Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

Análisis de Variable Compleja - Catedrático: Dorval Carías
15 de noviembre de 2022

Tarea 1

Problema 1. *Sea* $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ *y encuentre la expansión de Laurent de* $f(z)$ *en cada uno de los anillos dados:*

Sea

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)(z-2)} &= \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-2}\\ 1 &= A(z-1)(z-2) + Bz(z-2) + Cz(z-1)\\ &= (Az-A)(z-2) + Bz^2 - 2Bz + Cz^2 - Cz\\ &= Az^2 - 2Az - Az + 2A + Bz^2 - 2Bz + Cz^2 - Cz\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}A + B + C &= 0\\ -2A - A - 2B - C = -3A - 2B - C &= 0\\ 2A &= 1\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}B + C = -\frac{1}{2} &\implies C = -\frac{1}{2} - B\\ -2B - C = \frac{3}{2} &\implies -2B + \frac{1}{2} + B = \frac{3}{2} \implies B = -1\\ A = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-2)}$$

1. *Centro en $z = 0$, y radios $r_2 = 0, r_1 = 1$*

Solución. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-2)} \\
&= \frac{1}{2z} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-2}\right) \\
&= \frac{1}{2z} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\left(\frac{1/(-1/2)}{(z-2)/(-1/2)}\right) \\
&= \frac{1}{2z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2z} + \sum_{n=0}^{\infty}(z)^n - \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right) \\
&= \frac{1}{2z} + z^0 + z^1 + z^2 + \cdots - \frac{1}{4}\left(\frac{z^0}{2^0} + \frac{z^1}{2^1} + \frac{z^2}{2^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{2z} + 1 + z + z^2 + \cdots - \frac{1}{4} - \frac{z}{8} - \frac{z^2}{16} - \cdots
\end{aligned}$$

□

2. *Centro en $z = 0$, y radios $r_2 = 1, r_1 = 2$*

Solución. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-2)} \\
&= \frac{1}{2z} - \frac{1/z}{(z-1)/z} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-2}\right) \\
&= \frac{1}{2z} - \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1/(-1/2)}{(z-2)/(-1/2)}\right) \\
&= \frac{1}{2z} - \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2z} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right) \\
&= \frac{1}{2z} - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) - \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right) \\
&= \frac{1}{2z} - \frac{1}{z^1} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \cdots - \frac{1}{4} - \frac{z}{8} - \frac{z^2}{16} - \cdots
\end{aligned}$$

□

3. *Centro en $z = 0$, y radios $r_2 = 2, r_1 = \infty$*

Solución. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < \infty\}$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-2)} \\
&= \frac{1}{2z} - \frac{1/z}{(z-1)/z} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-2}\right) \\
&= \frac{1}{2z} - \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1/z}{(z-2)/z}\right) \\
&= \frac{1}{2z} - \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) + \frac{1}{2z}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right) \\
&= \frac{1}{2z} - \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\right) + \frac{1}{2z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n\right) \\
&= \frac{1}{2z} - \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^{n-1}}{z^{n+1}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2z} - \frac{1}{z^1} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \cdots + \frac{2^{0-1}}{z^1} + \frac{2^{1-1}}{z^{1+1}} + \frac{2^{2-1}}{z^{2+1}} + \cdots
\end{aligned}$$

□

Problema 2. *Para la función*

$$f(z) = \frac{z^2+z+3}{z^3+2z^2+z+2}$$

Sea

$$\begin{aligned}
f(z) = \frac{z^2+z+3}{z^3+2z^2+z+2} = \frac{z^2+z+3}{(z+2)(z^2+1)} &= \frac{A}{z+2} + \frac{Bz+C}{z^2+1} \\
\implies z^2+z+3 &= A(z^2+1) + (Bz+C)(z+2) \\
&= Az^2 + A + Bz^2 + 2Bz + Cz + 2C
\end{aligned}$$

Entonces,

$$A + B = 1; \quad 2B + C = 1; \quad A + 2C = 3$$

En donde,

$$A = 1; \quad B = 0; \quad C = 1$$

Por lo tanto,

$$\frac{z^2+z+3}{(z+2)(z^2+1)} = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z^2+1}$$

1. *Encuentre el desarrollo de Taylor con respecto al origen*

Solución. Sea

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(z)^n \\
&= \frac{f^0(0)}{0!}z^0 + \frac{f^1(0)}{1!}z + \frac{f^2(0)}{2!}z^2 + \cdots \\
&= \left[\frac{1}{z+2} + \frac{1}{z^2+1}\right]_{z=0} z^0 + \left[-\frac{2z}{(z^2+1)^2} - \frac{1}{(z+2)^2}\right]_{z=0} z^1 + \\
&+ \left[\frac{6}{(z^2+1)^2} - \frac{8}{(z^2+1)^3} + \frac{2}{(z+2)^3}\right]_{z=0} z^2 + \cdots \\
&= \frac{3}{2} - \frac{z}{4} - \frac{7z^2}{8} + \cdots
\end{aligned}
$$

□

2. *Encuentre el desarrollo de Taylor con respecto a $z = -1$*

Solución. Sea $a = -1$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(z-(-1))^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(z+1)^n \\
&= \frac{f^0(0)}{0!}(z+1)^0 + \frac{f^1(0)}{1!}(z+1)^1 + \frac{f^2(0)}{2!}(z+1)^2 + \cdots \\
&= \left[\frac{1}{z+2} + \frac{1}{z^2+1}\right]_{z=-1} (z+1)^0 + \left[-\frac{2z}{(z^2+1)^2} - \frac{1}{(z+2)^2}\right]_{z=-1} (z+1)^1 + \\
&+ \left[\frac{6}{(z^2+1)^2} - \frac{8}{(z^2+1)^3} + \frac{2}{(z+2)^3}\right]_{z=-1} (z+1)^2 + \cdots \\
&= \frac{3}{2} - \frac{z+1}{2} + \frac{5}{4}(z+1)^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

□

3. *Calcule la(s) expansión(es) de Laurent con respecto al origen*

Solución. Sea

- Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z - 0| < \infty\}$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z^2+1} \\
&= \frac{1/z}{(z+2)/z} + \frac{1/z^2}{(z^2+1)/z^2} \\
&= \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-(-\frac{2}{z})}\right) + \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{1-(-\frac{1}{z^2})}\right) \\
&= \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n\right) + \frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+2}}\right)
\end{aligned}
$$

- Caso no necesario:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z^2+1} \\
&= \frac{1/z}{(z+2)/z} + \frac{1}{1-(-z^2)} \\
&= \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-(-\frac{2}{z})}\right) + \frac{1}{1-(-z^2)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n
\end{aligned}
$$

- Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 0| < 2\}$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z^2+1} \\
&= \frac{1/2}{(z+2)/2} + \frac{1/z^2}{(z^2+1)/z^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})}\right) + \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{1-(-\frac{1}{z^2})}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+2}}\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{2^{n+1}}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+2}}\right)
\end{aligned}
$$

- Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 0| < 1\}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z^2+1} \\ &= \frac{1/2}{(z+2)/2} + \frac{1}{1-(-z^2)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})}\right) + \frac{1}{1-(-z^2)} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{2^{n+1}}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n \end{aligned}$$

$\square$

4. *Calcule la expansión de Laurent con respecto a cada punto singular. En cada caso, presente el residuo de la función:*

Solución. Sea

a) Se tiene $a = -2$

1) Sea

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z^2+1} \\ &= \frac{1}{z+2} + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z-i}\right) \\ &= \frac{1}{z+2} + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2-2+z+i}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2-2+z-i}\right) \\ &= \frac{1}{z+2} + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{-2+i-[-(z+2)]}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{1}{-2-i-[-(z+2)]}\right) \\ &= \frac{1}{z+2} + \frac{i}{2(-2+i)}\left(\frac{1}{1-\left[\frac{-(z+2)}{-2+i}\right]}\right) + \frac{i}{2(2+i)}\left(\frac{1}{1-\left[\frac{(z+2)}{(2+i)}\right]}\right) \\ &= \frac{1}{z+2} + \frac{i}{2(-2+i)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{-(z+2)}{-2+i}\right]^n\right) + \frac{i}{2(2+i)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{z+2}{2+i}\right]^n\right) \\ &= \frac{1}{z+2} + \frac{i}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+2)^n}{(-2+i)^{n+1}}\right) + \frac{i}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{(2+i)^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

b) Se tiene $a = i$:

1) Sea

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z^2+1} \\
&= \frac{1}{i-i+z+2} + \frac{1}{(z+i)(z-i)} \\
&= \frac{1}{2+i+z-i} + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z-i}\right) \\
&= \frac{1}{2+i-[-(z-i)]} + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2i-2i+i-z}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z-i}\right) \\
&= \frac{1}{2+i}\left(\frac{1}{1-\left[\frac{-(z-i)}{2+i}\right]}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2i-[-(z-i)]}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z-i}\right) \\
&= \frac{1}{2+i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{-(z-i)}{2+i}\right]^n\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\left[\frac{-(z-i)}{2i}\right]}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z-i}\right) \\
&= \frac{1}{2+i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(2+i)^n}\right) + \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{(z-i)}{2i}\right]^n\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z-i}\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(2+i)^{n+1}}\right) + \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{(z-i)}{2i}\right]^n\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z-i}\right)
\end{aligned}
$$

c) Se tiene $a = -i$:

1) Sea

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z^2+1} \\
&= \frac{1}{i-i+z+2} + \frac{1}{(z+i)(z-i)} \\
&= \frac{1}{2-i+z+i} - \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z-i}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i}\right) \\
&= \frac{1}{2-i-[-(z+i)]} - \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2i-2i+z-i}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i}\right) \\
&= \frac{1}{2-i}\left(\frac{1}{1-\left[\frac{-(z+i)}{2-i}\right]}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{1}{-2i-[-(z+i)]}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i}\right) \\
&= \frac{1}{2-i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{-(z+i)}{2-i}\right]^n\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\left[\frac{(z+i)}{2i}\right]}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i}\right) \\
&= \frac{1}{2-i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+i)^n}{(2-i)^n}\right) + \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(z+i)}{2i}\right]^n\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i}\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+i)^n}{(2-i)^{n+1}}\right) + \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(z+i)}{2i}\right]^n\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i}\right)
\end{aligned}
$$

□

Problema 3. *Sea G una región del plano complejo y $f : G \to \mathbb{C}$ una función analítica excepto para polos. Muestre que f no puede tener un punto límite en G.*

Solución. Por reducción al absurdo, supóngase que f tiene un punto límite a en G. Por hipótesis, tenemos una función *meromorfa* en G, es decir que f es analítica en todo G (incluyendo a a), excepto para los polos. $\implies$ La función es analítica en una vecindad de $a(\rightarrow\leftarrow)$, entonces a no es un punto límite. Por lo tanto, f no puede tener un punto límite en G. $\square$

Problema 4. *Investigue la existencia del desarrollo de Laurent de $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)}$, con respecto al origen.*

Solución. Sea

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} z &= \frac{e^{iz} - e^{iz}}{2i} \\
&= \frac{1}{2i}\left[e^{iz} - e^{iz}\right]
\end{aligned}$$

Usando $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (iz)^n}{n!}\right]
\end{aligned}$$

Entonces para $\operatorname{sen}(1/z)$:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n (1/z)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (i(1/z))^n}{n!}\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^n n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n}{z^n n!}\right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto, Entonces para $(\operatorname{sen}(1/z))^{-1}$:

$$\begin{aligned}
\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right)^{-1} &= \left(\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^n n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n}{z^n n!}\right]\right)^{-1} \\
&= 2i\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n n!}{i^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n n!}{(-1)^n i^n}\right]
\end{aligned}$$

Mostrando la existencia del desarrollo de Laurent de $f(z) = 1/\sin(1/z)$. $\square$