

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

MM2034 - 2 SEMESTRE - 2022

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA APLICADA

LÓGICA

Catedrático: Paulo Mejía

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzoyay

Carné: 19857

Correo: rom19857@uvg.edu.gt

1 de febrero de 2023

Índice

1	Topología	1
1.0.1	Objeto de estudio de la topología	5
2	Bases y subbases de una topología	9

1. Topología

Definición 1. Sea $X \neq \emptyset$. Una clase τ de subconjunto de X es una topología sobre X , se cumple:

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. La unión de una clase arbitraria de conjuntos en τ es un miembro de τ .
3. La intersección de una clase finita de miembros de τ está en τ .

Los miembros de τ son los abiertos de X .

1. El par (X, τ) es un espacio topológico.
 2. A los elementos de X se les llama puntos.

estructura topológica

Ejemplo 1. 1. Sea $X \neq \emptyset \implies \tau = P(X)$ es una topología sobre X . A τ se le llama topología discreta de X , y (X, τ) es un espacio discreto.

2. Sea $X \neq \emptyset \implies \tau = \{\emptyset, X\}$ es una topología sobre X . A τ se le llama topología indiscreta, y (X, τ) es un espacio indiscreto.

3. $X = \mathbb{R}^2$ y τ es la colección de abiertos de \mathbb{R}^2 definido en términos de la métrica usual. A τ se le llama topología usual de \mathbb{R}^2 .

4. Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$.

a) Sea $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\} \implies \tau_1$ es una topología sobre X .

b) Sea $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$. Note que $\{a\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\} \notin \tau_2 \implies \tau_2$ no es topología sobre X

c) Sea X un conjunto infinito y sea τ el vacío junto con la colección de subconjunto de X cuyos complementos son finitos. τ es una topología sobre X , y se llama topología cofinita sobre X .

NOTA. Un espacio metrizable es un espacio topológico X con la propiedad que existe una métrica que genera los abiertos de la topología dada.

Problema 1. ¿Qué tipos de espacios topológicos son metrizables?

Proposición 1. Si τ_1 y τ_2 son topologías sobre X , entonces $\tau_1 \cap \tau_2$ es topología sobre X .

Demostración. 1. Como τ_1 y τ_2 son topologías, entonces: $X, \emptyset \in \tau_1$ y $X, \emptyset \in \tau_2 \implies X \in \tau_1 \cap \tau_2$ y $\emptyset \in \tau_1 \cap \tau_2$.

2. Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una subcolección de $\tau_1 \cap \tau_2 \implies G_i \in \tau_1, \forall i \in I \implies \bigcup_i G_i \in \tau_1$ y $G_i \in \tau_2, \forall i \in I \implies \bigcup_i G_i \in \tau_2$. Entonces $\bigcup_i G_i \in \tau_1 \cap \tau_2$.

3. Sea G_1 y $G_2 \in \tau_1 \cap \tau_2 \implies G_1 \in \tau_1$ y $G_1 \in \tau_2$. $G_2 \in \tau_1$ y $G_2 \in \tau_2$. Entonces $G_1 \cap G_2 \in \tau_1$ y $G_1 \cap G_2 \in \tau_2 \implies G_1 \cap G_2 \in \tau_1 \cap \tau_2$. Entonces, $\tau_1 \cap \tau_2$ es una topología sobre X .

■

NOTA. Sea $X = \{a, b, c\}$ y sean:

- $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$, $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{b\}\}$. Entonces, $\tau_1 \cup \tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$, pero $\{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$. $\therefore \tau_1 \cup \tau_2$ no es topología sobre X .

Ejemplo 2. Sea $f : X \rightarrow Y$, donde X es un conjunto no vacío y Y es el espacio topológico de (Y, τ') . Entonces $\tau = \{f^{-1}(G) : G \in \tau'\}$ es una topología sobre X . En efecto:

1. $\emptyset \implies \tau' \implies f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$. $Y \in \tau' \implies f^{-1}(Y) = X \in \tau$
2. Sea $\{G_i\}$ una subclase de τ . Como $G_i \in \tau, \forall i \implies \exists H_i \in \tau' \ni G_i = f^{-1}(H_i) \implies \bigcup_i G_i = \bigcup_i f^{-1}(H_i) = f^{-1}\left(\underbrace{\bigcup_i H_i}_{\in \tau'}\right) \in \tau$

Definición 2. Sean X y Y espacios topológicos y f un mapeo de X en Y . Se dice que f es continua si $f^{-1}(G)$ es un abierto de X para cada abierto G de Y .

Definición 3. Se dice que el mapeo es abierto si, para cada abierto G de X , se cumple que $f(G)$ es abierto de Y .

Definición 4. Si f es continuo, entonces $f(x)$ es la imagen continua de X bajo f .

Definición 5 (Homeomorfismo). Un homeomorfismo es un mapeo biyectivo y bicontinuo (continuo y abierto) entre espacios topológicos. En este caso, los espacios son homeomorfos.

NOTA. Una propiedad topológica es una propiedad que si la tiene el espacio topológico X , la tiene también cualquier espacio homeomorfo a X

NOTA. Sea A un subconjunto no vacío del espacio topológico (X, τ) . Considerese la clase:

$$\tau_A = \{A \cap G : G \in \tau \text{ es abierto de } X\}$$

Entonces, τ_A es una topología sobre A , la cual se llama topología relativa sobre A .

Definición 6. El par (A, τ_A) es un espacio topológico y se dice es un subespacio de X ,

1. $\emptyset \in \tau \implies A \cap \emptyset = \emptyset \in \tau_A$ y $X \in \tau \implies A \cap X = A \in \tau_A$.
2. Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una colección de miembros de $\tau_A \implies \exists H_i \in \tau \ni G_i = A \cap H_i, \forall i \implies \bigcup_i G_i = \bigcup_i (A \cap H_i) = A \cap \left(\underbrace{\bigcup_i H_i}_{\in \tau} \right) \in \tau_A$
3. Sean $G_1, G_2 \in \tau_A \implies \exists H_i \in \tau \ni G_i = A \cap H_i, i = 1, 2$. Entonces, $G_1 \cap G_2 = (A \cap H_1) \cap (A \cap H_2) = A \cap \underbrace{(H_1 \cap H_2)}_{\in \tau} \in \tau_A \implies \tau_A$ es topología sobre A .

Ejemplo 3. Tenemos,

1. Sea τ la topología usual de \mathbb{R} y considere la topología relativa $\tau_{\mathbb{Z}^+}$ (en este caso, $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{R}$). Nótese que $\{n_0\}$ es abierto, la unión de unitarios es abierto de $\tau_{\mathbb{Z}^+} \implies \tau_{\mathbb{Z}^+}$ es la topología discreta de \mathbb{Z}^+ .

2. Considere (\mathbb{R}, τ) , donde τ es la topología usual de \mathbb{R} y sea $I = [0, 1]$. Entonces,

a) $(1/2, 1] = [0, 1] \cap (1/2, 2) \in \tau_I$

b) $(1/2, 2/3) = [0, 1] \cap (1/2, 2/3) \in \tau_I$

c) $(0, 1/2] \notin \tau_I$, ya que no existe un abierto $G \in \tau \ni (0, 1/2] = I \cap G$.

3. Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ y sea

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

$$\tau_A = \{A, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{a, e\}\}$$

Considere $A = \{a, c, e\}$ entonces:

- $A \cap X = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap \{a\} = \{a\}$
- $A \cap \{a, b\} = \{a\}$
- $A \cap \{a, c, d\} = \{a, c\}$
- $A \cap \{a, b, c, d\} = \{a, c\}$
- $A \cap \{a, b, e\} = \{a, e\}$

1.0.1. Objeto de estudio de la topología

: Estudio de todas las propiedades topológicas de los espacios

Definición 7. Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto $A \subset X$ es cerrado si y solo si $A^c \in \tau$.

Ejemplo 4. Sea (X, τ) un espacio discreto. Sea $A \subset X \implies A \in \tau \implies A^c \subset X \implies A^c \in \tau \implies A$ es cerrado. Entonces, $A \subset X$ es abierto y cerrado en X .

NOTA. Sea (X, τ) un espacio topológico,

1. $\phi \in \tau \implies \phi^c = X$ es cerrado. $X \in \tau \implies X^c = \phi$ es cerrado.
2. Considere una familia arbitraria $\{F_i\}$ de cerrados en $\tau \implies \{F_i^c\} \subset \tau \implies \bigcup_i F_i^c \in \tau \implies (\bigcup_i F_i^c)^c = \bigcap_i F_i$ es cerrado.
3. Sean F_1 y F_2 cerrados en $\tau \implies F_1^c$ y $F_2^c \in \tau \implies F_1^c \cap F_2^c \in \tau \implies (F_1^c \cap F_2^c)^c = F_1 \cup F_2$ es cerrado.

Definición 8. Sea X un espacio topológico:

1. Una vecindad de un punto (o de un conjunto), es un abierto de X que contiene al punto (o al conjunto).
2. Sea $A \subseteq X$. Un punto x en A es aislado si existe una vecindad de x que no contiene ningún otro punto de A .
3. Sea $A \subseteq X$. Un punto $y \in X$ es un punto límite de A si, $\forall G \in \tau \ni y \in G$, se tiene que $(G - \{y\}) \cap A \neq \emptyset$.

EL conjunto de puntos límite de A se llama derivado de A , $(A', D(A))$.

4. Sea $A \subseteq X$. La cerradura de A , denotado \overline{A} , es el cerrado más pequeño que contiene a A . Es decir, si F_i son los cerrados de X que contiene a $A \implies \overline{A} = \bigcap_i F_i$.

Tenemos:

- a) $A \subseteq \overline{A}$
- b) Si A es cerrado $\implies A = \overline{A}$.

5. Un subconjunto A de X es denso (siempre denso), si $\overline{A} = X$.
6. El espacio topológico X es separable si tiene un subconjunto separable contable y denso.
7. Un punto de adherencia de $A \subseteq X$ es cualquier elemento de \overline{A} .

Proposición 2. Sea $A \subset B \implies A' \subset B'$.

Proposición 3. Sea $A \subset B$ y sea $x \in A' \implies$ si G es un abierto $\ni x \in G \implies (G - \{x\}) \cap B \supset (G - \{x\}) \cap A \neq \emptyset \implies x \in B' \implies A' \subset B'$.

Proposición 4. Derivado de la unión $(A \cup B)' = A' \cup B'$

Demostración. Por doble contención:

- (\supseteq) . A probar: $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$. Sea $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B \implies A' \subseteq (A \cup B)'$ y $B' \subseteq (A \cup B)' \implies A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$
- (\subseteq) . A probar $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B' \iff x \in (A \cup B)' \implies x \in A' \cup B' \iff$
si $x \notin A' \cup B' \implies x \notin (A \cup B)'$.
 - Suponemos que $x \notin A' \cup B' \implies x \notin A'$ y $x \notin B' \implies$ existen G, H abiertos de $X \ni x \in G$ y $x \in H$ y $(G - \{x\}) \cap A = \emptyset$ y $(H - \{x\}) \cap B = \emptyset$ ya que $x \in G$ y $x \in H \implies x \in G \cap H$. Además, $G \cap H \subseteq G$ y $G \cap H \subseteq H$. Entonces $(G \cap H - \{x\}) \cap A = \emptyset$ y $(G \cap H - \{x\}) \cap B = \emptyset$. Por lo tanto, $(G \cap H - \{x\}) \cap (A \cup B) = \emptyset$.

■

Proposición 5. $A \subseteq X$ es cerrado ssi $A' \subseteq A$.

Demostración. Sea

- (\implies)
- (\impliedby)

■

Proposición 6. Sea F un superconjunto cerrado de A , entonces $A' \subset F$.

Demostración. Como $A \subset F \implies A' \subset F'$. Como F es cerrado, $F' \subset F \implies A' \subset F$. ■

Proposición 7. $A \cup A'$ es cerrado.

Demostración. A probar: $(A \cup A')^c$ es abierto. Sea $x \in (A \cup A')^c \implies x \notin A$ y $x \notin A' \implies \exists G$ abierto $\ni G \cap A = \emptyset$.

Sea $G \cap A' = \emptyset$. Supóngase que $y \in G \cap A' \implies y \in G$ y $y \in A' \implies (G - \{y\}) \cap A \neq \emptyset (\rightarrow \leftarrow)$

Por otra parte, $G \cap A' = \emptyset$. Entonces,

$$\begin{aligned} G \cap (A \cup A') &= (G \cap A) \cup (G \cap A') \\ &= \emptyset \cup \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$\implies G \subset (A \cup A')^c \implies (A \cup A')^c$ es abierto $\implies A \cup A'$ es cerrado. ■

Proposición 8. $\overline{A} = A \cup A'$

Demostración. Sea

- A probar $\overline{A} \subset A \cup A' \implies A \subset \underbrace{A}_{\text{cerrado}} \cup A' \implies A \subset \overline{A} \subset A \cup \overline{A}$.
- A probar: $A \cup A' \subset \overline{A}$. Entonces $A \subset \overline{A}$, $A' \subset (\overline{A})' \subset \overline{A}$. Entonces $A \subset \overline{A}$ y $\overline{A} \subset \overline{A}$, entonces $A \cup A' \subset \overline{A}$. ■

Proposición 9. Si $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.

Demostración. $A \subset B \implies A' \subset B' \implies A \cup A' \subset B \cup B' \implies \overline{A} \subset \overline{B}$. ■

Proposición 10. $\overline{A \cup B} = \underbrace{\overline{A} \cup \overline{B}}_{\text{cerrado}}$

Demostración. ■ Sabemos que $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \implies A \cup B \subset \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

■ $A \subset A \cup B \implies \overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $B \subset A \cup B \implies \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Entonces $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$

■

Teorema 1. Sea

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$

2. $A \subset \overline{A}$

3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

4. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Demostración. 1. Como \emptyset es cerrado entonces $\overline{\emptyset} = \emptyset$

2. $A \subset \overline{A}$, por la cerradura.

3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, por propiedad anterior.

4. Como \overline{A} es cerrado, entonces $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

■

Definición 9. 1. Un punto P de X es interior de $A \subseteq X$, si existe un abierto $G \ni$

$$p \in G \subset A$$

2. El interior de A , denotado $\int(A)$ o A° , es el conjunto de todos los puntos interiores de A .

Definición 10. Un punto frontera de $A \subset X$ es un punto tal que, cada vecindad del punto intersecta a A y A^c .

2. Bases y subbases de una topología

Definición 11. Una base β (abierta) para el espacio topológico (X, τ) es una clase de abiertos de X tal que cada abierto en τ puede escribirse como uniones de los miembros de la clase.

Ejemplo 5. Sea (X, τ) un espacio discreto. Entonces $\beta = \{\{x\} : x \in X\}$ es una base para τ

NOTA. 1. Si cada $G \in \tau$ puede representarse como $G = \bigcup_i B_i$, donde $B_i \in \beta \implies$ para cada $x \in G \implies x \in B_{i_0}$, (miembro de la unión) para algún i_0 . $\implies x \in B_{i_0} \subseteq \bigcup_i B_i = G$

Definición 12. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una subclase S de abiertos en τ es una subbase de la topología τ , si las intersecciones finitas de miembros de S producen una base τ .

Ejemplo 6. 1. Sean $a, b \in \mathbb{R} \ni a < b$. Nótese que

$$(a, b) \subseteq \mathbb{R}$$

2. ejemplo 2

3. Sea $a = \{\{a\}\}$, entonces $\beta = \{\{a\}, X\} \implies \tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$

4. $a = \{\emptyset\} \implies \beta = \{X, \emptyset\} \implies \tau = \{X, \emptyset\}$

Ejemplo 7. Sean (a_1, b_1) y (a_2, b_2) intervalos abiertos y acotados de $\mathbb{R} \implies$

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, a_1 < x < b_1, a_2 < y < b_2 \right\} \quad (1)$$

Teorema 2. Sea X cualquier conjunto no vacío y sea S una clase arbitraria de subconjuntos de X . Entonces, S puede constituirse en la subbase para una topología abierta para una topología sobre X en el sentido que las intersecciones finitas de los miembros de S producen una base para dicha topología.

Teorema 3. Sea $X \neq \emptyset$ y sea S una clase arbitraria de subconjunto de X . Entonces, S puede servir como subbase abierta de una topología sobre X en el sentido que la clase τ de todas las uniones de intersecciones finitas en S es una topología.

Demostración. Tenemos:

1. $S = \emptyset \implies \beta = \{X\} \implies \tau = \{X, \emptyset\}$ es la topología indiscreta.
2. $S \neq \emptyset$. A probar: τ es topología.
 - a) $\emptyset, X \in \tau$
 - b) $\{G_i\}_{i \in I}$ una subclase arbitraria de τ . A probar: $\bigcup_i G_i \in \tau$. Cada G_i es unión de intersecciones finitas de miembros de S . Entonces, $\bigcup_i G_i$ es unión de uniones de intersecciones finitas de miembros de $S \implies \bigcup_i G_i \in \tau$.
 - c) Sea $G_1, G_2 \in \tau$. A probar $G_1 \cap G_2 \in \tau$. $G_1 \cap G_2$ es unión de intersecciones finitas de miembros de S .

■

Lema 4. Si S es subbase de las topologías τ y τ^* sobre $X \implies \tau = \tau^*$

Demostración. A probar: $\tau \subseteq \tau^*$. Sea $G \in \tau \implies$ Como S es subbase de $\tau \implies$

$$G = \bigcup_i (S_{i_1} \cap S_{i_2} \cdots \cap S_{i_{n_i}}), S_{i_k} \in S$$

Sabemos que S genera a $\tau^*(S \subset \tau^*) \implies S_{i_1} \cap S_{i_2} \cdots \cap S_{i_{n_i}} \in \tau^* \implies G = \bigcup_i (S_{i_1} \cap S_{i_2} \cdots \cap S_{i_{n_i}}) \in \tau^* \implies \tau \subset \tau^*$. De forma similar, se tiene que $\tau^* \subset \tau$. ■

Teorema 5. Sea X un subconjunto no vacío y sea S una clase de subconjuntos de X . La topología τ sobre X , generada por S , es la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a S .

Demostración. Sea $\tau^* = \bigcap_i \tau_i$, donde cada τ_i es una topología sobre X que contiene a S . A probar: $\tau = \tau^*$

- (\supseteq) Como S genera a $\tau \implies S \subset \tau \implies \tau^* \subset \tau$
- (\subseteq) . Sea $G \in \tau \implies G = \bigcup_i (S_{i_1} \cap S_{i_2} \cdots \cap S_{i_{n_i}}), S_{i_k} \in S$. Como $S \subseteq \tau^* \implies S_{i_k} \in \tau^* \implies G \in \tau^*$

■

¿Cuándo es útil una base para una topología?

- Simplificación en cardinalidad.

Definición 13. Un espacio topológico que tiene una base contable es un espacio segundo contable.

Teorema 6 (de Lindelof). Sea X un espacio vacío no contable. Si un abierto de G de X se puede representar como unión de una clase $\{G_i\}$ de abierto de $X \implies G$ puede representarse como unión contable de los G_i .

Demostración. 1. Sea G un abierto no vacío de $X \ni G = \bigcup_i G_i$. Como X es segundo contable, entonces X tiene una base contable $\beta \implies$ cada G_i es unión contable de los elementos de $\beta \implies G$ falla.

2. Sea $G = \bigcup_i G_i, G \in \tau, G \neq \emptyset$. Como X es segundo contable $\implies G$ es unión contable de miembros de $\beta = \{\beta_j\}$ además los G_i , por ser abiertos, son únicos de $\beta_j \implies$ como por cada $\beta_i \exists G_i \ni B_i \subseteq G_i \implies G = \bigcup_i \beta_i = \bigcup_i G_i$.

■