$, con $g(x)h(x) \in F[X] - \{0\}$, entonces $\mathrm{gr}(g) = 0$ o $\mathrm{gr}(h) = 0$*

Ejemplo 10. *$x^2 + 1$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$ pero no es irreducible sobre $\mathbb{C}$.*

Lema 30 (3.21)**.** *Si F es un campo, entonces todo polinomio en $F[X]$ puede factorizarse de manera única, salvo asociación, como producto de un número finito de polinomios de $F[X]$ irreducibles sobre F.*

Demostración. Se deduce directamente de los teoremas $3E$ y $3H$. ∎

Lema 31 (3.22)**.** *Si F es un campo, el ideal generado por el polinomio $p(x)$ de $F[X]$ es un ideal maximal del anillo de polinomios si y solo si, $p(x) \in F[x]$ es irreducible sobre F.*

Demostración. Se deduce de los lemas 3.14, 3.21 y teorema 3H. ∎

Clase: 18/08/2022

$(x^2 - 2)(x^2 + 1)$

$(x^3 - 2) = \{f(x)(x^3 - 2) : f(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$

Ejemplo 11. $x^2-2 \in \mathbb{Q}[x]$, *irreducible sobre* $\mathbb{Q} \implies$ *por el lema 3.22* (x^3-2) *es un ideal maximal de* $\mathbb{Q}[x] \implies$ *por el teorema 3B,* $\mathbb{Q}[x]/(x^3-1)$. *Se verificará detalladamente este hecho, nótese que* $\mathbb{Q}[x]/(x^3-2) = \{f(x)+[x^3-2] : f(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$. *Por el algoritmo de la división en* $\mathbb{Q}[x], \exists q(x), r(x) \in \mathbb{Q}[x] \ni f(x) = q(x)(x^2-2)+r(x)$, *con* $r(x)=0$ *o* $gr(r) < gr(x^3-2) = 3 \implies \exists a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q} \ni r(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \implies f(x)+[x^3-2] = (q(x)(x-2)+r(x))+[x^3-2] = q(x)(x^3-2)+[x^3-2]+r(x)+[x^3-2] = (x^3-2)+r(x)+[x^3-2] = r(x)+[x^3-2] = (a_0+a_1x+a_2x^2)+(x^3-2) = [a_0+[x^3-2]]+[a_1x+[x^3-2]]+[a_2x^2+[x^3-2]] = a_0[x+[x^3-2]]^0 + a_1[x+[x^3-2]]^1 + a_2[x+[x^3-2]]^2$

$$q(x)(x^3-2)+[x^3-2] = 0+[x^3-2] = [x^3-2]$$

Sea $\alpha = x+[x^3-2] \in \mathbb{Q}[x]/(x^3-2)$, *con lo cual* $f(x)+[x^3-2] = a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2$

$$\langle\{1, \alpha^1, \alpha^2\}\rangle_{\mathbb{Q}}$$

$\implies \langle\{1,\alpha^1,\alpha^2\}\rangle_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[x]/(x^3-2)$. *Por otro lado, nótese que* $\alpha^3 - 2 \approx [x+(x^3-2)]^3 - [2+(x^3-2)] = [x^3+(x^3-2)] - [2+(x^3-2)] = (x^3-2)+[x^3-2] = 0+[x^3-2] = [x^3-2] \approx 0 \implies \alpha$ *es una raíz de* $x^3-2 \implies \alpha \in \mathbb{Q}[x]/(x^3-2) - \mathbb{Q}$ *(Nótese que si* $a \in \mathbb{Q} \implies a \approx a+(x^3-2) \in \mathbb{Q}[x]/(x^3-2)$, *con lo cual,* $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[x]/(x^3-2)$*) contiene una raíz de* x^2-2. *Si* $\exists a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$ *no todos cero* $\ni a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2 = 0 \implies -a_0-a_2\alpha^2 = a_1\alpha \in \mathbb{Q}(\rightarrow\leftarrow) \implies \{1,\alpha,\alpha^2\}$ *es linealmente independiente sobre* $\mathbb{Q} \implies \{1,\alpha,\alpha^2\}$ *es una base para el espacio vectorial* $(\mathbb{Q}[X]/(x^3-2),+,\cdot,\mathbb{Q}) \implies \dim(\mathbb{Q}[x]/(x^3-2),+,\cdot,\mathbb{Q}) = 3 = \mathrm{gr}(x^3-2)$. *Por otro lado, si* $a_0,a_1,a_2,b_0,b_1,b_2 \in \mathbb{Q} \ni a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2 = f(x)+(x^3-2) = a_0(x+(x^3-2))+a_1(x+(x^3-2))+a_2(x+(x^3-2))^2 = f(x)+(x^2-2) = b_0(x^0+(x^3-2))+b_1(x+(x^3-2))+b^2(x^2+(x^2-2)) \implies (a_0-b_0)(x^0+(x^3-2))+(a_1-b_1)(x+(x^2-2))+(a_2-b_2)(x^2+(x^3-2)) = (a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+[x^2-2] = [x^3-2] = 0+[x^2-2] \implies (a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2 \equiv 0 \mod (x^2-2) \implies x^3-2|(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2 \implies a_0-b_0 = a_1-b_1 = a_2-b_2 = 0 \implies a_0 = b_0, a_1 = b_1$ *y* $a_2 = b_2 \implies$ *todo elemento* $f(x)+(x^3-2)$ *de* $\mathbb{Q}[x]/(x^3-2)$ *de* $\mathbb{Q}[x]/(x^3-2)$ *tiene representación única como polinomio cuadrático en* α *sobre* $\mathbb{Q}$. *Sea* $a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2 \in \mathbb{Q}[x]/(x^2-2) - \{(x^3-2)\} \implies a_0, a_1$ *y* a_2 *no son todos* *cero. El lema 3.22 asegura que* $\mathbb{Q}[x]/(x^3-2)$ *es un campo* $\implies \exists b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{Q} \ni 1 = (a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^3)(b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2) = a_0b_0 + a_0b_1\alpha + a_0b_2\alpha^2 + a_1b_0\alpha + a_1b_1\alpha^2 + a_1b_2\alpha^3 + a_2b_0\alpha^2 + a_2b_1\alpha^3 + a_2b_2\alpha^4 = a_0b_0 + a_0b_1\alpha + a_0b_2\alpha^2 + a_1b_0\alpha + a_0b_1\alpha^2 + 2a_1b_2 + a_2b_0\alpha^2 + 2a_2b_1 + 2a_2b_2\alpha = (a_0b_0 + 2a_1 + b_2 + 2a_2b_1) + (a_0b_1 + a_1b_0 + 2a_2b_2) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)\alpha^2 \implies$ *resolviendo el sistema de ecuaciones... por medio de la regla de Cramer, encontramos que el determinantes es* $a_0^3 + 2a_1^3 + 4a_2^3 - 6a_0a_1a_2 \neq$. *Nótese que* $a_0 = p_0/q_0, a_1 = p_1/q_1, a_2 = p_2/q_2 \in \mathbb{Q} \ni \cdots\cdots\cdots$

Clase: 23/08/2022

Definición 30. $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ *es primitivo si* $(a_0, \cdots, a_n) = 1$

Lema 32 (3.23)**.** *Si* $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *son primitivos, entonces* $f(x)g(x)$ *es primitivo.*

Demostración. Si $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ y $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$, supóngase que el máximo común divisor de los coeficientes de $f(x)g(x)$ es mayor que 1. $\implies \exists p$, número primo $\ni$ divisor al máximo común divisor de los coeficientes $f(x)g(x)$. Como $f(x)$ es primitivo, $p \not| (a_0, \cdots, a_m) \implies$ sea i^* el índice más pequeño tal que $p \not| a_{i^*}$. De igual manera, sea j^* el índice más pequeño tal que $p \not| b$. Entonces, el coeficiente de $x^{i^*+j^*}$ en $f(x)g(x)$ es

$$C_{i^*+j^*} = \sum_{k=0}^{i^*+j^*} a_k b_{i^*+j^*-k} = a_{i^*} + b_{j^*} + \sum_{k=0}^{i^*-1} a_k b_{i^*+j^*-k} + \sum_{k=i^*+1}^{i^*+j^*} a_k b_{i^*+j^*-k}.$$

Por la elección de i^* y j^*, $p|a_i$ para $0 \leq i < i^*$ y $p|b_j$ para $0 \leq j < j^* \implies p|a_k b_{i^*+j^*-k}$ para $0 \leq k \leq i^*-1$ y $p|a_k b_{i^*+j^*-k}$ para $i^*+1 \leq k \leq i^*+j^* \implies p|\sum_{k=0}^{i^*-1} a_k bi^* + j^* - k$ y $p|\sum_{k=i^*+1}^{i^*+j^*} a_k bi^* + j^* - k$ y por hipótesis, $p|c_{i^*+j^*} \implies p|\left(c_{i^*+j^*} - \sum_{k=0}^{i^*-1} a_k b_{i^*+j^*-k} - \sum_{k=i^*+1}^{i^*+j^*} a_k b_{i^*+j^*-k}\right) = a_{i^*} b_{j^*} \implies p|a_{i^*}$ o $p|b_{j^*} (\rightarrow\leftarrow) \implies f(x)g(x)$ es primitivo. ■

Definición 31. *El* ***contenido*** *de* $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ *es* $(a_0, \cdots, c_n)$*.Notación,* $C(f)$*.*

Proposición 11. *Si* $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$*, entonces existe* $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$*, primitivo, tal que* $f(x) = C(f)p(x)$*.*

Teorema 33 (3I - Lema de Gauss). *Si $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ es primitivo y puede factorizarse como el producto de dos polinomios con coeficientes racionales, entonces puede factorizarse como el producto de dos polinomios con coeficientes enteros.*

Demostración. Si $u(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{\alpha_i}{\beta_i} x^i, v(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\delta_j}{\gamma_j} x_j \in \mathbb{Q}[x]$. Es decir, $\alpha_i, \delta_i \in \mathbb{Z}$ y $\beta_i, \gamma_j \in \mathbb{Z} - \{0\} \ni$

$$\begin{aligned} p(x) &= u(x)v(x) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{\alpha_i}{\beta_i} x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\delta_j}{\gamma_j} x_j \right) \\ &= \frac{1}{\left(\prod_{i=0}^{m} \beta_i\right) \left(\prod_{j=0}^{n} \gamma_j \right)} \left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \left(\prod_{l+i} \beta_l \right) x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} \delta_j \left(\prod_{r+j} \gamma_r \right) x^j \right) \end{aligned}$$

Sea $\sigma(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \left(\prod_{l+i} \beta_l\right) x^i, \nu(x) = \sum_{j=0}^{n} \delta_j \left(\prod_{r+j} \delta_r \right) x^j \in \mathbb{Z}[x] \implies p(x) = 1/ \left(\left(\prod_{i=0}^{m} \beta_i\right) \left(\prod_{j=0}^{n} \gamma_j \right) \right) \sigma(x)\nu(x) = \frac{a}{b} q_1(x) q_2(x)$, donde $a = C(\delta)c(\nu) \in \mathbb{Z}, b = \left(\prod_{i=0}^{m} p_i\right) \left(\prod_{j=0}^{n} \gamma_j \right) \in \mathbb{Z} - \{0\}$, sea $q_1(x), q_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$ primitivos y $\sigma(x) = C(\sigma) q_1(x)$ y $\nu(x) = C(\nu) q_2(x) \implies$ por el lema 3.23 $q_1(x)q_2(x)$ es primitivo y $bp(x) = aq_1(x)q_2(x)$. Como $p(x)$ es primitivo, el contenido de $bp(x)$ es b y como $q_1(x)q_2(x)$ primitivo. $\implies$ el contenido de $aq_1(x)q_2(x)$ es $a \implies$ como los contenidos de polinomios es iguales de ser iguales, $a = b \neq 0 \implies a/b = 1 \implies p(x) = q_1(x)q_2(x)$.

■

Definición 32. *Si $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ y $a_n = 1$, entonces $f(x)$ se dice* ***Entero Mónico****.*

Proposición 12. *Todo polinomio mónico de $\mathbb{Z}[x]$ es primitivo.*

Corolario 33.1. *Si un polinomio mónico de $\mathbb{Z}[x]$ se factoriza como el polinomio en $\mathbb{Q}[x]$, entonces se factoriza como el producto de los polinomios enteros mónicos.*

Demostración. Se deduce del lema de Gauss ($3I$) y la propiedad anterior. ■

Teorema 34 (3J - Criterio de Einsentein)**.** *Si* $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ *y* p *es un número primo que* $p \not| a_n$, $p|(a_0, \cdots, a_{n-1})$ *y* $p^2|a_0$, *entonces* $f(x)$ *es irreducible en* $\mathbb{Q}[x]$.

Demostración. Sea $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$, primitivo $\ni f(x) = C(f)p(x)$, y nótese que $f(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{Q} \iff p(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$. Además, la hipótesis se se tienen, ya que $(C(f), p) = 1$. Sea $p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$, con $p \ / \ |\alpha_n, p|(\alpha_0, \cdot, \alpha_{n-1})$ y $p^2 \not| \alpha_0$. Supóngase que $p(x)$ no es irreducible sobre $\mathbb{Q} \implies u(x), v(x) \in \mathbb{Q}[x], gr(u) > 0$ y $gr(v) > 0 \ni p(x) = u(x)v(x) \implies$ por el teorema de Gauss (3I) $\exists r(x) = \sum_{j=0}^{m_1} \beta_j x^j, s(x) = \sum_{k=0}^{m_2} \delta_k x^k \in \mathbb{Z}[x], m_1 = gr(r) > 0$ y $m_2 = gr(s) > 0 \ni \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = p(x) = r(x)s(x) = \sum_{i=0}^{m_1+m_2+m} \left(\sum_{t=0}^{i} \beta_t \delta_{i-t} \right) x^i$. Entonces, $p|\alpha_0 = \beta_0\delta_0 \implies p|\beta_0$ o $p|\delta_0$. Pero, $p^2 \not| \alpha_0 = \beta_0\delta_0 \implies p|\beta_0$ o $p|\delta_0$. Si $p|(\beta_0, \cdots, \beta_{m_1}) \implies p|\beta_{m_1}|\beta_{m_1}\delta_{m_2} = \alpha_{m_1+m_2} = \alpha_n (\rightarrow\leftarrow) \implies$ Sea j^* el primer subíndice tal que $\ni p \not| \beta_{j^*} \implies$ si $0 \leq j \leq j^* - 1 \implies p|\beta_j$. Pero, $\alpha_{j^*} = \sum_{t=0}^{j^*} \beta_t \delta_{j^*-t}$, entonces $p|\alpha_{j^*}$, $p|\beta_t|\beta_t|\beta_t\delta_{j^*-t}$ para $0 \leq t \leq j^* - 1 \implies p| \sum_{t=0}^{j^*-1} \beta_t \delta_{j^*-t} \implies p|(\alpha_{j^*} - \sum_{t=0}^{j^*} \beta_t \delta_{j^*-t}) = \beta_{j^*}\delta_0 \implies p|\beta_{j^*}$ o $p|\delta_0 \implies p|\delta_0 \implies p \not| \beta_0$. Entonces $p(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$. ■

Clase: 25/08/2022

Proposición 13. *Si* R *es un anillo conmutativo con elemento neutro multiplicativo, entonces* $R[x]$ *es un anillo conmutativo con elemento neutro multiplicativo.*

Demostración. ejercicio. ■

Definición 33. *Si* R *es un anillo conmutativo con elemento neutro multiplicativo, entonces* $R[x_1, \cdots, x_n]$ *se define:* $R_1 = R[x]; R_2 = R_1[x_2] = (R[x_1])[x_2] = R[x_1, x_2]; R_3 = R_2[x_3] = ((R[x_1])[x_2])[x_3] = R[x_1, x_2, x_3]; \cdots ; R_n = R_{n-1}[x_n] = R[x_1, \cdots, x_n]$, *el anillo de polinomios en las variables* $x_1, \cdots, x_n$ *con coeficientes en* R.

Proposición 14. *Si R es un anillo conmutativo con elemento neutro multiplicativo, entonces los elementos de $R[x_1, \cdots, x_n]$ son de la forma $\sum a_i, \cdots, i_n \prod_{j=1}^n x_j^{i_j}$, con $a_i, \cdots, i_n \in R$, y la suma de estos polinomios definidos por las operaciones entre coeficientes, y el producto de estos polinomios usando la ley distributiva y las reglas de exponentes $\left(\prod_{j=1}^n x_j^{ij}\right)\left(\prod_{j=1}^n x_j^{k_j}\right) = \prod_{j=1}^n x_j^{i_j+k_j}$*

Lema 35. *Si R es un dominio entero, entonces $R[x]$ es un dominio entero.*

Demostración. Nótese que en la demostración del lema 3.17 y sus corolarios no se usó la existencia de inversos multiplicativos en el campo F, por lo que esos argumentos son válidos para el dominio entero R. ■

Corolario 35.1. *Si R es un dominio entero, entonces $R[x_1, \cdots, x_n]$ es un dominio entero.*

Demostración. Se deduce del lema 3.24 y la definición de $R[x_1, \cdots, x_n]$ ■

NOTA. *Si R es dominio entero $\implies$ $R[x_1, \cdots, x_n]$ es dominio entero. $\implies$ $R(x_1, \cdots, x_n)$ es el campo de las funciones racionales en las variables $x_1, \cdots, x_n$ con coeficientes en R. Si F es un campo, en particular es un dominio entero y $F(x_1, \cdots, x_n)$ es el campo de las funciones racionales en las variables $x_1, \cdots, x_n$ con coeficientes en F, el caul juega un papel importante en Geometría Algebraica y la teoría de Galois.*

Ejemplo 12. *El teorema 3D dice que si F es un campo, entonces $F[x]$ es un anillo de ideales principales (de hecho, 3F a continuación asegura que $F[x]$ son anillos euclideanos). Ahora, si F es un campo, ¿$F[x_1, \cdots, x_n]$ es también un anillo de ideales principales? Considérese el anillo $\mathbb{Q}[x, y]$, los polinomios $x, y \in \mathbb{Q}[x, y]$ y el conjunto $(x, y) = \{\alpha(x, y)x + \beta(x, y)y : \alpha(x, y), \beta(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]\} \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$. Sean $\alpha_1(x, y) + \beta_1(x, y)y, \alpha_2(x, y)x + \beta_2(x, y)y \in (x, y) \implies \alpha_1(x, y)x + \beta_1(x, y)y - (\alpha_2(x, y)x + \beta_2(x, y)y) = (\alpha_1(x, y) - \alpha_2(x, y))x + (\beta_1(x, y) - \beta_2(x, y))y \in (x, y)$, ya que $\alpha_1(x, y) - \alpha_2(x, y), \beta_1(x, y) - \beta_2(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y] \implies$ por el corolario al lema 2.3, $((x, y), +)$ es un subgrupo $(\mathbb{Q}[x, y], +)$. Sea ahora $f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ y $\alpha(x, y)x + \beta(x, y)y \in (x, y) \implies f(x, y)(\alpha(x, y) + \beta(x, y)y) = (f(x, y)\alpha(x, y))x + (f(x, y)\beta(x, y))y \in (x, y)$, ya que $f(x, y)\alpha(x, y), f(x, y)\beta(x, y) \in \mathbb{Q} \implies (x, y)$ es un ideal de $\mathbb{Q}[x, y]$.*

Supóngase que existe $d(x,y) \in \mathbb{Q}[x,y] \ni (x,y) = (d(x,y))$. Nótese que si $\alpha(x,y) = 1$ y $\beta(x,y) = 0 \implies x = 1 \cdot x + 0 \cdot y = \alpha(x,y)x + \beta(x,y)y \in (x,y) \implies d(x,y)|x$. Además, si $\alpha(x,y) = 0$ y $\beta(x,y) = 1 \implies y = 0 \cdot x + 1 \cdot y = \alpha(x,y)x + \beta(x,y)y \in (x,y) \implies d(x,y)|y$. Por otro lado, si $\exists g(x,y), h(x,y) \in \mathbb{Q} \ni x = g(x,y)h(x,y) \implies g(x,y)$ o $h(x,y)$ es constante $\implies x$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x,y]$ sobre $\mathbb{Q}$. Con igual argumento, se sabe que y es irreducible en $\mathbb{Q}[x,y]$ sobre $\mathbb{Q} \implies x, y$ son primos relativos en $\mathbb{Q}[x,y]$ sobre $\mathbb{Q} \implies$ su máximo común divisor es 1. Ahora bien, se demostró que $d(x,y)$ es divisor común de $x, y \implies d(x,y)|1 \implies d(x,y)$ es una unidad $\implies (d(x,y)) = \mathbb{Q}[x,y] \implies 1 \in \mathbb{Q}[x,y] = (x,y) \implies \exists \alpha(x,y), \beta(x,y) \in \mathbb{Q}[x,y] \ni 1 = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 = \alpha(x,y)x + \beta(x,y)y + 0 \implies 1 = 0 (\rightarrow\leftarrow)$ el ideal (x,y) no tiene generador en $\mathbb{Q}[x,y] \implies [x,y]$ no es un anillo de ideales maximales $\implies \mathbb{Q}[x,y]$ no es un anillo euclideano. Con este ejemplo se puede asegurar que si F es campo, $F[x_1]$ so un anillo euclideano. pero en general $F[x_1, \cdots, x_n], n > 1$ no es un anillo euclideano.

Por otro lado, el teorema 3E, dice que si F es un campo, entonces $F[x]$ tiene factorización prima única (de hecho, el teorema 3F asegura que $F[x]$ es anillo euclideano)

Si R es un dominio entero con factorización prima única, ¿$R[x]$ es también dominio entero con factorización prima única? En caso afirmativo, ¿$R[x_1, \cdots, x_n]$ es también un dominio entero con factorización prima única?

Definición 34. *Un dominio entero con elemento neutro multiplicativo es un dominio de factorización única si:*

1. *Todo elemento de $R - \{0\}$ es una unidad o puede factorizarse como el producto de un número finito de elementos irreducibles (primos) de R.*

2. *La factorización de (i) es única salvo el orden de los factores y asociación.*

Clase: 30/08/2022

Ejemplo 13. *El teorema 3.E muestra que todo anillo euclideano es un dominio de factorización única.*

Lema 36 (3.25). *Si R es un dominio de factorización única, $r_1, r_2 \in R$ entonces r_1 y r_2 tienen un único (salvo asociación) máximo común divisor $(r_1, r_2) \in R$. Además, si r_1 y r_2 son primos relativos $r_1 | r_2 r_3$, entonces $r_1 | r_3$.*

Demostración. Si r_1 o r_2 son unidades, entonces $(r_1, r_2) = 1$ (salvo asociación). Si r_1 y r_2 no son unidades de $R \implies \exists p_1, \cdots, p_m, q_1, \cdots, q_j \in R$, elementos primos de R, $m, n \in \mathbb{Z}^+ \ni r_1 = \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i}$ y $r_2 = \prod_{j=1}^n q_j^{\beta_j}$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{Z}^+$ las factorizaciones primas únicas de r_1 y r_2 en R. Sea $S = \{p_1, \cdots, p_m\} \cap \{q_1, \cdots, q_n\}$. Si $S = \varnothing \implies (r_1, r_2) = 1$. Si $S = \{s_1, \cdots, s_k\} \implies \prod_{l=1}^k s_l^{\delta_l}$, donde $s_l = p_{i_l} = q_{j_l}$ y $\delta_l = \min\{\alpha_{i_l}, \beta_{j_l}\} \implies \prod_{l=1}^k s_l^{\delta_l} | r_1$ y $\prod_{l=1}^k s_l^{\delta_l} | r_2$. Sea $d \in R \ni d | r_1$ y $d | r_2 \implies$ sea $d = \prod_{h=1}^t a_h^{\gamma_h}$, la factorización prima de d en R. Es decir, a_n son elementos primos de R y $\gamma_n \in \mathbb{Z}^+$. Pero $a_{h^k} | \prod_{k=1}^t a_h^{\gamma_n} = d | r_1 = \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i} \implies \exists \sigma \in R \ni a_h \sigma = \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i}$. Sea $\alpha = \prod_{g=1}^{\tau} \pi_g^{\nu_g} \implies a_n \prod_{g=1}^{\tau} \pi_g^{\nu_g} = \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i} \implies$ por la unicidad de las factorizaciones primas en R, debe existir $i_n, 1 \leq i - h \leq m \ni a_h = p_{i_n}$. De igual forma $a_n | \prod_{k=1}^t a_n^{\gamma_n} = d | r_2 = \prod_{j=1}^n q_j^{\beta_j} \implies \exists j_n, 1 \leq j_n \leq n \ni a_h = q_{j_n} \implies a_h \in S \implies d | \prod_{g=1}^k s_l^{\delta_l} \implies (r_1, r_2) = \prod_{l=1}^k s_l^{s_l}$, el cual es único en R porque se construyó a partir de la factorización única de r_1 y r_2. Ahora, si r_1 y r_2 son primos relativos $\implies (r_1, r_2) = 1$. Además, si $r_3 = \prod_{z=1}^{\phi} c_z^{\psi_z}$, la factorización prima única de r_3 en $R \implies \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i} | \left(\prod_{j=1}^m q_j^{\beta_j}\right)\left(\prod_{z=1}^{\phi} c_z^{\psi_z}\right) \implies$ por la unicidad de las factorizaciones primas en R, cada p_i debe coincidir cib algún elemento primo de R en la lista $q_1, \cdots, q_n, c_1, \cdots, c_1\phi$. Pero como $(r_1, r_2) = 1 \implies \{p_i\} \cap \{q_1, \cdots, q_n\} = \varnothing \implies p_i \in \{c_1, \cdots, c_\phi\} \implies r_1 = \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i} | \prod_{z=1}^{\phi} c_z^{\phi_z} = r_3$. ■

Corolario 36.1. *Si R es un dominio de factorización única $p, r_1, r_2 \in R$, p elemento primo de R y $p | r_1 r_2$, entonces $p | r_1$ o $p | r_2$.*

Demostración. Si $p | r_1$ y $p | r_2$, el corolario es válido. Si $p \not| r_1 \implies (p, r_1) = 1 \implies$ por el lema 3.25, $p | r_2$. El caso restante es simétrico. ■

Lema 37 (3.26). *Si R es un dominio de factorización única, entonces el producto de dos polinomios primitivos en $R[x]$ es también primitivo en $R[x]$.*

Demostración. Por la unicidad de la factorización prima en R, la existencia y unicidad de los máximos comunes divisores en R, garantizado por el lema 3.25 y por la propiedad de divisibilidad demostrada también el lema 3.25, los argumentos del lema 3.23, válido para $\mathbb{Z}[x]$, son también válidos para $R[x]$. ■

Corolario 37.1. *Si R es un dominio de factorización única y $f(x), g(x) \in R[x]$, entonces $c(fg) = c(f)c(g)$, salvo asociación.*

Demostración. Sea $f(x) = c(f)f_1(x)$ y $g(x) = c(g)g_1(x)$, con $f_1(x), g_1(x)$ primitivos en $R[x] \implies f(x)g(x) = (c(f))f_1(x)(c(g)g_1(x)) = (c(f)c(g))f_1(x)g_1(x) \implies$ por el teorema 2.26 $f_1(x)g_1(x)$ es primitivo en $R[x] \implies c(f)c(g)$ es el contenido de $(c(f)c(g))f_1(x)g(x) = f(x)g(x) \implies c(f)c(g) = c(fg)$. ■

Corolario 37.2. *Si R es dominio de factorización única $f_1(x), \cdots f_n(x) \in R[x]$, entonces $c(f_1, \cdots, f_n) = \prod_{i=1}^{n} c(f_i)$, excepto asociación.*

Lema 38 (3.27). *Si R es un dominio de factorización única, $f(x) \in R[x]$ es primitivo y F es el campo de cocientes de R. Entonces, $f(x)$ es irreducible en $R[x]$ si y solo si, $f(x)$ es irreducible en $F[x]$.*

Demostración. Tenemos

- ($\implies$) si $f(x)$ es irreducible sobre R, pero $\exists g(x), h(x) \in F[x] \ni gr(g) > 0$ y $gr(h) > 0 \ni f(x) = g(x)h(x) \implies \exists a, b \in R - \{0\}, g_1(x), h_1(x) \in R[x] \ni g(x) = \frac{1}{a}g_1(x)$ y $h(x) = \frac{1}{b}h_1(x) \implies abf(x) = g_1(x)h_1(x)$. Además, $\exists g_2(x), h_2(x) \in R[x]$, primitivos $\ni g_1(x) = c(g_1)g_2(x)$ y $h_1(x) = c(h_1)h_2(x) \implies abf(x) = c(g_1)c(h_1)g_2(x)h_2(x)$ por el lema 3.26, $g_2(x)$ es primitivo y $c(g_1)c(h_1)$ es el contenido de $c(g_1)c(g_2)g_2(x)h_2(x) = abf(x)$ y $f(x)$ es primitivo en $R[x]$, ab es el contenido de $abf(x) \implies c(g_1)c(g_2) = ab \implies f(x) = g_2(x)h_2(x)$. Pero $gr(g_2) = gr(g) > 0$ y $gr(h_2) = gr(h_1) = gr(h) > 0 \implies f(x)$ no es irreducible. $(\rightarrow\leftarrow) f(x)$ es irreducible sobre F.

- ($\Longleftarrow$) Si $f(x)$ es irreducible sobre F, pero existen $g(x), h(x) \in R[x] \ni gr(g) > 0, gr(h) > 0$ y $f(x) = g(x)h(x)$, como $R \subseteq F \implies R[x] \subseteq F[x] \implies g(x), h(x) \in F[x], f(x)$ no es irreducible $(\rightarrow\leftarrow) f(x)$ es irreducible sobre R.

$\blacksquare$

Clase: 01/09/2022

Lema 39 (3.28)**.** *Si R es un dominio es un dominio de factorización única y $p(x) \in R[x]$ es primitivo, entonces $p(x)$ puede factorizarse de manera única como producto de polinomios irreducibles en $R[x]$.*

Demostración. Sea F el campo de cocientes de $R \implies R \subseteq F \implies R[x] \subseteq F[x] \implies p(x) \in F[x] \implies$ por el lema 3.21, $\exists p_1(x), \cdots, p_n(x) \in F[x]$, irreducibles sobre F, $n \in \mathbb{Z}^+$, únicos salvo asociación $\ni p(x) = \prod_{i=1}^n p_i(x)$.

$p_i(x) \in F[x]$, $p_i(x)$ es irreducible sobre F.

$$p_i(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{a_j}{b_j} x^j, \quad a_j, b_j \in R, b_j \neq 0$$

Además,

$$\begin{aligned} p_i(x) &= \sum_{j=0}^{m} \frac{a_j}{b_j} x^j \\ &= 1 \cdot \sum_{j=0}^{m} \frac{a_j}{b_j} x^j \\ &= \frac{\prod_{i=0}^m b_j}{\prod_{j=0}^m b_j} \sum_{j=0}^{m} \frac{a_j}{b_j} x^j \\ &= \frac{1}{\prod_{j=0}^m b_j} a_j \left(\prod_{k \neq j} b_j \right) x^j \end{aligned}$$

Por el lema 3.25 $\exists q_i(x) \in R[x]$ primitivo sobre R, irreducible sobre F tal que:

$$p_i(x) = \frac{\left(a_0(\prod_{j\neq 0} b_j), \cdots, a_m(\prod_{j\neq m} b_j)\right)}{\prod_{j=0}^m b_j} q_i(x)$$

Entonces para cada $p_i(x)$, $\exists f_i(x) \in R[x]$ y $b \in R - \{0\} \ni p_i(x) = \frac{1}{b} f_i(x)$ y $f_i(x)$ es irreducible sobre F. Además, para cada $f_i(x), \exists q_i(x) \in R[x]$, primitivo en $R[x]$, irreducible sobre $F \ni p_i(x) = \frac{c(f_i)}{b_i} q_i(x) \implies$ por el lema 3.27, $q_i(x)$ es irreducible sobre R. Pero $p(x) = \prod_{i=1}^n p_i(x) = \prod_{i=1}^n \frac{c(f_i)}{b_i} q_i(x) = \left(\prod_{i=1}^n \frac{c(f_i)}{b_i}\right) \left(\prod_{i=1}^n q_i(x)\right)$. Ahora bien, por el lema 3.23, $\prod_{i=1}^n q_i(x)$ es primitivo en $R[x] \implies$ el contenido de $\left(\prod_{i=1}^n \frac{c(f_i)}{b_i}\right) \left(\prod_{i=1}^n q_i(x)\right)$ es $\prod_{i=1}^n \frac{c(f_i)}{b_i}$ y también debe ser igual al contenido de $p(x)$, que por ser primitivo $1 = c(p) = \prod_{i=1}^n \frac{c(f_i)}{b_i} \implies p(x) = \prod_{i=1}^n q_i(x)$. La unicidad, salvo asociación, de los $q_i(x)$, se deriva de la unicidad de los $p_i(x)$. ■

Teorema 40 (3K)**.** *Si R es un dominio de factorización única, entonces $R[x]$ es un dominio de factorización única.*

Demostración. Por el lema 3.24, $R[x]$ es un dominio entero, y como R tiene elemento neutro multiplicativo, este lo es también de $R[x]$. Sea $f(x) \in R[x] - \{0\} \implies \exists f_1(x) \in R[x] - \{0\}$, primitivo sobre $R \ni f(x) = c(f) f_1(x) \implies$ por el teorema 3.28 $\exists p_1(x), \cdots, p_n(x) \in R[x], n \in \mathbb{Z}^+$, todos irreducibles sobre R, únicos salvo asociación $\ni f_i(x) = \prod_{i=1}^n p_i(x) \implies f(x) = c(f) f_1(x) = c(f) \prod_{i=1}^n p_i(x)$. Si $\exists q_1(x), \cdots, q_m(x) \in R[x] \ni c(f) = \prod_{i=1}^m q_i(x) \implies 0 = gr(c(f)) = \underbrace{\sum_{i=1}^m gr(q_i)}_{\text{lema 2.17}} \implies gr(q_i) = 0 \implies q_i(x)$ son polinomios constantes $\implies$ la única factorización de $c(f)$ como elemento de $R[x]$ es la misma factorización que tiene como elemento de R, la cual también es única $\implies R[x]$ es un dominio de factorización única. ■

Corolario 40.1. *Si R es un dominio de factorización única, entonces $R[x_1, \cdots, x_n]$ es también un dominio de factorización única.*

Demostración. Aplicación sucesiva del teorema 3k en la definición de $R[x_1, \cdots, x_n]$. ■

Corolario 40.2. *Si F es un campo, entonces $F[x_1, \cdots, x_n]$ es un dominio de factorización única.*

Demostración. F es un dominio de factorización única. ■

2. Teoría de campos

Definición 35. *Si F es un campo, un campo K es una extensión de F si $F \subseteq K$, es decir, si F es un subcampo de K.*

Definición 36. *Si F es un campo y K es una extensión de F, entonces el grado de K sobre F es la dimensión de K como espacio vectorial sobre F.*

> *$[K : F]$, el grado de K sobre F. Si $[K : F] \in \mathbb{Z}^+$, entonces K se dice que una extensión finita de F.*

Teorema 41 (5A)**.** *Si L es una extensión finita del campo K y K es una extensión finita del campo F, entonces L es una extensión finita de F, $[L : F] = [L : K][K : F]$*

Demostración. Sea $\{l_1, \cdots, l_{[L:K]}\}$ una base de L sobre K y $\{k, \cdots, k_{[K:F]}\}$ una base de K sobre F. Sea ahora $l \in L \implies \exists \alpha_1, \cdots, \alpha_{[L:K]} \in K \ni l = \sum_{i=1}^{[L:k]} \alpha_i l_i$, pero para cada $i \exists \beta_1, \cdots, \beta_{[L_k]} \in F \ni \alpha_i = \sum_{j=1}^{[L:K]} \beta_j k_j \implies l = \sum_{i=1}$ ■

Clase: 06/09/2022

Corolario 41.1. *Si F es un campo, L es una extensión finita de F y K es un subcampo de L tal que $F \subseteq K$, entonces $[K : F]|[L : F]$.*

Demostración. Del álgebra lineal, si $F \subseteq K \subseteq L \implies [L : K] \leq [L : F] \in \mathbb{Z}^+ \implies [L : K] \in \mathbb{Z}^+$. Además, $(K, +, \cdots, F)$ es subespacio de $(L, +, \cdot, F) \implies [K : F] \leq [L : F] \in \mathbb{Z}^+ \implies [K : F] \in \mathbb{Z}^+ \implies$ por el teorema, 5.A. $[L : K][K : F] = [L : F] \implies [K : F]|[L : F]$. ■

Corolario 41.2. *Si F es un campo, L es una extensión finita de F y $[L : F]$ es un número primo, entonces no existe K extensión de F tal que $F \subset K \subseteq L$; es decir L es la extensión propia de F más pequeña (en el orden parcial de la contención).*

Definición 37. *Sea F un campo, K una extensión de F, entonces $a \in K$ es algebraico sobre F si existen $n \in \mathbb{Z}^+, \alpha_0, \cdots, \alpha_n \in F$, no 0, tales que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i a^i = 0$.*

> *$a \in K$ es algebraico sobre $F \iff \exists f(x) \in F[x] \ni f(a) = 0$. En donde,*
>
> $$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \in F[x], \quad \alpha_0, \cdots, \alpha_n \in F$$

Definición 38. *Si F es un campo y K es una extensión de F, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \in F[x]$ y $a \in K$, entonces $f(a) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a^i \in K$ es* ***el valor de*** *$f(x)$ en a. Si $f(a) = 0$, entonces se dice que a satisface a $f(x)$ o que a es una raíz de $f(x)$.*

Proposición 15. *Si F es un campo y K es una extensión de F, entonces $a \in K$ es algebraico sobre F, si existe $f(x) \in F[x] \ni f(a) = 0$.*

Proposición 16. *Si F es un campo, K es una extensión de F, $a \in K$ y $\mathbb{M} = \{L : L ex\ una\ extensión\ de\ F\ y\ a \in L\}$, entonces:*

1. $\mathbb{M} \neq \varnothing$
2. $\bigcap \mathbb{M} \in \mathbb{M}$

Demostración. Tenemos

1. $k \in \mathbb{M} \implies \mathbb{M} \neq \varnothing$
2. $F \subseteq \bigcap \mathbb{M}, a \in \bigcap \mathbb{M}$ y la intersección de campo es campo.

■

> **NOTA.** *Notación. Si F es un campo, k es una extensión de F y $a \in K$ entonces $F(a) = \bigcap \{L : L es\ una\ extensión\ de\ F \ni a \in L\}$. La propiedad asegura que $F(a) \neq \varnothing$ y $F(a)$ es la extensión más pequeña de F que contiene a a como uno de sus elementos. En particular, $F \subseteq F(a) \subseteq K$.*

Definición 39. *Si F es un campo, K es una extensión de F y $a \in K$, entonces $F(a)$ se le llama subcampo de K obtenido por la adjunción de a.*

Proposición 17. *Si F es un campo, K es una extensión de F y $a \in K$, entonces*

$$F(a) = \left\{ \frac{f(a)}{g(a)} \ni f(x), g(x) \in F[x], g(a) \neq 0 \right\}$$

Demostración. Tenemos:

- ($\subseteq$) Nótese que $\left\{ \frac{f(a)}{g(a)} \ni f(x), g(x) \in F[x], g(a) \neq 0 \right\}$ es una copia isomorfica del campo de las funciones racionales en x sobre F, $F(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \ni f(x), g(x) \in F[x], g(x) \neq 0 \right\}$. Nótese que si $\alpha \in F \implies$ sean $f(x) = \alpha$ y $g(x) = 1 \in F[x] \implies f(a) = \alpha$ y $g(a) = 1 \implies \alpha = \frac{\alpha}{1} = \frac{f(a)}{g(a)} \in \left\{ \frac{f(a)}{g(a)} \ni f(x), g(x) \in F[x] \text{y} g(a) \neq 0 \right\} \implies F \subseteq \left\{ \frac{f(a)}{g(a)} \ni f(x), g(x) \in F[x], g(a) \neq 0 \right\}$. Sean $f(x) = x, g(x) = 1 \in F[x] \implies a = \frac{a}{1} = \frac{f(a)}{g(a)} \in \left\{ \frac{f(a)}{g(a)} : f(x), g(x) \in F[x] \text{ y } g(a) \neq 0 \right\}$ es un campo que contiene a F y a a. $\implies F(a) \subseteq \left\{ \frac{f(a)}{g(a)} \ni f(x), g(x) \in F[x], g(a) \neq 0 \right\}$.

- ($\supseteq$) Sea $\frac{p(a)}{q(a)} \in \{ \frac{f(a)}{g(a)} : f(x), g(x) \in F[x] \text{ y } g(a) \neq 0\} \implies \exists m, n \in \mathbb{Z}^+, \alpha_0, \cdots, \beta_0, \cdots, \beta_n \in F \ni p(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j x^j, q(a) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j a^j \neq 0$. Ahora bien, $a \in F(a) \implies a^x \in F(a), \forall x \in \mathbb{Z}$. Además, $F \subseteq F(a) \implies \delta \in F(a), \forall \delta \in F \implies \alpha_i a^i, \beta_j a^j \in F(a) \implies f(a) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i a^i, q(a) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j a^j \in F(a)$ y como $q(a) \neq 0 \implies f(a), \frac{1}{q(a)} \in F(a) \implies \frac{f(a)}{q(a)} \in F(a) \implies \left\{ \frac{f(a)}{g(a)} \ni f(x), g(x) \in F[x], g(a) \neq 0 \right\} \subseteq F(a)$

■

Clase: 08/09/2022

Teorema 42 (5B)**.** *Si F es un campo, K es una extensión de F y $a \in K$, entonces es algebraico sobre F si y solo si, $F(a)$ es una extensión finita de F.*

Demostración. Tenemos:

- ($\implies$) Supóngase que a es algebraico sobre $F \implies$ el conjunto de polinomios en $F[x]$ satisfecho por a no es vacío $\implies$ sea $p(x) \in F[x]$, de grado mínimo tal que $p(a) = 0$. Si existen $f(x), g(x) \in F[x] - \{0\}$ tales que $p(x) = f(x)g(x) \implies 0 = p(a) = f(a)g(a)$. Pero $f(a) \in K$, que por ser campo carece de divisores de cero, $f(a) = 0$ o $g(a) = 0$, $gr(f) \geq gr(p)$ o $gr(g) \geq gr(p)$. Pero por otro lado, $p(x) = f(x)g(x) \implies gr(f) \leq gr(p)$ o $gr(g) \leq gr(p) \implies gr(f) = 0$ o $gr(g) = 0. \implies f(x)$ o $g(x)$ es constante en $F[x] \implies p(x)$ es irreducible sobre F. Por el lema 3.22 $[p(x)]$ es un ideal máxima de $F[x] \implies$ por el teorema 3.B, el cociente $F[x]/[p(x)]$ es campo. Sea $f(x) + [p(x)] \in F[x]/[p(x)]$, y por el algoritmo de la división en $F[x]$ (lema 3.17) $\exists q(x), r(x) \in F[x] \ni r(x) = 0$ o $gr(r) < gr(p) \implies \exists \alpha_0, \cdots, \alpha_{gr(p)-1} \in F \ni r(x) = \sum_{i=0}^{gr(p)-1} \alpha_i x^i$, tales que $f(x) + [p(x)] = (p(x)q(x) + r(x)) + [p(x)] = [p(x)q(x) + [p(x)]] + [r(x) + [p(x)]] = [p(x)] + [r(x) + [p(x)]] = r(x) + [p(x)] = \sum_{i=0}^{gr(p)-1} a_i x^i + [p(x)] =$

  > $p(x)q(x) - 0 = p(x)q(x) \in [p(x)] \implies p(x)q(x) \in [p(x)] \implies p(x)q(x) \equiv 0 \pmod{[}p(x)] \implies p(x)q(x) + [p(x)] = [p(x)]$

  $= \sum_{i=0}^{gr(p)-1} [\alpha_i x^i + [p(x)]] = \sum_{i=0}^{gr(p)-1} [\alpha_i + [p(x)]][x^i + [p(x)]] = \sum_{i=0}^{gr(p)-1} [\alpha_i + [p(x)]][x + [p(x)]]^i$.

  > El intento fallido. Sea $\psi : F[x]/[p(x)] \to F(a) \ni \psi(f(x) + [p(x)]) = f(a)$. Si $f(x) + [p(x)], g(x) + [p(x)] \in F[x]/[p(x)] \ni f(x) + [p(x)] = g(x) + [p(x)] \implies f(x) \equiv g(x) \pmod{(}p(x)) \implies f(x) - g(x) \in [p(x)] \implies \exists q(x) \in F[x] \ni p(x)q(x) = f(x) - q(x) \implies f(x) = g(x) + p(x)q(x) \implies f(a) = \psi[f(x) + [p(x)]] = \psi[(g(x) + p(x) + q(x)) + [p(x)]] = g(a) + p(a)q(a) = g(a) + 0q(a) = q(a) = \psi(g(x) + [p(x)]) \implies \psi$ es una función bien definida.
  >
  > Además, $\psi[f(x) + [p(x)]] + [g(x) + [p(x)]] = \psi[(f(x) + g(x)) + [p(x)]] = f(a) + g(a) = \psi[f(x) + [p(x)]] + \psi[g(x) + [p(x)]]$ y $\psi[f(x) + [p(x)]][g(x) + [g(x)]] = \psi[f(x)g(x) + [p(x)]] = f(a)g(a) = \psi[f(x) + [p(x)]]\psi[g(x) + [p(x)]] \implies \psi$ es un homomorfismo.

Sea $\psi : F[x] \to \psi(F[x])$ es homomorfismo sobreyectivo $\implies$ por el primer teorema de isomorfismos (3A), $F[x]/K_\psi \approx \psi(F[x])$. Ahora bien, $p(x) \in K_\psi \implies (p(x)) \subseteq K_\psi \implies [p(x)] \subseteq K_\psi \subseteq F[x]$, pero siendo $[p(x)]$ un ideal maximal de $F[x]$ y claramente $K_\psi \neq F[x] \implies K_\psi = [p(x)] \implies F[x]/[p(x)] \approx \psi(F[x]) \implies \psi(F[x])$ es un campo $\implies F(a)$ es una extensión de $\psi(F[x])$. Explicitando el isomorfismo de la relación $F[x]/[p(x)] \approx \psi(F[x])$, como $\phi : F[x]/[p(x)] \to \psi(F[x]) \ni \phi[f(x) + [p(x)]] = \psi[f(x)] = f(a)$, isomorfismo. Entonces, nótese que $\phi(\alpha_i + [p(x)]) = \alpha, \forall \alpha \in F \implies F \subseteq \psi(F[x])$. Además, $\phi(x + [p(x)]) = a \implies a + \psi(F[x]) \implies \psi(F[x])$ es una extensión de F y $a \in \psi(F[x]) \implies F(a) \subseteq \psi(F[x])$. Por lo tanto, $F(a) = \psi(F[x]) \approx F[x]/[p(x)]$. Pero se había demostrado que $f(x)+[p(x)] = \sum_{i=0}^{gr(p)-1}(\alpha_i + [p(x)])(x + [p(x)])^i$, pero $\alpha_i + [p(x)] \approx \alpha_i$ y $x + [p(x)] \approx a \implies f(x) + [p(x)] = \sum_{i=0}^{gr(p)-1}[\alpha_i + [p(x)]][x + [p(x)]]^i \approx \sum_{i=0}^{gr(p)-1} \alpha_i a^i$ con $\alpha_0, \cdots, \alpha_{gr(p)-1} \in F \implies F(a) \approx F[x]/[p(a)] = \langle\{1, \cdots, a^{gr(p)-1}\}\rangle_F$. Pero además, si $\beta_0, \cdots \beta_{gr(p)-1} \in F \ni \sum_{i=0}^{gr(p)-1} \beta_i a^i = 0 \implies h(x) = \sum_{i=0}^{gr(p)-1} \beta_i x^i \in F[x]$, de grado a lo más $gr(p) = 1$ y satisfecho por $a \implies h(x) = 0 \implies \beta_0 = \cdots = \beta_{gr(p)-1} = 0 \implies \{1, \cdots, a^{gr(p)-1}\}$ es l.i en $F(a)$ sobre $F \implies [F(a) : F] = gr(p) \in \mathbb{Z}^+$

- ($\implies$) Versión 2. Sea $a \in K$ algebraico sobre $F \implies \exists p(x) \in F[x]$, de grado mínimo $\ni p(a) = 0$. Además, supóngase sin pérdida de generalidad que $p(x)$ es mónico. Si $p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ y $q(x) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i x^i, \alpha_n = \beta_n = 1, p(a) = q(a) = 0$ y n es mínimo en $F[x] \implies 0 = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a^i = \sum_{i=0}^{n} \beta_i a^i \implies 0 = \sum_{i=0}^{n}(\alpha_i - \beta_i)a^i = (a^n - a^n) + \sum_{i=0}^{n-1}(\alpha_i - \beta_i)a^i = \sum_{i=0}^{n-1}(\alpha_i - \beta_i)a^i$. Si existe $0 \leq i^* \leq n - 1 \ni \alpha_i - \beta_i \neq 0 \implies \sum_{i=0}^{i^*}(\alpha_i - \beta_i)x^i \in F[x]$, satisfecho por a y de grado menor a $n(\rightarrow\leftarrow) \implies p(x)$ es único en $F[x]$. Si $p(x) = \sum_{i=0}^{gr(p)} \alpha_i x^i, \alpha_{gr(p)} = 1 \implies 0 = p(a) = \sum_{i=0}^{gr(p)} \alpha_i a^i = a^{gr(p)} +$

$\sum_{i=0}^{gr(p)-1} \alpha_i a^i \implies a^{gr(p)} = \sum_{i=0}^{gr(p)-1}(-\alpha_i)a^i \implies$

$$\begin{aligned}
a^{gr(p)+1} &= \sum_{i=0}^{gr(p)-1} (-\alpha_i)a^{i+1} \\
&= -\alpha_{gr(p)-1}a^{gr(p)} + \sum_{i=0}^{gr(p)-2} (-\alpha_i)a^{i+1} \\
&= -\alpha_{gr(p)-1} \left(\sum_{i=0}^{gr(p)-1} (-\alpha_i)a^i \right) + \sum_{i=0}^{gr(p)-2} (-\alpha_i)a^{i+1} \\
&= -\alpha_{gr(p)-1} \left(-\alpha_0 + \sum_{i=1}^{gr(p)-1} (-\alpha_i)a^i \right) + \sum_{i=0}^{gr(p)-2} (-\alpha_i)a^{i+1} \\
&= \alpha_{gr(p)-1}\alpha_0 + \sum_{i=1}^{gr(p)-1} \alpha_{gr(p)-1}\alpha_i a^i + \sum_{i=1}^{gr(p)-1} (-\alpha_{i-1})a^i \\
&= \alpha_{gr(p)-1}\alpha_0 + \sum_{i=1}^{gr(p)-1} (\alpha_{gr(p)-1}\alpha_i - \alpha_{i-1})a^i
\end{aligned}$$

$\implies a^{gr(p)+1}$ es combinación lineal de $\{1, \cdots, a^{gr(p)-1}\}$. Un proceso inductivo muestra que si $k \in \mathbb{Z}^+, a^{gr(p)+k}$ es combinación lineal de $\{1, \cdots, a^{gr(p)-1}\}$. Nótese que $\langle\{1, \cdots, a^{gr(p)-1}\}\rangle_F \implies \{a^n : n \in \mathbb{Z}^+\} \subseteq \langle\{1, \cdots, a^{gr(p)-1}\}\rangle_F$ es cerrado bajo la suma y el producto en $F(a)$ y por las propiedades de este conjunto, se puede demostrar, $(\langle\{1, \cdots, a^{gr(p)-1}\}, +, \cdots\rangle)$ es un anillo conmutativo con neutro multiplicativo. Además, si $\alpha \cdot 1 \in \langle\{1, \cdots, a^{gr(p)-1}\}\rangle_F \implies F \subseteq \langle\{1, \cdots, a^{gr(p)-1}\}\rangle_F$ y claramente $a \in \{1, \cdots, a^{gr(p)-1}\} \subseteq \langle\{1, \cdots, a^{gr(p)-1}\}\rangle_F$. Sean $\sum_{i=0}^{gr(p)-1} \delta_i a^i \in \langle\{1, \cdots, a^{gr(p)+1}\}\langle_F - \{0\}$ y $q(x) = \sum_{i=0}^{gr(p)-1} \delta_i x^i \in F[x] \implies$ como $gr(q) < gr(p) \implies p(x) \ /|q(x)$. Usando el mismo argumento empleado en la versión de la prueba, se puede demostrar que $p(x)$ es irreducible sobre $F \implies q(x) \ /|p(x) \implies (p(x), q(x)) = 1 \implies$ por el lema 3.20, $f(x), g(x) \in F[x] \ni 1 = f(x)p(x) + g(x)q(x)$. Pero, $1 = f(a)p(a) + g(a)q(a) = f(a) \cdot 0 + g(a)q(a) = g(a)q(a)$. Si $g(x) = \sum_{j=0}^m \gamma_j x^j \in F[x] \implies g(a) = \sum_{j=0}^m \gamma_j a^j \in \langle\{1, \cdots, a^{gr(p)-1}\}\rangle_F \implies 1 = g(a)\sum_i^{gr(p)-1} \delta_i a^i \implies g(a) = \left(\sum_{i=0}^{gr(p)-1} \delta_i a^i\right)^{-1} \implies \rangle\{1, \cdots, a^{gr(p)-1}\}\langle_F$ es campo $\implies \rangle\{1, \cdots, a^{gr(p)-1}\}\langle_F$ es una extensión de F que contiene a $a \implies F(a) \subseteq\rangle\{1, \cdots, a^{gr(p)-1}\}\langle_F \implies \rangle\{1, \cdots, a^{gr(p)-1}\}_F = F(a)$. Si

$\gamma_0, \cdots, \gamma_{gr(p)-1} \in F \ni \sum_{i=0}^{gr(p)-1} \gamma_i a^i = 0 \implies$ sea $h(x) = \sum_{i=0}^{gr(p-1)} \gamma_i x^i \in F[x] \ni h(a) = 0$ y $gr(h) \leq gr(p) - 1 \leq gr(p) \implies$ como el $gr(p)$ es el mínimo de los polinomios en $F[x]$ satisfechos por $a \implies h(x) = 0 \implies \gamma_0 = \cdots = \gamma_{gr(p)-1} = 0 \implies \{1, \cdots, a^{gr(p)-1}\}$ es linealmente independiente en $F(a)$ sobre $F \implies \{1, \cdots, a^{gr(p)-1}\}$ es una base pero $F(a)$ sobre $F \implies [F(a) : F] = gr(p) \in \mathbb{Z}^+$.

- $(\impliedby)$ Si $[F(a) : F] \in \mathbb{Z}^+ \implies \{1, \cdots, a^{[F(a):F]}\}$ por tener $[F(a) : F] + 1$ elementos, es linealmente dependiente en $F(a)$ sobre $F \implies \exists \alpha_0, \cdots, \alpha_{[F(a):F]} \in F$, no todos cero $\ni \sum_{i=0}^{[F(a):F]} \alpha_i a^i = 0 \implies$ sea $f(x) = \sum_{i=0}^{[F(a):F]} \alpha_i x^i \in F[x] - \{0\} \ni f(a) = 0 \implies a$ es algebraico sobre F.

■

Clase: 22/09/2022

Definición 40. *Si F es un campo y K es una extensión de F, entonces $a \in K$* ***es algebraico grado*** *n* ***sobre*** *F si existe un polinomio no nulo en $F[x]$ de grado $n \in \mathbb{Z}^+$ satisfecho por a, y no existe ningún polinomio en $F[x]$ satisfecho por a de grado menor a n.*

Teorema 43 (5C)**.** *Si F es un campo, K es una extensión de F y $a \in K$ es algebraico de grado n sobre F, entonces $[F(a) : F] = n$.*

Demostración. Úsese la prueba del teorema 5B. ■

Teorema 44 (5D)**.** *Si F es un campo, K es una extensión de F y $a, b \in K$ son algebraicos sobre F, entonces $a \pm b$, ab son algebraicos sobre F. Además, si $b \neq 0$, entonces ab^{-1} es algebraico sobre F. Es decir, el conjunto de elementos de K algebraicos sobre F son un campo.*

Demostración. Supóngase que a es algebraico de grado $m \in \mathbb{Z}^+$ sobre F y que b es algebraico de grado $n \in \mathbb{Z}^+$ sobre F. $\Longrightarrow$ por el teorema 5.C. $[F(a) : F] = m$. Por otro lado, $F \subseteq F(a) \implies F \subseteq F(b) \subseteq F(a)(b) \implies b \in F(a)(b)$ es algebraico de grado a lo más n sobre $F \implies b \in F(a)(b)$ es algebraico de grado a lo más n sobre $F(a) \implies$ por teorema 5C $[F(a)(b) : F(a)] \leq n \implies$ Por teorema 5A, $[F(a)(b) : F(a)][F(a) : F] \leq nm \in \mathbb{Z}^+ \implies F(a)(b)$ es una extensión finita de F. Ahora bien, $a, b \in F(a)(b) \implies a \pm b, ab \in F(a)(b)$ y cuando $b \pm 0, ab^{-1} \in F(a)(b) \implies$ por el teorema 3B, $a \pm b, ab$ son algebraicos sobre F y cuando $b \neq 0, ab^{-1}$ es algebraico sobre F. ■

Corolario 44.1. *Si F es un campo, K es una extensión de F, $a \in K$ es algebraico de grado $m \in \mathbb{Z}^+$ sobre F y $b \in K$ es algebraico de grado $n \in \mathbb{Z}^+$ sobre F, entonces $a \pm b, ab$ y cuando $b \neq 0$, ab^{-1} son algebraicos sobre F de grado a lo más mn.*

Demostración. Se deduce directamente de la prueba del teorema $5D$. ■

NOTA. *Si F es un campo, K es una extensión de F y $a, b \in K$, entonces $F(a, b) = F(a)(b)$ y $F(b, a) = F(b)(a)$.*

Proposición 18. *Si F es un campo, K es una extensión de F y $a, b \in K$, entonces $F(a, b) = F(b, a)$.*

Demostración. Sea $a \in F(a) \implies a \in F(a)(b)$. Además, $b \in F(a)(b)$ y $F \subseteq F(a) \subseteq F(a)(b) \implies F(b) \subseteq F(a)(b) \implies F(b)(a) \subseteq F(a)(b)$. La contención del otro lado es simétrica. ■

NOTA. *Si F es un campo, K es una extensión de F y $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in K \implies F(a_1, \cdots, a_n)$ es la extensión más pequeña de F que contiene a $a_1, \cdots, a_n$.*

Definición 41. *Si F es un campo, una extensión K de F es algebraica si todos los elementos de K son algebraicos sobre F.*

Teorema 45 (5E). *Si F es un campo, L es una extensión algebraica de K y K es una extensión algebraica de F, entonces L es extensión algebraica de F.*

Demostración. Sea $l \in L \implies \exists k_1, \cdots, k_m \in K \ni \sum_{i=0}^{m} k_i l^i = 0$. Pero k_1 es algebraico sobre $F \implies$ por el teorema 5BC, $[F(k_1) : F] \in \mathbb{Z}^+$. Ahora bien, k_2 es algebraico sobre $F \implies k_2$ es algebraico sobre $F(k_1)$.

$$\vdots$$

Me cansé xd ■

Definición 42. *$a \in \mathbb{C}$ es un número algebraico si es algebraico sobre $\mathbb{Q}$.*

Definición 43. *Un número complejo que no es algebraico es trascendente.*

Ejemplo 14. *e es trascendente*

Clase: 27/09/2022

Lema 46 (5.1 (Teorema del residuo))**.** *Si F es un campo, K es una extensión de F ,$p(x) \in F[x]$, entonces para todo $k \in K$, existe $q(x) \in K[x]$ tal que $gr(q) = gr(p) - 1$ y $p(x) = (x - k)q(x) + p(k)$*

Demostración. Sea $F \subseteq K \implies F[x] \subseteq K[x] \implies p(x) \in K[x]$. Por el lema 3.18 (algoritmo de la división) aplicado a $p(x)$ y $x - k$ en $K[x]$, se tiene que existen $q(x), r(x) \in K[x] \ni p(x) = (x - k)q(x) + r(x)$, donde $r(x) = 0$ o $gr(r) < gr(x - k) = 1$. Pero $p(k) = (k - k)q(k) + r(k) = 0 \cdot q(k) + r(k) = r(k) \in K \implies p(x) = (x - k)q(x) + p(k)$, con $gr(q) = gr((x - k)q(x)) = gr(x - k) + gr(q) = 1 + gr(q) \implies gr(q) = qr(p) - 1$. ■

Corolario 46.1. *Si F es un campo, K es una extensión F, $p(x) \in F[x]$ y $a \in K$ es una raíz de $p(x)$, entonces $(x - a) | p(x)$.*

Definición 44. *Si F es un campo y K es una extensión de F y $p(x) \in F[x]$, entonces $a \in K$ es una raíz de $p(x)$ de multiplicidad $m \in \mathbb{Z}^+$, cuando $(x - a)^m | p(x)$ y $(x - a)^{m+1} \not| p(x)$*

Lema 47. *Un polinomio de grado $n \in \mathbb{Z}^+$ sobre un campo F tiene a lo más n raíces en cualquier extensión de F, contando m raíces en el caso de las raíces de multiplicidad m.*

Clase: 29/09/2022

Teorema 48 (5G). *Si F es un campo, $p(x) \in F[x], gr(p) \geq 1$, irreducible sobre F, entonces existe E, extensión de F tal que $[E : F] = gr(p)$ y E contiene por lo menos una raíz de $p(x)$.*

Demostración. Por el lema 3.22, $((p(x)))$ es un ideal maximal de F en $F[x] \implies$ por el teorema 3B, $F[x]/((p))$ es un campo. Si $f(x) + [p(x)] \in F[x]/(p(x))$ con $f(x) \in F[x]$, aplicando el algoritmo de la división en $F[x]$ (lema 3.17), a $f(x)$ y $p(x), \exists q(x), r(x) \in F[x], r(x) = 0$ o $r(x) = \sum_{i=0}^{gr(p)-1} \alpha_i x^i$, i.e. $g(r) < gr(p) \implies f(x) + [p(x)] = (q(x)p(x) + r(x)) + [p(x)] = [q(x)p(x) + [p(x)]] + [r(x) + [p(x)]] = [0 + [p(x)]] + [r(x) + [p(x)]] = [p(x)] + [r(x) + [p(x)]] = r(x) + [p(x)] = \sum_{i=0}^{gr(p)-1} \alpha_i x^i + [p(x)] = \sum_{i=0}^{gr(p)-1} (\alpha_i + [p(x)]) = \sum_{i=0}^{gr(p)-1} \alpha_i (x^i + [p(x)]) = \sum_{i=0}^{gr(p)-1} \alpha_i (x + (p(x)))^i \implies F[x]/(p(x)) = \langle\{1, \cdots, (x + [p(x)])^{gr(p)-1}\}\rangle_F$ Sea $\phi : F[x] \to F[x]/(p(x))$. Si $\beta_0, \cdots, \beta_{gr(p)-1} \in F \ni ((p(x))) = \sum_{i=0}^{gr(p)-1} \beta_i (x + [p(x)])^i = \left(\sum_{i=0}^{gr(p)-1} \beta_i x^i\right) + [p(x)]$. Sea $g(x) = \sum_{i=0}^{gr(p)-1} \beta_i x^i \in F[x] \implies [p(x)] = g(x) + [p(x)] \implies g(x) \in [p(x)] \implies p(x)|g(x) \implies gr(p) - 1 \geq gr(q) \geq gr(p) \implies p(x) = 0 \implies \beta_0 = \cdots = \beta_{gr(p)-1} \implies \{1, \cdots, (x + [p(x)])^{gr(p)-1}\}$ es linealmente independiente es $F[x]/(p(x))$ sobre $F \implies \{1, \cdots, (x+[p(x)])^{gr(p)-1}\}$ es una base de $F[x]/(p(x))$ sobre F. Nótese que además, $p(x + [p(x)]) = p(x) + [p(x)] = 0 + [p(x)] = [p(x)] \implies x + [p(x)] \in F[x]/(p(x))$ es una raíz de $p(x)$. Si $\phi : F \to F[x]/(p(x)) \ni \phi(\alpha) = \alpha + [p(x)]$ y nótese que $\phi(\alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) + [p(x)] = (\alpha + [p(x)]) + (\alpha_2 + [p(x)]) = \phi(\alpha_1) + \phi(\alpha_2)$ y $\phi(\alpha_1\alpha_2) = \alpha_1\alpha_2 + [p(x)] = (\alpha_1 + [p(x)])(\alpha_2 + [p(x)]) = \phi(\alpha_1)\phi(\alpha_2) \implies \phi$ es un homomorfismo. Sea $\alpha \in K_\phi \implies \phi(\alpha) = \alpha + [p(x)] = [p(x)] \implies \alpha \in [p(x)] \implies p(x)|\alpha \implies \alpha = 0 \implies K_\phi = (0) \implies \phi$ es inyectivo F está inmerso en $F[x]/(p(x)) \implies$ salvo isomorfismo, $F \subseteq F[x]/(p(x))$ y $F[x]/(p(x))$ es la extensión de F requerida. Si $E = F[x]/(p(x)) \implies [E : F] = gr(p)$ y E contiene una raíz de $p(x)$. ■

Clase: 04/10/2022

Corolario 48.1. *Si F es un campo, $f(x) \in F[x]$, entonces existe una extensión E de F, finita, tal que contiene por lo menos una raíz de $f(x)$ y $[E : F] \leq gr(f)$.*

Demostración. Si F contiene a todas las raíces de F, entonces $E = F$ y $[E : F] = [F : F] \leq gr(f)$. Si $p(x)$ es un factor de $f(x)$, irreducible sobre F, entonces por el teorema 5.G existe E, extensión de F, tal que contiene una raíz de $p(x)$ y por lo tanto, también de $f(x)$ y $[E : F] = gr(p) \leq gr(f)$. ■

Definición 45. *Si F es un campo y $f(x) \in F[x]$, E es un campo de descomposición de $f(x)$ sobre F, si E es una extensión finita de F en la que $f(x)$ puede factorizarse como producto de polinomios lineales sobre E, y esta factorización no es posible sobre ningún subcampo propio de E.*

Es decir, E es un campo de descomposición de $f(x)$ sobre F, si E es una extensión finita de F que contiene a todas las raíces de $f(x)$ y $[E : F]$ es mínimo.

Ejemplo 15. *Tenemos*

$$x^3 - 2 \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})[x]$$

en donde:

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[2]{2}x + (\sqrt[3]{2})^2)$$

en donde $a_2x^2 + a_1x + a_0$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, por el teorema 5.B.C.G $\implies \exists E$ extensión de $\mathbb{Q}(\sqrt[2]{2}) \ni \alpha_1 = x + (x^2 + \sqrt[2]{2}x + (\sqrt[3]{2})^2) \in \mathbb{Q}[x]/(x^2 + \sqrt[2]{2}x + (\sqrt[3]{2})^2) \sim \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})(\alpha_1)$. Tenemos:

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{2}w) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] = 2$$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}w) : \mathbb{Q}] =$$

Teorema 49 (5H-Existencia de los campos de descomposición)**.** *Si F es un campo, $f(x) \in F[x]$ y $gr(f) \geq 1$, entonces existe una extensión de F, de grado a lo más $gr(f)!$ tal que contiene a las $gr(f)$ raíces de $f(x)$.*

Demostración. Procediendo por inducción sobre $gr(f)$:

1. Si $gr(f) = 1 \implies f(x) = a_1x + a_0$, con $a_1, a_0 \in F, a_1 \neq 0 \implies -a_0/a_1 \in F$ es raíz de $f(x) \implies F$ es la extensión requerida de F, con $[F : F] = 1$.

2. Supóngase el teorema válido para todos los polinomios en $F[x]$ de grado menor a $gr(f)$.

3. Por el corolario al teorema 5G, existe E_0 extensión de F, $[E_0 : F] \leq gr(f)$ y $\exists \alpha \in E_0 \ni f(\alpha) = 0. \implies$ por el teorema del residuo (lema 3.1) y su corolario, $\exists q(x) \in E_0(x) \ni (x - \alpha)q(x) = f(x) \implies gr(f) = gr(x - \alpha) + gr(q) = 1 + gr(q) > gr(q) \implies$ por la hipótesis inductiva, $\exists E$, extensión de E_0, $[E : E_0] \leq gr(q)!$ y todas las raíces de $q(x)$ están contenidas en E. Ahora bien, $\alpha \in E_0 \subseteq E \implies \alpha \in E \implies E$ contiene a todas las raíces de $f(x)$. Además, por el teorema 3A, $[E : F] = [E : E_0][E_0 : F] \leq ((gr(f) - 1)!)(gr(f)) = gr(f)!$

■

NOTA. *Si F es un campo y $f(x) \in F[x]$, el teorema 5H garantiza la existencia de E, extensión de F, que contiene a todas las raíces de $f(x)$ y $[E : F] \leq gr(f)! \implies \{E : [E : F] \in \mathbb{Z}^+$ y todas las raíces de $f(x)$ están contenidas en $E\} \neq \varnothing \implies$ existe un elemento de este conjunto $\ni [E : F]$ es mínimo, y en ese caso, un campo de descomposición de $f(x)$ sobre F.*

NOTA. *Se verá más adelante que existen campos F y polinomios $f(x) \in F[x]$, cuyos campos de descomposición E sobre F alcanzan la cota superior $[E : F] = gr(f)!$. Por ejemplo, $x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$, se demostrará que si E es el campo de descomposición de $x^3 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$ entonces $[E : \mathbb{Q}] = 6 = 3! = gr(x^3 - 2)!$*

NOTA. *Si F es un campo, $f(x) \in F[x]$ y E_1, E_2 son campos de descomposición de $f(x)$ sobre F. ¿Existe alguna relación entre E_1 y E_2?*

Clase: 24/11/2022

Lema 50 (5.3)**.** *Si F y F' son campos, $\tau : F \to F'$ es un isomorfismo, entonces $\tau^* : F[x] \to F'[t] \ni f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \in F[x] \to \tau^*(f(x)) = \tau * (\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} \tau(\alpha_i) t^i = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i' t^i$.*

Demostración. Si $f(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j x^j \in F[x] \implies$

$$\begin{aligned}
\tau^*(f(x)+g(x)) &= \tau^*\left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i + \sum_{i=0}^{n} \beta_j x^j\right) \\
&= \tau^*\left(\sum_{k=0}^{\text{máx}(m,n)} (\alpha_k + \beta_k) x^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\text{máx}(m,n)} \tau(\alpha_k + \beta_k) t^k \\
&= \sum_{k=0}^{\text{máx}(m,n)} (\tau(\alpha_b) + \tau(\beta_k)) t^k \\
&= \sum_{k=0}^{\text{máx}(m,n)} (\alpha'_k + \beta'_k) t^k = \sum_{i=0}^{m} \alpha'_i t^i + \sum_{j=0}^{n} \beta'_j t^j \\
&= \sum_{i=0}^{m} \tau(\alpha_i) t^i + \sum_{j=0}^{n} \tau(\beta_j) t^j \\
&= \tau^*(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i) + \tau^*(\sum_{j=0}^{n} \beta_j x^j) = \tau^*(f(x)) + \tau^*(g(x))
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\tau^*(f(x)g(x)) &= \tau^*\left(\left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j\right)\right) \\
&= \tau^*\left(\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{l=0}^{k} \alpha_l \beta_{k-l}\right) x^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m+n} \tau\left(\sum_{l=0}^{k} \alpha_l \beta_{k-l}\right) t^k \\
&= \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{l=0}^{k} \tau(\alpha_l \beta_{k-l}\right) t^k \\
&= \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{l=0}^{k} \tau(\alpha_l)\tau(\beta_{k-l})\right) t^k \\
&= \cdots \\
&= \tau^*\left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i\right) \tau^*\left(\sum_{j=0}^{n} \beta_j x^j\right)
\end{aligned}$$

Entonces τ^* es homomorfismo.

Si $f(x) \in K_{\tau^*} \implies 0 = \tau^*(f(x)) = \tau^*\left(\sum_{i=0}^m \alpha_i x^i\right) = \sum_{i=0}^m \tau(\alpha_i)t^i \implies 0 = \tau(\alpha_0) = \cdots = \tau(\alpha_m) \implies$ como τ es isomorfismo, $0 = \alpha_0 = \cdots = \alpha_m \implies f(x) = 0 \implies K_{\tau^*} = 0 \implies$ por lema 3.5 , τ^* es inyectivo.

Si $f(t) \in F'[t] \implies \exists \alpha_0', \cdots, \alpha_m' \in F' \ni f(t) = \sum_{i=0}^m \alpha_i' t^i \implies$ por la sobreyectividad de $\tau, \exists \alpha_0, \cdots, \alpha_m \in F \ni \tau(\alpha_0) = \alpha_0', \cdots, \tau(\alpha_m) = \alpha_m' \implies f(x) = \sum_{i=0}^m \alpha_i x^i \in F[x] \ni \tau^*(f(x)) = \tau^*(\sum_{i=0}^m \alpha_i x^i) = \sum_{i=0}^m \tau(\alpha_i')t^i = \sum_{i=0}^m \alpha_i' t^i = f(t) \implies \tau^*$ es sobreyectivo. $\implies \tau^*$ es isomorfismo. ■

> **NOTA.** *En los teoremas 5BCG se recurrió al cociente $F[x]/(p(x))$ para obtener una extensión finita de F que contenga una raíz de $p(x)$. Por esta razón se estudiará la relación entre los cocientes entre el anillo $F[x]/(f(x))$ y $F'[t]/(f(t))$ cuando $F[x] \sum F'[t]$*

Lema 51 (5.4)**.** *Si F y F' son campos, τ y τ^* definidos como en el lema 5.3, entonces $\tau^{**} : F[x]/(f(x)) \to F'[t]/(f'(t))$, isomorfismo, tal que $\tau^{**}(\alpha) = \tau(\alpha) = \alpha', \forall \alpha \in F$.*

Demostración. Considérese la identificación isomorfica $\alpha \approx \alpha + [f(x)], \forall \alpha \in F$ y con ello $F \subseteq F[x]/((f(x)))$. De manera similar, $\alpha' \approx \alpha' + [f'(t)], \forall \alpha' \in F' \implies F' \subseteq F'[t]/(f'(t))$. Sea $\tau^{**} : F[x]/(f(x)) \to F'[t]/(f'(t)) \ni \tau^{**}(g(x) + [f(x)]) = \tau^{**}(g(x)) + [f'(t)] = g'(t) + [f'(t)]$ y nótese que si $\alpha \in F \implies \tau^{**}(\alpha) = \tau^{**}(\alpha + [f(x)]) = \tau'(\alpha) + [f'(t)] = \tau(\alpha) + [f'(t)] = \alpha' + [f'(t)] \approx \alpha'$.

Demostrar que está bien definido, si $g_1(x), g_2(x) \in F[x] \ni g_1(x) + [f(x)] = g_2(x) + [f(x)] = g_1(x) \equiv g_2(x) \mod (f(x)) \implies g_1(x) - g_2(x) \in (f(x)) \implies f(x)|g_1(x) - g_2(x) \implies \exists q(x) \in F[x] \ni f(x)q(x) = g_1(x) - g_2(x) \implies f'(t)q'(t) = \tau^*(f(x))\tau^*(q(x)) = \tau^*(f(x)q(x)) = \tau^*(g_1(x) - g_2(x)) = \tau^*(g_1(x)) - \tau^*(g_2(x)) = g_1'(t) - g_2'(t) \implies f'(t)|g_1'(t) - g_2'(t) \implies g_1'(t) - g_2'(t) \in (f(t)) \implies g_1'(t) \equiv g_2'(t) \mod (f'(t)) \implies \tau^*(g(t) + [f(x)]) = \tau^*(g_1(x)) + (f'(t)) = g_1'(t) + [f'(t)] = g_2'(t) + [f'(t)] = \tau^*(g_2(x)) + (f'(t)) = \tau^{**}(g_2(x) + f(x)) \implies \tau^{**}$ es una función bien definida.

Homomorfismo. Si $g_1(x), g_2(x) \in F[x] \implies \tau^{**}\left((g_1(x) + [f(x)]) + (g_2(x) + (f(x))\right) = \tau^{**}\left((g_1(x) + g_2(x)) + [f(x)]\right) = \tau^*(g_1(x)+g_2(x))+[f'(t)] = \tau^*(g_1(x))+\tau^*(g_2(x))+[f'(t)] = (g_1'(t)+g_2'(t))+[f'(t)] = g'(t)+[f'(t)]+g_2'(t)+[f'(t)] = \tau^*(g_1(x))+[f'(t)]+\tau^*(g_2(x)+[f'(t)]) = \tau^{**}(g_1(x)+[f(x)]) + \tau^{**}(g_2(x) + (f(x)))$. Además, $\tau^{**}((g_1(x) + [f(x)])(g_2(x) + [f(x)])) = \tau^{**}(g_1(x)g_2(x)+[f(x)]) = \tau^*(g_1(x)g_2(x))+[f'(t)] = \tau^*(g_1(x))\tau^*(g_2(x))+[f'(t)] = \cdots = \tau^{**}(g_1(x) + [f(x)])\tau^{**}(g_2(x) + [f(x)]) \implies \tau^{**}$ es homomorfismo.

Sea $f(x) + [f(x)] \in K_{\tau^{**}} \implies (f'(t)) = \tau^{**}(g(x) + [f(x)]) = \tau^*(g(x)) + [f'(t)] = g'(t) + [f'(t)] \implies g'(t) \in (f'(t)) \implies f'(t)|g'(t) \implies \exists q'(t) \in F'[t] \ni f'(t)q'(t) = g'(t)$. Por la sobreyectividad de $\tau^*, \exists q(x) \in F[x] \ni \tau^*(q(x)) = q'(t) \implies f(x)q(x) = (\tau^*)^{-1}(f'(t))(\tau^*)^{-1}(q'(t)) = (\tau^*)^{-1}(f'(t)q'(t)) = (\tau^*)^{-1}(g'(t)) = g(x) \implies f(x)|g(x) \implies g(x) \in (f(x)) \implies g(x) + [f(x)] = [f(x)] \implies K_{\tau^{**}} = (f(x)) \implies$ por el lema 3.5, τ^{**} es inyectivo.

Si $g'(t) + (f'(t)) \in F'[t]/(f'(t)) \implies g'(t) \in F'[t]$ y por la sobreyectividad de $\tau^* \ni g(x) \in F[x] \ni \tau^*(g(x)) = g'(t) \implies g(x) + [f(x)] \in F[x]/(f(x)) \ni \tau^{**}(g(x) + [f(x)]) = \tau^*(g(x)) + (f'(t)) = g'(t) + [f'(t)] \implies \tau^{**}$ es sobreyectivo. $\implies \tau^{**}$ es isomorfismo. ■

Lema 5.4 es un lema de presentación más avanzada de teoría de anillos.

Clase: 25/11/2022

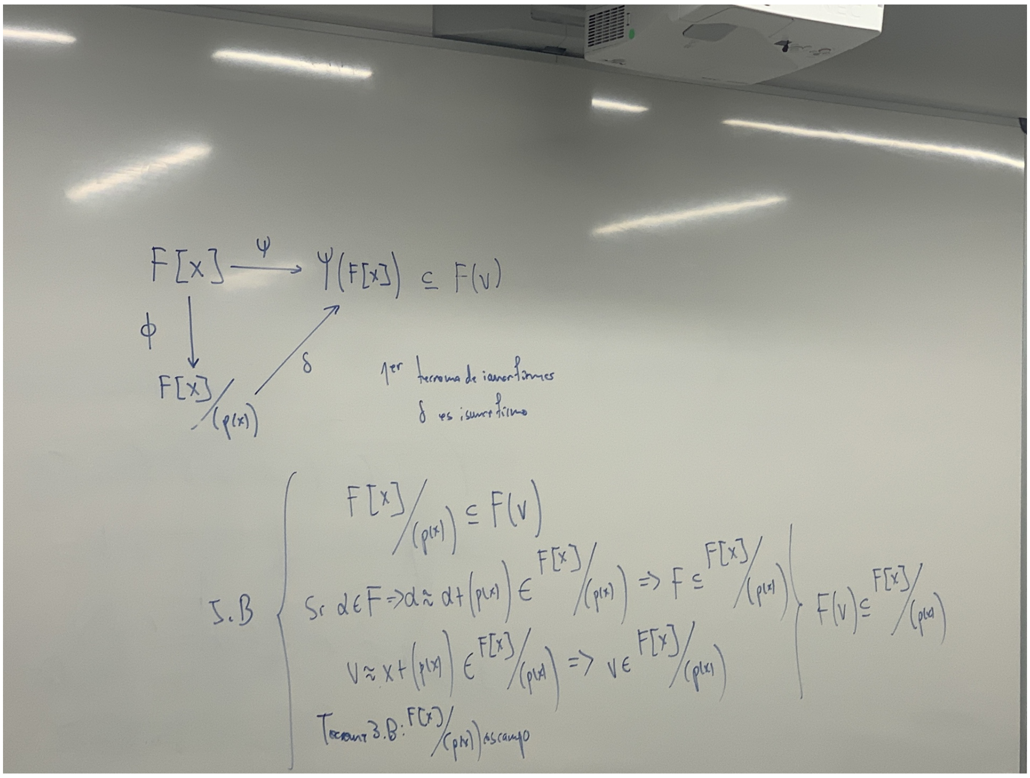
Teorema 52 (5I). *Si F y F' son campos, $\tau : F \to F'$ es un isomorfismo, $p(x) \in F[x]$ es irreducible sobre F y v es una raíz de $p(x)$, entonces existe $\sigma : F(v) \to F'(w)$, isomorfismo, donde w es una raíz de $p'(t) = \tau^*(p(x))$, y este isomorfismo σ puede elegirse tal que:*

1. $\sigma(v) = w$

2. $\sigma(\alpha) = \tau(\alpha) = \alpha', \forall \alpha \in F$. *Es decir, σ deja fijos (salvo el isomorfismo) a los elementos de F*

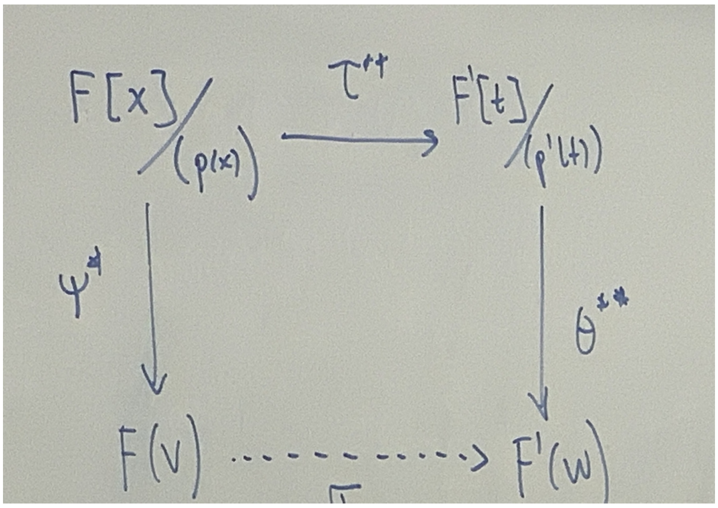
Demostración. Considere $M = \{f(x) \in F[x] : f(v) = 0\}$. Si $f_1(x), f_2(x) \in M \implies f_1(v) - f_2(v) = 0 - 0 = 0 \implies f_1(x) - f_2(x) \in M \implies$ por el corolario al lema 2.3 $(M, +)$ es subgrupo de $(F[x], +)$. Si $g(x) \in F[x]$ y $f(x) \in M \implies g(v)f(v) = g(v) = 0 = 0 \implies g(x)f(x) \in M \implies M$ es un ideal de $F[x]$.Además, $p(v) = 0 \implies p(x) \in M \implies (p(x)) \subseteq M$. Como existen polinomios en $F[x]$, no satisfechos por $v \implies M \subset F[x]$, no satisfechos por $v \implies M \subset F[x]$. Pero, siendo $p(x)$ irreducible sobre F, por el lema 3.22, $(p(x))$ es un ideal maximal en $F[x] \implies M = (p(x))$. Considérese el homomorfismo $\psi : F[x] \to F[v] \ni \psi(f(x)) = f(v)$ empleando los argumentos de la prueba de los teoremas 5.B.C.G, ψ es un homomorfismo $\ni K_\psi = M = (p(x))$ y existe $\psi^* F[x]/(p(x)) \to F(v) \ni \psi^*(f(x) + [p(x)]) = f(v)$, isomorfismo.

$F[x]/(p(x)) \approx F(v)$



Como $p(x)$ es irreducible en $F[x]$ y por el lema 5.3 $\tau^* : F[x] \to F'[t]$ es un isomorfismo entonces $\tau^*(p(x)) = p'(t)$ es irreducible en $F'[t]$. Entonces replicando los argumentos ya usados, existe $\theta^* : F'[t]/(p'(t)) \to F(w) \ni \theta^*(f'(t) + [p'(t)]) = f'(w)$, isomorfismo. Además, por el lema 5.4, $\tau^{**} : F[x]/(p(x)) \to F'[t]/(p'(t)) \ni \tau^{**}(f(x) + [p(x)]) = f'(t) + (p'(t))$ es un isomorfismo de campos $\ni$ si $\alpha \in F \implies$

$\tau^{**}(\alpha) \approx \tau^{**}(\alpha + (p(x))) = \tau(\alpha) + (p'(t)) = \alpha' + (p'(t)) \approx \alpha'$ y $\tau^{**}(x + (p(x))) = \tau^{*}(x) + (p'(t)) = t + (p'(t))$. Considérese el siguiente diagrama:



■

> *Si $F = F'$ (automorfismo), y donde $\sigma : F(v) \to F(w)$ y más precisamente $\sigma|_F = I_F$*

y la función $\sigma = (\psi^*)^{-1}\tau^{**}\theta^* : F(v) \to F'(w)$, un isomorfismo, por ser la composición de isomorfismos. Nótese que $\sigma(v) = (\psi^*)^{-1}\tau^{**}\theta^{**}(v) = \theta^{**}(\tau^{**}(\psi^{*-1}(v))) =_{5B}= \theta^{**}(\theta^{**}(x + (p(x)))) = \theta^{**}(t + (p'(t))) = w$ y si $\alpha \in F \implies \sigma(\alpha) = \psi^{*-1}\tau^{**}\theta^{**}(\alpha) = \theta^{**}(\theta^{**}(\psi^{*-1}(\alpha))) = \theta^{**}(\tau^{**}(\alpha + p(w))) = \theta^{**}(\tau^{*}(\alpha) + (p'(t))) =_{5,3}= \theta^{**}(\tau(\alpha) + p'(t)) = \theta^{**}(\alpha' + (p'(t))) = \alpha'$.

Corolario 52.1. *Si F es un campo, $p(x) \in F[x]$ es irreducible sobre F y a, b son raíces de $p(x)$ entonces existe $\sigma : F(a) \to F(b)$, isomorfismo, tal que $\sigma(a) = b$ y $\sigma(\alpha) = \alpha$, $\forall \alpha \in F$.*

Demostración. Aplíquese el teorema 5I al caso especial $F = F'$ y $\tau = I_F$. ■

Clase: 13/11/2022

Teorema 53 (5J- Unicidad de los campos de descomposición). *Si F y F' son campos, τ, τ^* y τ^{**} definidos como en los lemas 5.3 y 5.4 $f(x) \in F[x]$, $f'(t) = \tau^*(f(x)) \in F'[t]$, E es un campo de descomposición de $f(x)$ sobre F y E' es un campo de descomposición de $f'(t)$ sobre F', entonces existe $\phi : E \to E'$, isomorfismo tal que $\phi(\alpha) = \tau(\alpha) = \alpha', \forall \alpha \in F$*

Demostración. Procediendo sobre $[E : F]$:

1. $[E : F] = 1 \implies E$ es un espacio vectorial de dimensión 1 sobre $F \implies \exists \{a\} \subseteq E \ni \{a\}$ es base E sobre $F \implies$ como $E \neq \{0\}, a \neq 0$ y además como $E = \langle\{a\}\rangle_F$ y $1 \in E \implies \exists \alpha \in F - \{0\} \ni 1 = \alpha a \implies a = \alpha^{-1} \cdot 1 = \alpha^{-1} \in F \implies F = \langle\{a\}\rangle_F = E \implies F = E$ es campo de descomposición de $f(x)$ sobre F. Sea $\phi = \tau \implies E = F \approx F'$. Por el lema 5.3, por lo que τ^* es un isomorfismo $\implies f(x)$ y $f'(t)$ tienen las mismas raíces, salvo $\tau^* \implies F'$ contiene a todas las raíces de $f'(t) \implies E' \subseteq F'$. Pero E' es extensión de $F' \implies E' = F'$. Sea $\phi = \tau$, el isomorfismo requerido y $E \approx E'$.

2. Supóngase el teorema válido para todos los polinomios $g(x) \in F_0[x]$ con campo de descomposición E_0 sobre F_0 tales que $[E_0 : F_0] < [E : F]$, si E'_0 es el campo de descomposición de $g'(t) = \tau^*(g(x))$, entonces $E_0 \approx E'_0$ y $[E_0 : F'_0] = [E'_0 : F'_0]$.

3. Si $[E : F] > 1 \implies$ existen raíces de $f(x)$ que no pertenecen a $F \implies \exists p(x) \in F[x]$ irreducible sobre $F \ni p(x)|f(x)$ y $1 < gr(p) \leq gr(f) \implies$ por lema 5.3, τ^* es isomorfismo $p'(t) = \tau^*(p(x))$ es un factor irreducible de $f'(t)$ y $1 < gr(p') = gr(p) \leq gr(f) = gr(f')$. Sea $v \in E$ una raíz de $p(x) \implies$ por el teorema 5.C, $[F(v) : F] = gr(p)$. Sea $w \in E'$ una raíz de $p'(t) \implies$ por el teorema 5I, $\exists \sigma F(v) \to F'(w)$ isomorfismo y es tal que $\sigma(v) = w$ y $\sigma(\alpha) = \tau(a) = \alpha'$. Por el teorema 5A, $[E : F] = [E : F(v)][F(v) : F]$ y como $[F(v) : F] = gr(p) > 1 \implies [E : F(v)] = [E : F]/[F(v) : F] < [E : F]$. Considérese ahora a $f(x) \in F(v)[x]$. Si E no es campo de descomposición de $f(x)$ sobre $F(v) \implies$ por el teorema 5H $\exists E_1$ campo de descomposición de $f(x)$ sobre $F(v) \implies [E : F(v)] > [E_1 : F(v)] \implies$ por el teorema 5A, $[E : F] = [E : F(v)] > [E_1 : F(v)][F(v) : F] = [E_1 : F] \implies E$

no es campo de descomposición de $f(x)$ sobre $F(\rightarrow\leftarrow) \implies E$ es campo de descomposición de $f(x)$ sobre $F(v)$. Replicando este argumento, E' es campo de descomposición de $f'(t)$ sobre $F'(w)$. Aplicando la hipótesis inductiva a $f(x) \in F(v)[x]$, E es campo de descomposición de $f(x)$ sobre $F(v)$ y $[E : F(v)] < [E : F]$, entonces existe $\phi : E \to E'$, isomorfismo $\ni \phi(\alpha) = \tau(\alpha) = \alpha', \forall \alpha \in F$.

$\blacksquare$