Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2035 - Álgebra Moderna - Catedrático: Ricardo Barrientos
26 de agosto de 2022

Tarea 14

Problemas 1, 3 y 4, sección 3.5.

Sección 3.5

Problema 1 (Problema 1). *Let R be a ring with unit element, R not necessarily commutative, such that the only right-ideals of R are (0) and R. Prove that R is a division ring.*

Demostración. Debemos probar que R es un anillo de división, es decir que para cada elemento $a \in R - \{0\}, aa^{-1} = 1$. Tenemos dos casos:

- Si $R = (0)$, el resultado es trivial
- Si $R \neq (0)$, sea $x \in R - \{0\}$, el cual es un ideal derecho xR y $x = x \cdot 1 \in xR, xR \neq 0$. Entonces tenemos $xR = R \implies \exists y \in R \ni x \cdot y = 1$.

Por lo tanto, R es un anillo de división. ■

Problema 2 (Problema 3). *Let J be the ring of integers, p a prime number, and (p) the ideal of J consisting of all multiples of p. Prove*

- *$J/(p)$ is isomorphic to J_p, the ring of integers* $\text{mód} p$.

  Demostración. Debemos probar que $J/(p)$ es isomorfo a J_p. Proponemos una función $\phi : J/(p) \to J_p$ de la forma

  $$\phi((p) + n) = n \text{ mód } p$$

  Entonces, comprobaremos las siguientes propiedades:

  - Función bien definida.
    - Sea $\phi((p) + n) \in J_p, \forall (p) + n \in J/(p)$.

- Supóngase que $(p) + n = (p) + n_0$ y por la hipótesis tenemos que (p) es el ideal de J que consiste en todos los múltiplos de p, es decir que $n = n_0 + kp, \forall k \in \mathbb{Z}$. Ahora bien, tenemos:

$$\begin{aligned}\phi((p)+n) &= n \text{ mód } p\\ &= n \text{ mód } p\\ &= (n_0 + kp) \text{ mód } p\\ &= n_0 \text{ mód } p\\ &= \phi((p)+n_0)\end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos probado las dos propiedades para ser una función bien definida.

- Ahora bien, intentaremos probar que ϕ es isomorfismo, primero demostrando que es homomorfismo y luego que es inyectivo.
  - Sea ϕ un homomorfismo, tal que:
    1. Para la suma. Sea
$$\begin{aligned}\phi([(p)+n_1]+[(p+n_2)]) &= \phi((p)+[n_1+n_2])\\ &= (n_1+n_2) \text{ mód } p\\ &= n_1 \text{ mód } p + n_2 \text{ mód } p\\ &= \phi((p)+n_1)+\phi((p)+n_2)\end{aligned}$$
    2. Para la multiplicación. Sea
$$\begin{aligned}\phi([(p)+n_1]\cdot[(p+n_2)]) &= \phi((p)+[n_1\cdot n_2])\\ &= (n_1\cdot n_2) \text{ mód } p\\ &= (n_1 \text{ mód } p)\cdot(n_2 \text{ mód } p)\\ &= \phi((p)+n_1)\cdot\phi((p)+n_2)\end{aligned}$$

  Por lo tanto, ϕ es un homomorfismo para la suma y la multiplicación.

- Ahora bien, demostraremos que también se cumple la inyectividad. Se a
$$\begin{aligned}\phi((p)+n_1) &= \phi((p)+n_2)\\ n_1 &\equiv n_2 \quad \text{mód } p\\ n_1 - n_2 &\equiv 0 \quad \text{mód } p\\ n_1 - n_2 &= kp \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

  De esto, tenemos que $n_1 - n_2 \in (p)$, lo que nos permite concluir que:
$$\phi((p)+n_1) = \phi((p)+n_2)$$

Por lo tanto, se cumple una de las definición de isomorfismo para $J/(p)$ y J_p ■

- *Using Theorem 3.5.1 and part (a) of this problem, that J_p is a field.*

Demostración. En clase demostramos que en el anillo de los enteros $(J, +, \cdot)$, (p) es un ideal maximal de J si y solo si p es primo $\implies$ por el teorema 3.5.1, $J/(p)$ es un campo, pero por el inciso (a) de este problema $J/(p) \approx J_p$. Por lo tanto, J_p es un campo. ■