Universidad del Valle de Guatemala

MM2034 - 2 semestre - 2022

Licenciatura en matemática aplicada

LÓGICA

Catedrático: Paulo Mejía

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay
Carné: 19857
Correo: rom19857@uvg.edu.gt

20 de enero de 2023

Índice

1. Topología

Definición 1. *Sea $X \neq \varnothing$. Una clase τ de subconjunto de X es una topología sobre X, se cumple:*

1. $\varnothing, X \in \tau$
2. *La unión de una clase arbitraria de conjuntos en τ es un miembro de τ.*
3. *La intersección de una clase finita de miembros de τ está en τ.*

Los miembros de τ son los abiertos de X.

> 1. El par (X, τ) es un espacio topológico.
> 2. A los elementos de X se les llama puntos.
>
> ---
> estructura topológica

Ejemplo 1.

1. *Sea $X \neq \varnothing \implies \tau = P(X)$ es una topología sobre X. A τ se le llama topología discreta de X, y (X, τ) es un espacio discreto.*
2. *Sea $X \neq \varnothing \implies \tau = \{\varnothing, X\}$ es una topología sobre X. A τ se le llama topología indiscreta, y (X, τ) es un espacio indiscreto.*
3. *$X = \mathbb{R}^2$ y τ es la colección de abiertos de $\mathbb{R}^2$ definido en términos de la métrica usual. A τ se le llama topología usual de $\mathbb{R}^2$.*
4. *Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$.*
   a) *Sea $\tau_1 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\} \implies \tau_1$ es una topología sobre X.*
   b) *Sea $\tau_2 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$. Note que $\{a\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\} \notin \tau_2 \implies \tau_2$ no es topología sobre X*
   c) *Sea X un conjunto infinito y sea τ el vacío junto con la colección de subconjunto de X cuyos complementos son finitos. τ es una topología sobre X, y se llama topología cofinita sobre X.*

NOTA. *Un espacio metrizable es un espacio topológico X con la propiedad que existe una métrica que genera los abiertos de la topología dada.*
Problema 1. *¿Qué tipos de espacios topológicos son metrizables?*

Proposición 1. *Si τ_1 y τ_2 son topologías sobre X, entonces $\tau_1 \cap \tau_2$ es topología sobre X.*

Demostración.

1. Como τ_1 y τ_2 son topologías, etnonces: $X, \varnothing \in \tau_1$ y $X, \varnothing \in \tau_2 \implies X \in \tau_1 \cap \tau_2$ y $\varnothing \in \tau_1 \cap \tau_2$.

2. Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una subcolección de $\tau_1 \cap \tau_2 \implies G_i \in \tau_1, \forall i \in I \implies \bigcup_i G_i \in \tau_i$ y $G_i \in \tau_2, \forall i \in I \implies \bigcup_i G_i \in \tau_2$. Entonces $\bigcup_i G_i \in \tau_1 \cap \tau_2$

3. Sea G_1 y $G_2 \in \tau_1 \cap \tau_2 \implies G_1 \in \tau_1$ y $G_1 \in \tau_2$. $G_2 \in \tau_1$ y $G_2 \in \tau_2$. Entonces $G_1 \cap G_2 \in \tau_1$ y $G_1 \cap G_2 \in \tau_2 \implies G_1 \cap G_2 \in \tau_1 \cap \tau_2$. Entonces, $\tau_1 \cap \tau_2$ es una topología sobre X.

■

NOTA. *Sea $X = \{a, b, c\}$ y sean:*

- $\tau_1 = \{X, \varnothing, \{a\}\}$, $\tau_2 = \{X, \varnothing, \{b\}\}$. *Entonces,* $\tau_1 \cup \tau_2 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}\}$, *pero* $\{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$. $\therefore \tau_1 \cup \tau_2$ *no es topología sobre* X.

Ejemplo 2. *Sea $f : X \to Y$, donde X es un conjunto no vacío y Y es el espacio topológico de (Y, τ'). Entonces $\tau = \{f^{-1}(G) : G \in \tau'\}$ es una topología sobre X. En efecto:*

1. $\varnothing \implies \tau' \implies f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \tau$. $Y \in \tau' \implies f^{-1}(Y) = X \in \tau$

2. *Sea $\{G_i\}$ una subclase de τ. Como $G_i \in \tau, \forall \implies \exists H_i \in \tau' \ni G_i = f^{-1}(H_i) \implies \cup_i G_i = \cup_i f^{-1}(H_i) = f^{-1}(\underbrace{\bigcup_i H_i}_{\in \tau'}) \in \tau$*

Definición 2. *Sean X y Y espacios topológicos y f un mapeo de X en Y. Se dice que f es continua si $f^{-1}(G)$ es un abierto de X para cada abierto de G de Y.*

Definición 3. *Se dice que el mapeo es abierto si, para cada abierto G de X, se cumple que $f(G)$ es abierto de Y.*

Definición 4. *Si f es continuo, entonces $f(x)$ es la imagen continua de X bajo f.*

Definición 5 (Homeomorfismo)**.** *Un homeomorfismo es un mapeo biyectivo y bicontinuo (continuo y abierto) entre espacios topológicos. En este caso, los espacios son homeomorfos.*

> **NOTA.** *Una propiedad topológica es una propiedad que si la tiene el espacio topológico X, la tiene también cualquier espacio homeomorfo a X*

NOTA. *Sea A un subconjunto no vacío del espacio topológico (X, τ). Considerese la clase:*

$$\tau_A = \{A \cap G : G \in \tau \textit{es abierto de } X\}$$

Entonces, τ_A es una topologia sobre A, la cual se llama topologia relativa sobre A.

Definición 6. *El par (A, τ_A) es un espacio topologico y se dice es un subespacio de X,*

1. $\varnothing \in \tau \implies A \cap \varnothing = \varnothing \in \tau_A$ *y* $X \in \tau \implies A \cap X = A \in \tau_A$.
2. *Sea* $\{G_i\}_{i \in I}$ *una colección de miembros de* $\tau_A \implies \exists H_i \in \tau \ni G_i = A \cap H_i, \forall i \implies \bigcup_i G_i = \bigcup_i (A \cap H_i) = A \cap \left(\underbrace{\bigcup_i H_i}_{\in \tau} \right) \in \tau_A$
3. *Sean* $G_1, G_2 \in \tau_A \implies \exists H_i \in \tau \ni G_i = A \cap H_i$, $i = 1, 2$. *Entonces,* $G_1 \cap G_2 = (A \cap H_1) \cap (A \cap H_2) = A \cap (\underbrace{H_1 \cap H_2}_{\in \tau}) \in \tau_A \implies \tau_A$ *es topología sobre* A.

Ejemplo 3. *Tenemos,*

1. *Sea τ la topología usual de $\mathbb{R}$ y considere la topología relativa $\tau_{\mathbb{Z}^+}$ (en este caso, $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{R}$). Nótese que $\{n_0\}$ es abierto, la unión de unitarios es abierto de $\tau_{\mathbb{Z}^+} \implies \tau_{\mathbb{Z}^+}$ es la topología discreta de $\mathbb{Z}^+$.*

2. *Considere* $(\mathbb{R}, \tau)$, *donde* τ *es la topología usual de* $\mathbb{R}$ *y sea* $I = [0,1]$. *Entonces,*

   a) $(1/2, 1] = [0,1] \cap (1/2, 2) \in \tau_I$

   b) $(1/2, 2/3) = [0,1] \cap (1/2, 2/3) \in \tau_I$

   c) $(0, 1/2] \notin \tau_I$, *ya que no existe un abierto* $G \in \tau \ni (0, 1/2] = I \cap G$.

3. *Sea* $X = \{a, b, c, d, e\}$ *y sea*

$$\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$$

$$\boxed{\tau_A = \{A, \varnothing, \{a\}, \{a,c\}, \{a,e\}\}}$$

Considere $A = \{a, c, e\}$ *entonces:*

- $A \cap X = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap \{a\} = \{a\}$
- $A \cap \{a, b\} = \{a\}$
- $A \cap \{a, c, d\} = \{a, c\}$
- $A \cap \{a, b, c, d\} = \{a, c\}$
- $A \cap \{a, b, e\} = \{a, e\}$

1.0.1. Objeto de estudio de la topología

: Estudio de todas las propiedades topológicas de los espacios

Definición 7. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto $A \subset X$ es cerrado si y solo si $A^c \in \tau$.*

Ejemplo 4. *Sea (X, τ) un espacio discreto. Sea $A \subset X \implies A \in \tau \implies A^c \subset X \implies A^c \in \tau \implies A$ es cerrado. Entonces, $A \subset X$ es abierto y cerrado en X.*

NOTA. *Sea (X, τ) un espacio topológico,*

1. *$\phi \in \tau \implies \phi^c = X$ es cerrado. $X \in \tau \implies X^c = \phi$ es cerrado.*
2. *Considere una familia arbitraria $\{F_i\}$ de cerrados en $\tau \implies \{F_i^c\} \subset \tau \implies \bigcup_i F_i^c \in \tau \implies (\bigcup_i F_i^c)^c = \bigcap_i F_i$ es cerrado.*
3. *Sean F_1 y F_2 cerrados en $\tau \implies F_1^c$ y $F_2^c \in \tau \implies F_1^c \cap F_2^c \in \tau \implies (F_1^c \cap F_2^c)^c = F_1 \cup F_2$ es cerrado.*

Definición 8. *Sea X un espacio topológico:*

1. *Una vecindad de un punto (o de un conjunto), es un abierto de X que contiene al punto (o al conjunto).*

2. *Sea $A \subseteq X$. Un punto x en A es aislado si existe una vecindad de x que no contiene ningún otro punto de A.*

3. *Sea $A \subseteq X$. Un punto de $y \in X$ es un punto límite de A si, $\forall G \in \tau \ni y \in G$, se tiene que $(G - \{y\}) \cap A \neq \varnothing$.*

   EL conjunto de puntos límite de A se llama derivado de A, $(A', D(A))$.

4. *Sea $A \subseteq X$. La cerradura de A, denotado $\overline{A}$, es el cerrado más pequeño que contiene a A. Es decir, si F_i son los cerrados de X que contiene a $A \implies \overline{A} = \bigcap_i F_i$.*

   Tenemos:

   a) *$A \subseteq \overline{A}$*

   b) *Si A es cerrado $\implies A = \overline{A}$.*

5. *Un subconjunto A de X es denso (siempre denso), si $\overline{A} = X$.*

6. *El espacio topológico X es separable si tiene un subconjunto separable contable y denso.*

7. *Un punto de adherencia de $A \subseteq X$ es cualquier elemento de $\overline{A}$.*

Proposición 2. *Sea $A \subset B \implies A' \subset B'$.*

Proposición 3. *Sea $A \subset B$ y sea $x \in A' \implies$ si G es un abierto $\ni x \in G \implies (G - \{x\}) \cap B \supset (G - \{x\}) \cap A \neq \varnothing \implies x \in B' \implies A' \subset B'$.*

Proposición 4. *Derivado de la unión $(A \cup B)' = A' \cup B'$*

Demostración. Por doble contención:

- ($\supseteq$). A probar: $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$. Sea $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B \implies A' \subseteq (A \cup B)'$ y $B' \subseteq (A \cup B)' \implies A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$
- ($\subseteq$). A probar $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B' \iff x \in (A \cup B)' \implies x \in A' \cup B' \iff$ si $x \notin A' \cup B' \implies x \notin (A \cup B)'$.
  - Suponemos que $x \notin A' \cup B' \implies x \notin A'$ y $x \notin B' \implies$ existen G, H abiertos de $X \ni x \in G$ y $x \in H$ y $(G - \{x\}) \cap A = \varnothing$ y $(H - \{x\}) \cap B = \varnothing$ ya que $x \in G$ y $x \in H \implies x \in G \cap H$. Además, $G \cap H \subseteq G$ y $G \cap H \subseteq H$. Entonces $(G \cap H - \{x\}) \cap A = \varnothing$ y $(G \cap H - \{x\}) \cap B = \varnothing$. Por lo tanto, $(G \cap H - \{x\}) \cap (A \cup B) = \varnothing$.

■

Proposición 5. *$A \subseteq X$ es cerrado ssi $A' \subseteq A$.*

Demostración. Sea

- ($\implies$)
- ($\impliedby$)

■

Proposición 6. *Sea F un superconjunto cerrado de A, entonces $A' \subset F$.*

Demostración. Como $A \subset F \implies A' \subset F'$. Como F es cerrado, $F' \subset F \implies A' \subset F$. ■

Proposición 7. *$A \cup A'$ es cerrado.*