**Universidad del Valle de Guatemala**
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

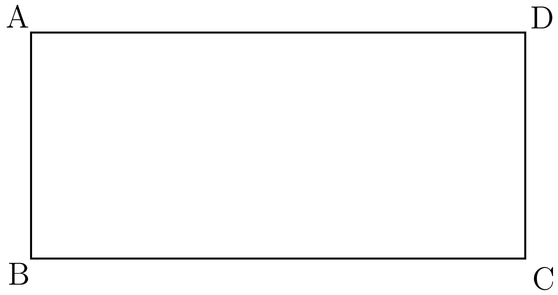
**Estudiante:** Rudik Roberto Rompich
**Correo:** rom19857@uvg.edu.gt
**Carné:** 19857

Análisis de Variable Compleja - Catedrático: Dorval Carías
22 de septiembre de 2022

---

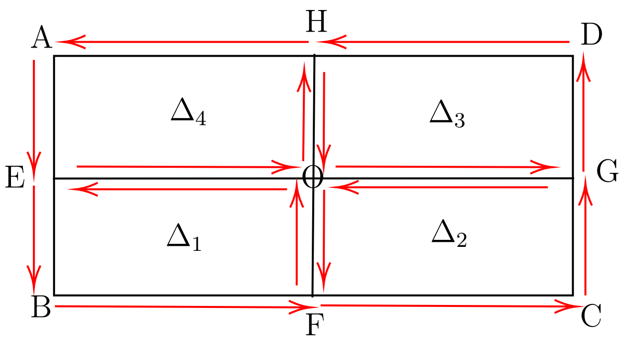
# Parcial 2

**Problema 1.** *Sea $f$ analítica en el interior y sobre el rectángulo $R$ dado:*




*Entonces* $\int_R f = 0$.

***Demostración.*** Sea, $P$ el perímetro de $R$ y $d$ la longitud de su diagonal. Sea entonces



De esto, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_R f = \int_{ABCD} f &= \int_{HAE} f + \int_{EBF} f + \int_{FCG} f + \int_{GDH} f \\
&= \left[\int_{HAE} f + \int_{EO} f + \int_{OH} f\right] + \left[\int_{EBF} f + \int_{FO} f - \int_{EO} f\right] \\
&+ \left[\int_{FCG} f + \int_{GO} f - \int_{FO} f\right] + \left[\int_{GDH} f - \int_{OH} f - \int_{GO} f\right] \\
&= \left[\int_{HAE} f + \int_{EO} f + \int_{OH} f\right] + \left[\int_{EBF} f + \int_{FO} f + \int_{OE} f\right] \\
&+ \left[\int_{FCG} f + \int_{GO} f + \int_{OF} f\right] + \left[\int_{GDH} f + \int_{HO} f + \int_{OG} f\right] \\
&= \oint_{HAEOH} f + \oint_{EBFOE} f + \oint_{FCGOF} f + \oint_{GDHOG} f \\
&= \oint_{\Delta_4} f + \oint_{\Delta_1} f + \oint_{\Delta_2} f + \oint_{\Delta_3} f
\end{aligned}$$

De esto,

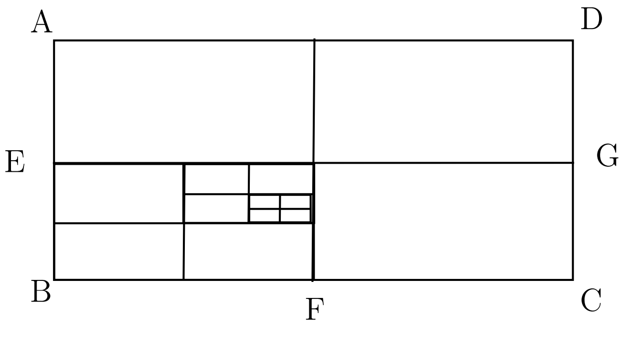
$$\left|\oint_R f(z)dz\right| \leq \left|\oint_{\Delta_1} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\Delta_2} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\Delta_3} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\Delta_4} f(z)dz\right|$$

Ahora bien, definimos:

$$\left|\oint_{R_1} f(x)dx\right| = \max_{i\in\{1,2,3,4\}} \left|\oint_{\Delta_i} f(z)dz\right|$$

$$\frac{1}{4}\left|\oint_R f(z)dz\right| \leq \left|\oint_{R_1} f(z)dz\right|$$

El perímetro y diagonal de $R_1$ son la mitad de $R$.




Repitiendo este proceso para $R_i$, se tiene que:

$$\frac{1}{4}\left|\oint_{R_1} f(x)dx\right| \leq \left|\oint_{R_2} f(z)dz\right|$$

$$\implies \frac{1}{4^2}\left|\oint_R f(x)dx\right| \leq \left|\oint_{R_2} f(z)dz\right|$$

Luego de $n$ etapas en este procesos:

$$\frac{1}{4^n}\left|\oint_R f(x)dx\right| \leq \left|\oint_{R_n} f(z)dz\right|$$

Este proceso de bisección lo podemos resumir en 3 aspectos:

1. $\left|\oint_{R_n} f\right| \geq \frac{1}{4}\left|\oint_{R_{n-1}} f\right| \geq \cdots \geq \frac{1}{4^n}\left|\oint_R f\right|$
2. Perímetros:
   a) Perímetro($R_n$)= $\frac{1}{2^n}$
   b) Perímetro($R$)= $\frac{P}{2^n}$.
3. Diagonales:
   a) Diagonal($R_n$)= $\frac{1}{2^n}$
   b) Diagonal($R$)= $\frac{d}{2^n}$

Nótese que $R \supset R_1 \supset R_2 \supset R \cdots \supset R_n, \cdots$. Es decir, se tiene una sucesión anidada de rectángulos. Esto quiere decir que existe un punto $z_0$ que pertenece a todos los rectángulos.

**Lema 1.** *Sea $f$ analítica en una región $R$ que contiene al punto $z_0$. Entonces,*

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z - z_0),$$

*donde $\eta \to 0$ cuando $z \to z_0$.*

***Demostración.*** Sea $\eta = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)$. Como $f$ es diferenciable en $z_0$, entonces si $z \to z_0 \implies \eta = 0$. Por lo tanto, $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z - z_0)$ ■

Como $f$ es analítica en $z_0$, entonces:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) * (z - z_0) + \eta(z - z_0),$$

donde, se cumple que, $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \ni |\eta| < \varepsilon$, cuando $|z - z_0| < \frac{d}{2^n} < \delta$.
Ahora bien,

$$
\begin{aligned}
\left|\oint_{R_n} f(z)dz\right| &= 4^n \left|\int_{R_n} f\right| \\
&= 4^n \left|\oint_{R_n} f(z_0)dz + f'(z_0)\oint_{R_n}(z-z_0)dz + \oint_{\Delta_n}\eta(z-z_0)dz\right| \\
&= 4^n \left|\oint_{R_n}\eta(z-z_0)\right| dz \\
&\leq 4^n\,|\eta|\,|(z-z_0)|\cdot l(R_n) \\
&< 4^n\left(\varepsilon\frac{d}{2^n}\right)\cdot \text{Perímetro}(R_n) \\
&= 4^n\left(\varepsilon\frac{d}{2^n}\right)\cdot\frac{1}{2^n} \\
&< 4^n\left(\varepsilon\frac{d}{2^n}\right)\cdot\frac{P}{2^n} \\
&= \varepsilon dP
\end{aligned}
$$

Como $\varepsilon$ era arbitrario, entonces $\left|\int_R f\right| = 0$ y por lo tanto, $\int_R f = 0$.

■