**Universidad del Valle de Guatemala**
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

**Estudiante:** Rudik Roberto Rompich
**Correo:** rom19857@uvg.edu.gt
**Carné:** 19857

MM2035 - Álgebra Moderna - Catedrático: Ricardo Barrientos
21 de agosto de 2022

---

# Tarea 12

Problemas 3, 6, 7, 8, 10 y 12, sección 3.2.

## Sección 3.2

$R$ is a ring in all the problems.

**Problema 1** (Problema 3). *Find the form of the binomial theorem in a general ring; in other words, find an expression for $(a+b)^n$, where $n$ is a positive integer.*

***Solución.*** Tenemos 2 casos:

1. Si el anillo es conmutativo, se tiene la definición usual del teorema binomial:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

2. Si el anillo no es conmutativo, tenemos que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} (x_1 \cdots x_n),$$

en donde la sumas van sobre todos los elementos de longitud $n$ con $x_i = a$ o $x_i = b$.

□

**Problema 2** (Problema 6). *If $D$ is an integral domain and $D$ is of finite characteristic, prove that the characteristic of $D$ is a prime number.*

***Demostración.*** Debemos probar que el característico de $D$ es un número primo. Por hipotesis, $D$ es un dominio entero y $D$ es de característica finita $\implies$ por definición, $p$ es el entero más pequeño tal que $pa = 0 \quad \forall a \in D$. Por reducción al absurdo, supóngase que $p$ no es un número primo, es decir es un número compuesto $\implies \exists z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^+ \ni p = z_1 z_2$.

Nótese entonces que $(z_1z_2)a = 0 \quad \forall a \in D \implies$ pero esto también nos permite asegurar $(z_1z_2)a^2 = (z_1a)(z_2a) = 0 \implies (z_1a) = 0$ o $(z_2a) = 0.(\rightarrow\leftarrow)$ Pero es una contradicción ya que $p$ es el entero más pequeño y no puede ser 0. Por lo tanto, el característico $p$ de $D$ es un número primo. ■

**Problema 3** (Problema 7). *Give an example of an integral domain which has an infinite number of elements, yet is of finite characteristic.*

***Solución.*** Basándonos en los ejemplos usuales del libro, $J_p$ (el anillo de enteros $\mod p$) un ejemplo claro sería $J_p[X]$ el anillo de polinomios sobre el anillo $J_p$. □

**Problema 4** (Problema 8). *If $D$ is an integral domain and if $na = 0$ for some $a \neq 0$ in $D$ and some integer $n \neq 0$, prove that $D$ is of finite characteristic.*

***Demostración.*** Debemos probar que $D$ es de característica finita. Sea entonces $x \in D \ni$

$$(na)x = a(nx) = 0, \quad a \neq 0.$$

$\implies (nx) = 0 \quad \forall x \in D$, cumpliendo la definición de característico finito para $D$. ■

**Problema 5** (Problema 10). *Show that the commutative ring $D$ is an integral domain if and only if for $a, b, c \in D$ with $a \neq 0$ the relation $ab = ac$ implies that $b = c$.*

***Demostración.*** Tenemos dos implicaciones:

- $(\implies)$ Por hipótesis, $D$ es un dominio entero, tenemos que $a \neq 0$, tal que:

$$\begin{aligned} ab &= ac \\ (ab - ac) &= 0 \\ a(b - c) &= 0 \\ b - c &= 0 \\ b &= c \end{aligned}$$

- $(\impliedby)$ Por hipótesis, $a, b, c \in D$ con $b = c$. Por reducción al absurdo, supóngase $D$ no es de dominio entero, es decir $\exists a, b \in D - \{0\} \ni ab = 0$. Pero

$$0 = ab = a \cdot 0 \implies a(b - 0) \implies b - 0 = 0 \implies b = 0(\rightarrow\leftarrow).$$

  Por lo tanto, $D$ es un dominio entero.

■

**Problema 6** (Problema 12). *Prove that any field is an integral domain.*

***Demostración.*** Sea $D$ un campo $\implies$ es un anillo conmutativo divisible $\implies$ cada elemento no cero de $D$ es invertible. Por reducción al absurdo, supóngase que $D$ no es de dominio entero, entonces $m, a \in D - \{0\} \ni ma = 0 \implies m, a \neq 0, m$ es invertible, es decir que $m^{-1}$ existe, tal que:

$$\begin{aligned} m^{-1}(ma) &= m^{-1}0 \\ (m^{-1}m)a &= 0 \\ (e)a &= 0 \\ a &= 0(\rightarrow\leftarrow) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $m, a = 0$ y $D$ es de dominio entero. ■