

Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

Geometría diferencial - Catedrático: Alan Reyes
14 de febrero de 2023

Tarea

Problema 1. Sea

1. Sea $\alpha(t)$ una curva parametrizada en \mathbb{R}^n , que no pasa por el origen O . Si $\alpha(t_0)$ es un punto del trazo de α que está más próximo a O , y $\alpha'(t_0) \neq 0$ entonces $\alpha(t_0)$ es ortogonal a $\alpha'(t_0)$

Solución. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$. A probar: $\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle = 0$. Considerando la definición de norma, la cual es la distancia del origen O a los puntos $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, se tiene:

$$\|\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle\| = \sqrt{\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle} = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + \dots + x_n^2(t)}$$

Sin embargo, deseamos encontrar una relación del producto interno, entonces, considérese: $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

$$f(t) = \|\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle\|^2 = \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle = x_1^2(t) + x_2^2(t) + \dots + x_n^2(t)$$

Además, de la hipótesis, también tenemos que $\alpha(t_0)$ es un punto del trazo de α que está más próximo al origen O , es decir que es un mínimo local en $t_0 \implies f'(t_0) = 0$. Con eso, la considérese la derivada de $f(t)$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle}{dt} \\ &= \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle + \langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle \\ &= 2\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle \end{aligned}$$

Consideramos el punto t_0 tal que:

$$f'(t_0) = 2\langle \alpha'(t_0), \alpha(t_0) \rangle = 0$$

Por lo tanto,

$$\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle = 0.$$

□

2. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada, con $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$. Mostrar que $\|\alpha(t)\|$ es una constante > 0 si, y sólo si, $\alpha(t)$ es ortogonal a $\alpha'(t)$, para todo $t \in I$.

Solución. Procedemos por doble implicación:

- (\Rightarrow) A probar: $\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle = 0$. Sea por hipótesis,

$$\begin{aligned}\|\alpha(t)\| &= C \\ \|\alpha(t)\|^2 &= C^2 \\ \frac{d}{dt} \|\alpha(t)\|^2 &= \frac{d}{dt} C^2 \\ \frac{d}{dt} \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle &= 0 \\ 2\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle &= 0 \\ \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle &= 0\end{aligned}$$

- (\Leftarrow) A probar: $\|\alpha(t)\| = C > 0$. Por el inciso anterior, nótese que esta implicación también se cumple.

□

Problema 2. Considere la parametrización de la cicloide de radio r vista en aula.

La cicloide

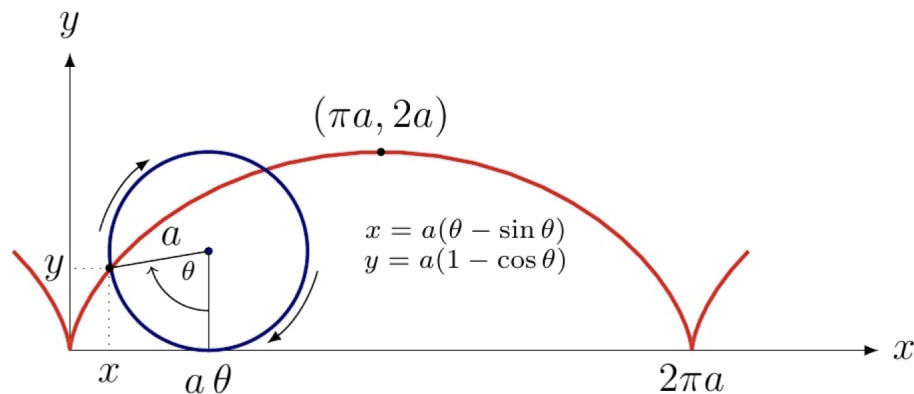


Figura 1: Parametrización vista en clase

1. Calcular la longitud de arco de la cicloide en el primero de sus arcos, esto es correspondiente a una rotación completa del círculo.

Solución. Sea

$$\alpha(\theta) = (a(\theta - \sin \theta), a(1 - \cos \theta))$$

En donde,

$$\alpha'(\theta) = (a(1 - \cos \theta), a \sin \theta)$$

Considérese:

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \int_{t_0}^t |\alpha'(\theta)| d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[a(1 - \cos \theta)]^2 + [a \sin \theta]^2} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 [(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta]} d\theta \\
 &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} d\theta \\
 &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos \theta)} d\theta \\
 &= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta \\
 &= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \\
 &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\
 &= 2a(4) = 8a
 \end{aligned}$$

□

2. Calcular el área bajo la curva (entre la curva y el eje x) para este arco de cicloide.

Solución. Considérese, la ecuación para calcular el área de una curva paramétrica:

$$A = \int_0^{2\pi a} y dx$$

Donde $dx = a(1 - \cos \theta)d\theta$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{2\pi} (a(1 - \cos \theta)) (a(1 - \cos \theta)d\theta) \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 d\theta = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \right) d\theta \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(-2 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{2} \right) d\theta \\
 &= a^2 \left[-2 \sin \theta + \frac{1}{4} (\sin 2\theta) + \frac{3}{2} \theta \right]_0^{2\pi} \\
 &= a^2 \left[-2(\sin 2\pi - \sin 0) + \frac{1}{4}(\sin 4\pi - \sin 0) + \frac{3}{2}(2\pi - 0) \right] \\
 &= a^2(3\pi) = 3\pi a^2
 \end{aligned}$$

□

Problema 3. Sea $\alpha : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva dada por

$$\left(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right),$$

donde t es el ángulo que el eje y con el vector $\alpha'(t)$. Esta curva se llama la tractriz (Figura en pág. 8 de Do Carmo). Mostrar que

- α es una curva parametrizada diferenciable, regular excepto en $t = \frac{\pi}{2}$.

Solución. Proponemos la derivada de $\alpha(t)$,

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\tan \frac{t}{2}} \cdot \sec^2 \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\frac{\sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}}} \cdot \left(\frac{1}{\cos \frac{t}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\sin t} \right) \end{aligned}$$

Ahora, mostraremos que es diferenciable regular en $t \in (0, \pi)$ excepto en $t = \pi/2$. Es decir, que solamente en $\alpha'(\pi/2) = 0$.

$$\begin{aligned} \alpha'(\pi/2) &= \left(\cos \frac{\pi}{2}, -\sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} \right) \\ &= (0, -1 + 1) \\ &= (0, 0) \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \cos t &= 0 \\ t &= \arccos 0 \\ t &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\sin t + \frac{1}{\sin t} &= 0 \\ -\sin t &= -\frac{1}{\sin t} \\ \sin^2 t &= 0 \\ \sin t &= 0 \\ t &= \arcsin 0 \\ t &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

□

- La longitud del segmento de la tangente a la tractriz, entre el punto de tangencia y el eje Oy es constante e igual a 1.

Solución. Debemos mostrar que los segmentos rojos son 1.

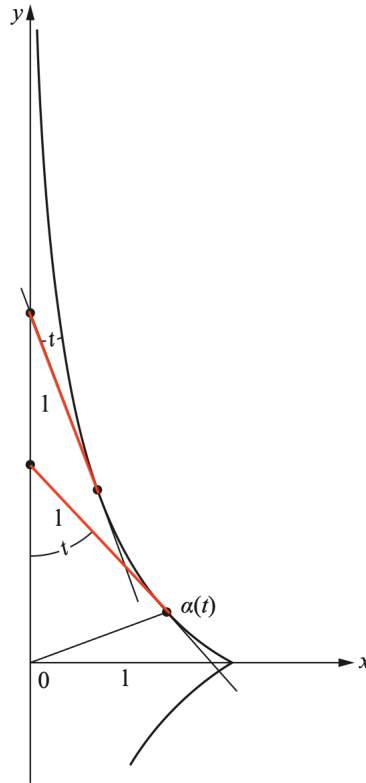


Figure 1-9. The tractrix.

Para esto, tendremos que general la ecuación de la tangente y posteriormente calcular la longitud del segmento de la tangente a la tractriz. Consideramos:

$$(y - y(t)) = m(x - x(t)), \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Sea

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t + \frac{1}{\sin t}}{\cos t} = -\frac{\sin t}{\cos t} + \frac{1}{\sin t \cos t}$$

Entonces:

$$\left(y - \left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right) \right) = \left(-\frac{\sin t}{\cos t} + \frac{1}{\sin t \cos t} \right) (x - \sin t)$$

Consideremos ahora, el punto (x_1, y_1) en donde se intersecta la tractriz y la tangente. Entonces, calculemos la distancia de este punto con el origen, como:

$$d = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{\sin(t)^2 + \left(y_1 - \cos(t) - \log \tan \frac{t}{2} \right)^2}$$

Sea $x = \sin t$ y $y = y_1$, y lo reemplazamos en la ecuación de la recta:

$$\begin{aligned} \left(y - \left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right) \right) &= \left(-\frac{\sin t}{\cos t} + \frac{1}{\sin t \cos t} \right) (x - \sin t) \\ \left(y_1 - \left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right) \right) &= \left(-\frac{\sin t}{\cos t} + \frac{1}{\sin t \cos t} \right) (\sin t - \sin t) \\ y_1 - \left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, despejamos para y_1 , tal que:

$$y_1 = \cos t + \log \tan \frac{t}{2}$$

Entonces, reemplazamos en d , tal que:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\sin(t)^2 + \left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2} - \cos(t) - \log \tan \frac{t}{2} \right)^2} \\ &= \sqrt{\sin(t)^2 + \left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2} - \cos(t) - \log \tan \frac{t}{2} \right)^2} \\ &= \sqrt{\sin(t)^2 + (0)^2} \\ &= |\sin t| \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

Problema 4. Sea α una curva plana regular en coordenadas polares (r, φ) , dada por $r = r(\varphi)$. Usando la notación $r' = \frac{\partial r}{\partial \varphi}$, verificar que la longitud de arco en el intervalo $[\varphi_1, \varphi_2]$ es

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi$$

y que la curvatura está dada por

$$\kappa(\varphi) = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{3/2}}$$

Solución. Considérese, $x = r \cos \varphi$ y $y = r \sin \varphi$. De esto, se genera el vector posición,

$$\alpha(\varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

y su derivada:

$$\alpha'(\varphi) = (r' \cos \varphi - r \sin \varphi, r' \sin \varphi + r \cos \varphi)$$

Ahora, mostraremos s y κ :

- Para la longitud de arco s , sea:

$$\begin{aligned}
 s &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |\alpha'(\varphi)| d\varphi \\
 &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 + (r' \sin \varphi + r \cos \varphi)^2} d\varphi \\
 &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r' \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 + (r' \sin \varphi)^2 + (r \cos \varphi)^2} d\varphi \\
 &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi
 \end{aligned}$$

- Para la curvatura, considérese la tercera derivada:

$$\begin{aligned}
 \alpha''(\varphi) &= ((r'' \cos \varphi - r' \sin \varphi) - (r' \sin \varphi + r \cos \varphi), (r'' \sin \varphi + r' \cos \varphi) + (r' \cos \varphi - r \sin \varphi)) \\
 &= (r'' \cos \varphi - r' \sin \varphi - r' \sin \varphi - r \cos \varphi, r'' \sin \varphi + r' \cos \varphi + r' \cos \varphi - r \sin \varphi) \\
 &= (r'' \cos \varphi - r' \sin \varphi - r' \sin \varphi - r \cos \varphi, r'' \sin \varphi + r' \cos \varphi + r' \cos \varphi - r \sin \varphi) \\
 &= ((r'' - r) \cos \varphi - 2r' \sin \varphi, (r'' - r) \sin \varphi + 2r' \cos \varphi)
 \end{aligned}$$

Por medio del **Problema 8**, se tiene para una curva plana, su curvatura dada por:

$$\begin{aligned}
 \kappa(t) &= \frac{\det(\alpha', \alpha'')}{|\alpha'|^3} \\
 &= \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3} \\
 &= \frac{x'y'' - y'x''}{\left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right)^3} \\
 &= \frac{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)((r'' - r) \sin \varphi + 2r' \cos \varphi) - (r' \sin \varphi + r \cos \varphi)((r'' - r) \cos \varphi - 2r' \sin \varphi)}{\left(\sqrt{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 + (r' \sin \varphi + r \cos \varphi)^2}\right)^3} \\
 &= \frac{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)(r'' - r) \sin \varphi + (r' \cos \varphi - r \sin \varphi)(2r' \cos \varphi) - (r' \sin \varphi + r \cos \varphi)(r'' - r) \cos \varphi + (2r' \sin \varphi)(r' \sin \varphi + r \cos \varphi)}{\left(\sqrt{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 + (r' \sin \varphi + r \cos \varphi)^2}\right)^3} \\
 &= \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

□

Problema 5. Calcular la curvatura de la espiral de Arquímedes, la cual está dada por $r(\varphi) = a\varphi$, a constante (Figura 1(a)).

Solución. Sea

$$\begin{aligned}
 r'(\varphi) &= a \\
 r''(\varphi) &= 0
 \end{aligned}$$

Considerando el **Problema 4**, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \kappa(\varphi) &= \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{2a^2 - 0 + (a\varphi)^2}{(a^2 + (a\varphi)^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{a^2(2 + \varphi^2)}{(a^2(1 + \varphi^2))^{3/2}} \\
 &= \frac{(2 + \varphi^2)}{a^3(1 + \varphi^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

□

Problema 6. Para la espiral logarítmica, dada en coordenadas polares por $r(t) = ae^t$, $\varphi(t) = bt$, a, b constantes (Figura 1(b)), probar lo siguiente:

1. La longitud de la curva en el intervalo $(-\infty, t]$ es proporcional al radio $r(t)$

Solución. Considere:

$$r(t) = ae^t$$

De esto,

$$\begin{aligned}
 r(\varphi) &= ae^{\frac{\varphi}{b}} \\
 r'(\varphi) &= \frac{\partial(r(\varphi))}{\partial\varphi} \\
 &= a \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(e^{\frac{\varphi}{b}} \right) \\
 &= \frac{a}{b} \cdot \left(e^{\frac{\varphi}{b}} \right) \\
 &= \frac{ae^{\varphi/b}}{b}
 \end{aligned}$$

La longitud de arco de la curva se define como:

$$\begin{aligned}
 s &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\frac{ae^{\varphi/b}}{b}\right)^2 + (ae^{\varphi/b})^2} d\varphi \\
 &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(ae^{\varphi/b})^2 \left(\frac{1}{b^2} + 1\right)} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (ae^{\varphi/b}) \sqrt{\left(\frac{1}{b^2} + 1\right)} d\varphi \\
 &= a \sqrt{\left(\frac{1}{b^2} + 1\right)} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (e^{\varphi/b}) d\varphi = a \sqrt{\left(\frac{1}{b^2} + 1\right)} [be^{\varphi/b}]_{\varphi_1}^{\varphi_2} \\
 &= ab \sqrt{\left(\frac{1}{b^2} + 1\right)} [e^{\varphi_2/b} - e^{\varphi_1/b}]
 \end{aligned}$$

Cuando $\varphi_2 = t$ y $\varphi_1 = -\infty$:

$$\begin{aligned} s &= ab \sqrt{\left(\frac{1}{b^2} + 1\right)} [e^{t/b} - 0] \\ &= b \sqrt{\left(\frac{1}{b^2} + 1\right)} [ae^{t/b}] \end{aligned}$$

Lo que demuestra que:

$$r(t) \propto b \sqrt{\left(\frac{1}{b^2} + 1\right)} [ae^{t/b}]$$

□

2. $\alpha(t) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow -\infty$ y α tiene longitud de arco finita en el intervalo $(-\infty, t_0]$.

A este problema se le hizo la corrección del infinito negativo, ya que en caso contrario $\alpha(t)$ nunca se va a 0, ni la longitud es finita.

Solución. Sea $\alpha(t)$ el vector posición. Tenemos:

$$r(t) = ae^t$$

Para encontrar $\alpha(t)$, entonces considérese $x = r \cos t$ y $y = r \sin t$. Entonces:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (r(t) \cos t, r(t) \sin t) \\ &= (ae^t \cos t, ae^t \sin t) \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (a(e^t \cos t - e^t \sin t), a(e^t \sin t + e^t \cos t)) \\ &= (ae^t(\cos t - \sin t), ae^t(\sin t + \cos t)) \end{aligned}$$

Debemos demostrar:

a) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(t) = 0$. Nótese:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(t) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (ae^t \cos \theta, ae^t \sin \theta) \\ &= (0, 0) = 0 \end{aligned}$$

b) $\alpha(t)$ tiene longitud de arco finita en el intervalo $(-\infty, t_0]$:

$$\begin{aligned}
 s &= \int_{-\infty}^{t_0} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{t_0} \sqrt{(ae^t(\cos t - \sin t))^2 + (ae^t(\sin t + \cos t))^2} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{t_0} ae^t \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{t_0} ae^t \sqrt{2(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{t_0} ae^t \sqrt{2} dt \\
 &= a\sqrt{2} [e^t]_{-\infty}^{t_0} = a\sqrt{2}e^{t_0}
 \end{aligned}$$

Mostrando que en efecto la longitud de arco es finita.

□

3. El vector $\alpha(t)$ tiene ángulo constante con el vector tangente $\alpha'(t)$.

Solución. Nótese,

$$\begin{aligned}
 \alpha(t) &= (ae^t \cos t, ae^t \sin t) \\
 \alpha'(t) &= (ae^t(\cos t - \sin t), ae^t(\sin t + \cos t))
 \end{aligned}$$

Ahora, considérese la propiead:

$$A \cdot B = |A||B| \cos \theta_{AB} \implies \theta_{AB} = \arccos \left(\frac{A \cdot B}{|A||B|} \right)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \theta_{AB} &= \arccos \left(\frac{A \cdot B}{|A||B|} \right) \\
 &= \arccos \left(\frac{(ae^t)^2(\cos^2 t - \cos t \sin t) + (ae^t)^2(\sin^2 t + \cos t \sin t)}{\sqrt{(ae^t \cos t)^2 + (ae^t \sin t)^2} \sqrt{(ae^t(\cos t - \sin t))^2 + (ae^t(\sin t + \cos t))^2}} \right) \\
 &= \arccos \left(\frac{(ae^t)^2}{ae^t \sqrt{(ae^t)^2(2(\cos^2 t + \sin^2 t))}} \right) \\
 &= \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

□

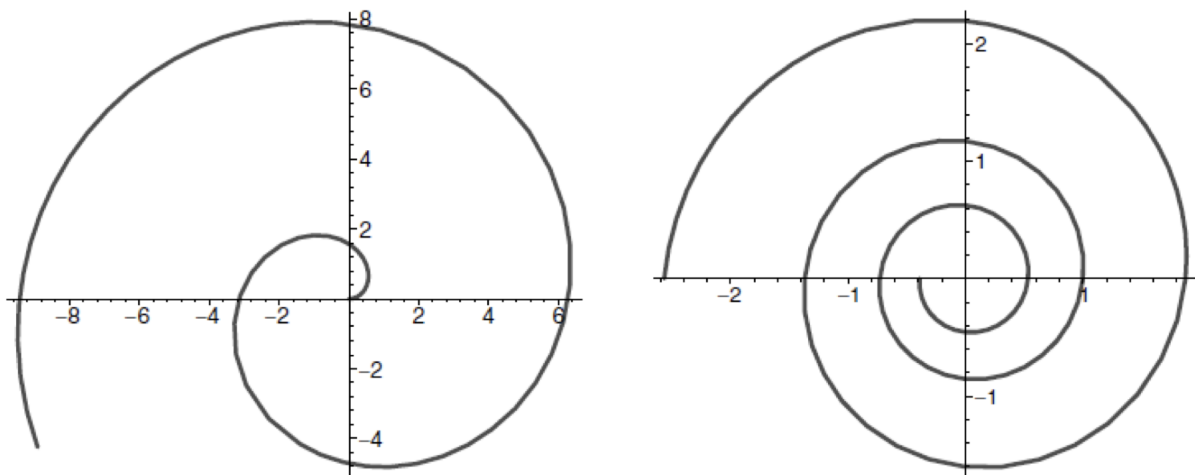


Figure 1: (a) espiral de Arquímedes, (b) espiral logarítmica.

Problema 7. *Mostrar que la curva de menor longitud entre dos puntos $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el segmento de recta que los une. (Sugerencia: ver las ideas en el Ejercicio 10, pág 11 de Do Carmo.)*

Solución. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada. Sea $[a, b] \subset I$ y sea $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$, tal que debemos probar:

$$|\alpha(b) - \alpha(a)| \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

- Primero, debemos mostrar la siguiente propiedad: para cualquier vector constante v , $|v| = 1$,

$$(q - p) \cdot v = \int_a^b \alpha'(t) \cdot v dt \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

- Sea

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha'(t) \cdot v dt &= \int_a^b (\alpha'_1(t)v_1 + \alpha'_2(t)v_2 + \cdots + \alpha'_n(t)v_n) dt \\ &= [\alpha_1(t)v_1 + \alpha_2(t)v_2 + \cdots + \alpha_n(t)v_n]_a^b \\ &= [\alpha_1(b)v_1 + \alpha_2(b)v_2 + \cdots + \alpha_n(b)v_n] - \\ &\quad - [\alpha_1(a)v_1 + \alpha_2(a)v_2 + \cdots + \alpha_n(a)v_n] \\ &= \alpha(b) \cdot v - \alpha(a) \cdot v \\ &= v \cdot (\alpha(b) - \alpha(a)) \\ &= v \cdot (p - q) \\ &= (p - q) \cdot v \end{aligned}$$

- Sea

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \alpha'(t) \cdot v dt &\leq \left| \int_a^b \alpha'(t) \cdot v dt \right| \\
 &\leq \int_a^b |\alpha'(t) \cdot v| dt \\
 &\leq \int_a^b |\alpha'(t)| \cdot \underbrace{|v|}_1 dt \\
 &= \int_a^b |\alpha'(t)| dt
 \end{aligned}$$

- Segundo, procedemos a la curva de menor longitud entre dos puntos p, q . Sea,

$$\begin{aligned}
 |\alpha(b) - \alpha(a)| &= |q - p| \\
 &= \frac{|q - p|^2}{|q - p|} \\
 &= \frac{(q - p) \cdot (q - p)}{|q - p|} \\
 &= (q - p) \cdot v
 \end{aligned}$$

Y por la parte uno:

$$\leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

□

Problema 8. Probar que la curvatura y la torsión de una curva de Frenet $\alpha(t)$ en \mathbb{R}^3 , parametrizada de forma arbitraria, están dadas por

$$\kappa(t) = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2}.$$

En particular, en el caso de curvas planas,

$$\kappa(t) = \frac{\det(\alpha', \alpha'')}{|\alpha'|^3}.$$

(Sugerencia: ver las ideas en el Ejercicio 12, pág 26 de Do Carmo.)

Solución.

□

Problema 9. Sea α la hélice en \mathbb{R}^3 , dada por

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad a, b \in \mathbb{R}^+.$$

Muestre que la curvatura y la torsión de α son constantes.

Solución. Sea

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \frac{d}{dt}(a \cos t, a \sin t, bt) \\ &= (-a \sin t, a \cos t, b)\end{aligned}$$

también,

$$\begin{aligned}\alpha''(t) &= \frac{d}{dt}(-a \sin t, a \cos t, b) \\ &= (-a \cos t, -a \sin t, 0)\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\alpha'''(t) &= \frac{d}{dt}(-a \cos t, -a \sin t, 0) \\ &= (a \sin t, -a \cos t, 0)\end{aligned}$$

Ahora bien,

■ La curvatura:

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3} \\ &= \frac{\left| \begin{bmatrix} -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{bmatrix} \right|}{\left(\sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} \right)^3} \\ &= \frac{|(0 + ab \sin t, -(0 + ab \cos t), a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t)|}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3} |(ab \sin t, -ab \cos t, a^2)| \\ &= \frac{1}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3} \sqrt{(ab \sin t)^2 + (-ab \cos t)^2 + (a^2)^2} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3} \sqrt{a^2(b^2 + a^2)}\end{aligned}$$

■ La torsión:

$$\begin{aligned}
 \tau(t) &= \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2} \\
 &= \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{|\alpha' \times \alpha''|^2} \\
 &= \frac{(ab \sin t, -ab \cos t, a^2) \cdot (a \sin t, -a \cos t, 0)}{|(ab \sin t, -ab \cos t, a^2)|^2} \\
 &= \frac{1}{a^2(b^2 + a^2)}(a^2b \sin^2 t + a^2b \cos^2 t) \\
 &= \frac{a^2b}{a^2(b^2 + a^2)} \\
 &= \frac{b}{(b^2 + a^2)}
 \end{aligned}$$

□

Problema 10. Construir una curva plana, parametrizada por longitud de arco, cuya curvatura esté dada exactamente por $\kappa(s) = s^{-1/2} = 1/s^{1/2} = 1/\sqrt{s}$.

Solución. Usando el procedimiento del **Teorema Fundamental de las Curvas Planas**, tenemos que la curva se puede construir a partir de la expresión

$$\alpha(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos(\theta(u)) du, \int_{s_0}^s \sin(\theta(u)) du \right), \quad s_0 \in I$$

en donde $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\theta(u) = \int_{s_0}^u \kappa_0(t) dt$. Primero, definimos $s_0 = 0$, y hacemos un cambio de variable tal que $k(t) = 1/\sqrt{t}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 \theta(u) &= \int_0^u \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\
 &= 2\sqrt{u}
 \end{aligned}$$

De esto:

$$\begin{aligned}
 \alpha(s) &= \left(\int_0^s \cos(2\sqrt{u}) du, \int_0^s \sin(2\sqrt{u}) du \right) \\
 &= \left(\sqrt{u} \sin(2\sqrt{u}) + \frac{1}{2} \cos(2\sqrt{u}) \Big|_0^s, \frac{1}{2} \sin(2\sqrt{u}) - \sqrt{u} \cos(2\sqrt{u}) \Big|_0^s \right) \\
 &= \left(\sqrt{s} \sin(2\sqrt{s}) + \frac{1}{2} \cos(2\sqrt{s}) - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \sin(2\sqrt{s}) - \sqrt{s} \cos(2\sqrt{s}) \right)
 \end{aligned}$$

□