Universidad del Valle de Guatemala

MM2034 - 2 semestre - 2022

Licenciatura en matemática aplicada

LÓGICA

Catedrático: Paulo Mejía

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay
Carné: 19857
Correo: rom19857@uvg.edu.gt

8 de febrero de 2023

Índice

1. Topología

Definición 1. *Sea $X \neq \varnothing$. Una clase τ de subconjunto de X es una topología sobre X, se cumple:*

1. *$\varnothing, X \in \tau$*

2. *La unión de una clase arbitraria de conjuntos en τ es un miembro de τ.*

3. *La intersección de una clase finita de miembros de τ está en τ.*

Los miembros de τ son los abiertos de X.

1. El par (X, τ) es un espacio topológico.
2. A los elementos de X se les llama puntos.

estructura topológica

Ejemplo 1.

1. *Sea $X \neq \varnothing \implies \tau = P(X)$ es una topología sobre X. A τ se le llama topología discreta de X, y (X, τ) es un espacio discreto.*

2. *Sea $X \neq \varnothing \implies \tau = \{\varnothing, X\}$ es una topología sobre X. A τ se le llama topología indiscreta, y (X, τ) es un espacio indiscreto.*

3. *$X = \mathbb{R}^2$ y τ es la colección de abiertos de $\mathbb{R}^2$ definido en términos de la métrica usual. A τ se le llama topología usual de $\mathbb{R}^2$.*

4. *Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$.*

   a) *Sea $\tau_1 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\} \implies \tau_1$ es una topología sobre X.*

   b) *Sea $\tau_2 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$. Note que $\{a\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\} \notin \tau_2 \implies \tau_2$ no es topología sobre X*

   c) *Sea X un conjunto infinito y sea τ el vacío junto con la colección de subconjunto de X cuyos complementos son finitos. τ es una topología sobre X, y se llama topología cofinita sobre X.*

NOTA. *Un espacio metrizable es un espacio topológico X con la propiedad que existe una métrica que genera los abiertos de la topología dada.*
Problema 1. *¿Qué tipos de espacios topológicos son metrizables?*

Proposición 1. *Si τ_1 y τ_2 son topologías sobre X, entonces $\tau_1 \cap \tau_2$ es topología sobre X.*

Demostración.

1. Como τ_1 y τ_2 son topologías, etnonces: $X, \varnothing \in \tau_1$ y $X, \varnothing \in \tau_2 \implies X \in \tau_1 \cap \tau_2$ y $\varnothing \in \tau_1 \cap \tau_2$.

2. Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una subcolección de $\tau_1 \cap \tau_2 \implies G_i \in \tau_1, \forall i \in I \implies \bigcup_i G_i \in \tau_i$ y $G_i \in \tau_2, \forall i \in I \implies \bigcup_i G_i \in \tau_2$. Entonces $\bigcup_i G_i \in \tau_1 \cap \tau_2$

3. Sea G_1 y $G_2 \in \tau_1 \cap \tau_2 \implies G_1 \in \tau_1$ y $G_1 \in \tau_2$. $G_2 \in \tau_1$ y $G_2 \in \tau_2$. Entonces $G_1 \cap G_2 \in \tau_1$ y $G_1 \cap G_2 \in \tau_2 \implies G_1 \cap G_2 \in \tau_1 \cap \tau_2$. Entonces, $\tau_1 \cap \tau_2$ es una topología sobre X.

$\blacksquare$

NOTA. *Sea $X = \{a, b, c\}$ y sean:*

- $\tau_1 = \{X, \varnothing, \{a\}\}$, $\tau_2 = \{X, \varnothing, \{b\}\}$. *Entonces,* $\tau_1 \cup \tau_2 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}\}$, *pero* $\{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$. $\therefore \tau_1 \cup \tau_2$ *no es topología sobre* X.

Ejemplo 2. *Sea $f : X \to Y$, donde X es un conjunto no vacío y Y es el espacio topológico de (Y, τ'). Entonces $\tau = \{f^{-1}(G) : G \in \tau'\}$ es una topología sobre X. En efecto:*

1. $\varnothing \implies \tau' \implies f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \tau$. $Y \in \tau' \implies f^{-1}(Y) = X \in \tau$

2. *Sea $\{G_i\}$ una subclase de τ. Como $G_i \in \tau, \forall \implies \exists H_i \in \tau' \ni G_i = f^{-1}(H_i) \implies \cup_i G_i = \cup_i f^{-1}(H_i) = f^{-1}(\underbrace{\bigcup_i H_i}_{\in \tau'}) \in \tau$*

Definición 2. *Sean X y Y espacios topológicos y f un mapeo de X en Y. Se dice que f es continua si $f^{-1}(G)$ es un abierto de X para cada abierto de G de Y.*

Definición 3. *Se dice que el mapeo es abierto si, para cada abierto G de X, se cumple que $f(G)$ es abierto de Y.*

Definición 4. *Si f es continuo, entonces $f(x)$ es la imagen continua de X bajo f.*

Definición 5 (Homeomorfismo)**.** *Un homeomorfismo es un mapeo biyectivo y bicontinuo (continuo y abierto) entre espacios topológicos. En este caso, los espacios son homeomorfos.*

> **NOTA.** *Una propiedad topológica es una propiedad que si la tiene el espacio topológico X, la tiene también cualquier espacio homeomorfo a X*

NOTA. *Sea A un subconjunto no vacío del espacio topológico (X, τ). Considerese la clase:*

$$\tau_A = \{A \cap G : G \in \tau \textit{es abierto de } X\}$$

Entonces, τ_A es una topologia sobre A, la cual se llama topologia relativa sobre A.

Definición 6. *El par (A, τ_A) es un espacio topologico y se dice es un subespacio de X,*

1. $\varnothing \in \tau \implies A \cap \varnothing = \varnothing \in \tau_A$ *y* $X \in \tau \implies A \cap X = A \in \tau_A$.
2. *Sea* $\{G_i\}_{i \in I}$ *una colección de miembros de* $\tau_A \implies \exists H_i \in \tau \ni G_i = A \cap H_i, \forall i \implies \bigcup_i G_i = \bigcup_i (A \cap H_i) = A \cap \left(\underbrace{\bigcup_i H_i}_{\in \tau} \right) \in \tau_A$
3. *Sean* $G_1, G_2 \in \tau_A \implies \exists H_i \in \tau \ni G_i = A \cap H_i$, $i = 1, 2$. *Entonces,* $G_1 \cap G_2 = (A \cap H_1) \cap (A \cap H_2) = A \cap (\underbrace{H_1 \cap H_2}_{\in \tau}) \in \tau_A \implies \tau_A$ *es topología sobre* A.

Ejemplo 3. *Tenemos,*

1. *Sea τ la topología usual de $\mathbb{R}$ y considere la topología relativa $\tau_{\mathbb{Z}^+}$ (en este caso, $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{R}$). Nótese que $\{n_0\}$ es abierto, la unión de unitarios es abierto de $\tau_{\mathbb{Z}^+} \implies \tau_{\mathbb{Z}^+}$ es la topología discreta de $\mathbb{Z}^+$.*

2. *Considere* $(\mathbb{R}, \tau)$, *donde* τ *es la topología usual de* $\mathbb{R}$ *y sea* $I = [0, 1]$. *Entonces,*

   a) $(1/2, 1] = [0, 1] \cap (1/2, 2) \in \tau_I$

   b) $(1/2, 2/3) = [0, 1] \cap (1/2, 2/3) \in \tau_I$

   c) $(0, 1/2] \notin \tau_I$, *ya que no existe un abierto* $G \in \tau \ni (0, 1/2] = I \cap G$.

3. *Sea* $X = \{a, b, c, d, e\}$ *y sea*

$$\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

$$\boxed{\tau_A = \{A, \varnothing, \{a\}, \{a, c\}, \{a, e\}\}}$$

Considere $A = \{a, c, e\}$ *entonces:*

- $A \cap X = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap \{a\} = \{a\}$
- $A \cap \{a, b\} = \{a\}$
- $A \cap \{a, c, d\} = \{a, c\}$
- $A \cap \{a, b, c, d\} = \{a, c\}$
- $A \cap \{a, b, e\} = \{a, e\}$

1.0.1. Objeto de estudio de la topología

: Estudio de todas las propiedades topológicas de los espacios

Definición 7. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto $A \subset X$ es cerrado si y solo si $A^c \in \tau$.*

Ejemplo 4. *Sea (X, τ) un espacio discreto. Sea $A \subset X \implies A \in \tau \implies A^c \subset X \implies A^c \in \tau \implies A$ es cerrado. Entonces, $A \subset X$ es abierto y cerrado en X.*

> **NOTA.** *Sea (X, τ) un espacio topológico,*
>
> 1. *$\phi \in \tau \implies \phi^c = X$ es cerrado. $X \in \tau \implies X^c = \phi$ es cerrado.*
> 2. *Considere una familia arbitraria $\{F_i\}$ de cerrados en $\tau \implies \{F_i^c\} \subset \tau \implies \bigcup_i F_i^c \in \tau \implies (\bigcup_i F_i^c)^c = \bigcap_i F_i$ es cerrado.*
> 3. *Sean F_1 y F_2 cerrados en $\tau \implies F_1^c$ y $F_2^c \in \tau \implies F_1^c \cap F_2^c \in \tau \implies (F_1^c \cap F_2^c)^c = F_1 \cup F_2$ es cerrado.*

Definición 8. *Sea X un espacio topológico:*

1. *Una vecindad de un punto (o de un conjunto), es un abierto de X que contiene al punto (o al conjunto).*

2. *Sea $A \subseteq X$. Un punto x en A es aislado si existe una vecindad de x que no contiene ningún otro punto de A.*

3. *Sea $A \subseteq X$. Un punto de $y \in X$ es un punto límite de A si, $\forall G \in \tau \ni y \in G$, se tiene que $(G - \{y\}) \cap A \neq \varnothing$.*

   > *EL conjunto de puntos límite de A se llama derivado de A, $(A', D(A))$.*

4. *Sea $A \subseteq X$. La cerradura de A, denotado $\overline{A}$, es el cerrado más pequeño que contiene a A. Es decir, si F_i son los cerrados de X que contiene a $A \implies \overline{A} = \bigcap_i F_i$.*

   > *Tenemos:*
   >
   > a) *$A \subseteq \overline{A}$*
   >
   > b) *Si A es cerrado $\implies A = \overline{A}$.*

5. *Un subconjunto A de X es denso (siempre denso), si $\overline{A} = X$.*

6. *El espacio topológico X es separable si tiene un subconjunto separable contable y denso.*

7. *Un punto de adherencia de $A \subseteq X$ es cualquier elemento de $\overline{A}$.*

Proposición 2. *Sea $A \subset B \implies A' \subset B'$.*

Proposición 3. *Sea $A \subset B$ y sea $x \in A' \implies$ si G es un abierto $\ni x \in G \implies (G - \{x\}) \cap B \supset (G - \{x\}) \cap A \neq \varnothing \implies x \in B' \implies A' \subset B'$.*

Proposición 4. *Derivado de la unión $(A \cup B)' = A' \cup B'$*

Demostración. Por doble contención:

- $(\supseteq)$. A probar: $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$. Sea $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B \implies A' \subseteq (A \cup B)'$ y $B' \subseteq (A \cup B)' \implies A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$

- $(\subseteq)$. A probar $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B' \iff x \in (A \cup B)' \implies x \in A' \cup B' \iff$ si $x \notin A' \cup B' \implies x \notin (A \cup B)'$.

  - Suponemos que $x \notin A' \cup B' \implies x \notin A'$ y $x \notin B' \implies$ existen G, H abiertos de $X \ni x \in G$ y $x \in H$ y $(G - \{x\}) \cap A = \varnothing$ y $(H - \{x\}) \cap B = \varnothing$ ya que $x \in G$ y $x \in H \implies x \in G \cap H$. Además, $G \cap H \subseteq G$ y $G \cap H \subseteq H$. Entonces $(G \cap H - \{x\}) \cap A = \varnothing$ y $(G \cap H - \{x\}) \cap B = \varnothing$. Por lo tanto, $(G \cap H - \{x\}) \cap (A \cup B) = \varnothing$.

■

Proposición 5. *$A \subseteq X$ es cerrado ssi $A' \subseteq A$.*

Demostración. Sea

- $(\implies)$

- $(\impliedby)$

■

Proposición 6. *Sea F un superconjunto cerrado de A, entonces $A' \subset F$.*

Demostración. Como $A \subset F \implies A' \subset F'$. Como F es cerrado, $F' \subset F \implies A' \subset F$. ■

Proposición 7. *$A \cup A'$ es cerrado.*

Demostración. A probar: $(A \cup A')^c$ es abierto. Sea $x \in (A \cup A')^c \implies x \notin A$ y $x \notin A' \implies \exists G$ abierto $\ni G \cap A = \varnothing$.

Sea $G \cap A' = \varnothing$. Supóngase que $y \in G \cap A' \implies y \in G$ y $y \in A' \implies (G - \{y\}) \cap A \neq 0 (\rightarrow\leftarrow)$

Por otra parte, $G \cap A' = \varnothing$. Entonces,

$$\begin{aligned} G \cap (A \cup A') &= (G \cap A) \cup (G \cap A') \\ &= \varnothing \cup \varnothing \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

$\implies G \subset (A \cup A')^c \implies (A \cup A')^c$ es abierto $\implies A \cup A'$ es cerrado. ■

Proposición 8. $\overline{A} = A \cup A'$

Demostración. Sea

- A probar $\overline{A} \subset A \cup A' \implies A \subset \underbrace{A}_{cerrado} \cup A' \implies A \subset \overline{A} \subset A \cup \overline{A}$.
- A probar: $A \cup A' \subset \overline{A}$. Entonces $A \subset \overline{A}$, $A' \subset (\overline{A})' \subset \overline{A}$. Entonces $A \subset \overline{A}$ y $\overline{A} \subset \overline{A}$, entonces $A \cup A' \subset \overline{A}$.

■

Proposición 9. *Si $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.*

Demostración. $A \subset B \implies A' \subset B' \implies A \cup A' \subset B \cup B' \implies \overline{A} \subset \overline{B}$. ■

Proposición 10. $\overline{A \cup B} = \underbrace{\overline{A} \cup \overline{B}}_{cerrado}$

Demostración.

- Sabemos que $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \implies A \cup \subset \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
- $A \subset A \cup B \implies \overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $B \subset A \cup B \implies \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Entones $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$

■

Teorema 1. *Sea*

1. $\overline{\varnothing} = \varnothing$
2. $A \subset \overline{A}$
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
4. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Demostración.

1. Como $\varnothing$ es cerraddo entonces $\overline{\varnothing} = \varnothing$
2. $A \subset \overline{A}$, por la cerradura.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, por propiedad anterior.
4. Como $\overline{A}$ es cerrado, entonces $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

■

Definición 9.

1. *Un punto P de X es interior de $A \subseteq X$, si existe un abierto $G \ni$*

$$p \in G \subset A$$

2. *El interior de A, denotado $\int(A)$ o A°, es el conjunto de todos los puntos interiores de A.*

Definición 10. *Un punto frontera de $A \subset X$ es un punto tal que, cada vecindad del punto intersecta a A y A^c.*

2. Bases y subases de una topología

Definición 11. *Una base β (abierta) para el espacio topológico (X, τ) es una clase de abiertos de X tal que cada abierto en τ puede escribirse como uniones de los miembros de la clase.*

Ejemplo 5. *Sea (X, τ) un espacio discreto. Entonces $\beta = \{\{x\} : x \in X\}$ es una base para τ*

> **NOTA.** *1. Si cada $G \in \tau$ puede representarse como $G = \bigcup_i B_i$, donde $B_i \in \beta \implies$ para cada $x \in G \implies x \in B_{i_0}$, (miembro de la unión) para algún i_0. $\implies x \in B_{i_0} \subseteq \bigcup_i B_i = G$*

Definición 12. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Una subclase S de abiertos en τ es una subbase de la topología τ, si las intersecciones finitas de miembros de S producen una base τ.*

Ejemplo 6. *1. Sean $a, b \in \mathbb{R} \ni a < b$. Nótese que*

$$(a, b) \subseteq \mathbb{R}$$

2. ejemplo 2

3. Sea $a = \{\{a\}\}$, entonces $\beta = \{\{a\}, X\} \implies \tau = \{X, \varnothing, \{a\}\}$

4. $a = \{\varnothing\} \implies \beta = \{X, \varnothing\} \implies \tau = \{X, \varnothing\}$

Teorema 2. *Los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *Una familia β de subconjuntos abiertos del espacio topológico (X, τ) es una base para τ, si cada abierto de τ es unión de miembros de β.*
2. *$\beta \subset \tau$ es una base para τ ssi $\forall G \in \tau, \forall p \in G \exists B_p \in \beta \ni p \in B_p \subset G$.*

Demostración.

- $(i) \to (ii)$ Sea $G \in \tau$ y sea $p \in G$. Como $G \in \tau$ y β es base de $\tau \implies G = \bigcup_i B_i, B_i \in \beta$. Como $p \in G \implies p \in \bigcup_i B_i \implies \exists i_p \ni p \in B_{i_p} \implies$ dado $p \in G \exists B_{i_p} \in \beta \ni p \in B_{i_p} \subset G$.

- $(ii) \to (i)$ Sea $G \in \tau \implies$ Para cada $x \in G \exists B_x = \beta \ni x \in B_x \subset G \implies \bigcup_{x \in G} = G \implies$ es union de miembros de β.

■

Teorema 3. *Sea β una familia de subconjuntos de un conjunto no vacío X. Entonces, β es una base para una topologia τ sobre X ssi se cumplen:*

1. $X = \bigcup_{B \in \beta} B$

2. *$\forall B, B^* \in \beta$ se tiene que $B \cap B^*$ la union de miembros de $\beta(\iff p \in B \cap B^* \exists B_p \in \beta \ni p \in B_p \subset B \cap B^*)$*

Demostración.

- $(\to)$ Sea β la base de una topologia τ sobre X. Sabemos que X es abierto $\implies X = \bigcup_{B \in \beta} B$, donde esta union se toma sobre todos los miembros de β. Como β es base para $\tau \implies B \cap B^*$ puede escribirse como union de miembros de β.

- $(\leftarrow)$ Sea τ la colección de las uniones de miembros de la familia de subconjuntos de X. A probar: τ es topologia.

  1. Por (i) $X \in \tau$. Además, la union de la clase vacia de β es $\varnothing \implies \varnothing \in \tau$.

  2. Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de miembros de τ. Entonces, $G_i = \bigcup_{B \in \beta} B_{G_i}$ (donde cada G_i es union de miembros de β) $\implies \bigcup_i$ es union de uniones de miembros de $\beta \implies \bigcup_i G_i \in \tau$.

  3. Sean $G_1, G_2 \in \tau \implies G_i = \bigcup \{B_i : i \in I\}$ y $G_2 = \bigcup \{B_j : j \in J\}$. Entonces, $G_1 \cap G_2 = (\bigcup_i B_i) \cap (\bigcup_j B_j) = \bigcup_{i=j} (B_i \cap B_j) \implies G_1 \cap G_2 \in \tau \implies \tau$ es una topologia sobre X.

■

Ejemplo 7. *Sean (a_1, b_1) y (a_2, b_2) intervalos abiertos y acotados de $\mathbb{R} \implies$*

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a_1 < x < b_1, a_2 < y < b_2\right\} \tag{1}$$

Teorema 4. *Sea X cualquier conjunto no vacío y sea S una clase arbitraria de subconjuntos de X. Entonces, S puede constituirse en la subbase para una topología abierta para una topología sobre X en el sentido que las intersecciones finitas de los miembros de S producen una base para dicha topología.*

Teorema 5. *Sea $X \neq \varnothing$ y sea S una clase arbitraria de subconjunto de X. Entonces, S puede servir como subbase abierta de una topología sobre X en el sentido que la clase τ de todas las uniones de intersecciones finitas en S es una topogía.*

Demostración. Tenemos:

1. $S = \varnothing \implies \beta = \{X\} \implies \tau = \{X, \varnothing\}$ es la topología indiscreta.

2. $S \neq \varnothing$l. A probar: τ es topología.

   a) $\varnothing, X \in \tau$

   b) $\{G_i\}_{i \in I}$ una subclase arbitraria de τ. A probar: $\bigcup_i G_i \in \tau$. Cada G_i es unión de intersecciones finitas de miembros de S. Entonces, $\bigcup_i G_i$ es unión de uniones de intersecciones finitas de miembros de $S \implies \bigcup_i G_i \in \tau$.

   c) Sea $G_1, G_2 \in \tau$. A probar $G_1 \cap G_2 \in \tau$. $G_1 \cap G_2$ es unión de intersecciones finitas de miembros de S.

■

Lema 6. *Si S es subbase de las topologías τ y τ^* sobre $X \implies \tau = \tau^*$*

Demostración. A probar: $\tau \subseteq \tau^*$. Sea $G \in \tau \implies$ Como S es subbase de $\tau \implies$

$$G = \bigcup_i \left(S_{i_1} \cap S_{i_2} \cdots \cap S_{i_{n_i}}\right), S_{i_k} \in S$$

Sabemos que S genera a $\tau^*(S \subset \tau^*) \implies S_{i_1} \cap S_{i_2} \cdots \cap S_{i_{n_i}} \in \tau^* \implies G = \bigcup_i \left(S_{i_1} \cap S_{i_2} \cdots \cap S_{i_{n_i}}\right) \in \tau^* \implies \tau \subset \tau^*$. De forma similar, se tiene que $\tau^* \subset \tau$. ■

Teorema 7. *Sea X un subconjunto no vacío y sea S una clase de subconjuntos de X. La topología τ sobre X, generada por S, es la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a S.*

Demostración. Sea $\tau^* = \bigcap_i \tau_i$, donde cada τ_i es una topología sobre X que contiene a S. A probar: $\tau = \tau^*$

- ($\supseteq$) Como S genera a $\tau \implies S \subset \tau \implies \tau^* \subset \tau$
- ($\subseteq$). Sea $G \in \tau \implies G = \bigcup_i \left(S_{i_1} \cap S_{i_2} \cdots \cap S_{i_{n_i}}\right), S_{i_k} \in S$. Como $S \subseteq \tau^* \implies S_{i_k} \in \tau^* \implies G \in \tau^*$

■

¿Cuándo es útil una base para una topología?

- Simplificación en cardinalidad.

Definición 13. *Un espacio topológico que tiene una base contable es un espacio segundo contable.*

Teorema 8 (de Lindelof)**.** *Sea X un espacio vacío no contable. Si un abierto de G de X se puede representar como unión de una clase $\{G_i\}$ de abierto de $X \implies G$ puede representarse como unión contable de los G_i.*

Demostración. 1. Sea G un abierto no vació de $X \ni G = \bigcup_i G_i$. Como X es segundo contable, entonces X tiene una base contable $\beta \implies$ cada G_i es unión contable de los elementos de $\beta \implies G$ falla.

2. Sea $G = \bigcup_i G_i, G \in \tau, G \neq \varnothing$. Como X es segundo contable $\implies G$ es unión contable de miembros de $\beta = \{\beta_j\}$ además los G_i, por ser abiertos, son únicos de $\beta_j \implies$ como por cada $\beta_i \exists G_i^* \ni B_i \subseteq G_i^* \implies G = \bigcup_i \beta_i = \bigcup_i G_i^* \subseteq$.

■

Definición 14. *Un espacio topológico es un espacio de Hausdorff (T_2) si dados $x, y \in X, x \not{y}, \exists u, v \in \tau \ni x \in U, y \in V$ y $u \cap v = \varnothing$*

Ejemplo 8. *Sea* $X = \{a, b\}$ *con topología discreta* $\implies X$ *es* T_2*. Ahora con la topología* $\tau_m = \{x, \varnothing, \{a\}\}$ *no* T_2*.*

Teorema 9. *Sea* (X, d) *un espacio métrico y sean* $x, y \in X, x \not/ y \implies$ *sea* $\delta = d(x, y) \implies u = \beta_{\delta/2}(x)$ *y* $v = \beta_{\delta/2}(y) \implies x \in u$ *y* $y \in V$ *y* $u \cap v = \varnothing$*. Por lo tanto, es de Hausdorf.*

Teorema 10. *Composición de mapeos continuos es un mapeo continuo. Sean* $(X, \tau), (Y, \tau^*), (Z, \tau^{**})$ *espacio topológicos y sean* $f : X \to Y$ *y* $g : Y \to Z$ *mapeos continuos. A probar* $g \circ f : X \to Z$*. Sea* $G \in \tau^{**} \implies g^{-1}(G) \in \tau^* \implies f^{-1}[g^{-1}(G)] \in \tau = (g \circ f)^{-1}(G) \in \tau$*.*

Teorema 11. *Sea* $\{\tau_i\}$ *sobre* X*, si* $f : X \to Y$ *continua,* $\forall \tau_i \implies f$ *es continuo con respecto a* $\bigcap_i \tau_i$*.*

Definición 15. *Sea* (x_n) *una sucesión en un espacio topológico* X*, se dice que* (x_n) *converge a un punto* $y \in X$ *si* $\forall u \in \tau \ni y \in U, \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni n \geq N \implies x_n \in U$

Teorema 12. *Si* X *es un* $T_2 \implies$ *cualquier sucesión de puntos en* X *(a lemas) es un punto de* X*.*

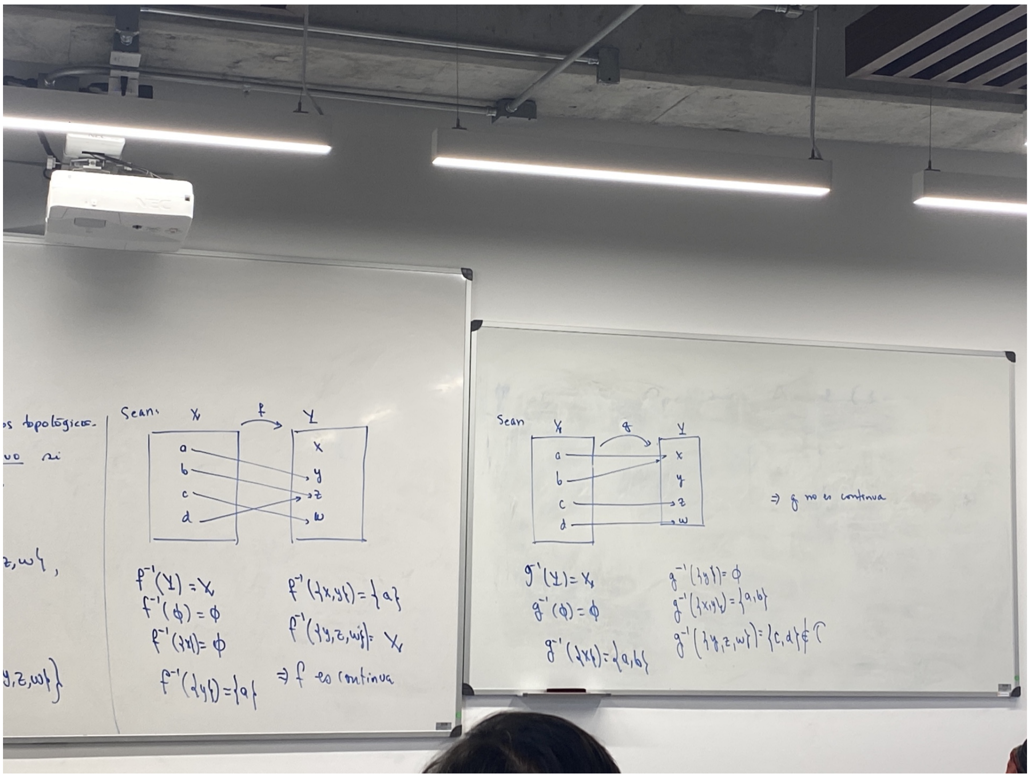
Demostración. Suponga que a y b son límites de la sucesión $(x_n) \implies$ por ser X de Hausdorf $\implies \exists u, v \in \tau \ni a \in U$ y $b \in V$ y $U \cap V = \varnothing$ como son límites $\implies \exists N_1, N_2 \in \mathbb{Z}^+ \ni n \geq N_1 \implies X_n \in U$ y $m \geq N_2 \implies X_m \in V$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\} \implies n > N \implies X_n \in U$ y $X_n \in V \implies X_n \in U \cap V \implies U \cap V \neq \varnothing (\to\leftarrow)$ ∎

Teorema 13. *Cada subconjunto límite* $A \subseteq X$ *es un* T_2 *es cerrado.*

Continuidad

Definición 16. *Sea* (X, τ) *y* (Y, τ^*) *esapacios topológicos. El mapeo* $f : X \to Y$ *es continuo si para cada* $G \in \tau^*$ *se tiene que* $f^{-1}(G) \in \tau$

Ejemplo 9. *Sean* $X = \{a, b, c, d\}$ *y* $Y = \{x, y, z, w\}$, *la topología* $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ *y* $Y = \{Y, \varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{x, z, w\}\}$



NOTA. *Sea* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ *un mapeo y suponga que* $\beta = \{B_i\}$ *es una base para* τ^*. *Sea* $G \in \tau^* \implies G = \bigcup_i B_i, B_i \in \beta$. *Entonces,* $f^{-1}(G) = g^{-1}\left(\bigcup_i B_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(B_i) \implies f^{-1}(G) \in \tau$, *si* $f^{-1}(B_i) \in \tau$.

NOTA. *Dado un mapeo* $f : X \to Y$ *y si* $A \subseteq Y \implies f^{-1}[A^c] = [f^{-1}(A)]^c$. *En efecto: Sea* $x \in f^{-1}(A^c) \iff f(x) \in A^c \iff f(x) \notin A \iff x \notin f^{-1}(A) \iff x \in [f^{-1}(A)]^c$

NOTA.

1. *Sean* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ *un mapeo continuo y sea* F *un cerrado de* $Y \implies f^{-1}(F^c) = [f^{-1}(F)]^c \in \tau \implies f^{-1}(F)$ *es cerrado en* X.
2. *Sea* G *un abierto de* $Y \implies G^c$ *es cerrado de* Y. *Si* $f^{-1}[G^c] = [f^{-1}(G)]^c$ *es cerrado, entonces* $f^{-1}(G) \in \tau \implies f$ *es continuo*

Proposición 11. *Sea $f : X \to Y$ un mapeo entre espacios topológicos. Entonces, f es un mapeo continuo ssi $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}, \forall A \subseteq X$*

> *Propiedades:*
>
> 1. $f[f^{-1}(A)] = A$
> 2. $f^{-1}[\underbrace{f(A)}_{\subseteq X}] \supset A$

Demostración. Sea

- $(\implies)$ Suponga que f es continuo y sabemos que $f(A) \subset \overline{f(A)} \implies f^{-1}[f(A)] \subset f^{-1}[\overline{f(A)}]$. Además, como $\overline{f(A)}$ es cerrado $\implies f^{-1}[\overline{f(A)}]$ es cerrado (ya que f continuo). Entonces,

$$\begin{aligned} A \subseteq \underbrace{f^{-1}[\overline{A}]}_{cerrado} &\implies A \subset \overline{A} \subset f^{-1}[\overline{f(A)}] \\ &\implies f(\overline{A}) \subset f[f^{-1}[\overline{f(A)}]] \\ &\implies f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \end{aligned}$$

- $(\impliedby)$ Supóngase que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}, \forall A \subseteq X$. Sea C un cerrado de Y. Sea $A = f^{-1}(C) \implies f[\overline{f^{-1}(C)}] \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \implies f[\overline{f^{-1}(C)}] \subseteq C \implies f^{-1}[f[\overline{f^{-1}(C)}]] \subseteq f^{-1}(C) \implies \overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(C) \implies f^{-1}(C) \subset \overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(C) \implies f^{-1}(C) = \overline{f^{-1}(C)} \implies f^{-1}(C)$ es cerrado.

■