Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

Análisis de Variable Compleja - Catedrático: Dorval Carías
18 de septiembre de 2022

Tarea 3

Problema 1. *Sea γ la frontera del cuadrado cuyos lados están sobre las líneas $x = \pm 2$ y $y = \pm 2$. Evalúe las integrales siguientes:*

1. $\int_\gamma \frac{e^{-z}dz}{z-(\pi i/2)}$

   Solución. Sea

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{e^{-z}}{z-\left(\frac{\pi}{2}i\right)}dz &= f\left(\frac{\pi}{2}i\right)\cdot 2\pi i \\
&= e^{-\frac{\pi}{2}i}\cdot 2\pi i \\
&= \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot 2\pi i \\
&= [0 + -1]\cdot 2\pi i \\
&= [0 + -1i]\cdot 2\pi i \\
&= -2\pi i^2 \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

□

2. $\int_\gamma \frac{zdz}{2z+1}$

   Solución. Sea

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{z}{2z+1}dz &= \int_\gamma \frac{\frac{1}{2}z}{z-\left(-\frac{1}{2}\right)}dz \\
&= f(-1/2)\cdot 2\pi i \\
&= -\frac{1}{4}\cdot 2\pi i \\
&= -\frac{\pi i}{2}
\end{aligned}$$

□

3. $\int_\gamma \frac{\cos z}{z(z^2+8)} dz$

Solución. Sea

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{\cos z}{z\left(z^2+8\right)} dz &= \int_\gamma \frac{\frac{\cos z}{z^2+8}}{z-0} dz \\ &= f(0)\cdot 2\pi i \\ &= \frac{\cos 0}{0^2+8}\cdot 2\pi i \\ &= \frac{1}{4}\pi i\end{aligned}$$

□

4. $\int_\gamma \frac{\cosh z dz}{z^4}$

Solución. Sea

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{\cosh z}{z^4} dz &= \int_\gamma \frac{\cosh z}{(z-0)^{3+1}} dz \\ &= \frac{2\pi i \cdot f^{(3)}(0)}{3!} \\ &= \frac{2\pi i \cdot \sinh(0)}{3!} \\ &= \frac{2\pi i \cdot 0}{3!} \\ &= 0\end{aligned}$$

□

Problema 2. *Calcule las integrales a continuación:*

1. $\int_\gamma \frac{dz}{z}, \gamma(t) = \cos t + 2i \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq 2\pi$

Solución. Sea

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{z} dz &= \int_\gamma \frac{1}{z-0} dz \\ &= f(0)\cdot 2\pi i \\ &= 2\pi i\end{aligned}$$

□

2. $\int_\gamma \frac{dz}{z^2}, \gamma(t) = \cos t + 2i \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq 2\pi$

Solución. Sea

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{z^2} dz &= \int_\gamma \frac{1}{(z-0)^{1+1}} dz \\ &= \frac{f^{(1)}(0)\cdot 2\pi i}{1!} \\ &= 0\end{aligned}$$

□

3. $\int_\gamma \frac{e^z dz}{z}, \gamma(t) = 2 + e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$

Solución. Sea

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz &= \int_\gamma \frac{e^z}{z-0} dz \\ &= 0\end{aligned}$$

Es 0, porque $z_0 = 0 \in \gamma$ y entonces no se cumple el teorema. □

4. $\int_\gamma \frac{dz}{z^2-1}, \gamma(t)$ *es el círculo de radio 1 y centrado en 1*

Solución. Sea

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2-1} dz = \int_\gamma \frac{1}{(z-1)(z+1)} dz$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z+1)} &= \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} \\ 1 &= A(z+1) + B(z-1) \\ &= Az + A + Bz - B \\ &= (A+B)z + (A-B)\end{aligned}$$

Entonces $A + B = 0$ y $A - B = 1 \implies A = 1 + B$. Es decir

$$(1+B) + B = 0 \implies B = \frac{-1}{2}$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}&= \int_\gamma \left[\frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{2(z+1)}\right] dz \\ &= \int_\gamma \left[\frac{\frac{1}{2}}{(z-1)} - \frac{\frac{1}{2}}{(z+1)}\right] dz \\ &= \int_\gamma \frac{\frac{1}{2}}{(z-1)} dz - \int_\gamma \frac{\frac{1}{2}}{(z-(-1))} dz \\ &= f(1) \cdot 2\pi i - 0 \\ &= \pi i\end{aligned}$$

□

Problema 3. *Demuestre que la longitud de arco de una curva γ es invariante bajo reparametrizaciones.*

Definición 1. *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva C^1- por tramos. Una curva suave (C^1-) por tramos $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{C}$ es una reparametrización de γ si $\exists$ una función $C^1, \alpha : [a,b] \to [\tilde{a}, \tilde{b}] \ni \alpha'(t) > 0, \alpha(a) = \tilde{a}, \alpha(b) = \tilde{b}$ y $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\alpha(t))$*

Demostración. Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva, definida como $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ en donde la longitud de arco definida como:

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

, y sea $\alpha : [a,b] \to [\tilde{a}, \tilde{b}] \ni \alpha'(t) > 0, \alpha(a) = \tilde{a}, \alpha(b) = \tilde{b}$ tal que $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\alpha(t))$; tal que $\tilde{\gamma}(t) = x(\alpha(t)) + iy(\alpha(t))$ en donde su la longitud de arco está definido como:

$$L = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \sqrt{[x'(\alpha(t))]^2 + [y'(\alpha(t))]^2} dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} |\tilde{\gamma}'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)| dt$$

Es decir que debemos probar que:

$$\int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} |\tilde{\gamma}'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)| dt,$$

nótese que $\tilde{\gamma}$ es una reparametrización de γ y por proposición **demostrada en clase**, podemos concluir que la igualdad se cumple. Por lo tanto, la longitud de arco de una curva γ es invariante bajo reparametrizaciones. ■

Problema 4. *Muestre que si f es analítica sobre y en el interior de la curva γ y $z_0 \notin \gamma$, entonces*

$$\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2}$$

Demostración. Tenemos:

- Si z_0 está afuera de la región, entonces ambas integrales son cero y la igualdad se cumple.
- Si z_0 está dentro de la región. Tenemos por FIC

  $$\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{z - z_0} = f'(z_0) \cdot 2\pi i$$

  y por otra parte por FIC para derivadas

  $$\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2} = \int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{1+1}} = \frac{f'(z_0) \cdot 2\pi i}{1!} = f'(z_0) \cdot 2\pi i$$

  Por lo tanto,

  $$\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2}$$

■

Problema 5. *Sean γ_1 y γ_2 círculos centrados en el origen y de radios 1 y 2 , respectivamente. Compruebe que*

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^3 (z^2 + 10)} = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^3 (z^2 + 10)}$$

Demostración. Sea

- Primera igualdad

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^3\left(z^2+10\right)} &= \int_{\gamma_1} \frac{\frac{1}{(z^2+10)}}{z^3} dz \\ &= \int_{\gamma_1} \frac{\frac{1}{(z^2+10)}}{(z-0)^{2+1}} dz \\ &= \frac{f^{(2)}(0)\cdot 2\pi i}{2!}\end{aligned}$$

- Segunda igualdad

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^3\left(z^2+10\right)} &= \int_{\gamma_2} \frac{\frac{1}{(z^2+10)}}{z^3} dz \\ &= \int_{\gamma_2} \frac{\frac{1}{(z^2+10)}}{(z-0)^{2+1}} dz \\ &= \frac{f^{(2)}(0)\cdot 2\pi i}{2!}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^3\left(z^2+10\right)} = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^3\left(z^2+10\right)}$$

■

Problema 6. *Evalúe* $\int_\gamma \frac{2z^2-15z+30}{z^3-10z^2+32z-32}dz$, *donde* γ *es el círculo* $|z|=3$.

Solución. Sea

Tenemos

$$\begin{aligned}z^3-10z^2+32z-32 &= \frac{(z-2)(z^3-10z^2+32z-32)}{(z-2)} \\ &= (z-2)(z^2-8z+16) \\ &= (z-2)(z-4)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{2z^2-15z+30}{z^3-10z^2+32z-32}dz &= \int_\gamma \frac{2z^2-15z+30}{(z-2)(z-4)^2}dz \\ &= \int_\gamma \frac{\frac{2z^2-15z+30}{(z-4)^2}}{(z-2)}dz\end{aligned}$$

Usando el FIC:

$$
\begin{aligned}
&= f(2)\cdot 2\pi i \\
&= \frac{2(2)^2-15(2)+30}{((2)-4)^2}\cdot 2\pi i \\
&= \frac{8}{4}\cdot 2\pi i \\
&= 4\pi i
\end{aligned}
$$

□

Problema 7. *Suponga que $f(z)$ es una función entera y que la función armónica $u(x,y) = \operatorname{Re}[f(z)]$ tiene cota superior u_0. Demuestre que $u(x,y)$ es constante sobre el plano.*

Demostración. Primero, proponemos una función entera $h(z) = e^z$, la cual probaremos que es constante por Liouville. Sea entonces,

$$
\begin{aligned}
|h(z)| = |e^{f(z)}| &= \left|e^{\operatorname{Re}[f(z)]+i\operatorname{Im}[f(z)]}\right| = \left|e^{\operatorname{Re}[f(z)]}e^{i\operatorname{Im}[f(z)]}\right| \\
&= |e^{\operatorname{Re} f(z)}(\cos\operatorname{Im}\ f(z) + i\sin\operatorname{Im}\ f(z))| \\
&= |e^{\operatorname{Re} f(z)}|\cdot|\cos\operatorname{Im}\ f(z) + i\sin\operatorname{Im}\ f(z)| \\
&= e^{u(x,y)}\sqrt{\cos^2\operatorname{Im}\ f(z) + \sin^2\operatorname{Im} f(z)} \\
&= e^{u(x,y)}\cdot 1 \\
&\leq e^{u_0}
\end{aligned}
$$

■

$\implies$ *Por Liouville $h(z)$ es constante $\implies$ $h'(z) = 0$. Pero por otra parte, nótese que*

$$h'(z) = e^{f(z)}\cdot\underbrace{f'(z)}_{=0} = 0$$

Entonces $f'(z) = 0$ implicando que $f(z) = u(x,y)$ es constante.