UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

1 SEMESTRE - 2023

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA APLICADA

Topología

Catedrático: Dorval Carías

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay

Carné: 19857

Correo: rom19857@uvg.edu.gt

1 de junio de 2023

Índice

1. Topología

Definición 1. *Sea $X \neq \varnothing$. Una clase τ de subconjunto de X es una topología sobre X, se cumple:*

1. $\varnothing, X \in \tau$
2. *La unión de una clase arbitraria de conjuntos en τ es un miembro de τ.*
3. *La intersección de una clase finita de miembros de τ está en τ.*

Los miembros de τ son los abiertos de X.

> 1. El par (X, τ) es un espacio topológico.
> 2. A los elementos de X se les llama puntos.
>
> estructura topológica

Ejemplo 1. 1. *Sea $X \neq \varnothing \implies \tau = P(X)$ es una topología sobre X. A τ se le llama topología discreta de X, y (X, τ) es un espacio discreto.*

2. *Sea $X \neq \varnothing \implies \tau = \{\varnothing, X\}$ es una topología sobre X. A τ se le llama topología indiscreta, y (X, τ) es un espacio indiscreto.*

3. *$X = \mathbb{R}^2$ y τ es la colección de abiertos de $\mathbb{R}^2$ definido en términos de la métrica usual. A τ se le llama topología usual de $\mathbb{R}^2$.*

4. *Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$.*

   a) *Sea $\tau_1 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\} \implies \tau_1$ es una topología sobre X.*

   b) *Sea $\tau_2 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$. Note que $\{a\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\} \notin \tau_2 \implies \tau_2$ no es topología sobre X*

   c) *Sea X un conjunto infinito y sea τ el vacío junto con la colección de subconjunto de X cuyos complementos son finitos. τ es una topología sobre X, y se llama topología cofinita sobre X.*

NOTA. *Un espacio metrizable es un espacio topológico X con la propiedad que existe una métrica que genera los abiertos de la topología dada.*
Problema 1. *¿Qué tipos de espacios topológicos son metrizables?*

Proposición 1. *Si τ_1 y τ_2 son topologías sobre X, entonces $\tau_1 \cap \tau_2$ es topología sobre X.*

Demostración.

1. Como τ_1 y τ_2 son topologías, etnonces: $X, \varnothing \in \tau_1$ y $X, \varnothing \in \tau_2 \implies X \in \tau_1 \cap \tau_2$ y $\varnothing \in \tau_1 \cap \tau_2$.

2. Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una subcolección de $\tau_1 \cap \tau_2 \implies G_i \in \tau_1, \forall i \in I \implies \bigcup_i G_i \in \tau_i$ y $G_i \in \tau_2, \forall i \in I \implies \bigcup_i G_i \in \tau_2$. Entonces $\bigcup_i G_i \in \tau_1 \cap \tau_2$

3. Sea G_1 y $G_2 \in \tau_1 \cap \tau_2 \implies G_1 \in \tau_1$ y $G_1 \in \tau_2$. $G_2 \in \tau_1$ y $G_2 \in \tau_2$. Entonces $G_1 \cap G_2 \in \tau_1$ y $G_1 \cap G_2 \in \tau_2 \implies G_1 \cap G_2 \in \tau_1 \cap \tau_2$. Entonces, $\tau_1 \cap \tau_2$ es una topología sobre X.

■

NOTA. *Sea $X = \{a, b, c\}$ y sean:*

- $\tau_1 = \{X, \varnothing, \{a\}\}$, $\tau_2 = \{X, \varnothing, \{b\}\}$. *Entonces,* $\tau_1 \cup \tau_2 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}\}$, *pero* $\{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$. $\therefore \tau_1 \cup \tau_2$ *no es topología sobre X.*

Ejemplo 2. *Sea $f : X \to Y$, donde X es un conjunto no vacío y Y es el espacio topológico de (Y, τ'). Entonces $\tau = \{f^{-1}(G) : G \in \tau'\}$ es una topología sobre X. En efecto:*

1. $\varnothing \implies \tau' \implies f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \tau$. $Y \in \tau' \implies f^{-1}(Y) = X \in \tau$

2. *Sea $\{G_i\}$ una subclase de τ. Como $G_i \in \tau, \forall \implies \exists H_i \in \tau' \ni G_i = f^{-1}(H_i) \implies \cup_i G_i = \cup_i f^{-1}(H_i) = f^{-1}(\underbrace{\bigcup_i H_i}_{\in \tau'}) \in \tau$*

Definición 2. *Sean X y Y espacios topológicos y f un mapeo de X en Y. Se dice que f es continua si $f^{-1}(G)$ es un abierto de X para cada abierto de G de Y.*

Definición 3. *Se dice que el mapeo es abierto si, para cada abierto G de X, se cumple que $f(G)$ es abierto de Y.*

Definición 4. *Si f es continuo, entonces $f(x)$ es la imagen continua de X bajo f.*

Definición 5 (Homeomorfismo)**.** *Un homeomorfismo es un mapeo biyectivo y bicontinuo (continuo y abierto) entre espacios topológicos. En este caso, los espacios son homeomorfos.*

> **NOTA.** *Una propiedad topológica es una propiedad que si la tiene el espacio topológico X, la tiene también cualquier espacio homeomorfo a X*

NOTA. *Sea A un subconjunto no vacío del espacio topológico (X, τ). Considerese la clase:*

$$\tau_A = \{A \cap G : G \in \tau \textit{es abierto de } X\}$$

Entonces, τ_A es una topologia sobre A, la cual se llama topologia relativa sobre A.

Definición 6. *El par (A, τ_A) es un espacio topologico y se dice es un subespacio de X,*

1. $\varnothing \in \tau \implies A \cap \varnothing = \varnothing \in \tau_A$ *y* $X \in \tau \implies A \cap X = A \in \tau_A$.
2. *Sea* $\{G_i\}_{i \in I}$ *una colección de miembros de* $\tau_A \implies \exists H_i \in \tau \ni G_i = A \cap H_i, \forall i \implies \bigcup_i G_i = \bigcup_i (A \cap H_i) = A \cap \left(\underbrace{\bigcup_i H_i}_{\in \tau} \right) \in \tau_A$
3. *Sean* $G_1, G_2 \in \tau_A \implies \exists H_i \in \tau \ni G_i = A \cap H_i$, $i = 1, 2$. *Entonces,* $G_1 \cap G_2 = (A \cap H_1) \cap (A \cap H_2) = A \cap (\underbrace{H_1 \cap H_2}_{\in \tau}) \in \tau_A \implies \tau_A$ *es topología sobre* A.

Ejemplo 3. *Tenemos,*

1. *Sea τ la topología usual de $\mathbb{R}$ y considere la topología relativa $\tau_{\mathbb{Z}^+}$ (en este caso, $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{R}$). Nótese que $\{n_0\}$ es abierto, la unión de unitarios es abierto de $\tau_{\mathbb{Z}^+} \implies \tau_{\mathbb{Z}^+}$ es la topología discreta de $\mathbb{Z}^+$.*

2. *Considere* $(\mathbb{R}, \tau)$, *donde* τ *es la topología usual de* $\mathbb{R}$ *y sea* $I = [0,1]$. *Entonces,*

   a) $(1/2, 1] = [0,1] \cap (1/2, 2) \in \tau_I$

   b) $(1/2, 2/3) = [0,1] \cap (1/2, 2/3) \in \tau_I$

   c) $(0, 1/2] \notin \tau_I$, *ya que no existe un abierto* $G \in \tau \ni (0, 1/2] = I \cap G$.

3. *Sea* $X = \{a, b, c, d, e\}$ *y sea*

$$\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

$\tau_A = \{A, \varnothing, \{a\}, \{a, c\}, \{a, e\}\}$

Considere $A = \{a, c, e\}$ *entonces:*

- $A \cap X = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap \{a\} = \{a\}$
- $A \cap \{a, b\} = \{a\}$
- $A \cap \{a, c, d\} = \{a, c\}$
- $A \cap \{a, b, c, d\} = \{a, c\}$
- $A \cap \{a, b, e\} = \{a, e\}$

1.0.1. Objeto de estudio de la topología

: Estudio de todas las propiedades topológicas de los espacios

Definición 7. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto $A \subset X$ es cerrado si y solo si $A^c \in \tau$.*

Ejemplo 4. *Sea (X, τ) un espacio discreto. Sea $A \subset X \implies A \in \tau \implies A^c \subset X \implies A^c \in \tau \implies A$ es cerrado. Entonces, $A \subset X$ es abierto y cerrado en X.*

NOTA. *Sea (X, τ) un espacio topológico,*

1. *$\phi \in \tau \implies \phi^c = X$ es cerrado. $X \in \tau \implies X^c = \phi$ es cerrado.*
2. *Considere una familia arbitraria $\{F_i\}$ de cerrados en $\tau \implies \{F_i^c\} \subset \tau \implies \bigcup_i F_i^c \in \tau \implies (\bigcup_i F_i^c)^c = \bigcap_i F_i$ es cerrado.*
3. *Sean F_1 y F_2 cerrados en $\tau \implies F_1^c$ y $F_2^c \in \tau \implies F_1^c \cap F_2^c \in \tau \implies (F_1^c \cap F_2^c)^c = F_1 \cup F_2$ es cerrado.*

Definición 8. *Sea X un espacio topológico:*

1. *Una vecindad de un punto (o de un conjunto), es un abierto de X que contiene al punto (o al conjunto).*

2. *Sea $A \subseteq X$. Un punto x en A es aislado si existe una vecindad de x que no contiene ningún otro punto de A.*

3. *Sea $A \subseteq X$. Un punto de $y \in X$ es un punto límite de A si, $\forall G \in \tau \ni y \in G$, se tiene que $(G - \{y\}) \cap A \neq \varnothing$.*

   EL conjunto de puntos límite de A se llama derivado de A, $(A', D(A))$.

4. *Sea $A \subseteq X$. La cerradura de A, denotado $\overline{A}$, es el cerrado más pequeño que contiene a A. Es decir, si F_i son los cerrados de X que contiene a $A \implies \overline{A} = \bigcap_i F_i$.*

   Tenemos:

   a) $A \subseteq \overline{A}$

   b) *Si A es cerrado $\implies A = \overline{A}$.*

5. *Un subconjunto A de X es denso (siempre denso), si $\overline{A} = X$.*

6. *El espacio topológico X es separable si tiene un subconjunto separable contable y denso.*

7. *Un punto de adherencia de $A \subseteq X$ es cualquier elemento de $\overline{A}$.*

Proposición 2. *Sea $A \subset B \implies A' \subset B'$.*

Proposición 3. *Sea $A \subset B$ y sea $x \in A' \implies$ si G es un abierto $\ni x \in G \implies (G - \{x\}) \cap B \supset (G - \{x\}) \cap A \neq \varnothing \implies x \in B' \implies A' \subset B'$.*

Proposición 4. *Derivado de la unión $(A \cup B)' = A' \cup B'$*

Demostración. Por doble contención:

- $(\supseteq)$. A probar: $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$. Sea $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B \implies A' \subseteq (A \cup B)'$ y $B' \subseteq (A \cup B)' \implies A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$

- $(\subseteq)$. A probar $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B' \iff x \in (A \cup B)' \implies x \in A' \cup B' \iff$ si $x \notin A' \cup B' \implies x \notin (A \cup B)'$.

  - Suponemos que $x \notin A' \cup B' \implies x \notin A'$ y $x \notin B' \implies$ existen G, H abiertos de $X \ni x \in G$ y $x \in H$ y $(G - \{x\}) \cap A = \varnothing$ y $(H - \{x\}) \cap B = \varnothing$ ya que $x \in G$ y $x \in H \implies x \in G \cap H$. Además, $G \cap H \subseteq G$ y $G \cap H \subseteq H$. Entonces $(G \cap H - \{x\}) \cap A = \varnothing$ y $(G \cap H - \{x\}) \cap B = \varnothing$. Por lo tanto, $(G \cap H - \{x\}) \cap (A \cup B) = \varnothing$.

■

Proposición 5. *$A \subseteq X$ es cerrado ssi $A' \subseteq A$.*

Demostración. Sea

- $(\implies)$

- $(\impliedby)$

■

Proposición 6. *Sea F un superconjunto cerrado de A, entonces $A' \subset F$.*

Demostración. Como $A \subset F \implies A' \subset F'$. Como F es cerrado, $F' \subset F \implies A' \subset F$. ∎

Proposición 7. *$A \cup A'$ es cerrado.*

Demostración. A probar: $(A \cup A')^c$ es abierto. Sea $x \in (A \cup A')^c \implies x \notin A$ y $x \notin A' \implies \exists G$ abierto $\ni G \cap A = \varnothing$.

Sea $G \cap A' = \varnothing$. Supóngase que $y \in G \cap A' \implies y \in G$ y $y \in A' \implies (G - \{y\}) \cap A \neq 0 (\rightarrow\leftarrow)$

Por otra parte, $G \cap A' = \varnothing$. Entonces,

$$\begin{aligned} G \cap (A \cup A') &= (G \cap A) \cup (G \cap A') \\ &= \varnothing \cup \varnothing \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

$\implies G \subset (A \cup A')^c \implies (A \cup A')^c$ es abierto $\implies A \cup A'$ es cerrado. ∎

Proposición 8. $\overline{A} = A \cup A'$

Demostración. Sea

- A probar $\overline{A} \subset A \cup A' \implies A \subset \underbrace{A}_{cerrado} \cup A' \implies A \subset \overline{A} \subset A \cup \overline{A}$.
- A probar: $A \cup A' \subset \overline{A}$. Entonces $A \subset \overline{A}$, $A' \subset (\overline{A})' \subset \overline{A}$. Entonces $A \subset \overline{A}$ y $\overline{A} \subset \overline{A}$, entonces $A \cup A' \subset \overline{A}$.

∎

Proposición 9. *Si $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.*

Demostración. $A \subset B \implies A' \subset B' \implies A \cup A' \subset B \cup B' \implies \overline{A} \subset \overline{B}$. ∎

Proposición 10. $\overline{A \cup B} = \underbrace{\overline{A} \cup \overline{B}}_{cerrado}$

Demostración.

- Sabemos que $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \implies A\cup \subset \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
- $A \subset A \cup B \implies \overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $B \subset A \cup B \implies \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Entones $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$

■

Teorema 1. *Sea*

1. $\overline{\varnothing} = \varnothing$
2. $A \subset \overline{A}$
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
4. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Demostración.

1. Como $\varnothing$ es cerraddo entonces $\overline{\varnothing} = \varnothing$
2. $A \subset \overline{A}$, por la cerradura.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, por propiedad anterior.
4. Como $\overline{A}$ es cerrado, entonces $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

■

Definición 9.

1. *Un punto P de X es interior de $A \subseteq X$, si existe un abierto $G \ni$*

$$p \in G \subset A$$

2. *El interior de A, denotado $\int(A)$ o A°, es el conjunto de todos los puntos interiores de A.*

Definición 10. *Un punto frontera de $A \subset X$ es un punto tal que, cada vecindad del punto intersecta a A y A^c.*

2. Bases y subases de una topología

Definición 11. *Una base β (abierta) para el espacio topológico (X,τ) es una clase de abiertos de X tal que cada abierto en τ puede escribirse como uniones de los miembros de la clase.*

Ejemplo 5. *Sea (X,τ) un espacio discreto. Entonces $\beta = \{\{x\} : x \in X\}$ es una base para τ*

NOTA. *1. Si cada $G \in \tau$ puede representarse como $G = \bigcup_i B_i$, donde $B_i \in \beta \implies$ para cada $x \in G \implies x \in B_{i_0}$, (miembro de la unión) para algún i_0. $\implies x \in B_{i_0} \subseteq \bigcup_i B_i = G$*

Definición 12. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Una subclase S de abiertos en τ es una subbase de la topología τ, si las intersecciones finitas de miembros de S producen una base τ.*

Ejemplo 6. *1. Sean $a, b \in \mathbb{R} \ni a < b$. Nótese que*

$$(a,b) \subseteq \mathbb{R}$$

2. ejemplo 2

3. Sea $a = \{\{a\}\}$, entonces $\beta = \{\{a\}, X\} \implies \tau = \{X, \varnothing, \{a\}\}$

4. $a = \{\varnothing\} \implies \beta = \{X, \varnothing\} \implies \tau = \{X, \varnothing\}$

Teorema 2. *Los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *Una familia β de subconjuntos abiertos del espacio topológico (X,τ) es una base para τ, si cada abierto de τ es unión de miembros de β.*

2. *$\beta \subset \tau$ es una base para τ ssi $\forall G \in \tau, \forall p \in G \exists B_p \in \beta \ni p \in B_p \subset G$.*

Demostración.

- $(i) \to (ii)$ Sea $G \in \tau$ y sea $p \in G$. Como $G \in \tau$ y β es base de $\tau \implies G = \bigcup_i B_i, B_i \in \beta$. Como $p \in G \implies p \in \bigcup_i B_i \implies \exists i_p \ni p \in B_{i_p} \implies$ dado $p \in G \exists B_{i_p} \in \beta \ni p \in B_{i_p} \subset G$.

- $(ii) \to (i)$ Sea $G \in \tau \implies$ Para cada $x \in G \exists B_x = \beta \ni x \in B_x \subset G \implies \bigcup_{x \in G} = G \implies$ es union de miembros de β.

$\blacksquare$

Teorema 3. *Sea β una familia de subconjuntos de un conjunto no vacío X. Entonces, β es una base para una topologia τ sobre X ssi se cumplen:*

1. $X = \bigcup_{B \in \beta} B$
2. $\forall B, B^* \in \beta$ *se tiene que* $B \cap B^*$ *la union de miembros de* $\beta(\iff p \in B \cap B^* \exists B_p \in \beta \ni p \in B_p \subset B \cap B^*)$

Demostración.

- $(\to)$ Sea β la base de una topologia τ sobre X. Sabemos que X es abierto $\implies X = \bigcup_{B \in \beta} B$, donde esta union se toma sobre todos los miembros de β. Como β es base para $\tau \implies B \cap B^*$ puede escribirse como union de miembros de β.
- $(\leftarrow)$ Sea τ la colección de las uniones de miembros de la familia de subconjuntos de X. A probar: τ es topologia.
  1. Por (i) $X \in \tau$. Además, la union de la clase vacia de β es $\varnothing \implies \varnothing \in \tau$.
  2. Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de miembros de τ. Entonces, $G_i = \bigcup_{B \in \beta} B_{G_i}$ (donde cada G_i es union de miembros de β) $\implies \bigcup_i$ es union de uniones de miembros de $\beta \implies \bigcup_i G_i \in \tau$.
  3. Sean $G_1, G_2 \in \tau \implies G_i = \bigcup\{B_i : i \in I\}$ y $G_2 = \bigcup\{B_j : j \in J\}$. Entonces, $G_1 \cap G_2 = (\bigcup_i B_i) \cap (\bigcup_j B_j) = \bigcup_{i=j}(B_i \cap B_j) \implies G_1 \cap G_2 \in \tau \implies \tau$ es una topologia sobre X.

$\blacksquare$

Ejemplo 7. *Sean (a_1, b_1) y (a_2, b_2) intervalos abiertos y acotados de $\mathbb{R} \implies$*

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a_1 < x < b_1, a_2 < y < b_2\right\} \tag{1}$$

Teorema 4. *Sea X cualquier conjunto no vacío y sea S una clase arbitraria de subconjuntos de X. Entonces, S puede constituirse en la subbase para una topología abierta para una topología sobre X en el sentido que las intersecciones finitas de los miembros de S producen una base para dicha topología.*

Teorema 5. *Sea $X \neq \varnothing$ y sea S una clase arbitraria de subconjunto de X. Entonces, S puede servir como subbase abierta de una topología sobre X en el sentido que la clase τ de todas las uniones de intersecciones finitas en S es una topogía.*

Demostración. Tenemos:

1. $S = \varnothing \implies \beta = \{X\} \implies \tau = \{X, \varnothing\}$ es la topología indiscreta.

2. $S \neq \varnothing$l. A probar: τ es topología.

   a) $\varnothing, X \in \tau$

   b) $\{G_i\}_{i \in I}$ una subclase arbitraria de τ. A probar: $\bigcup_i G_i \in \tau$. Cada G_i es unión de intersecciones finitas de miembros de S. Entonces, $\bigcup_i G_i$ es unión de uniones de intersecciones finitas de miembros de $S \implies \bigcup_i G_i \in \tau$.

   c) Sea $G_1, G_2 \in \tau$. A probar $G_1 \cap G_2 \in \tau$. $G_1 \cap G_2$ es unión de intersecciones finitas de miembros de S.

■

Lema 6. *Si S es subbase de las topologías τ y τ^* sobre $X \implies \tau = \tau^*$*

Demostración. A probar: $\tau \subseteq \tau^*$. Sea $G \in \tau \implies$ Como S es subbase de $\tau \implies$

$$G = \bigcup_i \left(S_{i_1} \cap S_{i_2} \cdots \cap S_{i_{n_i}}\right), S_{i_k} \in S$$

Sabemos que S genera a $\tau^*(S \subset \tau^*) \implies S_{i_1} \cap S_{i_2} \cdots \cap S_{i_{n_i}} \in \tau^* \implies G = \bigcup_i \left(S_{i_1} \cap S_{i_2} \cdots \cap S_{i_{n_i}}\right) \in \tau^* \implies \tau \subset \tau^*$. De forma similar, se tiene que $\tau^* \subset \tau$. ■

Teorema 7. *Sea X un subconjunto no vacío y sea S una clase de subconjuntos de X. La topología τ sobre X, generada por S, es la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a S.*

Demostración. Sea $\tau^* = \bigcap_i \tau_i$, donde cada τ_i es una topología sobre X que contiene a S. A probar: $\tau = \tau^*$

- ($\supseteq$) Como S genera a $\tau \implies S \subset \tau \implies \tau^* \subset \tau$
- ($\subseteq$). Sea $G \in \tau \implies G = \bigcup_i \left(S_{i_1} \cap S_{i_2} \cdots \cap S_{i_{n_i}}\right), S_{i_k} \in S$. Como $S \subseteq \tau^* \implies S_{i_k} \in \tau^* \implies G \in \tau^*$

■

¿Cuándo es útil una base para una topología?

- Simplificación en cardinalidad.

Definición 13. *Un espacio topológico que tiene una base contable es un espacio segundo contable.*

Teorema 8 (de Lindelof)**.** *Sea X un espacio vacío no contable. Si un abierto de G de X se puede representar como unión de una clase $\{G_i\}$ de abierto de $X \implies G$ puede representarse como unión contable de los G_i.*

Demostración.

1. Sea G un abierto no vació de $X \ni G = \bigcup_i G_i$. Como X es segundo contable, entonces X tiene una base contable $\beta \implies$ cada G_i es unión contable de los elementos de $\beta \implies G$ falla.
2. Sea $G = \bigcup_i G_i, G \in \tau, G \neq \varnothing$. Como X es segundo contable $\implies G$ es unión contable de miembros de $\beta = \{\beta_j\}$ además los G_i, por ser abiertos, son únicos de $\beta_j \implies$ como por cada $\beta_i \exists G_i^* \ni B_i \subseteq G_i^* \implies G = \bigcup_i \beta_i = \bigcup_i G_i^* \subseteq$.

■

Definición 14. *Un espacio topológico es un espacio de Hausdorf (T_2) si dados $x, y \in X, x \not= y, \exists u, v \in \tau \ni x \in U, y \in V$ y $u \cap v = \varnothing$*

Ejemplo 8. *Sea $X = \{a, b\}$ con topología discreta $\implies$ X es T_2. Ahora con la topología $\tau_m = \{x, \varnothing, \{a\}\}$ no T_2.*

Teorema 9. *Sea (X, d) un espacio métrico y sean $x, y \in X, x \not/ y \implies$ sea $\delta = d(x, y) \implies u = \beta_{\delta/2}(x)$ y $v = \beta_{\delta/2}(y) \implies x \in u$ y $y \in V$ y $u \cap v = \varnothing$. Por lo tanto, es de Hausdorf.*

Teorema 10. *Composición de mapeos continuos es un mapeo continuo. Sean $(X, \tau), (Y, \tau^*), (Z, \tau^{**})$ espacio topológicos y sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ mapeos continuos. A probar $g \circ f : X \to Z$. Sea $G \in \tau^{**} \implies g^{-1}(G) \in \tau^* \implies f^{-1}[g^{-1}(G)] \in \tau = (g \circ f)^{-1}(G) \in \tau$.*

Teorema 11. *Sea $\{\tau_i\}$ sobre X, si $f : X \to Y$ continua, $\forall \tau_i \implies f$ es continuo con respecto a $\bigcap_i \tau_i$.*

Definición 15. *Sea (x_n) una sucesión en un espacio topológico X, se dice que (x_n) converge a un punto $y \in X$ si $\forall u \in \tau \ni y \in U, \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni n \geq N \implies x_n \in U$*

Teorema 12. *Si X es un $T_2 \implies$ cualquier sucesión de puntos en X (a lemas) es un punto de X.*

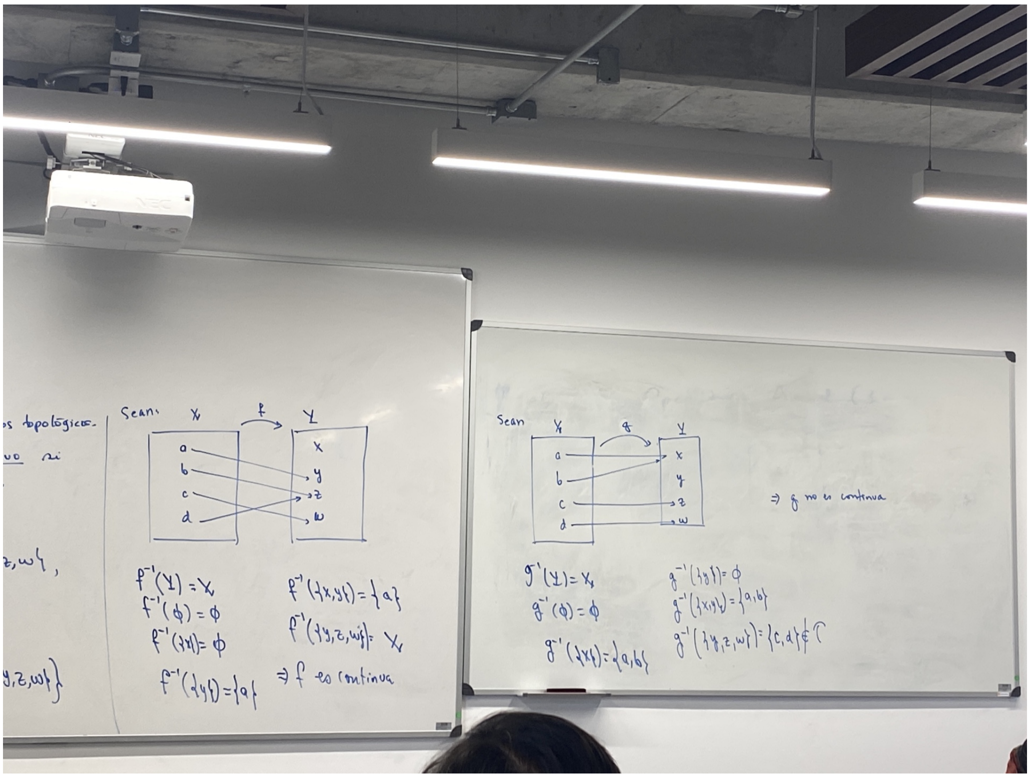
Demostración. Suponga que a y b son límites de la sucesión $(x_n) \implies$ por ser X de Hausdorf $\implies \exists u, v \in \tau \ni a \in U$ y $b \in V$ y $U \cap V = \varnothing$ como son límites $\implies \exists N_1, N_2 \in \mathbb{Z}^+ \ni n \geq N_1 \implies X_n \in U$ y $m \geq N_2 \implies X_m \in V$. Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\} \implies n > N \implies X_n \in U$ y $X_n \in V \implies X_n \in U \cap V \implies U \cap V \neq \varnothing (\rightarrow\leftarrow)$ ■

Teorema 13. *Cada subconjunto límite $A \subseteq X$ es un T_2 es cerrado.*

Continuidad

Definición 16. *Sea (X, τ) y (Y, τ^*) esapacios topológicos. El mapeo $f : X \to Y$ es continuo si para cada $G \in \tau^*$ se tiene que $f^{-1}(G) \in \tau$*

Ejemplo 9. *Sean* $X = \{a, b, c, d\}$ *y* $Y = \{x, y, z, w\}$*, la topología* $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ *y* $Y = \{Y, \varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{x, z, w\}\}$



NOTA. *Sea* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ *un mapeo y suponga que* $\beta = \{B_i\}$ *es una base para* τ^**. Sea* $G \in \tau^* \implies G = \bigcup_i B_i, B_i \in \beta$*. Entonces,* $f^{-1}(G) = g^{-1}\left(\bigcup_i B_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(B_i) \implies f^{-1}(G) \in \tau$*, si* $f^{-1}(B_i) \in \tau$*.*

NOTA. *Dado un mapeo* $f : X \to Y$ *y si* $A \subseteq Y \implies f^{-1}[A^c] = [f^{-1}(A)]^c$*. En efecto: Sea* $x \in f^{-1}(A^c) \iff f(x) \in A^c \iff f(x) \notin A \iff x \notin f^{-1}(A) \iff x \in [f^{-1}(A)]^c$

NOTA.

1. *Sean* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ *un mapeo continuo y sea* F *un cerrado de* $Y \implies f^{-1}(F^c) = [f^{-1}(F)]^c \in \tau \implies f^{-1}(F)$ *es cerrado en* X*.*
2. *Sea* G *un abierto de* $Y \implies G^c$ *es cerrado de* Y*. Si* $f^{-1}[G^c] = [f^{-1}(G)]^c$ *es cerrado, entonces* $f^{-1}(G) \in \tau \implies f$ *es continuo*

Proposición 11. *Sea $f : X \to Y$ un mapeo entre espacios topológicos. Entonces, f es un mapeo continuo ssi $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}, \forall A \subseteq X$*

> *Propiedades:*
>
> 1. $f[f^{-1}(A)] = A$
> 2. $f^{-1}[\underbrace{f(A)}_{\subseteq X}] \supset A$

Demostración. Sea

- ($\implies$) Suponga que f es continuo y sabemos que $f(A) \subset \overline{f(A)} \implies f^{-1}[f(A)] \subset f^{-1}[\overline{f(A)}]$. Además, como $\overline{f(A)}$ es cerrado $\implies f^{-1}[\overline{f(A)}]$ es cerrado (ya que f continuo). Entonces,

$$
\begin{aligned}
A \subseteq \underbrace{f^{-1}[\overline{A}]}_{cerrado} &\implies A \subset \overline{A} \subset f^{-1}[\overline{f(A)}] \\
&\implies f(\overline{A}) \subset f[f^{-1}[\overline{f(A)}]] \\
&\implies f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}
\end{aligned}
$$

- ($\impliedby$) Supóngase que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}, \forall A \subseteq X$. Sea C un cerrado de Y. Sea $A = f^{-1}(C) \implies f[\overline{f^{-1}(C)}] \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \implies f[\overline{f^{-1}(C)}] \subseteq C \implies f^{-1}[f[\overline{f^{-1}(C)}]] \subseteq f^{-1}(C) \implies \overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(C) \implies f^{-1}(C) \subset \overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(C) \implies f^{-1}(C) = \overline{f^{-1}(C)} \implies f^{-1}(C)$ es cerrado.

■

Proposición 12. *Sea $\{\tau_i\}$ una colección de topologías sobre X. Si $f : X \to Y$ es continuo con respecto a cada $\tau_i \implies f$ es continuo con respecto a $\tau = \bigcap_i \tau_i \implies f$ es continuo respecto a $\tau = \bigcap_i \tau_i$.*

Demostración. Sea G un abierto de $Y \implies f^{-1}(G) \in \tau_i$ para cada i. Entonces, $f^{-1}(G) \in \bigcap_i \tau_i = \tau \implies f$ es continua con respecto a τ. ■

Proposición 13. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau)$ un mapeo continuo, si $A \subset X \implies f|_A : (A, \tau_A) \to (Y, \tau')$ es continua.*

Demostración. Como f es continua $\implies$ si $G \in \tau' \implies f^{-1} \in \tau \implies A \cap f^{-1}(G) \in \tau_A \implies f|_A$ es continua (respecto a τ_A). ■

Ejemplo 10. *No se tomo bien la foto :(*

Ejemplo 11. *Sea $f : (X, \tau) \to (X, \tau')$ tal que $\tau' = \{Y, \varnothing\}$. Entonces, $f^{-1}(Y) = X$ y $f^{-1}(Y) = X$ y $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \tau \implies f$ es continua, independientemente de τ.*

Ejemplo 12. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$, tal que: $\tau = P(X) \implies$ si $G \in \tau' \implies f^{-1}(G) \in P(X) \implies f$ es continua (para cada topologia τ').*

Ejemplo 13. *Considere el mapeo identidad*

$$i : (X, \tau) \to (X, \tau')$$

$\implies$ *si $G \in \tau' \implies f^{-1}(G) = G \in \tau$.*

Continuidad local $\tau' \subset \tau$.

Definición 17. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$ un subconjunto $U \subseteq X$ es vecindad de x, si $\exists V \in \tau \ni x \in V \subset U$ (es decir, x es un punto interior de U.)*

Definición 18. *Lqa colección de todas las vecindades de un punto $x \in X$ se llamna sistema de vecindades de x. Notación: N_x.*

Proposición 14. *N_x es cerrado bajo intersecciones y extensiones. Es decir:*

1. *Si $u, w \in N_x \implies u \cap w \in N_x$.*
2. *Si $u \in N_x$ y $u \subseteq w \implies w \in N_x$.*

Demostración. Sea

1. Si $u \in N_x \implies \exists$ abierto $G \ni x \in G \subset u$. Si $w \in N_x \implies \exists$ abierto $H \ni x \in H \subset w \implies x \in G \cap H \subseteq u \cap w \implies u \cap w \in N_x$.
2. Si $u \in N_x \implies \exists$ abierto $G \ni x \in G \subset u \subseteq w \implies w \in N_x$

■

Proposición 15. *Sea A un subconjunto del espacio topológico $(X, \tau) \ni \forall x \in A \exists G \in \tau \ni x \in G \subset A$. Entonces, A es abierto en τ.*

Proposición 16. *Un conjunto G es abierto ssi G es vecindad de cada uno de sus puntos.*

Demostración. Sea

1. Prop. anterior.

2. Si $x \in G \implies \exists$ abierto $G \ni x \in G \subset G \implies G \in N_x, \forall x \in G$.

■

Proposición 17. *Sea*

1. *$N_x \neq \varnothing$ y $x \in A, \forall A \in N_x$.*

2. *Cada miembro $A \in N_x$ es un superconjunto de un miembro $G \in N_x$, donde G es vecindad de cada uno de sus puntos.*

Definición 19. *Un mapeo $f : X \to Y$ entre espacios topologicos es continuo en un punto $x \in X$, para cada $U \in N_f(x) \exists V \in N_x \ni f(V) \subset U$.*

Teorema 14 (Mala foto :(). *Un mapeo $f : X \to Y$ entre espacios topologicos, es continuio ssi es continuo en cada punto de X.*

Teorema 15. *Un mapeo $f : X \to Y$ es continuo ssi es continuo en cada punto de X.*

Demostración. Sea

- Sea f continua en cada punto de X y sea H un abierto en Y. A probar: $f^{-1}(H)$ es abierto en $X \iff f^H$ es vecindad de cada uno de sus puntos.

- Sea $x \in f^{-1}(H) \implies f(x) \in H \implies H \in N_{f(x)}$. Por la continuidad de f en $x \exists G \in N_x \ni f(G) \subset H \implies x \in G \subset f^{-1}[f(G)] \subset f^{-1}(H)$

■

Ejemplo 14. *Sea* $X = \{a, b, c, d\}$ *y* $\tau_1 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ *y* $\tau_2 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$. *Considere* $f : X \to X$ *tal que*

$$a \to b$$

$$b \to d$$

$$c \to b$$

$$d \to c$$

Probar:

1. f *es continua en* c
2. f *es continua en* d.

Ejemplo 15. *Sea* $f : X \to Y$ *y sea* $\{p\}$ *un abierto de* X.

1. *Si* $\{p\}$ *es abierto,* $\forall p \in X \implies$ *la topologia de* X *es la discreta* $\implies f$ *es continua.*
2. *Si* $\{p\}$ *es abierto, para algún* $p \in X$. *Sea* $H \in N_{f(p)} \implies \exists\{p\} \in N_{f(p)} \implies \exists\{p\} \in N_p \ni f(\{p\}) \subset H \implies f$ *es continua en* p.

Definición 20. *Una función* $f : X \to Y$ *es secuencialmente continua en un punto* $p \in X$ *ssi para cada sucesión* (a_n), *se cumple que: si* $a_n \to p \implies f(a_n) \to f(p)$

> *Sea*
>
> $$a_n \to p$$
>
> $\forall G$, *abierto de* $X \ni p \in G$, *se tiene que* $\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ *si* $n \geq N \implies a_n \in G$.

Teorema 16. *Si una función* $f : X \to Y$ *es continua en* $p \in X$, *entonces* f *es secuencialmente continua en* $p \in X$.

Solución. Sea

1. Ejercicio.

2. Suponga quie f es continua en $p \in X$ y que (a_n), cumple:

$$a_n \to p$$

A probar: $f(a_n) \to f(p) \iff \forall G$, abierto de $Y \ni f(p) \in G$, la cola de $f(a_n)$ esta en G.

$\square$

Definición 21. *Un mapeo $f : X \to Y$ es*

1. *Abierto, si $\forall G$, abierto de X, $f(G)$ es abierto de Y.*

2. *Cerrado, si $\forall H$, cerrado de X, $f(H)$ es cerrado de Y.*

Ejemplo 16. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Entonces, f es continua. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.*

1. *Si A es abierto, entonces $f(A) = \{1\} \implies f$ no es abierta.*

2. *Si A es cerrado $\implies f(A) = \{1\}$ es un cerrado $\implies f$ es cerrado.*

Definición 22. *Los espacios topológicos (X, τ) y (Y, τ') son homeomorfos si existe una función $f : X \to Y$ tal que:*

1. *f es biyectiva.*

2. *f y f^{-1} son continuas.*

En este caso, f es un homeomorfismo.

NOTA. 1. *Se dice que una función es bicontinua si es abierto y continua.*

2. *Un mapeo $f : X \to Y$ es un homeomorfismo ssi f es bicontinuo y biyectivo.*

Ejemplo 17. *Sea $X = (-\pi/2, \pi/2)$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \tan x$. Note que:*

1. *f es biyectiva.*

2. *f es continua y $f^{-1}(x) = \arctan x$ es continua.*

Entocnes f es un homeomorfismos. Tal que $(-\pi/2, \pi/2)$ y R son homeomorfos. (topologicamente los mismos.)

NOTA. *Una propiedad p que comparten espacios topológicos homeomorfos es una invariante topológica.*

Ejemplo 18. *La acotación no es una invariante topológica.*

Ejemplo 19. *Sea $D_1 = \{(r, \theta) \ni |r| < 1\}$ y $D_2 = \{(r, \theta) \ni |r| < 2\}$. Entonces, considere $f : D_1 \to D_2 \ni f(r, \theta) = (2r, \theta)$. Entonces, f es un homeomorfismo entre D_1 y D_2. Note que el área no es un invariante topológico.*

Ejemplo 20. *Sean (X, τ_D) y (Y, τ_D) espacios discretos y sea $f : X \to Y$. Entonces f es:*

1. *continua.*
2. *abierta*

Entonces, es un homeomorfismo si comparten ccaardinalidad.

NOTA. *Sean*

1. *X, Y, Z espacios topológicos.*

   NOTA. *Notación: $X \approx Y$ significa X es homeomorfo a Y.*

   a) $X \approx X, \forall X$

   b) *Si* $X \approx Y \implies Y \approx X$.

   c) *Si* $X \approx Y$ *y* $Y \approx Z \implies X \approx Z$.

   $\implies$ *la relación $\approx$ es de equivalencia. (Implica que se produce una partición en el conjuntos de definición de la relación)*

Proposición 18. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ un mapeo abierto e inyectivo y sea $A \subset X$ tal que $f(A) = B$. Entonces, la restricción $f_A : (A, \tau_A) \to (B, \tau_B)$ es abierto e inyectivo.*

Demostración. 1. La inyectividad se hereda.

2. A probar: f es abierta, sea $H \in \tau_A \implies f(H) \in \tau_B^*$. Como $H \in \tau_A \implies \exists G \in \tau \ni G \cap A = H$. Tenemos

$$f(H) = f(G \cap A)$$

Por la inyectividad:

$$\begin{aligned} &= f(G) \cap f(A) \\ &= \underbrace{f(G)}_{\in \tau^*} \cap B \in \tau_B^* \end{aligned}$$

■

Problema 2. *Sea* $\{(Y_i, \tau_i)\}$ *una colección cualquiera de espacios topológicos, y para cada* i *considere:*

$$f_i : X \to Y_i$$

donde X *es un conjunto no-vacío cualquiera. Encuentra la topología para* $X \ni$ *cada* f_i *es continua.*

Teorema 17. *Sea* $\{f_i : X \to (Y_i, \tau_i)\}$ *una colección de mapeos definidos sobre un conjunto vacio de* X *sobre los espacios topologicos* (Y_i, τ_i)*, sea*

$$S = \bigcup_i \{f^{-1}(H) : H \in \tau_i\},$$

y definamos τ *como la topologia sobre* X *generada por* S*.*

1. *Todos los* f_i *son continuas con respecto a* τ*.*

2. *Si* τ^* *es la intersección de todas las topologias sobre* X *con respecto a las cuales las* f_i *son continuas, entonces* $\tau = \tau^*$*.*

3. τ *es la topologia menos fina sobre* X *tales que las* f_i *son continuas.*

4. S *es una subbase para* τ*.*

Ejemplo 21. *Una función constante* $f_i : X \to Y_i$ *es continua con respecto a cada topologia sobre* X*. Entonces, todas las* f_i *son continuas con respecto a la topologia indiscreta, es decir* $\tau_i = \{X, \varnothing\}$*. Note que* τ_i *es la topologia menos fina sobre* $X \implies \tau_I$ *es la topologia menos fina que hace continuas a las* f_i*.*

Ejemplo 22. *Sea* $Y = \{a, b, c, d\}$ *y la topologia sobre* Y*,* $\tau = \{Y, \varnothing, \{c\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}\}$*. Considere* $X = \{1, 2, 3, 4\}$ *y sean:* $f : X \to (Y, \tau)$ *y* $g : X \to (Y, \tau) \ni$

$$f :$$

$$1 \to a$$

$$2 \to a$$

$$3 \to d$$

$$4 \to b$$

$$g :$$

$$1 \to b$$

$$2 \to c$$

$$3 \to c$$

$$4 \to d$$

Entonces, la topologia sobre X *que tiene menos abiertos y que hace continuos a* f *y* g*, es la que tiene subbase:*

$$S = \{f^{-1}(H) : H \in \tau\} \bigcup \{g^{-1}(H) : H \in \tau\}$$

Entonces

$$S = \{X, \varnothing, \{1, 2, 4\}, \{3\}\} \bigcup \{X, \varnothing, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$$

Entonces,

$$S = \{X, \varnothing, \{1, 2, 4\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$$

Topologia producto

Sea X_α un conjunto, $\forall \alpha \in I$. El producto cartesiano de las x_α, es el conjunto

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha := \{x : I \to \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \ni x(\alpha) \in X_\alpha, \forall \alpha \in I\}$$

Ejemplo 23. *Sea* $I = \{1,2,3\}$ *y sean* $X_1 = \{a,e\}, X_2 = \{o\}, X_3 = \{o,u\}$. *Entonces*

$$\begin{aligned} x_1 \times x_2 \times x_3 &= \left\{ x : \{1,2,3\} \to \bigcup_{i=1}^{3} X_i \ni x(\alpha) \in X_\alpha \right\} \\ &= \{x : \{1,2,3\} \to \{a,e,o,u\} : x(\alpha) \in X_\alpha\} \end{aligned}$$

Ademas

$$\begin{array}{llll} x(1) = a \in X_1 & x(1) = a \in X_1 & x(1) = e \in X_1 & x(1) = e \in X_1 \\ x(2) = o \in X_2 & x(2) = o \in X_2 & x(2) = o \in X_2 & x(2) = o \in X_2 \\ x(3) = o \in X_3 & x(3) = u \in X_3 & x(3) = o \in X_1 & x(3) = u \in X_1 \end{array}$$

Entonces

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = \{(a,o,o),(a,o,u),(e,o,o),(e,o,u)\}$$

Ejemplo 24.

$I = \{1,2\}$ *y* $X = \{0,1\}$, *entonces:*

$$x \times x_1 = x^2 = \left\{ x : \{1,2\} \to \{0,1\} \Rightarrow \begin{array}{ll} x(\alpha) & \in x_\alpha \\ & \forall \alpha = 1,2 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} x(1) = 0 & x(1) = 1 & x(1) = 0 & x(1) = 1 \\ x(2) = 0 & x(2) = 1 & x(2) = 1 & x(2) = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2 = \{(0,0),(1,1),(0,1),(1,0)\}$$

Ejemplo 25. *Sea*

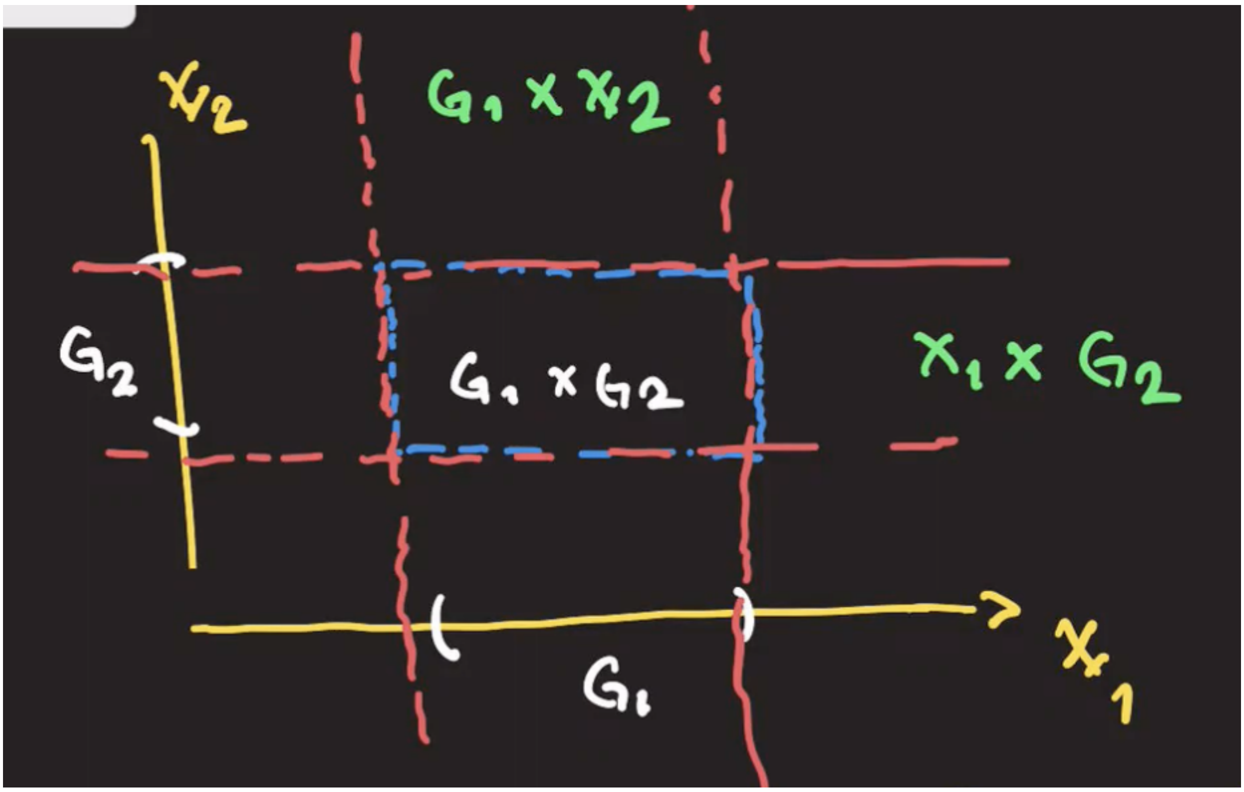
$$I = \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \left\{x : \mathbb{Z}^+ \to \cup_{\alpha \in I} x_\alpha \exists x(\alpha) = x_\alpha, \forall \alpha \in I\right\}$$
$$= \left\{(x_1, x_2, \ldots) : x(\alpha) \in x_\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{Z}^+\right\}$$

Ejemplo 26. *Si en al ejemplo anterior hacemos $X_\alpha = X$, sea I un conjunta de indices cualquiera*

$$\Rightarrow \prod_{\alpha \in I} x_\alpha = \{x : I \to x : x(\alpha) \in x, \forall \alpha \in I\}$$
$$= x^I$$

Problema 3. *Sea X_α es un espacio topologica, $\forall \alpha \in I$. Se desea construir una topologia para $\prod_{\alpha \in I} \ni$*

1. *Esta topologia sea natural*
2. *Produzca suficientes teoremas de la forma: Si x_α tiene la propiedad $p, \forall \alpha \in I$.*



$\implies G_1 \times G_2 = (G_1 \times X_2) \cap (X_1 \times G_2)$. *Entonces, con dos espacios factor, los abiertos subbasicos serian las franjas* $G_1 \times X_2$ *y* $X_1 \times G_2$. *Entonces , en el caso de* $n-$*espacios factor, los abiertos subbasicos serian de la forma:*

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times G_i \times X \cdots \times X_n$$

Recordemos: Se define la k-Esima proyección π_k cono el mapeo:

$$\pi_K : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \longrightarrow X_\alpha \ni$$

$$\pi_k(\omega) \longmapsto \omega_k$$

$$\text{Ej: } \pi_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \ni$$

$$\pi_2\,(x_1, x_2, x_3) = x_2$$

Definición 23. *Sea* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *una colección de espacios topológicos y sea* $X = \prod_{\alpha \in I} x_\alpha$. *La topologia menos fina que hace continuas a las proyecciones sobre* X*, es la topologia producto.*

Si cada X_α es Hausdorff $\implies \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es Hausdorff.

Definición 24. *Sean* (X_α, τ_α)*,* $\alpha \in I$ *espacios topologicos y sea* $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$

1. *Las funciones* $\pi_k : X \to X_k$ *se llaman proyecciones.*
2. *La topologia generada por las proyecciones en la topologia producto de* X*.*
3. *Es decir, es la topologia menos fuerte que hace continuas a las proyeccciones.*
4. *Un espacio producto tiene la forma*

$$\left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, \tau\right)$$

Proposición 19. *Sea* $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *una colección de espacios de Hausdorff, y sea* $X = \prod_\alpha X_\alpha$ *el espacio producto. Entonces,* X *es de Hausdorff.*

Demostración. Sea $x, y \in X, x \neq y$. Entonces, $\exists k \ni$ los puntos x y y difieren en la k-esima coordenada. $\pi_k : X \to X_k$, produce las imagenes

$$pi_k(x) = x_k$$

Y

$$\pi_k(y) = y_k$$

Como x_k es Hausdorff, existen abiertos G y H de x_k tal que $x_k \in G$, $y_k \in H$ y $G \cap H = \varnothing$. Entonces, $\pi_k^{-1}(G)$ y $\pi_k^{-1}(H)$ son abiertos de X, $x \in \pi_k^{-1}$, $y \in \pi_k^{-1}(H)$ y $\pi_k^{-1}(G) \cap \pi_k^{-1}(H) = \varnothing$ Entonces X es Hausdorff. ∎

Sea

1. Topologia producto;

$$S = \bigcup_{\alpha} \{\pi_\alpha^{-1}(u) : u \in \tau_\alpha\}$$

2. Por lo que los abiertos basicos tienen la forma:

$$\pi_{k_1}^{-1}(G_{k_1}) \cap \pi_{k_2}^{-1}(G_{k_2}) \cap \cdots \cap \pi_{k_n}^{-1}(G_{k_n})$$

   donde $G_{k_j} \in \tau_k$.

   Ademas

$$\pi_i(G) = \begin{cases} \bigcap G_{i_\alpha}, k_n = 1 \\ x_i, i \neq k_j, k = 1, \cdots, n \end{cases}$$

Problema 4. *Una funcion f del espacio topologico $\prod_\alpha X_\alpha$ es continua ssi para cada proyeccion π_i, se tiene que $\pi_\alpha \circ f$ es continua.*

Demostración. Sea

- Como f es continua y las π_α son continuas $\implies$ $\pi_\alpha \circ f$ son continuas.
- Sea H un abierto en la topologia producto. A probar $f^{-1}(H)$ es abierto en Y.

■

Ejemplo 27. *Sea $X = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}$. Entonces*

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(\alpha) \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo 28. *Sea $X = \mathbb{R} \implies I = \mathbb{Z}^+$.*

$$\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^+} = \{x : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}, x(m) \in \mathbb{R}_n\}$$

2.1. Compactos

Definición 25. *Sea (X, τ) un espacio topológico una clase $\{H_i\}$ de abiertos de X es una cubierta abierta de X, si $\bigcup_i H_i = X$.*

Definición 26. *Una subclase de una cubierta abierta de X que también es cubierta abierta es una subcubierta de la inicial.*

Definición 27. *Un espacio compacto es un espacio topológico en el que cada cubierta abierta tiene una subcubierta finita. Es representar $X = \bigcup_{i\in I}^{n} H_i$*

NOTA. *Un subespacio compacto de X es un subespacio que es compacto por derecho propio.*

Teorema 18. *Todo subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.*

Demostración. Sea F un cerrado de X y considere el subespacio (F, τ_F). Sea $\{G_i\}$ una cubierta abierta de F, con $G_i \in \tau_F$. $G_i = F \cap H_i$, donde $H_i \in \tau$. Considere la cubierta abierta de $X : \{H_i\} \cup F^c$. Como X es compacto, hay una subcubierta finita de la cubierta anterior: $\{H_{i_1}, H_{i_2}, H_{i_3}, \cdots, H_{i_m}\} \cup F^c$. Entonces, tenemos $H_{i_j} \cap F = G_{ij}$, donde $h \subseteq \{G_{ij}\}$ son una subcubierta finita de F. ■

Teorema 19. *Cualquier imagen continua de un espacio compacto es compacto.*

Demostración. Sea (X, τ) es un espacio topológico compacto y sea (Y, τ') y sea $f : X \to Y$ un mapeo continuo. A probar: $f(x)$ es compacto. Sea $\{G_i\} \subseteq \tau'_{f(x)}$ una cubierta de $f(x)$, donde los G_i son abiertos de $f(x)$ (topología relativa).

Tenemos:

1. $G_i = f(x) \cap \underbrace{H_i}_{\in \tau'}$
2. $\bigcup G_i = f(x)$

Entonces $f(x) \cap [\bigcup_i H_i] = f(x)$.Además,

$$
\begin{aligned}
f(x) &\subset \bigcup_i H_i \\
f^{-1}(f(x)) &\subset f^{-1}(\bigcup_i H_i) \\
x &\subset \bigcup_i f^{-1}(H_i) \\
x &= \bigcup_{i=1}^{m} f^{-1}(H_i) \\
f(x) &= \bigcup_{i=1}^{m} f(f^{-1}(H_i))
\end{aligned}
$$

■

Proposición 20. *Propiedad de intersección finita*

Teorema 20. *Los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *X es un espacio compacto.*
2. *Para cada clase $\{F_i\}$ de cerrados de $X \ni \bigcap_i F_i = \varnothing$, se cumple que $\{F_i\}$ contiene una subclase finita $\{F_{i_1}, \cdots, F_{i_m}\} \ni F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_m} = \varnothing$*

Demostración. $(i) \implies (ii)$ Sea X un espacio compacto y $\{F_i\}$ una clase de cerrados con $\{F_i\} \ni \bigcap_i F_i = \varnothing$. Entonces

$$X = \left(\bigcap_i F_i\right)^c = \bigcup_i F_i^c$$

Entonces $\{F_i^c\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, dicha cubierta tiene una subcubierta finita, $\{F_{i_1}^c, \cdots, F_{i_k}^c\}$, entonces

$$X = \bigcup_{j=1}^{k} F_{i_j}^c$$

Entonces

$$\varnothing = F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k}$$

$(ii) \implies (i)$ Sea $\{G_i\}$ una cubierta abierta de X. Entonces $\bigcup_i G_i = X \implies (\bigcup_i G_i)^c = X^c \implies \bigcap_i G_i^c = \varnothing$. Donde $\{G_i^c\}$ es la clase de cerrados. Entonces $\{G_i^c\}$ tiene una subclase finita:

$$\{G_{i_1}^c, \cdots, G_{i_m}^c\} \ni G_{i_1}^c \cap \cdots \cap G_{i_m}^c = \varnothing$$

Por De Morgan, $G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_m} = X$. Es decir que $\{G_{i_j}\}$ es una subcubierta finita para X. Entonces, X es compacto. ∎

NOTA. *Dada una clase de conjuntos $C = \{C_i\}$, se dice que C tiene la propiedad de intersección finita (Pif) si para cada $C_{i_1}, \cdots C_{i_k}$ se cumple $\bigcap_{j=1}^{k} C_{i_j} \neq \varnothing$.*

Ejemplo 29. *Considere:*

$$C = \{[1,\infty), [2,\infty), \cdots, [n,\infty), \cdots\}$$

Considere

$$C_1 = [n,\infty), C_2 = [n_2,\infty), \cdots, C_k = [n_k,\infty)$$

Entonces

$$\bigcup_{i=1}^{k} C_i = [\max_{1\leq i\leq k}\{n_i\}, \infty) \neq \varnothing$$

Entonces C tiene la pif.

Ejemplo 30. *Sea* $C = \{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ *Entonces,* $C_1 = \left(-\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_1}\right), C_2 = \left(-\frac{1}{n_2}, \frac{1}{n_2}\right) \cdots C_k = \left(-\frac{1}{n_k}, \frac{1}{n_k}\right)$. *Entonces*

$$\bigcap_{i=1}^{k} \left(-\frac{1}{n_i}, \frac{1}{n_i}\right) = \left(-\frac{1}{\max\{n_i\}}, \frac{1}{\max\{n_i\}}\right)$$

Entonces, C *tiene la pif.*

NOTA. *En el teorema anterior, la contrapuesta de* (ii) *es para toda clase de cerrados de* X*,* $\{F_i\}$ *tal que cada subclase finita tiene intersección no vacía, entonces* $\bigcap_i F_i \neq \varnothing$*. Es decir, cada clase de cerrados de* X *que tiene la pif, tiene intersección no vacía.*

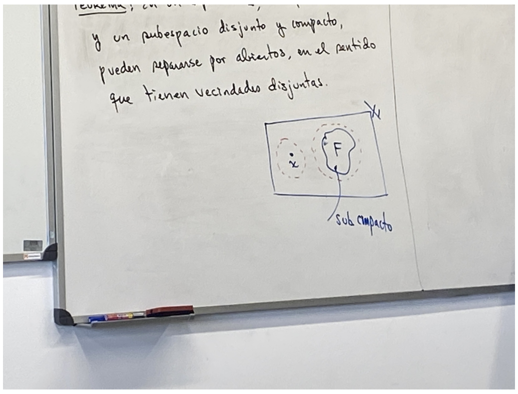
Teorema 21. X *es un espacio compacto ssi cadad clase de cerrados de* X *que tiene la pif, tinee intersección no vacía.*

Teorema 22. *Un espacio topológico es compacto si cada cubierta abierta básica tiene subcubierta abierta finita.*

Demostración. Sea $\{G_i\}$ una cubierta abierta del espacio topológico X y sea $\{B_i\}$ una base para X. Sabemos que cada G_i es unión de algunos B_j, es decir $\{B_j\}$ es uan cubierta abierta («básica») de X. Por hipótesis, $\{B_j\}$ tiene una subcubierta finita. Tomemos, para cada miembro de la subcubierta, un G_i que lo contenga. Entonces, X es compacto. ■

Teorema 23. *Un espacio topológico es compacto si cada cubierta abierta subbásica tiene una subcubierta finita.*

Teorema 24. *En un espacio de T_2, cualquier punto y un subespacio disjunto y compacto, puede separarse por abiertos, en el sentido que tienen vecindades disjuntas.*



Demostración. Sea $x \in X$ y sea F un subesapcio compacto de X tal que $x \notin F$. Sea $y \in F \implies$ Como X es T_2, existen vecindades disjuntas G_y y H_y tal que $x \in G_y, y \in H_y$, $G_x \cap H_y = \varnothing$. Variando y sobre todo F, se tiene que $\bigcup_y H_y$ es una cubierta abierta de F. Como F es compacto, existe una subcubierta finita de F, digamos:

$$F \subset H_{y_1} \cup H_{y_2} \cup \cdots \cup H_{y_k} = H$$

y considere la vecindad de X, $G = G_{y_1} \cap G_{y_2} \cap \cdots \cap G_{y_k}$ Nótese que G y H son disjuntos. ∎

Teorema 25. *Cada subespacio compacto de un T_2 es cerrado.*

Demostración. Sea X un T_2 y F un subespacio compacto de X. A probar: F^c es abierto.

1. Que $F^c = \varnothing' \implies$ es abierto.

2. Supóngase que $F^c \neq \varnothing \implies$ sea $x \in F^c$. Por el teorema anterior, existen vecindades disjuntas G_x y H_F, es decir $x \in G_x \subset F^c \implies F^c$ es abierto, entonces F es cerrado.

∎

Teorema 26. *Un mapeo biyectivo y continuo de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff es un homeomorfismo.*

Definición 28. *Un espacio X es T_1 si, para $x, y \in X$, $x \neq y$, existen vecindades G y H tales que $x \in G$ y $y \notin G$; $y \in H$ y $x \notin H$*

Teorema 27. *Un espacio topológico es T_1 ssi los unitarios son cerrados.*

Demostración. Sea $x \in X$ y sea $\{x\}$ un cerrado de $X \iff \{x\}^c$ es un abierto $\iff$ si $y \neq x$, y tiene una vecindad que no contiene a $x \iff X$ es T_1. ■

Proposición 21. *Tenemos*

1. *$\mathbb{R}$ con la topología usual es T_1.*

2. *Cada T_2 es T_1.*

Ejemplo 31. *Encuentre un espacio T_1 que no es T_2. $\mathbb{R}$ con la topología cofinita.*

Ejemplo 32. *Sea $X = \{a, b\}$ y $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}\}$ entonces (X, T) no es T_1.*

Teorema 28. *Cada subespacio de un T_1 es un T_1.*

Demostración. Sea A un subespacio de (X, τ). Sean $x, y \in A, x \neq y$

- Como $x, y \in A \subset X \implies \exists G, H \in \tau \ni x \in G, y \notin G, x \notin H, y \in H$.

- A probar: si $x \in A \implies \{x\}$ es cerrado de $\tau_A \iff \{x\}^c = A - \{x\}$ es abierto de τ_A. Entonces, $\underbrace{(X - \{x\})}_{\in\tau} \cap A = A - \{x\} \in \tau_A \implies A - [A - \{x\}]$ es un cerrado, que implica que es igual a $\{x\}$

■

NOTA. *Un subconjunto finito de un T_1 no tiene puntos límite. Considere el conjunto finito $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ en X, el cual también es cerrado. Tomemos ahora, $\{a_2, a_3, \cdots, a_n\}$, el cual es cerrado. Esto implica que $\{a_2, a_3 \cdots, a_n\}^c$ es un abierto. Note que $a_1 \in \{a_2, a_3, \cdots, a_n\}^c$*

Definición 29. *Un espacio X es regular ssi satisface: si F es un cerrado de X y $p \in X \ni p \notin F$, existen abiertos G y $G \ni F \subset G$ y $\{p\} \subset H$. $G \cap H = \varnothing$*

NOTA. *Sean $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b, c\}\}$ los cerrados de X son: $X, \varnothing, \{b, c\}, \{a\}$. Nótese que $\{b\}$ no es cerrado $\implies$ X no es T_1, además, X es regular.*

Definición 30. *Un espacio topológico es T_3 si es regular y T_1.*

Teorema 29. *Si X es T_3 entonces X es T_2.*

Demostración. Sean $x, y \in X, x \neq y$. Entonces, $\{x\}$ es cerrado, ya que X es T_1. Como X es regular, existen vecindades disjuntas G y $H \ni x \in \{X\} \subset G$ y $y \in H$, $G \cap H = \varnothing \implies X$ es un T_2. ■

Teorema 30. *Un espacio X es normal es normal si para F_1 y F_2, cerrados disjuntos de X, existen vecindades dijuntas G y H tal que $F_1 \subset G$ y $F_2 \subset H$.*

Ejemplo 33. *Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ los cerrados son: $\varnothing, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}$. Como $\{a\}$ no es cerrado entonces X no es T_1 y X no es normal.*

Definición 31. *Un espacio topológico que es normal y T_1 es un T_4.*

Teorema 31. *Los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *X es normal*
2. *Si H es un superconjunto abierto del cerrado F, existe un abierto G tal que*

$$F \subset G \subset \overline{G} \subset H$$

Demostración. Sea

- ($\Longleftarrow$) Sean F_1 y F_2 cerrados disjuntos de X. Entonces, existen un abierto $G \ni F_1 \subset G \subset \overline{G} \subset F_2^c$. Entonces, como $\overline{G} \subset F_2^c \implies (F_2^c)^c \subset (\overline{G})^c \implies F_2 \subset (\overline{G})^c$ (aabierto, disjunto de G)

- Sea X normal, F un cerrado de y H un superconjunto abierto de F. Nótese que H^c es un cerrado disjunto de $F \implies$ existen abiertos G y $L \ni G \subset G$ y $H^c \subset L \implies L^c \subset H$, además: $F \subset G, L^c \subset H$. $G \subset L^c \implies F \subset G \subset \overline{G} \subset H$.

■

Proposición 22. *Si X es un $T_4 \implies X$ es un T_3.*

Demostración. Como X es $T_4 \implies X$ es normal y T_1. A probar: X es regular. Sean $x \in X$ y F es un cerrado de $X \ni x \notin F \implies \{x\}$ es un cerrado disjunto de $F \implies$ existen abiertos disjuntos G y $H \ni x \in \{x\} \subset G$ y $F \subset H \implies X$ es regular. ■

Tenemos:

- T_4: Normal + T_1
- T_3: Regular + T_1

Entonces $T_4 \implies T_3$.

Ejemplo 34. *Sea $X = \mathbb{R}$ dotado de la topología en que los abiertos son $X, \varnothing$ y los intervalos de la forma $(a, \infty), a \in X$*

- *Los cerrados son de la forma $(-\infty, a]$. Como no hay dos cerrados disjuntos $\implies X$ es normal.*
- *Considere $(-\infty, 0]$ y el punto $1 \in X$. Nótese que:*

  1. $1 \notin (\infty, 0]$
  2. *No hay abiertos disjuntos que separen a 1 y $(\infty, 0]$*

  Entonces X no es regular.

Conclusión, un espacio normal no es necesariamente regular.

Ejemplo 35. *Cada metrizable es T_4, suponga que d es una métrica que genera la topología del espacio (X, τ). COmo el métrico es $T_2 \implies X$ es T_1.*

- *A probar: X es normal. Sean A y B cerrados disjuntos en X.*

- *Sea $d(x,y) < \delta_x/3$ y $d(y,z) < \varepsilon_y/3$. Sea $\delta_a = \max\{\delta_x, \varepsilon_y\}$, etnonces $d(x,y) < \delta_x/3$ y $d(y,z) < \delta_y/3$. Entonces $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \leq 2/3dx \implies y \in B_{\delta_x}(x)$. Contradicción.*

Definición 32. *Sea $F := \{f_j : j \in I\}$ la clase de funciones del conjunto X en el conjunto Y. Se dice que F separa puntos si, $\forall x, y \in X, x \neq y$, se tiene que $f_i(x) \neq f_i(y)$.*

Ejemplo 36. *Sea*

- *$F = \{\sin nx, \sin 2x, \cdots, \sin nx, ...\}$, definidas sobre $\mathbb{R}$. Entonces F no separa puntos.*

- *$F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(x) = ax, \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}\}$ entonces F separa puntos.*

Proposición 23. *Si $C(X, \mathbb{R})$ es la clase de funciones continuas y de valores reales sobre X, que separa puntos $\implies$ X es Hausdorff.*

Demostración. Sean $x, y \in X$, $x \neq y$. Como $C(X, \mathbb{R})$ separa puntos $\implies$ $f(x) \neq f(y)$. Como $\mathbb{R}$ es Hausdorff, existen abiertos disjuntos G y H en $\mathbb{R} \ni f(x) \in G$ y $g(x) \in H$. Además, f es continua, entonces:

$$x \in \underbrace{f^{-1}(G)}_{abierto}$$

y

$$y \in \underbrace{f^{-1}(H)}_{abierto}$$

y

$$f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) = f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$$

Entonces X es Hausdorff. ■

Definición 33. *Un espacio topológico es completamente regular ssi satisface: SIi F es un cerrado de X y $p \in X \ni p \notin F$, entonces existe una función continua. $f : X \to [0,1] \ni f(p) = 0$ y $f(F) = \{1\}$.*

NOTA. *Un espacio completamente regular y T_1 es un espacio Tíkonov $T_{3\frac{1}{2}}$*

NOTA. *Sean F_1 y F_2 cerrrados de un espacio normal X. Entonces existe una función continua $f : X \to [0,1] \ni f(F_1) = \{0\}$ y $f(F_2) = \{1\}$.*

Teorema 32. *Si X es completamente regular, entonces X es regular.*

Demostración. Sea F un cerrado de X y $p \in X \ni p \notin F$. Sea $f : X \to [0,1]$ una función continua $f(p) = 0$ y $f(F) = \{1\}$. Sea $G = f^{-1}[0, 1/3)$ abierto y $H = f^{-1}(2/3, 1]$ abieto. Entonces $p \in G$ y $F \subset H$, además como

$$[0, 1/3) \cap (2/3, 1] = \varnothing$$

Entonces $G \cap H = \varnothing$, entonces X es regular. ■

Definición 34. *X es T_0 ssi $\forall x, y \in X_1, x \neq y$, existe un abierto que contiene a uno de los puntos, pero no a ambos.*

> Sea (X_n) una sucesión en X. Se dice que $X_n \to X$ si cada abierto U, que contiene a X, continee a la cola de la sucesión. (i.e. si $\exists N \in \mathbb{Z} \ni$ si $n \geq N \implies x_n \in U$)

Teorema 33. *Un espacio topológico X es T_1 ssi $\forall x \in X$, la sucesión $x, x, x, \cdots$ converge a x y solo a x.*

Demostración. Sea

- $(\implies) X$ es T_1 y $x \in X$, entonces se tiene que $x, x, \cdots$ converge a x. Si $y \in X \ni x \neq y$. Entonces existen abiertos U y $V \ni x \in U$y $x \notin U$; $y \in V$ y $y \notin U \implies$ no es posible que y sea límite de $x, x, \cdots$.

- $(\impliedby)$ Supóngase que X no es T_1 y que la sucesión $x, x, \cdots$ converge a x. Como X no es T_1, entonces existe $y \ni x \neq y \ni$ cada abierto que contiene a x a y. Entonces $x, x, x, \cdots \to y$.

■

Teorema 34. *Un espacio topológico X es T_2 ssi cada sucesión convergente tienen límite único.*

NOTA. *Los espacios Hausdorff son, principalmente, los espaciones métricos y los metrizables.*

Ejemplo 37. *Considere $\mathbb{R}$ dotado de la topología cofinita. Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$ con términos diferentes. Sea $p \in \mathbb{R}$ (elemento arbitrario) y sea G un abierto cualquiera que contenga a p. Entonces G^c es un conjunto finito, entoces G^c tiene un número finito de términos de $(x_n) \implies G$ contiene a la cola de $(x_n) \implies x_n \to p$. Por la arbitrariedad de p, $x_n \to p$, $\forall p \in \mathbb{R}$.*

2.2. Nets

Demostración. Sea D un conjunto $y \leq$ una relación definida sobre D que satisface:

1. $\leq$ es reflexiva, $x \leq x, \forall x \in D$.

2. $\leq$ es transitiva, si $x \leq y$ y $y \leq z \implies x \leq z$.

3. $\leq$ es dirigida, si $x, y \in D \implies \exists z \in D \ni x \leq z$ y $y \leq z$.

Entonces el para $(D, \leq)$ es un conjunto dirigido. ■

Ejemplo 38. *Sea $(\mathbb{Z}^+, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$ es un conjunto dirigido.*

Ejemplo 39. *Sea*

$$\{C = \{n, n+1, n+2, \cdots\}, n \in \mathbb{Z}^+\}$$

- *Sea $C \leq H$ ssi $C \subseteq H$*

- *$C \leq H$ ssi $C \supseteq H$*

Entonces, $(\{\}m \leq)$ son conjuntos dirigidos.

Ejemplo 40. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Sea* $x \in X$ *y considere*

$$D_x = \{u \in \tau : x \in U\}$$

- $(D_x, \leq)$, *donde* $U \leq V$ *ssi* $U \subseteq V$
- $(D_x, \leq)$ *donde* $U \leq V$ *ssi* $U \supseteq V$

son conjuntos dirigidos.

Definición 35. *Una red en un conjunto* X *es un mapeo*

$$w : D \to X$$

donde $(D, \leq)$ *es un conjunto dirigido.*

NOTA. *Cada sucesión sobre* X *es una red.*

Definición 36 (Convergencia). *Si* (X, τ) *es un espacio topológico y* $w : D \to X$ *es una red, se dice que* w *converge a* $x \in X$, *si para cada abierto* U *que contiene a* x, *existe* $d \in D \ni T_\alpha = \{w(e) : d \leq e \in D\} \subseteq U$.

NOTA. $w \to x$ *(la red converge a* x*), o bien* x *es punto límite de* w.

Teorema 35. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y sea* $A \subseteq X$, *entonces* $x \in \mathbb{A}$ *ssi existe una red* w *sea* $A \ni w \to x$.

Demostración. Sea

- $(\to)$ Suponemos que $x \in \overline{A}$.

- Caso: $x \in A'$ (i.e. punto límite) entonces para cada cada abierto U de de $X \ni x \in U \exists x_U \in U \cap A$ (fijo para cada U). Sea

$$D = \{G \in \tau \ni x \in G\}.$$

El cual es un conjunto dirigido en la relación $G_1 \leq G_2$ ssi $G_1 \supseteq G_2$. Definamos

$$w : D_x \to A \ni w(U) = x_u$$

la cual es una red. A probar: $w \to x$. Sea U un abierto cualquiera que contiene a x. Considere

$$T_U = \{w(V) : \underbrace{U \leq V}_{U \supseteq V}\}$$

Entonces $w(V) = X_v \in V \cap A \subseteq U \cap A \subseteq U \implies w \to x$

■

NOTA. *Un subconjunto D' de un subconjunto dirigido D es cofinal, si $\forall d \in D \exists e \in D' \ni d \leq e$.*

Definición 37. *Sean $w : D \to X$ y $v : E \to x$ redes sobre X (donde $(D, \leq)$ y $(E, \leq)$ son conjuntos dirigidos). Se dice que v es una subred de w si existe una función $h : E \to D \ni$*

1. *h es monótona, es decir, $\alpha \leq \beta \implies h(\alpha) \leq h(\beta)$*
2. *h es cofinal (es decir, $h(E)$ es cofinal con D).*
3. *$v(\alpha) = w(h(\alpha)), \forall \alpha \in E$.*

Definición 38 (Subsucesión)**.** *Una subsucesión de (X_n) es una sucesión de la forma (X_{n_k}), es decir, dadad (X_n), la subsucesión es de la forma (X_{h_k}), donde h es una función creciente, $h : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, y donde h no es acotada (i.e. su rango es cofinal con $\mathbb{Z}^+$)*

Definición 39. *Sea X un conjunto. Una colección $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ es un filtro sobre X si se satisfacen:*

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$

2. Si $A \in \mathcal{F}$ *y* $A \subseteq B \implies B \in \mathcal{F}$

3. Si $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$

Ejemplo 41. *Sea* $\mathcal{F} = \{x\}$*, siempre que* $X \neq \varnothing$ *es filtro trivial.*

Ejemplo 42. *Sea* $X \neq \varnothing$*,* $x \in X$*. Entonces* $X = \{A \ni A \subseteq X \wedge x \in A\}$

Ejemplo 43. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico,* $x \in X$

$$\mathcal{F}_x = \{A \subseteq X : \exists U \in \tau \ni x \in U \subseteq A\}$$

es el filtro de vecindades de X*.*

Ejemplo 44. *Sea* X *un conjuhnto infinito y sea*

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X \ni X - A \textit{ es finito}\}$$

$\mathcal{F}$ *se le conoce como el filtro de Frechet.*

Dqado un conjunto X, cualquier colección $S \subseteq P(X)$ tiene la propiedad de intersección finita (PIF) si para todos $A_1, A_2, \cdots, A_n \in S$, se tiene que $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \neq \varnothing$.

NOTA. *Cualquier coleccion* $S \subseteq P(X)$ *con la PIF genera un filtro que la contiene.*

NOTA. *Sea* $F(X)$ *la colección de todos los filtros sobre* X*. Sea* $\leq$ *la relación de contención, entonces* $(F(X), \leq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado. Este orden no puede ser lineal (*$x \not\subset y$ *y* $y \not\subset x$*)*

Ejemplo 45. $M \subseteq X \implies \mathcal{F}_n = \{A \subseteq X \ni M \subseteq A\}$ *es el filtro principal generado por* M*.*

Ejemplo 46. $M = \{x\}, x \in X \implies X = \mathcal{F}_x = \{A \subseteq X \ni x \in A\}$*.*

Teorema 36. *Sea* $X \neq \varnothing$ *y* $\mathcal{F}_\alpha \in F(X), \alpha \in I$*. Entonces* $\bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha \in F(X)$

Demostración. Sea

1. Como $\varnothing \notin \mathcal{F}_\alpha, \forall \alpha \in I \implies \varnothing \notin \bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$.

2. Sea $A \in \bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$ y sea $A \subseteq B \subseteq X$. Como $A \in \bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha \implies A \in \mathcal{F}_\alpha, \forall \alpha \in I$. Como $\mathcal{F}_\alpha$ es filtro $\forall \alpha$ y como $A \subset B \implies B \in \mathcal{F}_\alpha, \forall \alpha \implies B \in \bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$

3. Sean $A, B \in \bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha \implies A, B \in \mathcal{F}_\alpha, \forall \alpha \in I$. Como $\mathcal{F}_\alpha$ es filtro $\forall \alpha \implies A \cap B \in \mathcal{F}_\alpha, \forall_\alpha \implies A \cap B \in \bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha \implies \bigcap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$ es filtro de X.

■

NOTA. *Sea $X \neq \varnothing$ y sea $A \nsubseteq X \implies$ Considere $B = X - A = A^c$ y a los filtros $\mathcal{F}_A$ y $\mathcal{F}_B$. Entonces, $\mathcal{F}_A \cup \mathcal{F}_B$ no es filtro. En efecto, como $A \subset \mathcal{F}_A$ y $B \subset \mathcal{F}_B \implies A \cap B = \varnothing \implies \varnothing \mathcal{F}_A \cup \mathcal{F}_B$.*

Teorema 37. *Sea X un conjunto y $U(x)$ una colección de filtros sobre X. Si para cualesquiera $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in U(x)$ se tiene que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ o $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1 \implies \bigcup U(x)$ es filtro.*

Demostración. Sea

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$, para cada $\mathcal{F} \in U(x) \implies \varnothing \notin \bigcup U(x)$.

2. Sea $A \in U(x)$ y $A \subseteq B$. Entonces, exise $\mathcal{F} \in U(x) \ni A \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es filtro y $A \subset B \implies B \in \mathcal{F} \implies B \in \bigcup U(X)$.

3. Sean $A, B \in \bigcup U(X) \implies$ existen $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in U(X)$, tal que $A \in \mathcal{F}_1$ y $B \in \mathcal{F}_2$. Supongamos que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \implies A, B \in \mathcal{F}_2 \implies A \cap B \in \mathcal{F}_2 \implies A \cap B \in \bigcup U(X) \implies \bigcup U(X)$ es filtro.

■

Proposición 24. *Sea X un conjunto y $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ filtros sobre X. Entonces, $\mathcal{F} \bigcup_* G := \{F \cup G : F \in \mathcal{F} \wedge G \in \mathcal{G}\}$ es filtro sobre X.*

Demostración. Sea

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$ y $\varnothing \notin \mathcal{G} \implies \varnothing \notin F \bigcup_* \mathcal{G}$.

2. Sea $A \in \mathcal{F}\bigcup_* \mathcal{G}$ y $A \subset B$. Entonces $A = F \cup G$, $F \in \mathcal{F}$ y $G \in \mathcal{G}$. Entonces, $F \subset F \cup G = A \implies F \subset A \implies A \in \mathcal{F} \implies B \in \mathcal{F}$. Además, $G \subset F \cup G = A \implies G \subset A \implies A \in \mathcal{G} \implies B \in \mathcal{G}$. Entonces

$$B = B \cup B \in \mathcal{F}\bigcup_* G$$

3. Sean $u_1, u_2 \in \mathcal{F}\bigcap_* \mathcal{G}$, i.e. existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ y $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ tal que $U_1 = F_1 \bigcap G_2$ y $U_2 = F_2 \bigcap G_2 \implies U_1 \cap U_2 = (F_1 \cup G_1) \cap (F_2 \cup G_2) = [(F_1 \cup G_1) \cap F_2] \cup [(F_1 \cup G_1) \cap G_2] = [(F_1 \cap F_2) \cup (G_1 \cap F_2)] \cup [(F_1 \cap G_2) \cup (G_1 \cap G_2)] \implies F_1 \cap F_2 \subset (F_1 \cap F_2) \cup (G_1 \cap F_2) \in \mathcal{F} \implies (F_1 \cap G_2) \cup (G_1 \cap G_2) \in \mathcal{G} \implies U_1 \cap U_2 \in \mathcal{F}\bigcup_* \mathcal{G}$.

■

NOTA (Escolio). *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre $X \neq \varnothing$. Entonces, $\mathcal{F} \cup \{\varnothing\}$ es una topología sobre X.*

Definición 40 (Ultrafiltros). *Sea*

- *Un filtro sobre X es un ultrafiltro si se cumple $\forall A \subset X$, se tiene que $A \in \mathcal{F}$ o $A^c \in \mathcal{F}$.*
- *Un ultrafiltro es un filtro maximal en $(F(X), \subseteq)$; i.e. un ultrafiltro es un filtro U sobre X tal que si $\mathcal{G}$ es un filtro sobre X tal que $X \ni U \subseteq G \implies U = G$*

Definición 41. *$\mathcal{F}$ converge a x ($\mathcal{F} \to x$) si $\forall V \in N(x) \exists F \in \mathcal{F} \ni F \subset V$.*

Definición 42. *Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, $a \in X$ y $A \subset X$. Se dice que a es un elemento maximal de A, si $a \in A$ y si $a \leq b$, para todo $b \in A \implies a = b$.*

Definición 43. *Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $C \subset X$. Se dice que C es cadena en X, si $\forall a, b \in C$ se cumple $a \leq b$ o $b \leq a$.*

Lema 38 (De Zorn). *Si X es un conjunto vacío y parcialmente ordenado $\ni$ cada cadena en X tiene cota superior, entonces X tiene un elemento maximal.*

Definición 44. *Sea $X \neq \varnothing$. Una familia $U \subseteq P(X)$ (Potencia: 2^X) es un ultrafiltro si se cumplen:*

1. *$\mathcal{U}$ es filtro.*

2. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X ral que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F} \implies \mathcal{U} = \mathcal{F}$. $\mathcal{U}$ es un filtro maximal*

Ejemplo 47. *Sea X un espacio topológico. Si $x \in X$, entonces $\mathcal{F}_x = \{A \subseteq X \ni x \in A\}$ es un ultrafiltro de X. En efecto:*

1. *$\mathcal{F}_x$ es un filtro.*

2. *Sea $\mathcal{G}$ un filtro sobre $X \ni \mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{G}$. Como $\{x\} \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{G} \implies$ para cada $G \in \mathcal{G} \implies G \cap \{x\} \neq \varnothing \implies x \in G, \forall G \in \mathcal{G} \implies G \in \mathcal{F}_x \implies \mathcal{G} \subset \mathcal{F}_x \implies \mathcal{F}$ es un ultrafiltro sobre X.*

3. *Sea X un conjunto vacío y $A \subset X$, con al menos dos puntos. $\implies \mathcal{F}_A = \{F \subset X \ni A \subset F\}$ no es un ultra filtro. Entonces $M \in \mathcal{F}_A \implies A \subset M \implies x \in M \implies M \in \mathcal{F}_x \implies \mathcal{F}_A \subset \mathcal{F}_x$. Además, como $\{x\} \in \mathcal{F}_x$ y además, $\{x\} \notin \mathcal{F}_A \implies \mathcal{F}_x \not\subset \mathcal{F}_A \implies \mathcal{F}_A$ no puede ser ultrafiltro en X.*

Teorema 39. *(Tarski, 1930) Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$.*

Demostración. Sea $C = \{\mathcal{F}' \ni \mathcal{F}'$ un fultro sobre X y $F \subset \mathcal{F}'\}$. Entonces, $(C, \subset)$ es un conjunto parcialmente ordenado. En efecto:

- $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}', \forall \mathcal{F}' \in C$.
- Si $\mathcal{F}_1' \subset \mathcal{F}_2'$ y $\mathcal{F}_2' \subset \mathcal{F}_3' \implies \mathcal{F}_1' \subset \mathcal{F}_3'$
- Si $\mathcal{F}_1' \subset \mathcal{F}_2'$ y $\mathcal{F}_2' \subset \mathcal{F}_1' \implies \mathcal{F}_1' = \mathcal{F}_2'$

A probar: Cada cadena en C está superiormente acotada. Sea $\{F_i'\}_{i \in I}$ una cadena en C. Sea $\mathcal{U}' = \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i'$. Entonces, $\mathcal{U}'$ es un filtro sobre X (recordar teorema). Además, $\mathcal{U}'$ es cota superior de la cadena. Por el lema de Zorn, C tiene un máximal $\mathcal{U}$ de $C \implies U$ es filtro. A probar: $\mathcal{U}$ es ultrafiltro.

1. $\mathcal{U}$ es filtro. OK.

2. Sea $\mathcal{G}$ un filtro sobre X tal que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$. Como $\mathcal{U} \in C \implies \mathcal{F} \in \mathcal{U}$ y como $\mathcal{U} \subset G \implies \mathcal{G} \in G \implies G \in C \implies \mathcal{G} \subseteq \mathcal{U} \implies \mathcal{U}$ es un ultrafiltro que contiene a $\mathcal{F}$.

■

Teorema 40. *Sean X un conjunto y U un filtro sobre X. Entonces, los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *$\mathcal{U}$ es ultrafiltro*

2. *Para cada $E \subset X \ni E \cap F \neq \varnothing, \forall F \in \mathcal{U}$, se tiene que $E \in \mathcal{U}$.*

3. *Si $E \subset X \implies E \in \mathcal{U}$ o $X - E \in \mathcal{U}$*

4. *Si $A, B \subset X$ y $A \cup B \in \mathcal{U} \implies A \in \mathcal{U}$ o $B \in \mathcal{U}$.*

Definición 45. *Una subcolección $\beta \subset \mathcal{F}$ es una base del filtro $\mathcal{F}$ si ocurre $\forall F \in \mathcal{F} \exists B \in \beta \ni B \subset F$.*

Teorema 41. *Una familia β de subconjuntos no vacíos de X es base de algún filtro sobre X ssi $\forall B_1, B_2 \in \beta \ni B_3 \subset \beta \ni B_3 = B_1 \cap B_2$.*

Teorema 42. *Sea X, Y espacios topológicos, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y un mapeo $f : X \to Y$. Entonces*

$$\beta_{\mathcal{F}} = \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$$

es una base para filtros en Y.

Demostración. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \ni f(F_1), f(F_2) \in \beta_f \implies f(\underbrace{F_1 \cap F_2}_{\in \mathcal{F}}) \subseteq f(F_1) \cap f(F_2)$ ■

Teorema 43. *Sean X, Y espacios topológicos, $\mathcal{F}$ un filtro sobre Y y un mapeo $f : X \to Y$. Si, $\forall F \in \mathcal{F}$ se tiene que $f^{-1}(F) \neq 0$, entonces $\beta = \{f^{-1}(F) : F \in \mathcal{F}\}$ es una base de filtros para X.*

Demostración. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \ni f^{-1}(F_1) \neq 0, f^{-1}(F_2) \neq 0$ y $f^{-1}(F_1), f^{-1}(F_2) \in \beta \implies f^{-1}(F_1 \cap F_2) \subseteq f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2) \implies \beta$ es base para filtro. ■

Teorema 44. *Sea $X \neq \varnothing, \mathcal{F}$ un filtro sobre X y $E \subset X$. Si $\beta = \{F \cap E : F \in \mathcal{F}\}$ y $\beta' = \{F \cap (X - E) : F \in \mathcal{F}\}$, entonces:*

1. *Si $F \cap E \neq \varnothing, \forall F \in \mathcal{F} \implies \beta$ es una base de filtros sobre X.*

   Demostración. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \implies F_1 \cap E \neq \varnothing, F_2 \cap E \neq \varnothing\varnothing$, i.e. $F_1 \cap E$, $F_2 \cap E \in \beta \implies (F_1 \cap E) \cap (F_2 \cap E) = (F_1 \cap F_2) \cap F \in \beta$ ■

2. *Si $\exists F \in \mathcal{F} \ni F \cap E \neq \varnothing \implies \beta'$ es base de filtros sobre X.*

   Demostración. Si $E \neq \varnothing \implies \beta'$ es base para filtros. Sea $E \neq \varnothing$ y supóngase que $\exists F \in \mathcal{F} \ni F \cap E = \varnothing$. Entonces $F \subset X - E \implies X - E \in \mathcal{F} \implies F \cap (X - E) \neq \varnothing$. ■

Definición 46. *Sea (X, τ) un espacio topológico F un filtro sobre X, $x \in X$. Entonces:*

1. *Se dice que $\mathcal{F}$ converge a x, $\mathcal{F} \to x$, si $\forall V \in N(x) \exists F \in \mathcal{F} \ni F \subset V$*

2. *Se dice que x es un punto de acumulación de $\mathcal{F}$, si $\forall F \in \mathcal{F}$ y $\forall V \in N(x)$, se cumple que $F \cap V \neq \varnothing$. Notación: $F \geq x$*

Teorema 45. *Sean X un conjunto y U un filtro sobre X. Entonces, los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *$\mathcal{U}$ es ultrafiltro*

2. *Para cada $E \subset X \ni E \cap F \neq \varnothing, \forall F \in \mathcal{U}$, se tiene que $E \in \mathcal{U}$.*

3. *Si $E \subset X \implies E \in \mathcal{U}$ o $X - E \in \mathcal{U}$*

4. *Si $A, B \subset X$ y $A \cup B \in \mathcal{U} \implies A \in \mathcal{U}$ o $B \in \mathcal{U}$.*

Demostración. 1. (1) $\implies$ (2). Sea U un ultrafiltro y sea $E \subset X \ni E \cap F \neq \varnothing, \forall F \in \mathcal{U}$. A probar: $E \in \mathcal{U}$. Por la nota anterior, sabemos que $\beta = \{F \cap E : F \in \mathcal{U}\}$ es base de filtro, con $E \in \mathcal{F}(\beta)$ y $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}(\beta)$. Nótese que $F(\beta)$ está contenido en algún ultrafiltro, digamos $\mathcal{U}(\beta)$. Entonces, $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}(\beta)$. Como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\beta) \implies E \in \mathcal{U}$.

2. (2) $\implies$ (3). Supongemos 2) y sea $E \subset X$ (cualquiera) tal que $E \notin \mathcal{U}$. Entonces, $\forall F \in \mathcal{U}$, se tiene que $F \not\subset E \implies \exists F \in \mathcal{U} \ni F \cap E = \varnothing \implies F \subset E^c \implies E^c \in \mathcal{U}$.

3. (3) $\implies$ (4) Suponemos 3 y sean $A, B \subset X \ni A \cup B \in \mathcal{U}$. A probar: $A \in \mathcal{U}$ o $B \in \mathcal{U}$.

4. Suponga que $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$. Por 3, $A \in U$ o $X - A \in \mathcal{U}$. Si $A \in \mathcal{U}$ se tiene el resultado. Si $X - A \in \mathcal{U} \implies (X - A) \cap (A \cup B) = A^c \cap (A \cup B) = \varnothing \cup (A^c \cap B) \subset B \implies B \in \mathcal{U}$.

5. (4) $\implies$ (1) Supóngase 4) y por el absurdo, $\mathcal{U}$ no es ultrafiltro. Entonces, existe un filtro $\mathcal{F} \ni U \subset \mathcal{F}$ y $F \not\subset \mathcal{U}$. Entonces $\exists F \ni \mathcal{F}$ y $F \notin \mathcal{U}$, es decir $F \in \mathcal{F} - U$. Sean, $A = F$ y $B = F^c = X - F$. $A \cup B = X$ (X pertenece a cualquier filtro). Por 4) $A \in \mathcal{U}(\rightarrow\leftarrow)$ o $B \in U \iff F^c \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U} \subset \mathcal{F} \implies F^c \in \mathcal{F}$ y $F \in \mathcal{F} \implies F^c \cap F = \varnothing \in F(\rightarrow\leftarrow)$.

■

Definición 47. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $x \in X$.Entonces, $\mathcal{F} \to x$, si $\forall V \in N(x) \exists F \in \mathcal{F} \ni F \subset V$.*

Teorema 46. *Sea (X, τ) un espacio topológico $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $x \in X$. Entonces, $\mathcal{F} \to x \iff N(x) \subset F$.*

Demostración.
- ($\implies$) Sea $\mathcal{F} \to x \implies \forall V \in N(x) \exists F \in \mathcal{F} \ni F \subset V \implies V \in \mathcal{F}, \forall V \in N(x) \implies N(x) \subset \mathcal{F}$.

- ($\impliedby$) Suponemos que $N(X) \subset F$. Sea $V \in N(x) \subset \mathcal{F}$, $V \in \mathcal{F} \implies \exists F = V \in \mathcal{F} \ni F \subset V \implies \mathcal{F} \to x$.

■

Ejemplo 48. *Sean X un espacio topológico y $x \in X \implies \mathcal{F}(x) = N(x)$ converge a x.*

Ejemplo 49. *Sea X un espacio indiscreto. Como X es la única vecindad disponible para convergencia, entonces cualquier filtro sobre X converge a cada punto de X.*

Ejemplo 50. *Considere el espacio de Sierpinski. es decir: $X = \{0, 1\}$ y $\tau = \{X, \varnothing, \{0\}\}$ y sea $\mathcal{F} = N(x)$.*

- *Sea $x = 0 \implies N(x) \to 0$; $N(X) \to 1$*

Teorema 47. *Sea X un espacio topológico $x \in X$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $X \ni \mathcal{F} \to x$. Si G es un filtro sobre $X \ni F \subset G \implies G \to x$.*

Demostración. Suponga $\mathcal{F} \to x \implies N(x) \subset \mathcal{F} \subset G \implies G \to x$. ∎

Definición 48. *Se dice que x es un punto de acumulación del filtro $\mathcal{F}$ sobre X, si $\forall F \in \mathcal{F}$ y $\forall V \in N(x)$, se cumple que $F \cap V \neq \varnothing$*

NOTA. $F > x$

Definición 49. *Se dicer que una base de filtros β converge a un punto $x \in (X, \tau)$. Si $\forall V \in N(x) \exists B \in \beta \ni B \subset V$. Notación: $\beta \to x$.*

Teorema 48. *Sean X un espacio topologico, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, β una base de filtro para $\mathcal{F}$ y $x \in X$. Entonces, $\mathcal{F} \to x$ ssi $\beta \to x$.*

Demostración. Sea

- $(\to)$ Supongase que $\mathcal{F} \to x \implies \forall V \in N(x) \exists B \in \mathcal{F} \ni B \subset V$. Entonces $V \in \mathcal{F}$. Como β es una base para el filtro $\mathcal{F} \implies \exists B' \in B' \subset V \implies \beta \to x$.

- $(\leftarrow)$ Supongase que $\beta \to x \implies \forall V \in N(x) \exists B \in \beta \ni B \subset V$. COmo $\mathcal{F}$ es filtro, entonces $B \in \mathcal{F} \implies V \in \mathcal{F} \implies$ si $V \in N(x) \implies V \in \mathcal{F} \implies N(x) \subset \mathcal{F} \iff \mathcal{F} \to x$.

∎

Proposición 25. *Sea X un espacio topológico, $x \in X$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $x \ni \mathcal{F} \to x$. Si $\mathcal{G}$ es un filtro sobre $X \ni \mathcal{F} \subset \mathcal{G} \implies G \to x$.*

Demostración. Sea $\mathcal{G}$ un filtro tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Como $\mathcal{F} \to x \implies N(x) \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{G} \implies N(x) \subset \mathcal{G} \implies \mathcal{G} \to x$ ■

Teorema 49. *Sea X un espacio topológico, $x \in X$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *x es un funto de acumulación de $\mathcal{F}$ (i.e. $\mathcal{F} > x$)*
2. *Existe un filtro $\mathcal{G}$ en $X \ni \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \to x$.*
3. *$x \in \mathcal{G}, \forall F \in \mathcal{F}$. Es decir $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$*

> *x es un punto de acumulación de $\mathcal{F}$, si $\forall F \in \mathcal{F}$ y $\forall V \in N(x)$ se tiene que $F \cap V \neq \varnothing$.*

Demostración. Sea

- $1 \to 2$. Sea x un punto de acumulación de $\mathcal{F}$, entonces $\forall F \in \mathcal{F}$ y $\forall V \in N(x)$, se tiene que $F \cap V \neq 0$. Entonces $\beta = \{F \cap V : V \in N(x) \text{ y} F \in \mathcal{F}\}$ es una base de filtros. En efecto, $F_1 \cap V_1, F_2 \cap V_2 \in \beta$, con $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ y $V_1, V_2 \in N(x) \implies (F_1 \cap F_2) \cap (F_2 \cap V_2) = (F_1 \cap F_2) \cap (V_1 \cap V_2) \in \beta \implies \beta$ es una pra filtros. A probar: $\mathcal{F}(\beta)$ es el filtro $\mathcal{G} \ni \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \to x$. Sea $V \in N(x)$ y $F \in \mathcal{F}$ (arbitrarios) $\implies V \cap F \in \mathcal{F}(\beta)$. Entonces, como $\mathcal{F}(\beta)$ es filtro y tenemos $V \cap F \subset V \implies F \in \mathcal{F}(\beta)$ y $V \cap F \subset F \implies V \in \mathcal{F}(\beta)$. Sea $F \in \mathcal{F} \implies F \in \mathcal{F}(\beta) \implies \mathcal{F} \subset \mathcal{F}(\beta)$. Como $V \in N(x) \implies V \in \mathcal{F}(\beta) \implies N(x) \subset \mathcal{F}(\beta) \implies \mathcal{F}(\beta) \to x$.
- $2 \to 3$ Suponemos que $\mathcal{G}$ es un filtro tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \to x$. Sea $F \in \mathcal{F} \implies F \in \mathcal{G}$. Como $G \to x \implies \forall V \in N(x)$ se tiene que $F \cap V \neq \varnothing \implies x \in \overline{F} \implies x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$.
- $3 \to 1$. Suponga que $x \in \overline{F}, \forall F \in \mathcal{F}$. A probar, x es un punto de acumulación $F > x$. Como $x \in \overline{F}, \forall F \in \mathcal{F} \implies F \cap V \neq \varnothing, \forall V \in N(x) \implies F > x$.

$\blacksquare$

Teorema 50. *Sea X un espacio topológico, U es ultrafiltro sobre X y sea $x \in X$. entonces $U > x \iff U \to x$.*

Demostración. Sea

- $(\to)$ Sea $U > x$. Por el teorema anterior, existe un filtro $\mathcal{G}$ sobre X tal que $U \subset \mathcal{G}$ y $G \to x$ Como U es ultrafiltro $\implies G = U$ Entonces $U \to x$.
- Sera $U \to x$. Sea $F \in U$ y $V \in N(x)$. Como $U \to x$ y $\exists F_1 \in U \ni F_1 \subset V$. Entonces $F \cap F_1 \neq \varnothing$. Como $F \cap F_1 \neq \varnothing$. Como $F_1 \cap V \implies F \cap F_1 \subset F \cap V \implies F \cap V \neq \varnothing \implies U > x$.

$\blacksquare$

Teorema 51. *Sea X un espacio topológico, $x \in X$ y $A \subset X$. Entonces $x \in \overline{A}$ ssi existe un filtro $\mathcal{F}$ sobre X tal que $\mathcal{F} \to x$ y $A \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Sea

- Sea $x \in \overline{A} \implies \forall V \in N(x)$, se tiene que $A \cap V \neq \varnothing$. Entonces $\beta = \{A \cap V : V \in N(x)\}$ es una base de filtro para $F(\beta)$. Como $A \cap V \subset A$, entonces $A \in \mathcal{F}(\beta)$. Ademas, como $A \cap V \subset V \implies V \in \beta \implies N(x) \subset \mathcal{F}(\beta) \implies \mathcal{F}(\beta) \to x$
- Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre $X \ni \mathcal{F} \to x$ y $A \in \mathcal{F}$. Sea $V \in N(x)$. Como $F \to x \implies N(x) \subset F \implies V \in \mathcal{F}$. Como $A \cap V \neq \varnothing \implies x \in \overline{A} = A \cup A'$

$\blacksquare$

Teorema 52. *Sea X, Y espacios topológicos, $x \in X$ y $f : X \to Y$ una funcion. Entonces, f es continua ssi la base de fitlros $\beta_{f(N(x))} = \{f(V), V \in N(x)\}$ converge a $f(x)$.*

Demostración. Sea

- Sea f continua en X. Si $W \in N(f(x))$, como f es continua en x, existe $V \in N(x) \ni f(V) \subset W \implies \beta_{f(N(x))} \to f(x)$.

- Suponga que $B_{f(N(x))} \to f(x)$ A probar que $x \in X$. Sea $W \in N(f(x))$, entoces $\exists B \in B_{f(N(x))} \ni B \subset W$. Ademas, $\exists V \in N(x) \ni f(V) = B \subset W$ entonces, f es continua en x.

$\blacksquare$

Lema 53. *Sean X y Y espacio topológicos $f : X \to Y$ un mapeo y U un ultrafiltro sobre X. Entonces, $f(U)$ (filtro generado por $\beta = \{f(F) : F \in U\}$) es un ultrafiltro sobre Y.*

Demostración. A probar: $f(U)$ filtro es ultrafiltro sobre Y. Sea $A \subset Y \implies f^{-1}(A) \in U$ o $X - f^{-1}(A) \in U$.

- Supongamos que $f^{-1}(A) \in U \implies f(f^{-1}(A)) \in f(U)$ y $f(f^{-1}(A)) \subset A \implies A \in f(U)$

- Supongamos que $\underbrace{X - f^{-1}(A)}_{[f^{-1}(A)]^c} \in U \implies f(X - f^{-1}(A)) \in f(U) \implies f[f^{-1}(A)^c] \in f(U) \implies f[f^{-1}(A^c)] \subset A^c \implies A^c \in f(U)$

$\blacksquare$

Teorema 54 (Tikonov)**.** *Sea $I \neq \varnothing$ y $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Entonces, $(\prod_{i\in I} x_i, \tau)$ es compacto ssi X_i es compacto, $\forall i \in I$.*

Demostración. Sea:

- ($\implies$) Sea $X = \prod_{i\in I} X_i$ en espacio compacto. Para cada i considere $\prod_i(x) = x_i$. Caomo π_i son continuas, $\forall i \implies X$ es compacto, $\forall i$.

- ($\impliedby$) Supóngase que X_i es compacto, $\forall i \in I$ y sea U un ultrafiltro en X. Nótese que $\pi_i(U) = U_i$ es ultrafiltro en el espacio factor $X_i, \forall i$. Como X_i es compacto $\implies U_i$ converge a un X_i es decir $\exists x_i \in X_i \ni U_i \to x_i$. Sea $X = (x_i)_{i\in I} \in X$ Entonces por teorema anterior, $U \to x$. Por la arbitrariedad de $U \implies X$ es compacto.

$\blacksquare$

Teorema 55. *Sea X un espacio topológico los enunciados siguientes son equialentes:*

1. *X es compacto.*

2. *Toda familia A de cerrados no vacíos y con la PIF, tiene intersección no vacía, es tal que $\bigcap A \neq \varnothing$*

3. *Para todo filtro F sobre X, existe $x \in X \ni F > x$*

4. *Todo ultrafiltro sobre X converge*

Solución.

- (1) a (2) En clase.

- (2) a (3)Sea F un filtro sobre X, y sea

$$A = \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$$

Entonces, A tiene la PIF. En efecto, sean $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \cdots, \overline{F}_n \in A$. Como $F_i \subset \overline{F}_i, i = 1, \cdots, n$. Entonces, $\varnothing \neq \bigcap_{i=1}^{n} F_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} \overline{F}_i \implies A$ tiene la PIF. Entonces $\bigcap A \neq \varnothing$. Entonces, $\exists x \in \bigcap A = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$. Entonces $\mathcal{F} > x$.

- Sea U un ultrafiltro sobre X. U es filtro. Por (3) $\exists x \in X \ni U > x \implies U \to x$.

- (4) a (1). Suponga que todo ultrafiltro sobre X converge, sea C una cubierta abierta para X y suponga que C no admite subcubiertas finitas para X. Nótese que para cualquier subcolección finita C' se tiene que $X - C' \neq \varnothing$. Considere,

$$\beta = \{X - C' : C' \subset C \text{y } C' \text{ es finita}\}$$

Entonces β es una base para filtro. Sea U un ultrafiltro tal que $\mathcal{F}(\beta) \subset U$. Por (4) $U \to x \in X$, como C es cubierta de X entonces $\exists$ un abierto $G \in X \ni x \in G$. Entonces $\exists F \in U \ni F \subset G$ entonces $G \in U$. Sea $C' = \{G\}$. Entonces $X - G \in U$. De estas últimas dos, $\varnothing = G \cap (X - G) \in U$ $(\to\leftarrow)$

$\square$

Definición 50. *Sea* $\{(Y_\alpha, \tau_\alpha), \alpha \in I\}$ *una familia de espacios topológicos y sea* $F = \{f_\alpha : X \to (Y_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ *una familia de mapeos. La topología inducida por* F *sobre* X *es la topología menos finita (o más débil) que hace a las* f_α *continuas. Notación:* τ_F.

NOTA. *1. A esta topología también se le llama topología inicial, topología al límite, topología débil.*

2. Si existen topologías, τ_α *que hacen a las* f_α *continuas, entonces:*

$$\tau_F = \bigcap_\alpha \tau_\alpha$$

3. Por definición, la topología τ_F *es la generada por la subbase:*

$$S_F = \bigcup_\alpha \{f_\alpha^{-1}(V_\alpha) : V_\alpha \in \tau_\alpha\}$$

Definición 51. *Sea* $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}$ *una colección de espacios topológicos, sea* Y *un conjunto y* $F = \{f_\alpha : (X_\alpha, \tau_\alpha) \to Y\}$ *una famialia de mapeos. La topología más fuerte que hace a los* f_α *continuos se llama topología coinducida por* F.

NOTA. *Sean* (X, τ) *un esp. top.;* Y *un conjunto y* $f : (X, \tau) \to Y$ *un mapeo. La topología coinducida por* f *sobre* Y *se le llama la topología cociente sobre* Y.

Definición 52. *Sea* X *un espacio topológico,* Y *un conjunto y* $g : X \to Y$ *un mapeo sobreyectivo, entonces*

$$\tau_g = \{G \subset Y \ni g^{-1}(G) \text{ es un abierto de } X\}$$

es la topología cociente inducida por g *para* Y.

Teorema 56. *Si* X *y* Y *son espacio topológicos y* $f : X \to Y$ *es un mapeo continuo, sobreyectivo y abierto o cerrado, la topología* τ *de* Y *es la topología cociente* τ_f.

Demostración. Por doble contención. A probar: $\tau = \tau_f$.

- ($\subseteq$) Sea $U \in \tau \implies f^{-1}(U)$ es abierto de X. $\implies U \in \tau_f \implies \tau \subset \tau_f$
- ($\supseteq$) Sea $V \in \tau_f \implies f^{-1}(V)$ es abierto de X. Como f es abierta y sobreyectiva, $\implies f(f^{-1}(V)) = V \in \tau \implies \tau_f \subseteq \tau$

Por lo tanto,

$$\tau = \tau_f$$

■

Teorema 57. *Sea Y un espacio topológico dotado de la topología cociente, inducida por el mapeo $f : X \to Y$. Entonces, un mapeo arbitrario $g : Y \to Z$ es continuo si y solo si $g \circ f : X \to Z$ es continuo.*

Demostración. Por doble implicación,

- ($\implies$) Como Y tiene la topología cociente $\implies f$ es continua. Como por hipótesis, g es continuo $\implies g \circ f$ es continua.
- ($\impliedby$) Sabemos f y $g \circ f$ son continuas. Sea U un abierto de $Z \implies (g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(U)}_{\subseteq Y})$ es abierto de $X \implies g^{-1}(U)$ es abierto en $Y \implies g$ es continua .

■

Ejemplo 51. *Sea $X = [0, 2\pi]$ dotado de la topología usual y sea $Y = \{(x, y) \in \mathcal{R} : x^2 + y^2 = 1\}$ dotado de su topología usual, defínase $f : X \to Y \ni$*

$$f(x) = (\cos x, \sin x), x \in [0, 2\pi]$$

Como f es continua, sobre y cerrada (probar), entonces la topología usual de Y es la topología τ_f

NOTA. *Sea*

- *Sea G la partición de un espacio topológico X, y sea X/G subconjunto cociente o descomposición (Willard)*

- *La función $p : X \to X/G \ni p(x) = [x]$ se llama función cociente o función (mapeo) canónica.*
- $\mathcal{U} = \{U \subset X/G \ni p^{-1}(U)$ *es abierto de*$Y\}$

Teorema 58. *Sea*

1. *$\mathcal{U}$ es una topología para X/G (la topología cociente)*
2. *Si X/G tiene la topología cociente entonces p es continua.*
3. *Si $\mathcal{V}$ es una topología para $X/G \ni p$ es continua entonces $\mathcal{V} \subset U$.*
4. *Si X/G tiene la topología cociente, y si $A \subset X/G \ni p^{-1}(A)$ es cerrado de $X \implies A$ es cerrado en X/G.*

Demostración. Tenemos,

1. Sea
   a) $P^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, el cual es abierto de $X \implies \varnothing \in \mathcal{U}$. $P^{-1}(Y) = Y$, que es abierto de $X \implies Y \in U$
   b) Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{U} \implies \underbrace{P^{-1}(U_1) \cap P^{-1}(U_2)}_{abiertode X}$. Entonces, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$.
   c) Sea β $(\{u_i\})$ una colecció cualquiera de elementos de $\mathcal{U} \implies$ $P^{-1}(\bigcup_i u_i) = \bigcup_i \underbrace{P^{-1}(u_i)}_{abiertode X} \implies \bigcup_i u_i \in \mathcal{U}$.
2. Sea $U \in \mathcal{U} \implies P^{-1}(U)$ es abierto de $X \implies P$ es continua.
3. Sea $u \in \mathcal{V} \implies$ por la continuidad de P, $P^{-1}(u)$ es abirto de $X \implies u \in \mathcal{U} \implies \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.
4. Sea $A \subset X/G \ni P^{-1}(A)$ es cerrado de $X \implies [P^{-1}(A)]^c = P^{-1}(A^c)$ es abierto de X. $A^c \in \mathcal{U} \implies A$ es cerrado en X/G.

■

NOTA. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ un mapeo continuo y sobreyectivo. Definamos:*

$$G_f = \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$$

Entonces, G_f es una partición de X,