0.1. Nets

Proposición 1. *Sea D un conjunto y $\leq$ una relación definida sobre D que satisface:*

1. *$\leq$ es reflexiva, $x \leq x, \forall x \in D$.*

2. *$\leq$ es transitiva, si $x \leq y$ y $y \leq z \implies x \leq z$.*

3. *$\leq$ es dirigida, si $x, y \in D \implies \exists z \in D \ni x \leq z$ y $y \leq z$.*

Entonces el para $(D, \leq)$ es un conjunto dirigido.

Definición 1. *Una red en un conjunto X es un mapeo*

$$w : D \to X$$

donde $(D, \leq)$ es un conjunto dirigido.

NOTA. *Cada sucesión sobre X es una red.*

Definición 2 (Convergencia)**.** *Si (X, τ) es un espacio topológico y $w : D \to X$ es una red, se dice que w converge a $x \in X$, si para cada abierto U que contiene a x, existe $d \in D \ni T_\alpha = \{w(e) : d \leq e \in D\} \subseteq U$.*

NOTA. *$w \to x$ (la red converge a x), o bien x es punto límite de w.*

Teorema 1. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subseteq X$, entonces $x \in \mathbb{A}$ ssi existe una red w sea $A \ni w \to x$.*

NOTA. *Un subconjunto D' de un subconjunto dirigido D es cofinal, si $\forall d \in D \exists e \in D' \ni d \leq e$.*

Definición 3. *Sean $w : D \to X$ y $v : E \to x$ redes sobre X (donde $(D, \leq)$ y $(E, \leq)$ son conjuntos dirigidos). Se dice que v es una subred de w si existe una función $h : E \to D \ni$*

1. *h es monótona, es decir, $\alpha \leq \beta \implies h(\alpha) \leq h(\beta)$*

2. *h es cofinal (es decir, $h(E)$ es cofinal con D).*

3. $v(\alpha) = w(h(\alpha)), \forall \alpha \in E$.

Definición 4 (Subsucesión)**.** *Una subsucesión de* (X_n) *es una sucesión de la forma* (X_{n_k})*, es decir, dadad* (X_n)*, la subsucesión es de la forma* (X_{h_k})*, donde* h *es una función creciente,* $h : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$*, y donde* h *no es acotada (i.e. su rango es cofinal con* $\mathbb{Z}^+$*)*

Definición 5. *Sea* X *un conjunto. Una colección* $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ *es un filtro sobre* X *si se satisfacen:*

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$

2. *Si* $A \in \mathcal{F}$ *y* $A \subseteq B \implies B \in \mathcal{F}$

3. *Si* $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$

Ejemplo 1. *Sea* $\mathcal{F} = \{x\}$*, siempre que* $X \neq \varnothing$ *es filtro trivial.*

Ejemplo 2. *Sea* $X \neq \varnothing$*,* $x \in X$*. Entonces* $X = \{A \ni A \subseteq X \land x \in A\}$

Ejemplo 3. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico,* $x \in X$

$$\mathcal{F}_x = \{A \subseteq X : \exists U \in \tau \ni x \in U \subseteq A\}$$

es el filtro de vecindades de X*.*

Ejemplo 4. *Sea* X *un conjuhnto infinito y sea*

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X \ni X - A \text{ es finito}\}$$

$\mathcal{F}$ *se le conoce como el filtro de Frechet.*

Dado un conjunto X, cualquier colección $S \subseteq P(X)$ tiene la propiedad de intersección finita (PIF) si para todos $A_1, A_2, \cdots, A_n \in S$, se tiene que $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \neq \varnothing$.

NOTA. *Cualquier coleccion* $S \subseteq P(X)$ *con la PIF genera un filtro que la contiene.*

NOTA. *Sea $F(X)$ la colección de todos los filtros sobre X. Sea $\leq$ la relación de contención, entonces $(F(X), \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Este orden no puede ser lineal ($x \not\subset y$ y $y \not\subset x$)*

Ejemplo 5. $M \subseteq X \implies \mathcal{F}_n = \{A \subseteq X \ni M \subseteq A\}$ *es el filtro principal generado por M.*

Ejemplo 6. $M = \{x\}, x \in X \implies X = \mathcal{F}_x = \{A \subseteq X \ni x \in A\}$.

Teorema 2. *Sea $X \neq \varnothing$ y $\mathcal{F}_\alpha \in F(X), \alpha \in I$. Entonces $\bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha \in F(X)$*

NOTA. *Sea $X \neq \varnothing$ y sea $A \not\subseteq X \implies$ Considere $B = X - A = A^c$ y a los filtros $\mathcal{F}_A$ y $\mathcal{F}_B$. Entonces, $\mathcal{F}_A \cup \mathcal{F}_B$ no es filtro. En efecto, como $A \subset \mathcal{F}_A$ y $B \subset \mathcal{F}_B \implies A \cap B = \varnothing \implies \varnothing \mathcal{F}_A \cup \mathcal{F}_B$.*

Teorema 3. *Sea X un conjunto y $U(x)$ una colección de filtros sobre X. Si para cualesquiera $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in U(x)$ se tiene que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ o $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1 \implies \bigcup U(x)$ es filtro.*

Proposición 2. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ filtros sobre X. Entonces, $\mathcal{F} \bigcup_* G := \{F \cup G : F \in \mathcal{F} \wedge G \in \mathcal{G}\}$ es filtro sobre X.*

> **NOTA** (Escolio). *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre $X \neq \varnothing$. Entonces, $\mathcal{F} \cup \{\varnothing\}$ es una topología sobre X.*

Definición 6 (Ultrafiltros). *Sea*

- *Un filtro sobre X es un ultrafiltro si se cumple $\forall A \subset X$, se tiene que $A \in \mathcal{F}$ o $A^c \in \mathcal{F}$.*
- *Un ultrafiltro es un filtro maximal en $(F(X), \subseteq)$; i.e. un ultrafiltro es un filtro U sobre X tal que si $\mathcal{G}$ es un filtro sobre X tal que $X \ni U \subseteq G \implies U = G$*

Definición 7. *$\mathcal{F}$ converge a x ($\mathcal{F} \to x$) si $\forall V \in N(x) \exists F \in \mathcal{F} \ni F \subset V$.*

Definición 8. *Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, $a \in X$ y $A \subset X$. Se dice que a es un elemento maximal de A, si $a \in A$ y si $a \leq b$, para todo $b \in A \implies a = b$.*

Definición 9. *Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $C \subset X$. Se dice que C es cadena en X, si $\forall a, b \in C$ se cumple $a \leq b$ o $b \leq a$.*

Lema 4 (De Zorn)**.** *Si X es un conjunto vacío y parcialmente ordenado $\ni$ cada cadena en X tiene cota superior, entonces X tiene un elemento maximal.*

Definición 10. *Sea $X \neq \varnothing$. Una familia $U \subseteq P(X)$ (Potencia: 2^X) es un ultrafiltro si se cumplen:*

1. *$\mathcal{U}$ es filtro.*

2. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X ral que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F} \implies \mathcal{U} = \mathcal{F}$. $\mathcal{U}$ es un filtro maximal*

Ejemplo 7. *Sea X un espacio topológico. Si $x \in X$, entonces $\mathcal{F}_x = \{A \subseteq X \ni x \in A\}$ es un ultrafiltro de X. En efecto:*

1. *$\mathcal{F}_x$ es un filtro.*

2. *Sea $\mathcal{G}$ un filtro sobre $X \ni \mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{G}$. Como $\{x\} \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{G} \implies$ para cada $G \in \mathcal{G} \implies G \cap \{x\} \neq \varnothing \implies x \in G, \forall G \in \mathcal{G} \implies G \in \mathcal{F}_x \implies \mathcal{G} \subset \mathcal{F}_x \implies \mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre X.*

3. *Sea X un conjunto vacío y $A \subset X$, con al menos dos puntos. $\implies \mathcal{F}_A = \{F \subset X \ni A \subset F\}$ no es un ultra filtro. Entonces $M \in \mathcal{F}_A \implies A \subset M \implies x \in M \implies M \in \mathcal{F}_x \implies \mathcal{F}_A \subset \mathcal{F}_x$. Además, como $\{x\} \in \mathcal{F}_x$ y además, $\{x\} \notin \mathcal{F}_A \implies \mathcal{F}_x \not\subset \mathcal{F}_A \implies \mathcal{F}_A$ no puede ser ultrafiltro en X.*

Teorema 5. *(Tarski, 1930) Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$.*

Definición 11. *Una subcolección $\beta \subset \mathcal{F}$ es una base del filtro $\mathcal{F}$ si ocurre $\forall F \in \mathcal{F} \exists B \in \beta \ni B \subset F$.*

Teorema 6. *Una familia β de subconjuntos no vacíos de X es base de algún filtro sobre X ssi $\forall B_1, B_2 \in \beta \ni B_3 \subset \beta \ni B_3 = B_1 \cap B_2$.*

Teorema 7. *Sea X, Y espacios topológicos, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y un mapeo $f : X \to Y$. Entonces*

$$\beta_{\mathcal{F}} = \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$$

es una base para filtros en Y.

Teorema 8. *Sean X, Y espacios topológicos, $\mathcal{F}$ un filtro sobre Y y un mapeo $f : X \to Y$. Si, $\forall F \in \mathcal{F}$ se tiene que $f^{-1}(F) \neq 0$, entonces $\beta = \{f^{-1}(F) : F \in \mathcal{F}\}$ es una base de filtros para X.*

Teorema 9. *Sea $X \neq \varnothing, \mathcal{F}$ un filtro sobre X y $E \subset X$. Si $\beta = \{F \cap E : F \in \mathcal{F}\}$ y $\beta' = \{F \cap (X - E) : F \in \mathcal{F}\}$, entonces:*

1. *Si $F \cap E \neq \varnothing, \forall F \in \mathcal{F} \implies \beta$ es una base de filtros sobre X.*

2. *Si $\exists F \in \mathcal{F} \ni F \cap E \neq \varnothing \implies \beta'$ es base de filtros sobre X.*

Definición 12. *Sea (X, τ) un espacio topológico F un filtro sobre X, $x \in X$. Entonces:*

1. *Se dice que $\mathcal{F}$ converge a x, $\mathcal{F} \to x$, si $\forall V \in N(x) \exists F \in \mathcal{F} \ni F \subset V$*

2. *Se dice que x es un punto de acumulación de $\mathcal{F}$, si $\forall F \in \mathcal{F}$ y $\forall V \in N(x)$, se cumple que $F \cap V \neq \varnothing$. Notación: $F \geq x$*

Teorema 10. *Sean X un conjunto y U un filtro sobre X. Entonces, los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *$\mathcal{U}$ es ultrafiltro*

2. *Para cada $E \subset X \ni E \cap F \neq \varnothing, \forall F \in \mathcal{U}$, se tiene que $E \in \mathcal{U}$.*

3. *Si $E \subset X \implies E \in \mathcal{U}$ o $X - E \in \mathcal{U}$*

4. *Si $A, B \subset X$ y $A \cup B \in \mathcal{U} \implies A \in \mathcal{U}$ o $B \in \mathcal{U}$.*

Definición 13. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $x \in X$.Entonces, $\mathcal{F} \to x$, si $\forall V \in N(x) \exists F \in \mathcal{F} \ni F \subset V$.*

Teorema 11. *Sea (X, τ) un espacio topológico $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $x \in X$. Entonces, $\mathcal{F} \to x \iff N(x) \subset F$.*

Ejemplo 8. *Sean X un espacio topológico y $x \in X \implies \mathcal{F}(x) = N(x)$ converge a x.*

Ejemplo 9. *Sea X un espacio indiscreto. Como X es la única vecindad disponible para convergencia, entonces cualquier filtro sobre X converge a cada punto de X.*

Ejemplo 10. *Considere el espacio de Sierpinski. es decir: $X = \{0, 1\}$ y $\tau = \{X, \varnothing, \{0\}\}$ y sea $\mathcal{F} = N(x)$.*

- *Sea $x = 0 \implies N(x) \to 0$; $N(X) \to 1$*

Teorema 12. *Sea X un espacio topológico $x \in X$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $X \ni \mathcal{F} \to x$. Si G es un filtro sobre $X \ni F \subset G \implies G \to x$.*

Definición 14. *Se dice que x es un punto de acumulación del filtro $\mathcal{F}$ sobre X, si $\forall F \in \mathcal{F}$ y $\forall V \in N(x)$, se cumple que $F \cap V \neq \varnothing$*

NOTA. $F > x$