Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2035 - Álgebra Moderna - Catedrático: Ricardo Barrientos
31 de octubre de 2022

Tarea 21

Problemas 2, 4, 5 y 12, sección 5.1.

Problema 1 (Problema 2). *Let F be a field and let $F[x]$ be the ring of polynomials in x over F. Let $g(x)$, of degree n, be in $F[x]$ and let $V = (g(x))$be the ideal generated by $g(x)$ in $F[x]$. Prove that $F[x]/V$ is an n-dimensional vector space over F.*

Demostración. Usando la demostración del **teorema 5G demostrado en clase**: Por el lema $3{,}22, V = ((g(x)))$ es un ideal maximal de F en $F[x] \implies$ por el teorema 3B, $F[x]/((p))$ es un campo. Si $f(x) + [g(x)] \in F[x]/(g(x))$ con $f(x) \in F[x]$, aplicando el algoritmo de la división en $F[x]$ (lema 3.17), a $f(x)$ y $g(x), \exists q(x), r(x) \in F[x], r(x) = 0$ o $r(x) = \sum_{i=0}^{gr(g)-1} \alpha_i x^i$, i.e. $gr(r) < gr(p) \implies f(x) + [g(x)] = (q(x)g(x) + r(x)) + [g(x)] = [g(x)g(x) + [g(x)]] + [r(x) + [g(x)]] = [0 + [g(x)]] + [r(x) + [g(x)]] = [g(x)] + [r(x) + [g(x)]] = r(x) + [g(x)] = \sum_{i=0}^{gr(g)-1} \alpha_i x^i + [g(x)] = \sum_{i=0}^{gr(g)-1} (\alpha_i + [g(x)]) = \sum_{i=0}^{gr(g)-1} \alpha_i (x^i + [g(x)]) = \sum_{i=0}^{gr(g)-1} \alpha_i (x + (g(x)))^i \implies F[x]/(g(x)) = \left\langle \left\{1, \cdots, (x + [g(x)])^{gr(g)-1}\right\} \right\rangle_F$ Sea $\phi : F[x] \to F[x]/(g(x))$. Si $\beta_0, \cdots, \beta_{gr(g)-1} \in F \ni ((g(x))) = \sum_{i=0}^{gr(g)-1} \beta_i (x + [g(x)])^i = \left(\sum_{i=0}^{gr(g)-1} \beta_i x^i\right) + [g(x)]$. Sea $z(x) = \sum_{i=0}^{gr(g)-1} \beta_i x^i \in F[x] \implies [g(x)] = z(x) + [g(x)] \implies z(x) \in [g(x)] \implies p(x) \mid z(x) \implies gr(g) - 1 \geq gr(g) \geq gr(g) \implies g(x) = 0 \implies \beta_0 = \cdots = \beta_{gr(g)-1} \implies \left\{1, \cdots, (x + [g(x)]]^{gr(g)-1}\right\}$ es linealmente independiente es $F[x]/(g(x))$ sobre $F \implies \left\{1, \cdots, (x + [g(x)])^{gr(g)-1}\right\}$ es una base de $F[x]/(g(x))$ sobre F. Por lo tanto, $F[x]/V$ es un espacio vectorial $n-$dimensional sobre F. ■

Problema 2 (Problema 4). *Let*

1. *Let R be the field of real numbers and Q the field of rational numbers. In R, $\sqrt{2}$ and $\sqrt{3}$ are both algebraic over Q. Exhibit a polynomial of degree 4 over Q satisfied by $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.*

Solución. Sea

$$\begin{aligned}
\implies \quad & x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \\
\implies \quad & x - \sqrt{2} = \sqrt{3} \\
\implies \quad & (x - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 \\
\implies \quad & (x - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 \\
\implies \quad & x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 = 3 \\
\implies \quad & x^2 - 1 = 2\sqrt{2}x \\
\implies \quad & (x^2 - 1)^2 = (2\sqrt{2}x)^2 \\
\implies \quad & x^4 - 2x^2 + 1 = 8x^2 \\
\implies \quad & x^4 - 10x^2 + 1 = 0
\end{aligned}$$

□

2. *What is the degree of $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ over Q ? Prove your answer.*

Solución. Nótese que la factorización del polinomio sobre Q es única, entonces:

$$x^4 - 10x^2 + 1 = \left(x - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)\left(x - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)\left(x + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)\left(x + \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right),$$

la cual es grado 4 y por lo tanto el grado de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sobre Q es 4. □

3. *What is the degree of $\sqrt{2}\sqrt{3}$ over Q?*

Solución. Nótese que $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ y además el polinomio mínimo sobre Q que satisface $\sqrt{6}$ es $f(x) = x^2 - 6$. Por lo tanto, el grado $\sqrt{2}\sqrt{3}$ sobre Q es 2. □

Problema 3 (Problema 5)**.** *With the same notation as in Problem 4 , show that $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$ is algebraic over Q of degree 6.*

Demostración. Sea

$$\begin{aligned}
\implies \quad & x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{5} \\
\implies \quad & x - \sqrt{2} = \sqrt[3]{5} \\
\implies \quad & (x - \sqrt{2})^3 = 5 \\
\implies \quad & x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2} = 5 \\
\implies \quad & (x^3 + 6x - 5) = 5\sqrt{2} \\
\implies \quad & (x^3 + 6x - 5)^2 = 50 \\
\implies \quad & x^6 + 12x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 60x - 25 = 0
\end{aligned}$$

Considerando la factorización de este polinomio, sabemos que pertenece a $\mathbb{C}$, el cual es de grado 6 y por lo tanto el grado del algebraico $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$ sobre Q es 6. ■

Problema 4 (Problema 12)**.** *If a is an algebraic integer and m is an ordinary integer, prove*

1. *$a + m$ is an algebraic integer.*

   Demostración. Sea
   $$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \in \mathbb{Z}[x],$$
   el polinomio mónico que satisface a. Ahora bien, sea $k = a + m$ tal que $a = k - m$, entonces:
   $$g(k) = f(k - m) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (k - m)^i,$$
   el cual también es mónico y
   $$g(a + m) = f(a) = 0,$$
   cumpliendo la definición para que $a + m$ sea un entero algebraico. ■

2. *ma is an algebraic integer.*

   Demostración. Sea
   $$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \in \mathbb{Z}[x],$$
   el polinomio mónico que satisface a. Ahora bien, sea $g(x) = m^n f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ entonces:
   $$0 = g(a) = m^n \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a^i = \sum_{i=0}^{n} m^{n-i} \alpha_i (ma)^i,$$
   cumpliendo la definición para que am sea un entero algebraico. ■