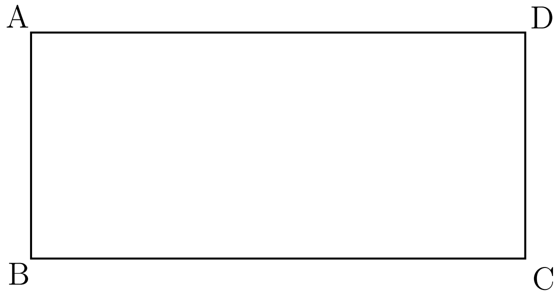
Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

Análisis de Variable Compleja - Catedrático: Dorval Carías
22 de septiembre de 2022

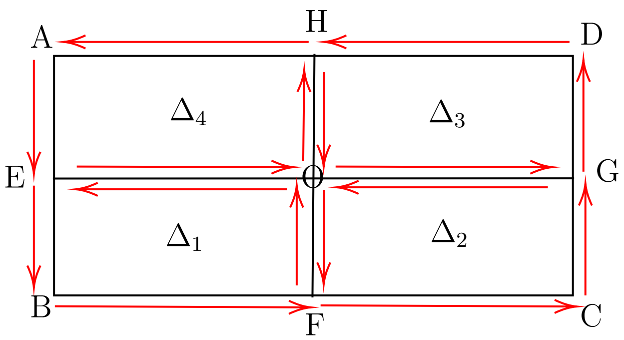
Parcial 2

Problema 1. *Sea f analítica en el interior y sobre el rectángulo R dado:*



Entonces $\int_R f = 0$.

Demostración. Sea, P el perímetro de R y d la longitud de su diagonal. Sea entonces



De esto, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_R f = \int_{ABCD} f &= \int_{HAE} f + \int_{EBF} f + \int_{FCG} f + \int_{GDH} f \\
&= \left[\int_{HAE} f + \int_{EO} f + \int_{OH} f\right] + \left[\int_{EBF} f + \int_{FO} f - \int_{EO} f\right] \\
&+ \left[\int_{FCG} f + \int_{GO} f - \int_{FO} f\right] + \left[\int_{GDH} f - \int_{OH} f - \int_{GO} f\right] \\
&= \left[\int_{HAE} f + \int_{EO} f + \int_{OH} f\right] + \left[\int_{EBF} f + \int_{FO} f + \int_{OE} f\right] \\
&+ \left[\int_{FCG} f + \int_{GO} f + \int_{OF} f\right] + \left[\int_{GDH} f + \int_{HO} f + \int_{OG} f\right] \\
&= \oint_{HAEOH} f + \oint_{EBFOE} f + \oint_{FCGOF} f + \oint_{GDHOG} f \\
&= \oint_{\Delta_4} f + \oint_{\Delta_1} f + \oint_{\Delta_2} f + \oint_{\Delta_3} f
\end{aligned}$$

De esto,

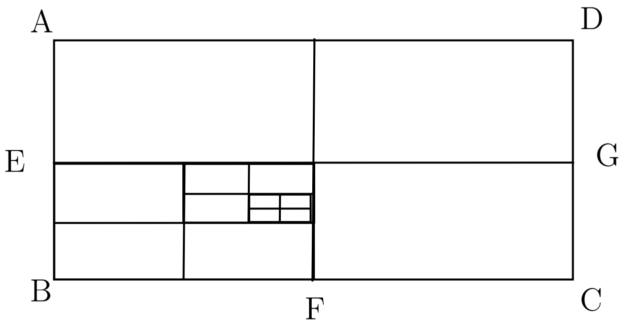
$$\left|\oint_R f(z)dz\right| \leq \left|\oint_{\Delta_1} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\Delta_2} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\Delta_3} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\Delta_4} f(z)dz\right|$$

Ahora bien, definimos:

$$\left|\oint_{R_1} f(x)dx\right| = \max_{i\in\{1,2,3,4\}} \left|\oint_{\Delta_i} f(z)dz\right|$$

$$\frac{1}{4}\left|\oint_R f(z)dz\right| \leq \left|\oint_{R_1} f(z)dz\right|$$

El perímetro y diagonal de R_1 son la mitad de R.



Repitiendo este proceso para R_i, se tiene que:

$$\frac{1}{4}\left|\oint_{R_1} f(x)dx\right| \leq \left|\oint_{R_2} f(z)dz\right|$$

$$\implies \frac{1}{4^2}\left|\oint_R f(x)dx\right| \leq \left|\oint_{R_2} f(z)dz\right|$$

Luego de n etapas en este procesos:

$$\frac{1}{4^n}\left|\oint_R f(x)dx\right| \leq \left|\oint_{R_n} f(z)dz\right|$$

Este proceso de bisección lo podemos resumir en 3 aspectos:

1. $\left|\oint_{R_n} f\right| \geq \frac{1}{4}\left|\oint_{R_n-1} f\right| \geq \cdots \geq \frac{1}{4^n}\left|\oint_R f\right|$
2. Perímetros:
   a) Perímetro(R_n)= $\frac{1}{2^n}$
   b) Perímetro(R)= $\frac{P}{2^n}$.
3. Diagonales:
   a) Diagonal(R_n)= $\frac{1}{2^n}$
   b) Diagonal(R)= $\frac{d}{2^n}$

Nótese que $R \supset R_1 \supset R_2 \supset R \cdots \supset R_n, \cdots$. Es decir, se tiene una sucesión anidada de rectángulos. Esto quiere decir que existe un punto z_0 que pertenece a todos los rectángulos.

Lema 1. *Sea f analítica en una región R que contiene al punto z_0. Entonces,*

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z - z_0),$$

donde $\eta \to 0$ cuando $z \to z_0$.

Demostración. Sea $\eta = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)$. Como f es diferenciable en z_0, entonces si $z \to z_0 \implies \eta = 0$. Por lo tanto, $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z - z_0)$ ■

Como f es analítica en z_0, entonces:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) * (z - z_0) + \eta(z - z_0),$$

donde, se cumple que, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni |\eta| < \varepsilon$, cuando $|z - z_0| < \frac{d}{2^n} < \delta$.
Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\left|\oint_{R_n} f(z)dz\right| &\leq 4^n \left|\int_{R_n} f\right| \\
&= 4^n \left|\oint_{R_n} f(z_0)dz + f'(z_0)\oint_{R_n}(z-z_0)dz + \oint_{\Delta_n} \eta(z-z_0)dz\right| \\
&= 4^n \left|\oint_{R_n} \eta(z-z_0)\right| dz \\
&\leq 4^n \left|\eta\right| \left|(z-z_0)\right| \cdot l(R_n) \\
&< 4^n \left(\varepsilon \frac{d}{2^n}\right) \cdot \text{Perímetro}(R_n) \\
&= 4^n \left(\varepsilon \frac{d}{2^n}\right) \cdot \frac{1}{2^n} \\
&< 4^n \left(\varepsilon \frac{d}{2^n}\right) \cdot \frac{P}{2^n} \\
&= \varepsilon d P
\end{aligned}$$

Como ε era arbitrario, entonces $\left|\int_R f\right| = 0$ y por lo tanto, $\int_R f = 0$.

■