Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

Geometría diferencial - Catedrático: Alan Reyes
14 de febrero de 2023

Tarea

Problema 1. *Sea*

1. *Sea $\alpha(t)$ una curva parametrizada en $\mathbb{R}^n$, que no pasa por el origen O. Si $\alpha\left(t_0\right)$ es un punto del trazo de α que está más próximo a O, y $\alpha'\left(t_0\right) \neq 0$ entonces $\alpha\left(t_0\right)$ es ortogonal a $\alpha'\left(t_0\right)$*

   Solución. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$. A probar: $\langle \alpha(t), \alpha'(t)\rangle = 0$. Considerando la definición de norma, la cual es la distancia del origen O a los puntos $(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$, se tiene:

   $$\|\langle \alpha(t), \alpha(t)\rangle\| = \sqrt{\langle \alpha(t), \alpha(t)\rangle} = \sqrt{x_1^2(t) + x_2(t)^2 + \cdots x_n^2(t)}$$

   Sin embargo, deseamos encontrar una relación del producto interno, entonces, considérese: $f : I \to \mathbb{R}^n$ tal que:

   $$f(t) = \|\langle \alpha(t), \alpha(t)\rangle\|^2 = \langle \alpha(t), \alpha(t)\rangle = x_1^2(t) + x_2(t)^2 + \cdots x_n^2(t)$$

   Además, de la hipótesis, también tenemos que $\alpha(t_0)$ es un punto del trazo de α que está más próximo al origen O, es decir que es un mínimo local en $t_0 \implies f'(t_0) = 0$. Con eso, la considérese la derivada de $f(t)$,

   $$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d\langle \alpha(t), \alpha(t)\rangle}{dt} \\ &= \langle \alpha'(t), \alpha(t)\rangle + \langle \alpha(t), \alpha'(t)\rangle \\ &= 2\langle \alpha'(t), \alpha(t)\rangle \end{aligned}$$

   Consideramos el punto t_0 tal que:

   $$f'(t_0) = 2\langle \alpha'(t_0), \alpha(t_0)\rangle = 0$$

   Por lo tanto,

   $$\langle \alpha(t), \alpha'(t)\rangle = 0.$$

   □

2. *Sea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *una curva parametrizada, con* $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$*. Mostrar que* $\|\alpha(t)\|$ *es una constante* > 0 *si, y sólo si,* $\alpha(t)$ *es ortogonal a* $\alpha'(t)$*, para todo* $t \in I$*.*

   Solución. Procedemos por doble implicación:

   - ($\Longrightarrow$) A probar: $\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle = 0$. Sea por hipótesis,

$$\begin{aligned}
\|\alpha(t)\| &= C \\
\|\alpha(t)\|^2 &= C^2 \\
\frac{d}{dt}\|\alpha(t)\|^2 &= \frac{d}{dt}C^2 \\
\frac{d}{dt}\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle &= 0 \\
2\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle &= 0 \\
\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle &= 0
\end{aligned}$$

   - ($\Longleftarrow$) A probar: $\|\alpha(t)\| = C > 0$. Por el inciso anterior, nótese que esta implicación también se cumple.

$\square$

Problema 2. *Considere la parametrización de la cicloide de radio* r *vista en aula.*

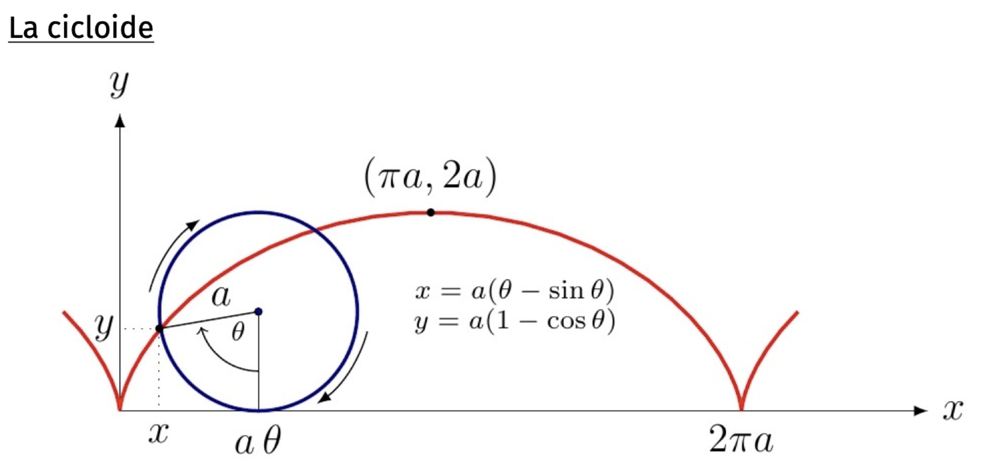

Figura 1: Parametrización vista en clase

1. *Calcular la longitud de arco de la cicloide en el primero de sus arcos, esto es correspondiente a una rotación completa del círculo.*

   Solución. Sea

$$\alpha(\theta) = \left(a\left(\theta - \sin\theta\right), a(1 - \cos\theta)\right)$$

   En donde,

$$\alpha'(\theta) = \left(a\left(1 - \cos\theta\right), a\sin\theta\right)$$

Considérese:

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\theta)| d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{[a(1-\cos\theta)]^2 + [a\sin\theta]^2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \left[(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\right]} d\theta \\
&= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta} d\theta \\
&= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos\theta)} d\theta \\
&= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos\theta} d\theta \\
&= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}} d\theta \\
&= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2} d\theta \\
&= 2a(4) = 8a
\end{aligned}
$$

□

2. *Calcular el área bajo la curva (entre la curva y el eje x) para este arco de cicloide.*

Solución. Considérese, la ecuación para calcular el área de una curva paramétrica:

$$
A = \int_0^{2\pi a} y dx
$$

Donde $dx = a(1-\cos\theta)d\theta$

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} (a(1-\cos\theta))\,(a(1-\cos\theta)d\theta) \\
&= a^2\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^2 d\theta = a^2\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta\right) d\theta \\
&= a^2\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\right) d\theta \\
&= a^2\int_0^{2\pi} \left(-2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{2}\right) d\theta \\
&= a^2\left[-2\sin\theta + \frac{1}{4}(\sin 2\theta) + \frac{3}{2}\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= a^2\left[-2(\sin 2\pi - \sin 0) + \frac{1}{4}(\sin 4\pi - \sin 0) + \frac{3}{2}(2\pi - 0)\right] \\
&= a^2(3\pi) = 3\pi a^2
\end{aligned}
$$

□

Problema 3. *Sea $\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ la curva dada por*

$$\left(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2}\right),$$

donde t es el ángulo que el eje y con el vector $\alpha'(t)$. Esta curva se llama la tractriz (Figura en pág. 8 de Do Carmo). Mostrar que

- *α es una curva parametrizada diferenciable, regular excepto en $t = \frac{\pi}{2}$.*

Solución. Proponemos la derivada de $\alpha(t)$,

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\tan \frac{t}{2}} \cdot \sec^2 \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\frac{\sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}}} \cdot \left(\frac{1}{\cos \frac{t}{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\sin t}\right)
\end{aligned}$$

Ahora, mostraremos que es diferenciable regular en $t \in (0, \pi)$ excepto en $t = \pi/2$. Es decir, que solamente en $\alpha'(\pi/2) = 0$.

$$\begin{aligned}
\alpha'(\pi/2) &= \left(\cos \frac{\pi}{2}, -\sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}}\right) \\
&= (0, -1 + 1) \\
&= (0, 0)
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\cos t &= 0 \\
t &= \arccos 0 \\
t &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
-\sin t + \frac{1}{\sin t} &= 0 \\
-\sin t &= -\frac{1}{\sin t} \\
\sin^2 t &= 0 \\
\sin t &= 0 \\
t &= \arcsin 0 \\
t &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

□

- *La longitud del segmento de la tangente a la tractriz, entre el punto de tangencia y el eje Oy es constante e igual a 1.*

  Solución. Debemos mostrar que los segmentos rojos son 1.

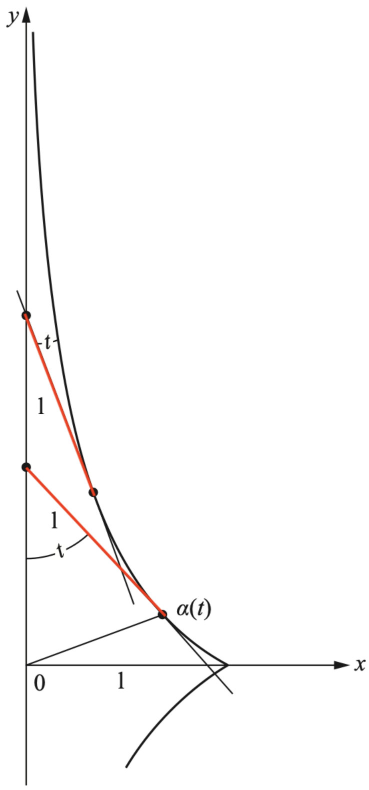

Figure 1-9. The tractrix.

Para esto, tendremos que general la ecuación de la tangente y posteriormente calcular la longitud del segmento de la tangente a la tractriz. Consideramos:

$$(y - y(t)) = m(x - x(t)), \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Sea

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t + \frac{1}{\sin t}}{\cos t} = -\frac{\sin t}{\cos t} + \frac{1}{\sin t \cos t}$$

Entonces:

$$\left(y - \left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2}\right)\right) = \left(-\frac{\sin t}{\cos t} + \frac{1}{\sin t \cos t}\right)(x - \sin t)$$

Consideremos ahora, el punto (x_1, y_1) en donde se intersecta la tractriz y la tangente. Entonces, calculemos la distancia de este punto con el origen, como:

$$d = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{\sin(t)^2 + \left(y_1 - \cos(t) - \log \tan \frac{t}{2}\right)^2}$$

Sea $x = \sin t$ y $y = y_1$, y lo reemplazamos en la ecuación de la recta:

$$\begin{aligned}
\left(y - \left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right)\right) &= \left(-\frac{\sin t}{\cos t} + \frac{1}{\sin t\cos t}\right)(x - \sin t)\\
\left(y_1 - \left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right)\right) &= \left(-\frac{\sin t}{\cos t} + \frac{1}{\sin t\cos t}\right)(\sin t - \sin t)\\
y_1 - \left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Entonces, despejamos para y_1, tal que:

$$y_1 = \cos t + \log\tan\frac{t}{2}$$

Entonces, reemplazamos en d, tal que:

$$\begin{aligned}
d &= \sqrt{\sin(t)^2 + \left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2} - \cos(t) - \log\tan\frac{t}{2}\right)^2}\\
&= \sqrt{\sin(t)^2 + \left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2} - \cos(t) - \log\tan\frac{t}{2}\right)^2}\\
&= \sqrt{\sin(t)^2 + (0)^2}\\
&= |\sin t|\\
&= 1
\end{aligned}$$

□

Problema 4. *Sea α una curva plana regular en coordenadas polares (r, φ), dada por $r = r(\varphi)$. Usando la notación $r' = \frac{\partial r}{\partial \varphi}$, verificar que la longitud de arco en el intervalo $[\varphi_1, \varphi_2]$ es*

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\varphi$$

y que la curvatura está dada por

$$\kappa(\varphi) = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{\left(r'^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

Solución. Considérese, $x = r\cos\varphi$ y $y = r\sin\varphi$. De esto, se genera el vector posición,

$$\alpha(\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

y su derivada:

$$\alpha'(\varphi) = (r' cos\varphi - r\sin\varphi, r'\sin\varphi + r\cos\varphi)$$

Ahora, mostraremos s y κ:

- Para la longitud de arco s, sea:

$$
\begin{aligned}
s &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |\alpha'(\varphi)| d\varphi \\
&= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r' cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2} d\varphi \\
&= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r' cos\varphi) + (r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi)^2 + (r\cos\varphi)^2} d\varphi \\
&= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi
\end{aligned}
$$

- Para la curvatura, considérese la tercera derivada:

$$
\begin{aligned}
\alpha''(\varphi) &= ((r''\cos\varphi - r'\sin\varphi) - (r'\sin\varphi + r\cos\varphi), (r''\sin\varphi + r'\cos\varphi) + (r'\cos\varphi - r\sin\varphi)) \\
&= (r''\cos\varphi - r'\sin\varphi - r'\sin\varphi - r\cos\varphi, r''\sin\varphi + r'\cos\varphi + r'\cos\varphi - r\sin\varphi) \\
&= (r''\cos\varphi - r'\sin\varphi - r'\sin\varphi - r\cos\varphi, r''\sin\varphi + r'\cos\varphi + r'\cos\varphi - r\sin\varphi) \\
&= ((r'' - r)\cos\varphi - 2r'\sin\varphi, (r'' - r)\sin\varphi + 2r'\cos\varphi)
\end{aligned}
$$

Por medio del **Problema 8**, se tiene para una curva plana, su curvatura dada por:

$$
\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\det(\alpha', \alpha'')}{|\alpha'|^3} \\
&= \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3} \\
&= \frac{x'y'' - y'x''}{\left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right)^3} \\
&= \frac{\begin{array}{c}(r' cos\varphi - r\sin\varphi)\left((r'' - r)\sin\varphi + 2r'\cos\varphi\right) - \\ - (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)\left((r'' - r)\cos\varphi - 2r'\sin\varphi\right)\end{array}}{\left(\sqrt{(r' cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2}\right)^3} \\
&= \frac{\begin{array}{c}(r' cos\varphi - r\sin\varphi)(r'' - r)\sin\varphi + (r' cos\varphi - r\sin\varphi)(2r'\cos\varphi) - \\ - (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)(r'' - r)\cos\varphi + (2r'\sin\varphi)(r'\sin\varphi + r\cos\varphi)\end{array}}{\left(\sqrt{(r' cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2}\right)^3} \\
&= \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

□

Problema 5. *Calcular la curvatura de la espiral de Arquímedes, la cual está dada por* $r(\varphi) = a\varphi, a$ *constante (Figura* 1(a)*).*

Solución. Sea

$$
\begin{aligned}
r'(\varphi) &= a \\
r''(\varphi) &= 0
\end{aligned}
$$

Considerando el **Problema 4**, tenemos:

$$\begin{aligned}\kappa(\varphi) &= \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2a^2 - 0 + (a\varphi)^2}{(a^2 + (a\varphi)^2)^{3/2}} \\ &= \frac{a^2(2+\varphi^2)}{(a^2(1+\varphi^2))^{3/2}} \\ &= \frac{(2+\varphi^2)}{a^3(1+\varphi^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

□

Problema 6. *Para la espiral logarítmica, dada en coordenadas polares por por* $r(t) = ae^t, \varphi(t) = bt, a, b$ *constantes (Figura 1(b)), probar lo siguiente:*

1. *La longitud de la curva en el intervalo* $(-\infty, t]$ *es proporcional al radio* $r(t)$

   Solución. Considere:
   $$r(t) = ae^t$$
   De esto,
   $$\begin{aligned}r(\varphi) &= ae^{\frac{\varphi}{b}} \\ r'(\varphi) &= \frac{\partial(r(\varphi))}{\partial\varphi} \\ &= a\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(e^{\frac{\varphi}{b}}\right) \\ &= \frac{a}{b}\cdot\left(e^{\frac{\varphi}{b}}\right) \\ &= \frac{ae^{\phi/b}}{b}\end{aligned}$$
   La longitud de arco de la curva se define como:
   $$\begin{aligned}s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r'^2 + r^2}d\varphi &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\left(\frac{ae^{\phi/b}}{b}\right)^2 + \left(ae^{\phi/b}\right)^2}d\varphi \\ = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\left(ae^{\phi/b}\right)^2\left(\frac{1}{b^2}+1\right)}d\varphi &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(ae^{\phi/b}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{b^2}+1\right)}d\varphi \\ = a\sqrt{\left(\frac{1}{b^2}+1\right)}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(e^{\phi/b}\right)d\varphi &= a\sqrt{\left(\frac{1}{b^2}+1\right)}\left[be^{\varphi/b}\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} \\ = ab\sqrt{\left(\frac{1}{b^2}+1\right)}\left[e^{\varphi_2/b} - e^{\varphi_1/b}\right]\end{aligned}$$

Cuando $\varphi_2 = t$ y $\varphi_1 = -\infty$:

$$\begin{aligned} s &= ab\sqrt{\left(\frac{1}{b^2}+1\right)}\left[e^{t/b}-0\right] \\ &= b\sqrt{\left(\frac{1}{b^2}+1\right)}\left[ae^{t/b}\right] \end{aligned}$$

Lo que demuestra que:

$$r(t) \propto b\sqrt{\left(\frac{1}{b^2}+1\right)}\left[ae^{t/b}\right]$$

□

2. *$\alpha(t) \to 0$, cuando $t \to -\infty$ y α tiene longitud de arco finita en el intervalo $(-\infty, t_0]$.*

> *A este problema se le hizo la corrección del infinito negativo, ya que en caso contrario $\alpha(t)$ nunca se va a 0, ni la longitud es finita.*

Solución. Sea $\alpha(t)$ el vector posición. Tenemos:

$$r(t) = ae^t$$

Para encontrar $\alpha(t)$, entonces considérese $x = r\cos t$ y $y = r\sin t$. Entonces:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (r(t)\cos t, r(t)\sin t) \\ &= (ae^t\cos t, ae^t\sin t) \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \left(a\left(e^t\cos t - e^t\sin t\right), a\left(e^t\sin t + e^t\cos t\right)\right) \\ &= \left(ae^t\left(\cos t - \sin t\right), ae^t\left(\sin t + \cos t\right)\right) \end{aligned}$$

Debemos demostrar:

a) $\lim_{t\to-\infty} a(t) = 0$. Nótese:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to-\infty} a(t) &= \lim_{t\to-\infty}(ae^t\cos\theta, ae^t\sin\theta) \\ &= (0,0) = 0 \end{aligned}$$

b) $\alpha(t)$ tiene longitud de arco finita en el intervalo $(-\infty, t_0]$:

$$\begin{aligned}
s &= \int_{-\infty}^{t_0} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\
&= \int_{-\infty}^{t_0} \sqrt{\left(ae^t\left(\cos t - \sin t\right)\right)^2 + \left(ae^t\left(\sin t + \cos t\right)\right)^2} dt \\
&= \int_{-\infty}^{t_0} ae^t \sqrt{\left(\cos t - \sin t\right)^2 + \left(\sin t + \cos t\right)^2} dt \\
&= \int_{-\infty}^{t_0} ae^t \sqrt{2\left(cos^2 t + \sin^2 t\right)} dt \\
&= \int_{-\infty}^{t_0} ae^t \sqrt{2} dt \\
&= a\sqrt{2}\left[e^t\right]_{-\infty}^{t_0} = a\sqrt{2}e^{t_0}
\end{aligned}$$

Mostrando que en efecto la longitud de arco es finita.

□

3. *El vector $\alpha(t)$ tiene ángulo constante con el vector tangente $\alpha'(t)$.*

Solución. Nótese,

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= (ae^t \cos t, ae^t \sin t) \\
\alpha'(t) &= \left(ae^t\left(\cos t - \sin t\right), ae^t\left(\sin t + \cos t\right)\right)
\end{aligned}$$

Ahora, considérese la propiead:

$$A \cdot B = |A||B| \cos \theta_{AB} \implies \theta_{AB} = \arccos\left(\frac{A \cdot B}{|A||B|}\right)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\theta_{AB} &= \arccos\left(\frac{A \cdot B}{|A||B|}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{(ae^t)^2(\cos^2 t - \cos t \sin t) + (ae^t)^2(\sin^2 t + \cos t \sin t)}{\sqrt{(ae^t \cos t)^2 + (ae^t \sin t)^2}\sqrt{(ae^t\left(\cos t - \sin t\right))^2 + (ae^t\left(\sin t + \cos t\right))^2}}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{(ae^t)^2}{ae^t\sqrt{(ae^t)^2(2(\cos^2 t + \sin^2 t))}}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

□

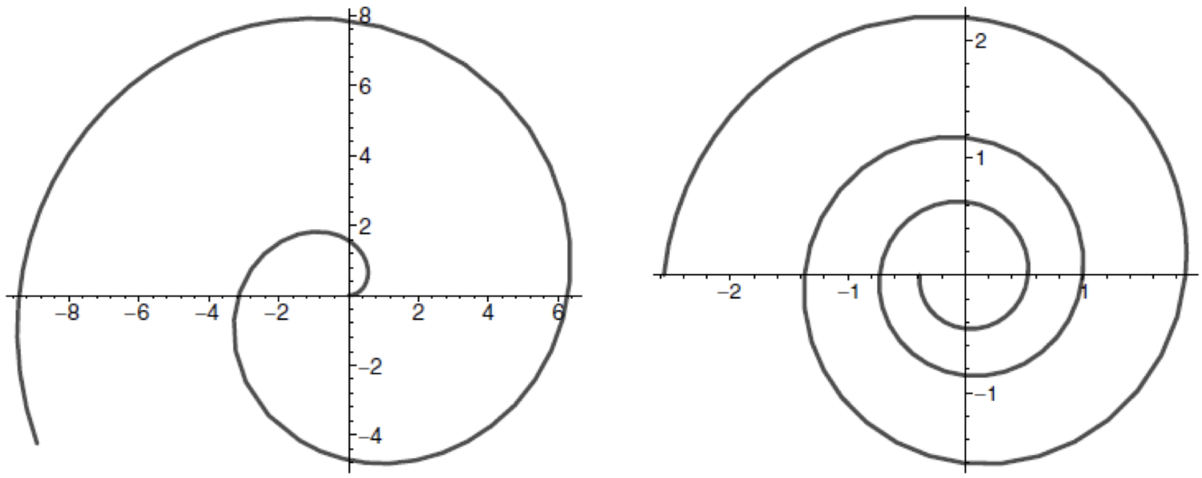

Figure 1: (a) espiral de Arquímedes, (b) espiral logarítmica.

Problema 7. *Mostrar que la curva de menor longitud entre dos puntos* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ *es el segmento de recta que los une. (Sugerencia: ver las ideas en el Ejercicio 10, pág 11 de Do Carmo.)*

Solución. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada. Sea $[a, b] \subset I$ y sea $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$, tal que debemos probar:

$$|\alpha(b) - \alpha(a)| \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

- Primero, debemos mostrar la siguiente propiedad: para cualquier vector constante v, $|v| = 1$,
$$(q - p) \cdot v = \int_a^b \alpha'(t) \cdot v dt \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$
  - Sea
$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha'(t) \cdot v dt &= \int_a^b \left(\alpha_1'(t)v_1 + \alpha_2'(t)v_2 + \cdots + \alpha_n'(t)v_n\right) dt \\ &= \left[\alpha_1(t)v_1 + \alpha_2(t)v_2 + \cdots + \alpha_n(t)v_n\right]_a^b \\ &= \left[\alpha_1(b)v_1 + \alpha_2(b)v_2 + \cdots + \alpha_n(b)v_n\right] - \\ &\quad - \left[\alpha_1(a)v_1 + \alpha_2(a)v_2 + \cdots + \alpha_n(a)v_n\right] \\ &= \alpha(b) \cdot v - \alpha(a) \cdot v \\ &= v \cdot (\alpha(b) - \alpha(a)) \\ &= v \cdot (p - q) \\ &= (p - q) \cdot v\end{aligned}$$

- Sea

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha'(t)\cdot v dt &\leq \left|\int_a^b \alpha'(t)\cdot v dt\right| \\ &\leq \int_a^b |\alpha'(t)\cdot v| dt \\ &\leq \int_a^b |\alpha'(t)|\cdot \underbrace{|v|}_{1} dt \\ &= \int_a^b |\alpha'(t)| dt\end{aligned}$$

- Segundo, procedemos a la curva de menor longitud entre dos puntos p, q. Sea,

$$\begin{aligned}|\alpha(b)-\alpha(a)| &= |q-p| \\ &= \frac{|q-p|^2}{|q-p|} \\ &= \frac{(q-p)\cdot(q-p)}{|q-p|} \\ &= (q-p)\cdot v\end{aligned}$$

Y por la parte uno:

$$\leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

□

Problema 8. *Probar que la curvatura y la torsión de una curva de Frenet $\alpha(t)$ en $\mathbb{R}^3$, parametrizada de forma arbitraria, están dadas por*

$$\kappa(t) = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2}.$$

En particular, en el caso de curvas planas,

$$\kappa(t) = \frac{\det(\alpha', \alpha'')}{|\alpha'|^3}.$$

(Sugerencia: ver las ideas en el Ejercicio 12, pág 26 de Do Carmo.)

Solución. Considerando el ejercicio de Do Carmo, sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizada y sea $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ la reparametrización de $\alpha(I)$ por la longitud de arco, $s = s(t)$ medido de $s_0 \in I$. Sea $t = t(s)$ la función inversa de s y sea $d\alpha/dt = \alpha'$, $d^2\alpha/dt^2$, etc. Entonces,

- Para la curvatura, sea

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\beta}{ds}\frac{ds}{dt} = T(s)\frac{ds}{dt} \\ \alpha''(t) &= T'(s)\frac{ds}{dt} + T(s)\frac{d^2s}{dt^2}\end{aligned}$$

Ahora bien, sea

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) \times \alpha''(t) &= \left(T(s)\frac{ds}{dt}\right) \times \left(T'(s)\frac{ds}{dt} + T(s)\frac{d^2s}{dt^2}\right) \\
&= \left(T(s)\frac{ds}{dt}\right) \times \left(T'(s)\frac{ds}{dt}\right) + \left(T(s)\frac{ds}{dt}\right) \times \left(T(s)\frac{d^2s}{dt^2}\right) \\
&= \frac{d^2s}{dt^2}\left(T(s) \times T'(s)\right) + \frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\left(\underbrace{T(s) \times T(s)}_{=0}\right) \\
&= \frac{d^2s}{dt^2}\left(T(s) \times T'(s)\right) \\
&= \frac{d^2s}{dt^2}\left(|T(s)||T'(s)|\sin\theta_{TT'}\right)
\end{aligned}$$

Como $T(s)$ y $T'(s)$ son ortogonales $\theta_{TT'} = \frac{\pi}{2}$ y además, sea $|T(s)| = 1$, entonces:

$$= \frac{d^2s}{dt^2}|T'(s)|$$

Considérese ahora la norma de esta expresión:

$$|\alpha'(t) \times \alpha''(t)| = \frac{d^2s}{dt^2}|T'(s)|$$

Entonces, de esta expresión despejamos:

$$\begin{aligned}
|T'(s)| &= \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{\frac{d^2s}{dt^2}} \\
&= \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(s)|^2}
\end{aligned}$$

Usando la definición de curvatura por Frenet, usando $s = t$ sea:

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{|T'(t)|}{|\alpha'(t)|} \\
&= \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}
\end{aligned}$$

Sin embargo, este método es bastante engorroso. Con las fórmulas de Frenet, se puede resolver de una forma mucho más sencilla, nótese que para R^3 las ecuaciones son:

$$\begin{aligned}
T'(s) &= \kappa(s)N(s)|\alpha'| \\
N'(s) &= -\kappa(s)|\alpha'| - \tau(s)B(s)|\alpha'| \\
B'(s) &= \tau(s)N(s)|\alpha'|
\end{aligned}$$

y además las propiedades:

$$\begin{aligned}T(s) &= \frac{\alpha'(s)}{|\alpha'(s)|}\\ N(s) &= \frac{T'(s)}{|T'(s)|}\\ B(s) &= T(s)\times N(s)\end{aligned}$$

Considere eso, entonces:

- La curvatura,

$$\begin{aligned}\alpha' &= |\alpha'|T\\ \alpha'' &= |\alpha'|'T + |\alpha'|T'\\ &= |\alpha'|'T + |\alpha'|kN\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\alpha'\times\alpha'' &= (|\alpha'|T)\times(|\alpha'|'T + |\alpha'|kN)\\ &= (|\alpha'|T)\times(|\alpha'|'T) + (|\alpha'|T)\times(|\alpha'|kN)\\ &= |\alpha'||\alpha'|'\,(T\times T) + |\alpha'||\alpha'|k\,(T\times N)\\ &= |\alpha'||\alpha'|'\left(\underbrace{T\times T}_{=0}\right) + |\alpha'|^3kB\\ &= |\alpha'|^3kB\end{aligned}$$

Consideremos la norma:

$$|\alpha'\times\alpha''| = |\alpha'|^3k$$

Entonces

$$k = \frac{|\alpha'\times\alpha''|}{|\alpha'|^3}$$

- La torsión, tenemos las ecuaciones deducidas previamente,

$$\alpha'\times\alpha'' = |\alpha'|^3kB$$

Despejamos para B,

$$\begin{aligned}B &= \frac{\alpha'\times\alpha''}{|\alpha'|^3k}\\ &= \frac{\alpha'\times\alpha''}{|\alpha'|^3\left(\frac{|\alpha'\times\alpha''|}{|\alpha'|^3}\right)}\\ &= \frac{\alpha'\times\alpha''}{|\alpha'\times\alpha''|}\end{aligned}$$

Con esto, considérese α''':

$$\begin{aligned}\alpha''' &= |\alpha'|''T + |\alpha'|'T' + (|\alpha'|^2k)'N + |\alpha'|^2kN'\\ &= |\alpha'|'''T + (|\alpha'|'|\alpha'|k + (|\alpha'|^2k)')N + |\alpha'|^3k(-kT+\tau B).\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\alpha''' \cdot B &= \big(|\alpha'|'''T + (|\alpha'|'|\alpha'|k + (|\alpha'|^2k)')N + |\alpha'|^3k(-kT+\tau B)\big)\cdot(T\times N)\\ &= |\alpha'|'''T\cdot(T\times N) + (|\alpha'|'|\alpha'|k + (|\alpha'|^2k)')N\cdot(T\times N)\\ &\quad + |\alpha'|^3k(-kT+\tau B)\cdot(T\times N)\end{aligned}$$

Vea que $T\times T = 0$ y $N\times N = 0$

$$\begin{aligned}&= |\alpha'|^3k(\tau B)\cdot(T\times N)\\ &= |\alpha'|^3k\tau\end{aligned}$$

Por lo tanto, despejando para τ se tiene:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{\alpha'''\cdot(\alpha'\times\alpha'')}{|\alpha'\times\alpha''||\alpha'|^3k}\\ &= \frac{\alpha'''\cdot(\alpha'\times\alpha'')}{|\alpha'\times\alpha''||\alpha'|^3\left(\frac{|\alpha'\times\alpha''|}{|\alpha'|^3}\right)}\\ &= \frac{\alpha'''\cdot(\alpha'\times\alpha'')}{|\alpha'\times\alpha''|^2}\\ &= \frac{(\alpha'\times\alpha'')\cdot\alpha'''}{|\alpha'\times\alpha''|^2}\\ &= \frac{\det(\alpha'\times\alpha'',\alpha''')}{|\alpha'\times\alpha''|^2}\end{aligned}$$

- Para una curva plana, es el mismo procedimiento que en el **Problema 4**.

□

Problema 9. *Sea α la hélice en $\mathbb{R}^3$, dada por*

$$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \quad a,b\in\mathbb{R}^+.$$

Muestre que la curvatura y la torsión de α son constantes.

Solución. Sea

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \frac{d}{dt}(a\cos t, a\sin t, bt)\\ &= (-a\sin t, a\cos t, b)\end{aligned}$$

también,

$$\begin{aligned}\alpha''(t) &= \frac{d}{dt}(-a\sin t, a\cos t, b)\\ &= (-a\cos t, -a\sin t, 0)\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\alpha'''(t) &= \frac{d}{dt}(-a\cos t, -a\sin t, 0)\\ &= (a\sin t, -a\cos t, 0)\end{aligned}$$

Ahora bien,

- La curvatura:

$$
\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3} \\
&= \frac{\left| \begin{bmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{bmatrix} \right|}{\left(\sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\right)^3} \\
&= \frac{\left|\left(0 + ab\sin t, -(0 + ab\cos t), a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t\right)\right|}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3} \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3}\left|\left(ab\sin t, -ab\cos t, a^2\right)\right| \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3}\sqrt{(ab\sin t)^2 + (-ab\cos t)^2 + (a^2)^2} \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3}\sqrt{a^2(b^2+a^2)}
\end{aligned}
$$

- La torsión:

$$
\begin{aligned}
\tau(t) &= \frac{\det\left(\alpha', \alpha'', \alpha'''\right)}{|\alpha' \times \alpha''|^2} \\
&= \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{|\alpha' \times \alpha''|^2} \\
&= \frac{(ab\sin t, -ab\cos t, a^2) \cdot (a\sin t, -a\cos t, 0)}{|\,(ab\sin t, -ab\cos t, a^2)\,|^2} \\
&= \frac{1}{a^2(b^2+a^2)}(a^2 b\sin^2 t + a^2 b\cos^2 t) \\
&= \frac{a^2 b}{a^2(b^2+a^2)} \\
&= \frac{b}{(b^2+a^2)}
\end{aligned}
$$

□

Problema 10. *Construir una curva plana, parametrizada por longitud de arco, cuya curvatura esté dada exactamente por* $\kappa(s) = s^{-1/2} = 1/s^{1/2} = 1/\sqrt{s}$.

Solución. Usando el procedimiento del **Teorema Fundamental de las Curvas Planas**, tenemos que la curva se puede construir a partir de la expresión

$$
\alpha(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos(\theta(u))du, \int_{s_0}^{s} \sin(\theta(u))du\right), \quad s_0 \in I
$$

en donde $\theta : I \to \mathbb{R}$ tal que $\theta(u) = \int_{s_0}^{u} \kappa_0(t)dt$. Primero, definimos $s_0 = 0$, y hacemos un cambio de variable tal que $k(t) = 1/\sqrt{t}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\theta(u) &= \int_0^u \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ &= 2\sqrt{u}\end{aligned}$$

De esto:

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \left(\int_0^s \cos(2\sqrt{u})du, \int_0^s \sin(2\sqrt{u})du \right) \\ &= \left(\sqrt{u}\sin(2\sqrt{u}) + \frac{1}{2}\cos(2\sqrt{u})\Big|_0^s, \frac{1}{2}\sin(2\sqrt{u}) - \sqrt{u}\cos(2\sqrt{u})\Big|_0^s \right) \\ &= \left(\sqrt{s}\sin(2\sqrt{s}) + \frac{1}{2}\cos(2\sqrt{s}) - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sin(2\sqrt{s}) - \sqrt{s}\cos(2\sqrt{s}) \right)\end{aligned}$$

$\square$