



# Teoría de Inversión

## Guía del Módulo III Alternativo

Mario A. Cuevas  
UVG

# 1. NOTACIÓN DE DIRAC

“La variedad de cosas aquí presentes no es una variedad arbitraria de cosas incidentales, están presentes en primer lugar y solamente como una correlación particular de referencias.”

Martin Heidegger, *Historia del concepto del tiempo*.

---

## Términos

Amplitud probabilista, base de Hadamard, base de medición, bit, bras, esfera de Bloch, espacio cartesiano, espacio de Hilbert, fase relativa, gato de Schrödinger, interferencia, kets, normal, ortogonal, qubit, regla de Born, superposición

## Ideas

- El formalismo cuántico hace uso de la notación desarrollada por Paul Dirac.
- Las amplitudes probabilistas no están limitadas a ser números reales, sino que pueden ser complejas.
- El uso de amplitudes complejas en el paradigma cuántico marca la transición de los espacios cartesianos a los hilbertianos.
- Es posible definir diferentes bases en el espacio de estado. Dichas bases deben ser normales, ortogonales y completas.
- Se definen la base de medición, la base de Hadamard y una base compleja.
- Dichas bases constituyen el sistema de coordenadas de la esfera de Bloch, sobre la cual yace cualquier vector de estado normalizado.

---

## Notación de Dirac

El álgebra desarrollada por Paul Dirac (1939) usa una notación basada en “kets” y “bras”, así como un conjunto de reglas para representar los estados de los objetos cuánticos. Esta notación es sumamente flexible y se ha usado para representar objetos variados: temperaturas, direcciones de rotación, magnitudes y colores, entre otras aplicaciones.

En este texto, kets y bras se usarán para representar estados cuánticos, la manera en que los estados cuánticos responden ante la medición, la forma en que evolucionan a través del tiempo, y su proyección probabilista en el espacio de observación. Particularmente, se empleará el ket  $|\psi\rangle$  para representar toda la información que se asocia con el estado de un objeto cuántico.

Un ket debe contener toda la información necesaria para representar el estado de un objeto. Por ejemplo, definamos el ket  $|\uparrow\rangle$  como representación del alza del precio en un mercado. También puede definirse el ket  $|\downarrow\rangle$  para representar la baja del precio. A partir de los kets  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$  debería ser posible realizar todas las operaciones necesarias sobre el estado, aplicando el álgebra de kets.

Los kets  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$  representan estados que son materialmente diferentes y mutuamente excluyentes. Una vez que se ha observado que el estado es  $|\uparrow\rangle$ , no puede observarse posteriormente  $|\downarrow\rangle$  a menos que algo sustancial haya cambiado en torno al estado del objeto o en su relación con el observador.

La anterior aseveración podría parecer trivial, pero no lo es. La condición ontológica de los objetos cuánticos ha sido un asunto controversial en la comunidad científica. Ejemplo de ello es la postura del famoso físico Niels Bohr, en el sentido de que “solamente existe la descripción abstracta” de los objetos cuánticos.<sup>1</sup> Este texto toma el punto de vista de que existe un proceso generador de datos independiente del observador, del cual se desprenden las condiciones objetivas que se manifiestan de algún modo ante el observador. Los objetos cuánticos y las reglas que los gobiernan aluden, en principio, a tal proceso generador. El lector puede considerar esto meramente como un estilo de exposición para fines didácticos, al mismo tiempo que se mantiene alerta ante las interpretaciones alternativas disponibles en otras fuentes.

---

<sup>1</sup> Citado en Polkinghorne (2000).

Los espacios que se emplean en los métodos cuánticos heredan algunas de las propiedades de los espacios cartesianos. En un sistema de coordenadas cartesiano, cualquier punto en el espacio puede representarse como una combinación lineal de vectores unitarios ortogonales. Los componentes vectoriales, por ejemplo,  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ , y  $\hat{k}$ , en el espacio tridimensional, tienen una longitud unitaria. Además, cualquier combinación de estos componentes puede normalizarse a una longitud unitaria dividiendo por la longitud total del vector. El vector normalizado conserva su dirección, pues únicamente se ajusta su longitud. Todo vector en espacio cartesiano tridimensional puede representarse como una combinación de los tres vectores básicos, los cuales constituyen una base completa.

Considere en primer lugar el producto escalar del ket  $|\uparrow\rangle_{n \times 1}$  proyectado sobre sí mismo:

$$|\uparrow\rangle \cdot |\uparrow\rangle = \langle\uparrow|\uparrow\rangle = 1$$

Los estados representados por el bra,  $\langle\uparrow|_{1 \times n}$ , y el ket  $|\uparrow\rangle_{n \times 1}$  son iguales, por lo que existe un traslape completo. Además, por la condición de normalización, su producto escalar debe tener magnitud 1.

La ortogonalidad de los kets de base se representa como:

$$|\uparrow\rangle \cdot |\downarrow\rangle = \langle\uparrow|\downarrow\rangle = 0$$

Como los kets de base,  $|\uparrow\rangle_{n \times 1}$  y  $|\downarrow\rangle_{n \times 1}$  fueron seleccionados por ser mutuamente ortogonales, no deberían tener una proyección posible entre sí.<sup>2</sup> El producto interior o escalar indica qué tan similares son dos kets. Si dos kets están compuestos por combinaciones parecidas de kets básicos, es más probable que tengan un traslape importante y que la magnitud de su producto escalar sea cercana a 1.

Que la base sea completa significa que cualquier ket en el espacio puede representarse como una combinación de sus kets básicos. Esto significa que cualquier ket de estado puede representarse como una mezcla de  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$ :

$$|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$$

---

<sup>2</sup> Indicamos las dimensiones de kets y bras de manera explícita en los anteriores párrafos. No obstante, en adelante vamos a obviar los subíndices que indican las dimensiones. Supondremos que los objetos matemáticos siempre tienen las dimensiones apropiadas para interactuar entre sí.

En resumen, los vectores básicos de un espacio satisfacen las siguientes condiciones:

$$(|\uparrow\rangle) \cdot (|\uparrow\rangle) = \langle\uparrow|\uparrow\rangle = 1$$

$$(|\uparrow\rangle) \cdot (|\downarrow\rangle) = \langle\uparrow|\downarrow\rangle = 0$$

$$|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$$

La base es unitaria, normal y completa.

---

## Amplitud probabilista

En esta sección introducimos el concepto cuántico de la amplitud probabilista. Recordemos en primer lugar que los productos escalares son distributivos y que los factores multiplicativos pueden acomodarse libremente entre los objetos involucrados, incluyendo bras y kets.



En este contexto, los escalares  $a$  y  $b$  en  $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$  suelen denominarse amplitudes. Por ejemplo, para obtener la amplitud,  $b$ , del estado  $|\downarrow\rangle$ :

$$\begin{aligned}\langle\downarrow|\psi\rangle &= \langle\downarrow|(a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle) = \langle\downarrow|a|\uparrow\rangle + \langle\downarrow|b|\downarrow\rangle \\ &= a\langle\downarrow|\uparrow\rangle + b\langle\downarrow|\downarrow\rangle = a \times 0 + b \times 1 = b\end{aligned}$$

Note que la condición de que cualquier estado  $|\psi\rangle$  puede representarse como una combinación de los kets básicos  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$ , tiene como fundamento la idea de que solamente la dirección del vector importa. A menos que se indique lo contrario, puede suponerse que  $|\psi\rangle$  está normalizado. Esto conduce a pensar en una representación de los estados como puntos sobre la superficie de una esfera unitaria, de manera que:

$$\langle\psi|\psi\rangle = |a|^2 + |b|^2 = 1$$

En el ámbito del análisis cuántico la citada esfera unitaria se conoce convencionalmente como “esfera de Bloch”. La anterior ecuación también puede expresarse usando los productos interiores:

$$\langle\psi|\psi\rangle = |\langle\uparrow|\psi\rangle|^2 + |\langle\downarrow|\psi\rangle|^2 = 1$$

Cada uno de los términos del lado derecho de la ecuación corresponde a uno de los estados básicos en el espacio de medición. Esta ecuación anticipa una característica crucial de la representación del estado de los objetos cuánticos: el cuadrado del producto escalar es la probabilidad de que el estado  $|\psi\rangle$  sea observado sobre uno de los posibles kets básicos del espacio de medición.

Por ende, las amplitudes  $a$  y  $b$  pueden interpretarse como amplitudes probabilistas y las probabilidades de observación de cada estado básico vienen dadas por:

$$P_{\uparrow} = |\langle \uparrow | \psi \rangle|^2 \quad P_{\downarrow} = |\langle \downarrow | \psi \rangle|^2$$

La vinculación de las amplitudes con una interpretación probabilista es uno de los postulados fundamentales del enfoque cuántico, conocido como la “regla de Born” y postulado originalmente en Born (1926).

Es importante que la probabilidad de observar empíricamente uno de los estados básicos coincida con la predicción del tratamiento matemático:

$$P_{\uparrow} = |\langle \uparrow | \uparrow \rangle|^2 = 1 \quad P_{\downarrow} = |\langle \downarrow | \uparrow \rangle|^2 = 0$$

En este punto vale hacer una pequeña pausa y ahondar en lo que hemos hecho hasta el momento. Hemos dicho que los estados  $|\psi\rangle$  habitan un espacio propio, el espacio de estado, que es diferente al espacio de observación. El observador no tiene acceso directo al espacio de estado y únicamente le es posible observar proyecciones de los estados sobre las bases del espacio de medición elegido.

Las amplitudes probabilistas dadas por los productos escalares indican qué tan semejantes son el estado del objeto cuántico y los kets básicos de medición de manera que, a mayor semejanza, mayor probabilidad de observar determinado ket básico.

Sin embargo, las observaciones resultantes en esta base de medición pueden tener una semejanza mínima con el estado del objeto. Los resultados, aunque altamente improbables, satisfacen plenamente la lógica cuántica. En contraste, los resultados podrían reflejar a la perfección una dimensión del estado del objeto, cuando la probabilidad de obtener la observación está en su máximo. En ningún caso se revela plenamente el estado del objeto.

En general, puede suponerse que el estado del objeto abarca más que lo que aporta una particular base de medición. El acto mismo de medición presupone un nivel de definición o especificidad que no necesariamente es congruente con la naturaleza del estado del objeto. La exigencia resulta de la decisión del observador al elegir su base de medición.

Esto último tampoco constituye un error de medición en el sentido clásico, pero anticipa una de las características centrales del paradigma cuántico: hay un límite al conocimiento que puede obtenerse de un objeto cuántico a través de la observación.

La precisión exigida por el observador desdibuja el estado de los objetos, al mismo tiempo que aporta una certeza transitoria sobre una propiedad muy particular. Esta especie de pesimismo epistémico viene de la mano del distanciamiento de los espacios de observación y de estado en el paradigma cuántico, y representa una diferencia crucial en relación con el optimismo del paradigma clásico.

La clave es comprender que el clasicismo no impone menos exigencias epistémicas que el paradigma cuántico. Es exactamente, al contrario: las exigencias epistémicas para que los métodos clásicos sean aplicables son mayores. El observador clásico está limitado por aquello que no concibe o no reconoce.

---

## Bases de medición

En el capítulo anterior hicimos uso de los kets correspondientes a la alineación con el eje horizontal,  $x$ ,  $|\rightarrow\rangle$  y  $|\leftarrow\rangle$ . Sin embargo, hasta este momento no contamos con una definición matemática de tales kets. Dado que los kets asociados con  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$  forman una base de medición completa, los estados alineados con  $x$  se pueden expresar como combinaciones lineales de los estados en la base de medición:

$$|\rightarrow\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle \quad |\leftarrow\rangle = c|\uparrow\rangle + d|\downarrow\rangle$$

Los comportamientos hipotéticos descritos en los capítulos anteriores asignaron probabilidades iguales a  $|\rightarrow\rangle$  y  $|\leftarrow\rangle$  en la segunda etapa de observación, conociendo solamente el estado observado en la primera etapa, ya sea  $|\uparrow\rangle$  o  $|\downarrow\rangle$ . Esta asignación de probabilidad tiene como fundamento la ausencia de información previa de otra índole por parte del observador.

Esta configuración de conductas, aunada a la perspectiva del observador, lleva a un sistema de cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned} |\langle \leftarrow | \uparrow \rangle|^2 &= \frac{1}{2} & |\langle \rightarrow | \uparrow \rangle|^2 &= \frac{1}{2} \\ |\langle \leftarrow | \downarrow \rangle|^2 &= \frac{1}{2} & |\langle \rightarrow | \downarrow \rangle|^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores tienen alguna semejanza superficial con las probabilidades condicionales. ¿Qué queremos decir con esto? Tomemos la expresión  $\langle \leftarrow | \uparrow \rangle$  como ejemplo. Esta podría interpretarse como  $\langle \leftarrow |$  dado que, ante el observador, se ha manifestado  $| \uparrow \rangle$ . Aplicando luego la regla de Born,  $|\langle \leftarrow | \uparrow \rangle|^2$  se interpreta como la probabilidad de que se manifieste  $\langle \leftarrow |$  dado que, ante el observador, se ha manifestado  $| \uparrow \rangle$ .

La probabilidad de observación solamente permite concluir cuál es el cuadrado de la amplitud probabilista. Las amplitudes probabilistas pueden tener diferentes signos, o incluso pueden ser números complejos. Sin embargo, convencionalmente se supone que tanto  $a$  como  $c$  son números positivos, con magnitud  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , de manera que:

$$|a|^2 = |c|^2 = \frac{1}{2}$$

Esto permite avanzar la primera mitad del camino en la identificación de los estados alineados con el eje  $x$ :

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + b |\downarrow\rangle \quad |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + d |\downarrow\rangle$$

Puede demostrarse que  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $d = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  completan adecuadamente la solución al sistema de ecuaciones. Seguimos en el camino convencional. De lo anterior puede concluirse que:

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \quad |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$$

En esta secuencia de planteamientos, los estados básicos de medición siguen siendo  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$  en alineación con  $z$ . No obstante, los estados  $|\rightarrow\rangle$  y  $|\leftarrow\rangle$  también tienen todo lo que se requiere para ser estados básicos de una base de medición: son ortogonales, normales y completos. Prueba de ello es que los estados de la base de medición aceptados convencionalmente,  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$ , podrían expresarse como combinaciones de  $|\rightarrow\rangle$  y  $|\leftarrow\rangle$ . Comprobemos que esto es posible:

$$|\uparrow\rangle = e |\leftarrow\rangle + f |\rightarrow\rangle \quad |\downarrow\rangle = g |\leftarrow\rangle + h |\rightarrow\rangle$$

Los estados  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$  también pueden concebirse como una combinación por partes iguales de los estados  $|\rightarrow\rangle$  y  $|\leftarrow\rangle$ :

$$|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\rightarrow\rangle + |\leftarrow\rangle) \quad |\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\rightarrow\rangle - |\leftarrow\rangle)$$

Cuando los estados del objeto cuántico se representan como combinaciones de  $|\rightarrow\rangle$  y  $|\leftarrow\rangle$ , se dice que se está usando la base de Hadamard. Esta representación, alineada con  $x$ , es una alternativa a la base de medición empleada inicialmente en esta discusión y que está alineada con  $z$ .

Profundicemos en la interpretación de esto. Ya establecimos que las bases de medición no son únicas y que el observador elige sobre qué base efectuar sus mediciones. Asimismo, sabemos que hay más de una forma de representar los estados de un objeto cuántico.

En capítulos previos nos referimos a la base de Hadamard como la base de medición alineada con el eje horizontal,  $x$ . Esto no es incorrecto, pues efectivamente usamos esa base para la medición en alguna etapa de los experimentos hipotéticos. Sin embargo, para evitar confusiones, en adelante nos referiremos a la base alineada con  $x$  como la base de Hadamard, designando exclusivamente a la base alineada con el eje vertical,  $z$ , como la base de medición.



La interpretación de estos cambios de base también exige algunas precisiones. Por ejemplo, siguiendo una interpretación frecuentista de la probabilidad, existe la tentación de considerar que el estado  $|\uparrow\rangle$  representa 50% de objetos en el estado  $|\rightarrow\rangle$  y 50% en el estado  $|\leftarrow\rangle$ . Ese es un resultado probable cuando se trabaja con suficientes objetos y las observaciones se repiten muchas veces. Sin embargo, la interpretación tiene que ser aplicable a un solo objeto también. El estado  $|\uparrow\rangle$  puede estar aludiendo a un solo objeto cuántico que individualmente combina los estados  $|\rightarrow\rangle$  y  $|\leftarrow\rangle$ .

Al momento de realizar la observación de un objeto sobre la base de medición elegida, los resultados se definirán: una alineación completa con  $|\uparrow\rangle$  o con  $|\downarrow\rangle$  en ausencia de toda contradicción activa ante el observador. No obstante, cada uno de esos estados simultáneamente representa combinaciones de los estados básicos de Hadamard,  $|\rightarrow\rangle$  y  $|\leftarrow\rangle$ , que constituyen tras bambalinas una contradicción pasiva. Esto nos conduce al concepto de la superposición.

---

## Estados de superposición

Cuando un estado está representado como una combinación de otros, se dice que está en una superposición. Pese a que los resultados en la base de medición alineada con  $z$  son decididamente binarios, pues así fue elegida la base por el observador, el estado  $|\psi\rangle$  puede tener amplitudes congruentes con diferentes superposiciones posibles. La información latente en  $|\psi\rangle$  es el fundamento de la teoría cuántica de la información.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup> El sistema binario clásico alude a bits de información, codificada exclusivamente en las manifestaciones binarias 0 y 1. En contraste, el sistema cuántico alude a *qubits*, bits cuánticos, que abarcan no solamente las manifestaciones binarias en la base de medición sino también otra información contenida por  $|\psi\rangle$ .

La superposición más famosa en el ámbito de la física cuántica es el estado del gato de Schrödinger.<sup>4</sup> En el experimento hipotético, un gato se encuentra en el interior de una caja cerrada, la cual está conectada a un aparato que contiene un gas venenoso. Dicho aparato está controlado por un detector del estado de partículas, con un estado de entrada representado en la base de medición por  $|\chi\rangle$ :

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

La lectura del detector se realiza al momento de abrir la caja. Si se observa una partícula en el estado  $|\uparrow\rangle$  se libera el gas; si se detecta una partícula  $|\downarrow\rangle$  el gas no se libera. En este experimento, mientras no se abre la caja y se efectúa la observación, la partícula está en una superposición de los estados  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$  y, por ende, el gato también está en una superposición de los estados  $|\text{vivo}\rangle$  y  $|\text{muerto}\rangle$ .

---

<sup>4</sup> El experimento se propuso en Schrödinger (1935), como una crítica a la interpretación de Copenhague de la mecánica cuántica. Schrödinger buscaba demostrar que la noción de los estados de superposición según la interpretación de Copenhague tenía consecuencias absurdas. Si bien el experimento del gato de Schrödinger se popularizó como una ilustración de las extrañas consecuencias que se desprenden de la mecánica cuántica, la interpretación de Copenhague siguió siendo ampliamente aceptada entre los físicos. Sobre la interpretación de Copenhague, el lector puede consultar Howard (2004).

Dado el estado aleatorio de ingreso de la partícula al analizador SG,  $|\chi\rangle$ , la probabilidad de que el gato esté vivo al abrir la caja es  $\frac{1}{2}$ . El detalle importante para subrayar es que, antes de abrir la caja no solamente no conocemos la situación del gato, lo que sería un asunto de nuestro estado epistémico como observadores, sino que la condición del gato está realmente indeterminada ante nosotros como observadores – tal es la naturaleza ontológica de la superposición. Además, la observación cambia simultáneamente el estado epistémico del observador y la situación existencial del gato en relación con el observador.<sup>5</sup>

Trasladando el dramático ejemplo del gato de Schrödinger al contexto económico-financiero, se puede representar la dirección de movimiento del precio como la suma de las amplitudes probabilistas de las posibles ocurrencias en el espacio de medición:

$$|\text{dirección del precio}\rangle = a |\text{alza}\rangle + b |\text{baja}\rangle$$

---

<sup>5</sup> Previo a la observación, el estado del objeto se encuentra en una superposición con respecto a la base de medición. Una vez efectuada la observación, se registra una completa alineación del estado del objeto con uno de los dos estados en la base de medición. Esto solamente es posible si simultáneamente se transforman las condiciones latentes sobre otras bases.

Los dos estados en que puede encontrarse el movimiento del precio son mutuamente excluyentes, de manera similar a la que son excluyentes los estados del gato de Schrödinger.

Para simplificar la notación, podemos escribir el estado del precio usando solamente las amplitudes:

$$| \text{dirección del precio} \rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

En esta notación se ha definido implícitamente que los dos estados mutuamente excluyentes ante el observador,  $| \text{alza} \rangle$  y  $| \text{baja} \rangle$ , son vectores unitarios ortogonales en un espacio bidimensional.

En la medida en que las alzas y bajas del precio pueden representarse como superposiciones de estados sobre diferentes bases, se allana el camino para concebir el mercado como un sistema cuántico de procesamiento de información. Es importante subrayar que, en esta interpretación, el resultado observado está libre de contradicciones o errores de medición ante el observador. El precio sube o baja, claramente un resultado excluye al otro.

No obstante, el espacio de estado sigue lleno de contradicciones latentes, es decir, hay múltiples superposiciones que de forma simultánea pueden representar el resultado observado. Incluso si el movimiento percibido por el observador está siendo interpretado como resultante de una tendencia del mercado al equilibrio, tal “equilibrio” es consistente con la presencia de oposiciones latentes sobre bases alternativas.

Esto significa también que el estado del mercado,  $|\psi\rangle$ , alberga más información que la que está siendo revelada sobre la base de medición elegida por el observador.

Retornemos a lo que nos ocupa en este momento, la especificación de la notación de bras y kets como vectores. En notación vectorial los estados básicos en espacio de medición se representan por:

$$|\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En esta notación los estados en la base de Hadamard se escriben:

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

En estos casos, las amplitudes se encuentran utilizando las proyecciones de cada estado sobre los correspondientes estados básicos,  $\langle \uparrow | \psi \rangle$  y  $\langle \downarrow | \psi \rangle$ :

$$| \psi \rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \uparrow | \psi \rangle \\ \langle \downarrow | \psi \rangle \end{bmatrix}$$

Si se cambia la base, pueden aplicarse proyecciones similares usando productos escalares para encontrar las amplitudes correspondientes.

Para completar esta notación, tentativamente definimos los bras,  $\langle \uparrow |$  y  $\langle \downarrow |$ , como vectores horizontales o en fila, pues ya definimos los kets como vectores verticales o columnares. Esta definición de kets y bras aún es incompleta, pues solamente es aplicable cuando las amplitudes probabilistas son números reales. En un momento corregiremos la definición de los kets y bras, para incorporar la posibilidad de tener amplitudes complejas.

---

## Bases complejas

Considere ahora que tomamos las observaciones sobre la base de medición convencional, alineada con  $z$ . En una segunda etapa realizamos una rotación de 90 grados de nuestro ángulo de observación. Sin embargo, en esta ocasión realizamos observaciones alineadas con un eje horizontal, ortogonal a  $x$ , que podemos denominar  $y$ . En ausencia de información previa o sesgo, las observaciones alineadas con  $y$  van a estar distribuidas en dos aglomeraciones iguales. El resultado es semejante al obtenido cuando alineamos la observación en la segunda etapa con  $x$ .

Los dos estados posibles alineados con  $y$  convencionalmente se representan como  $|\cdot\rangle$  y  $|\times\rangle$ . El lector puede imaginar que estos kets entran y salen de la página. Puede intuirse que es factible representar estos estados como combinaciones de los kets básicos del espacio de medición,  $\langle\uparrow|$  y  $\langle\downarrow|$ , por lo que ahora nuestra tarea es establecer las amplitudes correspondientes:

$$|\cdot\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad |\times\rangle = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$



En ausencia de sesgos previos, las observaciones de los objetos cuánticos sobre la base de medición alineada con  $y$  se distribuyeron en partes iguales, las probabilidades de observar los estados  $|\cdot\rangle$  y  $|\times\rangle$  están dadas por:

$$|\langle \cdot | \uparrow \rangle|^2 = \frac{1}{2} \quad |\langle \times | \uparrow \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

Siguiendo un procedimiento semejante al que usamos para encontrar los kets que representan los estados alineados con  $x$ , en el caso de  $y$  podemos escribir:

$$|a|^2 = |b|^2 = |c|^2 = |d|^2 = \frac{1}{2}$$

Hasta el momento no encontramos nada nuevo, todo parece seguir un rumbo paralelo al caso del eje  $x$ . En el caso de los estados alineados con  $x$ , se usó la condición de ortogonalidad para determinar que  $b$  y  $d$  debían tener signos opuestos y que podían asignarse los valores  $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Los estados alineados con  $y$  también son ortogonales, pero no se les pueden asignar las amplitudes empleadas para los estados alineados con  $x$ . Si insistimos en asignar los mismos valores, sería imposible distinguir entre  $x$  y  $y$ .

La solución es asignar amplitudes con valores complejos. Para avanzar en esta ruta, nos vamos a asegurar de que los kets y bras que constituyen la nueva base siguen cumpliendo con los requerimientos de toda base adecuadamente definida: la base es completa, normal y ortogonal.

Recuerde el caso de un vector con elementos exclusivamente reales:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

El producto interior es  $\langle\phi|\phi\rangle = 1$ , por lo que el vector está normalizado.

Considere ahora un vector con magnitudes semejantes, pero empleando  $i = \sqrt{-1}$ :

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ -i \end{bmatrix}$$

Puede comprobarse que tal vector con elementos complejos no cumple con la condición de normalización usada hasta el momento. Sin ir muy lejos, la adopción de amplitudes complejas claramente obliga a modificar algunas de las definiciones que hemos empleado hasta el momento. Para recuperar la condición de normalización es necesario ajustar las definiciones de los bras y kets.

En adelante usaremos las siguientes definiciones de los bras y kets:

$$|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle \quad \langle\psi| = a^*\langle\uparrow| + b^*\langle\downarrow|$$

Empleando la notación vectorial – matricial:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \langle\psi| = [a^* \quad b^*]$$

En este caso, los elementos  $a^*$  y  $b^*$  representan los cónyuges complejos de  $a$  y  $b$ , respectivamente.<sup>6</sup>

La incorporación de los números complejos también tiene consecuencias importantes en la concepción del espacio que estamos usando. Hasta el momento, solamente había sido necesario concebir espacios euclidianos para representar el estado de los objetos cuánticos. El uso de número complejos representa una transición de los espacios euclidianos a una clase más general, los espacios hilbertianos o de Hilbert. Los espacios euclidianos son una clase particular de los espacios hilbertianos.

---

<sup>6</sup> Recuerde que el cónyuge complejo de  $\alpha + \beta i$  es  $\alpha - \beta i$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son números reales.

Para seguir en esta línea de análisis, defina tentativamente:<sup>7</sup>

$$|\cdot\rangle = \begin{bmatrix} e^{i\delta} a \\ e^{i\eta} b \end{bmatrix}$$

La fase absoluta de un ket que representa un estado cuántico no cambia las probabilidades de observar los estados, únicamente importa la fase relativa. Convencionalmente se asigna cero a la fase del primer elemento del ket, es decir,  $\delta = 0$ . En estas circunstancias,  $e^{i\delta} = \cos \delta + i \sin \delta = 1 + i \times 0 = 1$ . El segundo elemento sigue representándose con generalidad mediante la fase  $\eta$ .

Siguiendo estas convenciones, los kets  $|\cdot\rangle$  y  $|\times\rangle$  se representan:

$$|\cdot\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\eta} \end{bmatrix} \quad |\times\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

---

<sup>7</sup> En los siguientes párrafos tenga presente la fórmula de Euler:  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ .

Como los estados representados por  $|\cdot\rangle$  y  $|\times\rangle$  tienen que ser mutuamente excluyentes, estos deben ser ortogonales entre sí. La ortogonalidad representa una separación de fase  $\pi$  (180 grados):

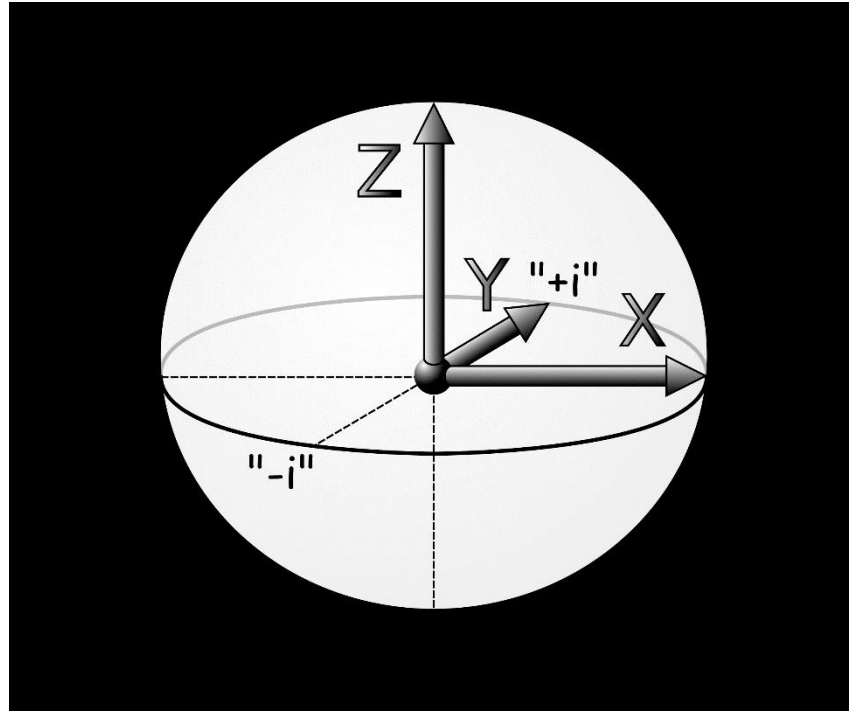
$$\eta - \theta = \pi$$

Llegando desde el ámbito de los espacios cartesianos, esto llama la atención por un breve instante, pues comúnmente asociamos la ortogonalidad con diferencias de  $\frac{\pi}{2}$  (90 grados). Sin embargo, en este sistema la ortogonalidad se asocia con  $\pi$ . Empleando dicha condición de ortogonalidad, puede precisarse la definición de los estados  $|\cdot\rangle$  y  $|\times\rangle$ :

$$|\cdot\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\eta} \end{bmatrix} \quad |\times\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -e^{i\eta} \end{bmatrix}$$

En estas definiciones aún queda por establecerse  $\eta$ . Sabemos que  $\eta = 0$  está excluido pues, si seguimos por esa vía, los kets se hacen idénticos a  $|\rightarrow\rangle$  y  $|\leftarrow\rangle$ , correspondientes a los estados alineados con el  $x$ . Con esa elección no ganamos nada con la introducción de los números complejos. Afortunadamente, hay soluciones disponibles.

El valor que garantiza el cumplimiento de la condición de ortogonalidad y que, al mismo tiempo, evita la duplicación de representaciones entre los ejes horizontales es  $\eta = \pm \frac{\pi}{2}$ .



Por ende, las definiciones convencionales de los kets correspondientes a la alineación con el eje  $y$  son:

$$|\cdot\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad |\times\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

En resumen, hemos encontrado tres bases diferentes, mutuamente ortogonales, capaces de representar cualquier estado de un objeto cuántico.

Expresadas en términos de la base de medición alineada con  $z$ , se representan:

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & |\downarrow\rangle &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ |\rightarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & |\leftarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ |\cdot\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} & |\times\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Cabe señalar que estas bases corresponden a cada uno de los ejes del sistema de coordenadas de la esfera de Bloch. Un estado arbitrario debidamente normalizado puede representarse como un punto sobre la superficie de la esfera de Bloch, usando cualquiera de las tres bases.

---

## Preguntas

1. Justifique la interpretación del cuadrado de una amplitud probabilista como la probabilidad de que un estado manifieste un resultado particular en la base de medición.
2. ¿Cuáles son las principales diferencias entre un espacio cartesiano y un espacio de Hilbert?
3. Con referencia a la base alineada con el eje  $x$ :

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + b |\downarrow\rangle \qquad |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + d |\downarrow\rangle$$

Demuestre que  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $d = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

4. Usando la fórmula de Euler, demuestre que la ortogonalidad se asocia con una separación de fase  $\pi$ .
5. Con referencia a la base alineada con el eje- $y$ , a partir de:

$$|\cdot\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\eta} \end{bmatrix} \qquad |\times\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

Demuestre que  $|\cdot\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$   $|\times\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ .

6. Compruebe que las tres bases de la esfera de Bloch son ortogonales entre sí.
7. Represente los estados  $|\cdot\rangle$  y  $|\times\rangle$  usando expansiones de Taylor.



## 2. OBSERVACIÓN Y MEDICIÓN

“Solamente cuando nos ausentamos del mundo que nos rodea, podemos acceder a la realidad auténtica de la naturaleza primaria.”

Martin Heidegger, *Historia del concepto del tiempo*.

---

### Términos

Colapso, completar la identidad, memoria, producto exterior, producto interior, superposición coherente, trayectorias de Feynman, trayectorias de interferencia

---

## Ideas

- El procedimiento denominado “completar la identidad” es la reconstrucción de la matriz de identidad al combinar las contribuciones que hace cada posible resultado en una base de medición.
- La medición sin observación equivale a “completar la identidad”, aunque el objeto queda aún en una superposición.
- La interferencia entre trayectorias impide su análisis probabilístico con independencia.
- La formulación integral de trayectorias de Feynman tiene en cuenta la interferencia.
- La observación induce el colapso del estado de un objeto cuántico a una sola de las posibilidades permitidas en la base de medición.
- El análisis clásico con independencia es posible cuando los términos de interferencia son nulos.

## Completando la identidad

En principio, el estado de un objeto es completamente desconocido antes de realizar la observación y, además, es imposible anticipar con certeza cuál será el estado tras efectuarse la observación. En esta sección vamos a indagar sobre un procedimiento que permite completar la “identidad” del estado.

Sabemos que los bras y kets solamente permiten calcular la probabilidad de obtener alguno de los resultados posibles en la base de medición seleccionada:

$$P_{\uparrow} = |\langle \uparrow | \psi \rangle|^2 \quad P_{\downarrow} = |\langle \downarrow | \psi \rangle|^2$$

Es saludable indagar más a fondo sobre lo que ocurre al momento de efectuarse una observación. El estado desconocido  $|\psi\rangle$  se representará en la base de medición como:

$$|\psi\rangle = a |\uparrow\rangle + b |\downarrow\rangle.$$

Ya se ha mencionado que las amplitudes probabilistas del estado desconocido se calculan usando los productos interiores o escalares:

$$a = \langle \uparrow | \psi \rangle \quad b = \langle \downarrow | \psi \rangle.$$

Cada uno de estos términos arroja un valor escalar resultante del producto interior bra-ket. Por ende, tenemos:

$$|\psi\rangle = \langle\uparrow|\psi\rangle |\uparrow\rangle + \langle\downarrow|\psi\rangle |\downarrow\rangle$$

$$|\psi\rangle = (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) |\psi\rangle$$

Los  $|\uparrow\rangle\langle\uparrow|$  y  $|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$  son los productos exteriores, que se multiplican en el orden opuesto al del producto interior. Además, los productos exteriores arrojan matrices en lugar de valores escalares:  $|\uparrow\rangle_{n \times 1} \langle\uparrow|_{1 \times n}$  y  $|\downarrow\rangle_{n \times 1} \langle\downarrow|_{1 \times n}$ .

La sumatoria de los productos exteriores actúa sobre  $|\psi\rangle_{n \times 1}$  y lo retorna sin cambios:

$$\sum_{i \in \{\uparrow, \downarrow\}} |i\rangle\langle i| \psi\rangle = |\psi\rangle$$

Esta es una propiedad de la matriz de identidad, por lo que se deduce que  $I = \sum_{i \in \{\uparrow, \downarrow\}} |i\rangle\langle i|$ . De allí se emplea la frase “completar la identidad” cuando se efectúa la sumatoria de los productos exteriores. Para precisar el significado de esta frase, tomemos nota de que el procedimiento no permite acceder al conocimiento completo del estado  $|\psi\rangle$ . Lo que el procedimiento “completa” es la matriz de identidad,  $I$ .

Esta es otra manera de expresar que un vector de estado es la sumatoria de las contribuciones que realiza cada ket básico en determinada base de medición. Representemos el estado desconocido como un vector  $2 \times 1$ :

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

En los próximos párrafos, tenga presente que en la particular base de medición seleccionada  $|\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  y  $\langle\uparrow| = [1 \quad 0]$ .

Ya habíamos adelantado que las observaciones cuánticas no pueden efectuarse sin perturbar el estado del objeto y que el “colapso” del estado sobre la base de medición es irreversible ante el observador. Una vez que el estado  $|\psi\rangle$  ha sido observado como  $|\uparrow\rangle$ , por ejemplo, ya no puede percibirse de otra manera. La observación de  $|\uparrow\rangle$  elimina la posibilidad de observar cualquier estado excluyente con  $|\uparrow\rangle$  en la misma base de medición.

No podemos anticipar con exactitud antes de efectuada la observación, si el efecto será equivalente a la proyección  $|\uparrow\rangle\langle\uparrow|$  como en el ejemplo, o a su alternativa en la base de medición,  $|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$ . Únicamente pueden conocerse con anticipación las probabilidades:

$$P_{\uparrow} = \langle\psi|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\psi\rangle$$

$$P_{\downarrow} = \langle\psi|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\psi\rangle$$

La interpretación exacta del “colapso” del estado ha sido motivo de controversia desde los orígenes de los métodos cuánticos. En los párrafos anteriores, hemos tenido el cuidado de reiterar que el colapso del estado ocurre con referencia al observador.

Además, el “colapso” no es equivalente a una destrucción del vector de estado  $|\psi\rangle$ . Para comprender este punto, el lector puede comprobar que  $|\uparrow\rangle$  se puede escribir como una superposición de los estados  $|\psi\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$ . Esto significa que en el estado  $|\uparrow\rangle$  también subsiste  $|\psi\rangle$ , aunque en una superposición con todo aquello que queda excluido por  $|\uparrow\rangle$ .

Esto se relaciona estrechamente con la interpretación de que el acto de observación modifica el estado de los objetos. Más precisamente, la observación modifica la representación del estado del objeto ante el observador, pues este pasa de estar en una superposición a una representación pura.

Que la observación devuelve un resultado definido, un estado puro y no una superposición de estados, se conoce como el “postulado de proyección” del paradigma cuántico.<sup>8</sup> La proyección resultante depende de la base de medición elegida, por lo que es lógico suponer que el colapso del estado ocurre con referencia al sistema constituido por el objeto, el observador y la base de medición elegida.

Esta interpretación es congruente con un proceso generador de datos que es independiente del observador y los procedimientos de medición elegidos por este: la medición no aniquila al estado  $|\psi\rangle$  ni impide que  $|\uparrow\rangle$  sea concebido como una superposición de estados. No obstante, el rol del observador es “especial” en el marco analítico cuántico.

---

<sup>8</sup> Este se conoce también como el “postulado de proyección de von Neumann” o “postulado de proyección de von Neumann – Lüders”. El lector puede dirigirse a Muynck (2008) para más información.

---

## Tres etapas de observación

En la primera etapa seleccionamos los objetos cuánticos que se han manifestado en el estado  $|\uparrow\rangle$  alineado con  $z$ , los cuales observamos sobre una base alineada con  $x$  en una segunda etapa, y de nuevo con  $z$  en la etapa final. Cada una de las operaciones de observación descritas equivale a la aplicación de los operadores de proyección que corresponden a cada resultado obtenido. Además, vamos a hacer uso de la regla de Born para encontrar las probabilidades correspondientes a las diferentes combinaciones de resultados.

En la segunda etapa tenemos dos alternativas posibles, las cuales podemos representar así:

$$P_{\leftarrow} = |\langle \leftarrow | \uparrow \rangle|^2 = \langle \uparrow | \leftarrow \rangle \langle \leftarrow | \uparrow \rangle$$

$$P_{\rightarrow} = |\langle \rightarrow | \uparrow \rangle|^2 = \langle \uparrow | \rightarrow \rangle \langle \rightarrow | \uparrow \rangle$$

Asimismo, en la tercera etapa tenemos cuatro alternativas:

$$P_{\uparrow|\leftarrow} = |\langle \uparrow | \leftarrow \rangle|^2 = \langle \leftarrow | \uparrow \rangle \langle \uparrow | \leftarrow \rangle$$

$$P_{\uparrow|\rightarrow} = |\langle \uparrow | \rightarrow \rangle|^2 = \langle \rightarrow | \uparrow \rangle \langle \uparrow | \rightarrow \rangle$$



$$P_{\downarrow|\leftarrow} = |\langle \downarrow|\leftarrow \rangle|^2 = \langle \leftarrow|\downarrow \rangle \langle \downarrow|\leftarrow \rangle$$

$$P_{\downarrow|\rightarrow} = |\langle \downarrow|\rightarrow \rangle|^2 = \langle \rightarrow|\downarrow \rangle \langle \downarrow|\rightarrow \rangle$$

Según la teoría de probabilidades clásica, cuando los eventos son independientes la probabilidad de observar el conjunto está dada por el producto de las probabilidades de observar separadamente cada uno de los eventos. Tomemos como ejemplo uno de los cuatro casos al final de la tercera etapa:

$$P_{\leftarrow} \times P_{\uparrow|\leftarrow} = |\langle \leftarrow|\uparrow \rangle|^2 |\langle \uparrow|\leftarrow \rangle|^2 = (\langle \uparrow|\leftarrow \rangle \langle \leftarrow|\uparrow \rangle) (\langle \leftarrow|\uparrow \rangle \langle \uparrow|\leftarrow \rangle)$$

En ausencia de sesgos o información previa, puede suponerse que los estados alineados con  $x$  son mezclas por partes iguales de los estados alineados con  $z$ , por lo que el producto interior entre cualquiera de estos estados es  $\sqrt{1/2}$ .

De lo anterior sigue que:

$$P_{\leftarrow} \times P_{\uparrow|\leftarrow} = \sqrt{1/2} \sqrt{1/2} \sqrt{1/2} \sqrt{1/2} = 1/4$$

Un cálculo semejante puede efectuarse para cada una de las cuatro alternativas de la tercera etapa.

Cuando el observador percibe los resultados de la segunda etapa, la probabilidad de que la lectura de la tercera etapa esté alineada con  $|\uparrow\rangle$  es  $25\% + 25\% = 50\%$ . Asimismo, la probabilidad de que la tercera lectura esté alineada con  $|\downarrow\rangle$  es  $25\% + 25\% = 50\%$ .

Por tanto, la observación de la segunda etapa, al haberse efectuado sobre una base incompatible con la primera, efectivamente “destruye” la memoria de la alineación de la primera lectura,  $|\uparrow\rangle$ . Además, las probabilidades de las trayectorias se suman como si cada trayectoria fuese independiente de la segunda a la tercera etapa.

## Medición sin observación

Ahora analicemos una vez más el experimento hipotético que permitía la combinación de las mediciones al final de la segunda etapa, sin que el observador percibiera los resultados de cada una. Aunque la observación es técnicamente posible en la segunda etapa, el observador se abstiene de realizarla. Este es el caso de la medición sin observación.

Ya vimos que la observación se asocia con el “colapso” del estado de cada objeto sobre alguno de los resultados posibles sobre la base de medición elegida. En contraste, vamos a argumentar ahora que la medición sin observación deja a los objetos en una superposición  $|\phi\rangle$ , que conserva la memoria del estado seleccionado inicialmente,  $|\uparrow\rangle$ .

Recordemos que el acto de medición se representa mediante la aplicación al estado del objeto,  $|\uparrow\rangle$ , del producto exterior  $|i\rangle\langle i|$ , empleando la correspondiente base de medición. La representación matemática de combinar tales estados es la sumatoria de los productos exteriores de las posibles mediciones. Utilizando la sumatoria de los operadores de proyección alineados con  $x$ , el estado combinado tras la segunda etapa está dado por:

$$|\phi\rangle = (|\rightarrow\rangle\langle\rightarrow| + |\leftarrow\rangle\langle\leftarrow|) |\uparrow\rangle$$

La combinación tras la segunda etapa devuelve lo que se conoce como una superposición coherente. Contando con una superposición coherente, puede calcularse la probabilidad de obtener cada resultado en la etapa final de la secuencia de operaciones.

La medición en la etapa final está alineada con la base vertical, congruente con la medición de la primera etapa. En este caso, los dos posibles resultados en la tercera etapa se representan como:

$$P_{\uparrow} = |\langle \uparrow | \phi \rangle|^2 = \left| \langle \uparrow | \sum_{i \in \leftarrow, \rightarrow} | i \rangle \langle i | \uparrow \rangle \right|^2$$

$$P_{\downarrow} = |\langle \downarrow | \phi \rangle|^2 = \left| \langle \downarrow | \sum_{i \in \leftarrow, \rightarrow} | i \rangle \langle i | \uparrow \rangle \right|^2$$

Aquí cada probabilidad se calcula como la sumatoria elevada al cuadrado de las amplitudes de las trayectorias de la segunda a la tercera etapa, considerando que en la primera etapa habíamos seleccionado los objetos en el estado  $|\uparrow\rangle$ . Al elevarse al cuadrado la sumatoria de las amplitudes se obtienen cuatro términos, dos cuadráticos y dos cruzados.

Veamos la expansión de  $P_{\uparrow}$  como un ejemplo:

$$\begin{aligned}
 P_{\uparrow} &= |\langle \uparrow | \phi \rangle|^2 = \left| \langle \uparrow | \sum_{i \in \leftarrow, \rightarrow} | i \rangle \langle i | \uparrow \rangle \right|^2 \\
 &= |(\langle \uparrow | \rightarrow \rangle \langle \rightarrow | \uparrow \rangle + \langle \uparrow | \leftarrow \rangle \langle \leftarrow | \uparrow \rangle)|^2 \\
 &= |\langle \uparrow | \rightarrow \rangle \langle \rightarrow | \uparrow \rangle|^2 + |\langle \uparrow | \leftarrow \rangle \langle \leftarrow | \uparrow \rangle|^2 \\
 &\quad + \langle \uparrow | \rightarrow \rangle^* \langle \rightarrow | \uparrow \rangle^* \langle \uparrow | \leftarrow \rangle \langle \leftarrow | \uparrow \rangle + \langle \uparrow | \rightarrow \rangle \langle \rightarrow | \uparrow \rangle \langle \uparrow | \leftarrow \rangle^* \langle \leftarrow | \uparrow \rangle^*
 \end{aligned}$$

Los términos cruzados representan la interferencia con respecto a las probabilidades clásicas. Estos no son cuadráticos y, por ende, podrían ser tanto negativos como positivos. Por tanto, cuando decimos que las amplitudes de las trayectorias se interfieren, estamos diciendo que pueden reforzarse o cancelarse entre sí en distintos puntos de una secuencia de mediciones.

En el ejemplo de los experimentos hipotéticos, los términos de interferencia refuerzan la probabilidad de que las partículas salgan alineadas con  $\langle \uparrow |$  en la tercera etapa, haciendo que tal probabilidad sume 100%, en lugar de 50% como en el caso clásico. En contraste, los términos de interferencia cancelan la probabilidad de que las partículas salgan alineadas  $\langle \downarrow |$ , por lo que tal probabilidad se reduce a 0%, en lugar de 50% como en el caso clásico. En ausencia de la observación en la segunda etapa, la tercera etapa corrobora el resultado obtenido en la primera: la completa alineación del estado con  $|\uparrow\rangle$ .

El resultado obtenido por sí mismo no debería provocarnos gran sorpresa: si el estado al final de la primera etapa era  $|\uparrow\rangle$ , ¿por qué esperar algo diferente al final de la tercera etapa? El camino recorrido para llegar a algo tan sencillo es tremendamente revelador. La robustez de la alineación original del objeto, tras sucesivas mediciones sobre una base compatible, se explica por el efecto de la interferencia. Cuando los objetos son cuánticos, hasta los más simples resultados pueden acarrear una enorme complejidad latente.

El lector puede estarse preguntando en qué consisten tales trayectorias de interferencia. Es más sencillo comprender qué significa que el objeto viaje por las trayectorias asociadas con  $\langle \uparrow | \leftarrow \rangle$  o con  $\langle \uparrow | \rightarrow \rangle$ , por ejemplo. También entendemos fácilmente qué significa que el objeto deje de seguir las trayectorias asociadas con  $\langle \downarrow | \leftarrow \rangle$  o con  $\langle \downarrow | \rightarrow \rangle$ . Pero ¿qué exactamente representan  $\langle \uparrow | \leftarrow \rangle^*$ ,  $\langle \leftarrow | \uparrow \rangle^*$ ,  $\langle \uparrow | \rightarrow \rangle^*$  y  $\langle \rightarrow | \uparrow \rangle^*$ ? Anticipamos que se hace necesario abandonar la noción del “objeto” como un sólido y comenzar a pensar en él también como una onda.

En conclusión, los eventos no necesariamente pueden tratarse como independientes para el cálculo de las probabilidades cuando los objetos son cuánticos. Es necesario adoptar un enfoque distinto, que se conoce como la formulación integral de trayectorias de Feynman, que es equivalente a efectuar una sumatoria sobre todas las trayectorias posibles, incluyendo las de interferencia.

Adicionalmente, podemos subrayar que el acto de observación acerca el comportamiento de los objetos cuánticos al paradigma clásico. En el ejemplo, las trayectorias pueden tratarse como independientes al efectuarse la observación en la segunda etapa. Puede interpretarse que el comportamiento clásico es un caso limítrofe del cuántico en el que la interferencia es anulada como resultado de la observación.

---

## Preguntas

1. Explique por qué se dice que el vector de estado “colapsa” a uno de los resultados permitidos en la base de medición, cuando se observan los resultados.
2. Explique por qué se “completa la identidad” cuando se efectúa una medición, pero el observador no realiza su lectura.
3. Compruebe que  $P_{\uparrow} = 100\%$  a partir de la expresión

$$P_{\uparrow} = \left| \langle \uparrow | \sum_{i \in \leftarrow, \rightarrow} | i \rangle \langle i | \uparrow \rangle \right|^2$$

4. Encuentre la expresión que representa  $P_{\downarrow}$  en la tercera etapa de la secuencia de operaciones, cuando no se efectúa la observación en la segunda etapa.
5. ¿Bajo qué circunstancias se anularían por completo los términos de interferencia?
6. Investigue qué es lo opuesto a una superposición coherente.



### 3. OPERADORES DE MEDICIÓN

“La estructura envolvente del mundo, es decir, su condición específica como un entorno, se define a través de tres fenómenos interrelacionados: remoción, región y orientación.”.  
Martin Heidegger, *Historia del concepto del tiempo*.

---

#### Términos

Conmutador, diagonalización, ecuación característica, función característica, matrices de Pauli, operador lineal, propiedades compatibles, propiedades incompatibles, valor característico, valor esperado, vector característico

---

## Ideas

- Para encontrar el valor de una propiedad observable, es necesario definir su correspondiente operador.
- Dicho operador se usa también para calcular el valor esperado de la propiedad.
- Un operador se representará mediante una matriz diagonal cuando sus vectores característicos coinciden con la base de medición.
- Si los vectores característicos de los operadores de medición de dos propiedades observables son ortogonales, las propiedades son incompatibles.
- Las mediciones son compatibles cuando sus operadores comparten vectores característicos, en cuyo caso los operadores son conmutativos.
- Las matrices de Pauli no son conmutativas y de allí se origina la incompatibilidad de las mediciones correspondientes.

---

## Identificación del estado

Supongamos que efectuamos una medición del estado desconocido de un objeto,  $|\psi\rangle$ , y obtenemos el resultado  $|\uparrow\rangle$ . Existen múltiples estados que pudieron dar origen a tal medición. La única certeza que tenemos es que  $|\psi\rangle$  no es exactamente  $|\downarrow\rangle$  antes de la medición, pues  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$  son mutuamente excluyentes. En el contexto cuántico, una medición elimina en definitiva los estados excluidos por una medición obtenida, sin aportar información adicional en cuanto a la identidad de  $|\psi\rangle$ .

Una posible estrategia empírica para precisar la identidad del estado de un objeto sería realizar múltiples mediciones sobre bases diferentes. Esto aportaría más información sobre el estado, aunque anticipamos que la estrategia encontrará limitaciones, debido a la posible incompatibilidad de ciertas bases de medición.

Una alternativa, menos ambiciosa que la primera, sería determinar la probabilidad de obtener ciertos resultados sobre una misma base de medición. Este tipo de estrategia arrojaría una distribución empírica de la probabilidad de obtener ciertos resultados. Sin embargo, implica que tendrían que realizarse múltiples observaciones de objetos idénticos, hasta obtener una distribución de probabilidades con un nivel de confianza satisfactorio.

Sin embargo, recordemos que las observaciones obtenidas corresponden a la proyección del estado del objeto sobre la base de medición seleccionada, pero en ningún caso son reflejos ideales del estado mismo. En la práctica, no hay garantía alguna de que sea posible conocer a plenitud el estado de un objeto cuántico.

---

## Valor esperado

Habiendo reconocido que enfrentamos algunas limitaciones epistémicas sobre el estado en sí de los objetos, procedemos a enfocarnos en las propiedades de las mediciones que efectuamos. La representación matemática de las mediciones permite deducir algunas propiedades de las distribuciones de probabilidades que podemos encontrar. Una de tales propiedades es el valor esperado de las mediciones.

Siguiendo con el ejemplo de la base de medición binaria que hemos venido presentando, puede asociarse el valor observable  $+s$  con el estado  $|\uparrow\rangle$ , y el valor  $-s$  con  $|\downarrow\rangle$ .

El valor esperado de las mediciones se representa con la notación  $\langle s \rangle$  y se calcula como:

$$\langle s \rangle = (+s)P_{\uparrow} + (-s)P_{\downarrow}$$

Como los estados  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$  son equiprobables en los experimentos hipotéticos que hemos presentado en los anteriores capítulos, el valor esperado es exactamente cero. Ya sea que se trate de un juego de azar o del espín cuántico de una partícula, “cero” no es un resultado permitido en esa base de medición. Pese a ello, es el resultado esperado matemáticamente.

La fórmula empleada para calcular el valor esperado  $\langle s \rangle$  no hace uso de los conceptos cuánticos que hemos presentado. Para cuantizar la expresión del valor esperado, las probabilidades deben expresarse usando los productos interiores:

$$\langle s \rangle = (+s)\langle \uparrow | \psi \rangle \langle \psi | \uparrow \rangle + (-s)\langle \downarrow | \psi \rangle \langle \psi | \downarrow \rangle$$

Reorganizando el orden de los factores:

$$\langle s \rangle = (+s)\langle \psi | \uparrow \rangle \langle \uparrow | \psi \rangle + (-s)\langle \psi | \downarrow \rangle \langle \downarrow | \psi \rangle$$

La anterior reorganización es factible puesto que los factores son valores escalares.

A su vez, aglutinando los  $\langle \psi |$  y  $| \psi \rangle$  obtenemos:

$$\langle s \rangle = \langle \psi | [(+s) |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + (-s) |\downarrow\rangle\langle\downarrow|] | \psi \rangle$$

El valor esperado se obtiene al ponderar los productos exteriores por los correspondientes valores observables,  $+s$  y  $-s$ .

La forma cuántica del valor esperado puede generalizarse sobre una base de medición discreta, si  $A$  es el conjunto de todos los posibles estados básicos y los  $s_i$  representan los valores de medición correspondientes a cada estado:

$$\langle s \rangle = \langle \psi | \sum_{i \in A} s_i | i \rangle \langle i | | \psi \rangle$$

Claramente, el valor esperado revela información sobre una combinación de la base de medición y el estado del objeto cuántico. Esto definitivamente no puede interpretarse como el valor esperado del estado. Además, puede ocurrir que el valor “esperado” en cierta base de medición sea un valor imposible en esa base; por ejemplo, en el modelo binario que hemos venido presentando se obtiene que  $\langle s \rangle = 0$ , pese a que los únicos valores observables son  $+s$  y  $-s$ .

## Operadores lineales

Introducimos ahora el concepto de los operadores lineales, interpretados en este contexto como operadores para la medición de las propiedades de los objetos cuánticos. El uso de operadores lineales no es exclusivo de los métodos cuánticos, pero consideramos importante brindar detalles sobre su interpretación.

Tomemos como ejemplo el valor esperado. Definamos el operador  $S_z$  de la siguiente manera:

$$S_z = [(+s) |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + (-s) |\downarrow\rangle\langle\downarrow|]$$

Retornemos a la expresión del valor esperado que encontramos previamente:

$$\langle s \rangle = \langle \psi | [(+s) |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + (-s) |\downarrow\rangle\langle\downarrow|] | \psi \rangle$$

Haciendo la sustitución en la expresión de  $\langle s \rangle$ , obtenemos:

$$\langle s \rangle = \langle \psi | S_z | \psi \rangle$$

Aquí estamos tomando  $S_z$  es un ejemplo de un operador lineal que extrae el valor medio esperado del estado sobre el que está operando.

Generalicemos el concepto. En un sistema con una base de medición discreta, un operador lineal se define como una matriz  $n \times n$  que actúa sobre un vector  $n \times 1$  y lo transforma en otro vector  $n \times 1$ .

Definamos entonces un operador general,  $\Omega$ , que actúa sobre el estado del objeto cuántico,  $|\psi\rangle$ , y lo transforma en otro estado,  $|\phi\rangle$ :

$$\Omega |\psi\rangle = |\phi\rangle$$

Por ejemplo, en un caso especial donde  $n = 2$  obtenemos:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

donde  $\Omega = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ,  $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$  y  $|\phi\rangle = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$ .

El efecto del operador  $\Omega$  sobre el vector  $|\psi\rangle$  es cambiar su dirección y magnitud, transformándolo entonces en  $|\phi\rangle$ . Por otra parte, recordemos que los operadores lineales siguen las propiedades distributivas y asociativas usuales. En este texto, resaltaremos en **negrilla** el símbolo que representa una matriz siempre que estemos empleándola como un operador que actúa sobre el estado de un objeto.



---

## Análisis característico

El análisis característico no se asocia exclusivamente con los métodos cuánticos. No obstante, el análisis característico juega un rol central la conceptualización de lo que es la medición, por lo que vale la pena comprender tempranamente su interpretación.

Cuando un operador lineal actúa sobre un vector puede cambiar tanto su magnitud como su dirección. No obstante, con cada operador lineal se asocian ciertos vectores especiales, los cuales representamos como  $\lambda_i$ , cuyas direcciones no cambian cuando el operador actúa sobre ellos. Tales vectores se conocen como vectores característicos.

Los vectores característicos del operador  $\Omega$  satisfacen la ecuación:

$$\Omega | \lambda_i \rangle = \lambda_i | \lambda_i \rangle$$

En este caso para  $\Omega$ ,  $| \lambda_i \rangle$  es un vector característico y  $\lambda_i$  es el correspondiente valor característico. El operador deja intacto el vector característico y lo asocia con un valor escalar.

Retornemos al operador  $S_z$ , que definimos con anterioridad en este capítulo. Ya establecimos que se cumple que:

$$S_z |\uparrow\rangle = +s |\uparrow\rangle \quad S_z |\downarrow\rangle = -s |\downarrow\rangle$$

De esto se desprende que los valores observables  $\pm s$  tienen que ser los valores característicos de  $S_z$ . Además, los vectores característicos que le corresponden son las bases del espacio de medición,  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$ .

En términos generales un operador aplicado al estado de un objeto cuántico extrae el valor asociado con dicho estado, que corresponde a su valor observable sobre la base de medición. Diferentes estados pueden estar asociados con diferentes valores observables, aunque las mediciones se efectúen sobre la misma base.

La matriz  $2 \times 2$ ,  $S_z$ , que satisface la ecuación del valor característico para el sistema binario alineado con  $z$ , es:

$$S_z = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Como puede comprobar el lector, el operador  $\mathbf{S}_z$  es diagonal y los elementos de la diagonal mayor corresponden a los valores característicos del operador. Esto no es un accidente.

El operador es una matriz diagonal porque sus vectores característicos coinciden exactamente con la base de medición. Puede decirse que este operador es “nativo” en esta base de medición. De lo anterior se intuye que no todos los operadores imaginables van a ser nativos en una base de medición predeterminada; en estos casos, las matrices que definen los operadores no serán diagonales.

Cabe preguntarse de qué manera se encuentran los valores característicos. Tomemos el caso de un operador arbitrario de  $2 \times 2$  al que representamos por la matriz  $\mathbf{\Omega}$ :

$$\mathbf{\Omega} | \psi_n \rangle = a_n | \psi_n \rangle$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{n,1} \\ \psi_{n,2} \end{bmatrix} = a_n \begin{bmatrix} \psi_{n,1} \\ \psi_{n,2} \end{bmatrix}$$

Esto corresponde a un sistema homogéneo de ecuaciones. Tal sistema de ecuaciones solamente tiene soluciones cuando los valores característicos satisfacen la ecuación característica:

$$\det(\boldsymbol{\Omega} - a_n \boldsymbol{I}) = 0$$

donde  $\boldsymbol{I}$  es la matriz de identidad.

---

## Matrices de Pauli

Recuerde que el observador puede elegir la base de medición. Si este decide cambiar la base de medición, algunos operadores dejarán de ser “nativos” mientras otros comenzarán a serlo. La propiedad observable asociada con cada uno de los operadores sigue siendo la misma, pero el cambio en la base de medición exige que los operadores se ajusten correctamente.

Considere otro operador,  $\boldsymbol{B}$ , que corresponde a alguna característica observable del sistema binario cuántico. Por ejemplo:

$$\boldsymbol{B} = s \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Los únicos valores observables posibles de  $\mathbf{B}$  son  $\pm s$ , como ocurrió en el caso de  $\mathbf{S}_z$ . En este caso, podemos suponer que  $\mathbf{B}$  satisface la ecuación característica:

$$\mathbf{B} | \psi_n \rangle = b_n | \psi_n \rangle$$

Para encontrar los vectores característicos de  $\mathbf{B}$ , usamos las siguientes ecuaciones:

$$s \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = +s \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad s \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = -s \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

Puede demostrarse que los vectores característicos de  $\mathbf{B}$  son:

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Además, puede demostrarse que los vectores  $|\rightarrow\rangle$  y  $|\leftarrow\rangle$  son ortogonales. De hecho, los vectores característicos de  $\mathbf{B}$  corresponden a los vectores básicos en la base de medición de Hadamard. Podemos concluir que  $\mathbf{B}$  es, en realidad, el operador  $\mathbf{S}_x$  con los valores característicos  $\pm s$ .

Ya habíamos anticipado que los operadores que no son nativos en la base de medición que se está empleando tendrán representaciones no diagonales. Como el operador  $\mathbf{S}_x$  no está siendo representado en su propia base, que sería la base de Hadamard, entonces su representación no es una matriz diagonal:

$$\mathbf{S}_x = s \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Siguiendo estas técnicas, puede demostrarse que los operadores que corresponden a un sistema binario cuántico son:<sup>9</sup>

$$\mathbf{S}_z = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_x = s \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_y = s \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

---

<sup>9</sup> De hecho, en la mecánica cuántica  $s = \frac{\hbar}{2}$ , representa una constante universal conocida. En aplicaciones financieras, nos abstenemos de atribuir a estas constantes un carácter universal. Los valores específicos que pueden adquirir estos parámetros dependen de la aplicación concreta deseada.

En la mecánica cuántica estos operadores se conocen como las matrices de Pauli. Para nuestros fines, estas matrices contribuyen a la comprensión de la manera en que funcionan los operadores lineales y su interacción con las bases de medición.

---

## Compatibilidad e incompatibilidad

Aparte de extraer los correspondientes valores observables, los operadores de medición tienen la capacidad de cambiar los estados de un objeto cuántico desde la perspectiva del observador. Ya hemos establecido que, una vez efectuada la observación sobre una base de medición, la alineación del estado con dicha base es completa.

Por tanto, las reglas que rigen a los operadores lineales, interpretados como operadores de medición, tienen que estar estrechamente relacionadas con la posibilidad o imposibilidad de realizar ciertas mediciones de forma simultánea. Esto ocurre con independencia del diseño de los procedimientos de medición.

Por la manera en que hemos introducido los métodos cuánticos, podría quedar la impresión de que no existen mediciones compatibles. Esto es el resultado de las características del sistema binario cuántico que hemos presentado hasta el momento. Dicho sistema únicamente permite la medición de dos valores mutuamente excluyentes, y la selección de bases de medición que resultan ser ortogonales entre sí.

Sin embargo, esperamos convencer al lector de que también existen mediciones compatibles en el ámbito cuántico. Un ejemplo son los precios en el mercado de distintos activos financieros. El acto de medición de un precio no tiene por qué afectar las posibilidades de conocer otros precios. La aplicabilidad de los métodos cuánticos sería muy limitada si fuese difícil o imposible encontrar mediciones compatibles.

Por suerte es posible establecer teóricamente si determinadas propiedades observables son compatibles o incompatibles al efectuar mediciones simultáneas. Para facilitar el análisis de la compatibilidad de la medición definiremos un nuevo objeto matemático denominado conmutador:

$$[A, \Omega] = A\Omega - \Omega A$$

El conmutador es la diferencia de los productos de dos matrices,  $A$  y  $\Omega$ , operadas en orden opuesto. Si el conmutador es exactamente cero, se dice que las matrices son conmutables.



Supongamos que dos propiedades cuánticas hipotéticas,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{\Omega}$ , son compatibles entre sí. Dado que son compatibles,  $[\mathbf{A}, \mathbf{\Omega}] = \mathbf{0}$ , o sea,  $\mathbf{A}\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}\mathbf{A}$ . La compatibilidad de los operadores de medición significa que el orden en el que se efectúan las mediciones es irrelevante.

Cabe preguntarse bajo qué circunstancias serán conmutables los operadores. Supongamos que el operador  $\mathbf{A}$  tiene el vector característico  $|a\rangle$  con valor característico  $a$ :

$$\mathbf{A} |a\rangle = a |a\rangle$$

Premultiplicando ambos lados de la ecuación por  $\mathbf{\Omega}$  obtenemos:

$$\mathbf{\Omega}\mathbf{A} |a\rangle = \mathbf{\Omega}a |a\rangle$$

Usando el hecho de que los operadores son conmutativos se obtiene que:

$$\mathbf{A}(\mathbf{\Omega} |a\rangle) = a(\mathbf{\Omega} |a\rangle)$$

Por otra parte, supongamos que el operador  $\Omega$  tiene el vector característico  $|\omega\rangle$  con valor característico  $\omega$ :

$$\Omega |\omega\rangle = \omega |\omega\rangle$$

Premultiplicando ambos lados de la ecuación por  $A$  obtenemos:

$$A\Omega |\omega\rangle = A\omega |\omega\rangle$$

Usando una vez más el hecho de que los operadores son conmutativos se obtiene que:

$$\Omega(A |\omega\rangle) = \omega(A |\omega\rangle)$$

Estos resultados son exactamente simétricos. La pregunta es ¿cómo interpretamos esto en el contexto de los operadores de medición?

Examinemos la simetría con mayor detalle. Si  $A(\Omega | a)) = a(\Omega | a))$ , podemos dividir ambos lados de la ecuación por el valor escalar  $k, k \neq 0$  y obtenemos:

$$A\left(\frac{1}{k}\Omega | a)\right) = a\left(\frac{1}{k}\Omega | a)\right)$$

Por tanto, sabemos que  $\frac{1}{k}\mathbf{\Omega} | a \rangle$  es un vector característico de  $\mathbf{A}$ , asociado con el valor característico  $a$ . En condiciones razonablemente generales, los valores característicos se asocian con un único vector característico, por lo que sabemos que  $\frac{1}{k}\mathbf{\Omega} | a \rangle = | a \rangle$ .

Multiplicando ambos lados de la ecuación por  $k$  obtenemos la típica ecuación característica:

$$\mathbf{\Omega} | a \rangle = k | a \rangle$$

Por tanto,  $| a \rangle$  es un vector característico de  $\mathbf{\Omega}$ . El argumento puede hacerse de manera exactamente simétrica para demostrar que  $| \omega \rangle$  es también un vector característico de  $\mathbf{A}$ . En conclusión,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{\Omega}$  son conmutables cuando comparten vectores característicos.

Como contraste, vamos a indagar sobre la naturaleza de la incompatibilidad en la medición, aprovechado que ya estamos familiarizados con los operadores asociados con el sistema binario cuántico:

$$\mathbf{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

En las anteriores expresiones hicimos la sustitución  $s = \frac{\hbar}{2}$ , para acercarnos a la notación heredada de la mecánica cuántica. No obstante, reiteramos que estas constantes no tienen una interpretación universal en aplicaciones financieras.

Sabemos que los vectores característicos de los operadores  $S_i: i \in \{x, y, z\}$  son mutuamente ortogonales, lo que garantiza que no son vectores característicos compartidos. De cualquier modo, hagamos algunas operaciones para convencernos de la incompatibilidad, considerando uno de los conmutadores, digamos  $[S_z, S_x]$ :

$$[S_z, S_x] = S_z S_x - S_x S_z$$

Haciendo las sustituciones correspondientes, obtenemos:

$$[S_z, S_x] = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Simplificando la anterior expresión:

$$[\mathbf{S}_z, \mathbf{S}_x] = \frac{\hbar^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\hbar^2}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{S}_z, \mathbf{S}_x] = \frac{\hbar^2}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\hbar^2}{4} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

En consecuencia, el conmutador de los operadores  $\mathbf{S}_z, \mathbf{S}_x$  no es exactamente  $\mathbf{0}$ . Esto comprueba que las propiedades asociadas con dichos operadores no son compatibles en la medición.

Además, es posible extraer algo interesante de la última expresión, si la multiplicamos por  $-i^2 = 1$ :

$$[\mathbf{S}_z, \mathbf{S}_x] = -i^2 \frac{\hbar^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = i\hbar \left( \frac{i\hbar}{2} \right) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = i\hbar \mathbf{S}_y$$

Lo anterior sugiere que, en el caso particular de los operadores  $\mathbf{S}_i: i \in \{x, y, z\}$ , los conmutadores de dos de los operadores serán proporcionales al tercer operador.

Cabe preguntarse si existe algún operador relacionado con los  $S_i$  que sea compatible con su medición. La respuesta es positiva. La magnitud del vector que representa el estado cuántico,  $S^2$ , es un caso prometedora de compatibilidad. Puede demostrarse que  $S^2$  es:

$$S^2 = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3\hbar^2}{4} I$$

El operador de la magnitud del vector del estado cuántico,  $S^2$ , es conmutativo con respecto a todos los  $S_i$ . De hecho,  $S^2$  es compatible con todos los operadores  $2 \times 2$  porque es un múltiplo del operador de identidad. Por definición, la operación de identidad no cambia el vector sobre el que actúa. De este modo sabemos que el valor característico asociado con el vector de estado cuántico es  $\frac{3\hbar^2}{4}$ :

$$S^2 | \psi \rangle = \frac{3\hbar^2}{4} | \psi \rangle$$

Pese a que no podemos conocer la magnitud de todos los componentes del estado  $| \psi \rangle$  de manera simultánea, es factible conocer la magnitud de uno de los componentes, así como la magnitud total del vector.

## Preguntas

1. A partir de la expresión del valor esperado  $\langle s \rangle = (+s)P_{\rightarrow} + (-s)P_{\leftarrow}$  encuentre  $S_x$ .
2. Exprese  $S_z$ ,  $S_x$  y  $S_y$  en la base de medición alineada con  $x$ .
3. Exprese  $S_z$ ,  $S_x$  y  $S_y$  en la base de medición alineada con  $y$ .
4. ¿Cómo puede estar seguro de que los vectores característicos de  $S_z$ ,  $S_x$  y  $S_y$  son ortogonales?
5. ¿Cuáles son las consecuencias de la ortogonalidad de los vectores característicos de  $S_z$ ,  $S_x$  y  $S_y$  para la observación alineada con los diferentes ejes?
6. Usando los conmutadores  $[S_z, S_y]$  y  $[S_x, S_y]$ , demuestre que los operadores no son compatibles.
7. Inspeccione las expresiones de todos los conmutadores  $[S_z, S_x]$ ,  $[S_z, S_y]$  y  $[S_x, S_y]$ . En lugar de  $0$ , los conmutadores tienen una estructura determinada. ¿Cómo describiría usted dicha estructura?
8. Compruebe que  $S^2$  es conmutativo con respecto a todos los  $S_i$ .

## 4. DUALIDAD

“¿Qué significa realmente “aquí y ahora”? ... La pertenencia a un lugar es la pertenencia a una región y la determinación de esa pertenencia a ese lugar depende de lo que nos ocupa...”

Martin Heidegger, *Historia del concepto del tiempo*.

---

### Términos

Amplitud probabilista, densidad de probabilidad, ecuación de Maxwell, función de onda



---

## Ideas

- El análisis de ondas tiene larga tradición en economía y finanzas, paralelamente a la concepción de los precios como partículas. La dualidad onda-partículas no es particularmente novedosa en economía. En el enfoque clásico, las ondas se ubican en el espacio de observación.
- El análisis cuántico tiene ondas deterministas en el espacio de estado, mientras en el espacio de observación se proyectan probabilidades. Las ecuaciones de Maxwell se trasladan del espacio de medición al de estado. Se abandona la parametrización clásica en términos de longitud de onda y frecuencia angular, y se adoptan como alternativas los estados energéticos y el momento.
- En el espacio de estado, el nivel energético toma el lugar de la frecuencia angular, mientras el momento ocupa el lugar de la longitud de onda. Para pasar del espacio de estado al de medición, se hace uso de operadores lineales asociados con distintas propiedades observables.
- La aplicación de operadores a la función de onda suele resultar en ecuaciones diferenciales con la forma de ecuaciones características. Las probabilidades en el espacio de observación están sujetas a interferencia, constructiva y destructiva, originada en la conducta de la función de onda.

En el enfoque clásico ha sido usual tratar los precios en el mercado como si fuesen partículas; no obstante, dentro del marco clásico también se han analizado los precios mediante descomposiciones en ciclos con distintas frecuencias y amplitudes. En este último enfoque, el comportamiento observado de los precios resulta de una superposición de ondas.<sup>10</sup>

El teorema de la descomposición espectral sostiene que un proceso con varianza-covarianza estacionaria,  $Y_t$ , puede representarse como la sumatoria:

$$Y_t = \mu + \int_0^\pi [\alpha(\omega) \cos(\omega t) + \delta(\omega) \sin(\omega t)] d\omega$$

En la anterior representación, la frecuencia es  $\omega \in [0, \pi]$  y los procesos aleatorios  $\alpha(\omega)$  y  $\delta(\omega)$  tienen media cero. Esto último garantiza que la media de  $Y_t$  es  $\mu$ .

---

<sup>10</sup> Para más información sobre el dominio de la frecuencia, el lector puede referirse al Capítulo 6 de Hamilton (1994).

Por tanto, en el marco clásico la conducta de los indicadores financieros se ha concebido tanto como un movimiento de partículas, como el resultado de una interacción de ondas. La dualidad en las representaciones formales corresponde a las alternativas del análisis en el dominio del tiempo, por una parte, o en el dominio de la frecuencia, por otra. Aunque es relativamente menos conocido que el análisis en el dominio del tiempo, el análisis en el dominio de la frecuencia tampoco es novedoso en el paradigma clásico.

Sin embargo, la transición al enfoque cuántico conlleva una reinterpretación importante de las ondas con respecto al tratamiento clásico de las series temporales. En el análisis clásico del dominio de la frecuencia las ondas habitan el espacio de observación. En contraste, en el paradigma cuántico, las ondas habitan el espacio de estado como procesos completamente deterministas, aunque proyectan ondas probabilistas sobre el espacio de medición.

Es importante subrayar que el comportamiento probabilista en el espacio de observación no es causado por el comportamiento de un objeto cuántico como una onda. La interpretación más acertada es que las ondas en el espacio de estado, pese a ser deterministas, se traducen en ondas probabilistas en el espacio de observación. Como se ha enfatizado previamente, el comportamiento probabilista en el espacio de observación es una característica fundamental del enfoque cuántico, el cual se manifestará incluso en ausencia de estructuras sinusoidales.

---

## Ecuación de Maxwell clásica

Para comprender el comportamiento de las ondas a partir del enfoque clásico recurrimos a una de las conocidas ecuaciones de Maxwell, que describe el movimiento del campo de una onda,  $\mathcal{W}$ , en una dirección en el espacio:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{W} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{W}$$

En física  $c$  es la velocidad de la luz, una de las constantes universales más famosas. Al trasladar estas ecuaciones al entorno económico-financiero, heredamos la notación convencional pero no le atribuimos a  $c$  el carácter de una constante universal. En la anterior ecuación,  $c$  es una constante que asegura que las unidades de medición de ambos lados de la ecuación están balanceadas.

Tomemos un momento para analizar la estructura general de la ecuación de Maxwell. El lado izquierdo de la ecuación es una derivada de segundo orden con respecto a la posición, mientras el lado derecho es una derivada de segundo orden con respecto al tiempo. La posición y el tiempo se interrelacionan en términos más o menos simétricos en la ecuación clásica de Maxwell.

El lector puede estarse preguntando por qué subrayamos este último punto, que es sencillo de evidenciar por una inspección de la fórmula. La razón es que más adelante encontramos uno de los pilares de los métodos cuánticos, la ecuación de Schrödinger. En la ecuación de Schrödinger la posición y el tiempo se interrelacionan asimétricamente. La asimetría en los métodos cuánticos otorga al tiempo una cualidad diferente a las otras dimensiones del espacio.

Retornemos a la ecuación de Maxwell. Puede demostrarse que dicha ecuación tiene como solución general:

$$\mathcal{W} = A \exp[i(kx - \omega t)]$$

La solución de la ecuación de Maxwell hace uso de la fórmula de Euler,  $\exp[ir] = \cos r + i \sin r$ . La solución representa la propagación de una onda plana en una sola dimensión, con frecuencia angular,  $\omega$ , y longitud de onda,  $k$ . Por su parte,  $A$  representa la amplitud de la onda, mientras que  $t$  representa el tiempo.

---

## Ecuación de Maxwell cuántica

La versión clásica de la ecuación de Maxwell está parametrizada por la frecuencia y la longitud de onda. En la adaptación de la ecuación al método cuántico, necesitamos adecuar la parametrización.

En la forma cuántica de la ecuación de Maxwell, se reemplazan los parámetros clásicos de longitud de onda y frecuencia, con los parámetros empleados en los métodos cuánticos, el momento,  $p$ , y la energía,  $E$ :

$$E = \hbar\omega \qquad p = \hbar k$$

La energía es directamente proporcional a la frecuencia, mientras que el momento lo es con respecto a la longitud de onda. Heredamos la notación de la física, por lo que la constante de Planck,  $h$ , se sustituye por su versión “reducida”,  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ . Esto se hace para simplificar la relación entre la energía y el momento, por una parte, con la frecuencia angular y la longitud de onda, por otra.

Dentro del contexto económico-financiero, basta considerar que existe algún coeficiente con las unidades de medición adecuadas para relacionar la energía con la frecuencia angular, y el momento con la longitud de onda. En aplicaciones económico-financieras, a diferencia de la física, no atribuimos a  $h$  o  $\hbar$  un carácter universal.

Haciendo las sustituciones correspondientes, la solución a la ecuación de Maxwell adaptada al ámbito cuántico se expresa:

$$\mathcal{W} = A \exp \left[ i \frac{(px - Et)}{\hbar} \right]$$

Sustituyendo la versión cuantizada de la solución,  $\mathcal{W}$ , en la ecuación de Maxwell, obtenemos:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A \exp \left[ i \frac{(px - Et)}{\hbar} \right] = 0$$

Aplicando primero el operador de la derivada de segundo orden con respecto a la posición, correspondiente al primer término:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A \exp \left[ i \frac{(px - Et)}{\hbar} \right] = -\frac{1}{\hbar^2} p^2 A \exp \left[ i \frac{(px - Et)}{\hbar} \right]$$

A continuación, aplicamos el operador de la derivada de segundo orden con respecto al tiempo, correspondiente al segundo término:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A \exp \left[ i \frac{(px - Et)}{\hbar} \right] = \frac{1}{c^2} \frac{1}{\hbar^2} E^2 A \exp \left[ i \frac{(px - Et)}{\hbar} \right]$$

Haciendo las sustituciones y agrupando los términos, la ecuación queda:

$$-\frac{1}{\hbar^2} \left( p^2 - \frac{E^2}{c^2} \right) A \exp \left[ i \frac{(px - Et)}{\hbar} \right] = 0$$

La anterior ecuación tiene que cumplirse siempre, por lo que se hace necesario que  $p^2 - \frac{E^2}{c^2} = 0$ . De esta forma, la función de onda cuántica pueda satisfacer la ecuación de Maxwell en todo momento. Esto significa que hay una relación exacta entre la energía y el momento:

$$E = pc$$



Para finalizar la transición al tratamiento cuántico, se representará el estado de un objeto cuántico mediante la función de onda,  $\psi$ , dependiente del tiempo y la posición:

$$\mathcal{W} = \psi(x, t) = A \exp \left[ i \frac{(px - Et)}{\hbar} \right]$$

Lo más significativo de esto no es el cambio de notación como tal, sino que el cambio visibiliza en qué espacio se están constituyendo las ondas — estas se constituyen en el espacio de estado.

Por tanto, la versión cuantizada de la ecuación de Maxwell puede escribirse de estas dos maneras:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(x, t) &= 0 \\ -\frac{1}{\hbar^2} \left( p^2 - \frac{E^2}{c^2} \right) \psi(x, t) &= 0 \end{aligned}$$

En estas versiones de la ecuación de Maxwell, el estado del objeto cuántico está siendo representado como una función de onda  $\psi(x, t)$  en el espacio de estado. Esta función contiene toda la información pertinente sobre el objeto, incluyendo su energía y su momento.

En el estudio del sistema binario cuántico utilizamos repetidamente  $\psi$  para indicar el estado del objeto, reiterando que era desconocido para el observador. Esta es la primera ocasión en la que damos una definición más precisa de la conexión entre el estado del objeto, por una parte, y su ubicación en el espacio y el tiempo, por otra.<sup>11</sup>

Siendo una representación del estado del objeto, la función de onda puede emplearse para extraer información sobre las propiedades observables. Por ejemplo, para extraer el momento del objeto se utiliza el operador:

$$\mathbf{p} = -i \hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

Es sencillo demostrar que:

$$-i \hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) = p \psi(x, t)$$

---

<sup>11</sup> Para simplificar la notación, hemos utilizado una sola dimensión del espacio,  $x$ , aunque estas ecuaciones se generalizan a un número superior de dimensiones.

La estructura de esta ecuación diferencial es paralela a las ecuaciones del valor característico. No obstante, hay que interpretar esto dentro del contexto, pues la función de onda  $\psi(x, t)$  no está siendo representada como un ket de estado.

También es posible representar la función de onda usando la notación,  $|\psi(x, t)\rangle$ , pero no es lo que hemos hecho. La posibilidad de tener representaciones alternativas existe, la elección de cuál utilizar depende de la conveniencia.

La presencia de  $i$  en el lado izquierdo de la ecuación revela otro punto importante: en general las funciones de onda pueden tener valores complejos. En contraste, las propiedades observables, como  $p$ , siempre tienen valores reales.

Otro aspecto para resaltar es la relación entre la probabilidad y amplitud de onda. Aplicando la regla de Born, obtenemos la proporción:

$$\text{Densidad de probabilidad} \propto |\psi(x, t)|^2$$

En este contexto, nos referimos a  $\psi(x, t)$  como la amplitud probabilista en la posición  $x$  y el período  $t$ . Siguiendo a Born, podemos decir que existen ondas probabilistas proyectadas sobre el espacio de observación. Para convencernos de que realmente tenemos un comportamiento probabilista sinusoidal, usamos la ecuación de Euler y hacemos las correspondientes sustituciones, para obtener la ecuación:

$$|\psi(x, t)|^2 = A^2 \left| \left[ \cos\left(\frac{px - Et}{\hbar}\right) + i \sin\left(\frac{px - Et}{\hbar}\right) \right] \right|^2$$

La anterior ecuación visibiliza el carácter ondulante de las probabilidades en el espacio de observación.

Aplicando estos conceptos al ámbito financiero, si  $x$  es un precio o su logaritmo, la probabilidad de encontrarlo en una región determinada y en un momento particular puede ser baja o elevada. Esto no resulta particularmente sorprendente cuando se trata de los precios en un mercado, pues el precio no queda definido en tanto no se concrete una transacción. Antes de esa concreción, el precio “es” una onda probabilista que depende del tiempo.

Más adelante veremos la formalización del colapso de la función de onda y la definición del operador de posición. El acto de cerrar la transacción equivale a realizar una observación que colapsa la función de onda del precio a un valor específico, desde el punto de vista de los agentes que participaron en

la transacción. A partir de ese instante, ante ellos el precio se asemeja a una partícula. De allí la famosa dualidad onda-partícula en los métodos cuánticos.

Al principio de este capítulo mencionamos que el tiempo es una dimensión anómala en comparación con las dimensiones espaciales. La asimetría aludida no se evidencia en la función de onda que derivamos en este capítulo. Pese a que  $|\psi(x, t)|^2$  describe una onda probabilista proyectada sobre el espacio de observación, aún no sabemos cómo evoluciona dicha onda a través del tiempo. En la terminología económica, podría decirse que dicha expresión sigue siendo “estática”. Pese a ello, hemos incluido un índice  $t$ , anticipando que tal función no necesariamente es constante al través del tiempo. Tendremos que esperar hasta encontrar la ecuación de Schrödinger para sacar algunas conclusiones sobre comportamientos dinámicos.

---

## Preguntas

1. Con referencia al operador de momento,  $\mathbf{p}$ , demuestre que:

$$-i \hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) = p \psi(x, t)$$

Explique detalladamente por qué se dice que esta ecuación diferencial tiene la forma de una ecuación de valor característico.

2. Expanda la función de onda  $\psi(x, t) = A \exp \left[ i \frac{(px - Et)}{\hbar} \right]$  usando la fórmula de Euler,  $e^{ir} = \cos r + i \sin r$ .
3. Use la relación  $E = pc$  para eliminar  $p$  en la expansión de la función de onda  $\psi(x, t)$  obtenida en la pregunta anterior. ¿Puede identificar cuándo ocurren los máximos y mínimos de la función de onda?
4. Reconociendo que la densidad de probabilidades en el espacio de observación es proporcional a la amplitud probabilista en el espacio de estado, ¿cómo describiría usted el comportamiento de las probabilidades de observación?

## 5. PROPIEDADES CONTINUAS

“...la cercanía no es nada sino una remoción distintiva que se encuentra disponible en un orden temporal particular.”

Martin Heidegger, *Historia del concepto del tiempo*.

---

### Términos

Función Dirac-delta, incertidumbre en la posición y el momento, superposición continua, superposición discreta, transformación de Fourier, transformación de Fourier inversa, variables cónyuges

---

## Ideas

- Las propiedades continuas se asocian con un número infinito de posibles estados, no necesariamente por el rango de variación de la propiedad, sino porque así lo exige la continuidad.
- El precio es una propiedad continua localizada en el espacio, que puede extraerse usando el operador de medición del precio.
- La función Dirac-delta se usa para asegurar que la función característica de la posición sea localizada una vez efectuada la observación.
- El movimiento del mercado también es una propiedad continua, aunque se encuentra dispersa en el espacio de precios.
- Si se conocen las condiciones del movimiento del mercado, no puede decirse nada sobre el precio, ni viceversa.
- La condición de variables cónyuges origina la incertidumbre entre el precio y el movimiento del mercado.
- Las variables cónyuges evolucionan conjuntamente, pero lo hacen de manera probabilista y no determinista.



---

## De lo discreto a lo continuo

Hasta este momento habíamos explorado las propiedades discretas de los objetos cuánticos. Ahora vamos a dirigir nuestra atención a las propiedades continuas. Esto no significa que comenzamos el análisis desde cero, pues el conocimiento adquirido en torno a las propiedades discretas será de gran utilidad.

La principal diferencia entre las propiedades discretas (por ejemplo, el alza y baja del precio) y las continuas (un precio o su logaritmo), es que en este último caso el número posible de estados en la base de medición es infinito. Un mercado cuántico que manifiesta una propiedad continua como el precio, requiere un número infinito de posibles vectores característicos, los que representaremos como  $|v_i\rangle$ . Cada uno de los  $|v_i\rangle$  es un estado en básico y, por ende, tiene asociada una amplitud.

Es importante reflexionar sobre las implicaciones de esto. Usualmente, pensamos que las propiedades de un mercado deben tener un valor particular y que la propiedad “está” en esa ubicación. El paradigma cuántico obliga a pensar en los mercados de otra manera, pues el valor concreto de una propiedad es resultado del acto de medición. Antes de ello la propiedad del mercado se describe más apropiadamente como una onda probabilista.

Una característica crucial de una propiedad mensurable es que, una vez que se ha efectuado una observación, la propiedad solamente puede tener un valor a la vez. Es decir, la propiedad está completamente localizada en su propio espacio de medición después de la observación. El lector podrá asociar esta idea con el postulado de proyección mencionado en el Capítulo 4.

---

## Base de medición continua

Como recordará el lector del análisis del sistema cuántico binario, incluso cuando se ha realizado una observación y se tiene un resultado en alguna de las bases de medición, siempre es posible representar el estado del mercado como una superposición. El concepto puede aplicarse también en el caso de propiedades continuas.

Recordemos algunos conceptos que vimos en el análisis del sistema binario cuántico. En dicho sistema, es sencillo expresar el estado como un vector cuyos elementos son las amplitudes asociadas con la base de medición,  $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$ . Lo anterior es equivalente a una representación mediante las proyecciones o productos interiores,  $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \langle \uparrow | \psi \rangle \\ \langle \downarrow | \psi \rangle \end{bmatrix}$ . Asimismo,  $|\psi\rangle$  puede expresarse como una sumatoria de las bases de medición ponderadas por las amplitudes correspondientes,  $|\psi\rangle =$

$$\sum a_i |i\rangle = a_0 |\uparrow\rangle + a_1 |\downarrow\rangle.$$

Si tenemos un número infinito de vectores básicos en una base de medición discreta, la superposición tendría la forma:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} a_i |v_i\rangle$$

Esta superposición no puede representarse y manipularse como un vector típico, pues no es posible enumerar por completo sus elementos.

A continuación, abordamos el reto de encontrar la representación de una superposición  $|\psi\rangle$  cuando las bases de medición son continuas. Un espacio continuo lo es hasta la medición más pequeña posible, por lo que se requiere una herramienta que permita realizar una sumatoria de las amplitudes cuando las diferencias entre los  $|v_i\rangle$  se tornan infinitesimalmente pequeñas. Para ello, haremos uso de una adaptación del concepto de “completar la identidad” que presentamos con anterioridad.

En el caso binario, para completar la identidad escribimos:

$$|\psi\rangle = \sum_{i \in \{\uparrow, \downarrow\}} |i\rangle \langle i | \psi \rangle$$

Para completar la identidad cuando la base de medición es continua se usa una integral:

$$|\psi\rangle = \int dv_i |v_i\rangle \langle v_i | \psi \rangle$$

Tenemos entonces una expresión del ket del estado del mercado como una superposición, resultante de la sumatoria de las contribuciones que hacen cada una de las proyecciones del estado sobre los estados básicos de la base de medición.

Definamos ahora una función que retorna la amplitud de onda correspondiente a uno de los estados en la base de medición:

$$\langle v_i | \psi \rangle \equiv \psi(v_i)$$

La notación se presta para alguna confusión en este punto, por lo que vale reiterar que  $\psi(v_i)$  definitivamente no es el estado del mercado como tal, aunque sin duda depende del estado. El estado aún está siendo representado por el ket  $|\psi\rangle$ , como una superposición.

La función de amplitud de onda,  $\psi(v_i)$ , puede interpretarse como el límite de una función discreta de las amplitudes proyectadas sobre cada estado básico. Sobre una base discreta, podemos enumerar los valores que toma la función de amplitud de onda,  $\{\langle v_{i_1} | \psi \rangle, \langle v_{i_2} | \psi \rangle, \dots, \langle v_{i_n} | \psi \rangle\}$ . Como estamos en el caso continuo y cada  $|v_{i_i}\rangle$  constituye un estado básico en la base de medición, tenemos un número infinito de proyecciones cuyo valor está dado por  $\psi(v_i)$ .

Aún no establecemos a qué propiedad corresponde el valor  $v_i$  en la función  $\psi(v_i)$ , pues únicamente hemos dicho que es una propiedad continua. Para extraer información sobre una propiedad necesitamos hacer uso de los operadores de medición, a partir de la ecuación del valor característico, que conecta el operador con un valor observable.

La primera propiedad continua que vamos a investigar es el precio o su logaritmo. El tratamiento formal que presentaremos refleja dos características claves de dicha propiedad. Por una parte, su base de medición es continua y, por otra parte, la propiedad está completamente localizada en el espacio después de efectuada la observación.

---

## Propiedades localizadas

Definamos el operador  $\mathbf{x}$ , representado en negrilla, como el operador que extrae el logaritmo del precio a partir de la función de amplitud de onda. Dado que la función de amplitud de onda es continua, se utilizará el término “función característica”, en lugar de aludir a un “vector característico” como hicimos en el caso discreto.

Recordemos que antes de efectuar una medición existe un número infinito de posibles precios que pueden extraerse. Estos son los valores característicos en la ecuación característica. En tanto no se haya realizado una observación, no se conoce con certeza el valor que extraerá el operador  $\mathbf{x}$  dado que el objeto se encuentra en la superposición  $|\psi\rangle$ .

Suponga que una primera medición empleando el operador  $\mathbf{x}$  retorna el valor característico  $x_0$ . A partir de este punto la función característica queda “parametrizada” por  $x_0$ , en el sentido de que la observación modificó el estado del mercado ante el observador. Para identificar la función característica tras la observación, usamos la notación  $\psi_{x_0}(x)$ . En este momento aún no sabemos qué forma específica tiene dicha función, aunque sin duda depende de la lectura obtenida,  $x_0$ .

Note que expresamos la función de onda o función característica como  $\psi_{x_0}(x)$  en lugar de  $\psi(x_0)$ . Esto se hace para evidenciar que continuamos tratando a  $\psi_{x_0}(x)$  como una función de  $x$ , por lo que no necesariamente es una constante. Como comprobaremos unos párrafos más adelante,  $\psi_{x_0}(x)$  puede evaluarse en  $x \neq x_0$ .

Por tanto, la función característica del logaritmo del precio, parametrizada por  $x_0$ , satisface la ecuación:

$$x \psi_{x_0}(x) = x_0 \psi_{x_0}(x)$$

Cabe agregar que, después de efectuada la observación y desde el punto de vista del observador, el mercado ya no se encuentra en la superposición  $|\psi\rangle = \int dx_i |x_i\rangle \langle x_i | \psi\rangle$ , sino que se encuentra en el estado  $|x_0\rangle$ .

Indaguemos más a fondo sobre la particular forma que adquiere la función característica una vez efectuada una observación. Para ello, reorganizamos la ecuación característica de la siguiente manera:

$$(x - x_0) \psi_{x_0}(x) = 0$$

Sabemos que el logaritmo del precio es una propiedad que queda completamente localizada en su propio espacio, pues es imposible que un mercado se manifieste al observador simultáneamente en dos posiciones. Las transacciones se cierran a un solo precio. Por tanto, si  $x \neq x_0$ , necesariamente  $\psi_{x_0}(x) = 0$ .

Para satisfacer ese requerimiento podemos aplicar un tipo especial de función, una función de impulso conocida como Dirac-delta:

$$\psi_{x_0}(x) = \delta(x - x_0)$$

La función Dirac-delta, con parámetro  $x_0$  adquiere un valor cero evaluada en cualquier valor  $x$  excepto en  $x_0$ . Esta función de impulso aparenta una sencillez que realmente no posee.

Para fines de esta exposición, nos concentraremos en las siguientes propiedades de la función Dirac-delta:

$$\delta(x - x_0) = 0; \quad x \neq x_0$$

$$\int_{x_0 - \epsilon}^{x_0 + \epsilon} dx \delta(x - x_0) = 1; \quad \epsilon > 0$$



$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} dx f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0); \varepsilon > 0$$

El valor de  $\delta(x - x_0)$  en  $x_0$  queda indefinido, o puede considerarse  $\infty$ .

El uso de esta peculiar función como función característica obedece a que el precio manifestado en un mercado está completamente localizado en su propio espacio de medición, una vez que se ha realizado la observación. Si un objeto se manifestó en  $x_0$ , su estado es  $|x_0\rangle$  y la función de onda, después de la observación, tiene que estar completamente localizada allí. Pese a que no podemos observar directamente la función característica  $\psi_{x_0}(x)$ , podemos deducir la forma que tiene después de la observación.

Las propiedades de la función Dirac-delta pueden explotarse más ampliamente para caracterizar los precios en los mercados. Dado que un mercado solamente se manifiesta sobre uno de los estados básicos de posición  $|x_i\rangle$  a la vez, la proyección sobre  $\langle x_j |$  tiene que ser cero a menos que  $i = j$ :

$$\langle x_j | x_i \rangle = \delta(x_j - x_i)$$

Esto es buena noticia, pues confirma que los estados básicos del logaritmo del precio se comportan como esperamos que se comporten las bases de medición, al ser mutuamente ortogonales.

---

## Probabilidades de observación

Hemos mencionado que un mercado cuántico puede encontrarse en una superposición de estados, previo a la observación del precio tras una transacción. Antes de la transacción, solamente se sabe que el objeto tiene alguna probabilidad de ubicarse en determinada posición. Las herramientas presentadas en este capítulo nos servirán para precisar dicha probabilidad.

Recordemos que en el caso de una propiedad discreta y siguiendo la regla de Born, la probabilidad de obtener determinado resultado en una medición es la norma cuadrática de la proyección del estado sobre la base de medición. Por ejemplo,  $P_{\uparrow} = |\langle \uparrow | \psi \rangle|^2$ . En los siguientes párrafos haremos uso de la regla de Born, aunque en el caso continuo la norma cuadrática arrojará una densidad de probabilidad, en lugar de una probabilidad.

Consideremos  $\langle x_0 | \psi \rangle$ , la proyección de la superposición  $|\psi\rangle$  sobre el estado básico de medición  $|x_0\rangle$ . Como la función de amplitud de onda antes de una observación es continua y la base de medición tiene un número infinito de posibles estados básicos, el producto interior que se usa es la integral:

$$\langle x_0 | \psi \rangle = \int dx_i \langle x_0 | x_i \rangle \langle x_i | \psi \rangle$$

Esta integral puede simplificarse aplicando la información de que el precio o su logaritmo es una propiedad totalmente localizada en su propio espacio, es decir, si una transacción se cierra en el mercado en el estado  $|x_0\rangle$ , este solamente puede encontrarse en la posición  $x_0$ . La amplitud probabilista de observar la manifestación del mercado a un precio distinto en la misma transacción es exactamente cero.

Por tanto, aplicamos la función Dirac-delta en torno a  $x_0$ :

$$\langle x_0 | x_i \rangle = \delta(x_0 - x_i)$$

Sustituyendo en la integral de  $\langle x_0 | \psi \rangle$  la función Dirac-delta a cambio de  $\langle x_0 | x_i \rangle$ , y expresando  $\langle x_i | \psi \rangle$  con la notación alternativa de la amplitud de onda,  $\psi(x_i)$ :

$$\langle x_0 | \psi \rangle = \int dx_i \delta(x_0 - x_i) \psi(x_i)$$

Dado que la función Dirac-delta filtra la función en la integral, esta se simplifica al valor que tiene la función de amplitud de onda evaluada en  $x_0$ :

$$\langle x_0 | \psi \rangle = \psi(x_0)$$

Encontramos que la función de amplitud de onda es equivalente a la proyección del estado del mercado,  $|\psi\rangle$ , sobre la base de medición del logaritmo del precio,  $\langle x_0 |$ , teniendo en cuenta que el estado aún puede estar en una superposición y que la posición tiene que estar completamente localizada en su propio espacio de medición.

En este punto el lector puede legítimamente preguntarse cuál es la diferencia entre la expresión  $\langle v_i | \psi \rangle \equiv \psi(v_i)$  del inicio del capítulo y la expresión  $\langle x_0 | \psi \rangle = \psi(x_0)$  que acabamos de encontrar. La diferencia no es trivial. La primera expresión contribuye a completar la identidad del estado del mercado, representado como una superposición sobre alguna base continua de medición, aunque sin aludir a una propiedad específica. En contraste, la segunda expresión alude concretamente a los precios en el mercado sobre su propia base de medición. La relevancia de esta distinción se aclarará en la segunda mitad del capítulo, que trata de propiedades que quedan dispersas en el espacio.

Retornando al cálculo de las probabilidades, podemos aplicar la regla de Born para encontrar la probabilidad de observar una transacción en el mercado exactamente al logaritmo del precio  $x_0$  a partir de  $|\langle x_0 | \psi \rangle|^2 = |\psi(x_0)|^2$ . Recordemos que la teoría de probabilidades requiere que la

sumatoria de las probabilidades de todas las observaciones posibles debe ser exactamente igual a 1. Esto implica que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 = 1$$

Como la distancia infinitesimal  $dx$  tiene unidades de dimensión y una probabilidad no puede tener unidades de dimensión,  $|\psi(x)|^2$  tiene que ser una función de densidad de probabilidades cuyas unidades son el recíproco del logaritmo del precio. Habiendo precisado este punto, concluimos que  $P(x = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} dx |\psi(x)|^2 = 0$ .

Como  $|\psi(x)|^2$  es una densidad de probabilidades, podemos calcular la probabilidad de observar el mercado en un rango cercano a  $x_0$ ,  $[x_0 - a, x_0 + b]$  donde  $a, b > 0$ :

$$P(x_0 - a < x < x_0 + b) = \int_{x_0 - a}^{x_0 + b} dx |\psi(x)|^2 = 0$$

En el paradigma clásico se emplea extensamente el concepto de la densidad de probabilidades para trabajar con variables aleatorias continuas. Lo divergente del enfoque cuántico es que la densidad de probabilidades está siendo generada por una función de amplitud de onda,  $\psi(x)$ , que depende del estado del mercado.

Precisando las implicaciones de esto, en el paradigma clásico el proceso generador de datos habita el espacio de observación y responde a parámetros que son, al menos en principio, accesibles desde dicho espacio. En contraste, en el paradigma cuántico el proceso generador de datos depende del estado que, sin embargo, no es plenamente accesible desde el espacio de observación.

---

## Propiedades dispersas

Habíamos anticipado que no todas las propiedades tienen que estar completamente localizadas en el espacio de precios. Específicamente, vamos a obtener una expresión para las condiciones de movimiento del mercado y encontraremos que esta propiedad se encuentra dispersa.

Al igual que hicimos con la extracción del logaritmo del precio, usaremos un operador lineal para la medición de las condiciones del movimiento. Representaremos dicho operador como  $\mathbf{p}$ , en negrilla,

para distinguirlo de los valores característicos extraídos. En este caso, aplicamos el operador de momento empleado en el contexto de las ondas clásicas:  $\mathbf{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ . Suponemos que el valor escalar  $p_0$  es el valor característico que resultó de la medición.

Además,  $\psi_{p_0}(x)$  representará la función característica parametrizada por  $p_0$ . Destacamos en este punto que  $\psi_{p_0}(x)$  no es lo mismo que  $\langle p_0 | \psi \rangle \equiv \psi_{p_0}(p)$ . Si a partir de ahora empleáramos  $\psi_{p_0}(p)$ , el resultado sería exactamente paralelo al obtenido con el logaritmo del precio del objeto, ya que las condiciones del movimiento tienen que quedar completamente localizadas en su propio espacio de medición. Usamos  $\psi_{p_0}(x)$  porque queremos investigar la interrelación del movimiento del mercado con el espacio de precios.

Siguiendo esta notación, la ecuación del valor característico se escribe:

$$\mathbf{p} \psi_{p_0}(x) = p_0 \psi_{p_0}(x)$$

Haciendo la sustitución de la expresión de  $\mathbf{p}$  heredada de las ecuaciones clásicas, obtenemos:

$$-i\hbar \frac{d}{dx} \psi_{p_0}(x) = p_0 \psi_{p_0}(x)$$

Multiplicando por  $i$  y dividiendo por  $\hbar$  en ambos lados de la ecuación, la ecuación del valor

característico queda expresada como una ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dx} \psi_{p_0}(x) = \frac{ip_0}{\hbar} \psi_{p_0}(x)$$

Precisemos cuál es la interpretación. Aquí,  $\psi_{p_0}(x)$ , la función característica, se interpreta como la amplitud de onda como función del logaritmo del precio del mercado,  $x$ , una vez que se ha efectuado la observación del movimiento,  $p_0$ . La aplicación del operador  $\mathbf{p}$  puede devolver un número infinito de posibles valores del movimiento del mercado, por lo que suponemos que la medición retorna precisamente el valor característico  $p_0$ .

Si  $\psi_p(x)$  no es un valor específico sino una función que depende de  $x$ , la pregunta es ¿cómo varía dicha función sobre  $x$ ? Es sencillo demostrar que la solución general de la ecuación diferencial se escribe:

$$\psi_{p_0}(x) = A \exp \left[ i \frac{p_0 x}{\hbar} \right]$$

Para determinar la amplitud de onda,  $A$ , hacemos uso de la regla de Born, de forma que:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} dx |\psi_{p_0}(x)|^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} dx |A|^2 = 1$$



Con esto podemos demostrar que la función característica del movimiento del objeto, adecuadamente normalizada, es:

$$\psi_{p_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ i \frac{p_0 x}{\hbar} \right]$$

Por tanto, la función característica del movimiento cuando el movimiento es conocido, está dispersa en el espacio de precios como una onda. Esto contrasta con la función característica de logaritmo del precio cuando se conoce el precio, que está completamente localizado en su propio espacio y tiene la forma de una función Dirac-delta.

Como la función de onda,  $\psi(x)$ , es equivalente a la amplitud probabilista de encontrar el mercado en un precio o su logaritmo,  $\langle x | \psi \rangle$ , podemos calcular la función de densidad de probabilidades de observar un mercado con movimiento conocido  $p_0$  en el logaritmo del precio  $x$ :

$$\begin{aligned} |\psi_{p_0}(x)|^2 &= \psi_{p_0}^*(x) \psi_{p_0}(x) \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 \exp \left[ -i \frac{p_0 x}{\hbar} \right] \exp \left[ i \frac{p_0 x}{\hbar} \right] \end{aligned}$$

Simplificando la anterior expresión, obtenemos:

$$|\psi_{p_0}(x)|^2 = \frac{1}{2\pi}$$

La densidad de probabilidades es completamente uniforme. Aunque conocemos las condiciones de movimiento del mercado, no contamos con información simultánea sobre el precio. Cabe anotar que una función de onda uniforme no estaría adecuadamente normalizada en ausencia de alguna circunscripción del espacio; el resultado presentado se obtiene siguiendo la convención de circunscribir el espacio al intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

Podríamos preguntarnos cuál es la diferencia entre el movimiento y la posición, de modo que una propiedad está dispersa y la otra localizada en el espacio de posición. La pregunta se responde con referencia a las correspondientes bases de medición. La posición se está midiendo sobre su propia base y por ende está completamente localizada después de una transacción. En contraste, después de la transacción, el momento muestra dispersión con referencia a una base que no es propia y que le resulta incompatible.

## Más sobre probabilidades de observación

Indaguemos más a fondo sobre la relación entre precio y movimiento en un mercado. Para comenzar, la amplitud probabilista del logaritmo del precio  $x_0$ , dado que conocemos el momento  $p_0$ ,  $\langle x_0 | p_0 \rangle$ , se expresa:

$$\psi_{p_0}(x_0) = \langle x_0 | p_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ i \frac{p_0 x_0}{\hbar} \right]$$

La forma más sencilla de encontrar las probabilidades del logaritmo del precio es haciendo uso de los estados básicos de posición,  $|x_i\rangle$ .

El mercado se encuentra en el estado  $|p_0\rangle$ , cuya identidad completamos sobre la base continua del logaritmo del precio:

$$|p_0\rangle = \int dx_i |x_i\rangle \langle x_i | p_0\rangle$$

Luego multiplicamos la expresión por un particular estado de logaritmo del precio  $|x_0\rangle$ :

$$\langle x_0 | p_0 \rangle = \int dx_i \langle x_0 | x_i \rangle \langle x_i | p_0 \rangle$$

Sabemos que la función característica del movimiento en la base de medición del logaritmo del precio es una onda dispersa,  $\langle x_i | p_0 \rangle$ , y también que  $\langle x_0 | x_i \rangle = \delta(x_0 - x_i)$ . Haciendo las correspondientes sustituciones:

$$\langle x_0 | p_0 \rangle = \int dx_i \delta(x_0 - x_i) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ i \frac{p_0 x_i}{\hbar} \right]$$

Aplicando las propiedades de la función Dirac-delta:

$$\langle x_0 | p_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ i \frac{p_0 x_0}{\hbar} \right]$$

Podemos partir de  $\langle p_0 | x_0 \rangle = \int dx_i \langle p_0 | x_i \rangle \langle x_i | x_0 \rangle$ . Para hacer las sustituciones correctas, observamos que  $\langle p_0 | x_i \rangle$  es el cónyuge de  $\langle x_i | p_0 \rangle$ , por lo que:

$$\langle p_0 | x_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -i \frac{p_0 x_i}{\hbar} \right]$$

En la anterior expresión, cambia el signo del exponencial con respecto a  $\langle x_0 | p_0 \rangle$  de positivo a negativo. No hay cambios con respecto a  $\langle x_0 | x_i \rangle = \delta(x_0 - x_i)$ . De esto sigue que:

$$\langle p_0 | x_0 \rangle = \int dx_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -i \frac{p_0 x_i}{\hbar} \right] \delta(x_0 - x_i)$$

Haciendo uso de las propiedades de la función Dirac-delta, demostramos que:

$$\langle p_0 | x_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -i \frac{p_0 x_0}{\hbar} \right]$$

La anterior expresión es la amplitud probabilista del movimiento  $p_0$ , dado que en el mercado se concretó una transacción con logaritmo del precio  $x_0$ .

Obviando los subíndices en  $x$  y  $p$  encontramos que las expresiones  $\langle x | p \rangle$  y  $\langle p | x \rangle$  son casi idénticas, con excepción del signo del exponente complejo:

$$\langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ i \frac{px}{\hbar} \right] \quad \langle p | x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -i \frac{px}{\hbar} \right]$$

Calculando las amplitudes probabilistas y sus correspondientes densidades de probabilidades,  $|\langle x | p \rangle|^2$  y  $|\langle p | x \rangle|^2$ , puede concluirse que el conocimiento del precio en el mercado no aporta información alguna sobre su movimiento, ni viceversa.

---

## Principio de incertidumbre

Ahora intentaremos encontrar la función de amplitud de onda del mercado cuántico, representada por  $\tilde{\psi}(p)$ , pero esta vez parametrizada por las condiciones del movimiento:

$$\tilde{\psi}(p) = \langle p | \psi \rangle$$

Partimos de la expresión donde completamos la identidad:

$$|\psi\rangle = I |\psi\rangle = \int dx_i |x_i\rangle \langle x_i | \psi\rangle$$

Ahora multiplicamos por el momento,  $\langle p |$ :

$$\langle p | \psi \rangle = \int dx_i \langle p | x_i \rangle \langle x_i | \psi \rangle$$

Sustituyendo por los resultados que obtuvimos previamente para  $\langle p | x \rangle$  y  $\langle x | \psi \rangle$ :

$$= \int dx_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-i \frac{px_i}{\hbar}\right] \psi(x_i)$$

Obviando el subíndice de la posición encontramos que la función de onda parametrizada por el movimiento del mercado es:

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \exp\left[-i \frac{px}{\hbar}\right] \psi(x)$$

La función de amplitud de onda parametrizada por el movimiento,  $p$ , tiene la forma de una transformación de Fourier de la función de amplitud de onda parametrizada por la posición,  $x$ .

A su vez, la transformación inversa  $\tilde{\psi}(p)$  en  $\psi(x)$  tiene la forma de una transformación de Fourier inversa:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp \exp \left[ i \frac{px}{\hbar} \right] \tilde{\psi}(p).$$

El logaritmo del precio y el movimiento del mercado son variables cónyuges. La relación entre variables cónyuges es el origen de la incertidumbre entre estas variables en el ámbito cuántico.

Como no pueden conocerse con certeza simultáneamente el precio y el movimiento en un mercado cuántico, su interrelación no se manifiesta como determinista sino probabilista. No obstante, ambas propiedades dependen mecánicamente del estado del mercado.

Si es imposible el conocimiento cierto y simultáneo de variables cónyuges, puede proponerse que hay un intercambio en los niveles de precisión con que se pueden llegar a conocer ambas variables. Específicamente, el citado intercambio se asocia con el principio de incertidumbre de Heisenberg.



Es posible demostrar que la incertidumbre conjunta satisface la desigualdad:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

En esa expresión,  $\sigma_x$  y  $\sigma_p$  se asocian con las desviaciones en la medición del precio y las condiciones de movimiento. Estas pueden calcularse teóricamente empleando las funciones de onda  $\psi(x)$  y  $\tilde{\psi}(p)$ , respectivamente.

Para precisar en qué consiste el límite inferior de la incertidumbre, utilizamos el operador de expectativas usando la notación:  $\langle \cdot \rangle$ . Este operador es un cercano equivalente del operador  $E(\cdot)$  en la estadística convencional. Una diferencia clave entre los dos operadores es que para el cálculo de  $\langle \cdot \rangle$  se hace uso de las funciones de amplitud de onda, en lugar de emplear las densidades de probabilidades.

Los valores esperados se calculan mediante las integrales:

$$\langle x \rangle = \int dx \psi^*(x) x \psi(x)$$

$$\langle p \rangle = \int dp \tilde{\psi}^*(p) p \tilde{\psi}(p)$$

Con esta información, podemos precisar las desviaciones en el logaritmo del precio y las condiciones del movimiento:

$$\Delta x = x - \langle x \rangle \quad \Delta p = p - \langle p \rangle$$

A su vez, es posible calcular teóricamente la desviación estándar de cada propiedad empleando las siguientes fórmulas:<sup>12</sup>

$$\sigma_x = [\langle (\Delta x)^2 \rangle]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\sigma_p = [\langle (\Delta p)^2 \rangle]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$$

En las anteriores ecuaciones, los valores cuadráticos esperados se calculan como:

$$\langle x^2 \rangle = \int dx \psi^*(x) x^2 \psi(x) \quad \langle p^2 \rangle = \int dp \tilde{\psi}^*(p) p^2 \tilde{\psi}(p)$$

---

<sup>12</sup> Algunos textos de mecánica cuántica presentan el principio de incertidumbre como  $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$  pese a que la interpretación que hacen de  $\Delta x$  y  $\Delta p$  corresponde a la desviación estándar. El lector puede consultar a Fitzpatrick.

El principio de incertidumbre se desprende de los formalismos matemáticos empleados en los métodos cuánticos, por lo que en cualquiera de sus aplicaciones podemos acarrear el concepto.

Una nota de precaución con respecto a los valores esperados que se desprenden de la teoría. Como veremos en el capítulo sobre la ecuación de Schrödinger, el estado del mercado y la función de amplitud probabilista evolucionan a través del tiempo, lo cual complica la estimación empírica de los parámetros usando las fórmulas usuales de la teoría clásica. Aunque en este capítulo hemos obviado el índice  $t$ , en realidad no hay una garantía de que los valores esperados sean constantes a través del tiempo

Si consideramos que los precios están representados por la posición, y las características del movimiento de los precios equivalen al momento, puede concluirse que hay un límite al conocimiento simultáneo de ambas propiedades del estado de un mercado. A diferencia de las aplicaciones en física, no se ha identificado una constante universal que establezca un piso para la incertidumbre en los mercados. Pese a esto, el concepto de un límite al conocimiento simultáneo del precio y su movimiento es extraordinariamente valioso.

El equivalente del principio de incertidumbre de Heisenberg tiene su origen en la incompatibilidad de las bases de medición de la posición y el momento.

Apliquemos primero el operador del movimiento y luego el operador del logaritmo del precio:

$$\mathbf{x} \mathbf{p} \psi(x) = \mathbf{x} \left[ -i\hbar \frac{d}{dx} \right] \psi(x) = -i\hbar \mathbf{x} \psi'(x)$$

Ahora invertimos el orden de aplicación de los operadores:

$$\mathbf{p} \mathbf{x} \psi(x) = \left[ -i\hbar \frac{d}{dx} \right] \mathbf{x} \psi(x) = -i\hbar [\mathbf{x} \psi'(x) + \psi(x)]$$

El orden de aplicación de los operadores influye sobre el resultado, debido a la presencia del término  $i\hbar \psi(x)$ . Los operadores no son conmutables porque las bases de medición no son compatibles.

También pudimos usar el conmutador para demostrar la incompatibilidad de las bases de medición:

$$[\mathbf{x}, \mathbf{p}] = \mathbf{x} \mathbf{p} - \mathbf{p} \mathbf{x} = i\hbar$$

Para demostrar el principio de incertidumbre,  $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$ , puede emplearse la desigualdad de Schwartz hasta llegar a una expresión de la forma:

$$\sigma_x^2 \sigma_p^2 \geq \left[ \frac{1}{2i} \langle [\mathbf{x}, \mathbf{p}] \rangle \right]^2$$

Como  $[x, p] = i\hbar$  el lado derecho de la desigualdad se convierte en  $\left[\frac{1}{2i}i\hbar\right]^2$ , lo que se simplifica a  $\frac{\hbar^2}{4}$ .

Como ambos lados de la ecuación involucran números reales, es posible aplicar la raíz cuadrada sin complicaciones en ambos lados de la desigualdad, lo que devuelve el resultado anticipado:  $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$ .

Este no es el único ejemplo de incompatibilidad de las bases de medición asociado con un principio de incertidumbre. Las bases de medición de la energía y el tiempo tampoco son compatibles, por lo que existe un principio de incertidumbre entre la energía y el tiempo.

Como veremos más adelante, el nivel energético de un mercado cuántico se asocia con las propiedades estadísticas de la distribución de probabilidades del logaritmo del precio, particularmente con su variabilidad y propensión a manifestar eventos extremos. Además, los niveles energéticos están cuantizados, por lo que ocurren como saltos discretos y se manifiestan como cambios de régimen.

Aplicando el principio de incertidumbre entre la energía y el tiempo al ámbito financiero, podemos anticipar una conexión entre lo que se percibe como abruptos cambios de régimen en los precios en el mercado, por una parte, y la incertidumbre con respecto al momento en el que ocurren, por otra parte.

No obstante, para investigar este y otros aspectos relacionados con la evolución de un mercado

cuántico a través del tiempo necesitamos ampliar la discusión al contexto dinámico. El primer paso en esa dirección es introducir la ecuación de Schrödinger.

---

## Preguntas

1. Demuestre que las funciones Dirac-delta  $\langle x_j | x_i \rangle = \delta(x_j - x_i)$  son ortogonales para todo  $i \neq j$ .
2. ¿Bajo qué circunstancias específicas pueden coincidir exactamente las funciones de amplitud de onda antes y después de la observación?
3. ¿Puede proponer una función alternativa a la Dirac-delta si la propiedad de posición fuese altamente localizada, pero no completamente localizada?
4. En la econometría clásica, suele suponerse que existe un proceso generador de datos cuyos parámetros pueden, en principio, inferirse usando la información disponible en el espacio de observación. Si el proceso generador de datos responde a una función de amplitud de onda que habita el espacio de estado, ¿considera usted que los parámetros del proceso generador de datos son accesibles?

5. Dado que el enfoque cuántico admite los fenómenos de interferencia y reconoce que el acto de observación influye sobre el estado del objeto observado, ¿qué modificaciones consideraría necesario hacer a los procedimientos de la inferencia clásica?
6. Es factible elaborar modelos que distinguen entre un espacio de estado y un espacio de medición, usando métodos clásicos. Para extraer las señales se utilizan filtros, por ejemplo, el filtro de Kalman. ¿En qué se diferencian los espacios de estado y de medición clásicos, con respecto a los correspondientes espacios en el enfoque cuántico?
7. Explique por qué se dice que la evolución conjunta del precio y su movimiento no es determinista sino probabilista.

## 6. ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

“El tiempo en el que estoy en cada momento manifiesta una duración distinta según sea mi estado en ese momento.”

Martin Heidegger, Historia del concepto del tiempo.

---

### Términos

Ecuación de Schrödinger, hiperespacio de precios, masa nocional, relación momento-energía



## Ideas

- La ecuación de Schrödinger establece una relación entre el espacio de precios y el tiempo.
- El tiempo tiene un sentido de dirección que está ausente en las dimensiones del espacio de precios.
- La relación entre la amplitud probabilista y el tiempo no necesariamente es una constante, cuya magnitud se conecta con la relación no lineal entre la amplitud probabilista y el espacio de precios.
- Mientras más se desvía de la linealidad la relación entre la amplitud probabilista y el espacio de precios, mayor es el ritmo de cambio de la relación entre la amplitud probabilista y el tiempo.

---

## Relación entre el espacio y el tiempo

En capítulos anteriores anticipamos que el paradigma cuántico revela que existe una peculiar conexión entre el espacio y el tiempo. Sin embargo, hasta este momento no hemos precisado la interrelación. La ecuación de Schrödinger juega un papel central en esa discusión. En términos generales, vamos a suponer que dicha ecuación predice la evolución del estado de un mercado cuántico a través del tiempo, dadas sus condiciones iniciales.

Recordemos la ecuación de Maxwell que describe el movimiento de una onda en el espacio:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x, t)$$

Establecimos anteriormente que dicha ecuación tiene como solución, usando el momento,  $p$ , y la energía,  $E$ :

$$\psi(x, t) = A \exp \left[ i \frac{(px - Et)}{\hbar} \right]$$

A partir de la ecuación de Maxwell derivamos la relación entre energía y momento para objetos cuánticos que carecen de una masa nociónal:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(x, t) = -\frac{1}{\hbar^2} \left( p^2 - \frac{E^2}{c^2} \right) \psi(x, t) = 0$$

De lo anterior habíamos concluido que la energía y el momento siempre tienen que satisfacer la relación  $E = pc$ .

Las ecuaciones que hemos presentado describen el comportamiento de objetos que carecen de masa. La masa de un objeto es sencillamente su resistencia a cambios en su velocidad o posición tras la aplicación de alguna fuerza; desde esta perspectiva, la masa es una medida cuantitativa de la inercia que presenta un objeto. Lógicamente, la introducción de una masa modifica la ecuación de Maxwell y su solución.

Teniendo en cuenta la masa,  $m$ , el operador diferencial que extrae los factores correctos a partir de la función de onda,  $\psi(x, t)$ , es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

Una derivada de segundo orden con respecto a la posición y una primera derivada con respecto al

tiempo, extraen el factor que produce la relación correcta entre energía y momento para objetos que tienen masa.

Esto puede compararse fructíferamente con la expresión correspondiente a objetos que no tienen masa:  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ . La introducción de la masa obliga a cambiar las constantes que aparecen en el operador. Sin embargo, esto no es lo único que llama la atención, pues también cambia el orden de la derivada asociada con el tiempo.

En ausencia de masa, tanto el tiempo como la posición en el espacio se asocian con derivadas de segundo orden. Como resultado de la introducción de la masa, el tiempo se asocia con una derivada de primer orden. Esto cambia cualitativamente las características de la dimensión temporal, cuando se compara con las dimensiones de posición.

Apliquemos ahora el operador diferencial a la función de amplitud probabilista,  $\psi(x, t) = A \exp \left[ i \frac{(px - Et)}{\hbar} \right]$ :

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) A \exp \left[ i \frac{(px - Et)}{\hbar} \right] \\ &= \left( \frac{p^2}{2m} - E \right) A \exp \left[ i \frac{(px - Et)}{\hbar} \right] = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, la relación entre energía y momento para un objeto cuántico que tiene masa distinta a cero debe satisfacer, en todo momento,  $E = \frac{p^2}{2m}$ .

En síntesis, la ecuación de Maxwell en el caso de objetos que poseen una masa puede expresarse de las siguientes maneras:

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(x, t) = 0 \\ & \left( \frac{p^2}{2m} - E \right) \psi(x, t) = 0 \end{aligned}$$

Esta versión de la ecuación de Maxwell conduce a la ecuación de Schrödinger en una sola dimensión, mediante una simple reorganización de los términos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t)$$

Para simplificar la notación, nos hemos enfocado en el caso en el que hay solamente una dimensión de posición. Una vez que se han comprendido los conceptos básicos, no es difícil generalizar al caso en el que hay más de una dimensión en el espacio de posición.

Si se agregan más direcciones en el espacio, y un término que representa la energía potencial del objeto,  $V(\vec{x})$ , se completa la ecuación de Schrödinger:<sup>13</sup>

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}, t) + V(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t)$$

---

<sup>13</sup> Para precisar, esta ecuación de Schrödinger no es relativista y es dependiente del tiempo.

En esta ecuación,  $\vec{x}$  es un vector que representa la posición del objeto en el espacio, mientras que el operador  $\nabla^2$  representa la sumatoria de las derivadas de segundo orden con respecto a las dimensiones de la posición,  $\nabla^2 = \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ .

Otra forma de escribir la ecuación de Schrödinger es empleando el operador energético o hamiltoniano,  $H$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} H \psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t)$$

donde  $H = -\frac{\hbar^2}{2m} [\nabla^2 + V(\vec{x}, t)]$ . El hamiltoniano extrae la energía total de un objeto. El primer término corresponde a la energía cinética, mientras el segundo es la energía potencial.

Dado que  $\psi(\vec{x}, t)$  debe satisfacer la ecuación de Schrödinger en todo momento, mientras la energía total se mantenga constante, el ritmo de cambio de la función de onda también se mantendrá constante con respecto al tiempo. Esta observación anticipa una relación entre energía y tiempo, que exploraremos con más detalle posteriormente.

---

## Implicaciones

Adoptando el análisis cuántico al ámbito económico-financiero, la ecuación de Schrödinger establecería las características de la relación entre un conjunto de precios, representado por el vector  $\vec{x}$ , y el tiempo,  $t$ . En esta notación  $\vec{x}$  es un vector  $k \times 1$ , donde  $k$  representa la cantidad de precios que se están considerando en el mercado. El vector  $\vec{x}$  debe diferenciarse del operador  $x$ , utilizado previamente y que está resaltado en negrilla.

En primer lugar, destacamos que en este mercado el tiempo es anómalo cuando se compara con los precios. La primera derivada con respecto al tiempo,  $\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}, t)$ , se relaciona con las segundas derivadas con respecto a los precios,  $\nabla^2\psi(\vec{x}, t)$ . Además, la derivada con respecto al tiempo está multiplicada por el factor imaginario,  $i$ , a diferencia de los otros términos en la ecuación.

El consenso es que la ecuación de Schrödinger es reversible en el tiempo y que de ella no se puede concluir que el tiempo tenga un sentido de dirección, el fenómeno conocido como la “flecha del tiempo”. No obstante, la experiencia práctica es que el tiempo se percibe en una sola dirección, de un modo que no ocurre con otras direcciones del espacio. La peculiaridad del término correspondiente al tiempo en la ecuación de Schrödinger, aunada a la vivencia de la “flecha del tiempo”, permiten concluir que el tiempo es una dimensión anómala.



En segundo lugar, no hay una implicación a partir de la ecuación de Schrödinger de que la relación entre el tiempo y la evolución de la amplitud probabilista tenga que ser constante. Es constante cuando la energía total se mantiene sin cambios. Sin embargo, las variaciones energéticas, que ocurren de manera cuantizada, provocan fluctuaciones en el ritmo de cambio de la función de onda con respecto al tiempo.

A su vez, las variaciones energéticas se reflejan en cambios en la configuración del espacio de los precios, reflejados en la magnitud de la sumatoria de las segundas derivadas. Nos aventuramos a señalar que estas fluctuaciones energéticas están relacionadas con los cambios de régimen que se perciben en los mercados financieros.

En tercer lugar, la relación entre los precios y la amplitud probabilista no es una constante. Si interpretamos que las segundas derivadas, con magnitud diferente a cero, reflejan relaciones no lineales, los aumentos de energía estarían vinculados con un alejamiento de la linealidad en la relación entre la función de onda y los precios. Mientras mayor sea la magnitud de la sumatoria de las segundas derivadas, más se aleja dicha relación de la linealidad.

Este fenómeno puede estar relacionado con el fenómeno empírico de la “sonrisa de la volatilidad”, pues los mercados financieros asocian diferentes velocidades de movimiento a los precios de los derivados, conforme sus precios de ejecución se alejan del precio instantáneo del subyacente.

En cuarto lugar, la masa,  $m$ , tiene una relación inversa con la primera derivada de la amplitud probabilista con respecto al tiempo. Esto apunta a que el ritmo de cambio de las probabilidades no sólo no es instantáneo, sino que está parametrizado conforme las características inerciales del mercado. La amplitud probabilista evoluciona más rápidamente por unidad de tiempo mientras menor inercia tenga el mercado.

Dejamos para más adelante la discusión sobre las posibles fuentes de inercia o masa nociónal del mercado, aunque adelantamos que en el paradigma cuántico estas no necesariamente se interpretan como “imperfecciones” del mercado, por la misma razón que la masa física no constituye una imperfección de un objeto. Advertimos que la interpretación de un mercado financiero como un sistema cuántico de procesamiento de información conlleva un número importante de ramificaciones.<sup>14</sup>

---

<sup>14</sup> Vale mencionar que el enfoque multifractal comparte con el cuántico la preocupación por una relación inconstante entre el tiempo calendario y el tiempo mercantil. En el enfoque multifractal, la transformación del espacio habitado por el mecanismo generador y el espacio de observación se realiza mediante un fractal. En ambos enfoques, la conexión de las escalas temporales no es necesariamente constante, aunque tampoco es arbitraria. El análisis caótico suele asociar un período en el tiempo del espacio de estado con un período en el tiempo de observación, aunque es perfectamente factible añadir una función de transformación temporal de un espacio a otro.

## Preguntas

1. ¿Considera usted que puede existir una relación entre el ritmo de evolución de la amplitud probabilista  $\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}, t)$  y el descuento del valor del dinero en el tiempo? Justifique su respuesta.
2. ¿Qué interpretación puede darse, en el análisis de un mercado financiero, al término que incorpora la energía potencial,  $V(\tilde{x})\psi(\tilde{x}, t)$ ?
3. Investigue sobre el modelo multifractal de Mandelbrot. Comente sobre las diferencias y similitudes que encuentra entre el enfoque multifractal y la ecuación de Schrödinger.

## 7. CONSERVACIÓN

“El hecho de ‘ser’ conlleva una inclinación a la cercanía, una cercanía que se correlaciona con el ‘ser en el presente’. Pero el presente no es sino una posibilidad del tiempo mismo.”

Martin Heidegger, *Historia del concepto del tiempo*.

---

### Términos

Base de medición energética, conservación de la energía, energía esperada, operador de energía, operador de evolución temporal, operador unitario

## Ideas

- El operador energético o hamiltoniano se usa para extraer el valor del estado energético del mercado.
- Es usual suponer que el operador de energía es independiente del tiempo.
- Del hamiltoniano se desprende un operador de evolución temporal, es decir, un operador que extrae el estado del mercado en un período de tiempo determinado.
- El operador de evolución temporal es determinista y unitario.
- Los operadores unitarios mantienen la identidad de los estados, en el sentido de que, si dos estados de un objeto fueron distintos en el pasado, continuarán siendo distintos en el futuro.
- El valor energético esperado es constante e independiente del tiempo. Este es el equivalente cuántico de la conservación de la energía clásica.
- Pueden observarse fluctuaciones instantáneas y aleatorias de la energía.

---

## Operador energético

Considere un mercado cuya energía es constante a través del tiempo. En el contexto de la ecuación de Schrödinger encontramos el operador energético o hamiltoniano:

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} [\nabla^2 + V(\vec{x}, t)]$$

Para circunscribir la discusión al caso en el que solamente hay una dimensión en el espacio de precios y donde únicamente hay energía cinética, escribimos un hamiltoniano simplificado:

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Este operador extrae el valor de la energía total del mercado semejante a una partícula libre en el espacio, a partir de su función de amplitud probabilista. El hamiltoniano es independiente del tiempo.

Analicemos por un momento la estructura de los operadores de la ecuación de Schrödinger:

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

En consecuencia, otro modo de expresar el operador energético es:

$$\mathbf{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

Alternativamente, el operador puede expresarse en los estados básicos de su propia base de medición:

$$\mathbf{H}|E_j\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|E_j\rangle$$

Si  $\mathbf{H}$  puede considerarse como una constante, entonces la ecuación  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t)$  puede reorganizarse de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{i}{\hbar} \mathbf{H} \psi(x, t)$$

Esta es una ecuación diferencial de forma general  $\frac{\partial}{\partial x} \exp[kx] = k \exp[kx]$ . Por inspección, puede concluirse que  $k = -\frac{i}{\hbar} \mathbf{H}$ . Por tanto, la solución general tiene la siguiente forma:

$$\psi(x, t) = A(x) \exp \left[ -\frac{i\mathbf{H}}{\hbar} t \right]$$

Cabe señalar que  $A(x)$  es constante con respecto a  $t$ , pero nada impide que sea una función de  $x$ .

---

## Operador de evolución temporal

Cuando tratamos al operador de energía con independencia del tiempo, podemos separar la función de onda en dos partes. Una parte refleja el estado inicial y otra la evolución con respecto al estado inicial.



Representaremos el estado inicial de la función de onda por el símbolo  $\psi(x,0)$ , que depende solamente del logaritmo del precio. El estado inicial ocupa el lugar de  $A(x)$  en la solución general de la ecuación diferencial de la función de onda:

$$\psi(x,t) = \psi(x,0) \exp \left[ -\frac{iH}{\hbar} t \right]$$

La segunda parte de la solución general, el factor exponencial que depende solamente del tiempo, se representará como  $U(t)$ :

$$U(t) = \exp \left[ -\frac{iH}{\hbar} t \right]$$

La anterior expresión se conoce como el operador de evolución temporal. Este operador evoluciona el estado del mercado a partir del estado inicial  $A(x) = \psi(x,0)$ , hasta el período  $t$ ,  $\psi(x,t)$ .

Con el fin de visibilizar el efecto del operador  $U(t)$  sobre  $\psi(x,0)$ , tratamos  $H$  tentativamente como una constante. Esto permite aplicar la fórmula de Euler,  $e^{ir} = \cos r + i \sin r$ :

$$U(t) = \cos \left[ -\frac{H}{\hbar} t \right] + i \sin \left[ -\frac{H}{\hbar} t \right]$$

Al hacer la expansión queda claro el carácter sinusoidal del operador de evolución temporal.

El operador de evolución temporal puede también aplicarse cuando se emplea la representación de kets de estado. Al aplicarse sobre un ket de estado inicial,  $|\psi(0)\rangle$ , el operador  $\mathbf{U}(t)$  lo transforma en el estado que corresponde a  $t$ :

$$|\psi(t)\rangle = \mathbf{U}(t)|\psi(0)\rangle$$

Si se desea actuar sobre un bra, se aplica el cónyuge del operador desde la derecha. Utilizamos el símbolo  $\dagger$  para representar al cónyuge de los operadores:

$$\langle\psi(t)| = \langle\psi(0)|\mathbf{U}^\dagger(t)$$

Como ejemplo de la aplicación del operador de evolución temporal, consideremos dos mercados cuánticos cuya condición evoluciona a través del tiempo. Vamos a suponer que los mercados tienen dos configuraciones distintas, que se representarán mediante los kets  $|\blacksquare\rangle$  y  $|::\rangle$ . Los mercados se distinguen porque en  $t = 0$  tenían diferentes estados, los cuales pueden compararse mediante el producto interior. Para que siempre sea factible distinguir entre los dos estados, estos deben ser ortogonales:  $\langle\blacksquare|::\rangle = 0$ .

Ahora vamos a suponer que en  $t$  uno de los mercados se encuentra en el estado  $|\psi(t)\rangle$ , mientras el otro tiene estado  $|\phi(t)\rangle$ . El operador de evolución temporal es el nexo entre el estado inicial y el estado en  $t$ :

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\blacksquare\rangle$$

$$|\phi(t)\rangle = U(t)|\downarrow\rangle$$

El operador de evolución temporal conserva el resultado del producto interior. Si los dos estados,  $|\blacksquare\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$ , fueron distintos en algún punto del tiempo, continuarán siendo distintos en el futuro. Asimismo, si dos estados fueron iguales, continuarán siendo iguales para siempre.

Para convencernos de esto, podemos aplicar el producto interior entre  $|\psi(t)\rangle$  y  $|\phi(t)\rangle$ :

$$\langle\psi(t)|\phi(t)\rangle = \langle\psi(0)|U^\dagger(t)U(t)|\phi(0)\rangle = \langle\blacksquare|U^\dagger(t)U(t)|\downarrow\rangle$$

Ahora bien,  $U^\dagger(t)U(t) = \exp\left[+\frac{iH}{\hbar}t\right]\exp\left[-\frac{iH}{\hbar}t\right] = 1$ . Por ende, sabemos que:

$$\langle\psi(t)|\phi(t)\rangle = \langle\blacksquare|\downarrow\rangle = 0$$

Este tipo de evolución se asocia con una clase específica de operadores, denominados operadores unitarios.

Recordemos que un estado puede siempre representarse como una superposición. Siendo este el caso, el operador de evolución temporal debe actuar congruentemente sobre la superposición. Cada uno de los estados,  $|\blacksquare\rangle$  y  $|::\rangle$ , puede escribirse como una superposición de las bases de medición de energía,  $|E_0\rangle$  y  $|E_1\rangle$ .

Tomemos la siguiente superposición como un ejemplo para investigar cómo actúa el operador de evolución temporal:

$$|\blacksquare\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|E_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|E_1\rangle$$

Supongamos que uno de los mercados se encuentra en el estado  $|\blacksquare\rangle$  en  $t = 0$ . La aplicación del operador de evolución temporal habrá llevado al mercado a  $|\eta(t)\rangle$  en el período  $t$ .

$$|\eta(t)\rangle = U(t)|\blacksquare\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}U(t)|E_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}U(t)|E_1\rangle$$

La dependencia temporal de la superposición se puede encontrar multiplicando cada coeficiente del estado energético por su propia fase:

$$|\eta(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[ -\frac{iE_0}{\hbar} t \right] |E_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[ -\frac{iE_1}{\hbar} t \right] |E_1\rangle$$

Una pregunta lógica es por qué podemos sustituir  $\mathbf{H}$  por un valor energético específico en la expresión anterior. Esto se relaciona con la posibilidad de tratar el operador  $\mathbf{H}$  tentativamente como si fuese una constante.

Una forma de responder a esta inquietud es remitirnos a la fórmula de Euler. Las funciones trigonométricas que constituyen  $\mathbf{U}(t)$  pueden expandirse como series. En cada término de dicha sumatoria aparecen potencias del operador  $\mathbf{H}$ . Cuando  $\mathbf{H}$  actúa sobre un estado básico de medición energética, devuelve el valor característico correspondiente a ese estado. Esta es la intuición del por qué tenemos  $E_0$  cuando  $\mathbf{U}(t)$  multiplica  $|E_0\rangle$ , y  $E_1$  cuando multiplica  $|E_1\rangle$ . Al actuar sobre un ket de estado, el operador devuelve una constante.

Retornemos a la manera en que  $U(t)$  actúa sobre un estado representado como una superposición. Podemos inferir del procedimiento que el operador se distribuye hasta actuar sobre cada una de los estados básicos de la superposición. En el ejemplo, como los estados básicos directamente corresponden a la base de medición de energía, es sencillo encontrar la fase que corresponde usar.

---

## Probabilidad de observación

Ya habíamos mencionado el carácter sinusoidal de  $U(t)$ . Las oscilaciones de  $U(t)$  influyen sobre la probabilidad de observar mercado en alguno de los dos estados posibles. Si el mercado inicialmente se encontraba en el estado  $|\blacksquare\rangle$ , oscilará entre los estados  $|\blacksquare\rangle$  y  $|::\rangle$  a través del tiempo. Para comprobar esto, calculemos primero la amplitud probabilista del estado  $|\blacksquare\rangle$ .

Recordemos que la amplitud probabilista en un instante determinado de tiempo, está dada por la proyección del estado del mercados sobre estado de interés.

En este caso, la proyección es:

$$\langle \blacksquare | \eta(t) \rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \langle E_0 | + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle E_1 | \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[ -\frac{iE_0}{\hbar} t \right] | E_0 \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[ -\frac{iE_1}{\hbar} t \right] | E_1 \rangle \right)$$

Recordando que los estados básicos de las bases de medición son ortogonales, obtenemos que:

$$\langle \blacksquare | \eta(t) \rangle = \frac{1}{2} \exp \left[ -\frac{iE_0}{\hbar} t \right] \langle E_0 | E_0 \rangle + \frac{1}{2} \exp \left[ -\frac{iE_1}{\hbar} t \right] \langle E_1 | E_1 \rangle$$

Como los estados básicos también están normalizados, la anterior expresión se simplifica a:

$$\langle \blacksquare | \eta(t) \rangle = \frac{1}{2} \exp \left[ -\frac{iE_0}{\hbar} t \right] + \frac{1}{2} \exp \left[ -\frac{iE_1}{\hbar} t \right]$$

Siguiendo la regla de Born, la probabilidad de encontrar al mercado en el estado  $|\blacksquare\rangle$  está dada por la norma cuadrática de la amplitud probabilista:

$$|\langle \blacksquare | \eta(t) \rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} \exp \left[ -\frac{iE_0}{\hbar} t \right] + \frac{1}{2} \exp \left[ -\frac{iE_1}{\hbar} t \right] \right|^2$$

Para simplificar la anterior expresión, extraemos el factor  $\exp \left[ -\frac{iE_0}{\hbar} t \right]$ :

$$\begin{aligned} & \left| \left( \exp \left[ -\frac{iE_0}{\hbar} t \right] \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp \left[ -\frac{i(E_1 - E_0)}{\hbar} t \right] \right) \right|^2 \\ &= \left| \exp \left[ -\frac{iE_0}{\hbar} t \right] \right|^2 \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp \left[ -\frac{i(E_1 - E_0)}{\hbar} t \right] \right|^2 \end{aligned}$$

La anterior expresión se simplifica aún más, pues  $\left| \exp \left[ -\frac{iE_0}{\hbar} t \right] \right|^2 = 1$ .

De lo anterior, obtenemos que:

$$\begin{aligned} |\langle \blacksquare | \eta(t) \rangle|^2 &= \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp \left[ -\frac{i(E_1 - E_0)}{\hbar} t \right] \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left| 1 + \exp \left[ -\frac{i(E_1 - E_0)}{\hbar} t \right] \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( 1 + \exp \left[ -\frac{i(E_1 - E_0)}{\hbar} t \right] \right) \left( 1 + \exp \left[ -\frac{i(E_1 - E_0)}{\hbar} t \right] \right)^* \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{4} \left( 2 + 2 \operatorname{Re} \left( \exp \left[ -\frac{i(E_1 - E_0)}{\hbar} t \right] \right) \right)$$

Por último, podemos concluir que:

$$|\langle \blacksquare | \eta(t) \rangle|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \exp \left[ -\frac{i(E_1 - E_0)}{\hbar} t \right] \right)$$

Esta última expresión es oscilatoria. Esto significa que la probabilidad de que un mercado se encuentre en el estado  $|\blacksquare\rangle$  oscila con una frecuencia  $\frac{(E_1 - E_0)}{\hbar}$ . Las oscilaciones están centradas en  $\frac{1}{2}$ .

Los resultados numéricos de este ejemplo ilustran el funcionamiento del operador de evolución temporal, pero realmente no pueden generalizarse. Sin embargo, algunas conclusiones pueden aplicarse más allá de este ejemplo.

El operador de evolución temporal es determinista, por lo que la función de onda evoluciona de manera determinista. El carácter oscilatorio de la onda probabilista dificulta aún más conocer con certeza qué estado manifestará el mercado ante el observador en algún momento específico.

Ya habíamos establecido que la aleatoriedad de las manifestaciones de los objetos es una característica esencial de los métodos cuánticos. A esto ahora le sumamos que la distribución de probabilidades que se deriva de la función de onda no necesariamente es constante en el tiempo.

Aun cuando la onda probabilista puede alcanzar situaciones instantáneas de “certeza”, cuando las magnitudes son 0% y 100%, tales condiciones son efímeras. Tal posibilidad difícilmente permitirá predecir certeramente, sin conocer previamente la función de amplitud probabilista.

Otra característica que revela este sencillo ejemplo es la influencia perenne de las condiciones iniciales. Toda la dinámica está influida por el estado inicial  $\langle \blacksquare |$ . La evolución del estado del mercado a través del tiempo conserva una memoria del pasado.

A la luz de estas consideraciones, es necesario interpretar con precaución los estimadores estadísticos clásicos, como los estimadores de la media, la varianza y otros momentos de una distribución empírica de probabilidades, si la distribución teórica claramente no es estacionaria.

## Valor energético esperado

Considere nuevamente un mercado cuyo estado inicial es  $|\blacksquare\rangle$ , representado como una superposición de los dos estados energéticos básicos.

El valor esperado de la energía presente en dicho mercado puede representarse mediante la notación:

$$\langle E \rangle = \langle \blacksquare | H | \blacksquare \rangle$$

Consideremos nuevamente la expresión del estado del mercado en el período  $t$ :

$$|\eta(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{iE_0}{\hbar}t\right] |E_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{iE_1}{\hbar}t\right] |E_1\rangle$$

La amplitud probabilista de encontrar el mercado en el estado energético  $E_0$  es el producto interior del bra  $\langle E_0 |$  y el estado,  $|\eta(t)\rangle$ :

$$\langle E_0 | \eta(t) \rangle = \langle E_0 | \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{iE_0}{\hbar}t\right] |E_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{iE_1}{\hbar}t\right] |E_1\rangle \right)$$

Reacomodando algunos términos, obtenemos:

$$\langle E_0 | \eta(t) \rangle \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[ -\frac{iE_0}{\hbar} t \right] \langle E_0 | E_0 \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[ -\frac{iE_1}{\hbar} t \right] \langle E_0 | E_1 \rangle \right)$$

Aplicando las propiedades ortonormales de los estados básicos  $|E_0\rangle$  y  $|E_1\rangle$ , obtenemos que la amplitud probabilista de observar el estado energético  $E_0$  es:

$$\langle E_0 | \eta(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[ -\frac{iE_0}{\hbar} t \right]$$

Aplicando la regla de Born, la probabilidad de observar el estado energético  $E_0$  está dada por:

$$\begin{aligned} |\langle E_0 | \eta(t) \rangle|^2 &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[ -\frac{iE_0}{\hbar} t \right] \right|^2 \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[ -\frac{iE_0}{\hbar} t \right] \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[ -\frac{iE_0}{\hbar} t \right] \right)^* \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[ -\frac{iE_0}{\hbar} t \right] \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[ +\frac{iE_0}{\hbar} t \right] \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Cabe destacar que la probabilidad de observar el estado energético  $E_0 = \frac{1}{2}$  es independiente del tiempo. Un procedimiento paralelo permite encontrar que la probabilidad de observar  $E_1 = \frac{1}{2}$ , que también es independiente del tiempo. Esto contrasta con las probabilidades oscilatorias de observación de  $|\blacksquare\rangle$  y  $|\because\rangle$ .

El valor energético esperado es el promedio de los dos estados energéticos posibles:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2}(E_0 + E_1)$$

Una vez más, no es posible generalizar los resultados específicos que se desprenden de este ejemplo. Sin embargo, podemos destacar que el valor energético esperado es independiente del tiempo, lo cual corresponde al principio de conservación de la energía en el paradigma cuántico. Sin embargo, llama la atención que el valor energético esperado no es un valor posible para el mercado cuántico que hemos analizado, pues al efectuar las mediciones de energía, solamente pueden obtenerse los valores discretos  $|E_0\rangle$  y  $|E_1\rangle$ .

Independientemente de la configuración inicial, en un instante determinado de tiempo el mercado puede encontrarse en uno u otro estado energético. Esto es significativo, pues la cantidad de energía asociada con cada estado energético influye sobre las cualidades de la distribución de probabilidades del logaritmo del precio que el mercado instantáneamente manifiesta ante el observador.

## Preguntas

1. Verifique que  $\psi(x, t) = A(x) \exp \left[ -\frac{iH}{\hbar} t \right]$  cumple con la ecuación  $\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{i}{\hbar} H \psi(x, t)$ .
2. ¿Por qué en la solución de  $\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{i}{\hbar} H \psi(x, t)$  se dice que el coeficiente  $A(x)$  aún puede ser una función de  $x$ ?
3. Verifique que  $\psi(x, t) = \exp \left[ -\frac{iH}{\hbar} t \right] \psi(x, 0)$ .
4. Escriba  $|E_2\rangle$  como una superposición de los dos estados  $|\blacksquare\rangle$  y  $|::\rangle$ .
5. Escriba  $|::\rangle$  como una superposición en las bases de energía.
6. Si un objeto es tal que  $|\blacksquare\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |E_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |E_1\rangle$  y  $U(t)$  es el operador de evolución temporal, verifique que  $U(t)|\blacksquare\rangle = |\eta(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[ -\frac{iE_0}{\hbar} t \right] |E_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[ -\frac{iE_1}{\hbar} t \right] |E_1\rangle$ .
7. Considere un objeto preparado en estado  $|\downarrow\rangle$ , como una superposición de dos estados energéticos básicos,  $|::\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |E_0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |E_1\rangle$ . Encuentre el valor esperado de la energía de dicho objeto, dado por  $\langle E \rangle$ .

## 8. PROPAGACIÓN

“...la espacialidad es un elemento constitutivo del mundo. Pero esto ciertamente no significa que el ‘ser’ del mundo pueda definirse, en primer lugar, o solamente, en términos de su espacialidad...”

Martin Heidegger, *Historia del concepto del tiempo*.

---

### Términos

Diagramas de Feynman, propagador cuántico



## Ideas

- La amplitud probabilista del logaritmo del precio no depende solamente del precio en el presente, sino del conjunto de trayectorias posibles que llevan a determinado precio en el futuro.
- El precio instantáneo determinada por un observador no es especial. Su importancia depende de la amplitud probabilista de haber observado tal precio en el mercado en primer lugar.
- El momento en que se realiza una observación tiene mayor relevancia que el precio observado mismo, en la determinación de las probabilidades futuras de observar un precio en particular.

---

## Propagador cuántico

Consideremos ahora un precio en el mercado. El logaritmo del precio,  $x$ , no es una constante, por lo que es posible encontrar la densidad de probabilidades de que un mercado que se encuentra inicialmente en el estado  $\psi(x, 0)$ , se encuentre luego en  $x'$  en un período  $t$ .

La evolución del estado del mercado se calcula usando el operador de evolución temporal, presentado en el capítulo anterior:

$$|\psi(t)\rangle = \exp \left[ -\frac{iH}{\hbar} t \right] |\psi(0)\rangle$$

La amplitud probabilista de encontrar el mercado en  $x'$ , es decir, en el estado  $|x'\rangle$ , se calcula mediante el producto interior de la función característica del logaritmo del precio,  $|\psi(t)\rangle$ , y el estado evolucionado en el tiempo,  $\langle x' |$ :

$$\psi(x', t) = \langle x' | \psi(t) \rangle = \langle x' | \exp \left[ -\frac{iH}{\hbar} t \right] |\psi(0)\rangle$$

Ahora usemos el operador de identidad,  $I = \int dx |x\rangle\langle x|$  para encontrar la expresión que transforma  $\psi(x, 0)$  en  $\psi(x', t)$ :

$$\begin{aligned}\psi(x', t) &= \langle x' | \exp \left[ -\frac{iH}{\hbar} t \right] I | \psi(0) \rangle \\ &= \langle x' | \exp \left[ -\frac{iH}{\hbar} t \right] \int dx |x\rangle\langle x| \psi(0) \rangle\end{aligned}$$

Recordando que  $\langle x | \psi(0) \rangle = \psi(0)$  y definiendo  $K(x, x', 0, t) = \langle x' | \exp \left[ -\frac{iH}{\hbar} t \right] | x \rangle$ :

$$\psi(x', t) = \int dx K(x, x', 0, t) \psi(x, 0)$$

donde  $K(x, x', 0, t)$  es  $\langle x' | \exp \left[ -\frac{iH}{\hbar} t \right] | x \rangle$

Dicha transformación integral se conoce como el propagador cuántico. Esta devuelve la amplitud probabilista de que un mercado se encuentre en  $(x', t)$  dado que inicialmente se encontraba en  $(x, 0)$ .

Analizando la integral, nos damos cuenta de que  $\psi(x', t)$  no depende de un particular logaritmo del precio,  $x$ , observado inicialmente, o su correspondiente amplitud de onda. De hecho,  $\psi(x', t)$  resulta de integrar la amplitud de onda evolucionada en el tiempo sobre todos los precios posibles en  $t = 0$ . En otras palabras, la amplitud de onda de  $x'$  en  $t$  es una función de todas las posibles trayectorias iniciales.

---

## Análisis de trayectorias

Consideremos ahora una versión generalizada de la amplitud probabilista:

$$\psi(x', t'; t) = \int dx \langle x' | \exp \left[ -\frac{iH}{\hbar} (t' - t) \right] | x \rangle \psi(x, t)$$

La composición de la amplitud probabilista  $\psi(x', t'; t)$  puede describirse como la sumatoria de todas las trayectorias unitarias posibles a partir de los precios iniciales en logaritmos,  $x$ , en el período  $t$ , que permiten llegar a  $x'$  en  $t'$ .

Profundicemos en torno al significado de esto. En el interior de la amplitud probabilista,  $\psi(x', t'; t)$ , encontramos el propagador cuántico:

$$\langle x' | \exp \left[ -\frac{iH}{\hbar} (t' - t) \right] | x \rangle$$

Concebimos el propagador cuántico en dos partes. En primer lugar, la expresión  $\exp \left[ -\frac{iH}{\hbar} (t' - t) \right] | x \rangle$  genera el estado evolucionado del mercado en el período  $t'$  dado que este se había observado en  $|x\rangle$  en  $t$ . Por tanto, el producto interior de  $\langle x' | \exp \left[ -\frac{iH}{\hbar} (t' - t) \right] | x \rangle$  es la amplitud probabilista de encontrar al mercado en  $x'$  en el período  $t'$ , dado que anteriormente se observó en  $x$ .

En segundo lugar, la integral es una sumatoria sobre todos los posibles precios iniciales,  $x$ , en logaritmos. Esto significa que la amplitud probabilista de observar el mercado en  $x'$  en  $t'$  depende de todas las posibles trayectorias unitarias asociadas con haber observado algún  $x$  en  $t$ . Las trayectorias están ponderadas por la amplitud probabilista  $\psi(x, t)$ .

Si la amplitud probabilista de observar un  $x$  particular en el período  $t$  era elevada en primer lugar, tendrá una ponderación relativamente importante en la determinación de la amplitud probabilista en  $(x', t')$ , con independencia del intervalo  $t' - t$ . En contraste, una observación inicial  $x$  en  $t$  que era altamente improbable dada  $\psi(x, t)$ , tendrá una ponderación minúscula al calcular  $\psi(x', t'; t)$ .

Por tanto, el particular precio observado en una transacción efectuada en  $t$  no es “especial” como determinante de la amplitud probabilista en  $(x', t')$ . Incluso posibles alternativas a la transacción en  $t$ , con precios diferentes a la transacción que efectivamente se concretó, influyen sobre la amplitud probabilista de  $(x', t')$ . Podemos pensar que el precio concreto de una transacción es solamente un valor más, para efectos de calcular las probabilidades del comportamiento futuro del mercado.

Esto no significa que el acto de realizar una transacción sea irrelevante por completo, pues el momento en el que se realiza,  $t$ , es crucial para determinar  $t' - t$ . El intervalo de tiempo a partir de la transacción observada claramente influye en la amplitud probabilista de  $(x', t')$ . Cabe subrayar que no hay un sentido en el que pueda decirse que un mayor intervalo  $t' - t$  disminuya la importancia de haber realizado la observación en  $t$ .

Como vimos anteriormente, el operador de evolución temporal tiene un carácter cíclico, por lo que la función de amplitud de onda no es constante a través del tiempo. Por esta razón, el momento en el que se realiza la observación inicial,  $t$ , tiene más relevancia que el precio concreto de la transacción observada. El carácter cíclico del operador de evolución temporal también explica por qué el intervalo de tiempo  $t' - t$  mantiene su importancia.

Otro punto para destacar es que el propagador cuántico conlleva algo semejante al “descuento” de los precios en el tiempo. El valor del dinero en el tiempo no es constante, condición que se reconoce universalmente en la teoría y práctica financiera. Sin embargo, el paradigma clásico aporta pocas luces en cuanto al origen de ese descuento.

En contraste, un ajuste de los estados futuros del mercado emerge con naturalidad a partir del propagador cuántico y la ecuación de Schrödinger, como un resultado integrado en las funciones de amplitud probabilista que se desprenden de la evolución del estado del mercado. Esto puede comprobarse mediante unas sencillas operaciones.

Haciendo  $t' = T$  y  $t = 0$ , dividiendo y multiplicando la expresión en el exponencial por una tasa de descuento arbitraria  $r > 0$ , y definiendo la constante  $\hbar \equiv r\hbar$ :

$$\langle x' | \exp \left[ \frac{iH}{\hbar} (-rT) \right] | x \rangle$$

Puede argumentarse al examinar esta expresión que la evolución desde un logaritmo del precio  $x$  en  $t = 0$  a  $x_T$  en  $t = T$  conlleva un “descuento” por un factor proporcional a  $\exp[-rT]$ .

La amplitud probabilista de  $x_T$ , dado que se realizó una observación inicial en  $t = 0$  se podría escribir de esta manera:

$$\psi(x_T, T) = \int dx \langle x_T | \exp \left[ \frac{iH}{\hbar} (-rT) \right] | x \rangle \psi(x, 0)$$

Por tanto, a través del propagador cuántico, la amplitud probabilista de los valores futuros de los precios incorpora un factor de “descuento” que solamente depende del intervalo de tiempo transcurrido,  $T$ . El factor no necesariamente está descontando el valor del dinero, pero está ajustando la valoración de estados futuros sobre la base de su distancia con respecto al momento en que se realiza una observación.

Podemos agregar que el descuento en el tiempo ocurre juntamente con la transformación que realiza el hamiltoniano,  $H$ , en la interrelación entre  $\langle x_T |$  y  $|x\rangle$ . Puede interpretarse que dicha transformación actúa sobre la distancia relativa entre  $\langle x_T |$  y  $|x\rangle$ .



Si aplicamos la fórmula de Euler, las funciones trigonométricas que constituyen  $\exp \left[ \frac{iH}{h}(-rT) \right]$  pueden expandirse como series. En cada término de dichas sumatorias aparecen potencias del operador  $H$ . Cuando  $H$  y sus potencias actúan sobre los estados básicos de los precios en logaritmos en  $t = 0$  y  $t = T$ , devuelven el valor energético que corresponde a tal interrelación. La distancia entre  $x_T$  y  $x$  se refleja entonces en los valores energéticos extraídos por el hamiltoniano.

La energía juega un rol clave al diferenciar el efecto del intervalo de tiempo y la distancia en el espacio de precios. La valoración de los estados futuros no depende de la energía, sino que depende del intervalo de tiempo transcurrido. En contraste, la valoración efectuada por la distancia entre los precios está siendo mediada por la energía. En consecuencia, al comparar los precios en dos períodos de tiempo disímiles, el propagador cuántico conlleva manifestaciones energéticas variables según dos factores: (i) la diferencia entre los precios, y (ii) el carácter cíclico del propagador cuántico.

---

## Probabilidad de observación

Para transformar la amplitud probabilista en una probabilidad, hacemos uso de la regla de Born y la norma cuadrática,  $|\psi(x', t'; t)|^2$ . La teoría de probabilidades requiere que la sumatoria de todas las observaciones posibles debe ser exactamente igual a 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' |\psi(x', t'; t)|^2 = 1$$

Como la distancia infinitesimal  $dx'$  tiene las unidades del precio en logaritmos y una probabilidad no puede tener unidades de dimensión, entonces  $|\psi(x', t'; t)|^2$  es una densidad de probabilidades.

Simplificando la notación de los  $x$ , el valor esperado de la posición en  $t'$  dado  $t$ , se calcula mediante la integral:

$$\langle x(t'|t) \rangle = \int dx \psi(x, t'; t)^* x \psi(x, t'; t)$$

En la anterior expresión,  $x$ , resaltado en negrilla, es el operador del logaritmo del precio. Con esta información también podemos precisar las desviaciones en la posición en  $t'$  dado  $t$ , con respecto a su correspondiente valor esperado:

$$\Delta x(t'|t) = x(t'|t) - \langle x(t'|t) \rangle$$

A su vez, es posible calcular teóricamente la desviación estándar de la posición en  $t'$  dado  $t$  empleando:

$$\sigma_{x,t'|t} = \left[ \langle (\Delta x(t'|t))^2 \rangle \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x^2(t'|t) \rangle - \langle x(t'|t) \rangle^2}$$

En las anteriores ecuaciones, los valores cuadráticos esperados se calculan como:

$$\langle x^2(t'|t) \rangle = \int dx \psi(x, t'; t) x^2 \psi(x, t'; t)$$

De las anteriores ecuaciones concluimos que tanto el valor esperado como la desviación estándar de la posición son funciones de  $t'$  y  $t$ .

---

## Preguntas

1. Use el operador de identidad,  $I = \int dx |x\rangle\langle x|$  para verificar que la expresión que transforma  $\psi(x, 0)$  en  $\psi(x', t)$  es  $\psi(x', t) = \int dx K(x, x', 0, t) \psi(x, 0)$ .
2. Puede ocurrir que el observador en el período  $t$  obtenga una lectura  $x$ , cuya amplitud probabilista sea máxima. Esto significa que la probabilidad de haber obtenido tal lectura es instantáneamente 100%. ¿Qué tan especial es esta lectura en la determinación de una posición futura del objeto cuántico?
3. A partir del operador de evolución temporal, discuta un sentido en el que puede decirse que el estado de los objetos cuánticos tiene memoria.

## 9. LA FRONTERA CLÁSICA

“En la percepción pura de las cosas, el mundo se manifiesta con una significación deficiente...Las categorías tradicionales de la condición de ser ‘cosa’ se originan como fenómenos a partir de tal significación deficiente.”

Martin Heidegger, *Historia del concepto del tiempo*.

---

### Términos

Constante en movimiento, energía total, operador Hermitiano, serie de Taylor

---

## Ideas

- Muchas de las leyes clásicas pueden considerarse casos límite o valores esperados de las funciones cuánticas.
- Para que el valor esperado de una propiedad sea constante, no basta con que la definición de su operador de medición sea constante.
- Aquellas propiedades cuyo operador de medición es constante y conmutativo con el operador energético, serán “constantes en el movimiento” de un objeto.
- Las leyes clásicas pueden encontrarse como casos especiales empleando los métodos cuánticos.

## Valor esperado

Ya hemos encontrado indicios de que el valor esperado de alguna propiedad del mercado es lo que más se asemeja a los valores clásicos. Por tanto, a partir de las relaciones cuánticas, es posible elaborar predicciones sobre los valores promedio. Consideremos un operador arbitrario,  $\mathbf{O}$ , que corresponde a alguna propiedad observable del mercado,  $o$ . El valor esperado de la medición  $\mathbf{O}$  sobre el estado  $|\psi\rangle$  es:

$$\langle \mathbf{O} \rangle = \langle \psi | \mathbf{O} | \psi \rangle$$

Aplicando al valor esperado la primera derivada con respecto al tiempo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{O} \rangle = \frac{\partial}{\partial t} (\langle \psi | \mathbf{O} | \psi \rangle)$$

La energía total juega un papel central, como un parámetro constante en el análisis del movimiento de los mercados. Específicamente, vamos a suponer que el operador energético o hamiltoniano,  $\mathbf{H}$ , es constante.

Apliquemos a la derivada del valor esperado la regla del producto:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{O} \rangle = \left( \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi | \right) \mathbf{O} | \psi \rangle + \langle \psi | \mathbf{O} \left( \frac{\partial}{\partial t} | \psi \rangle \right) + \langle \psi | \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{O} \right) | \psi \rangle$$

La ecuación de Schrödinger puede usarse para expandir la derivada en términos de la energía total. Específicamente, recordemos que  $\mathbf{H} | \psi \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \psi \rangle$ . Aplicando las propiedades de los kets, el cónyuge está dado por  $\langle \psi | \mathbf{H}^\dagger = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi |$ .

Reorganizando estas expresiones obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} | \psi \rangle = \frac{\mathbf{H}}{i\hbar} | \psi \rangle \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi | = -\langle \psi | \frac{\mathbf{H}^\dagger}{i\hbar}$$

Retornando a la derivada del operador  $\mathbf{O}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{O} \rangle = -\langle \psi | \frac{\mathbf{H}^\dagger}{i\hbar} \mathbf{O} | \psi \rangle + \langle \psi | \mathbf{O} \frac{\mathbf{H}}{i\hbar} | \psi \rangle + \langle \psi | \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{O} | \psi \rangle$$



Agrupando los primeros dos términos, nos queda la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{O} \rangle = \frac{1}{i\hbar} (-\langle \psi | \mathbf{H}^\dagger \mathbf{O} | \psi \rangle + \langle \psi | \mathbf{O} \mathbf{H} | \psi \rangle) + \langle \psi | \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{O} | \psi \rangle$$

Esto puede simplificarse haciendo uso de la propiedad hermitiana del hamiltoniano,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^\dagger$ . Recordemos que un operador es hermitiano cuando es su propio cónyuge complejo.

Por tanto, la ecuación queda:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{O} \rangle = \frac{1}{i\hbar} (-\langle \psi | \mathbf{H} \mathbf{O} | \psi \rangle + \langle \psi | \mathbf{O} \mathbf{H} | \psi \rangle) + \langle \psi | \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{O} | \psi \rangle$$

Multiplicando y dividiendo por  $i$  los términos entre paréntesis, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{O} \rangle = -\frac{i}{\hbar} (-\langle \psi | \mathbf{H} \mathbf{O} | \psi \rangle + \langle \psi | \mathbf{O} \mathbf{H} | \psi \rangle) + \langle \psi | \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{O} | \psi \rangle$$

Aplicando la definición del conmutador,  $[\mathbf{H}, \mathbf{O}] = \mathbf{H} \mathbf{O} - \mathbf{O} \mathbf{H}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{O} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \psi | [\mathbf{H}, \mathbf{O}] | \psi \rangle + \langle \psi | \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{O} | \psi \rangle$$

La anterior expresión es válida para un operador general que extrae alguna propiedad del mercado. El valor esperado del operador,  $\langle \mathbf{O} \rangle$ , puede variar en el tiempo por dos razones. La más evidente es que  $\mathbf{O}$  esté variando con el tiempo. La segunda razón tiene que ver con la compatibilidad de las bases de medición de  $\mathbf{O}$ , con las bases de medición de la energía. Si las bases de medición de  $\mathbf{O}$  no son compatibles con las bases de la energía, el valor esperado no será constante en el tiempo.

Por consiguiente, una propiedad cuyo operador no depende del tiempo y que es conmutativo con la energía, será una “constante en el movimiento” de los mercados, en el sentido de que su valor esperado será constante.

## Del ámbito cuántico al clásico

Algunos de los resultados clásicos más importantes pueden deducirse como casos especiales o fronterizos en el enfoque cuántico. Esto significa que en ciertas circunstancias deberíamos poder extraer una relación clásica a partir de la función de onda cuántica.

Para investigar esta posibilidad, reemplazamos las cantidades clásicas, como el logaritmo del precio (posición) y las cualidades de su movimiento (momento), por sus operadores cuánticos, los cuales encontramos previamente:

$$\mathbf{x} = x$$

$$\mathbf{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

Vamos a utilizar el hamiltoniano,  $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(x)$ , para encontrar una ecuación de movimiento. Comencemos por analizar el operador del logaritmo del precio,  $\mathbf{x}$ , a partir del conmutador  $[\mathbf{H}, \mathbf{x}]$ :

$$[\mathbf{H}, \mathbf{x}] = \left[ \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(x), \mathbf{x} \right] = \left[ \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \mathbf{x} \right] + [V(x), \mathbf{x}]$$

En la anterior expresión, recordemos que  $m$  representa la resistencia al cambio en el mercado, es decir, es un índice de sus condiciones inerciales.

La anterior expresión se simplifica porque  $V(x)x = xV(x)$ . Además, podemos extraer el factor  $\frac{1}{2m}$  del interior del conmutador, por lo que nos queda:

$$[H, x] = \frac{1}{2m} [p^2, x]$$

Ahora bien, sumando y restando términos:

$$[p^2, x] = p^2x - xp^2 = p^2x - pxp + pxp - xp^2$$

$$[p^2, x] = p[px - xp] + [px - xp]p$$

Ajustando el signo de los términos, obtenemos:

$$[p^2, x] = -p[xp - px] - [xp - px]p$$

$$[p^2, x] = -p[x, p] - [x, p]p$$

Sustituyendo la anterior expresión en el conmutador de la energía y el logaritmo del precio:

$$[H, x] = -\frac{1}{2m}(p[x, p] + [x, p]p)$$

Anteriormente habíamos demostrado que el conmutador del logaritmo del precio y las cualidades de su movimiento es  $[x, p] = i\hbar$ . En consecuencia, el conmutador  $[H, x]$  está dado por la expresión:

$$[H, x] = -\frac{1}{2m}2i\hbar p = -\frac{i\hbar p}{m}$$

Esto significa que  $H$  y  $x$  no son conmutables a menos que  $p$  sea exactamente 0 en todo momento, es decir, que haya una ausencia completa de movimiento.

A continuación, vamos a explorar las cualidades del logaritmo esperado del precio. Sea  $x$  el operador  $O$ . Haciendo las sustituciones correspondientes:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle x \rangle = \frac{i}{\hbar}\langle \psi | [H, x] | \psi \rangle + \langle \psi | \frac{\partial}{\partial t} x | \psi \rangle$$

Ya vimos que  $[H, x] = -\frac{i\hbar p}{m}$ . Además, el segundo término desaparece, pues  $x$  es constante en el tiempo.

Simplificando la expresión:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle x \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \psi | \left( -\frac{i\hbar \mathbf{p}}{m} \right) | \psi \rangle + 0 = \langle \psi | \left( \frac{\mathbf{p}}{m} \right) | \psi \rangle$$

Si definimos la velocidad promedio del logaritmo del precio como  $\langle \mathbf{v} \rangle \equiv \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{x} \rangle$  y recordamos que  $\langle \mathbf{p} \rangle = \langle \psi | \mathbf{p} | \psi \rangle$ , entonces:

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{m} \langle \mathbf{p} \rangle$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por  $m$ , llegamos a una versión que se asemeja al caso clásico:

$$\langle \mathbf{p} \rangle = m \langle \mathbf{v} \rangle$$

En síntesis, a partir de la versión cuántica del logaritmo esperado del precio,  $\langle x \rangle$ , obtuvimos una versión análoga a la definición clásica de las cualidades del movimiento del precio, excepto que esta alude al valor esperado de dichas cualidades,  $\langle p \rangle$ :

$$\text{Clásico:} \quad p = mv$$

$$\text{Cuántico:} \quad \langle p \rangle = m \langle v \rangle$$

Tengamos presente que estos resultados se obtuvieron empleando el conmutador  $[H, x]$ .

Un proceso semejante para el operador de las condiciones del movimiento del precio,  $\mathbf{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$  permite extraer una relación entre la aceleración del logaritmo del precio y las condiciones inerciales del mercado. Esta relación es paralela a la segunda ley de Newton en la física. En este caso, el punto de partida será el conmutador  $[H, \mathbf{p}]$ .

Sustituyendo en la ecuación la definición del hamiltoniano:

$$[H, \mathbf{p}] = \left[ \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}), \mathbf{p} \right] = \left[ \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \mathbf{p} \right] + [V(\mathbf{x}), \mathbf{p}]$$
$$[H, \mathbf{p}] = \frac{1}{2m} [\mathbf{p}^2, \mathbf{p}] + [V(\mathbf{x}), \mathbf{p}] = \frac{1}{2m} (\mathbf{p}^3 - \mathbf{p}^3) + [V(\mathbf{x}), \mathbf{p}]$$

La anterior expresión se reduce a:

$$[H, \mathbf{p}] = [V(\mathbf{x}), \mathbf{p}]$$

Esto significa que el conmutador entre la energía y el movimiento del precio depende únicamente de la energía potencial presente en el mercado, pues el término que representa la energía cinética se reduce a cero. Dichas propiedades son compatibles.



Multiplicando ambos lados de la ecuación por una función de onda genérica,  $\psi$ , y sustituyendo la definición del operador de momento:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{H}, \mathbf{p}]\psi &= \left[ \mathbf{V}(x), -i\hbar \frac{d}{dx} \right] \psi \\
 &= -i\hbar \frac{d}{dx} (\mathbf{V}(x)\psi) + i\hbar \mathbf{V}(x) \left( \frac{d}{dx} \psi \right) \\
 &= \left( -i\hbar \left( \frac{d}{dx} \mathbf{V}(x) \right) \psi - i\hbar \mathbf{V}(x) \left( \frac{d}{dx} \psi \right) + i\hbar \mathbf{V}(x) \left( \frac{d}{dx} \psi \right) \right)
 \end{aligned}$$

Los términos que contienen  $\mathbf{V}(x) \frac{d}{dx} \psi$  se cancelan, por lo que la expresión se simplifica a:

$$[\mathbf{H}, \mathbf{p}]\psi = -i\hbar \left( \frac{d}{dx} \mathbf{V}(x) \right) \psi$$

Sea  $\mathbf{p}$  el operador  $\mathbf{0}$ . Haciendo las sustituciones correspondientes, el cambio en el valor esperado del movimiento queda:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{p} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \psi | [\mathbf{H}, \mathbf{p}] | \psi \rangle + \langle \psi | \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{p} | \psi \rangle$$

Dado que ya obtuvimos una expresión para  $[\mathbf{H}, \mathbf{p}]$ , la anterior expresión es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{p} \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle \psi | i\hbar \left( \frac{d}{dx} V(x) \right) | \psi \rangle + \langle \psi | \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{p} | \psi \rangle$$

Como  $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{p} = \mathbf{0}$ , el segundo término desaparece. Asimismo, los factores  $i$  y  $\hbar$  se cancelan.

En consecuencia, la ecuación se simplifica a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{p} \rangle = \langle \psi | \left( \frac{d}{dx} V(x) \right) | \psi \rangle$$

El lado derecho de la ecuación es el valor esperado del cambio en la energía potencial presente en el mercado:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{p} \rangle = \left\langle \frac{d}{dx} V(\mathbf{x}) \right\rangle$$

Definiendo la fuerza como  $F \equiv \frac{d}{dx} V(\mathbf{x})$  obtenemos la expresión:

$$\langle F \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{p} \rangle = \frac{\partial}{\partial t} (m \langle v \rangle) = m \langle a \rangle$$

En síntesis, a partir de la versión cuántica de las condiciones del movimiento del logaritmo del precio  $\langle \mathbf{p} \rangle$ , obtuvimos una versión análoga a la definición clásica de la fuerza, excepto que esta alude al valor esperado de la aceleración del logaritmo del precio,  $\langle a \rangle$ , en lugar de aludir simplemente a la aceleración. Tengamos presente que estos resultados se obtuvieron empleando el conmutador  $[H, \mathbf{p}]$ .

En síntesis, hemos obtenido estos resultados:

$$\text{Clásico:} \quad F = ma$$

$$\text{Cuántico:} \quad \langle F \rangle = m \langle a \rangle$$

Analicemos más a fondo lo que está ocurriendo con la ecuación  $\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{p} \rangle = \langle \frac{d}{dx} V(x) \rangle$ . Si  $\langle x \rangle$  y  $\langle \mathbf{p} \rangle$  cumplieran en todo momento con el equivalente a la segunda ley de Newton, entonces el lado derecho de la ecuación debería ser  $\frac{dV(x)}{dx}$ , en lugar de  $\langle \frac{dV(x)}{dx} \rangle$ . Pero ese no es el caso. En otras palabras, la ecuación clásica es un caso particular en el método cuántico. Es pertinente preguntarse en qué condiciones la versión clásica es confiable.

Como un ejemplo, podemos considerar la situación de una función de onda que se comporta como un oscilador armónico. En este caso, la energía potencial está dada por la ecuación  $V(x) = kx^2$ .

En la versión clásica de la ecuación,  $\frac{dV(x)}{dx} = 2kx$ , lo cual se compara con la versión cuántica,  $\langle \frac{dV(x)}{dx} \rangle = \langle 2kx \rangle = 2k\langle x \rangle$ . Por tanto, en el caso de una función de onda constituida por un oscilador armónico, los resultados coinciden. Tomemos nota de que las derivadas dan como resultado una función lineal en ambos casos.

Recordemos la forma genérica de una serie de Taylor:

$$f(x) = f(a) + 1! f'(a)(x - a) + 2! f''(a)(x - a)^2 + 3! f'''(a)(x - a)^3 + \dots$$

Si se expande la derivada del potencial  $\langle \frac{dV(x)}{dx} \rangle$  en torno a  $\langle x \rangle$ , la ecuación de movimiento colapsa al equivalente a la segunda ley de Newton, siempre que la función de onda esté localizada en torno a  $\langle x \rangle$ . Para verificar esto, escribimos la expansión de  $\langle \frac{dV(x)}{dx} \rangle$  en la cercanía de  $\langle x \rangle$ ,  $a = \langle x \rangle$ :

$$\langle \frac{dV(x)}{dx} \rangle = \langle \frac{dV(\langle x \rangle)}{dx} + \frac{dV^2(\langle x \rangle)}{dx^2} \Delta x + O(\cdot) \rangle$$

Si  $\Delta x = x - \langle x \rangle$  es pequeño, el segundo término y términos superiores pueden ignorarse, en cuyo caso la serie se reduce:

$$\langle \frac{dV(x)}{dx} \rangle \approx \langle \frac{dV(\langle x \rangle)}{dx} \rangle$$

Como  $\langle x \rangle \approx x$  y  $V(\langle x \rangle) \approx V(x)$ . Aplicando las propiedades lineales del operador de expectativas:

$$\langle \frac{dV(x)}{dx} \rangle \approx \frac{dV(x)}{dx}$$

Esto significa que el equivalente de la segunda ley de Newton se cumple cuando hay poca incertidumbre en cuanto al logaritmo del precio, o sea, cuando la función de onda está altamente localizada en torno al logaritmo esperado del precio,  $\langle x \rangle$ .

---

## Preguntas

1. ¿Qué interpretación le brinda usted a la compatibilidad de las bases de medición de la energía y las cualidades del movimiento del precio en un mercado?
2. ¿Por qué son incompatibles las bases de medición del precio y la energía?
3. ¿Qué interpretación puede tener la energía potencial cuando el concepto se aplica a un mercado?

## 10. EL OSCILADOR CUÁNTICO

“...el objetivo primario de la ciencia no es la iluminación o la predicción de eventos, sino la identificación y comprensión de los mecanismos y tendencias que los subyacen y gobiernan.”

Tony Lawson, *Una teoría realista para la economía*.

---

### Términos

Nivel energético mínimo, operador de aniquilación, operador de conteo numérico, operador de creación, oscilador armónico, oscilador clásico

---

## Ideas

- Para realizar un análisis de la oferta y la demanda usando métodos cuánticos, introducimos el oscilador armónico.
- Definimos un operador de creación que aumenta el nivel energético, y un operador de aniquilación que la disminuye.
- No es posible observar simultáneamente la energía, por un lado, y las operaciones de creación y aniquilación, por otro.
- Los niveles energéticos tienen variaciones discretas y puede llevarse un “conteo” del nivel energético mediante un operador de conteo.
- La distribución gaussiana es generada por un oscilador armónico cuántico, cuando su estado energético es el más bajo posible.
- Dependiendo del nivel energético del mercado, la distribución de probabilidades del precio se torna multimodal, sesgada y leptocúrtica.
- En un equilibrio cuántico no hay garantía de que la distribución del precio de mercado esté centrada en el equilibrio estructural.



- La resistencia subjetiva al cambio de compradores y vendedores, juega un papel en determinar la brecha entre el centro de masa de probabilidad del precio y el precio en un equilibrio estructural clásico.
- La incertidumbre en torno a los precios observados desde la perspectiva cuántica difiere del error de medición clásico.
- La cantidad de información que transmite una transacción sobre el estado del mercado depende de la probabilidad de haber observado ese precio.

---

## Osciladores

Para realizar un primer análisis de la oferta y la demanda usando métodos cuánticos, introducimos el oscilador armónico. A partir del oscilador clásico vamos a desarrollar una variante cuántica. Este tipo de oscilador es particularmente útil en el análisis cuántico y se emplea frecuentemente como una aproximación de primer orden a sistemas más complejos. Además, el oscilador tiene el mérito de permitir la generación de ecuaciones cerradas.

Comenzando con el caso clásico, un oscilador armónico involucra un objeto de masa  $m$  que oscila en torno a una posición central con una fuerza similar a la de un resorte. Dicha fuerza,  $F$ , obedece a la ecuación:

$$F = -kx$$

donde  $k$  es una constante y  $x$  es una distancia o desplazamiento con respecto a un centro.

La ecuación de movimiento del oscilador se puede reescribir de varias maneras. Por ejemplo, a partir del momento del objeto:

$$p = m \frac{dx}{dt} \qquad \frac{d^2 p}{dt^2} = m \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Esta última expresión es la fuerza,  $F$ , por lo que puede escribirse también:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

Puede demostrarse que la ecuación diferencial tiene una solución, de carácter oscilatorio, dada por

$$x = A \cos (\omega t + \phi)$$

donde la fase,  $\phi$ , depende de las condiciones iniciales del sistema y  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  es la frecuencia.

Además, puede demostrarse que la energía del sistema oscilatorio obedece la siguiente ecuación:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

Para allanar el camino hacia una versión cuántica del oscilador armónico recordemos que la energía se recupera, a partir de la función de onda, empleando un operador. Por ende, la expresión para la energía del oscilador puede reescribirse con una notación diferente:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Al igual que el operador energético o hamiltoniano de la Parte II, el primer término es la energía cinética, en tanto el segundo término corresponde a la energía potencial.

## Creación y aniquilación

Ahora introduzcamos algunos operadores nuevos, asociados con la energía presente en un mercado. Si bien existe una versión cuántica del principio de conservación de la energía, en los métodos cuánticos se definen explícitamente los actos de agregar o extraer energía de un objeto.

En primer lugar, introducimos el operador  $\mathbf{a}$ , conocido como el operador de aniquilación:

$$\mathbf{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x + \frac{i}{m\omega} p \right)$$

El cónyuge del operador de aniquilación es el operador de creación, el cual representamos por  $\mathbf{a}^\dagger$ . Por tanto, el operador de creación tiene la forma:

$$\mathbf{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x - \frac{i}{m\omega} p \right)$$

El operador de creación aumenta el nivel energético de un mercado, mientras que el operador de aniquilación lo disminuye.

Es factible demostrar que, con una adecuada normalización, el conmutador de los operadores de aniquilación y creación cumple con:

$$[a, a^\dagger] = a a^\dagger - a^\dagger a = 1$$

Dado que el conmutador entre los operadores de aniquilación y creación es diferente a 0, sabemos que estos operadores no comparten vectores característicos. Vale señalar que no hablamos de la compatibilidad o incompatibilidad de las correspondientes bases de medición, pues los operadores de creación y aniquilación no efectúan mediciones.

Finalmente, introducimos  $N$  como un operador de conteo numérico. Dicho operador, al aplicarse sobre el estado de un mercado, arrojará el nivel energético de este:

$$N = a^\dagger a$$

A diferencia de los operadores de aniquilación y creación, el operador de conteo positivamente arroja una medición relativa al estado energético de un objeto cuántico sobre una base discreta o cuantizada.

## Operador energético

Utilizando los operadores que acabamos de definir, podemos reescribir el operador energético del oscilador armónico de esta manera:

$$H = \hbar\omega \left( N + \frac{1}{2} \right)$$

Para convencernos de esto, basta con hacer algunas sustituciones:

$$\begin{aligned} H &= \hbar\omega \left( N + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \\ &= \hbar\omega \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x - \frac{i p}{m\omega} \right) \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x + \frac{i p}{m\omega} \right) + \frac{1}{2} \right) \\ &= \hbar\omega \frac{m\omega}{2\hbar} \left( x - \frac{i p}{m\omega} \right) \left( x + \frac{i p}{m\omega} \right) + \frac{\hbar\omega}{2} \\ &= \frac{m\omega^2}{2} x^2 + \frac{1}{2m} p^2 + \frac{\hbar m\omega^2}{2\hbar} \frac{i}{m\omega} (xp - px) + \frac{\hbar\omega}{2} \end{aligned}$$

Haciendo la sustitución del conmutador entre  $x$  y  $p$ , dado por  $[x, p] = xp - px = i\hbar$ , la anterior expresión queda:

$$H = \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \frac{1}{2m}p^2 + \frac{\hbar m\omega^2}{2\hbar} \frac{i}{m\omega} i\hbar + \frac{\hbar\omega}{2}$$

Simplificando los términos, se obtiene:

$$H = \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \frac{1}{2m}p^2 - \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{2}$$

Lo anterior nos lleva a la expresión que buscamos:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

Cabe preguntarse cuál es la energía esperada. Para investigar esto, supongamos que  $|\psi\rangle$  representa el estado genérico de un objeto. Podemos escribir el valor energético esperado de la siguiente forma:

$$\langle H \rangle = \langle \psi | H | \psi \rangle = \hbar\omega \langle \psi | \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) | \psi \rangle = \hbar\omega \langle a\psi | a\psi \rangle + \frac{\hbar\omega}{2}$$



Dada la anterior expresión, se cumple la desigualdad:

$$\langle H \rangle = \langle \psi | H | \psi \rangle \geq \frac{\hbar\omega}{2}$$

pues el término  $\hbar\omega\langle a\psi | a\psi \rangle$  debe tener un valor no negativo. De esto se desprende que el valor energético esperado tiene un límite inferior debajo del cual no puede caer.

Vamos a corroborar este punto considerando una medición sobre la base de energía del mercado. Dejemos que  $|E\rangle$  sea uno de los estados en dicha base de medición. Recordando las técnicas de la Parte II, sabemos que los valores observables en determinada base de medición corresponden a los valores característicos. En este caso el valor energético,  $E$ , debe cumplir con la ecuación característica:

$$H|E\rangle = E|E\rangle$$

Multiplicando desde la izquierda por  $\langle E|$  y teniendo en cuenta que un estado básico está normalizado, obtenemos:

$$\langle E | H | E \rangle = E \langle E | E \rangle \geq \frac{\hbar\omega}{2}$$

Esto significa que el objeto oscilatorio armónico tiene un nivel energético mínimo no negativo,  $E \geq \frac{\hbar\omega}{2}$ .

De lo anterior se desprende también que el operador de creación siempre puede aplicarse para aumentar el nivel energético de un objeto cuántico, pero el operador de aniquilación no puede aplicarse más cuando la energía ya se encuentra en su mínimo.

Vimos anteriormente que los operadores de creación y aniquilación no son conmutativos y, además, que no suelen interpretarse por sí mismos como operadores de medición. Cabe preguntarse si es posible aplicar uno de estos operadores y simultáneamente medir la energía. Para establecer esto, podemos calcular los conmutadores entre el operador energético, por una parte, y los operadores de creación y aniquilación, por la otra. Puede verificarse que estos conmutadores son:

$$[H, a] = \hbar\omega a \quad [H, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger$$

Ambos conmutadores son diferentes a 0, por lo que puede concluirse que no es posible simultáneamente medir la energía, por un lado, y efectuar las operaciones de creación y aniquilación, por otro.

A continuación, vamos a investigar qué ocurre si operamos  $\mathbf{N}$  sobre la base de medición de la energía. Recordemos que  $\mathbf{H} = \hbar\omega \left( \mathbf{N} + \frac{1}{2} \right)$ , lo cual significa que  $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$ . Operando  $\mathbf{N}$  sobre una de las bases de medición de la energía, nos queda que:

$$\mathbf{N}|E\rangle = \left( \frac{\mathbf{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \right) |E\rangle = N_E |E\rangle$$

donde  $N_E$  se asocia con un valor característico correspondiente al estado energético.

Supongamos ahora que tenemos dos estados energéticos en una base de medición, un estado alto (+) y otro bajo (−). Usamos los operadores de creación y aniquilación para definir cada estado:

$$|E_+\rangle = \mathbf{a}^\dagger |E\rangle \quad |E_-\rangle = \mathbf{a} |E\rangle$$

Ahora vamos a extraer el nivel energético asociado con cada estado, usando el operador de energía:

$$\mathbf{H}|E_+\rangle = \mathbf{H}\mathbf{a}^\dagger |E\rangle = (E + \hbar\omega)|E_+\rangle$$

$$\mathbf{H}|E_-\rangle = \mathbf{H}\mathbf{a} |E\rangle = (E - \hbar\omega)|E_-\rangle$$

De esto se desprende que el estado energético  $|E_+\rangle$  tiene mayor energía que el estado inicial,  $|E\rangle$  en una magnitud discreta  $\hbar\omega$ . Asimismo,  $|E_-\rangle$  tiene menor energía que el estado inicial  $|E\rangle$ , también en una cantidad discreta  $\hbar\omega$ . Esto significa que los valores energéticos totales sufren variaciones discretas y, además, que puede llevarse un “conteo” del nivel energético mediante el operador de conteo numérico:

$$N_{E_+} = N_E + 1 \qquad N_{E_-} = N_E - 1.$$

Si entendemos el mercado como un objeto cuántico, sus niveles energéticos están cuantizados.

Ya mencionamos que el oscilador armónico requiere un nivel mínimo de energía, el que denominaremos nivel energético básico. Supongamos que tal estado energético está representado por  $|E_0\rangle$ , el nivel más bajo posible en el que aún se configura un sistema oscilatorio.

Se demostró anteriormente que el nivel energético mínimo es  $\frac{\hbar\omega}{2}$ , de lo cual sigue que  $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ . Además, podemos deducir que el conteo que corresponde al estado base,  $E_0$ , es  $N_{E_0} = 0$ .

Si buscamos reducir aún más el nivel energético y aplicamos una vez más el operador de aniquilación, obtenemos que  $\mathbf{a}|E_0\rangle = 0$ . En este caso, el sistema pierde su carácter oscilatorio.

La ecuación que describe el logaritmo del precio en el mercado en el estado energético más bajo,  $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ , puede encontrarse aplicando una proyección de la base de la posición  $x$ ,  $|x\rangle$ , sobre el estado no oscilatorio,  $\mathbf{a}|E_0\rangle$ :

$$\langle x|\mathbf{a}|E_0\rangle = \langle x|\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{i\mathbf{p}}{m\omega}\right)|E_0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\langle x|\left(x + \frac{i\mathbf{p}}{m\omega}\right)|E_0\rangle$$

Recuerde que  $\langle x|\mathbf{a}|E_0\rangle = 0$  en vista de que  $\mathbf{a}|E_0\rangle = 0$ . Esto permite eliminar el coeficiente  $\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}$  en la anterior expresión y escribir:

$$\langle x|\left(x + \frac{i\mathbf{p}}{m\omega}\right)|E_0\rangle = 0$$

Readecuando los términos, encontramos que:

$$x\langle x|E_0\rangle + \frac{i\mathbf{p}}{m\omega}\langle x|E_0\rangle = 0$$

Ahora definimos una función de onda parametrizada por el estado energético básico:  $\psi_{E_0}(x) = \langle x|E_0\rangle$ .

Haciendo la sustitución en la ecuación:

$$\left(x + \frac{i \mathbf{p}}{m\omega}\right) \psi_{E_0}(x) = 0$$

Utilizando la definición del operador de momento, introducida en la Parte II,  $\mathbf{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ :

$$\left(x - \frac{i}{m\omega} i\hbar \frac{d}{dx}\right) \psi_{E_0}(x) = 0$$

$$\left(x + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx}\right) \psi_{E_0}(x) = 0$$

La anterior ecuación puede reorganizarse, para que quede expresada como una ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dx} \psi_{E_0}(x) = -\frac{m\omega}{\hbar} x \psi_{E_0}(x)$$

Puede demostrarse que esta ecuación diferencial tiene como solución:

$$\psi_{E_0}(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right]$$

Si tratamos la anterior función de onda como una función de amplitud probabilista parametrizada por  $E_0$ , siguiendo la regla de Born, la densidad de probabilidades asociada está dada por:

$$|\psi_{E_0}(x)|^2 = \left|\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right]\right|^2 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right]$$

Recordemos que la expresión usual de la función de densidad de probabilidades gaussiana es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Por inspección, podemos concluir que  $\psi_{E_0}(x)$  adquiere la forma de una distribución gaussiana con  $\mu = 0$ .

Además, podemos encontrar la varianza a partir de  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Elevando ambos lados de la ecuación al cuadrado:

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2} = \frac{m\omega}{\pi\hbar}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por  $\pi$  y depejando la varianza, obtenemos:

$$\sigma^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

Esto apunta a que la distribución gaussiana del logaritmo del precio en el mercado se asocia con un oscilador armónico cuántico en el estado energético más bajo posible, en el que aún se registran oscilaciones. Esto converge al punto, ya mencionado en varias ocasiones, de que el caso clásico es el caso limítrofe de un sistema cuántico.<sup>15</sup> Una aplicación sucesiva del operador de creación permite calcular las funciones de onda asociadas con niveles energéticos superiores.

---

<sup>15</sup> El lector interesado también puede consultar Cavalcanti (1998) en torno a la función de onda de una partícula browniana, recordando que en el enfoque clásico los precios se comportan como partículas brownianas.



Para un nivel energético arbitrario,  $n$ , tenemos  $E_n$ :

$$\psi_{E_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[ -\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 \right] H_n \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right)$$

donde los  $H_n$  son funciones polinomiales. Específicamente, se trata de una clase de polinomios de Hermite. La secuencia de tales polinomios inicia:  $H_n = 1$ ,  $H_1 = 2x$ ,  $H_2 = 4x^2 - 2$  y continúa así sucesivamente.

Las correspondientes densidades de probabilidades están dadas por  $|\psi_{E_n}(x)|^2$ , las cuales deben parametrizarse para satisfacer la condición de normalización:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi_{E_n}(x)|^2 = 1$$

---

## Preguntas

1. Demuestre que el conmutador de los operadores de creación y aniquilación satisface  $[a, a^\dagger] = 1$ .
2. ¿Por qué se dice que  $\hbar\omega\langle a\psi|a\psi\rangle$  debe tener un valor no negativo?
3. Verifique que los conmutadores de los operadores de energía, aniquilación y creación satisfacen  $[H, a] = \hbar\omega a$  y  $[H, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger$ .
4. Usando las propiedades del conmutador, verifique que  $H|E_+\rangle = (E + \hbar\omega)|E_+\rangle$  y  $H|E_-\rangle = (E - \hbar\omega)|E_-\rangle$ .
5. Verifique que puede llevarse un “conteo” del nivel energético mediante el operador de conteo numérico:  $N_{E_+} = N_E + 1$  y  $N_{E_-} = N_E - 1$ .
6. Verifique que la ecuación diferencial  $\frac{d}{dx} \psi_{E_0}(x) = -\frac{m\omega}{\hbar} x \psi_{E_0}(x)$  tiene como solución  $\psi_{E_0}(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right]$ .
7. Verifique que la densidad de probabilidades del oscilador armónico cuántico en el estado energético base, es:  $|\psi_{E_0}(x)|^2 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar} x^2\right]$ .

# 11. PRECIOS DE ACCIONES

Una empresa no es una entidad en sí misma. Muchos de los cambios más importantes que afectan las perspectivas básicas de las utilidades empresariales son esencialmente aleatorios, es decir, impredecibles.

Burton Malkiel. *Un paseo aleatorio por Wall Street*.

---

## Términos

Arista, decoherencia, gráfico, moneda cuántica, moneda de Hadamard, operador de traslación, paseo aleatorio, paseo cuántico, vértice

---

## Ideas

- Hay dos grandes tipos de estrategias para elaborar modelos de precios de acciones. Una conduce a proponer fórmulas que describen la distribución de probabilidades del precio. La otra simula las trayectorias de los precios bajo ciertas condiciones.
- El modelo más común para representar el precio de las acciones en la Bolsa es el “movimiento browniano geométrico”. Como es usual en la teoría clásica, los aportes deterministas y aleatorios se separan.
- Las fórmulas el trabajo al momento de buscar el precio de instrumentos derivados de las acciones, pero también imponen restricciones
- Ante esto, es usual recurrir a las simulaciones que emplean paseos aleatorios clásicos. Tales modelos facilitan la comparación con el modelo cuántico del precio de las acciones.
- El paseo cuántico es el equivalente del “paseo aleatorio” clásico. El paseo aleatorio clásico es un caso especial en el que la interferencia está ausente.
- La interferencia causa que algunas trayectorias tengan mayor probabilidad de observarse, mientras otras tendrán una probabilidad menor.

- En el paseo aleatorio clásico cada paso es independiente del anterior y el proceso no conserva memoria. En contraste, las condiciones iniciales del paseo cuántico retienen gran importancia.
- Para elaborar el paseo cuántico se emplea una moneda cuántica, cuyo lanzamiento equivale a colocar la moneda en un estado de superposición.
- Para seguir las trayectorias generadas por la moneda cuántica, se define un operador que traduce el resultado al espacio de posición.
- En el paseo cuántico no se realizan observaciones en los pasos intermedios, únicamente en el paso final.
- Los modelos cuánticos tienen la capacidad de generar distribuciones de probabilidades sesgadas, multimodales y cuya varianza aumenta rápidamente.
- Es factible especificar una intensidad intermedia de interferencia, diferentes al extremo clásico donde no hay interferencia y al cuántico puro.
- Si en un paseo cuántico se observa el resultado del lanzamiento de la moneda en cada paso, el sistema replicará exactamente los resultados clásicos.

---

## El modelo clásico

Hay una amplia literatura sobre el precio de las acciones en la Bolsa, desde una perspectiva clásica. En dicha literatura se perfilan dos grandes estilos de análisis. Por una parte, tenemos una estrategia analítica que parte de supuestos concretos sobre la naturaleza del proceso subyacente y concluye con fórmulas que describen la distribución de probabilidades del precio del activo. Por otra parte, el análisis plantea como punto de partida un proceso aleatorio de varias etapas, que tiene la capacidad de converger a una distribución de probabilidades del precio bajo ciertas condiciones. A continuación, vamos a presentar los modelos clásicos utilizados para el precio de las acciones.

En principio, el precio de las acciones en la bolsa de valores podría representarse mediante un proceso generalizado de Wiener, suponiendo una tendencia determinista lineal y una varianza constante. Sin embargo, dicha especificación no captura adecuadamente el hecho de que los inversionistas suelen formar sus expectativas de crecimiento en términos proporcionales o porcentuales. Además, al representar los precios mediante un proceso de Wiener se deja la puerta abierta para la generación de precios negativos. Por tanto, es preferible plantear el modelo en términos de una transformación logarítmica. Veamos el procedimiento.

Sea  $S$  el precio de una acción en el período  $t$ . Vamos a incorporar una tendencia determinista proporcional a  $S$ ,  $\mu S$ , de forma que  $\mu$  representa la tasa de retorno esperada. Además, vamos a suponer que el retorno se manifiesta en un período de tiempo razonablemente pequeño, que representamos por  $\Delta t$ .

De esta manera tenemos que  $\Delta S = \mu S \Delta t$ . Conforme el intervalo de tiempo se hace más pequeño,  $\Delta t \rightarrow 0$ , la anterior ecuación puede escribirse:

$$dS = \mu S dt \quad \frac{dS}{S} = \mu dt$$

Integrando la anterior expresión entre 0 y un horizonte de tiempo relativamente grande,  $T$ , obtenemos que el precio de la acción,  $S_T$  está dado por:

$$S_T = S_0 e^{\mu T}$$

En ausencia de incertidumbre, el precio seguiría un proceso de composición continua a la tasa  $\mu$ , no muy diferente al que usáramos para describir un instrumento con un rendimiento fijo y composición continua. Sin embargo, ya mencionamos que la incertidumbre es una característica central del comportamiento de las acciones.

Para reflejar la incertidumbre, agregamos un componente aleatorio mediante un proceso de Wiener estándar,  $dz$ , partiendo del supuesto de que la desviación estándar en un intervalo breve de tiempo es proporcional al precio de la acción:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

Este es el modelo más común en la teoría financiera introductoria para el precio de las acciones en la Bolsa: el “movimiento browniano geométrico” (GBM). Como es usual en la teoría clásica, los componentes deterministas y aleatorios se separan. Dividiendo ambos lados de la ecuación por  $S$  para las reflejar variaciones proporcionales, nos queda:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

Más adelante utilizaremos aproximaciones en tiempo discreto, extraídas a partir de las fórmulas en tiempo continuo. La aproximación del proceso  $S$  en tiempo discreto puede escribirse como:

$$\Delta S \approx \mu S \Delta t + \sigma S \epsilon \sqrt{\Delta t} ; \epsilon \sim \phi(0,1)$$



Alternativamente, en términos de las variaciones proporcionales el proceso puede aproximarse según:

$$\frac{\Delta S}{S} \approx \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t} \sim \phi(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$$

Podemos agregar que, frecuentemente, GBM se interpreta como una versión en tiempo continuo del paseo aleatorio clásico con una tendencia lineal en logaritmos.

El lector puede comprobar que GBM,  $dS = \mu S dt + \sigma S dz$ , tiene la forma de un proceso de Ito relativamente sencillo,  $dx = a(x, t) dt + b(x, t) dz$ , pues tanto el componente determinista como el aleatorio dependen de  $S$ , y los componentes determinista y aleatorio se separan aditivamente. Por consiguiente, el Lema de Ito puede utilizarse para derivar las propiedades de un proceso general, tal que  $G = \ln S$ .

Establezcamos primero en qué consiste el citado Lema de Ito. Si  $G = G(x, t)$  es una función genérica de  $x$  y  $t$ , bajo condiciones razonablemente flexibles, incluyendo que  $G$  sea una función continua y diferenciable, se cumple que:

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz$$

Dado que  $dz$  es un proceso de Wiener estándar,  $G(x,t)$  es también un proceso de Ito, con un coeficiente dependiente del intervalo de tiempo que tiene forma  $\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2$ .

La varianza aportada por el componente dependiente del proceso de Wiener es  $\left(\frac{\partial G}{\partial x}b\right)^2$ . Es importante tomar nota de que tanto  $a$  como  $b$  están representando funciones, no necesariamente valores constantes, es decir,  $a = a(x,t)$  y  $b = b(x,t)$ . Veremos en un momento que, en estas aplicaciones, la expresión para  $dG$  se simplifica notablemente.

Anteriormente establecimos que los precios de las acciones pueden representarse por  $dS = \mu S dt + \sigma S dz$ . Utilizando el lema de Ito, escribimos que una función general del precio de las acciones,  $G = G(S,t)$ , sigue un proceso de forma:

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz$$

En este caso, tenemos que  $\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}$ ;  $\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$ ;  $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$ . Por tanto, haciendo las sustituciones:

$$dG = \left( \frac{1}{S} \mu S + 0 + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{S^2} \right) \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{1}{S} \sigma S dz$$

Lo anterior se simplifica a:

$$dG = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz$$

En vista de que tanto  $\mu$  como  $\sigma$  se suponen constantes, encontramos que  $G = \ln S$  es un proceso generalizado de Wiener. Este proceso puede concebirse también como un paseo aleatorio en tiempo continuo, que permite que en cada instante de tiempo el logaritmo del precio ocupe cualquier valor posible en el dominio de los números reales.

Nos interesa también conocer cuál es la distribución de probabilidades de  $\ln S$ . Recordando que  $dz$  es un movimiento browniano estándar, puede demostrarse que  $S_T$  tiene una distribución logarítmica-Normal o una log-Normal:

$$\ln S_T \sim \phi \left( \ln S_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right)$$

Estas fórmulas permiten elaborar modelos de proyección de los precios de las acciones, congruentes con los supuestos de que son constantes la tasa determinista de deriva y la desviación estándar del componente aleatorio. Además, contando con una fórmula para el precio de las acciones, o su logaritmo, es factible encontrar fórmulas para los precios de los derivados de las acciones, como puts y calls.

Pese a su conveniencia, las fórmulas también imponen restricciones prácticas, pues no siempre es sencillo incorporar situaciones “excepcionales” en los procesos de precios, como pueden serlo una distribución de dividendos, o la posibilidad de realizar el ejercicio temprano de una opción. Ante esto, es usual recurrir a los paseos aleatorios clásicos, incluyendo sus variantes discretas.

Hemos presentado la estrategia de modelización clásica que arroja una fórmula específica para describir el comportamiento del precio de las acciones. A continuación, presentaremos una estrategia alternativa, que consiste en representar la trayectoria de los precios mediante pasos discretos en múltiples etapas.

El modelo clásico binomial representa la trayectoria del precio como una secuencia de movimientos al alza y a la baja, los cuales son equiprobables. Para replicar las fórmulas clásicas, necesitamos una tasa de deriva determinista constante, una desviación estándar constante, y expresar el precio en logaritmos.

El paseo aleatorio discreto que, en el límite, se aproxima a la fórmula que encontramos hace un momento, establece los pasos al alza,  $u$ , y a la baja,  $d$ , como:

$$u = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta_t + \sigma\sqrt{\Delta_t} \quad d = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta_t - \sigma\sqrt{\Delta_t}$$

Recuerde que estamos trabajando con la transformación logarítmica de los precios, por lo que no hace daño alguno si el proceso camina hacia valores negativos. De hecho, este proceso puede abarcar por completo  $[-\infty, +\infty]$ . La longitud del paso es fija, es decir,  $u$  y  $d$  son constantes a través del tiempo. Además, se da por sentado que los intervalos de tiempo,  $\Delta_t$ , son relativamente pequeños y no tienen traslapes, para asegurar la completa independencia de una etapa a la siguiente. En cada etapa del proceso, puede suponerse que ocurre el lanzamiento de una moneda clásica balanceada, de forma que  $u$  y  $d$  tienen el mismo chance de ocurrir.

Como el lector seguramente ya concluyó, esta especificación es un paseo aleatorio binomial clásico con  $u = \sigma\sqrt{\Delta_t}$  y  $d = -\sigma\sqrt{\Delta_t}$ , en combinación con una tasa determinista de retorno  $\mu \Delta_t$  y un término de ajuste  $-\frac{\sigma^2}{2} \Delta_t$ . Por construcción, la varianza de este tipo de proceso aumenta a un ritmo proporcional a  $t$ .

Pese a que esta estrategia de modelización no devuelve una fórmula, excepto en un caso límite, tiene flexibilidad para hacer ajustes con importancia práctica para los inversionistas. Por ello, se han planteado a través del tiempo distintas variaciones del paseo aleatorio para incorporar las distribuciones de dividendos, las variaciones de las tasas de retorno, o la posibilidad de cambios aleatorios de régimen. El modelo de paseo aleatorio clásico tiene también el mérito de facilitar la comparación con el modelo cuántico en tiempo discreto del precio de las acciones, que introducimos posteriormente.

El lector que desea investigar más a fondo el tratamiento clásico de los precios de las acciones puede referirse a las exposiciones de Osborne (1959), Cootner (1964) y Fama (1965). Asimismo, para un estudio comparativo del desempeño de los modelos clásicos de retornos de las acciones, puede consultar Kon (1984). Otras fuentes asociadas frecuentemente con los paseos aleatorios clásicos en los mercados financieros son Malkiel (1999) y Malkiel (2003). Específicamente en torno a la Normalidad de los retornos de las acciones, el lector puede consultar Richardson y Smith (1993).

---

## Transición al ámbito cuántico

El paseo cuántico es el equivalente del famoso “paseo aleatorio” de la teoría clásica. Hay buenas razones para percibir la semejanza. En ambos casos el precio de un activo puede subir o bajar aleatoriamente dentro de un plazo de tiempo y el rango de las trayectorias posibles del precio se amplía notablemente mientras mayor sea el tiempo transcurrido.

Sin embargo, existen también notables diferencias. Una de las más significativas tiene que ver con la frecuencia con la que se realizan las observaciones del proceso. Un paseo clásico es indiferente ante la frecuencia con la que se observa el proceso. En contraste, el paseo cuántico se ve influido por las observaciones realizadas al punto que, si se realizan observaciones en cada instante de tiempo o etapa del proceso, la distribución de probabilidades que se desprende del paseo cuántico es similar a la del paseo clásico.

En conexión con este punto, puede decirse que una diferencia crucial entre ambos tipos de paseo radica en la interferencia entre posibles trayectorias. Es válido interpretar el paseo aleatorio clásico como un caso especial del paseo cuántico, en el que la interferencia está completamente ausente.

El efecto de la interferencia en el enfoque cuántico puede causar que algunas trayectorias tengan mayor probabilidad de observarse, mientras que otras tendrán una probabilidad menor, en comparación con el paseo clásico. La distribución de probabilidades resultante de un paseo cuántico difiere del paseo clásico debido a la interferencia entre las trayectorias. En la medida en que se realicen observaciones frecuentes sobre un paseo cuántico, se elimina el efecto de las trayectorias de interferencia y paulatinamente el proceso se acerca al clásico.

Vale subrayar que el proceso cuántico tiene un carácter determinista antes de realizada una observación, antes de ello el estado no está evolucionando aleatoriamente. La aleatoriedad en el paseo cuántico se manifiesta al momento de realizar una observación, en cuyo caso del paseo cuántico se desprenden distribuciones de probabilidades en correspondencia con el lapso que haya transcurrido.

Una de las características del paseo aleatorio clásico es que cada instante es independiente de la trayectoria previa, es decir, el componente aleatorio del proceso no conserva memoria y la relevancia de las condiciones iniciales se diluye a través del tiempo. En contraste, el proceso generador del paseo cuántico retiene la información del estado inicial. En consecuencia, las condiciones iniciales del paseo cuántico retienen su relevancia y tienen la capacidad de modificar la distribución de probabilidades que corresponde al momento en el que se realiza una observación.



## Paseo cuántico en tiempo continuo

Para definir un paseo cuántico en tiempo continuo, primero introducimos un paseo clásico y, posteriormente, vamos a reemplazar las probabilidades clásicas por amplitudes cuánticas. En congruencia con el paradigma clásico, el paseo aleatorio clásico existe únicamente en un espacio de posición o precios que es, simultáneamente, el espacio de estado y de observación, y que representaremos mediante la notación  $\mathcal{H}_p$ . En esta sección seguiremos de cerca Chandrashekar (2010).

Para representar un paseo en tiempo continuo se emplea el lenguaje matemático de los gráficos. Un gráfico es un par ordenado,  $G = (V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto de objetos indivisibles conocidos como vértices o nodos, y  $E$  es un conjunto de aristas o nexos, que conectan pares de vértices sin jerarquía alguna:

$$E \subseteq \{\{x, y\} | x, y \in V, x \neq y\}$$

El espacio de precios,  $\mathcal{H}_P$ , está definido por un conjunto de vértices,  $V$ , y de aristas,  $E$ . Asociamos entonces el espacio de precios con el gráfico,  $G = (V, E)$ . Lo siguiente es definir una matriz de adyacencia, que representa instantáneamente un “paso” del paseo sobre el conjunto de vértices,  $V$ . Los elementos de una matriz de adyacencia indican si determinados pares de vértices son adyacentes o no en una gráfica:

$$A_{j,k} = \begin{cases} 1 & (j,k) \in E \\ 0 & (j,k) \notin E \end{cases}$$

La idea de la matriz de adyacencia es que los elementos tienen valor 1 cuando hay una arista que conecta el  $j$ -ésimo con el  $k$ -ésimo vértice, y valor 0 cuando no existe tal arista. En las gráficas simples, la diagonal mayor de la matriz está constituido por ceros, pues no se permiten bucles.

Adicionalmente, necesitamos definir una matriz generadora, que representaremos por  $H$ . Siguiendo esta notación, representaremos el número de aristas que se conectan con el vértice  $j$  como  $d_j$ , mientras que  $\gamma$  es la probabilidad de hacer una transición entre vértices adyacentes por unidad de tiempo. En el contexto del paseo cuántico en tiempo continuo,  $H$  está dada por:

$$H_{j,k} = \begin{cases} d_j \gamma & j = k \\ -\gamma & (j,k) \in E \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

Ahora definimos la probabilidad de encontrarse en el vértice  $j$  en el instante  $t$  como  $P_j(t)$ . Una transición sobre el gráfico  $G$  es la solución a la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt}P_j(t) = - \sum_{k \in V} H_{j,k} P_k(t)$$

Observe el signo negativo delante de la sumatoria. Si analizamos la estructura de  $H_{j,k}$ , los aportes a la probabilidad de transición son positivos cuando  $(j,k) \in E$ , es decir, cuando los vértices son adyacentes. Asimismo, los aportes a la transición son negativos cuando no se registra una transición ( $j = k$ ), pues se trata del mismo vértice  $k$ . El aporte negativo es proporcional al número de aristas que conectan con el citado vértice. Finalmente, el aporte a la transición es nulo cuando los vértices no son adyacentes ni tampoco se trata del mismo vértice.

Puede demostrarse que la solución a la anterior ecuación diferencial es:

$$P(t) = P(0)\exp[-Ht]$$

Para cuantizar el paseo clásico, vamos a sustituir las probabilidades clásicas  $P_j$  por amplitudes cuánticas  $a_j(t) = \langle j|\psi(t)\rangle$  donde  $|j\rangle$  habita el espacio de precios,  $\mathcal{H}_p$ . Por su parte  $|\psi(t)\rangle$  representa el estado en el período  $t$ , que habita un espacio diferente al espacio de precios o de posición. Además, es necesario introducir un factor  $i = \sqrt{-1}$ .

Con los citados ajustes, la ecuación diferencial  $\frac{d}{dt}P_j(t) = -\sum_{k \in V} H_{j,k}P_k(t)$  queda:

$$i \frac{d}{dt}a_j(t) = \sum_{k \in V} H_{j,k}a_k(t)$$

La anterior ecuación diferencial tiene la forma de una ecuación de Schrödinger donde  $\hbar = 1$  :

$$i \frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$$

Dicha ecuación tiene como solución:

$$|\psi(t)\rangle = \exp[-i\mathbf{H}t]|\psi(0)\rangle$$

Recordemos ahora el operador de evolución temporal que habíamos encontrado en el contexto de la ecuación de Schrödinger, y que está dado por la ecuación  $\mathbf{U}(t) = \exp\left[-\frac{i\mathbf{H}}{\hbar}t\right]$ . Si hacemos  $\hbar = 1$ , confirmamos que un paseo cuántico en tiempo continuo es un proceso descrito por una ecuación semejante a la ecuación de Schrödinger.

Hasta el momento estuvimos presentando el espacio de precios,  $\mathcal{H}_p$ , como un gráfico definido por un conjunto de vértices,  $V$ , y de aristas,  $E$ . Para especificar un paseo cuántico en tiempo continuo sobre la línea de los números enteros,  $\mathbb{Z}$ , el espacio de posición,  $\mathcal{H}_p$ , puede precisarse como un espacio definido por las bases de posición  $|\psi_j\rangle$  de manera que  $j \in \mathbb{Z}$ .

En este caso, puede demostrarse que el hamiltoniano,  $\mathbf{H}$ , tiene la forma:

$$\mathbf{H}|\psi_j\rangle = -\gamma|\psi_{j-1}\rangle + 2\gamma|\psi_j\rangle - \gamma|\psi_{j+1}\rangle$$

El hamiltoniano transforma las amplitudes probabilistas a una tasa  $\gamma$ , que es independiente del tiempo. En este contexto, el hamiltoniano ocupa el lugar de la matriz generadora, que a su vez evoluciona en el tiempo mediante la aplicación de  $\mathbf{U}(t) = \exp \left[ -\frac{i\mathbf{H}}{\hbar} t \right]$ .

---

## Paseo cuántico en tiempo discreto

En la sección anterior presentamos el paseo cuántico en tiempo continuo, con la posibilidad de restringir los posibles valores del espacio de precios a los números enteros. A continuación, introducimos el paseo cuántico en tiempo discreto, siguiendo el modelo de Orrell (2021a).

En esta discusión podemos suponer que tenemos un objeto al que denominaremos moneda cuántica. La moneda cuántica puede tener dos estados en la base de medición, los cuales representaremos empleando la notación introducida en la Parte II de este texto:

$$|\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Las mediciones efectuadas sobre la moneda cuántica solamente pueden tener dos resultados, uno asociado con un alza del precio y otro con su baja. Los kets  $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$  constituyen la base del espacio del lanzamiento de la moneda, el cual representaremos como  $\mathcal{H}_C$ . El espacio hilbertiano asociado con el lanzamiento de la moneda es bidimensional, pues solamente son posibles dos estados.

Ahora introducimos un operador unitario que representa el lanzamiento de la moneda cuántica. En el contexto, el lanzamiento equivale a colocar la moneda en un estado de superposición. Vamos a suponer que dicha superposición está representada en la base de Hadamard. El operador del lanzamiento de la moneda de Hadamard es:

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Para seguir las trayectorias de la moneda cuántica, necesitamos definir un espacio que abarque no solamente los resultados de cada lanzamiento de la moneda, sino que acumule el impacto de una secuencia de lanzamientos. Para avanzar en este rumbo, definiremos un operador que traduce el lanzamiento de la moneda a una posición en un espacio hilbertiano que denominaremos  $\mathcal{H}_P$ . Este traduciría el resultado del lanzamiento de la moneda, el cual queda definido sobre las bases de  $\mathcal{H}_C$  ( $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$ ) a un movimiento en el espacio de posición,  $\mathcal{H}_P$ . Las bases del espacio de posición están representadas por el conjunto de todos los números enteros  $\{|j\rangle: j \in \mathbb{Z}\}$ .

Podemos decir que el paseo cuántico está definido sobre un espacio hilbertiano  $\mathcal{H}$ , donde  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c \otimes \mathcal{H}_p$ . El símbolo  $\otimes$  representa el producto tensorial.

Definamos ahora el operador de traslación:

$$T = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes \sum_j |j+1\rangle\langle j| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes \sum_j |j-1\rangle\langle j|$$

El operador de traslación sube o baja la posición dependiendo del lanzamiento de la moneda. Este operador no es equivalente a una operación de medición, por lo que no produce el colapso del estado.

El paseo cuántico de  $N$  pasos se define como una transformación  $U^N$  donde

$$U = T (R \otimes I)$$

Cada paso del paseo cuántico aplica el operador de lanzamiento de la moneda y luego ajusta la posición mediante el operador de traslación. Estas operaciones se repiten sucesivamente  $N$  veces. Es importante subrayar que, en el paseo cuántico, no se realizan observaciones en los pasos intermedios, únicamente en el paso final.

Veamos ahora un ejemplo. Considere que el estado inicial es  $\Phi_0 = |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$ , es decir, la ubicación inicial del objeto es  $|0\rangle$  y la moneda está en la posición  $|\uparrow\rangle$ .



La aplicación de  $R$  coloca a la moneda en el estado de superposición:

$$R |\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle$$

A continuación, se aplica el operador de traslación en un primer paso:

$$U |\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle \otimes |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle$$

En el primer paso,  $P_{-1}(1) = \frac{1}{2}$  y  $P_{+1}(1) = \frac{1}{2}$ . Aplicando nuevamente el operador de traslación, puede demostrarse que:

$$U^2 |\Phi_0\rangle = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle \otimes |2\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |0\rangle + |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |-2\rangle)$$

en cuyo caso  $P_{-2}(1) = \frac{1}{4}$ ,  $P_0(1) = \frac{1}{2}$  y  $P_{+2}(1) = \frac{1}{4}$ .

Hasta este momento la distribución de los resultados sigue siendo simétrica, como en el caso del paseo aleatorio clásico. Sin embargo, la distribución se vuelve asimétrica a partir del tercer paso. La asimetría se asocia con el hecho de que la moneda estaba inicialmente en el estado  $|\uparrow\rangle$ . El sesgo de la distribución de probabilidades depende del estado inicial de la moneda. Por ejemplo, si se selecciona un estado inicial balanceado  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle$  la distribución de probabilidades conservará la simetría.

Cabe notar que, independientemente del sesgo, la varianza de la distribución del paseo cuántico aumentará de manera cuadrática, en lugar de hacerlo de forma lineal.

En términos generales, los modelos cuánticos tienen la capacidad de generar distribuciones de probabilidades sesgadas cuya varianza aumenta más rápidamente que en el caso clásico. Es posible demostrar que la varianza en el modelo cuántico aumenta al ritmo  $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) t^2$ , en comparación con el ritmo de aumento proporcional a  $t$  del modelo clásico.

Podemos escribir la función de onda que describe el estado en el paso  $n$ ,  $|\psi(n)\rangle$ , como:

$$|\psi(n)\rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} (a_j(n) |\uparrow\rangle + b_j(n) |\downarrow\rangle) \otimes |j\rangle$$

En la anterior expresión, la sumatoria se realiza sobre los  $j$ , por lo que abarca la totalidad de las bases de posición.

Puede demostrarse que, tras la aplicación de los operadores antes definidos, los coeficientes de la función de onda pueden escribirse de la siguiente manera:

$$a_j(n+1) = \frac{1}{\sqrt{2}}a_{j-1}(n) + \frac{1}{\sqrt{2}}b_{j-1}(n)$$

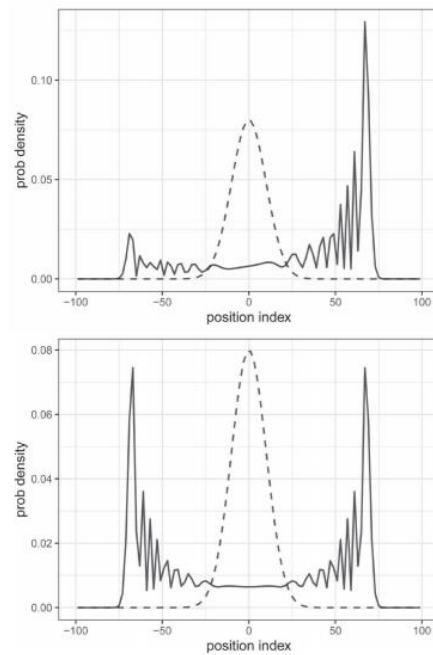
$$b_j(n+1) = \frac{1}{\sqrt{2}}a_{j+1}(n) - \frac{1}{\sqrt{2}}b_{j+1}(n)$$

Además, la probabilidad de que la función de onda se encuentre alineada hacia arriba o hacia abajo en la posición  $j$  viene dada por la expresión:

$$P_j(n+1) = \frac{1}{2}|a_{j-1}(n) + b_{j-1}(n)|^2 + \frac{1}{2}|a_{j+1}(n) - b_{j+1}(n)|^2$$

Probabilidades de encontrar el objeto en la posición  $j$  tras  $n$  lanzamientos de la moneda

j/n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0	1										
1					$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
2				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$		$\frac{2}{16}$		$\frac{2}{16}$		$\frac{10}{16}$		$\frac{1}{16}$	
5	$\frac{1}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{4}{32}$		$\frac{4}{32}$		$\frac{17}{32}$		$\frac{1}{32}$



Las líneas sólidas representan distribuciones de probabilidad de un paseo cuántico de 100 pasos empleando la moneda de Hadamard. El gráfico superior muestra el resultado cuando el estado inicial de la moneda es “arriba”, mientras el inferior representa el caso de un estado inicial balanceado. Las líneas discontinuas representan el caso clásico, como referencia.

Cabe recordar, sin embargo, que el estado en un sistema cuántico evoluciona de manera determinista y no aleatoria, en tanto no se realicen observaciones. Para que el paseo cuántico tenga  $N$  pasos, no deben realizarse observaciones antes del último paso. Para evitar la confusión, no aludimos a un paseo “aleatorio” cuántico.

El lector interesado puede consultar la introducción al paseo cuántico en Kempe (2003). Para más información sobre la conexión entre el paseo cuántico en tiempo continuo y en tiempo discreto, puede referirse a Strauch (2006). Los paseos pueden generalizarse al caso multidimensional y el lector puede consultar Mackay et al (2002).

---

## Niveles de interferencia

Es factible especificar modelos que reflejan una intensidad intermedia de interferencia, diferentes al extremo clásico donde no hay interferencia, y al cuántico puro en el que la interferencia se aplica sin mitigación. Los casos intermedios pueden atribuirse a la interacción frecuente entre el sistema cuántico y su entorno, lo que puede dar origen a la *decoherencia cuántica*. Además, si en un paseo cuántico se observa el resultado del lanzamiento de la moneda en cada paso, la decoherencia será completa y el sistema replicará exactamente los resultados clásicos.

En conexión con esto, la moneda de Hadamard, empleada para generar el paseo cuántico en tiempo discreto, es un caso especial de operadores con forma:

$$R_{\xi, \theta, \varsigma} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \exp[i\xi] & \sin(\theta) \exp[i\varsigma] \\ \sin(\theta) \exp[i\varsigma] & -\cos(\theta) \exp[i\xi] \end{pmatrix}$$

Por ende, podemos proponer un paso cuántico sobre la base de transformaciones de la forma:

$$U = T(R_{\xi, \theta, \varsigma} \otimes I)$$

Puede comprobarse que la moneda de Hadamard es  $R_{0, \frac{\pi}{4}, 0}$ .

La decoherencia cuántica acerca los resultados del paseo cuántico al paseo aleatorio clásico. Es posible realizar simulaciones con monedas imperfectas de Hadamard, que inducen distribuciones de probabilidad semejantes al caso clásico.

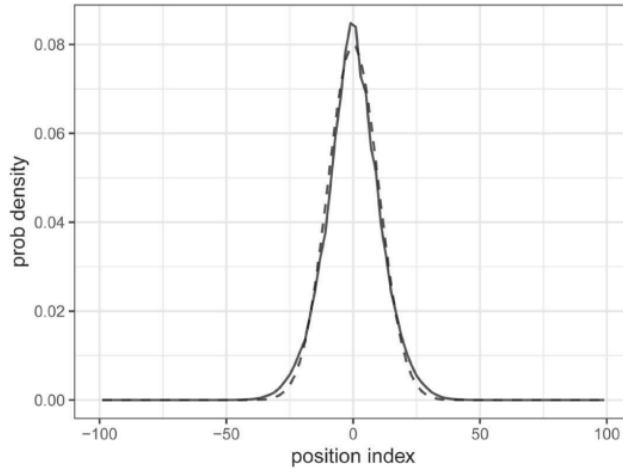
Los modelos clásicos tienen a un tomador de decisiones que recibe información que llega aleatoriamente en cada período, que sigue un paseo aleatorio, acercándose y alejándose alternativamente de una decisión. Los paseos cuánticos también pueden emplearse como modelos para la toma de decisiones. En la versión cuántica el tomador de decisiones está actualizando su

campo de información en cada período y se mantiene en un estado de superposición, mientras no llega a una decisión final. La decisión final refleja la totalidad de trayectorias posibles, incluyendo las trayectorias de interferencia.

La desviación del resultado cuántico con respecto al clásico depende de la intensidad de la decoherencia asociada con la interacción del tomador de decisiones y el entorno.

Los paseos aleatorios y cuánticos pueden emplearse también para describir la trayectoria del precio de activos financieros cuyo valor es incierto, como en el caso de las acciones que cotizan en la bolsa de valores.





La línea sólida representa la distribución de probabilidad de un paseo cuántico de 400 pasos, empleando una moneda imperfecta de Hadamard,  $R_{0, \frac{\pi}{4}, \zeta'}$  de modo que  $\zeta \sim N(0,1)$ . La línea discontinua representa el caso clásico, como referencia.

**Fuente:** Orrell, David. Quantum Economics and Finance: An Applied Mathematics Introduction (p. 97). Panda Ohana Publishing.

El lector que desea profundizar en torno a los paseos cuánticos puede consultar Aharonov et al (1993), Chandrashekar et al (2008). Asimismo, en torno a la decoherencia en los paseos cuánticos, puede consultarse Brun et al (2003).

---

## Precios cuánticos

En el enfoque cuántico, la evolución del precio sigue el esquema del paseo cuántico antes descrito, con la adición de una tasa de deriva constante. Esto reproduce la estrategia empleada para generar el paseo aleatorio clásico.

No obstante, el paseo cuántico tiene varias características que lo distinguen del paseo aleatorio clásico. Una es que el sistema tiene memoria del impulso inicial, por lo que comenzar en una configuración "hacia arriba" da como resultado una distribución sesgada al alza, mientras que un estado inicial neutro crea una distribución bimodal, y una configuración inicial "hacia abajo" origina una distribución sesgada hacia la baja.

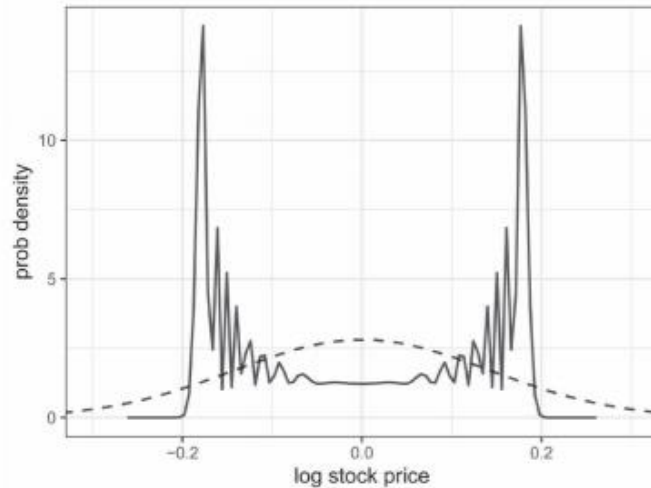
La naturaleza irregular de la distribución de probabilidades en el paso  $N$ , resultante del paseo cuántico, se asocia con la multimodalidad. Esto contrasta con la moda única que caracteriza la distribución de probabilidades clásica y se conecta con la experiencia empírica de los agentes en el

mercado en cuanto a la existencia de rangos de precios “calientes” o “fríos”, así como “pisos” y “techos” que, una vez superados, ocasionan saltos más o menos discretos en el rango típico de los precios.

Otra característica que diferencia al modelo cuántico del precio de activos es que la varianza crece cuadráticamente, en lugar de crecer linealmente. En ausencia de decoherencia la varianza en la versión cuántica del modelo aumenta al ritmo  $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) t^2$ , que es superior al ritmo proporcional a  $t$  del modelo clásico. Esto es un reflejo de la tendencia del sistema a acumular masa de probabilidad en los extremos. El sistema es sensible a la decoherencia, por lo que se reduce al caso clásico si la observación ocurre en cada paso de tiempo o se registra una fuerte interacción con el entorno.

El lector que desea profundizar en torno a los métodos cuánticos para el precio de acciones en un mercado puede consultar Khrennikov (2009), Zhang (2010), Aerts et al (2012), Cotfas (2013), Meng et al (2015), Ahn et al (2017) y Ohwadia y Ogunfiditimi (2018).

En relación con los métodos para elaborar proyecciones empleando métodos cuánticos, el lector puede referirse a Schuld et al (2020), Dasking (2022), Emmanoulopoulos y Dimoska (2022) y Zhu (2022).



La línea sólida representa la distribución del precio en logaritmos de un activo, de manera que el número total de pasos equivale a un lapso de 6 meses, con un precio inicial estandarizado, volatilidad anualizada de 20% y tasa de interés libre de riesgo de 2%. Como referencia, la línea discontinua es el caso clásico.

---

**Fuente:** Orrell, David. Quantum Economics and Finance: An Applied Mathematics Introduction (p. 97). Panda Ohana Publishing.

## Preguntas

1. Compruebe que el operador  $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  coloca los estados en la base de medición,  $|\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  y  $|\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , en la base de Hadamard.
2. Verifique que la función de onda que describe el estado en el paso  $n$ ,  $|\psi(n)\rangle$ , puede escribirse como  $|\psi(n)\rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} (a_j(n) |\uparrow\rangle + b_j(n) |\downarrow\rangle) \otimes |j\rangle$ .
3. Verifique que, tras la aplicación de los operadores de transformación, los coeficientes de la función onda pueden escribirse como  $a_j(n+1) = \frac{1}{\sqrt{2}} a_{j-1}(n) + \frac{1}{\sqrt{2}} b_{j-1}(n)$  y  $b_j(n+1) = \frac{1}{\sqrt{2}} a_{j+1}(n) - \frac{1}{\sqrt{2}} b_{j+1}(n)$ .
4. Encuentre las expresiones para  $U^3 |\Phi_0\rangle$ ,  $U^4 |\Phi_0\rangle$  y  $U^5 |\Phi_0\rangle$  cuando el estado inicial en el paseo cuántico es desbalanceado,  $\Phi_0 = |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$ .
5. Encuentre las expresiones para  $U^k |\psi_0\rangle$ ,  $k = 1, \dots, 5$ , cuando el estado inicial es balanceado,  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle$ .
6. Demuestre que la moneda de Hadamard es un caso especial del operador  $R_{0, \frac{\pi}{4}, 0}$ .

# 12. PRECIOS DE OPCIONES

"Al igual que muchos grandes inventos, comenzó como un juego y terminó con un reconocimiento tardío".

Fischer Black. *Cómo inventamos la fórmula de opciones.*

---

## Términos

Black-Scholes-Merton, volatilidad histórica, volatilidad implícita

## Ideas

- La ecuación diferencial conocida como el modelo de Black-Scholes-Merton (BSM) rige el precio de los contratos derivados de acciones. Formalmente, BSM supone que las acciones no pagan dividendos, pese a lo cual se considera que BSM representa una aproximación razonable aun cuando el activo subyacente sí paga un dividendo.
- El único parámetro en BSM que no puede observarse directamente es la volatilidad de  $S$ . Si bien pueden realizarse estimaciones mediante datos históricos, en la práctica la volatilidad se estima a partir de los precios de las opciones que se observan en el mercado como “volatilidades implícitas”.
- Las volatilidades históricas miran hacia atrás, el cálculo se realiza sobre la base de lo que ha ocurrido en el pasado. En contraste, las volatilidades implícitas miran hacia el futuro y sintetizan las perspectivas subjetivas de los agentes en el mercado.
- El procedimiento para estimar el precio de una opción usando métodos cuánticos tiene como punto de partida la simulación de un paseo cuántico sobre un índice de posición asociado con la transformación logarítmica del precio.

- El grado de coincidencia del valor prospectivo de las opciones entre los métodos cuánticos y clásicos depende de la intensidad de la decoherencia.
- El precio de la opción definitivamente no alude a la evolución histórica del precio de la acción, sino a posibles trayectorias futuras de la acción. El modelo clásico del paseo aleatorio supone que las visiones retrospectivas y prospectivas coinciden.
- El esquema clásico predice en el equilibrio una ausencia de motivación para comprar o vender. No obstante, en el enfoque cuántico se plantea una tensión permanente entre lo retrospectivo y lo prospectivo, asignando probabilidades diferentes a cero a la realización de transacciones.
- En el análisis retrospectivo la decoherencia genera distribuciones empíricas que se asemejan al caso clásico, siempre que en el mercado se concreten transacciones con suficiente frecuencia.
- La decoherencia será imperfecta, incluso retrospectivamente, lo que puede explicar la supervivencia de rastros cuánticos en las series históricas, incluyendo sesgos, multimodalidad, propensión a eventos extremos y aglomeración de la volatilidad.
- La permanente tensión entre los análisis retrospectivo y prospectivo se manifiesta especialmente en las divergencias entre la volatilidad histórica y la volatilidad implícita reveladas empíricamente por el mercado.
- El modelo de oferta y demanda de la opción hace uso de las propiedades cuánticas en dos aspectos. Tanto compradores como vendedores formulan sus opiniones sobre la trayectoria



futura del activo subyacente, y por ende sobre la distribución de probabilidades de la opción. Las transacciones de compraventa se llevan a cabo dentro de un proceso cuántico, en el cual compradores y vendedores se mantienen en un estado de superposición en tanto no se concrete una transacción.

- En un mercado cuántico las transacciones se llevan a cabo con diferentes grados de probabilidad, a diferencia del mercado clásico donde el equilibrio se asocia con la ausencia de transacciones.

---

## Definiciones

La industria financiera ha sido usuaria por varias décadas de los diferentes modelos clásicos para el avalúo del precio de derivados. El interés de la industria se está volcando hacia futuras aplicaciones de los métodos cuánticos. Ejemplo de esto es que en 2020 BBVA de España anunció que el avalúo de derivados financieros es una de sus seis líneas de investigación activas en torno a la aplicación de métodos cuánticos. Ese mismo año el banco Standard Chartered anunció que estaba desarrollando líneas de investigación en torno a la aplicación de métodos cuánticos para la gestión de riesgos financieros y la optimización de carteras, entre otros objetivos. En 2021 el banco americano JPMorgan anuncia un guía indicando su interés por desarrollar aplicaciones de los métodos cuánticos en

diferentes áreas, incluyendo la proyección de volatilidades, y el avalúo de activos financieros y opciones exóticas.

En conexión con la demanda de la industria financiera, es pertinente indagar sobre la manera en que pueden aplicarse métodos cuánticos a partir de la teoría clásica del precio de opciones. Repasemos entonces en qué consiste la teoría clásica para indagar posteriormente sobre las posibilidades de integración con los métodos cuánticos.

Por “Opción” entendemos un contrato que otorga al tenedor el derecho, mas no la obligación, de hacer algo. Los tipos de opciones más usuales se denominan *calls* y *puts*. Un *call*, otorga al poseedor el derecho de adquirir un activo, hasta una fecha límite, por un precio predeterminado (precio de ejecución). Un *put*, otorga al poseedor el derecho de vender un activo, hasta una fecha límite, por un precio predeterminado. La fecha límite para ejercer una opción se conoce como fecha de “expiración”, “maduración” o “vencimiento”. El precio especificado en un contrato de opciones es el precio de ejecución o de ejercicio (*strike*).

Las opciones también pueden clasificarse como *americanas* o *européas*. Las americanas pueden ejercerse en cualquier momento antes de la expiración si se cumplen ciertas condiciones. En contraste, las europeas solamente pueden ejercerse al momento de la expiración. En general, las opciones europeas son más sencillas de analizar, pero la mayor parte de opciones que se transan en los mercados son americanas. Debe destacarse que la designación como “americana” o “europea” definitivamente no

alude al lugar donde se cotizan las opciones, o donde se transan los activos subyacentes, sino que alude al estilo de ejercicio posible para una opción.

Sean  $K$  el precio de ejercicio de una opción y  $S_T$  el precio final (terminal) del activo subyacente. El beneficio o pérdida de adquirir (long) una opción call europea es:

$$\max(S_T - K, 0)$$

El beneficio o pérdida de adquirir (long) una opción put europea es:

$$\max(K - S_T, 0)$$

El beneficio o pérdida de emitir (short) una opción call europea es:

$$-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0)$$

El beneficio o pérdida de emitir (short) una opción put europea es:

$$-\max(K - S_T, 0) = \min(S_T - K, 0)$$

Sean  $K$  el precio de ejercicio de una opción y  $S_T$  el precio final (terminal) del activo subyacente. El beneficio o pérdida de adquirir (long) una opción call europea es:

$$\max(S_T - K, 0)$$

El beneficio o pérdida de adquirir (long) una opción put europea es:

$$\max(K - S_T, 0)$$

El beneficio o pérdida de emitir (short) una opción call europea es:

$$-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0)$$

El beneficio o pérdida de emitir (short) una opción put europea es:

$$-\max(K - S_T, 0) = \min(S_T - K, 0)$$

Los contratos de opciones pueden pactarse sobre una variedad de activos subyacentes, incluyendo acciones de empresas, monedas, futuros o índices. Lo usual es enfocarse inicialmente en opciones sobre acciones de empresas que se transan en la Bolsa de Valores. Usualmente, una opción tiene como subyacente 100 unidades accionarias, aunque normalmente se ignora el multiplicador en la discusión teórica, para simplificar las fórmulas.

Una opción call está *en el dinero* cuando  $S > K$ , *al dinero* cuando  $S = K$ , y *fuera del dinero* cuando  $S < K$ .

Una opción put está *en el dinero* cuando  $S < K$ , *al dinero* cuando  $S = K$ , y *fuera del dinero* cuando  $S > K$ .

Tiene sentido ejercer una opción solamente cuando está *en el dinero*. Cuando la opción es americana y se encuentra en el dinero, puede ejercerse incluso antes de la fecha de expiración.

Hay otros términos comunes en conexión con las opciones, como la distinción entre el valor intrínseco y extrínseco. Se denomina *valor intrínseco* al valor que tuviera una opción si ésta se ejerciera inmediatamente y ya no quedara plazo para el vencimiento. Cuando aún hay plazo para el vencimiento, las opciones suelen retener un *valor temporal* o *valor extrínseco*, que depende de varios factores, incluyendo la tasa libre de riesgo, la distancia entre el precio de ejercicio y el precio que prevalece en el mercado, y el plazo residual al vencimiento. El valor total de una opción es la suma de los valores intrínseco y extrínseco.

---

## Modelo de Black–Scholes

La ecuación diferencial conocida como el modelo de Black – Scholes (BSM) rige el precio de los contratos derivados de acciones. Formalmente, BSM supone que las acciones no pagan dividendos, pese a lo cual se considera que BSM representa una aproximación razonable aun cuando el activo subyacente sí paga un dividendo.<sup>16</sup>

Como veremos en un momento, la técnica crucial que se emplea para derivar la ecuación de BSM es la estructuración de una cartera libre de riesgo que tiene exposición simultánea al derivado y a la acción subyacente. La ausencia de un posible arbitraje implica que el retorno de tal cartera necesariamente tiene que ser la tasa de interés libre de riesgo,  $r$ .

La noción es que el precio del derivado debe comportarse de tal forma que no haya forma de hacer arbitraje entre el derivado y el subyacente, considerando que estos tienen como fuente común de incertidumbre el movimiento del precio subyacente. En un período instantáneamente breve de tiempo, hay una correlación perfecta entre el precio del derivado y el precio del subyacente, de forma que la ganancia o pérdida de una exposición cancela la pérdida o ganancia de la segunda exposición.

---

<sup>16</sup> Se han propuesto numerosos modelos que, desde la perspectiva clásica, mejoran la precisión de BSM cuando los dividendos de las empresas son importantes.

No obstante, pese a que los riesgos han sido neutralizados por completo, dicha cartera aún merece obtener un retorno y el que le corresponde es la tasa libre de riesgo.

La derivación de la ecuación de BSM parte de los siguientes supuestos: (i) el precio de la acción subyacente ( $S$ ) obedece  $dS = \mu S dt + \sigma S dz$ , donde  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes; (ii) no hay restricciones a las ventas cortas, impuestos ni costos de transacción; (iii) los instrumentos financieros son perfectamente divisibles y se transan de manera continua; (iv) no se pagan dividendos durante la vigencia del derivado; y, finalmente, (v) no existen oportunidades para arbitraje libre de riesgo y la tasa de interés libre de riesgo ( $r$ ) es constante e igual para todos los vencimientos.

Ya establecimos que el precio de una acción,  $S$ , obedece la ecuación  $dS = \mu S dt + \sigma S dz$ . Vamos a suponer, además, que  $f$  es el precio de un derivado cuyo precio depende del valor del subyacente  $S$ . Sobre la base del Lema de Ito:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz$$

Para un intervalo de tiempo relativamente breve,  $\Delta t$ , puede escribirse una aproximación a la variación del precio del activo subyacente:

$$\Delta S \approx \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z$$

Asimismo, puede escribirse una aproximación al precio del derivado con subyacente  $S$ :

$$\Delta f \approx \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z$$

$$\Delta z = \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

donde  $\epsilon \sim \phi(0,1)$ , es decir, la distribución Normal estándar.

A continuación, vamos a definir la cartera constituida por el subyacente y su derivado. La cartera está constituida por una exposición corta a una unidad del derivado ( $-f$ ) y una exposición larga a un número  $+\frac{\partial f}{\partial S}S$  de acciones. Note que  $+\frac{\partial f}{\partial S}$  refleja la sensibilidad instantánea del precio del derivado con respecto al subyacente y se utiliza como coeficiente porque tiene la magnitud exacta necesaria para neutralizar el valor de esta cartera.

El valor de la cartera estaría dado por la sumatoria del precio del derivado y las unidades que sean



necesarias del subyacente para neutralizar la cartera:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$$

Además, podemos expresar la variación en el valor de la cartera usando el operador  $\Delta$ :

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S$$

Sustituyendo en las anteriores ecuaciones los resultados del Lema de Ito, puede demostrarse que  $\Delta\Pi$  se reduce a:

$$\Delta\Pi = \left( -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t$$

Note que el proceso ya no contiene el componente estocástico,  $\Delta z$ , lo que significa que en un intervalo breve de tiempo la cartera está libre de riesgo constituida por  $-f$  y  $\frac{\partial f}{\partial S} S$  está libre de riesgo.

Para evitar la posibilidad de realizar arbitraje, el retorno de la cartera debe ser igual a la tasa libre de riesgo:

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$$

Por sustitución, se obtiene que:

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2\right) \Delta t = r \left(-f + \frac{\partial f}{\partial S} S\right) \Delta t$$

La ecuación general de BSM se desprende de la eliminación del intervalo de tiempo,  $\Delta t$ , que ahora es redundante, y una reorganización de los términos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

El precio de un producto derivado en general se puede obtener de la anterior ecuación, siempre que se especifiquen sus características. Note que hasta el momento no hemos utilizado ninguna de las características que definen las opciones tipo call y put. Esto es porque la ecuación general de BSM aplica a una gran variedad de derivados y no es específica a las opciones. Para individualizar la fórmula de BSM, es necesario hacer uso de las condiciones fronterizas que corresponden al derivado cuyo precio desea encontrarse. Por ejemplo, la condición fronteriza de una opción call europea en  $t = T$  es  $f = \max(S - K, 0)$ ; asimismo, la condición fronteriza de una opción put europea en  $t = T$  es  $f = \max(K - S, 0)$ . Tales condiciones fronterizas permiten llegar a los resultados más famosos de BSM, que son los precios teóricos de las opciones call y put europeas.

Usando la ecuación de BSM y las condiciones fronterizas, puede demostrarse que el precio teórico de la opción call está dado por:

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

De forma similar, puede demostrarse que el precio teórico de la opción put está dado por:

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

En las anteriores ecuaciones,  $N(x)$  es la función acumulativa Normal estándar. Además,

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2) T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2) T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Las lecturas clásicas en torno a los precios de las opciones son Black y Scholes (1973), Merton (1973) y Merton (1973a). En Black (1989) el lector puede encontrar la historia sobre la manera en que se descubrió la famosa fórmula de BSM. Cox y Ross (1976) exploran el avalúo de opciones empleando diferentes procesos estocásticos. Smith (1976) presenta una evaluación de los modelos clásicos para el avalúo de opciones. Los métodos de simulación de Monte Carlo pueden usarse para poner precio a las opciones, por lo que el lector puede referirse a Boyle (1977) y Boyle et al (1977).

En Cox et al (1979) los autores exploran una simplificación del proceso de asignación de precios de las opciones. Rendleman y Bartter (1979) analizan el avalúo de opciones usando un sencillo método de dos estados, como alternativa a las ecuaciones diferenciales estocásticas. La interpretación de las probabilidades ajustadas por riesgo en BSM está expuesta en Nielsen (1992). Hull y White (1993) investigan procedimientos eficientes para el avalúo de opciones europeas y americanas. Broadie et

al (1997) utilizan simulaciones mejoradas de Monte Carlo para asignar precios a opciones americanas. Por su parte, Broadie y Detemple exploran diferentes métodos para calcular el precio de las opciones americanas (1996). El lector interesado puede encontrar modelos alternativos para asignar precio a opciones, incluyendo comparaciones de su desempeño empírico, en Bakshi et al (1997). Longstaff y Schwartz (2001) investigan el avalúo de las opciones americanas por simulación, desde la perspectiva de los mínimos cuadrados.

---

## Volatilidad implícita

El único parámetro en BSM que no puede observarse directamente es la volatilidad de  $S$  (representada por  $\sigma$ ). Si bien pueden realizarse estimaciones de  $\sigma$  mediante datos históricos (“volatilidades históricas”), en la práctica la volatilidad se estima a partir de los precios de las opciones que se observan en el mercado—tales estimaciones se conocen como “volatilidades implícitas”.

Esto es necesario porque no es viable invertir las ecuaciones de los precios  $c$  y  $p$ , para encontrar  $\sigma$  directamente, por lo que las estimaciones de volatilidad se llevan a cabo siguiendo métodos numéricos, tomando como insumos los datos observados en el mercado y las características contractuales de la opción.

Es importante destacar que hay una diferencia conceptual entre las volatilidades históricas o retrospectivas y las volatilidades implícitas. Las volatilidades históricas miran hacia atrás, el cálculo se realiza sobre la base de lo que ha ocurrido en el pasado. En contraste, las volatilidades implícitas miran hacia el futuro y sintetizan las perspectivas subjetivas de los agentes en el mercado.

Un índice ampliamente utilizado es el índice VIX, publicado por el CBOE (Chicago Board Options Exchange). El VIX es un índice de las volatilidades implícitas de las opciones a 30 días del S&P500. Coloquialmente, se denomina se asocia al VIX con el “factor miedo” del mercado, pues se dice que mientras mayores sean las volatilidades implícitas más elevado será el VIX, y mayor volatilidad en el S&P500 vaticina el mercado.

Una de las características centrales de la volatilidad, histórica o implícita, es que varía notoriamente a través del tiempo. Bollerslev (1986) estudia el fenómeno de la heterocedasticidad condicional autorregresiva. Hull y White (1987) investigan los precios de opciones cuando los instrumentos subyacentes tienen volatilidades estocásticas. Cumby et al (1993) utilizan modelos EGARCH para proyectar volatilidades y correlaciones. Heston (1993) introduce una fórmula cerrada para el precio de las opciones cuando la volatilidad es aleatoria. Por su parte, Duan (1995) introduce el modelo GARCH en el contexto del avalúo de las opciones. Engel y Merzrich (1995) y Engel y Merzrich (1996) ahondan en la implementación de los modelos GARCH.

Uno de los hallazgos empíricos más interesantes es la “sonrisa de la volatilidad”, es decir, que la volatilidad implícita no es constante y depende de la distancia del precio de ejecución de una opción con respecto al precio que instantáneamente prevalece en el mercado. La volatilidad implícita depende también del plazo residual al vencimiento del contrato de opción. Ederington y Guan (2002) investigan las razones por las que surge la sonrisa de la volatilidad. Derman y Kani (1994) exploran el fenómeno empírico de la sonrisa de la volatilidad.

Jackwerth y Rubinstein recuperan las distribuciones de probabilidad consistentes con los precios empíricos de las opciones. Duan (1996) propone de qué manera puede superarse el reto de la sonrisa de la volatilidad. Cont y Fonseca (2002) estudian la dinámica de la superficie de la volatilidad implícita. Hull y Suo (2002) investigan métodos para evaluar el riesgo del modelo en el contexto de

la volatilidad implícita. Gatheral (2006) presenta una guía práctica para enfrentar la sonrisa de la volatilidad. Siguiendo esta temática, Daglish et al (2007) proponen reglas prácticas sobre la base de evidencia empírica en torno a las superficies de la volatilidad empírica. Reiswich y Wystup (2012) investigan la elaboración de la sonrisa de la volatilidad en el contexto de los tipos de cambio de monedas.

---

## Modelo cuántico

El procedimiento para estimar el precio de una opción usando métodos cuánticos tiene como punto de partida la simulación de un paseo cuántico sobre un índice de posición asociado con la transformación logarítmica del precio,  $\log(S_n)$ , donde  $n$  es el número de pasos empleados:  $n = T$ . La simulación se calibra para reflejar la volatilidad deseada, ajustando las magnitudes de los pasos al alza y a la baja. Además, se incorpora un ajuste por la tasa de interés libre de riesgo. En la etapa final obtenemos la distribución de probabilidad del precio del subyacente además de los posibles precios que puede llegar a tomar la opción en  $t = 0$ .



Veamos el ejemplo de las opciones call y put. El valor de la opción call al momento del vencimiento,  $T$ , es  $\max(S_T - K, 0)$ . Siguiendo la notación empleada en el caso clásico, el precio de ejercicio de la opción es  $K$ . Sin embargo, necesitamos tener en cuenta el valor del dinero en el tiempo, pues  $T \neq 0$ . Para calcular el valor presente del call en  $t = 0$  se aplica la fórmula:

$$c_0 = \frac{\max(S_T - K, 0)}{(1 + r)^T}$$

De manera similar, podemos concluir que el precio de un put en  $t = 0$  está dado por la fórmula:

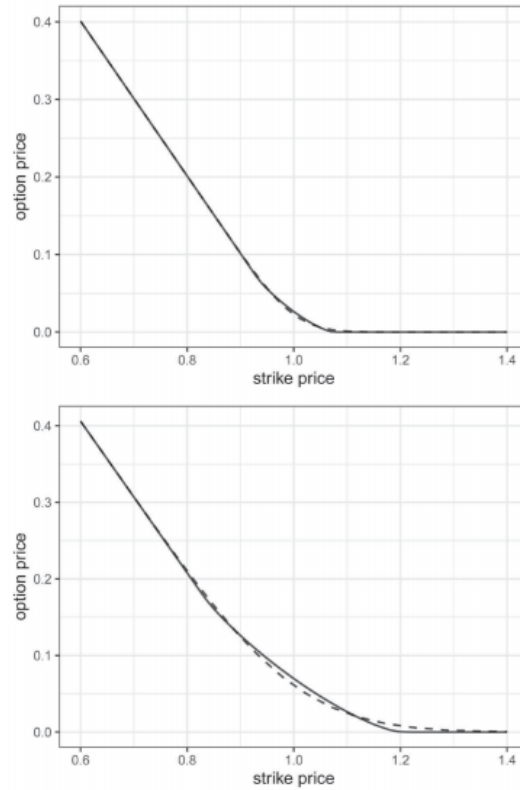
$$p_0 = \frac{\max(K - S_T, 0)}{(1 + r)^T}$$

El grado de coincidencia del valor prospectivo de las opciones entre los métodos cuánticos y clásicos depende entonces de la intensidad de la decoherencia. El precio de la opción definitivamente no alude a la evolución histórica del precio de la acción, sino a posibles trayectorias futuras de la acción. El modelo clásico del paseo aleatorio supone que las visiones retrospectivas y prospectivas coinciden exactamente, lo que rara vez o nunca es el caso.

Esto lleva a la situación paradójica, como suele ocurrir en el esquema analítico clásico, que hay una ausencia de motivación para comprar o vender opciones o acciones. No obstante, en el enfoque cuántico se plantea una tensión permanente entre lo retrospectivo y lo prospectivo.

Como se mencionó anteriormente, un inversionista que tenía una opinión inicial positiva sobre una acción manifestará una distribución probabilista prospectiva con un sesgo positivo. Un inversionista que tiene una visión negativa manifestará una distribución probabilista prospectiva con un sesgo negativo. Asimismo, un inversionista que inicia con una opinión neutral generará una distribución probabilista simétrica.

En el análisis retrospectivo, sin embargo, la decoherencia generará distribuciones empíricas que se asemejarán al caso clásico, siempre que en el mercado se concreten transacciones con suficiente frecuencia. La decoherencia será imperfecta, incluso retrospectivamente, lo que puede explicar la supervivencia de rastros cuánticos en las series históricas, incluyendo sesgos, multimodalidad, propensión a eventos extremos y aglomeración de la volatilidad. La permanente tensión entre los análisis retrospectivo y prospectivo se manifiesta especialmente en las divergencias entre la volatilidad histórica y la volatilidad implícita reveladas empíricamente por el mercado.



Las líneas sólidas representan el precio de la opción al vencimiento, según el precio de ejecución. Se supone que el precio de compra es 1, la volatilidad anualizada es 20% y la tasa de interés libre de riesgos es 2%. El panel

Algunos autores han planteado directamente una versión cuántica de la ecuación de Black-Scholes. El lector puede consultar Segal y Segal (1998) Haven (2002), Baaquie (2004), y Accardi y Boukas (2006) para una introducción de la fórmula de Black-Scholes en el contexto cuántico. Piotrowski et al (2006) extienden al caso cuántico el modelo de precios de opciones basado en el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Chen (2010) presenta la aplicación del modelo cuántico binomial en la teoría financiera, estableciendo la conexión con el modelo de Cox-Ross-Rubinstein. Rebentrost et al (2018) investigan la aplicación de métodos de simulación de Monte Carlo para el avalúo de derivados financieros, empleando computadoras cuánticas. Stamatopoulos et al (2020) abordan el uso de computadoras cuánticas para el avalúo de opciones financieras. Orrel (2021) presenta un modelo del precio de opciones utilizando paseos cuánticos. Radha (2021) investiga el avalúo de opciones usando métodos cuánticos en torno a una rotación de Wick del tiempo. Bhatnagar y VVedensky (2022) exploran las limitaciones del modelo de Black-Scholes, haciendo una comparación entre los precios que se obtienen a través de los métodos clásicos y cuánticos. Por otra parte, Kaneko et al (2022) proponen la implementación de un modelo de volatilidad local empleando computadoras cuánticas.

---

## Oferta y demanda de opciones

Ahora indagaremos sobre el funcionamiento de un mercado de opciones, donde la oferta y la demanda manifiestan propiedades cuánticas. Nos enfocaremos en el caso de un call, aunque el análisis puede desarrollarse idénticamente para un put.

De la simulación con la moneda cuántica, se ha podido calcular la distribución de probabilidades del precio del call en  $t = 0$ , cuando el call tiene un plazo al vencimiento  $T$  y un precio de ejercicio  $K$ . Podemos calcular la media y la varianza de tal distribución de probabilidades, dejando abierta la posibilidad de que los estados iniciales de compradores no son idénticos; por ejemplo, suponemos que los compradores de la opción tienen un sesgo al alza del precio mientras que los vendedores lo tienen a la baja.

La demanda por la opción de las características mencionadas refleja un precio medio esperado  $\mu_b$  y varianza  $\sigma_b$ , mientras que la oferta refleja un precio medio esperado  $\mu_s$  y varianza  $\sigma_s$ . Puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que  $\mu_b > \mu_s$ .

$$D_t(c_t; E_0) \sim N\left(\mu_b, \sqrt{\frac{\hbar}{2m_b\omega}}\right)$$

$$S_t(c_t; E_0) \sim N\left(\mu_s, \sqrt{\frac{\hbar}{2m_s\omega}}\right)$$

Puede demostrarse que la distribución probabilista del precio en el sistema combinado de oferta y demanda de la opción, en el estado mínimo de energía,  $E_0$ , tendrá las siguientes propiedades:

$$c_{t,E_0} \sim N\left(\frac{\sigma_b^2\mu_s + \sigma_s^2\mu_b}{\sigma_s^2 + \sigma_b^2}, \frac{\sigma_s\sigma_b}{\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_b^2}}\right)$$

El modelo cuántico del precio de la opción puede generalizarse usando niveles de energía superiores al mínimo, manteniendo la independencia analítica de la oferta y la demanda. La densidad de probabilidades de  $c_t$  será entonces el producto de las densidades de la oferta,  $|\psi_{s,E_n}(c_t)|^2$  con nivel energético  $n$ , y de la demanda,  $|\psi_{b,E_q}(c_t)|^2$  con nivel energético  $q$ :

$$c_{t,E_n,E_q} \sim |\psi_{s,E_n}(c_t)|^2 |\psi_{b,E_q}(c_t)|^2$$

Como puede deducir el lector, el modelo cuántico de oferta y demanda de la opción hace uso de las propiedades cuánticas en dos aspectos. Primero, en el ámbito prospectivo tanto compradores como vendedores formulan sus opiniones sobre la trayectoria futura del activo subyacente, y por ende sobre la distribución de probabilidades de la opción, empleando un paseo cuántico.

Segundo, las transacciones de compraventa del contrato de opción se llevan a cabo dentro de un proceso cuántico, en el cual compradores y vendedores se mantienen en un estado de superposición en tanto no se concrete una transacción. Además, las transacciones se llevan a cabo con diferentes grados de probabilidad, a diferencia del mercado clásico donde el equilibrio se asocia con la ausencia de transacciones.

---

## Preguntas

1. En un modelo cuántico, la perspectiva inicial del observador, positiva, neutral o negativa, incide en la trayectoria prospectiva del precio de las opciones. ¿Cuáles son las similitudes y diferencias entre el concepto de la perspectiva inicial en el modelo cuántico, y la probabilidad previa del enfoque bayesiano? Explique detalladamente su opinión.
2. ¿En qué sentido puede decirse que son racionales las expectativas sobre las trayectorias futuras de los precios perfiladas por los observadores? ¿Qué relación tiene este punto con el principio de indeterminación?
3. En los mercados de opciones es usual emplear estrategias que utilizan más de un contrato de opción a la vez, por ejemplo, combinando simultáneamente *puts* y *calls*. En el enfoque clásico, los precios de puts y calls en tales estrategias pueden calcularse separadamente. ¿Cree usted que en el enfoque cuántico es posible hacer el cálculo separadamente?
4. Al momento de diseñar estrategias de opciones, ¿qué rol pudiera usted atribuirles a las múltiples acumulaciones de masa de probabilidad generadas por el método cuántico en torno al precio del activo subyacente?