Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2035 - Álgebra Moderna - Catedrático: Ricardo Barrientos
3 de noviembre de 2022

Tarea 12

1. Contexto histórico

1.1. Primera fase

- En 1744, Euler demostró que e es irracional.
- En 1761, Lambert demostró que π es irracionall.
- Louville es el precursor de la demostración de que e es trascendental, él fue quien introdujo el concepto de números trascendentes en 1844.
    - Para cualquier irracional $\alpha \exists$ una sucesión infinita de racionales $p/q (q > 0) \ni$
    $$|\alpha - p/q| < 1/q^2$$
    - Propuso una generalización para la propiedad anterior:

      NOTA (Teorema)**.** *Para cualquier número algebraico α con grado $n > 1$, existe $c = c(\alpha) > 0$ tal que $|\alpha - p/q| > c/q^n$ para todos los raciones $p/q (q > 0)$.*
    - Si no es algebraico, es trascendente.
- En 1874, Cantor introdujo el concepto de contable y esto implicó que **casi** todos los números son trascendentes.

1.2. Segunda fase

- En 1873, Hermite establece la trascendencia de e.
- Años despupes, Lindemann hace una generalización de Hermite y demuestra la trascendencia de π y resuelve el problema histórico de la cuadratura del círculo.
- En 1885, Weierstrass simplifica la prueba.

- Luego Hilbert presenta una prueba mucho más simplificada, la cual es modificada por Hurwitz y Gordan en 1893.
- Nosotros presentamos la prueba de Alan Baker propuesta en su libro Transcendental Number Theory de 1975. **Esta prueba es similar a la de Hurwitz (la cual es la que está en el Herstein)**.

2. Previos

NOTA. *Sea* $\sum_{j=0}^{r} f^{(j)}(x)$, *considerando que* $f^{(r+1)}(x) = 0$ *y que* $(d/dx)e^x = e^x$, *entonces*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}\left[-e^{-u}\left(\sum_{j=0}^{r} f^{(j)}(u)\right)\right] &= -e^{-u}\left(\sum_{j=1}^{r+1} f^{(j)}(u) - \sum_{j=0}^{r} f^{(j)}(u)\right)\\
&= e^{-u} f(u)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
e^t \int_0^t e^{-u} f(u) du &= e^t \left[-e^{-u}\left(\sum_{j=0}^{r} f^{(j)}(u)\right)\right]_0^t\\
&= e^t\left(\sum_{j=0}^{r} f^{(j)}(0)\right) - e^t\left(e^{-t}\sum_{j=0}^{r} f^{(j)}(u)\right)\\
&= e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t)
\end{aligned}$$

Lema 1. *Para cualquier polinomio de coeficientes complejos, la función* $I : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *definido por*

$$I(t) := \sum_{j=0}^{m} \left(\mathrm{e}^t f^{(j)}(0) - f^{(j)}(t)\right)$$

Cumple con:

$$\forall t \in \mathbb{C} \quad |I(t)| \leq |t|\mathrm{e}^{|t|}\bar{f}(|t|)$$

donde $\bar{f}$ *es el polinomio cuyos coeficientes son los módulos (valor absoluto) de* f*.*

Demostración. El caso de cualquier polinomio resulta del de un monomio $f(x) = x^n$. En este caso, según el desarrollo de **serie de la compleja exponencial**,

$$\begin{aligned}
I(t) &= \sum_{j=0}^{n} \left(e^t \frac{n!(0)^{n-j}}{(n-j)!} - \frac{n!t^{n-j}}{(n-j)!} \right) \\
&= \mathrm{e}^t n! - \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!} t^{n-j} \\
&= n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{n+1+k}}{(n+1+k)!}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
|I(t)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1+k)!} |t|^{n+1+k} \\
&= |t|^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n+1+k} \frac{n!k!}{(n+k)!} \frac{|t|^k}{k!} \\
&\leq \frac{|t|^{n+1}}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \\
&= \frac{|t|^{n+1}}{n+1} \mathrm{e}^{|t|} \\
&\leq \mathrm{e}^{|t|} \int_0^{|t|} \bar{f}(s) ds \\
&\leq |t|\mathrm{e}^{|t|}\bar{f}(|t|).
\end{aligned}$$

■

Lema 2. *Sean* $f \in \mathbb{C}[X], I$ *como previamente lo definimos y sea* $q_0, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}, \alpha_0 = 0$ *y*

$$J := \sum_{k=1}^{n} q_k I(\alpha_k)$$

Si $\sum_{k=0}^{n} q_k \mathrm{e}^{\alpha_k} = 0$ *entonces* $J = -\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} q_k f^{(j)}(\alpha_k)$.

Demostración. Ya que $I(0) = 0$

$$\begin{aligned}
J &= \sum_{k=0}^{n} q_k I(\alpha_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} q_k \sum_{j=0}^{m} \left(\mathrm{e}^{\alpha_k} f^{(j)}(0) - f^{(j)}(\alpha_k)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{m} \left(f^{(j)}(0) \sum_{k=0}^{n} q_k \mathrm{e}^{\alpha_k} - \sum_{k=0}^{n} q_k f^{(j)}(\alpha_k) \right) \\
&= -\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} q_k f^{(j)}(\alpha_k)
\end{aligned}$$

■

Lema 3. *Sea $f(x) = x^{p-1}(Q(x))^p$ con $Q(x) \in \mathbb{Z}[X]$, y sea $j \in \mathbb{N}$. Para toda la raíz α de f, el entero $f^{(j)}(\alpha)$ es:*

- *Igual a $(p-1)!Q(0)^p$ si $(j, \alpha) = (p-1, 0)$;*
- *Divisible por $p!$ de lo contrario.*

Si $l, q \in \mathbb{Z}$ y $Q(x) = R(lx)$ con $R(y) = \prod_{k=1}^{n} (y - l\alpha_k) \in \mathbb{Z}[y]$, el entero $qf^{(j)}(0) + \sum_{k=1}^{n} f^{(j)}(\alpha_k)$ es:

- *Congruente a $q(p-1)!Q(0)^p$ modulo $p!$ si $j = p-1$;*
- *Divisible por $p!$ de lo contrario.*

Demostración. Según la regla de Leibniz para derivadas (generalización de regla del producto),

$$
\begin{aligned}
f^{(j)}(x) &= \sum_{k=0}^{\text{mín}\{p,j\}-1} \binom{j}{k} \frac{(p-1)!}{(p-1-k)!} x^{p-1-k} (Q^p)^{(j-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{\text{mín}\{p,j\}-1} \frac{j!}{(j-k)!k!} \frac{(p-1)!}{(p-1-k)!} x^{p-1-k} (Q^p)^{(j-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{\text{mín}\{p,j\}-1} \frac{(p-1)!}{(p-1-k)!k!} \frac{x^{p-1-k}}{(j-k)!} j!(Q^p)^{(j-k)} \\
&= j! \sum_{k=0}^{\text{mín}\{p,j\}-1} \binom{p-1}{k} x^{p-1-k} \frac{(Q^p)^{(j-k)}}{(j-k)!}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

- Si $j \geq p$, $p!|f^{(j)}(X)$ y $p!| \sum_{k=1}^{n} f^{(j)}(\alpha_k)$, entonces
$$r, \ell \in \mathbb{N}, \frac{(y^r)^{(\ell)}}{\ell!} = \binom{r}{\ell} y^{r-\ell} \in \mathbb{Z}[y]$$
- Si ($\alpha = 0$ y $j < p-1$) o si ($Q(\alpha) = 0$ y $j < p$):
$$f^{(j)}(\alpha) = 0$$
- Si $j = p-1$:
$$f^{(p-1)}(0) = (p-1)!Q(0)^p$$

■

Lema 4. *Si a es un número real, mostrar $(a^m/m!) \to 0$ as $m \to \infty$.*

Demostración. Sea $x_n = a^n/n!$. Es suficiente probar que $|x_{n+1}/x_n| \to 0$. Nótese que

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{|a|}{n+1} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

Por lo tanto, $x_n \to 0$ as $n \to \infty$. ■

3. Demostración

Teorema 5. *e es trascendente.*

Demostración. Sea $f(x)$ cualquier polinomio con $m = \mathrm{gr}(f(x))$ y sea $f^{(j)}(x)$ la $j-$ésima derivada de $f(x)$, si

$$I(t) = e^t \int_0^t e^{-u} f(u) du,$$

donde t es un número complejo arbitrario y la integral es de 0 a t, entonces por la **Nota 1**:

$$I(t) = e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t).$$

Además, si $\bar{f}(x)$ denota el polinomio obtenido de f al reemplzar cada coeficiente por su valor absoluto (módulo) entonces por **Lema 1** entonces

$$|I(t)| \leqslant \int_0^t \left|e^{t-u} f(u)\right| du \leqslant |t|e^{|t|}\vec{f}(|t|).$$

Por reducción al absurdo, supóngase que e no es trascendente, entonces e es algebraico, tal que

$$q_0 + q_1 e + \ldots + q_n e^n = 0$$

para algunos enteros $n > 0, q_0 \neq 0, q_1, \ldots, q_n$. Comparamos estimados para

$$J = q_0 I(0) + q_1 I(1) + \ldots + q_n I(n),$$

donde $I(t)$ es definido como arriba con

$$f(x) = x^{p-1}(x-1)^p \ldots (x-n)^p,$$

donde p denota un primo muy largo. Del **Lema 2**, tenemos:

$$J = -\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} q_k f^{(j)}(k),$$

en donde por **Lema 3**, $m = (n+1)p - 1$. Ahora claramente$f^{(j)}(k) = 0$ if $j < p, k > 0$ y si $j < p-1, k = 0$, y entonces para todo j, k otro que $j = p-1, k = 0$, $f^{(j)}(k)$ es un entero divisible por $p!$.Además, tenemos que

$$f^{(p-1)}(0) = (p-1)!(-1)^{np}(n!)^p,$$

donde, si $p > n$, $f^{(p-1)}(0)$ es un entero divisible por $(p-1)!$ pero no por $p!$.
Ahora bien, tenemos que si además $p > |q_0|$, entonces J es un entero no cero divisible por $(p-1)!$ y entonces $|J| \geqslant (p-1)!$.
Por el **Lema 1**,

$$|I(t)| \leqslant |t|e^{|t|}\vec{f}(|t|).$$

$$|J| = \sum_{k=0}^{m} |q_k||I(\alpha_k)| < \sum_{k=0}^{m} |q_k|e^k$$

Si $M = \sum_{k=0}^{n} |q_k|e^k$ tenemos $|J| \leq Mn\overline{f}(n)$, por lo tanto.

$$|J| \leq M(n\overline{Q}(n))^p = Mc^p$$

Finalmente, nótese que si para un $i \to \infty$

$$\frac{Mc^i}{2^{i-i_0}} \to 0$$

Por **Lema 4**. Por lo tanto, hay contradicción. $\therefore$ e es trascendente. $\blacksquare$