Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2035 - Álgebra Moderna - Catedrático: Ricardo Barrientos
2 de diciembre de 2022

Tarea 12

Problemas 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, sección 5.8

Problema 1 (Problema 1). *In S_5 show that* (12) *and* (12345) *generate* S_5.

Demostración. Por cálculo directo (de derecha a izquierda), usamos la expresión $(12345)^j t(12345)^{-j}$, donde $1 \leq j \leq 5$, tal que:

- $(12345)^1(12)(12345)^{-1} = (12345)(12)(54321) = (23)$
- $(12345)^2(12)(54321)^2 = (34)$
- $(12345)^3(12)(54321)^3 = (45)$
- $(23)(12)(23) = (13)$
- $(34)(13)(34) = (14)$
- $(45)(14)(45) = (15)$
- $(45)(34)(45) = (35)$
- $(35)(23)(35) = (25)$
- $(34)(23)(34) = (24)$

Como generamos todos los 2-ciclos en S_5, podemos generar S_5. ■

Problema 2 (Problema 2). *In S_5 show that* (12) *and* (13245) *generate* S_5.

Demostración. Por cálculo directo (de derecha a izquierda), usamos la expresión $(13245)^j t(13245)^{-j}$, donde $1 \leq j \leq 5$, tal que:

- $(13245)^1(12)(13245)^{-1} = (13245)(12)(54231) = (34)$
- $(13245)(34)(54231) = (25)$

- $(13245)(25)(54231) = (14)$
- $(13245)(14)(54231) = (35)$
- $(25)(12)(25) = (15)$
- $(35)(15)(35) = (13)$
- $(35)(13)(35) = (45)$
- $(35)(25)(35) = (23)$
- $(34)(23)(34) = (24)$

Como generamos todos los 2-ciclos en S_5, podemos generar S_5. ■

Problema 3 (Problema 3). *If $p > 2$ is a prime, show that (1 2) and $(2 \cdots p-1p)$ generate S_p.*

Demostración. Directamente de un teorema ya demostrado, en donde S_n es generado por $(1, 2)$ y $(1, 2, \cdots, n)$. Entonces este problema es un caso particular para números primos. ■

Problema 4 (Problema 5). *Show that the following polynomials over $\mathbb{Q}$ are irreducible and have exactly two nonreal roots.*

1. $p(x) = x^3 - 3x - 3$

   Solución. Por el criterio de Eisenstein con $p = 3$, $p(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}$. La derivada de este polinomio:
   $$p'(x) = 3x^2 - 3$$
   Para encontrar los máximos y mínimos igualadas a cero, tal que:
   $$x^2 = \frac{3}{3} \implies x = \pm 1$$
   Lo que nos permite concluir que tiene dos raíces imaginarias. □

2. $p(x) = x^5 - 6x + 3$

   Solución. Por el criterio de Eisenstein con $p = 3$, $p(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}$. La derivada de este polinomio:
   $$p'(x) = 5x^4 - 6$$
   Para encontrar los máximos y mínimos igualadas a cero, tal que:
   $$x^4 = \frac{6}{5} \implies x = \pm \sqrt[4]{\frac{6}{5}}$$
   Lo que nos permite concluir que tiene dos raíces imaginarias. □

3. $p(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 - x - 2.$

Solución. A primera vista no podemos usar Eisenstein, pero si usamos $p(x-1)$, tenemos:

$$\begin{aligned}
p(x-1) &= (x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 10(x-1)^3 + 10(x-1)^2 - (x-1) - 2\\
&= (x-1)^2[(x-1)^3 + 5(x-1)^2 + 10(x-1) + 10] - (x-1) - 2\\
&= (x-1)^2[(x-1)[(x-1)^2 + 5(x-1) + 10] + 10] - (x-1) - 2\\
&= (x-1)^2[(x-1)(x^2 + 3x + 6) + 10] - (x-1) - 2\\
&= (x-1)^2[x^3 + 2x^2 + 3x + 4] - (x-1) - 2\\
&= x^5 - 5x + 4 - (x-1) - 2\\
&= x^5 - 6x + 3
\end{aligned}$$

Este polinomio es irreducible por el inciso 2, entonces $p(x)$ también es irreducible. Además, también tiene 2 raíces imaginarias por el mismo argumento, ya que $(x-1)$ solo es un desplazamiento en el eje x y la forma se preserva. □

Problema 5 (Problema 6). *What are the Galois groups over Q of the polynomials in Problem 5?*

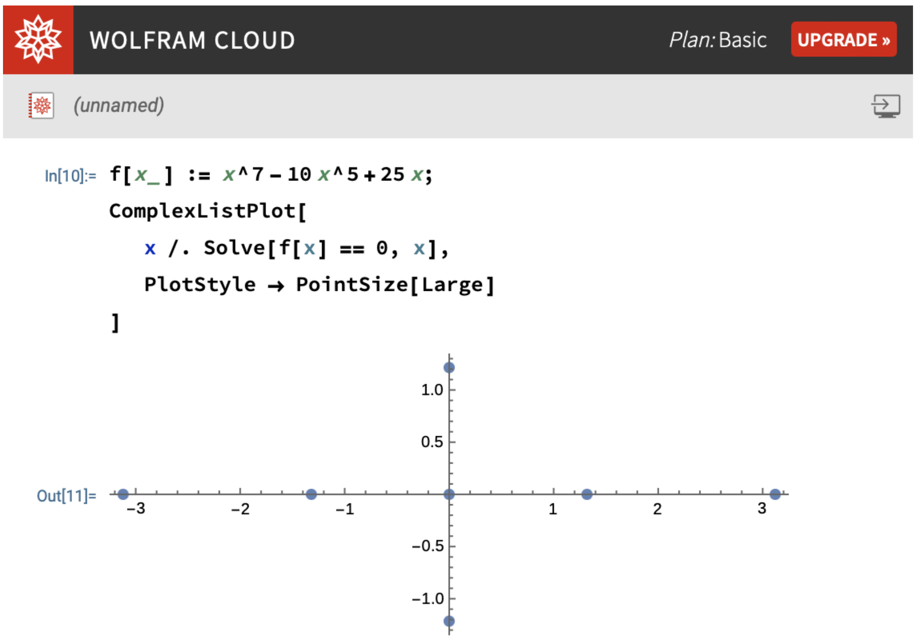
Demostración. Por teorema 5U,

1. Grupo de Galois sobre $\mathbb{Q}$ es S_3 ya que $gr(p(x)) = 3$.
2. Grupo de Galois sobre $\mathbb{Q}$ es S_5 ya que $gr(p(x)) = 5$.
3. Grupo de Galois sobre $\mathbb{Q}$ es S_5 ya que $gr(p(x)) = 5$.

■

Problema 6 (Problema 7). *Construct a polynomial of degreee 7 with rational coefficients whose Galois group over $\mathbb{Q}$ is S_7.*

Solución. Sea $p(x) = x^7 - 10x^5 + 25x$. Por el criterio de Eisenstein con $p = 5$, $p(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}$. Para determinar las raíces de este polinomio, por su complejidad, se optó por usar el lenguaje de programación **Mathematica** en donde además se graficaron las raíces en el plano complejo por medio del siguiente código:



Por lo que se comprueba que se tienen dos raíces imaginarias, además por el teorema 5U, $gr(p(x)) = 7$ entonces el grupo de Galois sobre $\mathbb{Q}$ es S_7. $\square$