Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

Teoría electromagnética 1 - Catedrático: Eduardo Álvarez
27 de abril de 2023

Tarea

Problema 1. *La región* $1(\mathrm{z}<0)$ *contiene un dieléctrico para el cual* $\varepsilon_r = 2{,}5$*, mientras la región* $2(\mathrm{z}>0)$ *se caracteriza por un dieléctrico* $\varepsilon_r = 4$*. Sea* $\overrightarrow{E_1} = -30\overrightarrow{a_x} + 50\overrightarrow{a_y} + 70\overrightarrow{a_z}$ V/m*. Encontrar*

1. $\mathbf{D}_2$

Solución. Sea

$$D_1 = \varepsilon\varepsilon_{r_1}E_1 = \varepsilon_0(2{,}5)(-30, 50, 70)$$

Ahora, tenemos: $D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$ pero no hay carga en la superficie $\Rightarrow \rho_s = 0$. $\Rightarrow \quad D_{1n} = D_{2n},$ como estamos en $z = 0 \;\Rightarrow \quad D_{1z} = D_{2z} \Rightarrow \varepsilon_0\varepsilon_{r_1}E_{1z} = \varepsilon_0\varepsilon_{r_2}E_{2z}$

$$\Rightarrow \quad E_{2z} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}E_{1z}}{\varepsilon_0\varepsilon_{2z}} = \frac{\varepsilon_{r_1}}{\varepsilon_{r_2}} \cdot E_{1z} = \frac{2{,}5}{4}(70) = \frac{\frac{5}{2}}{4}(70) = \frac{5}{8}(70) = \frac{5}{4}(35) = \frac{175}{4}\frac{\mathrm{V}}{m}$$

$\Rightarrow$ Para la componente tangencial, $E_{1t} = E_{2t}$ Tenemos E_x y E_y:

$$\begin{aligned} E_{2x} &= E_{1x} = -30 \\ E_{2y} &= E_{1y} = 50 \\ \Rightarrow E_2 &= \left(-30, 50, \frac{175}{4}\right)\mathrm{V/m} \\ \Rightarrow D_2 =& \varepsilon_0\varepsilon_{r1}E_2 = \varepsilon_0(4)\left(-30, 50, \frac{175}{4}\right)\mathrm{V/ms} \\ =& \varepsilon_0(-120, 200, 175)\mathrm{V/m} \end{aligned}$$

□

2. $\mathbf{E}_2$

Solución. Inciso anterior, $E_2 = \left(-30, 50, \frac{175}{4}\right)$ V/m □

3. *el ángulo entre* $\mathbf{E}_1$ *y la normal a la superficie.*

Solución. Producto escalar $E_1 \cdot \vec{a}_z = |E_1| |\vec{a}_z| \cos\theta$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos\theta &= \frac{E_1 \cdot a_z}{|E_1| |a_z|} = \frac{70(1)}{\sqrt{(-30)^2 + (50)^2 + (70)^2}} \\ &= \frac{70}{10\sqrt{83}} = \frac{7}{\sqrt{83}} \\ \Rightarrow \theta &= \arccos\left(\frac{7}{\sqrt{83}}\right) = 39{,}79^\circ \end{aligned}$$

□

Problema 2. *Responda:*

1. *Dado que* $\vec{E} = -15\overrightarrow{a_x} - 8\overrightarrow{a_z}$ V/m *en un punto de una superficie conductora, ¿cuál es la densidad de carga en la superficie en ese punto? Asuma que* $\varepsilon = \varepsilon_0$*.*

Solución.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \Rightarrow D_{1n} = \rho_s \\ &\Rightarrow \rho_s = D_{1n} = \varepsilon E_{1n} = \varepsilon_0 E_1 \cdot n = \varepsilon_0 |E_1| |n| \cos\theta \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ No se nos da n entonces solo podemos dejar expresada la ecuación

$$\rho_S = \varepsilon_0 (-15a_x - 8a_z) \cdot n$$

□

2. *La región* $y \geq 2$ *está ocupada por un conductor. Si la carga superficial del conductor es* 20nC/m^2*, encontrar* D *afuera del conductor.*

Solución.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \Rightarrow D_{1n} = \rho_1, \Rightarrow D_{1n} = \frac{20nc}{m^2} \\ &\Rightarrow \vec{D}_1 = D_{1n}\vec{a}_n = \frac{20nc}{m^2}(-\vec{a}y) = -20\frac{nc}{m^2}\vec{a}_y \end{aligned}$$

□

Problema 3. *Una barra cilíndrica de carbono* $\sigma = 3X10^4$ *tiene un radio de* 5 mm *y una longitud de* 8 cm*. Si se mantiene a una diferencia de* 9 V*. Encontrar:*

1. *la resistencia de la barra.*

Solución.

$$\begin{aligned} R &= \rho\left(\frac{L}{A}\right) = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{L}{\pi r^2}\right) = \frac{8 \times 10^{-2}}{(3 \times 10^4)\,\pi\,(5 \times 10^{-3})^2} \\ &= \frac{8}{75\pi} \end{aligned}$$

□

2. *la corriente a través de la barra.*

Solución.

$$\Rightarrow V = IR \Rightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{9}{8/75\pi} = \frac{(75\pi)(9)}{8} = \frac{675\pi}{8}$$

$\square$

3. *la potencia disipada por la barra.*

Solución.

$$P = VI \Rightarrow P = (IR)I = I^2R = \left(\frac{675\pi}{8}\right)^2\left(\frac{8}{75\pi}\right)$$
$$= \frac{6075\pi}{8}$$

$\square$

Problema 4. *La densidad de corriente en un conductor cilíndrico de radio a está dada por:*

$$\vec{J} = 10e^{-\left(1-\frac{\rho}{a}\right)}\overrightarrow{a_z}\ \mathrm{A/m^2}$$

Encontrar la corriente que pasa a través de la sección transversal del conductor.

Solución.

$$\begin{aligned} I &= \oint_s J \cdot ds \\ &= \oint_s 10e^{-(1-\rho/a)} \cdot \rho d\rho d\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^a 10e^{-(1-\rho/a)} \cdot \rho d\rho d\phi \\ &= 10\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a e^{-(1-\rho/a)} \cdot \rho d\rho \\ &= 10(2\pi)\left(\frac{a^2}{e}\right) = \frac{20\pi a^2}{e} \end{aligned}$$

$\square$

Problema 5. *Un alambre está hecho de cobre y consta de 150 vueltas. Si el radio de las vueltas es* 6,5 mm *y el diámetro del alambre es* 0,4 mm*. Calcule la resistencia del alambre.*

Solución.

$$\Rightarrow R = \rho\left(\frac{L}{A}\right) \Rightarrow \rho = 1{,}68 \times 10^{-8}\Omega m; L = 150 \cdot 2\pi \cdot 6{,}5 \times 10^{-3}; A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{0{,}4 \times 10^{-3}}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow R = \left(1{,}68 \times 10^{-8}\Omega\mathrm{m}\right)\left(\frac{150 \cdot 2\pi \cdot 6{,}5 \times 10^{-3}}{\pi\left(\frac{0{,}4\times10^{-3}}{2}\right)^2}\right) = 0{,}819\Omega$$

$\square$

Problema 6. *Determinar el tiempo de relajación de:*

1. *Plástico duro* ($\sigma = 10^{-15}$ S/m, $\varepsilon = 3{,}1\varepsilon_0$)

   Solución.
$$\Rightarrow t = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{3{,}1\varepsilon_0}{10^{-15}\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}} = 2{,}741 \times 10^4 \text{ s}$$
□

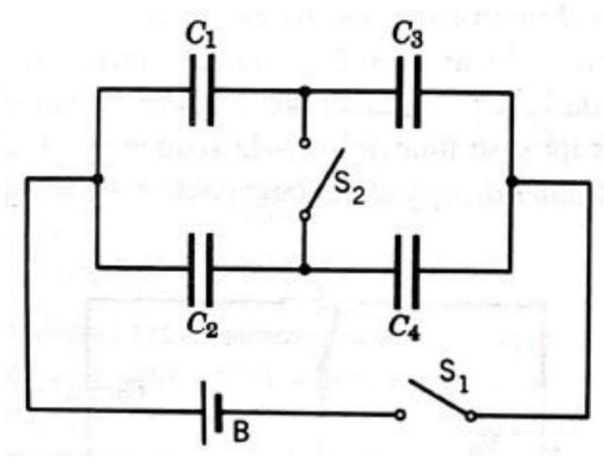
2. *Mica* ($\sigma = 10^{-15} S/m, \varepsilon = 6\varepsilon_0$)

   Solución.
$$t = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{6\varepsilon_0}{10^{-15}\text{ s/m}} = 5{,}305 \times 10^4 \text{ s}$$
□

3. *Agua destilada* ($\sigma = 10^{-4} S/m, \varepsilon = 80\varepsilon_0$)

   Solución.
$$t = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{80\varepsilon_0}{10^{-4}\text{ s/m}} = 7{,}07 \times 10^{-6} \text{ s}$$
□

Problema 7. *En la figura 33 la batería suministra 12 V. Considere* $C_1 = 1{,}0\mu\mathrm{F}, C_2 = 2{,}0\mu\mathrm{F}, C_3 = 3{,}0\mu\mathrm{F}$ *y* $C_4 = 4{,}0\mu\mathrm{F}$.



1. *Halle la carga sobre cada capacitor cuando el intertuptor* S_1 *se cierra*

   Solución. En serie:
$$\Rightarrow \frac{1}{C_{13}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}$$
$$= \frac{1}{1{,}0\mu} + \frac{1}{3{,}0\mu}$$

   Además, $V_{1,3} = V_{2,4} = V$:

$$\Rightarrow Q_{1,3} = C_{1,3}V_{1,3} = \left(\frac{1}{\frac{1}{1{,}0\mu} + \frac{1}{3{,}0\mu}}\right)(12) = 9\mu$$
$$\Rightarrow Q_{13} = Q_1 = Q_2 = 9\mu$$

En serie:

$$\Rightarrow \frac{1}{C_{24}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{2{,}0\mu} + \frac{1}{4{,}0\mu}$$
$$\Rightarrow C_{24} = \frac{1}{\frac{1}{2{,}0\mu} + \frac{1}{4{,}0\mu}}$$
$$\Rightarrow Q_{24} = C_{24}V_{24} = \left(\frac{1}{\frac{1}{2{,}0\mu} + \frac{1}{4{,}0\mu}}\right)(12) = 1{,}6 \times 10^{-5}$$
$$\Rightarrow Q_{24} = Q_2 = Q_4 = 1{,}6 \times 10^{-5}$$

□

2. *Cuando (más tarde) el interruptor* S_2 *también se cierra. Considere* $C_1 = 1{,}0\mu\mathrm{F}, C_2 = 2{,}0\mu\mathrm{F}, C_3 = 3{,}0\mu\mathrm{F}$ *y* $C_4 = 4{,}0\mu\mathrm{F}$.

Solución.

$$C_{12} = C_1 + C_2 = 1{,}0\mu + 2{,}0\mu = 3{,}0\mu$$
$$C_{34} = C_3 + C_4 = 3{,}0\mu + 4{,}0\mu = 7{,}0\mu$$
$$\Rightarrow C_T = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{34}} = \frac{1}{3{,}0\mu} + \frac{1}{7{,}0\mu}$$
$$\Rightarrow Q_{12} = Q_{34} = Q_T = \left(\frac{1}{3{,}0\mu} + \frac{1}{7{,}0\mu}\right)(12)$$

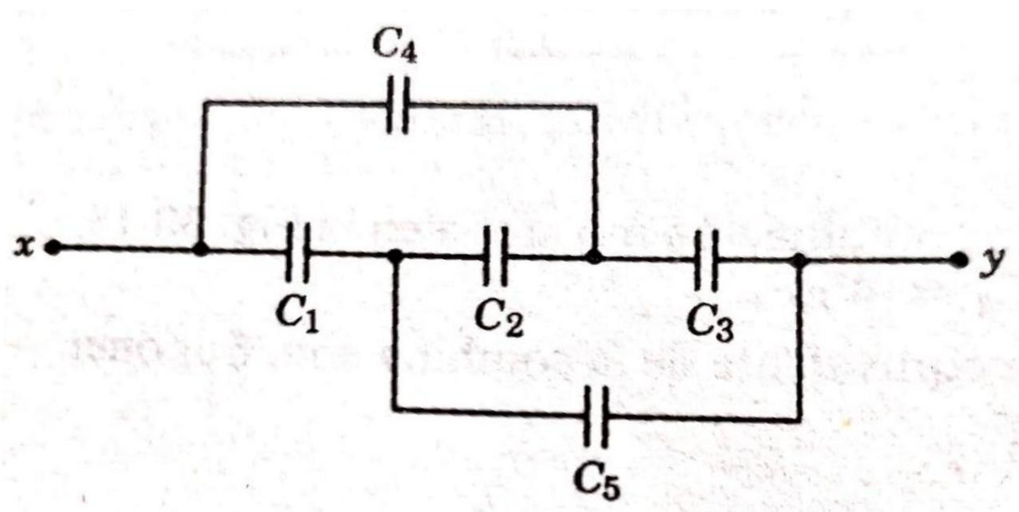
$$V_{12} = \frac{Q_{12}}{C_{12}} = 1{,}905 \times 10^{12} \implies V_{12} = V_1 = V_2$$
$$V_{34} = \frac{Q_{34}}{C_{34}} = 8{,}163 \times 10^{11} \implies V_{34} = V_3 = V_4$$

Entonces:

$$Q_1 = C_1V_1 = 1{,}905\mu$$
$$Q_2 = C_2V_2 = 3{,}81\mu$$
$$Q_3 = C_3V_3 = 2{,}449\mu$$
$$Q_4 = C_4V_4 = 3{,}265\mu$$

□

Problema 8. *Halle la capacitancia equivalente entre los puntos* x *y* y *en la figura 34. Suponga que* $C_2 = 10\mu\mathrm{F}$ *y que los otros capacitores son todos de* $4{,}0\mu\mathrm{F}$. *(Sugerencia: Aplique una diferencia de potencial* V *entre* x *y* y*, y escriba todas las relaciones que contengan a las cargas y las diferencias de potencial en cada uno de los capacitores.)*



Solución. Sea

$$C_1 = C_3 = C_4 = C_5 = 4{,}0\mu F; C_2 = 10\mu F$$

Sea

$$\frac{C_1}{C_3} = \frac{C_4}{C_5} = 1$$

$$\frac{1}{C_{14}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{4{,}0\mu} + \frac{1}{4{,}0\mu} \implies C_{14} = 2{,}0\mu$$
$$\frac{1}{C_{35}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_5} = \frac{1}{4{,}0\mu} + \frac{1}{4{,}0\mu} \implies C_{45} = 2{,}0\mu$$

$$C_T = C_{14} + C_{34} = 4\mu$$

□

Problema 9. *Responda:*

1. *Tres capacitores están conectados en paralelo. Cada uno tiene un área de placa A y un espaciamiento entre placas d. ¿Cuál debe ser el espaciamiento de un solo capacitor de área de placa A si su capacitancia es igual a la de la combinación en paralelo?*

   Solución. Sea $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

   $$C_T = C_1 + C_2 + C_3 = 3C_0 = \frac{3\varepsilon_0 A}{d}$$

   Entonces

   $$\Rightarrow C_T = \frac{3\varepsilon_0 A}{d} \Rightarrow \frac{\varepsilon_0 A}{d'} = \frac{3\varepsilon_0 A}{d}$$

   $$\Rightarrow \frac{1}{d'} = \frac{3}{d} \Rightarrow d' = \frac{d}{3}$$

   □

2. *¿Cuál debe ser el espaciamiento cuando los tres capacitores están conectados en serie?*

Solución.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_T} = 3\left(\frac{1}{C_0}\right)\\
\Rightarrow &C_T = \frac{C_0}{3} \Rightarrow \frac{\varepsilon_0 A}{d''} = \frac{C_0}{3}\\
\Rightarrow &\frac{\varepsilon_0 A}{d''} = \frac{\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)}{3} \Rightarrow \frac{\varepsilon_0 A}{d''} = \frac{\varepsilon_0 A}{3d}\\
\Rightarrow &\frac{1}{d''} = \frac{1}{3d} \Rightarrow d'' = 3d
\end{aligned}
$$

□

Problema 10. *Sea una cascarón esférico dieléctrico, tal que $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$, para $a < r < b$ y $\varepsilon = \varepsilon_0$ para $0 < r < a$. Si se coloca una carga Q en el centro del cascarón, encuentre:*

1. $\mathbf{P}$ *para* $\mathbf{a} < \mathbf{r} < b$

   Solución. Para encontrar la polarización $\mathbf{P}$ en la región dieléctrica ($a < r < b$). Usamos la ley de Gauss:

   $$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q_{enc}$$

   Considerando que $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, tenemos:

   $$D_r \oint dA = Q_{enc} \implies D_r(4\pi r^2) = Q_{enc} \implies D_r = \frac{Q_{enc}}{4\pi r^2}$$

   Para $a < r < b$, $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$, entonces:

   $$\varepsilon_0\varepsilon_r E_r = \frac{Q_{enc}}{4\pi r^2} \implies E_r = \frac{Q_{enc}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

   La relación entre $\mathbf{P}$ y $\mathbf{E}$ es:

   $$\mathbf{P} = \chi_e\varepsilon_0\mathbf{E}$$

   En donde, $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$, tal que:

   $$\mathbf{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\mathbf{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{Q_{enc}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{\mathbf{r}} = (\varepsilon_r - 1)\frac{Q_{enc}}{4\pi\varepsilon_r r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

   □

2. $\rho_{\rho v}$, *para* $a < r < b$

Solución. Sea

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{P} &= -\rho_v \\
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 P_r) &= -\rho_v \\
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{(\varepsilon_r - 1)Q_{enc}}{4\pi\varepsilon_r r^2}\right) &= -\rho_v \\
-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{(\varepsilon_r - 1)Q_{enc}}{4\pi\varepsilon_r}\right) &= \rho_v \\
0 &= \rho_v
\end{aligned}$$

□

3. *$\rho_{\rho s}$ en $r = a$ y $r = b$*

Solución. Consideramos los dos casos:

a) Consideremos primero $r = a$:

$$\rho_s(a) = \mathbf{P}(a^+) \cdot \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{P}(a^-) \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

Para $r < a$, $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ (ya que no hay polarización en el espacio vacío), y para $r > a$, usamos la expresión obtenida en la parte 1):

$$\rho_s(a) = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q_{enc}}{4\pi\varepsilon_r a^2}$$

b) Tenemos $r = b$:

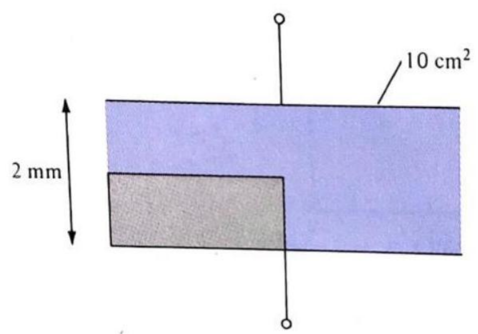
$$\rho_s(b) = \mathbf{P}(b^-) \cdot \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{P}(b^+) \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

Para $r > b$, $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ (ya que no hay polarización en el espacio vacío), y para $r < b$, usamos la expresión obtenida en la parte 1):

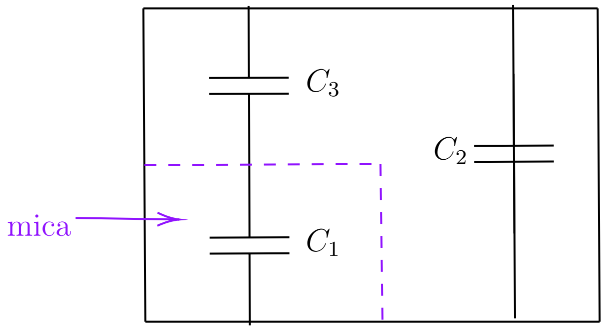
$$\rho_s(b) = -\frac{(\varepsilon_r - 1)Q_{enc}}{4\pi\varepsilon_r b^2}$$

□

Problema 11. *El capacitor de placas paralelas tiene una cuarta parte que es llenada con mica ($\epsilon_r = 6$). Encuentre la capacitancia.*



Solución. Para resolver este problema, consideramos la siguiente estructura:



Tenemos:

1. Para C_1:
$$C_1 = \frac{(\varepsilon_{mica} * (A/2))}{d/2} = \frac{(6)(\varepsilon_0) * (A/2)}{d/2} = \frac{(6)(\varepsilon_0) * (A)}{d}$$

2. Para C_2:
$$C_2 = \frac{(\varepsilon_{aire} * (A/2))}{d/2} = \frac{(1)(\varepsilon_0) * (A/2)}{d} = \frac{(\varepsilon_0) * (A/2)}{d}$$

3. Para C_3:
$$C_3 = \frac{(\varepsilon_{aire} * (A/2))}{d/2} = \frac{(1)(\varepsilon_0) * (A/2)}{d/2} = \frac{(\varepsilon_0) * (A)}{d}$$

Ahora, combinamos las capacitancias. Primero, encontramos la capacitancia equivalente de la combinación en serie de C_1 y C_3:

$$\frac{1}{C_{13}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} = \frac{d}{6\varepsilon_0 A} + \frac{d}{\varepsilon_0 A} = \frac{7d}{6\varepsilon_0 A}$$

Luego, sumamos C_{13} y C_2 en paralelo para obtener la capacitancia total:

$$C_T = C_{13} + C_2 = \frac{6\varepsilon_0 A}{7d} + \frac{(\varepsilon_0)A}{2d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{6}{7} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\varepsilon_0(10 \times 10^{-2})}{2 \times 10^{-3}}\frac{19}{14} = \frac{475}{7}\varepsilon_0$$

□

Problema 12. *Para un medio anisotrópico*

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

Obtener:

1. $\vec{E} = 15\overrightarrow{a_x} - 10\overrightarrow{a_y} V/m$

Solución.

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \epsilon_0 \begin{bmatrix} 65 \\ -35 \\ 5 \end{bmatrix}$$

□

2. $\vec{E} = 15\overrightarrow{a_x} + 230\overrightarrow{a_y} - 20\overrightarrow{a_z} V/m$

Solución.

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 230 \\ -20 \end{bmatrix}$$
$$= \epsilon_0 \begin{bmatrix} 285 \\ 1145 \\ 145 \end{bmatrix}$$

□