Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

Geometría diferencial - Catedrático: Alan Reyes
28 de febrero de 2023

Tarea

Problema 1. *Sea α una curva de Frenet en $\mathbb{R}^n$. Muestre que*

$$\det\left[\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots, \alpha^{(n)}\right] = \prod_{i=1}^{n-1} \kappa_i^{(n-i)}.$$

Solución. Como α es una curva de Frenet, se cumple la definición, tal que

$$\alpha(\mathrm{s}) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

una curva regular, parametrizada por longitud de arco, y de clase C^n. α es una curva de Frenet si en todo punto s, los vectores $\alpha'(\mathrm{s}), \alpha''(\mathrm{s}), \ldots, \alpha^{(n-1)}(\mathrm{s})$ son linealmente independientes. Además, también se mencion al referencial de Frenet de α se define como $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ y está únicamente determinado por

- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.
- Para todo $k = 1, \ldots, n-1$, $\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k \rangle = \left\langle \alpha'(s), \ldots, \alpha^{(k)}(s) \right\rangle$.
- $\left\langle \alpha^{(k)}(s), \mathbf{e}_k \right\rangle > 0$, para $k = 1, \ldots, n-1$.

Entonces, por construcción de teorema visto en clase, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1}' \\ \mathbf{e}_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \kappa_{n-2} & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -\kappa_{n-2} & \cdots & \kappa_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1} \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}, \forall s$$

Es decir que esencialmente,

$$\alpha^{(k)} = \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \cdots \kappa_{k-1} \mathbf{e}_k$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\det\left[\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots, \alpha^{(n)}\right] &= \det\left[\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots, \alpha^{(n)}\right] \\
&= \det\left[\mathbf{e}_1, \kappa_1\mathbf{e}_2, \kappa_1\kappa_2\mathbf{e}_3, \ldots, \kappa_1\kappa_2\kappa_3\cdots\kappa_{k-1}\mathbf{e}_k\right] \\
&= \kappa_1^{n-1}\cdot\kappa_2^{n-2}\cdot\kappa_3^{n-3}\cdots\kappa_{n-2}^{2}\cdot\kappa_{n-1} \\
&= \prod_{i=1}^{n-1}\kappa_i^{(n-i)}
\end{aligned}$$

□

Problema 2. *Construir una curva, no planar, de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$, que sea una curva de Frenet, excepto en un único punto, y que fuera de ese punto, satisface $\tau \equiv 0$.*

Solución. En clase, se vio que la hélice es una curva de Frenet en $\mathbf{R}^3$. Considerando que el círculo es un caso especial de la hélice en $\mathbf{R}^3$, considérese las siguientes curvas

$$\begin{aligned}
\alpha_1(s) &= \left(\cos\left(\frac{1}{t}\right), \sin\left(\frac{1}{t}\right), 0\right) \\
\alpha_2(s) &= \left(0, \cos\left(\frac{1}{t}\right), \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)
\end{aligned}$$

Estás curvas son de Frenet en todo punto, excepto en $t = 0$. Sin embargo, si hacemos una unión de las curvas,

$$\alpha_1(s) \cup \alpha_2(s)$$

Tenemos una curva no planar, de clase C^∞, que es de Frenet, excepto en un punto y que $\tau \equiv 0$. □

Problema 3. *Sea*

1. *Sea $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ una curva plana, cerrada y simple, parametrizada por longitud de arco. Suponga que $0 \leq \kappa(s) \leq c$, $\forall s \in [0, L]$, para alguna constante $c > 0$. Probar que $L \geq \frac{2\pi}{c}$.*

   Solución. Por definición de índice de rotación para curvas cerradas y como es simple $I = 1$,

   $$\int_0^L \kappa(s)ds = 2\pi$$

   Por hipótesis, tenemos que $0 \leq \kappa(s) \leq c$, entonces:

   $$\int_0^L \kappa(s)ds \leq c\int_0^L ds = cL$$

   Por lo tanto,

   $$2\pi \leq cL \implies L \geq \frac{2\pi}{c}$$

   □

2. *Si reemplazamos la hipótesis de α ser simple por α tiene índice de rotación I, probar que $L \geq \frac{2\pi I}{c}$.*

Solución. La prueba es análoga,

$$\int_0^L \kappa(s)ds = 2\pi I$$

Por hipótesis, tenemos que $0 \leq \kappa(s) \leq c$, entonces:

$$\int_0^L \kappa(s)ds \leq c\int_0^L ds = cL$$

Por lo tanto,

$$2\pi I \leq cL \implies L \geq \frac{2\pi I}{c}$$

$\square$

Problema 4. *Sea $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ una curva plana, cerrada y convexa, orientada de forma positiva. La curva*

$$\beta(s) = \alpha(s) - r\mathbf{n}(s),$$

donde $r > 0$ es una constante positiva y $\mathbf{n}(s)$ es el vector normal de α en s, se llama una curva paralela a α. Muestre que

1. $\ell(\beta) = \ell(\alpha) + 2\pi r$

Solución. Sea

$$\begin{aligned}
\ell(\beta) &= \int_0^L |\beta'(s)|ds \\
&= \int_0^L |\alpha'(s) - r\mathbf{n}'(s)|ds \\
&= \int_0^L |\alpha'(s) - r\left(-\kappa\mathbf{T}(s) + \tau\mathbf{B}(s)\right)|ds \\
&= \int_0^L \left|\alpha'(s) - r\left(-\kappa\left(\frac{\alpha'(s)}{|\alpha'(s)|}\right) + \tau\mathbf{B}(s)\right)\right| ds
\end{aligned}$$

Como α es plana, $\tau = 0$. Además, considerando la definición de longitud de arco, s es el parámetro natural de α, tal que $|\alpha'(s)| = |\mathbf{T}(s)| = 1$.

$$\begin{aligned}
&= \int_0^L \left|\alpha'(s) - r\left(-\kappa\left(\frac{\alpha'(s)}{1}\right) + 0\mathbf{B}(s)\right)\right| ds \\
&= \int_0^L |\alpha'(s) + r\kappa\alpha'(s)|\, ds \\
&= \int_0^L |\alpha'(s)|\, |1 + r\kappa|\, ds \\
&= \int_0^L |1 + r\kappa|\, ds
\end{aligned}$$

Como $r > 1$ y la curva es orientada positivamente,

$$\begin{aligned} &= \int_0^L (1 + r\kappa)ds \\ &= L + r\int_0^L \kappa ds \end{aligned}$$

Por definición de índice de rotación para curvas cerradas y simples, y cosiderando $L = \ell(\alpha)$

$$= \ell(\alpha) + 2\pi r$$

$\square$

2. $A(\beta) = A(\alpha) + rL + \pi r^2$.

Solución. Por el inciso anterior, sea $\ell(\beta) = \ell(\alpha) + 2\pi t$, entonces el área entre las dos curvas paralelas lo podemos definir como:

$$\begin{aligned} A(\beta) - A(\alpha) &= \int_0^r \ell(\beta)dt \\ &= \int_0^r \ell(\alpha) + 2\pi t dt \\ &= \ell(\alpha)r + \pi r^2 \\ &= Lr + \pi r^2 \end{aligned}$$

Despejando, obtenemos:

$$A(\beta) = A(\alpha) + rL + \pi r^2$$

$\square$

3. $\kappa_\beta(s) = \frac{\kappa_\alpha(s)}{1+r\kappa_\alpha(s)}$.

Solución. Sea

$$\kappa_\beta(s) = \frac{|\beta' \times \beta''|}{|\beta'|^3}$$

En donde, por el inciso 1,

$$\begin{aligned} \beta' &= \alpha'(s)(1 + r\kappa_\alpha) = \mathbf{T}(s)(1 + r\kappa_\alpha) \\ \beta'' &= \mathbf{T}'(s) + r\left(\kappa_\alpha'\mathbf{T}(s) + \kappa_\alpha\mathbf{T}'(s)\right) \\ &= (1 + r\kappa_\alpha)\mathbf{T}'(s) + r\kappa_\alpha'\mathbf{T}(s) \end{aligned}$$

Entonces:

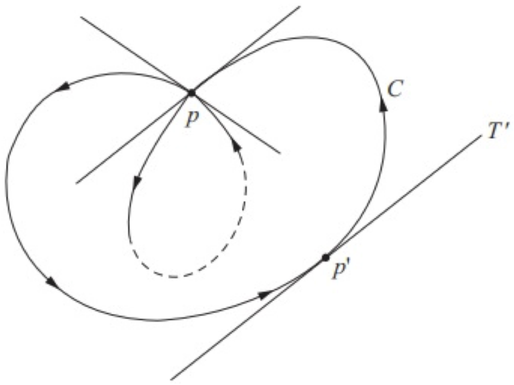
$$\begin{aligned} \kappa_\beta(s) &= \frac{|\beta' \times \beta''|}{|\beta'|^3} \\ &= \frac{|(\mathbf{T}(s)(1 + r\kappa_\alpha)) \times ((1 + r\kappa_\alpha)\mathbf{T}'(s) + r\kappa_\alpha'\mathbf{T}(s))|}{|\mathbf{T}(s)(1 + r\kappa_\alpha)|^3} \\ &= \frac{|(1 + r\kappa_\alpha)^2\mathbf{T}(s) \times \mathbf{T}'(s) + (1 + r\kappa_\alpha)r\kappa_\alpha'\mathbf{T}(s) \times \mathbf{T}(s)|}{|\mathbf{T}(s)(1 + r\kappa_\alpha)|^3} \end{aligned}$$

Se conoce $\mathbf{T}(s) \times \mathbf{T}(s) = 0$ y $\mathbf{T}(s) = 1$,

$$= \frac{(1 + r\kappa_\alpha)^2 \, |\mathbf{T}(s) \times \mathbf{T}'(s)|}{(1 + r\kappa_\alpha)^3}$$
$$= \frac{\kappa_\alpha}{1 + r\kappa_\alpha}$$

□

Problema 5. *Sea $C : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ una curva plana, cerrada, orientada positivamente, con $\kappa > 0$. Asuma que C posee al menos un punto de auto-intersección p.*



Demostrar que

1. *C posee al menos una tangente doble.*

   Solución. Usando el Teorema de Fabricius-Bjerre, sabemos

   $$N^+ = N^- + D + \frac{1}{2}W$$

   Como $\kappa > 0$, entonces $W = 0$. Por hipótesis, $D \geq 1$. Considerando también que $N^- \geq 0$. Nos permite asegurar que $N^+ \geq 1$. Por lo tanto C al menos posee una tangente doble. □

2. *Existe un punto $\mathbf{p}'$ cuya tangente a C en $\mathbf{p}'$ es paralela a la tangente a C en $\mathbf{p}$.*

   Solución. Inmediatamente usando la interpretación del teorema del valor medio de Cauchy. Nótese que las dos tangentes en p son secantes de C. Entonces, sea $f(t)$ la longitud de arco de C en $[0, L]$ y sea $g(t)$ el área encerrada de C. Como la curva es cerrada $f(a) = f(b) = 0$. Por lo tanto,

   $$f'(p') = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(p')$$
   $$= \frac{0}{g(b) - g(a)} g'(p')$$
   $$= 0$$

   Es decir, que la tangente en p' es paralela a una de las secantes (que también es tangente) en p. □

3. *El ángulo de rotación de la tangente en el arco positivo de C dado por* $\mathbf{pp'p}$ *es mayor a* π.

   Solución. Sea θ el ángulo pequeño entre las dos tangentes de p y ϕ el más grande. Entonces nótese que al dar una rotación por $\mathbf{pp'p}$ Se cumple que

$$\theta + \phi + \theta = (\theta + \phi) + \theta = \pi + \theta > \pi$$

□

4. *El índice de rotación de C es $I \geq 2$.*

   Solución. Ya que tiene como mínimo una autointersección, entonces el índice es mayor a 1. Por lo tanto, $I \geq 2$. □

Problema 6. *Hallar todos los vértices de la elipse $\gamma(t) = (p\cos t, q\sin t)$, cuando $p \neq q$ (aquí, $p, q > 0$).*

Solución. Para este problema, usamos el procedimiento usado en la demostración del teorema de los cuatro vértices. Primero, consideramos la ecuación de la curvatura de una parametrización definido como:

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \\
&= \frac{|(-p\sin t)(-q\sin t) - (q\cos t)(-p\cos t)|}{((-p\sin t)^2 + (q\cos t)^2)^{3/2}} \\
&= \frac{|pq\sin^2 t + pq\cos^2 t|}{(p^2\sin^2 t + q^2\cos^2 t)^{3/2}} \\
&= \frac{|pq|}{(p^2\sin^2 t + q^2\cos^2 t)^{3/2}} \\
&= \frac{pq}{(p^2\sin^2 t + q^2\cos^2 t)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Para hallar los vértices, debemos encontrar las máximos y mínimos de la curvatura, es decir $\kappa' = 0$. Para esto, derivamos la expresión:

$$\begin{aligned}
\kappa' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\
&= pq\left(\frac{0 - 3\,(p^2 - q^2)\sin t\cos t\sqrt{p^2\sin^2 t + q^2\cos^2 t}}{(p^2\sin^2 t + q^2\cos^2 t)^3}\right) \\
&= \frac{3pq\,(q^2 - p^2)\sin t\cos t}{(p^2\sin^2 t + q^2\cos^2 t)^{5/2}}
\end{aligned}$$

Igualamos a cero la expresión anterior, tal que:

$$\begin{aligned}
\frac{3pq\,(q^2 - p^2)\sin t\cos t}{(p^2\sin^2 t + q^2\cos^2 t)^{5/2}} &= 0 \\
\sin t\cos t &= 0
\end{aligned}$$

Como ya sabemos que $t \in [0, 2\pi]$, tenemos que

- $\sin t = 0$, cuando $t = 0, \pi, 2\pi$
- $\cos t = 0$, cuando $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

Con esto, evaluamos en la parametrización original, tal que los vértices son:

- $t = 0, \pi, 2\pi$:
  - $(p\cos 0, q\sin 0) = (p, 0)$
  - $(p\cos \pi, q\sin \pi) = (-p, 0)$
  - $(p\cos 2\pi, q\sin 2\pi) = (p, 0)$
- $t = \pi/2, 3\pi/2$:
  - $(p\cos \pi/2, q\sin \pi/2) = (0, q)$
  - $(p\cos 3\pi/2, q\sin 3\pi/2) = (0, -q)$

$\square$