Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2035 - Álgebra Moderna - Catedrático: Ricardo Barrientos
26 de agosto de 2022

Tarea 15

Problema 4, sección 3.6.

Sección 3.6

Problema 1 (Problema 4)**.** *Prove that if K is any field which contains D then K contains a subfield isomorphic to F. (In this sense F is the smallest field containing D.)*

Demostración. Debemos probar que K contiene un subcampo isomorfo a F. Proponemos una función $\phi : F \to K$ de la forma

$$\phi([x, y]) = xy^{-1}$$

Entonces, comprobaremos las siguientes propiedades:

- Función bien definida.
  - Sea $[x, y] \in F$, en donde $x, y \in D$ y $y \neq 0 \implies x, y \in K \implies x, y^{-1} \in K \implies xy^{-1} \in K$.
  - Supóngase que $[x, y] = [x_0, y_0]$, en donde $y, y_0 \neq 0$. Ahora bien, tenemos:

$$\begin{aligned} xy_0 &= x_0 y \\ xy_0(y^{-1}y_0^{-1}) &= x_0 y(y^{-1}y_0^{-1}) \\ xy^{-1} &= x_0 y_0^{-1} \\ \phi[x, y] &= \phi[x_0, y_0] \end{aligned}$$

  Por lo tanto, hemos probado las dos propiedades para ser una función bien definida.

- Ahora bien, intentaremos probar que ϕ es isomorfismo, primero demostrando que es homomorfismo y luego que es inyectivo.

- Sea ϕ un homomorfismo, tal que:
  1. Para la suma. Sea

$$\begin{aligned}\phi([x_1, y_1] + [x_2, y_2]) &= \phi([x_1y_2 + x_2y_1, y_1y_2]) \\ &= (x_1y_2 + x_2y_1)(y_1y_2)^{-1} \\ &= (x_1y_2 + x_2y_1)(y_1^{-1}y_2^{-1}) \\ &= x_1y_1^{-1} + x_2y_2^{-1} \\ &= \phi([x_1, y_1]) + \phi([x_2, y_2])\end{aligned}$$

  2. Para la multiplicación. Sea

$$\begin{aligned}\phi([x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2]) &= \phi([x_1x_2, y_1y_2]) \\ &= x_1x_2(y_1y_2)^{-1} \\ &= x_1(y_1)^{-1}x_2(y_2)^{-1} \\ &= \phi([x_1, y_1]) \cdot \phi([x_2, y_2])\end{aligned}$$

  Por lo tanto, ϕ es un homomorfismo para la suma y la multiplicación.

- Ahora bien, demostraremos que también se cumple la inyectividad. Sea

$$\begin{aligned}\phi([x_1, y_1]) &= \phi([x_2, y_2]) \\ x_1y_1^{-1} &= x_2y_2^{-1} \\ x_1y_1^{-1}(y_1y_2) &= x_2y_2^{-1}(y_1y_2) \\ x_1y_2 &= x_2y_2 \\ [x_1, y_1] &= [x_2, y_2]\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple una de las definición de isomorfismo para $\phi([x, y])$ y F. Ahora, nos hace falta verificar que $\phi(F)$ es un subcampo de K, pero esto se cumple por la definición de homomorfismo inyectivo el cual se sumerge entre dos anillos. ■