Lógica Matemática

13 de octubre de 2022

Ejemplo:
Símbolos:
Una infinidad de letras mayúsculas de la primera parte del alfabeto con y sin subíndices: $A, B, C, A_1, B_1, C_1, ...$ que representan constantes proposicionales.
Una infinidad de letras mayúsculas de la parte media del alfabeto con y sin subíndices: $P, Q, R, P_1, Q_1, R_1, ...$ que representan variables proposicionales.
Una infinidad de letras mayúscula de la parte inicial del alfabeto con y sin subíndices, con supraíndices derechos: $A^1, B^1, C^1, A_1^1, B_1^1, C_1^1, ...$ que representan constantes predicadas.
Una infinidad de letras mayúscula de la parte media del alfabeto con y sin subíndices, con supraíndices derechos: $P^1, Q^1, R^1, P_1^1, Q_1^1, R_1^1, ...$ que representan variables predicadas.
Una infinidad de letras minúsculas de la parte inicial del alfabeto con y sin subíndices: $a, b, c, a_1, b_1, c_1, ...$ que representan constantes individuales.
Una infinidad de letras minúsculas de la parte media del alfabeto con y sin subíndices: $x, y, z, x_1, y_1, z_1, ...$ que representan variables individuales.
Gramática:
1. Si F es un símbolo proposicional, entonces F es una fórmula bien formada.
2. Si F es un símbolo predicado n-ádico y $x_1, x_2, ..., x_n$ son n símbolos individuales (donde n=1,2,3,...), entonces F$(x_1, x_2, ..., x_n)$ es una fórmula bien formada.
3. Si F es una fórmula bien formada, entonces ∼F es una fórmula bien formada.
4 Si F y G son fórmulas bien formadas, entonces F conectivo G es una fórmula bien formada.
5. Si F es una fórmula bien formada y x es una variable individual, entonces cuantificador x F es una fórmula bien formada.
6. Ninguna fórmula del sistema axiomático es una fórmula bien formada si no lo es por las reglas precendentes.
Abreviatura:
$(\exists x)P := \sim ((x) \sim P)$.
Axiomas:
$(x)(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow [P \Longrightarrow (x)Q]$, donde x es una variable individual cualquiera, P es una fórmula bien formada cualquiera que no contiene ocurrencias libre de x, y Q es cualquier fórmula bien formada.

$(x)P \Longrightarrow Q$, donde x es cualquier variable individual, y es cualquier variable o constante individual, P es cualquier fórmula bien formada, Q es el resultado de reemplazar cada ocurrencia libre de x en P por y, y si y es una variable, entonces debe ocurrir libre en Q en todas las posiciones en que x ocurre libre en P.
Reglas de inferencia:
De P y P⇒Q inferir Q.
De P inferir (x)P.
Nota: Se le agregaría a un sistema como HA para obtener un sistema para el cálculo de predicados.

1. Proposiciones generales y cuantificadores

Nota: Se considera el enunciado siguiente:

Todos los humanos son mortales.	premisa 1
Sócrates es humano.	premisa 2
Por lo tanto, Sócrates es mortal.	conclusión

Nota: La premisa 2 es una proposición simple.
$\underbrace{Sócrates}_{sujeto}\ \underbrace{es\,humano}_{predicado}$ (un atributo).
Nota: Los atributos no solo son designados por adjetivos, por adverbios, y aún, por verbos.

Ejemplo:
$\underbrace{Anna}_{sujeto}\ \underbrace{\overbrace{es\,un\,encanto}^{atributo}}_{predicado}$.
$\underbrace{Anna}_{sujeto}\ \underbrace{encanta}_{atributo}$.
$\underbrace{Anna}_{sujeto}$ es $\overbrace{encantadora}^{atributo}$.

Notación:
1) A los individuos los notaremos con letras minúsculas a, b, c, ..., w.
2) Para los atributos se usará letras mayúsculas.

Ejemplo:
Sócrates es Humano: Hs
Ana es encantadora: Ea

Notación:
1) Hx simbolizará el patrón común de todas las proposiciones singulares que afirman

qué individuos tiene el atributo H (predicado o función proposicional).
2) La letra minúscula x, llamada variable individual, es un señalador que indica donde se puede escribirse una constante individual.
Entonces: Ha, Hb, Hc, ..., Hw son proposiciones veraderas o falsas, pero Hx no puede tener valor de verdad, porque no es una proposición. Tales expresiones, como Hx, son llamadas funciones proposicionales.
Indica un atributo de un individuo, siempre que el individuo no es específico.

Definición 1 *El proceso de obtener una proposición de una función proposicional, sustituyendo una constante en una variable se llama Instanciación.*

Nota: Las proposiciones simples negativas como: Sócrates no es humano. Se simbolizará por: $\sim$Hs.

Nota:
Se consideran proposiciones más generales como:

Todo es mortal.
Algo es mortal.

Estas proposiciones difieren de las anteriores por no tener nombre de individuos. Sin embargo, se puede considerar resultantes de las funciones proposiciones por un proceso de generalización o de cuantificación.

Ejemplo:
Todo es mortal.
$\Downarrow$
Dada cualquier cosa, ésta es mortal.
$\Downarrow$
Dado cualquier x, x es mortal.
$\Downarrow$
$\underbrace{Dado\, cualquier}_{cuatificador\, Universal}$ x, Mx.

Notación: Dado cualquier x: (x)
Entonces, Todo es mortal: (x) Mx.

Ejemplo:
Algo es mortal.
$\Downarrow$
Existe por lo menos una cosa que es mortal.
$\Downarrow$
Existe por lo menos una cosa tal que ésta es mortal.

$\Downarrow$

$\underbrace{\textit{Existe por lo menos un}}_{cuantificador\ Existencial}$ x tal que x es mortal.

Notación: (∃x).

Entonces, algo es mortal: (∃x) Mx.

Definición 2 *Una proposición general se obtiene de una función proposicional, poniendo un cuantificador universal o un cuantificador existencial antes de la misma.*
El valor de verdad de una proposición general:
- La cuantificación universal de una función proposicional es verdadera ssi todas sus instancias de sustitución son verdaderas.
- La cuantificación existencial de una función proposicional es verdadera ssi tiene por lo menos una instancia de sustitución verdadera.
Nota: Si la cuantificación universal es verdadera, entonces la cuantificación existencial es verdadera.

Ejemplo:

Se consideran las proposiciones generales:
Algo no es mortal. (∃x) ∼Mx.
Nada es mortal. (x) ∼Mx.
Todo es mortal. (x) Mx.
Algo es mortal. (∃x) Mx.
Nota: La negación de un cuantificador universal (existencial), esta asociada a un cuantificador exitencial (universal).
Sea Φ cualquier simbolo de atributo:

```
(x) Φx      contrarias        (x)∼Φx
|           \          /      |
|           contradictorias   |
|           /          \      |
(∃x) Φx     subcontrarias     (∃x) ∼Φx
```

Definición 3 *Dos proposiciones generales son contrarias si ambas pueden ser falsas a la vez, pero no pueden ser verdaderas.*

Definición 4 *Dos proposiciones generales son subcontrarias si ambas pueden ser veraderas a la vez, pero no pueden ser falsas.*

Definición 5 *Dos proposiciones son contradictorias si una es verdadera, entonces la otra es falsa.*

Ejemplo:

Afirmativa universal	todos los humanos son mortales.	A	(x) (Hx⇒Mx)
Negativa universal	Ningún humano es mortal.	E	(x) (Hx⇒∼Mx)
Afirmativa particular	Algunos humanos son mortales	I	(∃x) (Hx∧Mx)
Negativa particular	Algunos humanos no son mortales	O	(∃x) (Hx∧∼Mx)

Nota:
AffIrmo
nEgO

Ejemplo:
0) Las serpientes son reptiles.
Sea Sx: ser serpiente y Rx: ser reptil.
(x) (Sx⇒Rx)
1) Nada en la casa se escapó de la destrucción.
Sea Cx: estar en al casa y Ex: escapar de la destrucción.
(x) (Cx⇒∼Ex)
2) Ningún abrigo es impermeable, a menos que haya sido especialmente tratado.
Sea Ax: ser abrigo.
Ix: ser impermeable.
Ex: ser especialmente tratado.
(x) ((Ax∧∼Ex)⇒∼Ix)
3) Todas las frutas y las verduras son sanas y nutritivas.
Sea Fx: ser fruta.
Vx: ser verdura.
Sx: ser sana.
Nx: ser nutritiva.
(x) ((Fx∨Vx)⇒(Sx∧Nx))
4) Cualquier caballo que es manso está bien entrenado.
Sea Cx: ser caballo.
Ex: estar bien entrenado.
Mx: ser manso.
(x) ((Cx∧Ex)⇒Mx)
5) No todo actor famoso tiene talento.
Algunos actores famosos no son talentosos.
Sea Ax: ser actor.
Fx: ser famoso.
Tx: ser talentoso.
(∃x) ((Ax∧Fx)⇒∼Tx)
6) Sólo los ejecutivos tienen secretarias.
Sea Ex: ser ejecutivo y Sx: tener secretaria.
(x) (Sx⇒Ex)
7) Nadie sino los valientes merecen a la bella.

Sea Vx: ser valiente y Mx: merecer a la bella.
(x) (Mx⇒Vx)
8) Sólo los policías y los bomberos son independientes y mal pagados.
Sea Px: ser policía, Bx: ser bombero, Ix: ser independiente y Mx: ser mal pagado.
(x) ((Ix∧Mx)⇒(Px∨Bx))
9) Ningún automóvil que tenga más de diez años será reparado si está seriamente dañado.
Sea Ax: ser automóvil, Mx: tener más de diez años, Rx: estar reparado, y Dx: estar seriamente dañado.
(x) ((Ax∧Mx)⇒(Dx⇒(∼Rx)))

1.1. Demostraciones de validez (Reglas preliminares de cuantificación)

Reglas de inferencia:

1.- Modus ponens (MP)
p⇒q
p
∴ q

2.- Modus tollens (MT)
p⇒q
∼q
∴ ∼p

3.- Regla S (RS)
p⇒q
q⇒r
∴ p⇒r

4.- Silogismos Disyuntivos (SD)
p∨q
∼p
∴ q

5.- Dilema Constructivo (DC)
(p⇒q)∧(r⇒s)
p∨r
∴ q∨s

6.- Dilema Destructivo (DD)
(p⇒q)∧(r⇒s)
∼q∨∼s

$\therefore \sim p \vee \sim r$

7.- Simplificación (Simp)

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p} \quad \text{o} \quad \frac{p \wedge q}{\therefore q}$$

8.- Conjunción (Conj)

p

$\underline{q}$

$\therefore p \wedge q$

9.- Adición (AD)

$\underline{p}$

$\therefore p \vee q$

10.- Demostración condicional (Dem. c)

p

$\underline{q}$

$\therefore p \Rightarrow q$

<u>Regla de reemplazo</u>

<u>Nota</u>: Cualquiera de las siguientes expresiones lógicamente equivalente puede reemplazar a cualquier otra donde quiera que ocurra.

1) Teorema de Morgan:

$$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$$
$$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$$

2) Conmutatividades:

$$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$$
$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$$

3) Distributividades:

$$[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$
$$[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

4) Asociatividad:

$$[p \vee (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \vee r]$$
$$[p \wedge (q \wedge r)] \equiv [(p \wedge q) \wedge r]$$

5) Doble negación:

$$p \equiv (\sim\sim p)$$

6) Transposición:

$$[p \Rightarrow q] \equiv [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]$$

7) Implicación material:

$$(p \Rightarrow q) \equiv [(\sim p) \vee q]$$

8) Equivalencia material:

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$
$$(p \Leftrightarrow q) \equiv \{[(\sim p) \vee q] \wedge [(\sim q) \vee p]\}$$

9) Exportación:

$$p \equiv (p \vee p)$$
$$p \equiv (p \wedge p)$$

<u>Reglas preliminares de cuantificación</u>:

1.- Instanciación universal (IU):

<u>(x) Φx</u>
∴ Φv , v es cualquier símbolo individual.

2.- Generalización universal (GU):

<u>Nota</u>: Lo que es verdad para cualquier individuo arbitrariamente elegido debe ser lo para todos los individuos.
<u>Φy</u>, y es cualquier individuo arbitrariamente elegido.
∴ (x) Φx

3.- Generalización existencial (GE)

<u>Φy</u>, donde y es algún símbolo individual.
∴ (∃x) Φx

4.- Instanciación existencial (IE)

<u>(∃x) Φx</u>, donde v es una constante individual que no aparece anteriormente.
∴ Φv

<u>Nota</u>:"Φy", y es un simbolo individual (supuesto de alcance limitado).

<u>Ejemplo</u>: Demuestre la validez del argumento siguiente:
Todos los perros son carnívoros.

Algunos animales son perros.
$\therefore$ Por lo tanto, algunos animales son carnívoros.
Sean Px: ser perro.
Cx: ser carnívoro.
Ax: ser animal.

$$\text{Es decir,}\quad \begin{array}{l} (x)\ (Px \Rightarrow Cx) \\ \underline{(\exists x)\ (Ax \wedge Px)} \\ \therefore (\exists x)\ (Ax \wedge Cx) \end{array}$$

Dem:

1)	$(x)\ (Px \Rightarrow Cx)$	
2)	$(\exists x)\ (Ax \wedge Px)$	$/ \therefore (\exists x)\ (Ax \wedge Cx)$
3)	$At \wedge Pt$	IE 2)
4)	$Pt \Rightarrow Ct$	IU 1)
5)	Pt	Simp 3)
6)	Ct	por MP 4) y 5)
7)	At	Simp 3)
8)	$At \wedge Ct$	Conj 7) y 6)
9)	$(\exists x)\ (Ax \wedge Cx)$	GE 8)
		$\square$

Ejemplo:
Todos los humanos son mortales.
Sócrates es humano.
Luego, Sócrates es mortal.
Sean Hx: ser humano.
Mx: ser mortal.

$$\text{Es decir,}\quad \begin{array}{l} (x)\ (Hx \Rightarrow Mx) \\ \underline{Hs\ } \\ \therefore Ms \end{array}$$

Dem:

1)	$(x)\ (Hx \Rightarrow Mx)$	
2)	Hs	$/ \therefore Ms$
3)	$Hs \Rightarrow Ms$	IU 1)
4)	Hs	por hipótesis
5)	Ms	por MP 3) y 4)
		$\square$

Ejemplo:
Ningún mortal es perfecto.
Todos los humanos son mortales.
Por lo tanto, ningún humano es perfecto.
Sean Mx: ser mortal.
Px: ser perfecto.

Hx: ser humano.
(x) (Mx⇒(∼Px))
(x) (Hx⇒Mx)
∴ (x) (Hx⇒(∼Px))
Dem:

1)	(x) (Mx⇒(∼Px))	
2)	(x) (Hx⇒Mx)	/ ∴ (x) (Hx⇒(∼Px))
3)	Mt⇒(∼Pt)	IU 1)
4)	Ht⇒Mt	IU 2)
5)	Ht⇒(∼Pt)	Reglas S 4) y 3)
6)	(x) (Hx⇒(∼Px))	GU 5)

□

Ejemplo:

Demuestre que (x) (Ax⇒Bx)
∼Bt / ∴ ∼At

Dem:

1)	(x) (Ax⇒Bx)	
2)	∼Bt	/ ∴ ∼At
3)	At⇒Bt	IU 1)
4)	∼Bt	por hipótesis
5)	∼At	MT 3) y 4)

□

Ejemplo: Demuestre que (x) (Fx⇒(∼Gx))
(∃x) (Hx∧Gx) / ∴ (∃x) (Hx∧(∼Fx))

Dem:

1)	(x) (Fx⇒(∼Gx))	
2)	(∃x) (Hx∧Gx)	/ ∴ (∃x) (Hx∧(∼Fx))
3)	Hw∧Gw	IE 2)
4)	Fw⇒(∼Gw)	IU 1)
5)	Gw	Simp 3)
6)	∼∼Gw	RR5
7)	∼Fw	por MT 4) y 6)
8)	Hw	Simp 3)
9)	Hw∧(∼Fw)	Conj 8) y 7)
10)	(∃x) (Hx∧(∼Fx))	GE 9)

□

Ejemplo: Demuestre que (x) (Kx⇒Lx)
(x) ((Kx∧Lx)⇒Mx) / ∴ (x) (Kx⇒Mx)

Dem:

1)	(x) (Kx⇒Lx)	
2)	(x) ((Kx∧Lx)⇒Mx)	/ ∴ (x) (Kx⇒Mx)
3)	Ky⇒Ly	IU 1)
4)	(Ky∧Ly)⇒My	IU 2)
5)	Ky	Dem C
6)	Ly	por MP 3) y 5)
7)	Ky∧Ly	Conj 5) y 6)
8)	My	por MP 4) y 7)
9)	Ky⇒My	Dem C
10)	(x) (Kx⇒Mx)	GU 9)
		□

Ejemplo:
Todas las bailarinas son graciosas.
Zoyla es una estudiante.
Zoyla es bailarina.
Luego, algunas estudiantes son graciosas.
Sean Bx: ser bailarina.
Gx: ser graciosa.
Ex: ser estudiante.

(x) (Bx⇒Gx)
Ez
Bz / ∴ (∃x) (Ex∧Gx)

Dem:

1)	(x) (Bx⇒Gx)	
2)	Ez	
3)	Bz	/ ∴ (∃x) (Ex∧Gx)
4)	Bz⇒Gz	IU 1)
5)	Bz	por hipótesis
6)	Gz	por MP 4) y 5)
7)	Ez	por hipótesis
8)	Ez∧Gz	Conj 7) y 6)
9)	(∃x) (Ex∧Gx)	GE 8)
		□

Ejemplo: Demuestre que
(x) (Cx⇒(∼Dx))
(∃x) (Cx∧Ix) / ∴ (∃x) (Ix∧(∼Dx))

Dem:

1)	(x) $(Cx \Rightarrow (\sim Dx))$	
2)	$(\exists x)$ $(Cx \wedge Ix)$	$/ \therefore (\exists x)$ $(Ix \wedge (\sim Dx))$
3)	$Ct \wedge It$	IE 2)
4)	It	Simp 3)
5)	Ct	Simp 3)
6)	$Ct \Rightarrow (\sim Dt)$	IU 1)
7)	$\sim Dt$	por MP 6) y 5)
8)	$It \wedge (\sim Dt)$	Conj 4) y 7)
9)	$(\exists x)$ $(Ix \wedge (\sim Dx))$	GE 8)
		$\square$

Ejemplo:
Todos los mentirosos son embusteros.
Algunos mentirosos son periodistas.
Luego, Algunos periodistas son embusteros.
Sean Mx: ser mentiroso.
Ex: ser embustero.
Px: ser periodista.
(x) $(Mx \Rightarrow Ex)$
$(\exists x)$ $(Mx \wedge Px)$ $/ \therefore (\exists x)$ $(Px \wedge Ex)$
Dem:

1)	(x) $(Mx \Rightarrow Ex)$	
2)	$(\exists x)$ $(Mx \wedge Px)$	$/ \therefore (\exists x)$ $(Px \wedge Ex)$
3)	$Mt \wedge Pt$	IE 2)
4)	$Mt \Rightarrow Et$	IU 1)
5)	Mt	Simp 3)
6)	Pt	Simp 3)
7)	Et	por MP 4) Y 5)
8)	$Pt \wedge Et$	Conj 6) y 7)
9)	$(\exists x)$ $(Px \wedge Ex)$	GE 8)
		$\square$

Ejemplo:
Todos los mayordomos y los camareros son obsequiosos y dignos.
Luego, todos los mayordomos son dignos.
Sean Mx: ser mayordomo.
Cx: ser camarero.
Ox: ser obsequioso.
Dx: ser digno.
(x) $((Mx \vee Cx) \Rightarrow (Ox \wedge Dx))$ $/ \therefore$ (x) $(Mx \Rightarrow Dx)$
Dem:

1)	$(x)\ ((Mx \vee Cx) \Rightarrow (Ox \wedge Dx))$	$/ \therefore (x)\ (Mx \Rightarrow Dx)$
2)	$(My \vee Cy) \Rightarrow (Oy \wedge Dy)$	IU 1)
3)	My	Dem C
4)	$My \vee Cy$	AD 3)
5)	$Oy \wedge Dy$	por MP 2) y 4)
6)	Dy	Simp 5)
7)	$My \Rightarrow Dy$	Dem C
8)	$(x)\ (Mx \Rightarrow Dx)$	GU 7)
		$\square$

Ejercicio:
Las abejas y las avispas pican si estan enojadas o asustadas.
Luego, cualquier abeja pica si esta enojada.
Sean Ax: ser abeja.
Bx: ser avispa.
Cx: estar asustada.
Ex: estar enojada.
Px: picar.
$(x)\ (((Ax \vee Bx) \wedge (Ex \vee Cx)) \Rightarrow Px) \quad / \therefore (x)\ ((Ax \wedge Ex) \Rightarrow Px)$
Dem:

1)	$(x)\ (((Ax \vee Bx) \wedge (Ex \vee Cx)) \Rightarrow Px)$	$/ \therefore (x)\ ((Ax \wedge Ex) \Rightarrow Px)$
2)	$((Ay \vee By) \wedge (Ey \vee Cy)) \Rightarrow Py$	IU 1)
3)	$Ay \wedge Ey$	Dem C
4)	Ay	Simp 3)
5)	$Ay \vee By$	AD 4)
6)	Ey	Simp 3)
7)	$Ey \vee Cy$	AD 6)
8)	$(Ay \vee By) \wedge (Ey \vee Cy)$	Conj 5) y 6)
9)	Py	por MP 2) y 8)
10)	$(Ay \wedge Ey) \Rightarrow Py$	Dem C
11)	$(x)\ ((Ax \wedge Ex) \Rightarrow Px)$	GU 10)
		$\square$

1.2. Demostración de invalidez

Nota: El supuesto que existe al menos un individuo puede ser interpretado de la siguiente forma:
Existe exactamente un individuo, o existen exactamente 2 individuos, etcétera.
$\vdots$
Existen exactamente k individuos.
Para cada uno de estos casos existe una proposición general equivalente lógicamente a una composición de proposiciones singulares.

Caso de un individuo: $(x)\ \Phi x \equiv \Phi a$
$(\exists x)\ \Phi x \equiv \Phi a$

Caso de 2 individuos: $(x)\ \Phi x \equiv (\Phi a \wedge \Phi b)$
$(\exists x)\ \Phi x \equiv (\Phi a \vee \Phi b)$

$\vdots$

Caso de k individuos: $(x)\ \Phi x \equiv (\Phi a_1 \wedge \Phi a_2 \wedge ... \wedge \Phi a_k)$
$(\exists x)\ \Phi x \equiv (\Phi a_1 \vee \Phi a_2 \vee ... \vee \Phi a_k)$

1.3. Método para la prueba formal de invalidez

Nota: Dado un argumento, se presenta un modelo para el cuál éste sea lógicamente equivalente a un argumento inválido función de verdad, es decir, se encuentran las proposiciones singulares equivalentes a las proposiciones generales y se les asigan valores de verdad para provocar la invalidez del argumento.

Ejemplo: Pruebe la invalidez de los argumentos siguientes:
1)Todas las ballenas son pesadas.
Todas los elefantes son pesados.
Luego, todas las ballenas son elefantes.
Sean Bx: ser ballena, Px: ser pesado y Ex: ser elefante.

$(x)\ (Bx \Rightarrow Px)$
Entonces, $(x)\ (Ex \Rightarrow Px)$
$\therefore (x)\ (Bx \Rightarrow Ex)$

Un modelo de un individuo: Sea a el individuo.
$Ba \Rightarrow Pa$
$Ea \Rightarrow Pa$
$\therefore Ba \Rightarrow Ea$

$Ba \Rightarrow Pa$	, $Ea \Rightarrow Pa$	$\therefore$	$Ba \Rightarrow Ea$
$V \Rightarrow V$	, $F \Rightarrow V$	$\therefore$	$V \Rightarrow F$
V	, V	$\therefore$	F

Si Ba toma el valor V, Pa toma el valor V y Ea toma el valor F, entonces el argumento es inválido.

Ejemplo:
2) Todas las ballenas son pesadas.
Algunos elefantes son pesados.
$\therefore$ Todas las ballenas son elefantes.
Sean Bx: ser ballena, Px: ser pesado y Ex: ser elefante.

$(x)\ (Bx \Rightarrow Px)$
Entonces, $(\exists x)\ (Ex \wedge Px)$
$\therefore (x)\ (Bx \Rightarrow Ex)$

Modelo de un inviduo: Sea a el individuo.

$Ba \Rightarrow Pa$
$Ea \wedge Pa$
$\therefore Ba \Rightarrow Ea$

$Ba \Rightarrow Pa$	, $Ea \wedge Pa$	$\therefore$	$Ba \Rightarrow Ea$
$V \Rightarrow V$	, $F \wedge V$	$\therefore$	$V \Rightarrow F$
V	, F	$\therefore$	F
	$\uparrow$ Es imposible, en este modelo, probar invalidez		

Modelo de 2 individuos: Sean a y b los individuos.
$(Ba \Rightarrow Pa) \wedge (Bb \Rightarrow Pb)$
$(Ea \wedge Pa) \vee (Eb \wedge Pb)$
$\therefore (Ba \Rightarrow Ea) \wedge (Bb \Rightarrow Eb)$

$(Ba \Rightarrow Pa) \wedge (Bb \Rightarrow Pb)$	, $(Ea \wedge Pa) \vee (Eb \wedge Pb)$	$\therefore$	$(Ba \Rightarrow Ea) \wedge (Bb \Rightarrow Eb)$
$(V \Rightarrow V) \wedge (V \Rightarrow V)$	, $(F \wedge V) \vee (V \wedge V)$	$\therefore$	$(V \Rightarrow F) \wedge (V \Rightarrow V)$
V	, V	$\therefore$	F

Ejemplo:
3) Algunos perros son perros de agua.
Algunos perros son perros de punta y vuelta.
Luego, algunos perros de agua son perros de punta y vuelta.
Sean Px: ser perro, Ax: ser perro de agua, y Vx: ser perro de punta y vuelta.

$(\exists x)\ (Px \wedge Ax)$
Entonces, $(\exists x)\ (Px \wedge Vx)$
$\therefore (\exists x)\ (Ax \wedge Vx)$

Modelo de 2 individuos: Sean a y b los individuos.
$(Pa \wedge Aa) \vee (Pb \wedge Ab)$
$(Pa \wedge Va) \vee (Pb \vee Vb)$
$\therefore (Aa \wedge Va) \vee (Ab \wedge Vb)$

$(Pa \wedge Aa) \vee (Pb \wedge Ab)$	, $(Pa \wedge Va) \vee (Pb \wedge Vb)$	$\therefore$	$(Aa \wedge Va) \vee (Ab \wedge Vb)$
$(V \wedge V) \vee (V \wedge F)$	, $(V \wedge F) \vee (V \wedge V)$	$\therefore$	$(V \wedge F) \vee (F \wedge V)$
V	, V	$\therefore$	F

Ejemplo:
$(x)\ (Hx \Rightarrow (\sim Ix))$
$(\exists x)\ (Jx \wedge (\sim Ix))$
$\therefore (x)\ (Hx \Rightarrow Jx)$

Modelo de un individuo: Sea a el individuo.
$Ha \Rightarrow (\sim Ia)$
$Ja \wedge (\sim Ia)$
$\therefore Ha \Rightarrow Ja$

$Ha \Rightarrow (\sim Ia)$	$, Ja \wedge (\sim Ia)$	$\therefore\ Ha \Rightarrow Ja$
$V \Rightarrow V$	$, F \wedge V$	$\therefore\ V \Rightarrow F$
V	$, F$	$\therefore\ F$
	$\uparrow$ Imposible probar invalidez	

Modelo de 2 individuos: Sean a y b los individuos.

$(Ha \Rightarrow (\sim Ia)) \wedge (Hb \Rightarrow (\sim Ib))$	$, (Ja \wedge (\sim Ia)) \vee (Jb \wedge (\sim Ib))$	$\therefore\ (Ha \Rightarrow Ja) \wedge (Hb \Rightarrow Jb)$
$(V \Rightarrow V) \wedge (F \Rightarrow V)$	$, (F \wedge V) \vee (V \wedge V)$	$\therefore\ (V \Rightarrow F) \wedge (F \Rightarrow V)$
V	$, V$	$\therefore\ F$

Ejemplo:

Todos los paganos son idólatras.
Ningún pagano es alegre.
Luego, ningún idólatra es alegre.
Sean Px: ser pagano, Ix: ser idólatra, y Ax: ser alegre.

$(x)\ (Px \Rightarrow Ix)$
Entonces, $(x)\ (Px \Rightarrow (\sim Ax))$
$\therefore\ (x)\ (Ix \Rightarrow (\sim Ax))$

Modelo de un individuo: Sea a el individuo.

$Pa \Rightarrow Ia$
$Pa \Rightarrow (\sim Aa)$
$\therefore\ Ia \Rightarrow (\sim Aa)$

$Pa \Rightarrow Ia$	$, Pa \Rightarrow (\sim Aa)$	$\therefore\ Ia \Rightarrow (\sim Aa)$
$F \Rightarrow V$	$, F \Rightarrow F$	$\therefore\ V \Rightarrow F$
V	$, V$	$\therefore\ F$

Ejemplo:

No hay gatitos grandes.
Algunos mamíferos son grandes.
$\therefore$ Los gatitos no son mamíferos.
Sean Gx: ser gatitio, Ax: ser grande, y Mx: ser mamífero.

$(x)\ (Gx \Rightarrow (\sim Ax))$
Entonces, $(\exists x)\ (Mx \wedge Ax)$
$\therefore\ (x)\ (Gx \Rightarrow (\sim Mx))$

Modelo de un individuo: Sea a el individuo.

$Ga \Rightarrow (\sim Aa)$
$Ma \wedge Aa$
$\therefore\ Ga \Rightarrow (\sim Ma)$

Modelo de un individuo: Sea a el individuo.

$Ga \Rightarrow (\sim Aa)$	$, Ma \wedge Aa$	$\therefore\ Ga \Rightarrow (\sim Ma)$
$V \Rightarrow V$	$, V \wedge F$	$\therefore\ V \Rightarrow F$
V	$, F$	$\therefore\ F$
	$\uparrow$ Imposible probar invalidez	

Modelo de 2 individuos: Sean a y b los individuos.

(Ga⇒(∼Aa))∧(Gb⇒(∼Ab))	, (Ma∧Aa)∨(Mb∧Ab)	∴	(Ga⇒(∼Ma))∧(Gb⇒(∼Mb))
(V⇒V)∧(F⇒F)	, (V∧F)∨(V∧V)	∴	(V⇒F)∧(F⇒F)
V	, V	∴	F

1.4. Verdades lógicas que involucran cuantificadores

Nota: Las tablas de verdad se usaron para establecer la validez de los argumentos y para certificar la verdad lógica de las proposiciones. No cualquier argumento válido puede establecerse por el método de reglas de las tablas de verdad: algunos de ellos se demuestran como válidos usando regla de cuantificación.

Ejemplo: Demostrar que ((x) Fx) ⇒ ((∃x) Fx)

Dem:

1)	(x) F(x)	premisa
2)	Fy	IU 1
3)	(∃x) Fx	GE 2
4)	((x) Fx)⇒ ((∃x) Fx)	Dem. c 1-3

□

Ejemplo: Demostrar que ((x) Fx) ⇒ (∼((∃x) ∼(Fx)))

Dem:

1)	((∃x) ∼(Fx))	premisa
2)	∼(Fy)	IE 1
3)	(x) Fx	premisa
4)	Fy	IU 3
5)	((x) Fx)⇒(Fy)	Dem. c 3-4
6)	∼((x) Fx)	MT 5,2
7)	((∃x) ∼(Fx)) ⇒(∼((x) Fx))	Dem. c 1-6
8)	(∼(∼((x) Fx)))⇒(∼((∃x) ∼(Fx)))	reemplazo Tranposición 7
9)	((x) Fx)⇒(∼((∃x) ∼(Fx)))	reemplazo Doble negación 8

□

Ejemplo: Demostrar que (∼((∃x) ∼(Fx))) ⇒ ((x) Fx)

Dem:

1)	(∼((∃x) ∼(Fx)))	premisa
2)	∼(Fy)	premisa ”y” cualquiera
3)	(∃x) ∼(Fx)	GE 2
4)	(∼(Fy))⇒((∃x) ∼(Fx))	Dem. c 2-3
5)	∼(∼(Fy))	MT 4,1
6)	Fy	Reemplazo Doble negación 5
7)	(x) Fx	GU 6
8)	(∼((∃x) ∼(Fx))) ⇒((x) Fx)	Dem. c 1-7

□

Nota[Negación de cuantificadores]:
1. $[\sim((v)\Phi v)] \equiv [(\exists v)\sim(\Phi v)]$
2. $[(v)\sim(\Phi v)] \equiv [\sim((\exists v)\Phi v)]$
3. $[\sim((v)\sim(\Phi v))] \equiv [(\exists v)\Phi v]$

Ejemplo: Demostrar que $((x)\ (Fx \wedge Gx)) \Rightarrow (((x)\ Fx) \wedge ((x)\ Gx))$
Dem:

1)	$((x)\ (Fx \wedge Gx))$	premisa
2)	$Fy \wedge Gy$	IU 1
3)	Fy	Simp 2
4)	Gy	Simp 2
5)	(x) Fx	GU 3
6)	(x) Gx	GU 4
7)	$((x)\ Fx) \wedge ((x)\ Gx)$	Conj 5 y 6
8)	$((x)\ (Fx \wedge Gx)) \Rightarrow (((x)\ Fx) \wedge ((x)\ Gx))$	Dem. c 1-7

□

Ejemplo: Demostrar que $(((x)\ Fx) \wedge ((x)\ Gx)) \Rightarrow ((x)\ (Fx \wedge Gx))$
Dem:

1)	$((x)\ Fx) \wedge ((x)\ Gx)$	premisa
2)	(x) Fx	Simp 1
3)	(x) Gx	Simp 1
4)	Fy	IU 2
5)	Gy	IU 3
6)	$Fy \wedge Gy$	Conj 4 y 5
7)	$(x)\ (Fx \wedge Gx)$	GU 6
8)	$(((x)\ Fx) \wedge ((x)\ Gx)) \Rightarrow ((x)\ (Fx \wedge Gx))$	Dem. c 1-7

□

Nota: $((x)\ (Fx \wedge Gx)) \equiv (((x)\ Fx) \wedge ((x)\ Gx))$

Ejemplo: Demostrar que $(((x)\ Fx) \vee ((x)\ Gx)) \Rightarrow ((x)\ (Fx \vee Gx))$
Dem:

1)	$(((x)\ Fx)\vee((x)\ Gx))$	premisa
2)	$(x)\ Fx$	premisa caso 1
3)	Fy	IU 2
4)	$Fy\vee Gy$	AD 3
5)	$(x)\ (Fx\vee Gx)$	GU 4
6)	$((x)\ Fx)\Rightarrow((x)\ (Fx\vee Gx))$	Dem. c 2-4
7)	$(x)\ Gx$	premisa caso 2
8)	Gy	IU 7
9)	$Fy\vee Gy$	AD 8
10)	$(x)\ (Fx\vee Gx)$	GU 9
11)	$((x)\ Gx)\Rightarrow((x)\ (Fx\vee Gx))$	Dem. c 7-10
12)	$(((x)\ Fx)\Rightarrow((x)\ (Fx\vee Gx)))\wedge(((x)\ Gx)\Rightarrow((x)\ (Fx\vee Gx)))$	Conj 6 y 11
13)	$((x)\ (Fx\vee Gx))\vee((x)\ (Fx\vee Gx))$	DC 12 y 1
14)	$(x)\ (Fx\vee Gx)$	reemplazo exportacion $\vee$
15)	$(((x)\ Fx)\vee((x)\ Gx))\Rightarrow((x)\ (Fx\vee Gx))$	Dem. c 1-14
		$\square$

Nota: El recíproco de este condicional no es lógicamente verdadero. El cual afirma que si todo elemento es un F o un G, entonces todo elemento es F o todo elemento es G

Ejemplo: Demostrar que $((x)(Fx\Rightarrow q))\Rightarrow(((\exists x)Fx)\Rightarrow q)$

Dem:

1)	$(x)(Fx\Rightarrow q)$	premisa
2)	$Fy\Rightarrow q$	IU 1
3)	$\sim q$	premisa
4)	$\sim Fy$	MT 2,3
5)	$(x)\ (\sim Fx)$	GU 4
6)	$(\sim q)\Rightarrow((x)(\sim Fx))$	Dem. c 3-5
7)	$(\sim((x)(\sim Fx)))\Rightarrow(\sim\sim q)$	reemplazo tranposición 6
8)	$(\sim((x)(\sim Fx)))\Rightarrow q$	reemplazo doble negación 7
9)	$(((\exists x)(\sim\sim Fx)))\Rightarrow q$	reemplazo negación del cuantificador universal 8
10)	$(((\exists x)Fx))\Rightarrow q$	reemplazo doble negación 9
11)	$((x)(Fx\Rightarrow q))\Rightarrow(((\exists x)Fx)\Rightarrow q)$	Dem. c 1-10
		$\square$

Ejemplo: Demostrar que $(((\exists x)Fx)\Rightarrow q)\Rightarrow((x)(Fx\Rightarrow q))$

Dem:

1)	((∃x)Fx)⇒q	premisa
2)	(∼q)⇒(∼((∃x)Fx))	reemplazo transposición 1
3)	(∼q)⇒((x)∼(Fx))	reemplazo negación del cuantificador exisencial 2
4)	∼q	premisa
5)	(x) ∼Fx	MP 3,4
6)	∼Fy	GU 5
7)	(∼q)⇒(∼Fy)	Dem. c 4-6
8)	(∼(∼(Fy)))⇒(∼(∼q))	reemplazo transposición 7
9)	Fy⇒q	reemplazo doble negación 8
10)	(x) (Fx⇒q)	GU 9
11)	(((∃x)Fx)⇒q)⇒((x)(Fx⇒q))	Dem. c 1-10
		□

Nota: (((∃x)Fx)⇒q)≡((x)(Fx⇒q))

Ejemplo: Demostrar que ((x) (Fx⇒Gx))⇒(((x) Fx)⇒((x) Gx))

Dem:

1)	((x) (Fx⇒Gx)))	premisa
2)	Fy⇒Gy	IU 1
3)	(x) Fx	premisa
4)	Fy	IU 3
5)	Gy	MP 2 y 4
6)	(x)Gx	GU 5
7)	((x)Fx)⇒((x)Gx)	Dem. c 3-6
8)	((x) (Fx⇒Gx))⇒(((x)Fx)⇒((x)Gx))	Dem. x 1-7
		□

Nota: El recíproco de este condicional no es lógicamente verdadero. El cual afirma que si todo elemento es un F implica todo elemento es un G, entonces todo elemento que es F implica G de ese elemento

Ejemplo

Expresar la definición de primo con cuantificadores.

Definición 6 *Sea $n \in \mathbb{N}$, $n>1$, se dice que n es primo si sólo tiene 2 divisores positivos. Es decir, si $p|n \Longrightarrow$ (p=1 o p=n).*

Sea n $\in \mathbb{N}$.

Pn : el número natural n es primo

∼Pn: el número natural n no es primo

∼Pn $\equiv n = 0 \vee n = 1 \vee [\exists p \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N}, p > 1 \wedge q > 1 \wedge n = pq]$.

Pn $\equiv n \neq 0 \wedge n \neq 1 \wedge [\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, n = pq \Longrightarrow (p \leq 1 \vee q \leq 1)]$.

Pn $\equiv n \neq 0 \wedge n \neq 1 \wedge [\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, n = pq \Longrightarrow (p = 1 \vee q = 1)]$.

Pn $\equiv n \neq 0 \wedge n \neq 1 \wedge [\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, n = pq \Longrightarrow (p = 1 \vee p = n)]$.

Pn $\equiv n \neq 0 \wedge n \neq 1 \wedge [\forall p \in \mathbb{N}, p|n \Longrightarrow (p = 1 \vee p = n)]$.