Universidad del Valle de Guatemala

MM2034 - 2 semestre - 2022

Licenciatura en matemática aplicada

LÓGICA

Catedrático: Paulo Mejía

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay
Carné: 19857
Correo: rom19857@uvg.edu.gt

2 de agosto de 2022

Índice

+

1. Álgebra booleana

Clase: 05/07/2022

Definición 1. *Sea A un conjunto y $\text{Rel}(A) \subseteq A \times A$ una relación binaria definida en A. La $\text{Rel}(A)$ es de orden parcial:*

1. *Reflexiva:* $(x, x) \in \text{Rel}(A), \forall x \in A$.
2. *Antisimetría:* $(x, y) \in \text{Rel(A)} \wedge (y, x) \in \text{Rel}(A) \implies x = y$.
3. *Transitiva:* $(x, y) \in \text{Rel}(A) \wedge (y, z) \in \text{Rel}(A) \implies (x, z) \in \text{Rel}(A), \forall x, y, z \in A$.

Ejemplo 1. *En $\mathbb{Z}^+$, se define $(a, b) \in \text{Z}^+ \iff a|b$.*

Solución. Propiedades:

- Reflexiva: Sea $a \in \mathbb{Z}^+$. Como $a = 1 \cdot a \implies a|a \implies (a, a) \in \text{Rel}(\mathbb{Z}^+)$
- Antisimetría: Sea $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Si $(a, b) \in \text{Rel}(A)$ y $(b, a) \in \text{Rel}(A) \implies a|b$ y $b|a \implies \exists c$ y $b = ca$ y $\exists d \in \mathbb{Z}^+ \ni a = db \implies b = (cd)b \implies cd = 1 \implies c = 1 \wedge d = 1 \implies b = ca = 1 \cdot a = a$.
- Transitividad: Sea $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$. Si $(a, b) \in \text{Rel}(A)$ y $(b, c) \in \text{Rel}(A) \implies a|b \wedge b|c \implies \exists e \in \mathbb{Z}^+ \ni b = ea$ y $\exists f \in \mathbb{Z}^+$ y $c = fb. \implies c = fb = f(ea) = (fe)a \implies a|c$.

□

NOTA. $(A, \leq)$. *Conjunto ordenado y relación de orden.*

$$a \leq b \iff (a, b) \in \text{Rel}(A)$$

Ejemplo 2. *Sea $(P(A), \subseteq)$.*

- $A = \{1,2\}$ *y* $B = \{1,2,3\}$

- $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ *y* $P(B) = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$. *Nótese que en el potencia de B,* $\{1\} \not\subseteq \{2,3\}$.

NOTA. *a y b de A se dicen comparables si* $a \leq b$ *o* $b \leq a$ *(es lo mismo que* $(a,b) \in \mathrm{Rel}(A) \vee (b,a) \in \mathrm{Rel}(A)$*).*

Clase: 07/07/2022

Teorema 1. *Si* $(A, \leq)$ *y* $(B, \leq')$ *son conjuntos parcialmente ordenados,* $(A \times B, \leq''$ $)$ *es también una relación de orden parcial.*

$$(a,b) \leq'' (c,d) \iff \underbrace{a \leq c}_{\in A} \wedge \underbrace{b \leq' d}_{\in B}$$

Demostración.

- Reflexividad. Como $\leq$ y $\leq'$ son reflexivas $\implies a \leq a \wedge b \leq b', \forall a \in A, \forall b \in B \implies (a,b) \leq'' (a,b)$.

- Antisimetría. Sea $(a,b) \leq'' (c,d) \wedge (c,d) \leq'' (a,b) \implies (a \leq \wedge b \leq' d) \wedge (c \leq a \wedge d \leq' b)$ por definición $\leq'' \implies (a \leq c \wedge c \leq a) \wedge (b \leq' d \wedge d \leq' b) \implies a = c \wedge b = d$ por ser $\leq$ y $\leq'$ antisimétricas.

- Transitividad. Sea $(a,b) \leq'' (c,d) \wedge (c,d) \leq'' (e,f) \implies (a \leq c \wedge b \leq' d) \wedge (c \leq e \wedge d \leq' f)$ por definción $\leq'' \implies (a \leq c \wedge c \leq e) \leq (b \leq' d \wedge d \leq' f) \implies (a \leq e) \wedge (b \leq' f)$ por transitividad de $\leq$ y $\leq'$. $\implies (a,b) \leq'' (e,f)$.

$\blacksquare$

Investigar orden lexicográfico.

Ejemplo 3. *Un ejemplo random de diagrama de Hasse.*

Definición 2. *Sea* $(A, \leq)$*. Un elemento* $c \in A$ *es una cota superior de* $a \wedge b$ *si* $a \leq c \wedge b \leq c$.

Definición 3. *Sea* $(A, \leq)$*. Un elemento* $c \in A$ *es una cota inferior de a y b si* $c \leq a \wedge c \leq b$.

Definición 4. *Un retículo es un conjunto parcialmente ordenado en el que cada elemento tiene un ínfimo que es la mayor cota inferior y un supremo que es la menor cota superior.*

NOTA. *Notación para ínfimo y supremo.*

- $a \vee b = \sup(a, b)$
- $a \wedge b = \text{ínf}(a, b)$
- *Sistema algebraico* $(A, \vee, \wedge)$.

Teorema 2. *Para cualquier a y b en un retículo $(A, \leq)$,*

- $(a \leq a \vee b)$
- $(a \wedge b \leq a)$

Demostración. Por la simple definición. ∎

Teorema 3. *Para cualesquiera a, b, c y d en un retículo $(A, \leq)$, si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a \vee c \leq b \vee d$ y $a \wedge c \leq b \wedge d$.*

Demostración. Sea $a, b, c, d \in A$. Supóngase que: $a \leq b$ y $c \leq d$. Además, se sabe que $b \leq b \vee d$ y $d \leq b \vee d$ por la definición de supremo de b y d.

$c \leq a \vee c$ y $d \leq b \vee d$.

$\implies a \leq b \leq b \vee d$ y $c \leq d \leq b \vee d$.

∎

Clase: 12/07/2022

Teorema 4. *Para cualesquiera a, b, c y d es un retículo $(A, \leq)$, si $a \leq b$ y $c \leq d$ $\implies (a \vee c \leq b \vee d)$ y $a \wedge c \leq b$ y d.*

Demostración. Sean $a, b, c, d \in A$. Supóngase que $a \leq b$ y $c \leq d$. Además, $b \leq b \vee d$ y $d \leq b \vee d$ por definición de supremo de b y d. Luego, $a \leq b \vee d$ y $c \leq b \vee d$ por transitividad de $\leq$. Pero $a \vee c \leq b \vee d$ por ser la menor cota superior de a y c. ■

NOTA. $a < b := a \leq b$ *y* $a \neq b$.

Teorema 5. *La operaciones de* $\vee$ *y* $\wedge$ *son conmutativas.*

Demostración. Por definición de cota superior y unicidad v. ■

Teorema 6. *Las operaciones* $\vee$ *y* $\wedge$ *son asociativas.*

Demostración. A demostrar: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, \forall a, b, c \in A$.

1. ¿$(a \vee b) \vee c \leq a \vee (b \vee c)$? Sean $a, b, c, d \in A$. Entonces por la definición de cota superior de a y $b \vee c$: $a \leq a \vee (b \vee c)$ y $(b \vee c) \leq a \vee (b \vee c)$. Luego $a \leq a \vee (b \vee c)$ y $(b \leq a \vee (b \vee c)$ y $(c \leq a \vee (b \vee c)))$ por ser $b \vee c$ una cota superior y $\leq$ cumple con la transitividad. Entonces, $(a \leq a \vee (b \vee c)$ y $(b \leq a(b \vee c)))$ y $c \leq a \vee (b \vee c)$ por ser asociativa. Luego, $a \vee b \leq a \vee (b \vee c)$ y $c \leq a \vee (b \vee c)$ por ser cota superior de a y b. Entonces, $(a \vee b) \vee c \leq a \vee (b \vee c)$ por menor cota superior de $a \vee b$ y c.

2. ¿$a \vee (b \vee c) \leq (a \vee b) \vee c$? Lo mismo que el anterior.

Por antisimetría de los dos resultados, $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$. ■

Teorema 7. $\forall a \in A, a \vee a = a$ *y* $a \wedge a = a$.

Demostración. Sean $a \in A$, por definición de supremo, $a \leq a \vee a$. Además, $a \leq a$ por ser reflexiva. Entonces, $a \leq a \vee a$ por ser el supremo de a y a. Por ser $\leq$ antisimetrica, $a \vee a = a$. ■

Teorema 8. $\forall a, b \in A, a \vee (a \wedge b) = a$ *y* $a \wedge (a \vee b) = a$.

Definición 5 (14)**.** *Un retículo distributivo si la operación $\wedge$ se distribuye respecto de la operación $\vee$ y la operación $\vee$ se distribuye respecto de $\wedge$.*

$$\forall a, b, c \in A, (a \wedge (b \vee c)) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Teorema 9. *Si la operación $\wedge$ es distributiva respecto a la operación $\vee$ en un retículo, entonces la operación $\vee$ es distributiva respecto a la operación $\wedge$ y viceversa.*

Demostración. Si $a \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \vee (a \wedge c) \implies a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Sean $a, b, c, d \in A$,

Por hipótesis:

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = [(a \vee b) \wedge b] \vee [(a \vee b) \wedge c]$$

Por conmutatividad de $\wedge$:

$$= a \wedge (a \wedge b)] \vee [c \wedge (a \vee b)]$$

Por teorema de absorción

$$= a \vee [c \wedge (a \vee b)]$$

Por hipóteses:

$$= a \vee [(c \wedge a) \vee (c \wedge b)]$$

Por conmutatividad de $\wedge$

$$= a \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)]$$

Por ser $\vee$ asociativo:

$$= [a \vee (a \vee c)] \vee (b \wedge c)$$

Por teorema 8 de absorción:

$$= a \vee [b \wedge c]$$

$\blacksquare$

Clase: 19/07/2022

Teorema 10. *Sea $(A, \leq)$ retículo con cota superior universal 1 y cota inferior universal 0.* $\forall a \in A$,

$$a \vee 1 = 1$$

$$a \vee 0 = a$$

$$a \wedge 1 = a$$

$$a \wedge 0 = 0$$

Definición 6 (17)**.** *Sea $(A, \leq)$ retículo con 0 y 1. $\forall a \in A$, un elemento b es complemento de a si cumple:*

$$a \vee b = 1 \quad y \quad a \wedge b = 0$$

Definición 7 (18)**.** *Un retículo se dice que es complementado si cada elemento en él tiene complemento.*

Teorema 11. *En un retículo distributivo, si un elemento tiene complemento.*

Demostración. Sea $a, b, c \in A$, donde b y c son complementos de a. Es decir $a \vee b = 1$ y $a \wedge b = 0$; $a \vee c = 1$ y $a \wedge c = 0$.

$$
\begin{aligned}
b &= b \wedge 1 && \text{(por teorema 10)} \\
&= b \wedge (a \vee c) && \text{(por ser } c \text{ complemento de } a\text{)} \\
&= (b \wedge a) \vee (b \wedge c) && \text{(por distributividad de } \wedge \text{ respecto a } \vee\text{)} \\
&= (a \wedge b) \vee (c \wedge b) && \text{(por conmutatividad de } \wedge\text{)} \\
&= 0 \vee (c \wedge b) && \text{(por ser } b \text{ complemento de } a\text{)} \\
&= (a \wedge c) \vee (c \wedge b) && \text{(por ser } c \text{ complemento de } a\text{)} \\
&= (c \wedge a) \vee (c \wedge b) && \text{(por conmutatividad de } \wedge\text{)} \\
&= c \wedge (a \vee b) && \text{(por distributividad de } \wedge \text{ resoecti de } \vee\text{)} \\
&= c \wedge 1 && \text{(por ser } b \text{ complemento de } a\text{)} \\
&= c && \text{(por teorema 10)}
\end{aligned}
$$

■

Definición 8 (19)**.** *Un retículo complementado y distribuido es un retículo booleano.*

NOTA. $(A, \vee, \wedge, -)$ *es llamada* ***álgebra booleana****.*

Ejemplo 4. $(P(S), \subseteq)$ *es un álgebra booleana.*

Teorema 12. *(Leyes de De Morgan).* $\forall a, b \in A$*, donde* $(A, \vee, \wedge, -)$ *es un álgebra booleana, se tiene:*

1. $\overline{a \vee b} = \bar{a} \vee \bar{b}$

2. $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$

Lema 13. *En un retículo distribuido, si* $b \wedge \bar{c} = 0 \implies b \leq c$*.*

Lema 14. *Sea* $(A, \vee, \wedge, -)$ *una álgebra booleana finita. Sea* $b \in A$ *con* $b \neq 0$ *y* $a_1, a_2, \cdots, a_k$ *átomos de* A *tales que* $a_i \leq b$ *para* $i = 1, \cdots, k \implies b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$*.*

Lema 15. *Sea* $(A, \vee, \wedge, -)$ *una álgebra booleana finita. Sea* $b \in A$ *con* $b \neq 0$ *y* $a_1, a_2, \cdots, a_k$ *átomos de* $\wedge$ *tales que* $a_i \leq b$ *para* $i = 1, \cdots, k \implies b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$ *es la única forma de representar* b *como disyunción de átomos.*

Teorema 16. *Sea* $(A, \vee, \wedge, -)$ *un álgebra booleana finita y* S *es el conjunto de átomos. Entonces,* $(A, \vee, \wedge, -)$ *es isomorfa al sistema algebraico definido por el retículo* $(P(S) \subseteq)$, $(P(S), \cup, \cap, -)$

Hasta aquí el corto. GG ez.

Clase: 19/07/2022

1.1. Enfoque axiomático de álgebra booleana

Definición 9. *Sea* B *no vacío que contiene* Z *elementos especiales 0 (el cero como elemento neutro) y 1 (el uno o elemento unidad), sobre el cual se define, las operaciones binarias* $+, \cdot$ *y una operación unaria* $-$*. Entonces,* $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ *es un álgebra booleana.*

- *Leyes conmutativas:*
  - $\forall x, y \in, x + y = y + v$
  - $\forall x, y \in B, x \cdot y = y \cdot x$
- *Leyes distributivas*
  - $\forall x, y \in B, x(y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
  - $\forall x, y \in B, x + (y \cdot z) = (x + y)(x + z)$
- *Leyes de identidad.*
  - $\forall x \in B, x + 0 = x$
  - $\forall x \in B, x \cdot 1 = 0$
- *Leyes de inversos.*

Teorema 17. *Teorema 17.*

Demostración. Sea $x \in B$,

$$
\begin{aligned}
x &= x + 0 && \text{ley de identidad}\\
x &= x + (x \cdot \overline{x}) && \text{ley de inversos}\\
x &= (x + x)(x + \overline{x}) && \text{ley distributiva respecto a } \cdot\\
x &= (x + x) \cdot 1 && \text{ley de inversos}\\
x &= (x + x) && \text{ley de identidad}
\end{aligned}
$$

■

Teorema 18 (Principio de dualidad)**.** *Si s es un teorema relativo a un álgebra booleana y s puede demostrarse a partir de los axiomas de la definición del álgebra booleana y de otras propiedades obtenidas a partir de estos mismos axiomas, entonces también es teorema.*

Teorema 19. *Dado B un álgebra booleana, si $x, y \in B$, entonces:*

1. ***Ley de dominancia.***
   a) $x \cdot 0 = 0$
   b) $x + 1 = 1$
2. ***Ley de absorción.***
   a) $x \cdot (x + y) = x$
   b) $x + (x \cdot y) = x$
3. ***Ley de cancelación.***
   a) $(x \cdot y = x \cdot z)$ *y* $(\overline{x} \cdot y) = \overline{x} \cdot z$ *entonces* $y = z$.
4. ***Ley de asociatividad.***
5. ***Unicidad de inversos.***

Definición 10 (24)**.** *asd*

Teorema 20. *La relación $\leq$ es una relación de orden parcial.*

Demostración.

- Sea $x \in B$ como $x \cdot x = x$ por teorema 17, entonces $x \leq x$ por definición 24.
- Sea $x, y \in B$ supóngase $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces: $x \cdot y = x$ y $y \cdot x = y$ por def. 24. Luego, $x = x \cdot y = y \cdot x = y$ por ley de conmutatividad.
- Sea $x, y, z \in B$. Supóngase $x \leq y$ y $y \leq z$. Entonces, $x \cdot y = \underline{x}$ y $y \cdot z = y$. Luego, $x \cdot z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y = x$ por asociatividad del $\cdot$ y igualdades anteriores con lo cual $x \leq z$ por definición 24.

■

Clase: 2/08/2022

2. Grafos