Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2035 - Álgebra Moderna - Catedrático: Ricardo Barrientos
29 de octubre de 2022

Tarea 20

Problemas 4, 5, 8 y 11, sección 3.11.

Problema 1 (Problema 4)**.** *If R is an integral domain with unit element, prove that any unit in $R[x]$ must already be a unit in R.*

Demostración. Supóngase que $f(x) = a_0 + a_1x + a_2 + \cdots + a_nx^n$ es un elemento unitario en $R[x] \implies$ por definición $\exists g(x) = b_0 + b_1x + b_2 + \cdots + b_nx^n \ni f(x)g(x) = 1$. De esto, nótese que el grado de los polinomios,

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}(f(x)g(x)) &= \mathrm{gr}(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $\mathrm{gr}(f(x)), \mathrm{gr}(g(x)) \geq 0$, entonces $\mathrm{gr}(f(x)) = \mathrm{gr}(g(x)) = 0 \implies f(x) = a_0$ y $g(x) = b_0$ para $a_0, b_0 \in R$, es decir $a_0b_0 = 1$. Por lo tanto, cualquier unidad en $R[x]$ debe ser una unidad en R. ■

Problema 2 (Problema 5)**.** *Let R be a commutative ring with no nonzero nilpotent elements (that is, $a^n = 0$ implies $a = 0$). If $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ in $R[x]$ is a zero-divisor, prove that there is an element $b \neq 0$ in R such that $ba_0 = ba_1 = \cdots = ba_m = 0$.*

Demostración. Sea $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ en $R[x]$ el cual es un divisor de cero, entonces debe existir para $i \in \mathbb{N}_0$, $g(x) = b_ix^i + b_{i+1}x^{i+1} + \cdots + b_nx^n \neq 0$ en $R[x]$ tal que $f(x)g(x) = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m)(b_ix^i + b_{i+1}x^{i+1} + \cdots + b_nx^n) \\ &= a_0\left[b_ix^i + b_{i+1}x^{i+1} + \cdots + b_nx^n\right] + a_1x\left[b_ix^i + b_{i+1}x^{i+1} + \cdots + b_nx^n\right] + \\ &+ \cdots + a_mx^m\left[b_ix^i + b_{i+1}x^{i+1} + \cdots + b_nx^n\right] \\ &= (a_0b_ix^i + a_0b_{i+1}x^{i+1} + \cdots + a_0b_nx^n) + (a_1b_ix^{i+1} + a_1b_{i+1}x^{i+2} + \cdots + a_1b_nx^{n+1}) + \\ &+ \cdots + (a_mb_ix^{i+m} + a_mb_{i+1}x^{i+1+m} + \cdots + a_mb_nx^{n+m}) \\ &= a_0b_ix^i + (a_0b_{i+1} + a_1b_1)x^{i+1} + (a_0b_{i+2} + a_1b_{i+1} + a_2b_i)x^{i+2} + \cdots + a_mb_nx^{m+n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nótese que los coeficientes deben ser 0, en donde $k \in \{0, 1, \cdots, m\}$ es decir:

$$\begin{aligned}
a_0 b_i &= 0 \\
a_0 b_{i+1} + a_1 b_1 &= 0 \\
a_0 b_{i+2} + a_1 b_{i+1} + a_2 b_i &= 0 \\
&\vdots \\
a_0 b_{i+k} + a_1 b_{i+(k-1)} + \cdots a_2 k_i &= 0
\end{aligned}$$

Entonces, por hipótesis, tenemos $a^i = 0 \implies a = 0$, es decir que $b_n^i \neq 0 \implies b_n \neq 0$ y si $b := b_i^{m+1}$ tenemos que:

$$ba_0 = ba_1 = \cdots = ba_m = 0$$

■

Problema 3 (Problema 8)**.** *Prove that when F is a field, $F[x_1, x_2]$ is not a principal ideal ring.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supóngase que $F[x_1, x_2]$ es un anillo de anillos principales $\implies (x_1, x_2) = (f(x_1, x_2))$ para un $f(x_1, x_2) \in F[x_1, x_2] \implies x_1, x_2$ son irreducibles tal que $x_1 = k_1 f(x_1, x_2)$ y $x_2 = k_2 f(x_1, x_2)$. Entonces, de x_1, $f(x_1, x_2)$ no debe tener coeficientes 0 de x_1 y de x_2, k_2 no tiene coeficientes 0 ($\rightarrow\leftarrow$) ya que entonces no se cumpliría $x_1 = k_1 f(x_1, x_2)$. Por lo tanto, $F[x_1, x_2]$ no es un ideal de anillos principales. ■

Problema 4 (Problema 11)**.** *If R is an integral domain, and if F is its field of quotients, prove that any element $f(x)$ in $F[x]$ can be written as $f(x) = (f_0(x)/a)$, where $f_0(x) \in R[x]$ and where $a \in R$.*

Demostración. Sea $f(x) \in F[x]$ tal que

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{a_i}{b_i} x^i,$$

en donde $a_i, b_i \neq 0 \in R$, entonces:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=0}^{k} \frac{a_i}{b_i} x^i \\
&= \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1}{b_1} x + \cdots + \frac{a_k}{b_k} x^k \\
&= \frac{a_0 b_1 b_2 \cdots b_k}{b_0 b_1 b_2 \cdots b_k} + \frac{a_1 b_0 b_2 \cdots b_k}{b_0 b_1 b_2 \cdots b_k} x + \cdots + \frac{a_k b_0 b_1 b_2 \cdots b_{k-1}}{b_0 b_1 b_2 \cdots b_k} x^k \\
&= \frac{a_0 b_1 b_2 \cdots b_k + a_1 b_0 b_2 \cdots b_k x + \cdots + a_k b_0 b_1 b_2 \cdots b_{k-1} x^k}{b_0 b_1 b_2 \cdots b_k} \\
&:= \frac{f_0(x)}{a}
\end{aligned}$$

En donde $f_0(x) \in R[x]$ y $a \in R$. ■