Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

Topología - Catedrático: Dorval Carias
31 de enero de 2023

Tarea 1

Problema 1 (Problema 1)**.** .

1. *Si $A \subset X$, demuestre que la familia de todos los subconjuntos de X que contienen a A, junto con el conjunto vacío $\varnothing$, es una topología sobre X.*

   Demostración. Sabemos que $A \subset X$. Sea τ la familia de todos los subconjuntos de X que contienen a A, junto con el conjunto vacío $\varnothing$, definido como:

   $$\tau = \{G \subset X | A \subset G\} \cup \{\varnothing\}$$

   Debemos comprobar que es una topología, entonces se deberán probar las tres propiedades, sea $i \in I$:

   - $\varnothing \in \tau$, por la definición de τ. $X \in \tau$, ya que $A \subset X$.
   - Como $A \subset G_i \implies A \subset \bigcup G_i$, como $G_i \subset X \implies \bigcup_i G_i \in \tau$.
   - Como $A \subset G_i \implies A \subset \bigcap G_i$, como $G_i \subset X \implies \bigcap_i G_i \in \tau$.

   Por lo tanto, τ es una topología. ■

2. *¿Qué topología resulta cuando $A = \varnothing$?*

   Solución. Es decir que todos los subconjuntos de X pertenecen a τ, es decir el potencia. Por lo tanto, sería la topología discreta. □

3. *¿Y cuando $A = X$?*

   Solución. Sería la topología indiscreta, ya que el conjunto sería $\{X, \varnothing\}$. □

Problema 2. 1. *Pruebe la operación $A \mapsto A^0$, en un espacio topológico X tiene las propiedades siguientes:*

   a) $A^0 \subset A$

Demostración. Sea $x \in A^0 \implies \exists G \ni x \in G \subseteq A \implies x \in A$. Por lo tanto, $A^0 \subset A$. ■

b) $(A^0)^0 = A^0$

Demostración. Por doble contención:

- Sea $x \in (A^0)^0 \implies \exists G \ni G \subseteq A^0 \implies x \in A^0$. Por lo tanto, $(A^0)^0 \subseteq A^0$.
- Sea $A^0 \subset A^0 \implies A^0 \subseteq (A^0)^0$.

Por lo tanto, $(A^0)^0 = A^0$. ■

c) $A^0 \cap B^0 = (A \cap B)^0$

Demostración. Por doble contención:

- Sea $(A \subseteq A \cap B \implies A^0 \subseteq (A \cap B)^0) \wedge (B \subseteq A \cap B \implies B^0 \subseteq (A \cap B)^0)$. Por lo tanto, $A^0 \cap B^0 \subseteq (A \cap B)^0$.
- Sea $x \in (A \cap B)^0 \implies \exists G \ni x \in G \subseteq A \cap B \implies (\exists G \ni x \in G \subseteq A) \wedge (\exists G \ni x \in G \subseteq B) \implies x \in A^0 \cap B^0$. Por lo tanto, $A^0 \cap B^0 \supseteq (A \cap B)^0$.

Por lo tanto, $A^0 \cap B^0 = (A \cap B)^0$. ■

d) $X^0 = X$

Demostración. Por doble contención:

- Sea $x \in X^0 \implies \exists G \ni x \in G \subseteq X \implies x \in X \implies X^0 \subseteq X$.
- Sea $x \in X \implies \exists X \ni x \in X \subseteq X \implies x \in X^0 \implies X \subseteq X^0$.

Por lo tanto, $X^0 = X$. ■

e) *G es abierto ssi $G^0 = G$*

Demostración. Por doble contención:

- Si G es abierto $\implies G \in \tau \ni$
  - $x \in G^0 \implies \exists H \ni x \in H \subseteq G \implies x \in G \implies G^0 \subseteq G$.
  - $x \in G \implies \exists G \ni x \in G \subseteq G \implies x \in G^0$.
- Como $G^0 = G$, G debe ser abierto por definición de interior.

Por lo tanto, G es abierto ssi $G^0 = G$. ■

2. *Conversamente, demuestre que si X es un conjunto, cualquier mapeo de $\mathcal{P}(X)$ en $\mathcal{P}(X)$, tal que $A \mapsto A^0$ y que satisface de las propiedades a), b), c) y d), y si los conjuntos abiertos se definen en X mediante e), entonces el resultado es una topología sobre X en la cual el interior de un conjunto $A \subset X$ es A^0.*

Demostración. Sea $^0 : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X) \ni A^0 = A$. Dicha función cumple con las propiedades a,b,c,d y los conjuntos abiertos en X se definen por e. Sea entonces

$$\tau = \{A \subset X | A^0 = A\}$$

A probar: Las 3 propiedades para que τ sea topología. Sea $i \in I$, tal que:

- Por la propiedad d, $X \in \tau$. Por la propiedad a, $\varnothing^0 \subseteq \varnothing$ y el vacío siempre está contenido en cualquier conjunto, entonces $\varnothing^0 = \varnothing$, entonces $\varnothing \in \tau$.
- Sean $A_1, A_2 \in \tau$. A probar: $A_1 \cap A_2 \in \tau$. Sea

$$(A_1 \cap A_2)^0 = (A_1)^0 \cap (A_2)^0 = A_1 \cap A_2 \in \tau$$

- A probar: $(\bigcup A_i)^0 = \bigcup A_i \implies \bigcup A_i \in \tau$. Por doble contención:
  - Por propiedad a,
$$\left(\bigcup A_i\right)^0 \subseteq \bigcup A_i$$
  - Sea
$$\bigcup A_i \subseteq \bigcup (A_i)^0 \subseteq \left(\bigcup A_i\right)^0$$

    Por lo tanto, $(\bigcup A_i)^0 = \bigcup A_i$

  Por lo tanto, τ es topología.

$\blacksquare$

Problema 3. *Pruebe que las topologías sobre un conjunto fijo X, parcialmente ordenadas por la inclusión, forman un retículo. (Ayuda: Ver problema* 3G *de Willard).*

Demostración. A probar: dadas las topologías sobre un conjunto fijo X ordenadas por $\subseteq$ forman un retículo. Ya que un retículo se caracteriza como cada conjunto de dos elementos tiene un supremo y un ínfimo, debemos comprobar ambas propiedades. Por hipótesis, sabemos que la inclusión define una relación de orden parcial sobre M el conjunto de las topologías sobre un conjunto fijo X, tal que:

- Sea $\tau \subseteq \tau, \forall \tau \in M$
- Sea $\tau_1 \subseteq \tau_2 \wedge \tau_2 \subseteq \tau_1 \implies \tau_1 = \tau_2$.
- Sea $\tau_1 \subseteq \tau_2 \wedge \tau_2 \subseteq \tau_3 \implies \tau_1 \subseteq \tau_3$.

Ahora, debemos comprobar las propiedades de ínfimo y supremo,

- El supremo se define como el elemento más pequeño de $\{m \in M | b \subseteq m, \forall b \in B\}$. A probar: cada dos elementos de M tiene un supremo. Sea $B = \{\tau_{b_1}, \tau_{b_2}\} \in M$, en este caso, por el ejemplo de Willard sabemos que la unión de topologías no es topología, entonces, el supremo sería el potencia $\mathcal{X}$.
- El ínfimo se define como el elemento más grande de $\{m \in M | m \subseteq b, \forall b \in B\}$. A probar: cada dos elementos de M tiene ínfimo. Sea $B = \{\tau_{b_1}, \tau_{b_2}\} \in M$, nótese que $\tau_{b_1} \subseteq \tau_{b_1} \cap \tau_{b_2}$ y $\tau_{b_2} \subseteq \tau_{b_1} \cap \tau_{b_2}$. Por lo tanto, $\tau_{b_2} \subseteq \tau_{b_1} \cap \tau_{b_2}$ es el ínfimo para cada dos elementos de M.

Por lo tanto, M es un retículo. $\blacksquare$

Problema 4. *Un subconjunto abierto G en un espacio topológico es regularmente abierto ssi G es el interior de su cerradura. Un subconjunto cerrado es regularmente cerrado ssi es la cerradura de su interior.*

> *Tenemos:*
>
> - *A es regularmente abierto* $\iff A = (\overline{A})^\circ$
> - *A es regularmente cerrado* $\iff A = \overline{(A^\circ)}$

Pruebe que:

1. *El complemento de un conjunto regularmente abierto es regularmente cerrado y viceversa.*

   Demostración. Tenemos:

   - Sea A un conjunto regularmente abierto ($A = (\overline{A})^\circ$), sea A^c el complemento. A probar: A^c es regularmente cerrado ($A^c = \overline{(A^c)^0}$). Sea,

   $$A^c = X - A = X - (\overline{A})^0 = \overline{X - \overline{A}} = \overline{(X - A)^0} = \overline{(A^c)^\circ}.$$

   - Sea A un conjunto regularmente cerrado ($A = \overline{(A^\circ)}$), sea A^c el complemento. A probar: A^c es regularmente abierto ($A^c = (\overline{A^c})^\circ$). Sea,

   $$A^c = X - A = X - \overline{(A^\circ)} = (X - A^0)^0 = (\overline{X - A})^0 = (\overline{A^c})^0.$$

   ■

2. *Si A es un subconjunto cualquiera de un espacio topológico, entonces $(\bar{A})^0$ es regularmente abierto.*

   Demostración. A probar: $(\overline{A})^0 = (\overline{(\overline{A})^0})^0$. Por doble contención:

   - Sea $(\overline{A})^0 \subseteq \overline{(\overline{A})^0} \implies ((\overline{A})^0)^0 \subseteq (\overline{(\overline{A})^0})^0$. Por lo tanto, $(\overline{A})^0 \subseteq (\overline{(\overline{A})^0})^0$.
   - Sea $\left(\overline{A}\right)^0 \subseteq \overline{A} \implies (\overline{(\overline{A})^0}) \subseteq \overline{(\overline{A})} = \overline{A}$. Por lo tanto, $(\overline{(\overline{A})^0})^0 \subseteq (\overline{A})^0$.

   Por lo tanto, $(\overline{A})^0 = (\overline{(\overline{A})^0})^0$. ■

3. *La intersección de dos conjuntos regularmente abiertos es regularmente abierto. ¿Se cumple esta propiedad en el caso de la unión?*

   Demostración. Sea A y B conjuntos regularmente abiertos. A probar: $A \cap B = \left(\overline{A \cap B}\right)^0$. Sea por doble contención,

- Sea

$$\begin{aligned} A \cap B &= (\overline{A})^\circ \cap (\overline{B})^\circ \\ &= (\overline{A} \cap \overline{B})^0 \\ &= \left((\overline{A} \cap \overline{B})^0\right)^0 \\ &= \left((\overline{A})^0 \cap (\overline{B})^0\right)^0 \\ &= (A \cap B)^0 \\ &\subseteq \left(\overline{A \cap B}\right)^0 \end{aligned}$$

- Sea

$$\begin{aligned} \left(\overline{A \cap B}\right)^0 &\subseteq \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)^0 \\ &= (\overline{A})^0 \cap (\overline{B})^0 \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A \cap B = \left(\overline{A \cap B}\right)^0$.

Para el caso de la unión, se procede por contraejemplo: sean los abiertos $A = (2, 72)$ y $B = (72, 100)$ con la topología usual en $\mathbb{R}$. Para que cumpla la unión, debe cumplir: $A \cup B = \left(\overline{A \cup B}\right)^0$. Sea

$$A \cup B = (2, 100)/(72)$$

Pero,

$$\left(\overline{A \cup B}\right)^0 = ([2, 100])^0 = (2, 100)$$

■

Problema 5. *Demuestre que si $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre X, entonces la topología generada por $\mathcal{B}$ es igual a la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a $\mathcal{B}$.*

Demostración. Sea $F = \{\tau \text{ sobre } X | \mathcal{B} \subseteq \tau\}$. A probar: $\tau_{\mathcal{B}} = \bigcap_{i\in I} F_i$. Por doble contención:

- A probar: $\bigcap_{i\in I} F_i \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$. Tenemos que $\mathcal{B} \subseteq \tau_{\mathcal{B}} \implies \tau_{\mathcal{B}} \in F \implies \bigcap_{i\in I} F_i \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$.
- A probar: $\tau_{\mathcal{B}} \subseteq \bigcap_{i\in I} F_i$. Sea $A \in \tau_{\mathcal{B}} \implies$ por caracterización de base $A = \bigcup_k \mathcal{B}_k \implies A \subseteq \tau$. Entonces, tenemos que $\tau_{\mathcal{B}} \subseteq \tau \subseteq \bigcap_{i\in I} F_i \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$.

Por lo tanto, $\tau_{\mathcal{B}} = \bigcap_{i\in I} F_i$. ■