Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2035 - Álgebra Moderna - Catedrático: Ricardo Barrientos
25 de septiembre de 2022

Tarea 18

Problemas 2, 3 y 7, sección 3.9.

Problema 1 (Problema 2). *Prove that*

1. $x^2 + x + 1$ *is irreducible over* F*, the field of integers* $\text{mód} 2$.

   Demostración. Si se evalua, 0 y 1 en la expresión, tenemos:

   $$p(0) = 0^2 + 0 + 1 \equiv 1 \text{ mód } 2 \neq 0$$
   $$p(1) = 1^2 + 1 + 1 \equiv 1 \text{ mód } 2 \neq 0$$

   Por lo tanto, $x^2 + x + 1$ es irreducible. ■

2. $x^2 + 1$ *is irreducible over the integers* $\text{mód} 7$.

   Demostración. Por reducción al absurdo, sea $x^2 + 1$ reducible, entonces existe un $k \in J_7$ tal que $k^2 + 1 \equiv 0 (\text{mód} 7)$. Pero, nótese que $7 = 4 * 1 + 3$ y entonces por el **problema 2 del la tarea 17** no existe un k tal que $k^2 + 1 \equiv 0 (\text{mód} 7) (\rightarrow\leftarrow)$. Por lo tanto, $x^2 + 1$ es irreducible. ■

3. $x^3 - 9$ *is irreducible over the integers* $\text{mód} 31$.

   Demostración. Por reducción al absurdo, sea $x^3 - 9$ reducible, entonces existe un $k \in J_{31}$ tal que $k^3 - 9 \equiv 0 (\text{mód} 31)$. Por el pequeño teorema de Fermat, tenemos:

   $$k^{30} \equiv 1 (\text{mód} 31)$$
   $$(k^3)^{10} \equiv 1 (\text{mód} 31)$$
   $$(9)^{10} \equiv 5 (\text{mód} 31) (\rightarrow\leftarrow)$$

   Contradicción. Por lo tanto, $x^3 - 9$ es irreducible. ■

4. $x^3 - 9$ *is reducible over the integers* mód11.

Demostración. Si se evalúa $0, \cdots 10$ en $p(x) = x^3 - 9$, tenemos:

$$\begin{aligned}
p(0) &\equiv 1 \text{ mód } 11\\
p(1) &\equiv 3 \text{ mód } 11\\
p(2) &\equiv 10 \text{ mód } 11\\
p(3) &\equiv 7 \text{ mód } 11\\
p(4) &\equiv 0 \text{ mód } 11\\
p(5) &\equiv 5 \text{ mód } 11\\
p(6) &\equiv 9 \text{ mód } 11\\
p(7) &\equiv 4 \text{ mód } 11\\
p(8) &\equiv 8 \text{ mód } 11\\
p(9) &\equiv 5 \text{ mód } 11\\
p(10) &\equiv 1 \text{ mód } 11
\end{aligned}$$

Nótese que $(x-4)$ es un factor. Por lo tanto, $x^3 - 9$ es reducible en J_{11} ■

Problema 2 (Problema 3)**.** *Let F, K be two fields $F \subset K$ and suppose $f(x), g(x) \in F[x]$ are relatively prime in $F[x]$. Prove that they are relatively prime in $K[x]$.*

Demostración. Por hipótesis, $f(x), g(x)$ son primos relativos, entonces por **lema 3.20**, existen $\lambda(x), \delta(x) \in F[x]$ tal que:

$$1 = \lambda(x)f(x) + \delta(x)g(x) \in K[x],$$

por contención, lo que implica que $f(x), g(x)$ son elementos de $K[x]$ y son primos relativos, probando el problema. ■

Problema 3 (Problema 7)**.** *If $f(x)$ is in $F[x]$, where F is the field of integers* módp, p *a prime, and $f(x)$ is irreducible over F of degree n prove that $F[x]/(f(x))$ is a field with p^n elements.*

Demostración. Por hipótesis, $f(x)$ es irreducible sobre F de grado n, entonces por **lema 3.22** $(f(x))$ es un ideal maximal de $F[x]$. Entonces, por el **teorema 3B**, $F[x]/(f(x))$ es un campo; además, cualquier elemento del cociente debe ser un polinomio de grado $n = gr(f(x))$ es decir, p^n elementos. ■