Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

Física Moderna - Catedrática: Yasmín Portillo
20 de noviembre de 2022

Tarea 5

Problema 1. *Normalice la función de onda $Are^{-r/\alpha}$ de $r = 0$ a ∞ donde α y A son constantes.*

Solución. Sea

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(Are^{-r/\alpha}\right)\left(Are^{-r/\alpha}\right) dr &= 1 \\
\int_0^\infty \left(A^2r^2e^{-2r/\alpha}\right) dr &= 1 \\
A^2\int_0^\infty \left(r^2e^{-2r/\alpha}\right) dr &= 1 \\
A^2\left[-\frac{1}{2}ar^2e^{-(2r)/a}\Big|_0^\infty + a\int_0^\infty re^{-(2r)/a}dr\right] &= 1 \\
&\vdots \\
A^2\left[-\frac{1}{4}a^3e^{-(2r)/a} - \frac{1}{2}a^2re^{-(2r)/a} - \frac{1}{2}ar^2e^{-(2r)/a}\right]_0^\infty &= 1 \\
A^2\left[\frac{a^3}{4}\right] &= 1 \\
A &= \sqrt{\frac{4}{a^3}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{a^3}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función normalizada es

$$\psi(r,t) = \sqrt{\frac{A}{a^3}}re^{-r/\alpha}$$

□

Problema 2. *La propiedad 2 de las condiciones de frontera para las funciones de onda especifica que Ψ debe ser continua para evitar valores de probabilidad discontinuos. ¿Por qué no podemos tener probabilidades discontinuas?*

Solución. Simplemente porque no existiría la segunda derivada en x de Ψ y entonces no se cumpliría la ecuación de onda. $\square$

Problema 3. *Si el potencial $V(\mathrm{x})$ para un sistema unidimensional es independiente del tiempo, muestre que el valor esperado para x es independiente del tiempo.*

Solución. Como V es independiente del tiempo, tenemos dos casos:

- Normalizado,

$$\langle x\rangle = \int_{\infty}^{\infty} x\psi^*(x)\psi(x)dx$$

- No normalizado,

$$\langle x\rangle = \frac{\int_{\infty}^{\infty} x\psi^*(x)\psi(x)dx}{\int_{\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx}$$

$\square$

Problema 4. *Una función de onda $\Psi = A\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$ está en la región $-\pi < x < \pi$ y cero en otras partes. Normalice la función de onda*

Solución. Sea

$$\begin{aligned}\Psi &= A(e^{ix} + e^{-ix})\\ &= A\left(\cos x + i\sin x + \cos x - i\sin x\right)\\ &= 2A\cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \psi^*(x,y)\psi(x,t)dx &= 1\\ \int_{-\pi}^{\pi}\left[2A\cos x\right]\left[2A\cos x\right]dx &= 1\\ 4A^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 xdx &= 1\\ 4A^2\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\right)dx &= 1\\ 4A^2\left[\frac{1}{2}\left(x + \sin x\cos x\right)\right]_{-\pi}^{\pi} &= 1\\ 4A^2\pi &= 1\\ A &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}}\end{aligned}$$

$\square$

y encuentre la probabilidad de que la partícula sea:

- *entre* $x = 0$ *y* $x = \frac{\pi}{8}$*,*

  Solución. Sea

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\pi/8} \left(2\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\cos x\right)\left(2\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\cos x\right)dx \\ &= \frac{4}{4\pi}\int_0^{\pi/8}\cos^2 x dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(x + \sin x\cos x\right)\right]_0^{\pi/8} \\ &= 0{,}119 \end{aligned}$$

  □

- *entre* $x = 0$ *y* $x = \pi/4$*.*

  Solución. Sea

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\pi/4} \left(2\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\cos x\right)\left(2\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\cos x\right)dx \\ &= \frac{4}{4\pi}\int_0^{\pi/4}\cos^2 x dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(x + \sin x\cos x\right)\right]_0^{\pi/4} \\ &= 0{,}205 \end{aligned}$$

  □

Problema 5. *Determine el valor promedio de* $\Psi_n^2(x)$ *en el interior del pozo de potencial infinito para* $n = 1, 5, 10,$ *y 100 . Compare estos promedios con la probabilidad clásica de detectar la partícula dentro de la caja.*

Solución. Nótese que ψ_n es una función ya normalizada definida como:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

Sea

$$\langle\psi_n^2(x)\rangle = \frac{\int_0^L \psi_n^*(x)\psi_n(x)dx}{\int_0^L (1)dx}$$

Como $\psi_n(x)$ ya estaba normalizado, el numerador debe ser 1:

$$= \frac{1}{L}$$

Entonces la n no afecta en el valor promedio de $\Psi_n^2(x)$; siempre es el mismo. En el caso caso clásico, el resultado sería uniforma dentro de la caja. □

Problema 6. *Un electrón está atrapado en un potencial infinito de pozo cuadrado de ancho* 0,70 nm. *Si el electrón está inicialmente en el estado* $n = 4$*, ¿cuáles son las diversas energías de fotones que se pueden emitir cuando el electrón salta al estado fundamental?*

Solución. Sea

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{h^2c^2}{8mc^2L^2} \\ &= \frac{(1240eV \cdot nm)^2}{8(511 \times 10^3 eV)(0{,}70nm)^2} \\ &= 935keV \end{aligned}$$

Con esto se derivando los demás estados con

$$E_n = n^2 E_1$$

Entonces,

$$E_2 = 3{,}07eV, \quad E_3 = 6{,}91eV, \quad E_4 = 12{,}28eV$$

Por lo tanto, las diversas energías de fotones que se pueden emitir cuando el electrón salta al estado fundamental son todas las combinaciones que $n \leq 4$, es decir:

- $E_4 - E_3$
- $E_4 - E_2$
- $E_4 - E_1$
- $E_3 - E_2$
- $E_4 - E_1$
- $E_2 - E_1$

□

Problema 7. *Compare los resultados de los potenciales de pozo cuadrado infinito y finito.*

1. *¿Son las longitudes de onda más largas o más cortas para el pozo cuadrado finito comparadas con el pozo infinito?*

   Solución. Las del pozo finito son mayores, porque se salen del cuadrado. □

2. *Usar argumentos físicos para decidir si las energías (para un número cuántico dado n) son (i) mayores o (ii) menores para el pozo cuadrado finito que para el pozo cuadrado infinito?*

   Solución. Menores para el pozo cuadrado infinito. Esto se justifica por el inciso anterior. □

3. *¿Por qué habrá un número finito de estados de energía ligados para el potencial finito?*

Solución. Se debe a la energía. Si la energía fuera mayor al potencial, entonces no habría un número finito. □

Problema 8. *Un átomo de nitrógeno de masa* $2{,}32 \times 10^{-26}$ kg *oscila en una dimensión a una frecuencia de* 10^{13} Hz. *¿Cuáles son sus niveles de energía constante de fuerza efectiva y cuantizada?*

Solución. Se tiene:

- Energía constante efectiva

$$\begin{aligned} E &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)hf \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)(4{,}126 \times 10^{-15} eV \cdot s)(1 \times 10^{13} s^{-1}) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)(4{,}126 \times 10^{-2} eV \cdot s) \end{aligned}$$

- Energía cuantizada

$$\begin{aligned} k &= \omega^2 m \\ &= 4\pi^2 f^2 m \\ &= 4\pi^2 \left(1 \times 10^{13} s^{-1}\right)^2 (2{,}32 \times 10^{-26} kg) \\ &= 91{,}6 N/m \end{aligned}$$

□

Problema 9. *Muestre que la energía de un oscilador armónico simple en el estado* $n = 1$ *es* $3\hbar\omega/2$ *sustituyendo la función de onda* $\Psi_1 = Axe^{-\alpha x^2/2}$ *directamente en la ecuación de Schrödinger.*

Solución. Sea

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dx} &= Ae^{-\alpha x^2/2} - A\alpha x^2 e^{-\alpha x^2/2} \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} &= -3A\alpha x e^{-\alpha x^2/2} + A\alpha^2 x^3 e^{-\alpha x^2/2} = \left(\alpha^2 x^2 - 3\alpha\right)\psi \end{aligned}$$

Nótese que la sección de oscilador simple del libro de texto, se hizo la deducción:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = (\alpha^2 x^2 - \beta)\psi, \quad \beta = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

De esto, tenemos que

$$\begin{aligned} 3\alpha &= \frac{2mE}{\hbar^2} \\ \frac{3\alpha\hbar^2}{2m} &= E \end{aligned}$$

Para el estado de energía $n = 1$, se tiene $\alpha = \sqrt{\frac{mk}{\hbar^2}}$

$$
\begin{aligned}
\frac{3\sqrt{\frac{mk}{\hbar^2}}\hbar^2}{2m} &= E \\
\frac{3\omega\hbar}{2} &= E
\end{aligned}
$$

□

Problema 10. *Un electrón de* 1,0eV *tiene una probabilidad de* $2{,}0 \times 10^{-4}$ *hacer un túnel a través de una barrera de potencial de* 2,5eV*. ¿Cuál es la probabilidad de que un protón de* 1,0eV *haga un túnel a través de la misma barrera?*

Solución. Nótese que con una probabilidad de 2×10^{-4}, se tiene $\kappa L \gg 1$ y además:

$$
\begin{aligned}
T &= 16\frac{E}{V_0}\left(1 - \frac{E}{V_0}\right)e^{-2\kappa L} \\
&= 16\frac{1}{2{,}5}\left(1 - \frac{1}{2{,}5}\right)e^{-2\kappa L} \\
&= 3{,}84e^{-2\kappa L}
\end{aligned}
$$

En donde, $\kappa = \frac{\sqrt{2mc^2(V_0-E)}}{\hbar c} = \frac{\left[2\left(511\times10^3\text{eV}\right)(1{,}5\text{eV})\right]^{1/2}}{197{,}4\text{eV}\cdot\text{nm}} = 6{,}27\ \text{nm}^{-1}$

$$= 2 \times 10^{-4}$$

De esto, se extrae L, tal que:

$$L = \frac{\ln\left(1{,}92 \times 10^4\right)}{2\left(6{,}27 \times 10^9\ \text{m}^{-1}\right)} = 7{,}86 \times 10^{-10}\ \text{m}$$

Para la segunda parte del problema, usando la masa del protón, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\kappa &= \frac{\sqrt{2mc^2\left(V_0 - E\right)}}{\hbar c} \\
&= \frac{\left[2\left(938{,}27 \times 10^6\text{eV}\right)\left(1{,}5\text{eV}\right)\right]^{1/2}}{197{,}4\text{eV}\cdot\text{nm}} \\
&= 268{,}8\ \text{nm}^{-1}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
T &= 3{,}84e^{-2\kappa L} \\
&= 3{,}84e^{-2\left(268{,}8\times10^9\ \text{m}^{-1}\right)\left(7{,}86\times10^{-10}\ \text{m}\right)} \\
&= 1{,}2 \times 10^{-183}
\end{aligned}
$$

La probabilidad del protón es más pequeña. □