

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

1 SEMESTRE - 2023

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA APLICADA

Topología

Catedrático: Dorval Carías

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzoyay

Carné: 19857

Correo: rom19857@uvg.edu.gt

22 de marzo de 2023

Índice

1	Topología	1
1.0.1	Objeto de estudio de la topología	5
2	Bases y subbases de una topología	9
2.1	Compactos	27

1. Topología

Definición 1. Sea $X \neq \emptyset$. Una clase τ de subconjunto de X es una topología sobre X , se cumple:

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. La unión de una clase arbitraria de conjuntos en τ es un miembro de τ .
3. La intersección de una clase finita de miembros de τ está en τ .

Los miembros de τ son los abiertos de X .

1. El par (X, τ) es un espacio topológico.
 2. A los elementos de X se les llama puntos.
-
- estructura topológica

Ejemplo 1. 1. Sea $X \neq \emptyset \implies \tau = P(X)$ es una topología sobre X . A τ se le llama topología discreta de X , y (X, τ) es un espacio discreto.

2. Sea $X \neq \emptyset \implies \tau = \{\emptyset, X\}$ es una topología sobre X . A τ se le llama topología indiscreta, y (X, τ) es un espacio indiscreto.

3. $X = \mathbb{R}^2$ y τ es la colección de abiertos de \mathbb{R}^2 definido en términos de la métrica usual. A τ se le llama topología usual de \mathbb{R}^2 .

4. Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$.

a) Sea $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\} \implies \tau_1$ es una topología sobre X .

b) Sea $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$. Note que $\{a\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\} \notin \tau_2 \implies \tau_2$ no es topología sobre X

c) Sea X un conjunto infinito y sea τ el vacío junto con la colección de subconjunto de X cuyos complementos son finitos. τ es una topología sobre X , y se llama topología cofinita sobre X .

NOTA. Un espacio metrizable es un espacio topológico X con la propiedad que existe una métrica que genera los abiertos de la topología dada.

Problema 1. ¿Qué tipos de espacios topológicos son metrizables?

Proposición 1. Si τ_1 y τ_2 son topologías sobre X , entonces $\tau_1 \cap \tau_2$ es topología sobre X .

Demostración. 1. Como τ_1 y τ_2 son topologías, entonces: $X, \emptyset \in \tau_1$ y $X, \emptyset \in \tau_2 \implies X \in \tau_1 \cap \tau_2$ y $\emptyset \in \tau_1 \cap \tau_2$.

2. Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una subcolección de $\tau_1 \cap \tau_2 \implies G_i \in \tau_1, \forall i \in I \implies \bigcup_i G_i \in \tau_1$ y $G_i \in \tau_2, \forall i \in I \implies \bigcup_i G_i \in \tau_2$. Entonces $\bigcup_i G_i \in \tau_1 \cap \tau_2$.

3. Sea G_1 y $G_2 \in \tau_1 \cap \tau_2 \implies G_1 \in \tau_1$ y $G_1 \in \tau_2$. $G_2 \in \tau_1$ y $G_2 \in \tau_2$. Entonces $G_1 \cap G_2 \in \tau_1$ y $G_1 \cap G_2 \in \tau_2 \implies G_1 \cap G_2 \in \tau_1 \cap \tau_2$. Entonces, $\tau_1 \cap \tau_2$ es una topología sobre X .

■

NOTA. Sea $X = \{a, b, c\}$ y sean:

- $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$, $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{b\}\}$. Entonces, $\tau_1 \cup \tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$, pero $\{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$. $\therefore \tau_1 \cup \tau_2$ no es topología sobre X .

Ejemplo 2. Sea $f : X \rightarrow Y$, donde X es un conjunto no vacío y Y es el espacio topológico de (Y, τ') . Entonces $\tau = \{f^{-1}(G) : G \in \tau'\}$ es una topología sobre X . En efecto:

1. $\emptyset \implies \tau' \implies f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$. $Y \in \tau' \implies f^{-1}(Y) = X \in \tau$
2. Sea $\{G_i\}$ una subclase de τ . Como $G_i \in \tau, \forall i \implies \exists H_i \in \tau' \ni G_i = f^{-1}(H_i) \implies \bigcup_i G_i = \bigcup_i f^{-1}(H_i) = f^{-1}\left(\underbrace{\bigcup_i H_i}_{\in \tau'}\right) \in \tau$

Definición 2. Sean X y Y espacios topológicos y f un mapeo de X en Y . Se dice que f es continua si $f^{-1}(G)$ es un abierto de X para cada abierto G de Y .

Definición 3. Se dice que el mapeo es abierto si, para cada abierto G de X , se cumple que $f(G)$ es abierto de Y .

Definición 4. Si f es continuo, entonces $f(x)$ es la imagen continua de X bajo f .

Definición 5 (Homeomorfismo). Un homeomorfismo es un mapeo biyectivo y bicontinuo (continuo y abierto) entre espacios topológicos. En este caso, los espacios son homeomorfos.

NOTA. Una propiedad topológica es una propiedad que si la tiene el espacio topológico X , la tiene también cualquier espacio homeomorfo a X

NOTA. Sea A un subconjunto no vacío del espacio topológico (X, τ) . Considerese la clase:

$$\tau_A = \{A \cap G : G \in \tau \text{ es abierto de } X\}$$

Entonces, τ_A es una topología sobre A , la cual se llama topología relativa sobre A .

Definición 6. El par (A, τ_A) es un espacio topológico y se dice es un subespacio de X ,

1. $\emptyset \in \tau \implies A \cap \emptyset = \emptyset \in \tau_A$ y $X \in \tau \implies A \cap X = A \in \tau_A$.
2. Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una colección de miembros de $\tau_A \implies \exists H_i \in \tau \ni G_i = A \cap H_i, \forall i \implies \bigcup_i G_i = \bigcup_i (A \cap H_i) = A \cap \left(\underbrace{\bigcup_i H_i}_{\in \tau} \right) \in \tau_A$
3. Sean $G_1, G_2 \in \tau_A \implies \exists H_i \in \tau \ni G_i = A \cap H_i, i = 1, 2$. Entonces, $G_1 \cap G_2 = (A \cap H_1) \cap (A \cap H_2) = A \cap \underbrace{(H_1 \cap H_2)}_{\in \tau} \in \tau_A \implies \tau_A$ es topología sobre A .

Ejemplo 3. Tenemos,

1. Sea τ la topología usual de \mathbb{R} y considere la topología relativa $\tau_{\mathbb{Z}^+}$ (en este caso, $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{R}$). Nótese que $\{n_0\}$ es abierto, la unión de unitarios es abierto de $\tau_{\mathbb{Z}^+} \implies \tau_{\mathbb{Z}^+}$ es la topología discreta de \mathbb{Z}^+ .

2. Considere (\mathbb{R}, τ) , donde τ es la topología usual de \mathbb{R} y sea $I = [0, 1]$. Entonces,

a) $(1/2, 1] = [0, 1] \cap (1/2, 2) \in \tau_I$

b) $(1/2, 2/3) = [0, 1] \cap (1/2, 2/3) \in \tau_I$

c) $(0, 1/2] \notin \tau_I$, ya que no existe un abierto $G \in \tau \ni (0, 1/2] = I \cap G$.

3. Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ y sea

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

$$\tau_A = \{A, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{a, e\}\}$$

Considere $A = \{a, c, e\}$ entonces:

- $A \cap X = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap \{a\} = \{a\}$
- $A \cap \{a, b\} = \{a\}$
- $A \cap \{a, c, d\} = \{a, c\}$
- $A \cap \{a, b, c, d\} = \{a, c\}$
- $A \cap \{a, b, e\} = \{a, e\}$

1.0.1. Objeto de estudio de la topología

: Estudio de todas las propiedades topológicas de los espacios

Definición 7. Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto $A \subset X$ es cerrado si y solo si $A^c \in \tau$.

Ejemplo 4. Sea (X, τ) un espacio discreto. Sea $A \subset X \implies A \in \tau \implies A^c \subset X \implies A^c \in \tau \implies A$ es cerrado. Entonces, $A \subset X$ es abierto y cerrado en X .

NOTA. Sea (X, τ) un espacio topológico,

1. $\phi \in \tau \implies \phi^c = X$ es cerrado. $X \in \tau \implies X^c = \phi$ es cerrado.
2. Considere una familia arbitraria $\{F_i\}$ de cerrados en $\tau \implies \{F_i^c\} \subset \tau \implies \bigcup_i F_i^c \in \tau \implies (\bigcup_i F_i^c)^c = \bigcap_i F_i$ es cerrado.
3. Sean F_1 y F_2 cerrados en $\tau \implies F_1^c$ y $F_2^c \in \tau \implies F_1^c \cap F_2^c \in \tau \implies (F_1^c \cap F_2^c)^c = F_1 \cup F_2$ es cerrado.

Definición 8. Sea X un espacio topológico:

1. Una vecindad de un punto (o de un conjunto), es un abierto de X que contiene al punto (o al conjunto).
2. Sea $A \subseteq X$. Un punto x en A es aislado si existe una vecindad de x que no contiene ningún otro punto de A .
3. Sea $A \subseteq X$. Un punto de $y \in X$ es un punto límite de A si, $\forall G \in \tau \ni y \in G$, se tiene que $(G - \{y\}) \cap A \neq \emptyset$.

EL conjunto de puntos límite de A se llama derivado de A , $(A', D(A))$.

4. Sea $A \subseteq X$. La cerradura de A , denotado \overline{A} , es el cerrado más pequeño que contiene a A . Es decir, si F_i son los cerrados de X que contiene a $A \implies \overline{A} = \bigcap_i F_i$.

Tenemos:

- a) $A \subseteq \overline{A}$
- b) Si A es cerrado $\implies A = \overline{A}$.

5. Un subconjunto A de X es denso (siempre denso), si $\overline{A} = X$.
6. El espacio topológico X es separable si tiene un subconjunto separable contable y denso.
7. Un punto de adherencia de $A \subseteq X$ es cualquier elemento de \overline{A} .

Proposición 2. Sea $A \subset B \implies A' \subset B'$.

Proposición 3. Sea $A \subset B$ y sea $x \in A' \implies$ si G es un abierto $\ni x \in G \implies (G - \{x\}) \cap B \supset (G - \{x\}) \cap A \neq \emptyset \implies x \in B' \implies A' \subset B'$.

Proposición 4. Derivado de la unión $(A \cup B)' = A' \cup B'$

Demostración. Por doble contención:

- (\supseteq) . A probar: $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$. Sea $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B \implies A' \subseteq (A \cup B)'$ y $B' \subseteq (A \cup B)' \implies A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$
- (\subseteq) . A probar $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B' \iff x \in (A \cup B)' \implies x \in A' \cup B' \iff$
si $x \notin A' \cup B' \implies x \notin (A \cup B)'$.
 - Suponemos que $x \notin A' \cup B' \implies x \notin A'$ y $x \notin B' \implies$ existen G, H abiertos de $X \ni x \in G$ y $x \in H$ y $(G - \{x\}) \cap A = \emptyset$ y $(H - \{x\}) \cap B = \emptyset$ ya que $x \in G$ y $x \in H \implies x \in G \cap H$. Además, $G \cap H \subseteq G$ y $G \cap H \subseteq H$. Entonces $(G \cap H - \{x\}) \cap A = \emptyset$ y $(G \cap H - \{x\}) \cap B = \emptyset$. Por lo tanto, $(G \cap H - \{x\}) \cap (A \cup B) = \emptyset$.

■

Proposición 5. $A \subseteq X$ es cerrado ssi $A' \subseteq A$.

Demostración. Sea

- (\implies)
- (\impliedby)

■

Proposición 6. Sea F un superconjunto cerrado de A , entonces $A' \subset F$.

Demostración. Como $A \subset F \implies A' \subset F'$. Como F es cerrado, $F' \subset F \implies A' \subset F$. ■

Proposición 7. $A \cup A'$ es cerrado.

Demostración. A probar: $(A \cup A')^c$ es abierto. Sea $x \in (A \cup A')^c \implies x \notin A$ y $x \notin A' \implies \exists G$ abierto $\ni G \cap A = \emptyset$.

Sea $G \cap A' = \emptyset$. Supóngase que $y \in G \cap A' \implies y \in G$ y $y \in A' \implies (G - \{y\}) \cap A \neq \emptyset (\rightarrow \leftarrow)$

Por otra parte, $G \cap A' = \emptyset$. Entonces,

$$\begin{aligned} G \cap (A \cup A') &= (G \cap A) \cup (G \cap A') \\ &= \emptyset \cup \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$\implies G \subset (A \cup A')^c \implies (A \cup A')^c$ es abierto $\implies A \cup A'$ es cerrado. ■

Proposición 8. $\overline{A} = A \cup A'$

Demostración. Sea

- A probar $\overline{A} \subset A \cup A' \implies A \subset \underbrace{A}_{\text{cerrado}} \cup A' \implies A \subset \overline{A} \subset A \cup \overline{A}$.
- A probar: $A \cup A' \subset \overline{A}$. Entonces $A \subset \overline{A}$, $A' \subset (\overline{A})' \subset \overline{A}$. Entonces $A \subset \overline{A}$ y $\overline{A} \subset \overline{A}$, entonces $A \cup A' \subset \overline{A}$. ■

Proposición 9. Si $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.

Demostración. $A \subset B \implies A' \subset B' \implies A \cup A' \subset B \cup B' \implies \overline{A} \subset \overline{B}$. ■

Proposición 10. $\overline{A \cup B} = \underbrace{\overline{A} \cup \overline{B}}_{\text{cerrado}}$

Demostración. ■ Sabemos que $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \implies A \cup B \subset \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

■ $A \subset A \cup B \implies \overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $B \subset A \cup B \implies \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Entonces $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$

■

Teorema 1. Sea

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$
2. $A \subset \overline{A}$
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
4. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Demostración. 1. Como \emptyset es cerrado entonces $\overline{\emptyset} = \emptyset$

2. $A \subset \overline{A}$, por la cerradura.

3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, por propiedad anterior.

4. Como \overline{A} es cerrado, entonces $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

■

Definición 9. 1. Un punto P de X es interior de $A \subseteq X$, si existe un abierto $G \ni$

$$p \in G \subset A$$

2. El interior de A , denotado $\mathcal{I}(A)$ o A° , es el conjunto de todos los puntos interiores de A .

Definición 10. Un punto frontera de $A \subset X$ es un punto tal que, cada vecindad del punto intersecta a A y A^c .

2. Bases y subbases de una topología

Definición 11. Una base β (abierta) para el espacio topológico (X, τ) es una clase de abiertos de X tal que cada abierto en τ puede escribirse como uniones de los miembros de la clase.

Ejemplo 5. Sea (X, τ) un espacio discreto. Entonces $\beta = \{\{x\} : x \in X\}$ es una base para τ

NOTA. 1. Si cada $G \in \tau$ puede representarse como $G = \bigcup_i B_i$, donde $B_i \in \beta \implies$ para cada $x \in G \implies x \in B_{i_0}$, (miembro de la unión) para algún i_0 . $\implies x \in B_{i_0} \subseteq \bigcup_i B_i = G$

Definición 12. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una subclase S de abiertos en τ es una subbase de la topología τ , si las intersecciones finitas de miembros de S producen una base τ .

Ejemplo 6. 1. Sean $a, b \in \mathbb{R} \ni a < b$. Nótese que

$$(a, b) \subseteq \mathbb{R}$$

2. ejemplo 2

3. Sea $a = \{\{a\}\}$, entonces $\beta = \{\{a\}, X\} \implies \tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$

4. $a = \{\emptyset\} \implies \beta = \{X, \emptyset\} \implies \tau = \{X, \emptyset\}$

Teorema 2. Los enunciados siguientes son equivalentes:

1. Una familia β de subconjuntos abiertos del espacio topológico (X, τ) es una base para τ , si cada abierto de τ es unión de miembros de β .

2. $\beta \subset \tau$ es una base para τ ssi $\forall G \in \tau, \forall p \in G \exists B_p \in \beta \ni p \in B_p \subset G$.

Demostración. ■ (i) \rightarrow (ii) Sea $G \in \tau$ y sea $p \in G$. Como $G \in \tau$ y β es base de $\tau \implies G = \bigcup_i B_i, B_i \in \beta$. Como $p \in G \implies p \in \bigcup_i B_i \implies \exists i_p \ni p \in B_{i_p} \implies$ dado $p \in G \exists B_{i_p} \in \beta \ni p \in B_{i_p} \subset G$.

- (ii) \rightarrow (i) Sea $G \in \tau \implies$ Para cada $x \in G \exists B_x = \beta \ni x \in B_x \subset G \implies \bigcup_{x \in G} B_x = G \implies$ es union de miembros de β .

■

Teorema 3. Sea β una familia de subconjuntos de un conjunto no vacío X . Entonces, β es una base para una topología τ sobre X ssi se cumplen:

1. $X = \bigcup_{B \in \beta} B$
2. $\forall B, B^* \in \beta$ se tiene que $B \cap B^*$ la union de miembros de β ($\iff p \in B \cap B^* \exists B_p \in \beta \ni p \in B_p \subset B \cap B^*$)

Demostración. ■ (\rightarrow) Sea β la base de una topología τ sobre X . Sabemos que X es abierto $\implies X = \bigcup_{B \in \beta} B$, donde esta union se toma sobre todos los miembros de β . Como β es base para $\tau \implies B \cap B^*$ puede escribirse como union de miembros de β .

- (\leftarrow) Sea τ la colección de las uniones de miembros de la familia de subconjuntos de X . A probar: τ es topología.

1. Por (i) $X \in \tau$. Además, la union de la clase vacía de β es $\emptyset \implies \emptyset \in \tau$.
2. Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de miembros de τ . Entonces, $G_i = \bigcup_{B \in \beta} B_{G_i}$ (donde cada G_i es union de miembros de β) $\implies \bigcup_i G_i$ es union de uniones de miembros de $\beta \implies \bigcup_i G_i \in \tau$.
3. Sean $G_1, G_2 \in \tau \implies G_1 = \bigcup \{B_i : i \in I\}$ y $G_2 = \bigcup \{B_j : j \in J\}$. Entonces, $G_1 \cap G_2 = (\bigcup_i B_i) \cap (\bigcup_j B_j) = \bigcup_{i=j} (B_i \cap B_j) \implies G_1 \cap G_2 \in \tau \implies \tau$ es una topología sobre X .

■

Ejemplo 7. Sean (a_1, b_1) y (a_2, b_2) intervalos abiertos y acotados de $\mathbb{R} \implies$

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, a_1 < x < b_1, a_2 < y < b_2 \} \quad (1)$$

Teorema 4. Sea X cualquier conjunto no vacío y sea S una clase arbitraria de subconjuntos de X . Entonces, S puede constituirse en la subbase para una topología abierta para una topología sobre X en el sentido que las intersecciones finitas de los miembros de S producen una base para dicha topología.

Teorema 5. Sea $X \neq \emptyset$ y sea S una clase arbitraria de subconjunto de X . Entonces, S puede servir como subbase abierta de una topología sobre X en el sentido que la clase τ de todas las uniones de intersecciones finitas en S es una topología.

Demostración. Tenemos:

1. $S = \emptyset \implies \beta = \{X\} \implies \tau = \{X, \emptyset\}$ es la topología indiscreta.

2. $S \neq \emptyset$. A probar: τ es topología.

a) $\emptyset, X \in \tau$

b) $\{G_i\}_{i \in I}$ una subclase arbitraria de τ . A probar: $\bigcup_i G_i \in \tau$. Cada G_i es unión de intersecciones finitas de miembros de S . Entonces, $\bigcup_i G_i$ es unión de uniones de intersecciones finitas de miembros de $S \implies \bigcup_i G_i \in \tau$.

c) Sea $G_1, G_2 \in \tau$. A probar $G_1 \cap G_2 \in \tau$. $G_1 \cap G_2$ es unión de intersecciones finitas de miembros de S .

■

Lema 6. Si S es subbase de las topologías τ y τ^* sobre $X \implies \tau = \tau^*$

Demostración. A probar: $\tau \subseteq \tau^*$. Sea $G \in \tau \implies$ Como S es subbase de $\tau \implies$

$$G = \bigcup_i (S_{i_1} \cap S_{i_2} \cdots \cap S_{i_{n_i}}), S_{i_k} \in S$$

Sabemos que S genera a $\tau^*(S \subset \tau^*) \implies S_{i_1} \cap S_{i_2} \cdots \cap S_{i_{n_i}} \in \tau^* \implies G = \bigcup_i (S_{i_1} \cap S_{i_2} \cdots \cap S_{i_{n_i}}) \in \tau^* \implies \tau \subset \tau^*$. De forma similar, se tiene que $\tau^* \subset \tau$.

■

Teorema 7. Sea X un subconjunto no vacío y sea S una clase de subconjuntos de X . La topología τ sobre X , generada por S , es la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a S .

Demostración. Sea $\tau^* = \bigcap_i \tau_i$, donde cada τ_i es una topología sobre X que contiene a S . A probar: $\tau = \tau^*$

- (\supseteq) Como S genera a $\tau \implies S \subset \tau \implies \tau^* \subset \tau$
- (\subseteq). Sea $G \in \tau \implies G = \bigcup_i (S_{i_1} \cap S_{i_2} \cdots \cap S_{i_{n_i}}), S_{i_k} \in S$. Como $S \subseteq \tau^* \implies S_{i_k} \in \tau^* \implies G \in \tau^*$

■

¿Cuándo es útil una base para una topología?

- Simplificación en cardinalidad.

Definición 13. Un espacio topológico que tiene una base contable es un espacio segundo contable.

Teorema 8 (de Lindelof). Sea X un espacio vacío no contable. Si un abierto de G de X se puede representar como unión de una clase $\{G_i\}$ de abierto de $X \implies G$ puede representarse como unión contable de los G_i .

Demostración. 1. Sea G un abierto no vacío de $X \ni G = \bigcup_i G_i$. Como X es segundo contable, entonces X tiene una base contable $\beta \implies$ cada G_i es unión contable de los elementos de $\beta \implies G$ falla.

2. Sea $G = \bigcup_i G_i, G \in \tau, G \neq \emptyset$. Como X es segundo contable $\implies G$ es unión contable de miembros de $\beta = \{\beta_j\}$ además los G_i , por ser abiertos, son únicos de $\beta_j \implies$ como por cada $\beta_i \exists G_i^* \ni B_i \subseteq G_i^* \implies G = \bigcup_i \beta_i = \bigcup_i G_i^* \subseteq$.

■

Definición 14. Un espacio topológico es un espacio de Hausdorff (T_2) si dados $x, y \in X, x \neq y, \exists u, v \in \tau \ni x \in U, y \in V$ y $u \cap v = \emptyset$

Ejemplo 8. Sea $X = \{a, b\}$ con topología discreta $\implies X$ es T_2 . Ahora con la topología $\tau_m = \{x, \emptyset, \{a\}\}$ no T_2 .

Teorema 9. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $x, y \in X, x \neq y \implies$ sea $\delta = d(x, y) \implies u = \beta_{\delta/2}(x)$ y $v = \beta_{\delta/2}(y) \implies x \in u$ y $y \in v$ y $u \cap v = \emptyset$. Por lo tanto, es de Hausdorff.

Teorema 10. Composición de mapeos continuos es un mapeo continuo. Sean $(X, \tau), (Y, \tau^*), (Z, \tau^{**})$ espacio topológicos y sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ mapeos continuos. A probar $g \circ f : X \rightarrow Z$. Sea $G \in \tau^{**} \implies g^{-1}(G) \in \tau^* \implies f^{-1}[g^{-1}(G)] \in \tau = (g \circ f)^{-1}(G) \in \tau$.

Teorema 11. Sea $\{\tau_i\}$ sobre X , si $f : X \rightarrow Y$ continua, $\forall \tau_i \implies f$ es continuo con respecto a $\bigcap_i \tau_i$.

Definición 15. Sea (x_n) una sucesión en un espacio topológico X , se dice que (x_n) converge a un punto $y \in X$ si $\forall u \in \tau \ni y \in U, \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni n \geq N \implies x_n \in U$

Teorema 12. Si X es un $T_2 \implies$ cualquier sucesión de puntos en X (a menos) es un punto de X .

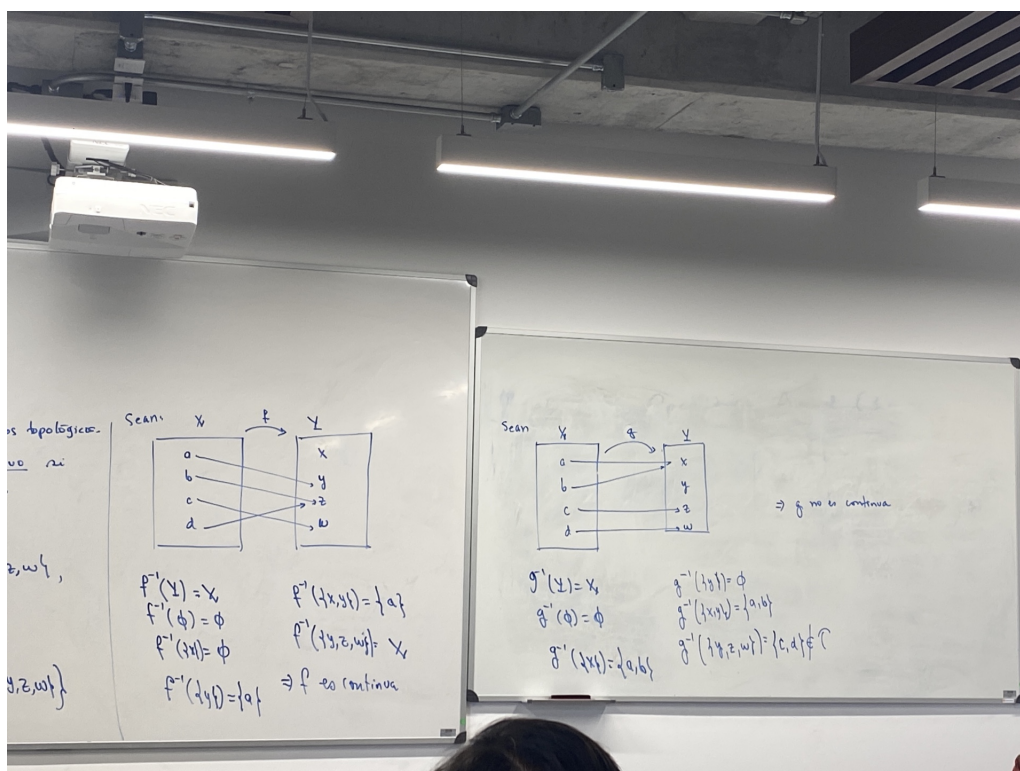
Demostración. Suponga que a y b son límites de la sucesión $(x_n) \implies$ por ser X de Hausdorff $\implies \exists u, v \in \tau \ni a \in U$ y $b \in V$ y $U \cap V = \emptyset$ como son límites $\implies \exists N_1, N_2 \in \mathbb{Z}^+ \ni n \geq N_1 \implies x_n \in U$ y $m \geq N_2 \implies x_m \in V$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\} \implies n > N \implies x_n \in U$ y $x_n \in V \implies x_n \in U \cap V \implies U \cap V \neq \emptyset (\rightarrow \leftarrow)$ ■

Teorema 13. Cada subconjunto límite $A \subseteq X$ es un T_2 es cerrado.

Continuidad

Definición 16. Sea (X, τ) y (Y, τ^*) espacios topológicos. El mapeo $f : X \rightarrow Y$ es continuo si para cada $G \in \tau^*$ se tiene que $f^{-1}(G) \in \tau$

Ejemplo 9. Sean $X = \{a, b, c, d\}$ y $Y = \{x, y, z, w\}$, la topología $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ y $Y = \{Y, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{x, z, w\}\}$



NOTA. Sea $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau^*)$ un mapeo y suponga que $\beta = \{B_i\}$ es una base para τ^* . Sea $G \in \tau^* \implies G = \bigcup_i B_i, B_i \in \beta$. Entonces, $f^{-1}(G) = g^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i) \implies f^{-1}(G) \in \tau$, si $f^{-1}(B_i) \in \tau$.

NOTA. Dado un mapeo $f : X \rightarrow Y$ y si $A \subseteq Y \implies f^{-1}[A^c] = [f^{-1}(A)]^c$. En efecto: Sea $x \in f^{-1}(A^c) \iff f(x) \in A^c \iff f(x) \notin A \iff x \notin f^{-1}(A) \iff x \in [f^{-1}(A)]^c$

NOTA. 1. Sean $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau^*)$ un mapeo continuo y sea F un cerrado de $Y \implies f^{-1}(F^c) = [f^{-1}(F)]^c \in \tau \implies f^{-1}(F)$ es cerrado en X .

2. Sea G un abierto de $Y \implies G^c$ es cerrado de Y . Si $f^{-1}[G^c] = [f^{-1}(G)]^c$ es cerrado, entonces $f^{-1}(G) \in \tau \implies f$ es continuo

Proposición 11. Sea $f : X \rightarrow Y$ un mapeo entre espacios topológicos. Entonces, f es un mapeo continuo ssi $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}, \forall A \subseteq X$

Propiedades:

1. $f[f^{-1}(A)] = A$
2. $f^{-1}[\underbrace{f(A)}_{\subseteq X}] \supset A$

Demostración. Sea

- (\implies) Suponga que f es continuo y sabemos que $f(A) \subset \overline{f(A)} \implies f^{-1}[f(A)] \subset f^{-1}[\overline{f(A)}]$. Además, como $\overline{f(A)}$ es cerrado $\implies f^{-1}[\overline{f(A)}]$ es cerrado (ya que f continuo). Entonces,

$$\begin{aligned} A \subseteq \underbrace{f^{-1}[\overline{A}]}_{\text{cerrado}} &\implies A \subset \overline{A} \subset f^{-1}[\overline{f(A)}] \\ &\implies f(\overline{A}) \subset f[f^{-1}[\overline{f(A)}]] \\ &\implies f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \end{aligned}$$

- (\impliedby) Supóngase que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}, \forall A \subseteq X$. Sea C un cerrado de Y . Sea $A = f^{-1}(C) \implies f[f^{-1}(C)] \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \implies f[f^{-1}(C)] \subseteq C \implies f^{-1}[f[f^{-1}(C)]] \subseteq f^{-1}(C) \implies \overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(C) \implies f^{-1}(C) \subset \overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(C) \implies f^{-1}(C) = \overline{f^{-1}(C)} \implies f^{-1}(C)$ es cerrado.

■

Proposición 12. Sea $\{\tau_i\}$ una colección de topologías sobre X . Si $f : X \rightarrow Y$ es continuo con respecto a cada $\tau_i \implies f$ es continuo con respecto a $\tau = \bigcap_i \tau_i \implies f$ es continuo respecto a $\tau = \bigcap_i \tau_i$.

Demostración. Sea G un abierto de $Y \implies f^{-1}(G) \in \tau_i$ para cada i . Entonces, $f^{-1}(G) \in \bigcap_i \tau_i = \tau \implies f$ es continua con respecto a τ . ■

Proposición 13. Sea $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau)$ un mapeo continuo, si $A \subset X \implies f|_A : (A, \tau_A) \rightarrow (Y, \tau')$ es continua.

Demostración. Como f es continua \implies si $G \in \tau' \implies f^{-1}(G) \in \tau \implies A \cap f^{-1}(G) \in \tau_A \implies f|_A$ es continua (respecto a τ_A). ■

Ejemplo 10. No se tomo bien la foto :(

Ejemplo 11. Sea $f : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau')$ tal que $\tau' = \{Y, \emptyset\}$. Entonces, $f^{-1}(Y) = X$ y $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau \implies f$ es continua, independientemente de τ .

Ejemplo 12. Sea $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$, tal que: $\tau = P(X) \implies$ si $G \in \tau' \implies f^{-1}(G) \in P(X) \implies f$ es continua (para cada topología τ').

Ejemplo 13. Considere el mapeo identidad

$$i : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau')$$

$$\implies \text{si } G \in \tau' \implies f^{-1}(G) = G \in \tau.$$

Continuidad local $\tau' \subset \tau$.

Definición 17. Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$ un subconjunto $U \subseteq X$ es vecindad de x , si $\exists V \in \tau \ni x \in V \subset U$ (es decir, x es un punto interior de U .)

Definición 18. Lqa colección de todas las vecindades de un punto $x \in X$ se llama sistema de vecindades de x . Notación: N_x .

Proposición 14. N_x es cerrado bajo intersecciones y extensiones. Es decir:

1. Si $u, w \in N_x \implies u \cap w \in N_x$.
2. Si $u \in N_x$ y $u \subseteq w \implies w \in N_x$.

Demostración. Sea

1. Si $u \in N_x \implies \exists$ abierto $G \ni x \in G \subset u$. Si $w \in N_x \implies \exists$ abierto $H \ni x \in H \subset w \implies x \in G \cap H \subseteq u \cap w \implies u \cap w \in N_x$.
2. Si $u \in N_x \implies \exists$ abierto $G \ni x \in G \subset u \subseteq w \implies w \in N_x$

■

Proposición 15. Sea A un subconjunto del espacio topológico $(X, \tau) \ni \forall x \in A \exists G \in \tau \ni x \in G \subset A$. Entonces, A es abierto en τ .

Proposición 16. Un conjunto G es abierto ssi G es vecindad de cada uno de sus puntos.

Demostración. Sea

1. Prop. anterior.
2. Si $x \in G \implies \exists$ abierto $G \ni x \in G \subset G \implies G \in N_x, \forall x \in G$.

■

Proposición 17. Sea

1. $N_x \neq \emptyset$ y $x \in A, \forall A \in N_x$.
2. Cada miembro $A \in N_x$ es un superconjunto de un miembro $G \in N_x$, donde G es vecindad de cada uno de sus puntos.

Definición 19. Un mapeo $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos es continuo en un punto $x \in X$, para cada $U \in N_f(x) \exists V \in N_x \ni f(V) \subset U$.

Teorema 14 (Mala foto :()). Un mapeo $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos, es continuo ssi es continuo en cada punto de X .

Teorema 15. Un mapeo $f : X \rightarrow Y$ es continuo ssi es continuo en cada punto de X .

Demostración. Sea

- Sea f continua en cada punto de X y sea H un abierto en Y . A probar: $f^{-1}(H)$ es abierto en $X \iff f^{-1}(H)$ es vecindad de cada uno de sus puntos.
- Sea $x \in f^{-1}(H) \implies f(x) \in H \implies H \in N_{f(x)}$. Por la continuidad de f en $x \exists G \in N_x \ni f(G) \subset H \implies x \in G \subset f^{-1}[f(G)] \subset f^{-1}(H)$

■

Ejemplo 14. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ y $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$. Considere $f : X \rightarrow X$ tal que

$$a \rightarrow b$$

$$b \rightarrow d$$

$$c \rightarrow b$$

$$d \rightarrow c$$

Probar:

1. f es continua en c
2. f es continua en d .

Ejemplo 15. Sea $f : X \rightarrow Y$ y sea $\{p\}$ un abierto de X .

1. Si $\{p\}$ es abierto, $\forall p \in X \implies$ la topología de X es la discreta $\implies f$ es continua.
2. Si $\{p\}$ es abierto, para algún $p \in X$. Sea $H \in N_{f(p)} \implies \exists \{p\} \in N_{f(p)} \implies \exists \{p\} \in N_p \ni f(\{p\}) \subset H \implies f$ es continua en p .

Definición 20. Una función $f : X \rightarrow Y$ es secuencialmente continua en un punto $p \in X$ ssi para cada sucesión (a_n) , se cumple que: si $a_n \rightarrow p \implies f(a_n) \rightarrow f(p)$

Sea

$$a_n \rightarrow p$$

$\forall G$, abierto de $X \ni p \in G$, se tiene que $\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \implies a_n \in G$.

Teorema 16. Si una función $f : X \rightarrow Y$ es continua en $p \in X$, entonces f es secuencialmente continua en $p \in X$.

Solución. Sea

1. Ejercicio.

2. Suponga que f es continua en $p \in X$ y que (a_n) , cumple:

$$a_n \rightarrow p$$

A probar: $f(a_n) \rightarrow f(p) \iff \forall G$, abierto de $Y \ni f(p) \in G$, la cola de $f(a_n)$ esta en G .

□

Definición 21. Un mapeo $f : X \rightarrow Y$ es

1. Abierto, si $\forall G$, abierto de X , $f(G)$ es abierto de Y .
2. Cerrado, si $\forall H$, cerrado de X , $f(H)$ es cerrado de Y .

Ejemplo 16. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ni f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Entonces, f es continua. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.

1. Si A es abierto, entonces $f(A) = \{1\} \implies f$ no es abierta.
2. Si A es cerrado $\implies f(A) = \{1\}$ es un cerrado $\implies f$ es cerrado.

Definición 22. Los espacios topológicos (X, τ) y (Y, τ') son homeomorfos si existe una función $f : X \rightarrow Y$ tal que:

1. f es biyectiva.
2. f y f^{-1} son continuas.

En este caso, f es un homeomorfismo.

NOTA. 1. Se dice que una función es bicontinua si es abierto y continua.

2. Un mapeo $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo ssi f es bicontinuo y biyectivo.

Ejemplo 17. Sea $X = (-\pi/2, \pi/2)$ y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \tan x$. Note que:

1. f es biyectiva.
2. f es continua y $f^{-1}(x) = \arctan x$ es continua.

Entonces f es un homeomorfismo. Tal que $(-\pi/2, \pi/2)$ y \mathbb{R} son homeomorfos. (topológicamente los mismos.)

NOTA. Una propiedad p que comparten espacios topológicos homeomorfos es una invariante topológica.

Ejemplo 18. La acotación no es una invariante topológica.

Ejemplo 19. Sea $D_1 = \{(r, \theta) \ni |r| < 1\}$ y $D_2 = \{(r, \theta) \ni |r| < 2\}$. Entonces, considere $f : D_1 \rightarrow D_2 \ni f(r, \theta) = (2r, \theta)$. Entonces, f es un homeomorfismo entre D_1 y D_2 . Note que el área no es un invariante topológico.

Ejemplo 20. Sean (X, τ_D) y (Y, τ_D) espacios discretos y sea $f : X \rightarrow Y$. Entonces f es:

1. continua.
2. abierta

Entonces, es un homeomorfismo si comparten cardinalidad.

NOTA. Sean

1. X, Y, Z espacios topológicos.

NOTA. Notación: $X \approx Y$ significa X es homeomorfo a Y .

- a) $X \approx X, \forall X$
- b) Si $X \approx Y \implies Y \approx X$.
- c) Si $X \approx Y$ y $Y \approx Z \implies X \approx Z$.

\implies la relación \approx es de equivalencia. (Implica que se produce una partición en el conjunto de definición de la relación)

Proposición 18. Sea $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau^*)$ un mapeo abierto e inyectivo y sea $A \subset X$ tal que $f(A) = B$. Entonces, la restricción $f_A : (A, \tau_A) \rightarrow (B, \tau_B)$ es abierto e inyectivo.

Demostración. 1. La inyectividad se hereda.

2. A probar: f es abierta, sea $H \in \tau_A \implies f(H) \in \tau_B^*$. Como $H \in \tau_A \implies \exists G \in \tau \ni G \cap A = H$. Tenemos

$$f(H) = f(G \cap A)$$

Por la inyectividad:

$$\begin{aligned} &= f(G) \cap f(A) \\ &= \underbrace{f(G)}_{\in \tau^*} \cap B \in \tau_B^* \end{aligned}$$

■

Problema 2. Sea $\{(Y_i, \tau_i)\}$ una colección cualquiera de espacios topológicos, y para cada i considere:

$$f_i : X \rightarrow Y_i$$

donde X es un conjunto no-vacío cualquiera. Encuentra la topología para X \ni cada f_i es continua.

Teorema 17. Sea $\{f_i : X \rightarrow (Y_i, \tau_i)\}$ una colección de mapeos definidos sobre un conjunto vacío de X sobre los espacios topológicos (Y_i, τ_i) , sea

$$S = \bigcup_i \{f_i^{-1}(H) : H \in \tau_i\},$$

y definamos τ como la topología sobre X generada por S .

1. Todos los f_i son continuas con respecto a τ .
2. Si τ^* es la intersección de todas las topologías sobre X con respecto a las cuales las f_i son continuas, entonces $\tau = \tau^*$.
3. τ es la topología menos fina sobre X tales que las f_i son continuas.
4. S es una subbase para τ .

Ejemplo 21. Una función constante $f_i : X \rightarrow Y_i$ es continua con respecto a cada topología sobre X . Entonces, todas las f_i son continuas con respecto a la topología indiscreta, es decir $\tau_i = \{X, \emptyset\}$. Note que τ_i es la topología menos fina sobre $X \implies \tau_I$ es la topología menos fina que hace continuas a las f_i .

Ejemplo 22. Sea $Y = \{a, b, c, d\}$ y la topología sobre Y , $\tau = \{Y, \emptyset, \{c\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}\}$. Considere $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y sean: $f : X \rightarrow (Y, \tau)$ y $g : X \rightarrow (Y, \tau) \ni$

$f :$

$$1 \rightarrow a$$

$$2 \rightarrow a$$

$$3 \rightarrow d$$

$$4 \rightarrow b$$

$g :$

$$1 \rightarrow b$$

$$2 \rightarrow c$$

$$3 \rightarrow c$$

$$4 \rightarrow d$$

Entonces, la topología sobre X que tiene menos abiertos y que hace continuos a f y g , es la que tiene subbase:

$$S = \{f^{-1}(H) : H \in \tau\} \bigcup \{g^{-1}(H) : H \in \tau\}$$

Entonces

$$S = \{X, \emptyset, \{1, 2, 4\}, \{3\}\} \bigcup \{X, \emptyset, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$$

Entonces,

$$S = \{X, \emptyset, \{1, 2, 4\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$$

Topologia producto

Sea X_α un conjunto, $\forall \alpha \in I$. El producto cartesiano de las x_α , es el conjunto

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha := \{x : I \rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \ni x(\alpha) \in X_\alpha, \forall \alpha \in I\}$$

Ejemplo 23. Sea $I = \{1, 2, 3\}$ y sean $X_1 = \{a, e\}$, $X_2 = \{o\}$, $X_3 = \{o, u\}$.

Entonces

$$\begin{aligned} x_1 \times x_2 \times x_3 &= \left\{ x : \{1, 2, 3\} \rightarrow \bigcup_{i=1}^3 X_i \ni x(\alpha) \in X_\alpha \right\} \\ &= \{x : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, e, o, u\} : x(\alpha) \in X_\alpha\} \end{aligned}$$

Ademas

$$\begin{array}{llll} x(1) = a \in X_1 & x(1) = a \in X_1 & x(1) = e \in X_1 & x(1) = e \in X_1 \\ x(2) = o \in X_2 & x(2) = o \in X_2 & x(2) = o \in X_2 & x(2) = o \in X_2 \\ x(3) = o \in X_3 & x(3) = u \in X_3 & x(3) = o \in X_1 & x(3) = u \in X_1 \end{array}$$

Entonces

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = \{(a, o, o), (a, o, u), (e, o, o), (e, o, u)\}$$

Ejemplo 24.

$I = \{1, 2\}$ y $X = \{0, 1\}$, entonces:

$$\begin{aligned} x \times x_1 = x^2 &= \left\{ x : \{1, 2\} \rightarrow \{0, 1\} \Rightarrow \begin{array}{l} x(\alpha) \in x_\alpha \\ \forall \alpha = 1, 2 \end{array} \right\} \\ x(1) = 0 &\left| \begin{array}{l} x(1) = 1 \\ x(2) = 0 \end{array} \right| x(1) = 0 &\left| \begin{array}{l} x(1) = 1 \\ x(2) = 1 \end{array} \right| x(1) = 1 \\ x(2) = 0 &\left| \begin{array}{l} x(2) = 1 \\ x(2) = 1 \end{array} \right| x(2) = 1 &\left| \begin{array}{l} x(2) = 0 \\ x(2) = 0 \end{array} \right| x(2) = 0 \\ \Rightarrow x^2 &= \{(0, 0), (1, 1), (0, 1), (1, 0)\} \end{aligned}$$

Ejemplo 25. Sea

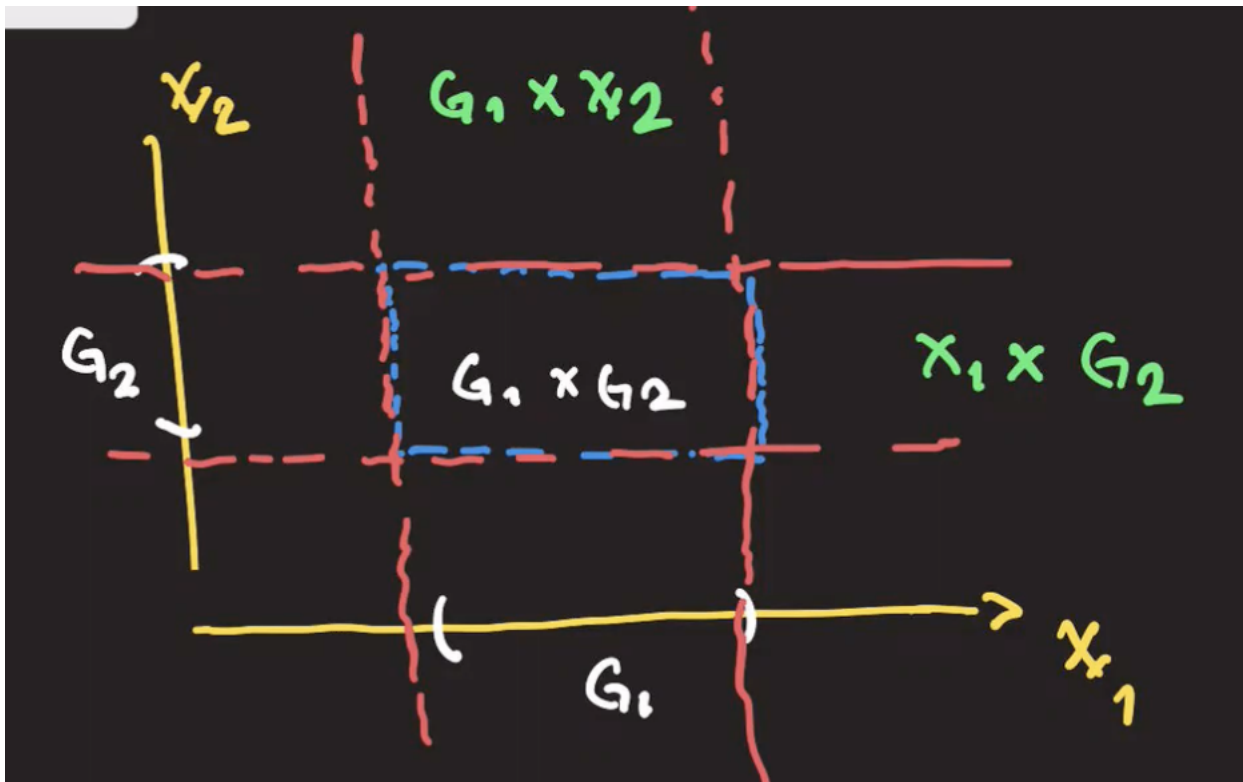
$$\begin{aligned} I = \mathbb{Z}^+ &\Rightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \{x : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \cup_{\alpha \in I} x_\alpha \mid x(\alpha) = x_\alpha, \forall \alpha \in I\} \\ &= \{(x_1, x_2, \dots) : x(\alpha) \in x_\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{Z}^+\} \end{aligned}$$

Ejemplo 26. Si en el ejemplo anterior hacemos $X_\alpha = X$, sea I un conjunto de índices cualquiera

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \prod_{\alpha \in I} x_\alpha = \{x : I \rightarrow x : x(\alpha) \in x, \forall \alpha \in I\} \\ &= x^I \end{aligned}$$

Problema 3. Sea X_α es un espacio topológico, $\forall \alpha \in I$. Se desea construir una topología para $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$

1. Esta topología sea natural
2. Produzca suficientes teoremas de la forma: Si x_α tiene la propiedad p , $\forall \alpha \in I$.



$\implies G_1 \times G_2 = (G_1 \times X_2) \cap (X_1 \times G_2)$. Entonces, con dos espacios factor, los abiertos subbasicos serian las franjas $G_1 \times X_2$ y $X_1 \times G_2$. Entonces, en el caso de n -espacios factor, los abiertos subbasicos serian de la forma:

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times G_i \times X \cdots \times X_n$$

Recordemos: Se define la k -Esima proyección π_k como el mapeo:

$$\pi_K : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \longrightarrow X_\alpha \ni$$

$$\pi_k(\omega) \longmapsto \omega_k$$

$$\text{Ej: } \pi_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \ni$$

$$\pi_2(x_1, x_2, x_3) = x_2$$

Definición 23. Sea $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de espacios topológicos y sea $X = \prod_{\alpha \in I} x_\alpha$. La topología menos fina que hace continuas a las proyecciones sobre X , es la topología producto.

Si cada X_α es Hausdorff $\implies \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es Hausdorff.

Definición 24. Sean (X_α, τ_α) , $\alpha \in I$ espacios topologicos y sea $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$

1. Las funciones $\pi_k : X \rightarrow X_k$ se llaman proyecciones.
2. La topología generada por las proyecciones en la topología producto de X .
3. Es decir, es la topología menos fuerte que hace continuas a las proyecciones.
4. Un espacio producto tiene la forma

$$\left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, \tau \right)$$

Proposición 19. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de espacios de Hausdorff, y sea $X = \prod_{\alpha} X_\alpha$ el espacio producto. Entonces, X es de Hausdorff.

Demostración. Sea $x, y \in X, x \neq y$. Entonces, $\exists k \ni$ los puntos x y y difieren en la k -ésima coordenada. $\pi_k : X \rightarrow X_k$, produce las imagenes

$$p_{i_k}(x) = x_k$$

Y

$$\pi_k(y) = y_k$$

Como x_k es Hausdorff, existen abiertos G y H de x_k tal que $x_k \in G, y_k \in H$ y $G \cap H = \emptyset$. Entonces, $\pi_k^{-1}(G)$ y $\pi_k^{-1}(H)$ son abiertos de $X, x \in \pi_k^{-1}(G), y \in \pi_k^{-1}(H)$ y $\pi_k^{-1}(G) \cap \pi_k^{-1}(H) = \emptyset$ Entonces X es Hausdorff. ■

Sea

1. Topologia producto;

$$S = \bigcup_{\alpha} \{ \pi_{\alpha}^{-1}(u) : u \in \tau_{\alpha} \}$$

2. Por lo que los abiertos basicos tienen la forma:

$$\pi_{k_1}^{-1}(G_{k_1}) \cap \pi_{k_2}^{-1}(G_{k_2}) \cap \cdots \cap \pi_{k_n}^{-1}(G_{k_n})$$

donde $G_{k_j} \in \tau_{k_j}$.

Ademas

$$\pi_i(G) = \begin{cases} \bigcap G_{i_{\alpha}}, k_n = 1 \\ x_i, i \neq k_j, k = 1, \dots, n \end{cases}$$

Problema 4. Una funcion f del espacio topologico $\prod_{\alpha} X_{\alpha}$ es continua ssi para cada proyeccion π_i , se tiene que $\pi_{\alpha} \circ f$ es continua.

Demostración. Sea

- Como f es continua y las π_{α} son continuas $\implies \pi_{\alpha} \circ f$ son continuas.
- Sea H un abierto en la topologia producto. A probar $f^{-1}(H)$ es abierto en Y .

■

Ejemplo 27. Sea $X = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}$. Entonces

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ni f(\alpha) \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo 28. Sea $X = \mathbb{R} \implies I = \mathbb{Z}^+$.

$$\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^+} = \{x : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x(m) \in \mathbb{R}_n\}$$

2.1. Compactos

Definición 25. Sea (X, τ) un espacio topológico una clase $\{H_i\}$ de abiertos de X es una cubierta abierta de X , si $\bigcup_i H_i = X$.

Definición 26. Una subclase de una cubierta abierta de X que también es cubierta abierta es una subcubierta de la inicial.

Definición 27. Un espacio compacto es un espacio topológico en el que cada cubierta abierta tiene una subcubierta finita. Es representar $X = \bigcup_{i \in I} H_i$

NOTA. Un subespacio compacto de X es un subespacio que es compacto por derecho propio.

Teorema 18. Todo subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.

Demostración. Sea F un cerrado de X y considere el subespacio (F, τ_F) . Sea $\{G_i\}$ una cubierta abierta de F , con $G_i \in \tau_F$. $G_i = F \cap H_i$, donde $H_i \in \tau$. Considere la cubierta abierta de $X : \{H_i\} \cup F^c$. Como X es compacto, hay una subcubierta finita de la cubierta anterior: $\{H_{i_1}, H_{i_2}, H_{i_3}, \dots, H_{i_m}\} \cup F^c$. Entonces, tenemos $H_{i_j} \cap F = G_{i_j}$, donde $h \subseteq \{G_{i_j}\}$ son una subcubierta finita de F . ■

Teorema 19. Cualquier imagen continua de un espacio compacto es compacto.

Demostración. Sea (X, τ) es un espacio topológico compacto y sea (Y, τ') y sea $f : X \rightarrow Y$ un mapeo continuo. A probar: $f(x)$ es compacto. Sea $\{G_i\} \subseteq \tau'_{f(x)}$ una cubierta de $f(x)$, donde los G_i son abiertos de $f(x)$ (topología relativa).

Tenemos:

$$1. G_i = f(x) \cap \underbrace{H_i}_{\in \tau'}$$

$$2. \bigcup G_i = f(x)$$

Entonces $f(x) \cap [\bigcup_i H_i] = f(x)$. Además,

$$f(x) \subset \bigcup_i H_i$$

$$f^{-1}(f(x)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_i H_i\right)$$

$$x \subset \bigcup_i f^{-1}(H_i)$$

$$x = \bigcup_{i=1}^m f^{-1}(H_i)$$

$$f(x) = \bigcup_{i=1}^m f(f^{-1}(H_i))$$

■

Proposición 20. *Propiedad de intersección finita*

Teorema 20. *Los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. X es un espacio compacto.
2. Para cada clase $\{F_i\}$ de cerrados de $X \ni \bigcap_i F_i = \emptyset$, se cumple que $\{F_i\}$ contiene una subclase finita $\{F_{i_1}, \dots, F_{i_m}\} \ni F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_m} = \emptyset$

Demostración. (i) \implies (ii) Sea X un espacio compacto y $\{F_i\}$ una clase de cerrados con $\{F_i\} \ni \bigcap_i F_i = \emptyset$. Entonces

$$X = \left(\bigcap_i F_i \right)^c = \bigcup_i F_i^c$$

Entonces $\{F_i^c\}$ es una cubierta abierta de X . Como X es compacto, dicha cubierta tiene una subcubierta finita, $\{F_{i_1}^c, \dots, F_{i_k}^c\}$, entonces

$$X = \bigcup_{j=1}^k F_{i_j}^c$$

Entonces

$$\emptyset = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}$$

(ii) \implies (i) Sea $\{G_i\}$ una cubierta abierta de X . Entonces $\bigcup_i G_i = X \implies (\bigcup_i G_i)^c = X^c \implies \bigcap_i G_i^c = \emptyset$. Donde $\{G_i^c\}$ es la clase de cerrados. Entonces $\{G_i^c\}$ tiene una subclase finita:

$$\{G_{i_1}^c, \dots, G_{i_m}^c\} \ni G_{i_1}^c \cap \dots \cap G_{i_m}^c = \emptyset$$

Por De Morgan, $G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m} = X$. Es decir que $\{G_{i_j}\}$ es una subcubierta finita para X . Entonces, X es compacto. ■

NOTA. Dada una clase de conjuntos $C = \{C_i\}$, se dice que C tiene la propiedad de intersección finita (Pif) si para cada C_{i_1}, \dots, C_{i_k} se cumple $\bigcap_{j=1}^k C_{i_j} \neq \emptyset$.

Ejemplo 29. Considere:

$$C = \{[1, \infty), [2, \infty), \dots, [n, \infty), \dots\}$$

Considere

$$C_1 = [n, \infty), C_2 = [n_2, \infty), \dots, C_k = [n_k, \infty)$$

Entonces

$$\bigcup_{i=1}^k C_i = [\max_{1 \leq i \leq k} \{n_i\}, \infty) \neq \emptyset$$

Entonces C tiene la pif.

Ejemplo 30. Sea $C = \{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ Entonces, $C_1 = (-\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_1})$, $C_2 = (-\frac{1}{n_2}, \frac{1}{n_2}) \dots C_k = (-\frac{1}{n_k}, \frac{1}{n_k})$. Entonces

$$\bigcap_{i=1}^k \left(-\frac{1}{n_i}, \frac{1}{n_i}\right) = \left(-\frac{1}{\max\{n_i\}}, \frac{1}{\max\{n_i\}}\right)$$

Entonces, C tiene la pif.

NOTA. En el teorema anterior, la contrapuesta de (ii) es para toda clase de cerrados de X , $\{F_i\}$ tal que cada subclase finita tiene intersección no vacía, entonces $\bigcap_i F_i \neq \emptyset$. Es decir, cada clase de cerrados de X que tiene la pif, tiene intersección no vacía.

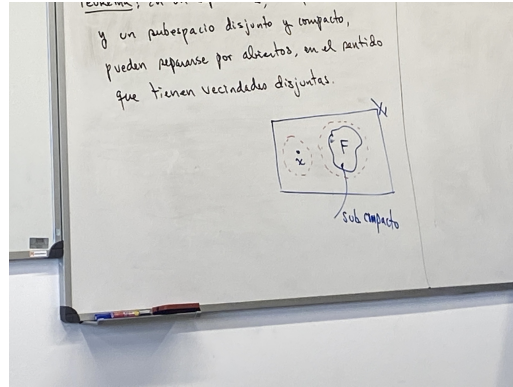
Teorema 21. X es un espacio compacto ssi cada clase de cerrados de X que tiene la pif, tiene intersección no vacía.

Teorema 22. Un espacio topológico es compacto si cada cubierta abierta básica tiene subcubierta abierta finita.

Demostración. Sea $\{G_i\}$ una cubierta abierta del espacio topológico X y sea $\{B_i\}$ una base para X . Sabemos que cada G_i es unión de algunos B_j , es decir $\{B_j\}$ es una cubierta abierta («básica») de X . Por hipótesis, $\{B_j\}$ tiene una subcubierta finita. Tomemos, para cada miembro de la subcubierta, un G_i que lo contenga. Entonces, X es compacto. ■

Teorema 23. Un espacio topológico es compacto si cada cubierta abierta subbásica tiene una subcubierta finita.

Teorema 24. *En un espacio de T_2 , cualquier punto y un subespacio disjunto y compacto, puede separarse por abiertos, en el sentido que tienen vecindades disjuntas.*



Demostración. Sea $x \in X$ y sea F un subespacio compacto de X tal que $x \notin F$. Sea $y \in F \implies$ Como X es T_2 , existen vecindades disjuntas G_y y H_y tal que $x \in G_y, y \in H_y, G_x \cap H_y = \emptyset$. Variando y sobre todo F , se tiene que $\bigcup_y H_y$ es una cubierta abierta de F . Como F es compacto, existe una subcubierta finita de F , digamos:

$$F \subset H_{y_1} \cup H_{y_2} \cup \dots \cup H_{y_k} = H$$

y considere la vecindad de x , $G = G_{y_1} \cap G_{y_2} \cap \dots \cap G_{y_k}$. Nótese que G y H son disjuntos. ■

Teorema 25. *Cada subespacio compacto de un T_2 es cerrado.*

Demostración. Sea X un T_2 y F un subespacio compacto de X . A probar: F^c es abierto.

1. Que $F^c = \emptyset' \implies$ es abierto.
2. Supóngase que $F^c \neq \emptyset \implies$ sea $x \in F^c$. Por el teorema anterior, existen vecindades disjuntas G_x y H_F , es decir $x \in G_x \subset F^c \implies F^c$ es abierto, entonces F es cerrado.

Teorema 26. *Un mapeo biyectivo y continuo de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff es un homeomorfismo.*

Definición 28. *Un espacio X es T_1 si, para $x, y \in X$, $x \neq y$, existen vecindades G y H tales que $x \in G$ y $y \notin G$; $y \in H$ y $x \notin H$*

Teorema 27. *Un espacio topológico es T_1 ssi los unitarios son cerrados.*

Demostración. Sea $x \in X$ y sea $\{x\}$ un cerrado de $X \iff \{x\}^c$ es un abierto \iff si $y \neq x$, y tiene una vecindad que no contiene a $x \iff X$ es T_1 . ■

Proposición 21. *Tenemos*

1. \mathbb{R} con la topología usual es T_1 .

2. Cada T_2 es T_1 .

Ejemplo 31. *Encuentre un espacio T_1 que no es T_2 . \mathbb{R} con la topología cofinita.*

Ejemplo 32. *Sea $X = \{a, b\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ entonces (X, τ) no es T_1 .*

Teorema 28. *Cada subespacio de un T_1 es un T_1 .*

Demostración. Sea A un subespacio de (X, τ) . Sean $x, y \in A$, $x \neq y$

- Como $x, y \in A \subset X \implies \exists G, H \in \tau \ni x \in G, y \notin G, x \notin H, y \in H$.
- A probar: si $x \in A \implies \{x\}$ es cerrado de $\tau_A \iff \{x\}^c = A - \{x\}$ es abierto de τ_A . Entonces, $\underbrace{(X - \{x\}) \cap A}_{\in \tau} = A - \{x\} \in \tau_A \implies A - [A - \{x\}]$ es un cerrado, que implica que es igual a $\{x\}$

■

NOTA. *Un subconjunto finito de un T_1 no tiene puntos límite. Considere el conjunto finito $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ en X , el cual también es cerrado. Tomemos ahora, $\{a_2, a_3, \dots, a_n\}$, el cual es cerrado. Esto implica que $\{a_2, a_3, \dots, a_n\}^c$ es un abierto. Note que $a_1 \in \{a_2, a_3, \dots, a_n\}^c$*

Definición 29. Un espacio X es regular ssi satisface: si F es un cerrado de X y $p \in X \ni p \notin F$, existen abiertos G y $H \ni F \subset G$ y $\{p\} \subset H$. $G \cap H = \emptyset$

NOTA. Sean $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$ los cerrados de X son: $X, \emptyset, \{b, c\}, \{a\}$. Nótese que $\{b\}$ no es cerrado $\implies X$ no es T_1 , además, X es regular.

Definición 30. Un espacio topológico es T_3 si es regular y T_1 .

Teorema 29. Si X es T_3 entonces X es T_2 .

Demostración. Sean $x, y \in X, x \neq y$. Entonces, $\{x\}$ es cerrado, ya que X es T_1 . Como X es regular, existen vecindades disjuntas G y $H \ni x \in \{x\} \subset G$ y $y \in H$, $G \cap H = \emptyset \implies X$ es un T_2 . ■

Teorema 30. Un espacio X es normal es normal si para F_1 y F_2 , cerrados disjuntos de X , existen vecindades disjuntas G y H tal que $F_1 \subset G$ y $F_2 \subset H$.

Ejemplo 33. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ los cerrados son: $\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}$. Como $\{a\}$ no es cerrado entonces X no es T_1 y X no es normal.

Definición 31. Un espacio topológico que es normal y T_1 es un T_4 .

Teorema 31. Los enunciados siguientes son equivalentes:

1. X es normal
2. Si H es un superconjunto abierto del cerrado F , existe un abierto G tal que

$$F \subset G \subset \overline{G} \subset H$$

Demostración. Sea

- (\Leftarrow) Sean F_1 y F_2 cerrados disjuntos de X . Entonces, existen un abierto $G \ni F_1 \subset G \subset \overline{G} \subset F_2^c$. Entonces, como $\overline{G} \subset F_2^c \implies (F_2^c)^c \subset (\overline{G})^c \implies F_2 \subset (\overline{G})^c$ (abierto, disjunto de G)

- Sea X normal, F un cerrado de X y H un superconjunto abierto de F . Nótese que H^c es un cerrado disjunto de $F \implies$ existen abiertos G y $L \ni G \subset H^c$ y $H^c \subset L \implies L^c \subset H$, además: $F \subset G, L^c \subset H. G \subset L^c \implies F \subset G \subset \overline{G} \subset H$.

■

Proposición 22. Si X es un $T_4 \implies X$ es un T_3 .

Demostración. Como X es $T_4 \implies X$ es normal y T_1 . A probar: X es regular. Sean $x \in X$ y F es un cerrado de $X \ni x \notin F \implies \{x\}$ es un cerrado disjunto de $F \implies$ existen abiertos disjuntos G y $H \ni x \in \{x\} \subset G$ y $F \subset H \implies X$ es regular.

■

Tenemos:

- T_4 : Normal + T_1
- T_3 : Regular + T_1

Entonces $T_4 \implies T_3$.

Ejemplo 34. Sea $X = \mathbb{R}$ dotado de la topología en que los abiertos son X, \emptyset y los intervalos de la forma $(a, \infty), a \in X$

- Los cerrados son de la forma $(-\infty, a]$. Como no hay dos cerrados disjuntos $\implies X$ es normal.
- Considere $(-\infty, 0]$ y el punto $1 \in X$. Nótese que:

1. $1 \notin (\infty, 0]$

2. No hay abiertos disjuntos que separen a 1 y $(\infty, 0]$

Entonces X no es regular.

Conclusión, un espacio normal no es necesariamente regular.

Ejemplo 35. Cada metrizable es T_4 , suponga que d es una métrica que genera la topología del espacio (X, τ) . Como el métrico es $T_2 \implies X$ es T_1 .

- A probar: X es normal. Sean A y B cerrados disjuntos en X .
- Sea $d(x, y) < \delta_x/3$ y $d(y, z) < \varepsilon_y/3$. Sea $\delta_a = \max\{\delta_x, \varepsilon_y\}$, entonces $d(x, y) < \delta_x/3$ y $d(y, z) < \delta_y/3$. Entonces $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq 2/3\delta_x \implies y \in B_{\delta_x}(x)$. Contradicción.

Definición 32. Sea $F := \{f_j : j \in I\}$ la clase de funciones del conjunto X en el conjunto Y . Se dice que F separa puntos si, $\forall x, y \in X, x \neq y$, se tiene que $f_i(x) \neq f_i(y)$.

Ejemplo 36. Sea

- $F = \{\sin nx, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots\}$, definidas sobre \mathbb{R} . Entonces F no separa puntos.
- $F = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ni f(x) = ax, \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}\}$ entonces F separa puntos.

Proposición 23. Si $C(X, \mathbb{R})$ es la clase de funciones continuas y de valores reales sobre X , que separa puntos $\implies X$ es Hausdorff.

Demostración. Sean $x, y \in X, x \neq y$. Como $C(X, \mathbb{R})$ separa puntos $\implies f(x) \neq f(y)$. Como \mathbb{R} es Hausdorff, existen abiertos disjuntos G y H en $\mathbb{R} \ni f(x) \in G$ y $f(y) \in H$. Además, f es continua, entonces:

$$x \in \underbrace{f^{-1}(G)}_{\text{abierto}}$$

y

$$y \in \underbrace{f^{-1}(H)}_{\text{abierto}}$$

y

$$f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) = f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

Entonces X es Hausdorff. ■

Definición 33. Un espacio topológico es completamente regular ssi satisface: Si F es un cerrado de X y $p \in X \ni p \notin F$, entonces existe una función continua. $f : X \rightarrow [0, 1] \ni f(p) = 0$ y $f(F) = \{1\}$.

NOTA. Un espacio completamente regular y T_1 es un espacio Tíkonov $T_{3\frac{1}{2}}$

NOTA. Sean F_1 y F_2 cerrados de un espacio normal X . Entonces existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ $\ni f(F_1) = \{0\}$ y $f(F_2) = \{1\}$.

Teorema 32. Si X es completamente regular, entonces X es regular.

Demostración. Sea F un cerrado de X y $p \in X \ni p \notin F$. Sea $f : X \rightarrow [0, 1]$ una función continua $f(p) = 0$ y $f(F) = \{1\}$. Sea $G = f^{-1}[0, 1/3)$ abierto y $H = f^{-1}(2/3, 1]$ abierto. Entonces $p \in G$ y $F \subset H$, además como

$$[0, 1/3) \cap (2/3, 1] = \emptyset$$

Entonces $G \cap H = \emptyset$, entonces X es regular. ■