**Universidad del Valle de Guatemala**
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

**Estudiante:** Rudik Roberto Rompich
**Correo:** rom19857@uvg.edu.gt
**Carné:** 19857

Análisis de Variable Compleja - Catedrático: Dorval Carías
22 de julio de 2022

---

# Tarea 1

**Problema 1.** *Si* $a, b \in \mathbb{C}$*, pruebe que* $|1+a|+|1+b|+|1+ab| \geq 2$.

***Solución.*** Por casos, sea:

- Sea $|b| \geq 1$, tal que:

$$\begin{aligned}
|1+a|+|1+b|+|1+ab| &= |1+a|+|1+b|+|-(1+ab)| \\
&\geq |1+a|+|(1+b)-(1+ab)| \\
&= |1+a|+|b-ab| \\
&= |1+a|+|b||1-a| \\
&\geq |1+a|+|1-a| \\
&\geq |(1+a)+(1-a)| \\
&= 2
\end{aligned}$$

- Sea $|b| \leq 1$, tal que:

$$\begin{aligned}
|1+a|+|1+b|+|1+ab| &\geq |b||1+a|+|1+b|+|1+ab| \\
&= |b+ba|+|1+b|+|1+ab| \\
&\geq |(1+b)-(b+ab)|+|1+ab| \\
&= |1-ab|+||1+ab| \\
&\geq |(1-ab)+(1+ab)| \\
&= 2
\end{aligned}$$

$\square$

**Problema 2.** *Si* $z \in \mathbb{C}$ *y si* $\operatorname{Re}(z^n) \geq 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$*, pruebe que* $z \in \mathbb{R}^+$.

***Solución.*** Por hipótesis, $r[\cos\theta + i\sin\theta] \in \mathbb{C}$ y también:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(z^n) &= \operatorname{Re}(r^n[\cos n\theta + i\sin n\theta]) && \text{De Moivre}\\
&= \operatorname{Re}(r^n \cos n\theta + ir^n \sin n\theta)\\
&= r^n \cos n\theta \geq 0\\
&\implies \cos n\theta \geq 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}$$

$\implies$ De esto, podemos concluir que la única manera que la anterior desigualdad se cumpla, es que $\theta = 0$. $\implies z = r[\cos 0 + i\sin 0] = r$. Por lo tanto,

$$z \in \mathbb{R}^+.$$

□

**Problema 3.** *Encuentre todas las soluciones complejas de la ecuación:* $e^{z^2} = 1$.

***Solución.*** Nótese que:

$$\begin{aligned}
e^{z^2} &= 1\\
e^w &= 1, \quad w = z^2\\
e^w &= 1 = e^{2\pi k i}, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$\implies w = 2\pi ki \implies z^2 = 2\pi ki \implies z = \pm\sqrt{2\pi ki}.$ □

**Problema 4.** *Sea* $a \in \mathbb{R}^+$ *y sea* $M_a = \left\{z \in \mathbb{C} - \{0\} : \left|z + \frac{1}{z}\right| = a\right\}$. *Encuentre los valores máximo y mínimo de* $|z|$ *cuando* $z \in M_a$.

***Solución.*** Sea

$$\begin{aligned}
\left|z+\frac{1}{z}\right| &= a \\
\left|z+\frac{1}{z}\right|^2 &= a^2 \\
\left(z+\frac{1}{z}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)} &= a^2 \\
\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}\right) &= a^2 \\
z\overline{z}+\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}+\frac{1}{z\overline{z}} &= a^2 \\
|z|^2+\frac{z^2+\overline{z}^2}{\overline{z}z}+\frac{1}{z\overline{z}} &= a^2 \\
|z|^2+\frac{z^2+\overline{z}^2}{|z|^2}+\frac{1}{|z|^2} &= a^2 \\
\frac{|z|^2|z|^2+(z^2+\overline{z}^2)+1}{|z|^2} &= a^2 \\
\frac{|z|^4+z^2+\overline{z}^2+1}{|z|^2} &= a^2 \\
|z|^4+z^2+\overline{z}^2+1 &= a^2|z|^2 \\
|z|^4+z^2+\overline{z}^2+1+2z\overline{z}-2z\overline{z} &= a^2|z|^2 \\
|z|^4-a^2|z|^2-2z\overline{z}+1+z^2+2z\overline{z}+\overline{z}^2 &= 0 \\
|z|^4-a^2|z|^2-2z\overline{z}+1+(z^2+\overline{z}^2) &= 0 \\
|z|^4-a^2|z|^2-2|z|^2+1+(z^2+\overline{z}^2) &= 0 \\
|z|^4-(a^2+2)|z|^2+1+(z^2+\overline{z}^2) &= 0 \\
|z|^4-(a^2+2)|z|^2+1 &= -(z^2+\overline{z}^2)\leq 0
\end{aligned}$$

De esta expresión, se utiliza la fórmula general, tal que:

$$\begin{aligned}
|z|^2 &= \frac{-(-(a^2+2))\pm\sqrt{(-(a^2+2))^2-4(1)(1)}}{2(1)} \\
&= \frac{(a^2+2)\pm\sqrt{a^4+4a^2+4-4}}{2} \\
&= \frac{(a^2+2)\pm\sqrt{a^4+4a^2}}{2} \\
|z| &= \sqrt{\frac{(a^2+2)\pm\sqrt{a^4+4a^2}}{2}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el máximo y el mínimo de $|z|$ son los siguientes:

$$\text{máx}\,|z| = \sqrt{\frac{(a^2+2)+\sqrt{a^4+4a^2}}{2}} \qquad \text{y} \qquad \text{mín}\,|z| = \sqrt{\frac{(a^2+2)-\sqrt{a^4+4a^2}}{2}}$$

□

**Problema 5.** *Pruebe que para cada número complejo* $z$, $|z+1| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ *o* $|z^2+1| \geq 1$.

***Solución.*** Por reducción al absurdo, considérese que para un número complejo $z$,

$$|z+1| < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \left|z^2+1\right| < 1$$

Ahora bien, bajando a componentes se tiene:

$$\begin{aligned}
|a+bi+1| &< \frac{1}{\sqrt{2}} \\
|(a+1)+bi| &< \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\sqrt{(a+1)^2+b^2} &< \frac{1}{\sqrt{2}} \\
(a+1)^2+b^2 &< \frac{1}{2} \\
a^2+2a+1+b^2 &< \frac{1}{2} \\
2(a^2+2a+1+b^2) &< 1 \\
2a^2+4a+2+2b^2 &< 1 \\
2a^2+4a+1+2b^2 &< 0
\end{aligned}
\quad \text{y} \quad
\begin{aligned}
\left|(a+bi)^2+1\right| &< 1 \\
\left|a^2-2abi+(bi)^2+1\right| &< 1 \\
\left|(a^2-b^2+1)-2abi\right| &< 1 \\
\sqrt{(a^2-b^2+1)^2+(2ab)^2} &< 1 \\
(a^2-b^2+1)^2+(2ab)^2 &< 1 \\
a^4-2a^2b^2+2a^2+b^4-2b^2+1+4a^2b^2 &< 1 \\
a^4+2a^2+b^4-2b^2+2a^2b^2 &< 0
\end{aligned}$$

Sumando estas dos expresiones, se tiene:

$$\begin{aligned}
(2a^2+4a+1+2b^2)+(a^4+2a^2+b^4-2b^2+2a^2b^2) &< 0+0 \\
4a+1+a^4+4a^2+b^4+2a^2b^2 &< 0 \\
(4a^2+4a+1)+(a^4+2a^2b^2+b^4) &< 0 \\
(2a^2+1)^2+(a^2+b^2)^2 &< 0 \\
\sqrt{(2a^2+1)^2+(a^2+b^2)^2} &< \sqrt{0}
\end{aligned}$$

Es decir, se tiene:

$$|(2a^2+1)+(a^2+b^2)i| < 0 \qquad \text{o} \qquad \left|(a^2+b^2)+(2a^2+1)i\right| < 0$$

Lo que es una contradicción, ya que encontramos otras dos formas de representar un número complejo $z$. Por lo tanto, para cada número complejo $z$,

$$|z+1| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{o} \qquad \left|z^2+1\right| \geq 1$$

$\square$

**Problema 6.** *Sea* $z \in \mathbb{C} \ni \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{z}+1\right) = 1$. *Para un entero* $n$, *evalúe la expresión:*

$$\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)\left(z^n+\frac{1}{z^n}+1\right)$$

***Solución.*** Dada la hipótesis, tenemos:

$$\begin{aligned}
\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{z}+1\right) &= 1\\
z^2+1+z+1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z} &= 1\\
z^2+1+z+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z} &= 0\\
\frac{z^4+z^2+z^3+1+z}{z^2} &= 0\\
\frac{(z^4+z^2+z^3+1+z)(z-1)}{z^2(z-1)} &= 0\\
\frac{(z^5-1)}{z^2(z-1)} &= 0, z\neq 1
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Esto nos permite determinar que $z^5 = 1$, en donde las $z$ se pueden encontrar a partir de la definición de la raíz de la unidad[1], en donde:

$$z=\cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right)=e^{2\pi ki/5},\quad k=0,1,2,3,4$$

$\Longrightarrow$ Ahora bien, por otra parte, tenemos que $z^n = 1 \Longrightarrow \left(e^{2\pi ki/5}\right)^n = 1 \Longrightarrow \left(e^{2\pi ki}\right)^{n/5} = 1$, es decir que solo se cumple cuando $n$ es divisible por 5 (i.e. $n = 5c$ para $c \in \mathbb{Z}$). $\Longrightarrow$ A partir de esto, se tienen dos casos:

1. Si $z^n = 1$, es decir $5|n$:

$$\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)\left(z^n+\frac{1}{z^n}+1\right)=(1+1)(1+1+1)=6$$

[1] La definición de la raíz de la unidad, se puede encontrar en: https://encyclopediaofmath.org/wiki/Root_of_unity .

2. Si $z^n \neq 1$, es decir $5 \not| n$:

$$
\begin{aligned}
\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)\left(z^n + \frac{1}{z^n} + 1\right) &= 1 \\
z^{2n} + 1 + z^n + 1 + \frac{1}{z^{2n}} + \frac{1}{z^n} &= 1 \\
z^{2n} + 1 + z^n + \frac{1}{z^{2n}} + \frac{1}{z^n} &= 0 \\
\frac{z^{4n} + z^{2n} + z^{3n} + 1 + z^n}{z^{2n}} &= 0 \\
\frac{(z^{4n} + z^{2n} + z^{3n} + 1 + z^n)(z^n - 1)}{z^{2n}(z^n - 1)} &= 0 \\
\frac{(z^{5n} - 1)}{z^{2n}(z^n - 1)} &= 0 \\
\frac{((z^5)^n - 1)}{z^{2n}(z^n - 1)} &= 0 \\
\frac{((1)^n - 1)}{z^{2n}(z^n - 1)} &= 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)\left(z^n + \frac{1}{z^n} + 1\right) = \begin{cases} 6, & 5|n \\ 1, & 5 \not| n \end{cases}
$$

$\square$