UVG UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Relación entre E y V (Ecuación de Maxwell)

Dado que la diferencia de potencial es independiente de la trayectoria

$$V_{BA} = -V_{AB}$$

$$V_{BA} + V_{AB} = \oint \vec{E} \cdot d\ell = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int (\nabla \times \vec{E}) \cdot dS = 0$$

por Stockes

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

pero $V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

pero $dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$

POR ENDE

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

ASÍ

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{vol}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

SI $\varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D}$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{vol}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = -\varepsilon_0 \nabla V$$

Sea $V = \frac{10}{r^2} \operatorname{sen}\theta \cos\phi$

hallar $\vec{E}$ y $\vec{D}$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left[\frac{\partial V}{\partial r}\vec{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{a}_\theta + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{a}_\phi\right]$$

$$\vec{E} = -\left[-\frac{20}{r^3}\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\vec{a}_r + \frac{1}{r}\,\frac{10}{r^2}\cos\theta\cos\phi\,\vec{a}_\theta - \frac{10}{r^2}\,\frac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi}{r\operatorname{sen}\theta}\,\vec{a}_\phi\right]$$

$$\vec{E} = \left[\frac{20}{r^3}\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\vec{a}_r - \frac{10}{r^3}\cos\theta\cos\phi\,\vec{a}_\theta + \frac{10}{r^3}\operatorname{sen}\phi\,\vec{a}_\phi\right]$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$$

Líneas de Flujo Eléctrico

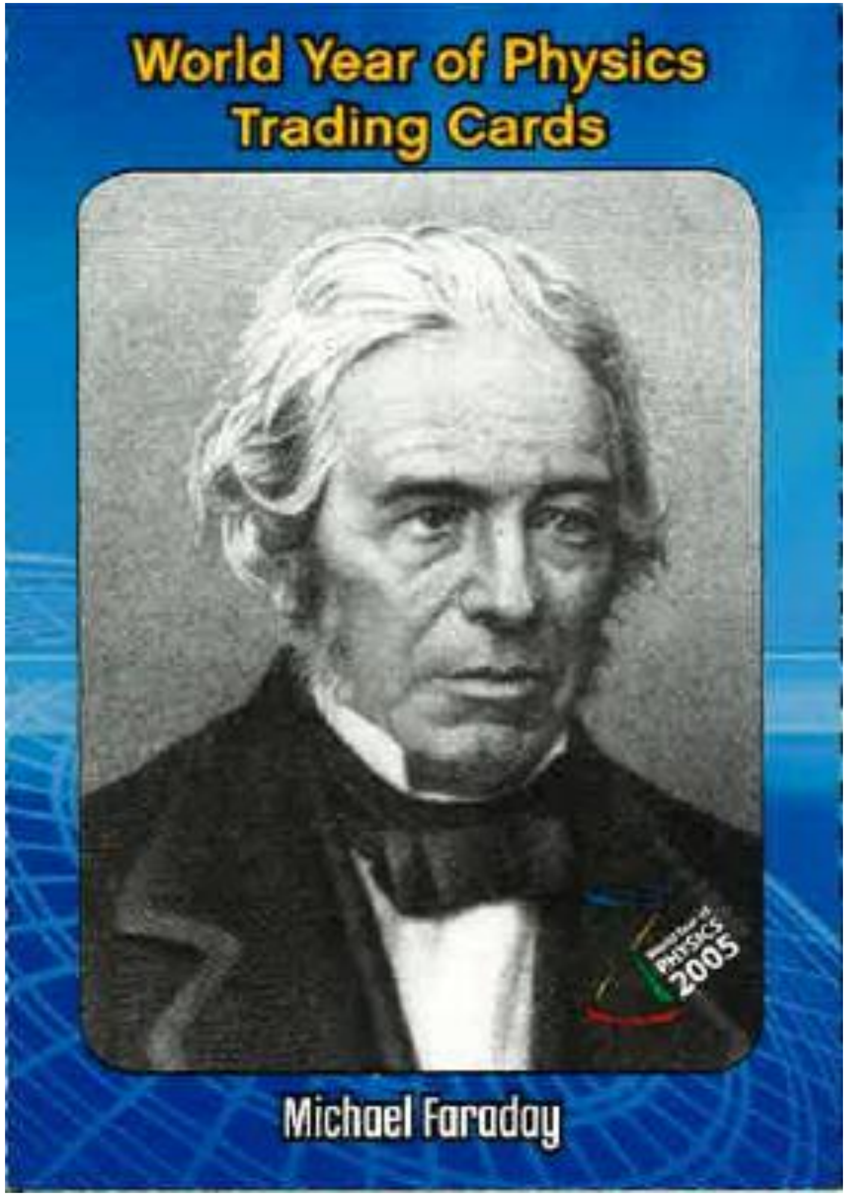
Es una trayectoria imaginaria o dibujos de líneas de forma que la dirección en cualquier punto es la dirección del campo eléctrico en ese punto.

Son las líneas en las cuales el campo eléctrico es tangencial en cada punto

CUALQUIER SUPERFICIE EN LA CUAL EL POTENCIAL ES EL MISMO A TRAVÉS DE ELLA ES UNA SUPERFICIE EQUIPOTENCIAL

LA INTERSECCIÓN DE UNA SUPERFICIE EQUIPOTENCIAL Y UN PLANO RESULTA EN UNA TRAYECTORIA O LÍNEA CONOCIDA COMO LÍNEA EQUIPOTENCIAL. AL MOVERSE SOBRE ELLA NO SE REALIZA TRABAJO

LAS LÍNEAS DE FUERZA O LÍNEAS DE FLUJO (O LA DIRECCIÓN DE $\vec{E}$) SIEMPRE ES NORMAL A LAS SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES.



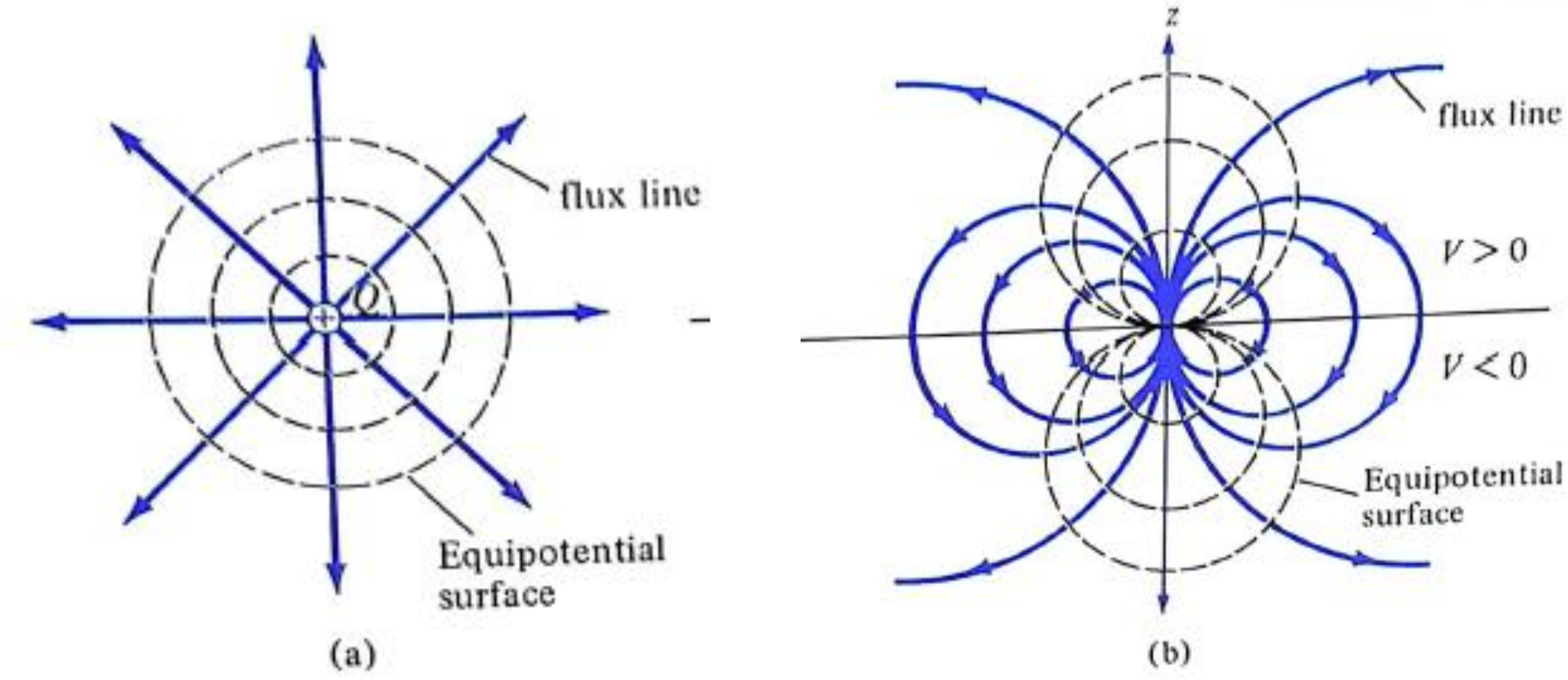
Michael Faraday (1791-1867)
Birthplace: London, England

Son of a blacksmith, apprenticed to a bookbinder, self-educated, Faraday was a laboratory assistant to Sir Humphry Davy, the great chemist. Yet Davy later said, "My greatest discovery was Faraday." Faraday originated our ideas of electromagnetic fields, discovered the induction of electric fields from moving magnetic fields, and created the first generator. He worked out and demonstrated the laws of electrolysis, and found fundamental relationships between light and electromagnetism in matter.

Courtesy, AIP Emilio Segrè Visual Archives, Brittle Books Collection

American Association of
Physics Teachers
One Physics Ellipse, College Park, MD 20740
www.aapt.org

Series 1 · Oct. 2005



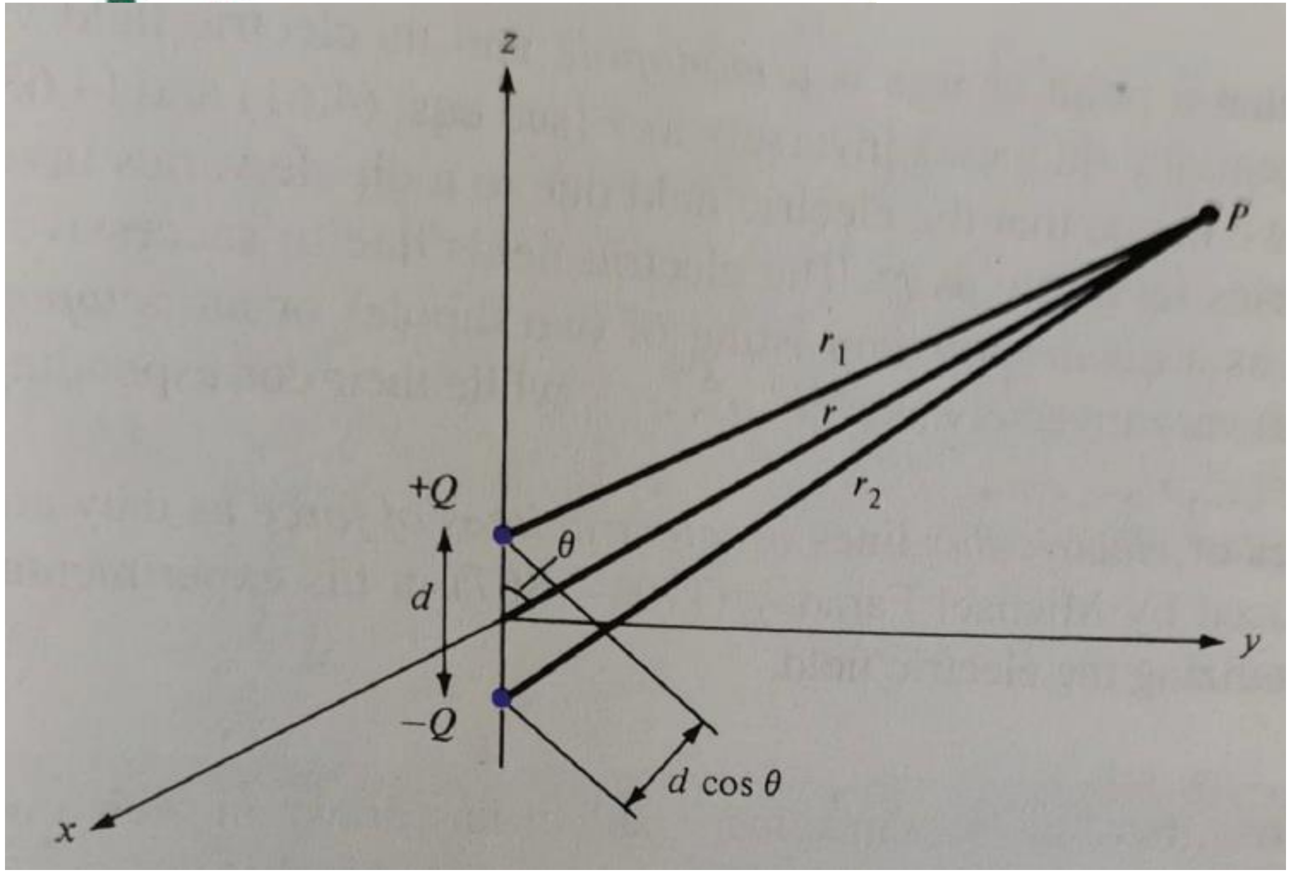
flux line
Q
Equipotential surface
(a)
z
flux line
V > 0
V < 0
Equipotential surface
(b)

Enlaces utilizados en clase

- Equipotential Lines
- https://www.youtube.com/watch?v=1XI4D4SgHTw
- Charges and Fields
- https://phet.colorado.edu/en/simulations/filter?subjects=physics&type=html&sort=alpha&view=grid
- https://phet.colorado.edu/sims/html/charges-and-fields/latest/charges-and-fields_en.html
- Equipotential
- http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/equipot.html#c1

Dipolo eléctrico

Se forma cuando dos cargas de igual magnitud pero de signo opuesto están separados una pequeña distancia



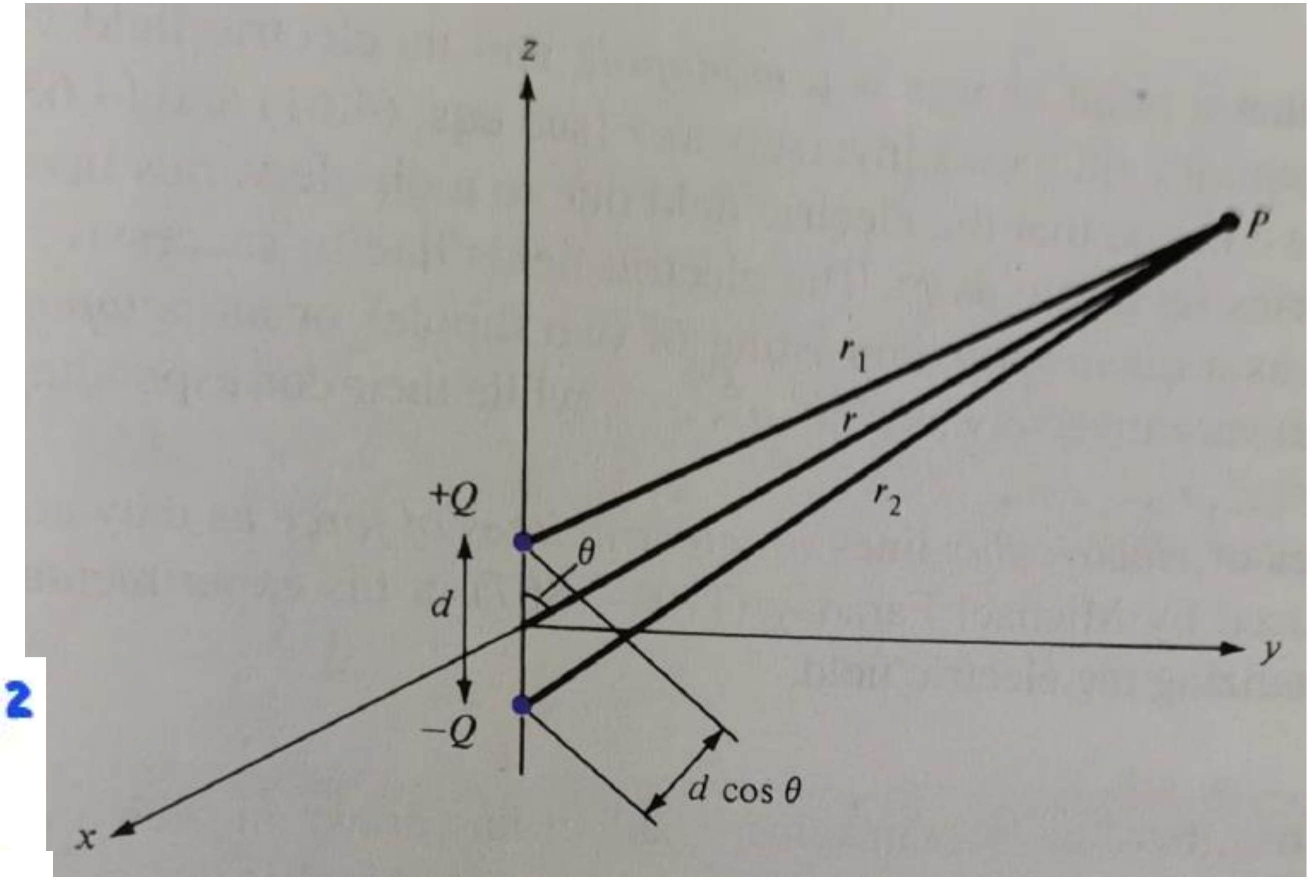
$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right]$$

si $r >> d$, $r_2 - r_1 \simeq d\cos\theta$, $r_2 r_1 \simeq r^2$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{d\cos\theta}{r^2}\right]$$

$$V = \frac{\vec{p}\cdot\vec{a}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



SI $d\cos\theta = \vec{d} \cdot \vec{a}_r$

CON $\vec{d} = d\,\vec{a}_z$

SEA $\vec{p} = Q\vec{d}$ MOMENTO DIPOLAR

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d\cos\theta}{r^2}$$

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{a}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$V = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{2Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0} r^{-3}\, \vec{a}_r$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(-\mathrm{sen}\,\theta)\quad \vec{a}_\theta$$

$$\vec{E} = -\nabla V = \frac{2Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{a}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{Qd\,\mathrm{sen}\,\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)\vec{a}_\theta$$

$$p = Qd$$

$$\vec{E} = \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{a}_r + \frac{p\,\mathrm{sen}\,\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{a}_\theta$$

$$V(r) = \frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

(SI EL DIPOLO NO ESTÁ CENTRADO EN EL ORIGEN SINO EN $\vec{r}\,'$)

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left[\frac{\partial V}{\partial r}\vec{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{a}_\theta\right]$$

$$\vec{E} = \frac{Qd\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{a}_r + \frac{Qd\,\text{SEN}\,\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{a}_\theta$$

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\vec{a}_r + \text{SEN}\,\theta\,\vec{a}_\theta\right)$$

MONOPOLO	1 CARGA	r^{-2}
DIPOLO	2 CARGAS	r^{-3}
CUADRIPOLOS	4 CARGAS	r^{-4}
OCTOPOLOS	8 CARGAS	r^{-5}
⋮		⋮

Dos dipolos con momentos dipolares $-5\vec{a}_z$ nC/m y $9\vec{a}_z$ nC/m están localizados en los puntos $(0,0,-2)$ y $(0,0,3)$, respectivamente. Calcular el potencial en el origen.

$$V = \sum_{k=1}^{2} \frac{\vec{p}_k \cdot \vec{r}_k}{4\pi\varepsilon_0 r_k^3}$$

$P_1 = -5a_z$

$P_2 = +9a_z$

$\vec{r}_1 = (0,0,0) - (0,0,-2) = (0,0,2)$

$\vec{r}_2 = (0,0,0) - (0,0,3) = (0,0,-3)$

$P_1 = (0,0,-5)$

$P_2 = (0,0,+9)$

$\vec{r}_1 = (0,0,2)$

$\vec{r}_2 = (0,0,-3)$

$|r_1| = 2$

$|r_2| = 3$

$$V = \frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{r}_1}{4\pi \varepsilon_0 r_1^3} + \frac{\vec{P}_2 \cdot \vec{r}_2}{4\pi \varepsilon_0 r_2^3}$$

$$V = \frac{-10 \times 10^{-9}}{4\pi \varepsilon_0 (2)^3} - \frac{27 \times 10^{-9}}{4\pi \varepsilon_0 (3)^3}$$

$$V = -11.25 - 9 = -20.25 \text{ V}$$

SEA UNA distribución DE CARGA ESFÉRICA dada POR:

$$\rho_{vol} = \begin{cases} \rho_0 r/a & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

Hallar $V(r)$

SI $r < a$ POR GAUSS

$$Q_{ENC} = \int^{r} \rho_{vol}\, dVol$$

$$Q_{ENC} = \int_0^r \frac{\rho_o r}{a} 4\pi r^2 dr$$

$$Q_{ENC} = \frac{4\pi \rho_o}{a} \int_0^r r^3 dr$$

$$Q_{ENC} = \frac{4\pi \rho_o}{a} \left[\frac{r^4}{4} \right]$$

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{Q_{ENC}}{\varepsilon_o}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_o} \frac{4\pi \rho_o}{a} \left[\frac{r^4}{4} \right]$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_o}{a\, \varepsilon_o} \left[\frac{r^2}{4} \right]$$

$r > a$

$$Q_{ENC} = \int_0^a \frac{\rho_0 r}{a} 4\pi r^2 dr$$

$$Q_{ENC} = \frac{4\pi \rho_0}{a}\left[\frac{a^4}{4}\right]$$

$$Q_{ENC} = 4\pi \rho_0 \left[\frac{a^3}{4}\right]$$

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{Q_{ENC}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{4\pi \rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{a^3}{4}\right]$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 a^3}{\varepsilon_0 4 r^2}$$

Ahora $V(r)$ AFUERA $(r>a)$

$$V = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot dr = -\frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r} r^{-2} dr$$

$$V = \frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]$$

ADENTRO $r<a$

$$V = -\int_{\infty}^{r} E\cdot dr = -\int_{\infty}^{a} E_{OUT}\cdot dr - \int_{a}^{r} E_{IN}\cdot dr$$

$$V = \frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a}\right] - \int_{a}^{r} \frac{\rho_0}{4a\varepsilon_0} r^2 dr$$

$$V = \frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a}\right] - \frac{\rho_0}{4a\varepsilon_0}\left[\frac{r^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right]$$

En $r=0$

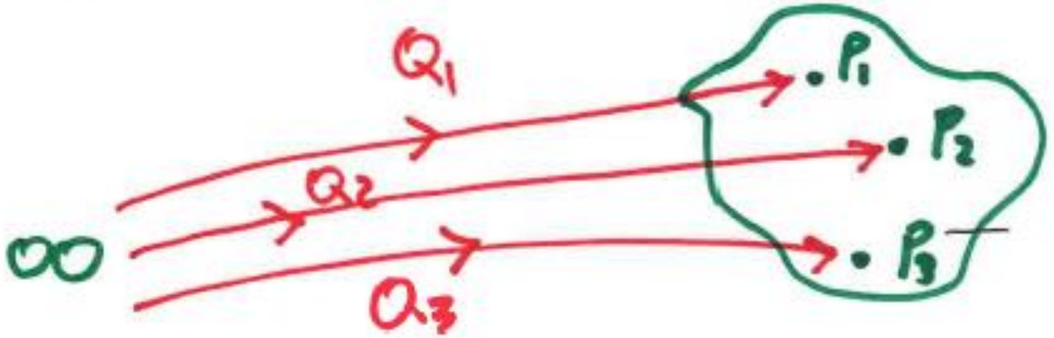
$$V=\frac{\rho_0 a^2}{4\varepsilon_0}-\frac{\rho_0}{4a\varepsilon_0}\left[0-\frac{a^3}{3}\right]$$

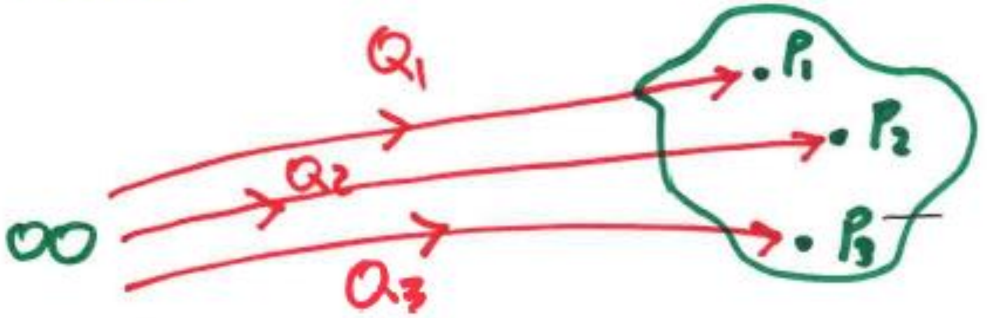
$$V=\frac{\rho_0 a^2}{4\varepsilon_0}+\frac{\rho_0 a^2}{12\varepsilon_0}$$

Densidad de energía en campos eléctricos

idea: "cantidad de energía necesaria para ensamblar grupo de cargas o una distribución de cargas."

Supongamos que quiero colocar cargas Q_1, Q_2 y Q_3 en un espacio vacío





Calculemos el trabajo necesario

Al traer Q_1 $\quad W_1 = 0$ (espacio vacío y sin carga)

Al traer Q_2 $\quad W_2 = Q_2 V_{21}$

Al traer Q_3 $\quad W_3 = Q_3 (V_{32} + V_{31})$

$$W_E = W_1 + W_2 + W_3$$

$$W_E = 0 + Q_2 V_{21} + Q_3 (V_{32} + V_{31})$$

Si lo hiciéramos en orden inverso

(Q_3, Q_2, Q_1)

$$W_E = W_3 + W_2 + W_1$$

$$W_E = 0 + Q_2 V_{23} + Q_1 (V_{12} + V_{13})$$

Al sumar ambas ecuaciones

$$W_E + W_E = 0 + Q_2 V_{21} + Q_3 (V_{32} + V_{31}) + 0 + Q_2 V_{23} + Q_1 (V_{12} + V_{13})$$

$$2W_E = Q_1 (V_{12} + V_{13}) + Q_2 (V_{21} + V_{23}) + Q_3 (V_{31} + V_{32})$$

$$2W_E = Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3$$

$$W_E = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3)$$

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} Q_k V_k$$

$$W_E = \frac{1}{2}\int \lambda_L V \, dl \quad \text{(LÍNEA)}$$

$$W_E = \frac{1}{2}\int \sigma_s V \, dS \quad \text{(SUPERFICIE)}$$

$$W_E = \frac{1}{2}\int \rho_{vol} V \, dVol \quad \text{(volumen)}$$

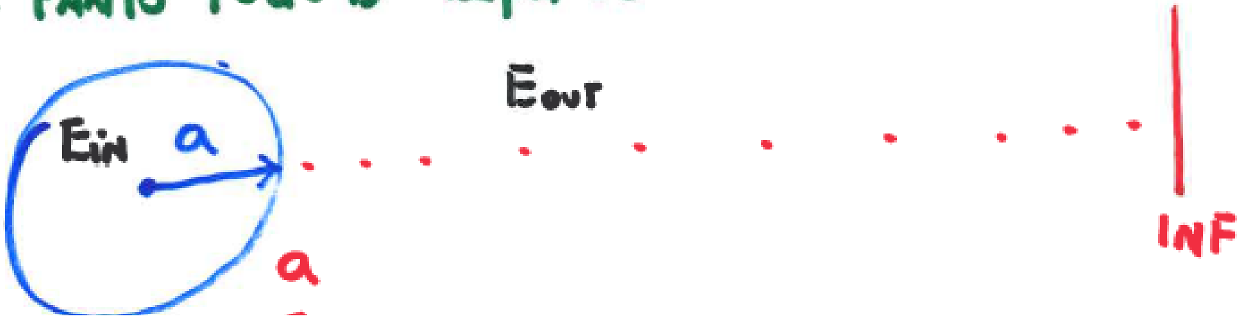
$$W_E = \frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \varepsilon_0 E^2 \, dVol$$

ENERGÍA PARA ENSAMBLAR LA DISTRIBUCIÓN DE CARGA

$$W_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\text{todo el espacio}} E^2 \, dVol$$

VENIMOS DESDE "EL INFINITO" HASTA LA DISTRIBUCIÓN

POR TANTO TODO EL ESPACIO TIENE DOS REGIONES



$$W_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\infty}^{a} E_{OUT}^2 \, dVol + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{a}^{0} E_{IN}^2 \, dVol$$

$$E_{OUT} = \frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0 r^2} \qquad E_{IN} = \frac{\rho_0 r^2}{4a\varepsilon_0}$$

$$dVol = 4\pi r^2 dr$$

$$W_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\infty}^{a} \left(\frac{\rho_0 a^3}{4\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{a}^{0} \left(\frac{\rho_0 r^2}{4a\varepsilon_0}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$W_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{4\pi \rho_0^2 a^6}{16\varepsilon_0^2}\int_{\infty}^{a}\frac{r^2}{r^4}dr$$

$$+ \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{4\pi\rho_0^2}{16a^2\varepsilon_0^2}\int_a^0 r^4 r^2 dr$$

$$W_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{4\pi\rho_0^2 a^6}{16\varepsilon_0^2}\right)\int_{\infty}^{a} r^{-2}dr$$

$$+ \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{4\pi\rho_0^2}{16a^2\varepsilon_0^2}\right)\int_a^0 r^6 dr$$

$$W_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{4\pi\rho_0^2 a^6}{16\varepsilon_0^2}\right)\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{\infty}^{a}$$

$$+ \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{4\pi\rho_0^2}{16a^2\varepsilon_0^2}\right)\left(\frac{r^7}{7}\right)\Big|_a^0$$

$$W_E = \frac{\pi}{8}\frac{\rho_0^2 a^6}{\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{a}-(0)\right)$$

$$+ \frac{\pi}{8}\frac{\rho_0^2}{a^2\varepsilon_0}\left(0-\frac{a^7}{7}\right)$$

$$W_E = \frac{\pi\rho_0^2}{8\varepsilon_0}\left(-a^5\right) - \frac{\pi\rho_0^2}{8\varepsilon_0}\left(\frac{a^5}{7}\right)$$

$$W_E = -\frac{\pi\rho_0^2}{8\varepsilon_0}\left(a^5+\frac{a^5}{7}\right) = \frac{-\pi\rho_0^2}{8\varepsilon_0}\left(\frac{8a^5}{7}\right)$$

$$W_E = \frac{-\pi\rho_0^2 a^5}{7\varepsilon_0}$$

DETERMINAR LA DENSIDAD DE CARGA PARA CADA UNO DE LOS SIGUIENTES CAMPOS

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(8xy\,\vec{a}_x + 4x^2\vec{a}_y\right)$$

DETERMINAR LA DENSIDAD DE CARGA PARA CADA UNO DE LOS SIGUIENTES CAMPOS

$$\vec{D} = 8xy\,\vec{a}_x + 4x^2\vec{a}_y$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{vol}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{a}_x , \frac{\partial}{\partial y}\vec{a}_y , \frac{\partial}{\partial z}\vec{a}_z\right) \cdot$$

$$\left(8xy\,\vec{a}_x , 4x^2\vec{a}_y , 0\vec{a}_z\right)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial}{\partial x}8xy + \frac{\partial}{\partial y}4x^2 + \frac{\partial}{\partial z}0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 8y + 0 + 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 8y = \rho_{vol}$$

$$\rho_{vol} = 8y \ \ C/m^3$$

DETERMINAR EL CAMPO ELÉCTRICO PARA LOS SIGUIENTES POTENCIALES

$$V = x^2 + 2y^2 + 4z^2$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{a}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{a}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{a}_z$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial x}(x^2+2y^2+4z^2)\vec{a}_x - \frac{\partial}{\partial y}(x^2+2y^2+4z^2)\vec{a}_y$$

$$- \frac{\partial}{\partial z}(x^2+2y^2+4z^2)\vec{a}_z$$

$$\vec{E} = -2x\,\vec{a}_x - 4y\,\vec{a}_y - 8z\,\vec{a}_z \quad V/m$$

Sea $\vec{E} = xy\,\vec{a}_x + x^2\vec{a}_y$, hallar

a) Densidad de flujo eléctrico

b) La densidad volumétrica de carga ρ_{vol}

Sea $\vec{E} = xy\,\vec{a}_x + x^2\vec{a}_y$, hallar

a) Densidad de flujo eléctrico

b) La densidad volumétrica de carga ρ_{vol}

a)

Densidad flujo eléctrico

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 xy\,\vec{a}_x + \varepsilon_0 x^2 \vec{a}_y$$

b)

$$\rho_{vol} = \nabla \cdot \vec{D}$$

$$\rho_{vol} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\rho_{vol} = \varepsilon_0 y \quad C/m^3$$

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \quad F/m$$

Dado el campo eléctrico

$$\vec{E} = \vec{a}_x + z^2\vec{a}_y + 2yz\,\vec{a}_z \quad V/m$$

Encuentre el trabajo realizado para mover una carga de 5 C de $P(1, 2, -4)$ a $R(3, -5, 6)$

Utilicemos las siguientes trayectorias

$P(1,2,-4)$ a $(3,2,-4)$

$(3,2,-4)$ a $(3,-5,-4)$

$(3,-5,-4)$ a $(3,-5,6)$

$$V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$V = -\left[\int_1^3 dx\right] - \left[\int_2^{-5} z^2 dy\right] - \left[\int_{-4}^{6} 2yz\,dz\right]$$

$$V = -x\Big|_1^3 - z^2 y\Big|_2^{-5} - 2y\frac{z^2}{2}\Big|_{-4}^{6}$$

$z=-4$ $\qquad$ $y=-5$

$$V = -(3-1) - (-4)^2(-5-2) - (-5)(6^2-(-4)^2)$$

$$V = -2 + 112 + 100 = +210$$

Pero $\quad V = -\dfrac{W}{q}$

$$W = -qV = -(5)(210) = 1050\ \text{J}$$

Modelo de Thompson de un átomo de hidrógeno es una esfera con carga positiva con un electrón (carga puntual) en el centro. La carga total positiva es igual a la carga del electrón e. Probar que a una distancia r del centro de la esfera de carga positiva un electrón es atraído por una fuerza

$$\vec{F} = \frac{e^2 r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

por Gauss

$$Q_E = \int \rho_{vol}\, dVol$$

$$Q_E = \int_0^r \rho_0\, 4\pi r^2 dr$$

$$Q_E = \frac{4}{3}\rho_0 \pi r^3$$

$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\, ds = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_E$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{4}{3}\rho_0 \pi r^3\right)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$\vec{F} = (e)\left(\frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\right)$$

$$\rho_0 = \frac{Q}{Vol} = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\vec{F} = (e)\left(\frac{r}{3\varepsilon_0}\right)\left(\frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)$$

$$\vec{F} = \frac{e^2 r}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad N$$