1. Topología

Definición 1. *Sea $X \neq \varnothing$. Una clase τ de subconjunto de X es una topología sobre X, se cumple:*

1. $\varnothing, X \in \tau$
2. *La unión de una clase arbitraria de conjuntos en τ es un miembro de τ.*
3. *La intersección de una clase finita de miembros de τ está en τ.*

Los miembros de τ son los abiertos de X.

Proposición 1. *Si τ_1 y τ_2 son topologías sobre X, entonces $\tau_1 \cap \tau_2$ es topología sobre X.*

Definición 2. *Sean X y Y espacios topológicos y f un mapeo de X en Y. Se dice que f es continua si $f^{-1}(G)$ es un abierto de X para cada abierto de G de Y.*

Definición 3. *Se dice que el mapeo es abierto si, para cada abierto G de X, se cumple que $f(G)$ es abierto de Y.*

Definición 4. *Si f es continuo, entonces $f(x)$ es la imagen continua de X bajo f.*

Definición 5 (Homeomorfismo)**.** *Un homeomorfismo es un mapeo biyectivo y bicontinuo (continuo y abierto) entre espacios topológicos. En este caso, los espacios son homeomorfos.*

Definición 6. *El par (A, τ_A) es un espacio topologico y se dice es un subespacio de X,*

1. $\varnothing \in \tau \implies A \cap \varnothing = \varnothing \in \tau_A$ *y* $X \in \tau \implies A \cap X = A \in \tau_A$.
2. *Sea* $\{G_i\}_{i\in I}$ *una colección de miembros de* $\tau_A \implies \exists H_i \in \tau \ni G_i = A \cap H_i, \forall i \implies \bigcup_i G_i = \bigcup_i (A \cap H_i) = A \cap \left(\underbrace{\bigcup_i H_i}_{\in \tau} \right) \in \tau_A$

3. *Sean* $G_1, G_2 \in \tau_A \implies \exists H_i \in \tau \ni G_i = A \cap H_i$, $i = 1, 2$. *Entonces,* $G_1 \cap G_2 = (A \cap H_1) \cap (A \cap H_2) = A \cap (\underbrace{H_1 \cap H_2}_{\in \tau}) \in \tau_A \implies \tau_A$ *es topología sobre* A.

Definición 7. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Un subconjunto* $A \subset X$ *es cerrado si y solo si* $A^c \in \tau$.

Definición 8. *Sea* X *un espacio topológico:*

1. *Una vecindad de un punto (o de un conjunto), es un abierto de* X *que contiene al punto (o al conjunto).*

2. *Sea* $A \subseteq X$. *Un punto* x *en* A *es aislado si existe una vecindad de* x *que no contiene ningún otro punto de* A.

3. *Sea* $A \subseteq X$. *Un punto de* $y \in X$ *es un punto límite de* A *si,* $\forall G \in \tau \ni y \in G$, *se tiene que* $(G - \{y\}) \cap A \neq \varnothing$.

   EL conjunto de puntos límite de A *se llama derivado de* A, $(A', D(A))$.

4. *Sea* $A \subseteq X$. *La cerradura de* A, *denotado* $\overline{A}$, *es el cerrado más pequeño que contiene a* A. *Es decir, si* F_i *son los cerrados de* X *que contiene a* $A \implies \overline{A} = \bigcap_i F_i$.

   Tenemos:

   a) $A \subseteq \overline{A}$

   b) *Si* A *es cerrado* $\implies A = \overline{A}$.

5. *Un subconjunto* A *de* X *es denso (siempre denso), si* $\overline{A} = X$.

6. *El espacio topológico* X *es separable si tiene un subconjunto separable contable y denso.*

7. *Un punto de adherencia de* $A \subseteq X$ *es cualquier elemento de* $\overline{A}$.

Proposición 2. *Sea* $A \subset B \implies A' \subset B'$.

Proposición 3. *Sea* $A \subset B$ *y sea* $x \in A' \implies$ *si* G *es un abierto* $\ni x \in G \implies (G - \{x\}) \cap B \supset (G - \{x\}) \cap A \neq \varnothing \implies x \in B' \implies A' \subset B'$.

Proposición 4. *Derivado de la unión* $(A \cup B)' = A' \cup B'$

Proposición 5. $A \subseteq X$ *es cerrado ssi* $A' \subseteq A$.

Proposición 6. *Sea* F *un superconjunto cerrado de* A, *entonces* $A' \subset F$.

Proposición 7. $A \cup A'$ *es cerrado.*

Proposición 8. $\overline{A} = A \cup A'$

Proposición 9. *Si* $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.

Proposición 10. $\overline{A \cup B} = \underbrace{\overline{A} \cup \overline{B}}_{cerrado}$

Teorema 1. *Sea*

1. $\overline{\varnothing} = \varnothing$
2. $A \subset \overline{A}$
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
4. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Definición 9.

1. *Un punto* P *de* X *es interior de* $A \subseteq X$, *si existe un abierto* $G \ni$

$$p \in G \subset A$$

2. *El interior de* A, *denotado* $\int(A)$ *o* A°, *es el conjunto de todos los puntos interiores de* A.

Definición 10. *Un punto frontera de* $A \subset X$ *es un punto tal que, cada vecindad del punto intersecta a* A *y* A^c.

Definición 11. *Una base* β *(abierta) para el espacio topológico* (X, τ) *es una clase de abiertos de* X *tal que cada abierto en* τ *puede escribirse como uniones de los miembros de la clase.*

Definición 12. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Una subclase* S *de abiertos en* τ *es una subbase de la topología* τ*, si las intersecciones finitas de miembros de* S *producen una base* τ.

Teorema 2. *Los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *Una familia* β *de subconjuntos abiertos del espacio topológico* (X, τ) *es una base para* τ*, si cada abierto de* τ *es unión de miembros de* β.

2. $\beta \subset \tau$ *es una base para* τ *ssi* $\forall G \in \tau, \forall p \in G \exists B_p \in \beta \ni p \in B_p \subset G$.

Teorema 3. *Sea* β *una familia de subconjuntos de un conjunto no vacío* X*. Entonces,* β *es una base para una topologia* τ *sobre* X *ssi se cumplen:*

1. $X = \bigcup_{B \in \beta} B$

2. $\forall B, B^* \in \beta$ *se tiene que* $B \cap B^*$ *la union de miembros de* $\beta(\iff p \in B \cap B^* \exists B_p \in \beta \ni p \in B_p \subset B \cap B^*)$

Teorema 4. *Sea* X *cualquier conjunto no vacío y sea* S *una clase arbitraria de subconjuntos de* X*. Entonces,* S *puede constituirse en la subbase para una topología abierta para una topología sobre* X *en el sentido que las intersecciones finitas de los miembros de* S *producen una base para dicha topología.*

Teorema 5. *Sea* $X \neq \varnothing$ *y sea* S *una clase arbitraria de subconjunto de* X*. Entonces,* S *puede servir como subbase abierta de una topología sobre* X *en el sentido que la clase* τ *de todas las uniones de intersecciones finitas en* S *es una topogía.*

Lema 6. *Si* S *es subbase de las topologías* τ *y* τ^* *sobre* $X \implies \tau = \tau^*$

Teorema 7. *Sea* X *un subconjunto no vacío y sea* S *una clase de subconjuntos de* X*. La topología* τ *sobre* X*, generada por* S*, es la intersección de todas las topologías sobre* X *que contienen a* S.

Definición 13. *Un espacio topológico que tiene una base contable es un espacio segundo contable.*

Teorema 8 (de Lindelof). *Sea X un espacio vacío no contable. Si un abierto de G de X se puede representar como unión de una clase $\{G_i\}$ de abierto de $X \implies G$ puede representarse como unión contable de los G_i.*

Definición 14. *Un espacio topológico es un espacio de Hausdorf (T_2) si dados $x, y \in X, x \not{y}, \exists u, v \in \tau \ni x \in U, y \in V$ y $u \cap v = \varnothing$*

Teorema 9. *Sea (X, d) un espacio métrico y sean $x, y \in X, x \not{y} \implies$ sea $\delta = d(x, y) \implies u = \beta_{\delta/2}(x)$ y $v = \beta_{\delta/2}(y) \implies x \in u$ y $y \in V$ y $u \cap v = \varnothing$. Por lo tanto, es de Hausdorf.*

Teorema 10. *Composición de mapeos continuos es un mapeo continuo. Sean $(X, \tau), (Y, \tau^*), (Z, \tau^{**})$ espacio topológicos y sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ mapeos continuos. A probar $g \circ f : X \to Z$. Sea $G \in \tau^{**} \implies g^{-1}(G) \in \tau^* \implies f^{-1}[g^{-1}(G)] \in \tau = (g \circ f)^{-1}(G) \in \tau$.*

Teorema 11. *Sea $\{\tau_i\}$ sobre X, si $f : X \to Y$ continua, $\forall \tau_i \implies f$ es continuo con respecto a $\bigcap_i \tau_i$.*

Teorema 12. *Si X es un $T_2 \implies$ cualquier sucesión de puntos en X (a lemas) es un punto de X.*

Teorema 13. *Cada subconjunto límite $A \subseteq X$ es un T_2 es cerrado.*

Definición 15. *Sea (X, τ) y (Y, τ^*) esapacios topológicos. El mapeo $f : X \to Y$ es continuo si para cada $G \in \tau^*$ se tiene que $f^{-1}(G) \in \tau$*

Proposición 11. *Sea $f : X \to Y$ un mapeo entre espacios topológicos. Entonces, f es un mapeo continuo ssi $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}, \forall A \subseteq X$*

Propiedades:

1. $f[f^{-1}(A)] = A$
2. $f^{-1}[\underbrace{f(A)}_{\subseteq X}] \supset A$

Proposición 12. *Sea $\{\tau_i\}$ una colección de topologías sobre X. Si $f : X \to Y$ es continuo con respecto a cada $\tau_i \implies f$ es continuo con respecto a $\tau = \bigcap_i \tau_i \implies f$ es continuo respecto a $\tau = \bigcap_i \tau_i$.*

Proposición 13. *Sea* $f : (X, \tau) \to (Y, \tau)$ *un mapeo continuo, si* $A \subset X \implies f|_A : (A, \tau_A) \to (Y, \tau')$ *es continua.*

Definición 16. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico y* $x \in X$ *un subconjunto* $U \subseteq X$ *es vecindad de* x*, si* $\exists V \in \tau \ni x \in V \subset U$ *(es decir,* x *es un punto interior de* U*.)*

Definición 17. *Lqa colección de todas las vecindades de un punto* $x \in X$ *se llamna sistema de vecindades de* x*. Notación:* N_x*.*

Proposición 14. N_x *es cerrado bajo intersecciones y extensiones. Es decir:*

1. *Si* $u, w \in N_x \implies u \cap w \in N_x$*.*

2. *Si* $u \in N_x$ *y* $u \subseteq w \implies w \in N_x$*.*

Proposición 15. *Sea* A *un subconjunto del espacio topológico* $(X, \tau) \ni \forall x \in A \exists G \in \tau \ni x \in G \subset A$*. Entonces,* A *es abierto en* τ*.*

Proposición 16. *Un conjunto* G *es abierto ssi* G *es vecindad de cada uno de sus puntos.*

Proposición 17. *Sea*

1. $N_x \neq \varnothing$ *y* $x \in A, \forall A \in N_x$*.*

2. *Cada miembro* $A \in N_x$ *es un superconjunto de un miembro* $G \in N_x$*, donde* G *es vecindad de cada uno de sus puntos.*

Definición 18. *Un mapeo* $f : X \to Y$ *entre espacios topologicos es continuo en un punto* $x \in X$*, para cada* $U \in N_f(x) \exists V \in N_x \ni f(V) \subset U$*.*

Teorema 14. *Un mapeo* $f : X \to Y$ *entre espacios topologicos, es continuio ssi es continuo en cada punto de* X*.*

Teorema 15. *Un mapeo* $f : X \to Y$ *es continuo ssi es continuo en cada punto de* X*.*

Definición 19. *Una función* $f : X \to Y$ *es secuencialmente continua en un punto* $p \in X$ *ssi para cada sucesión* (a_n)*, se cumple que: si* $a_n \to p \implies f(a_n) \to f(p)$

Teorema 16. *Si una función $f : X \to Y$ es continua en $p \in X$, entonces f es secuencialmente continua en $p \in X$.*

Definición 20. *Un mapeo $f : X \to Y$ es*

1. *Abierto, si $\forall G$, abierto de X, $f(G)$ es abierto de Y.*

2. *Cerrado, si $\forall H$, cerrado de X, $f(H)$ es cerrado de Y.*

Definición 21. *Los espacios topológicos (X, τ) y (Y, τ') son homeomorfos si existe una función $f : X \to Y$ tal que:*

1. *f es biyectiva.*

2. *f y f^{-1} son continuas.*

En este caso, f es un homeomorfismo.

Proposición 18. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ un mapeo abierto e inyectivo y sea $A \subset X$ tal que $f(A) = B$. Entonces, la restricción $f_A : (A, \tau_A) \to (B, \tau_B)$ es abierto e inyectivo.*

Teorema 17. *Sea $\{f_i : X \to (Y_i, \tau_i)\}$ una colección de mapeos definidos sobre un conjunto vacio de X sobre los espacios topologicos (Y_i, τ_i), sea*

$$S = \bigcup_i \{f^{-1}(H) : H \in \tau_i\},$$

y definamos τ como la topologia sobre X generada por S.

1. *Todos los f_i son continuas con respecto a τ.*

2. *Si τ^* es la intersección de todas las topologias sobre X con respecto a las cuales las f_i son continuas, entonces $\tau = \tau^*$.*

3. *τ es la topologia menos fina sobre X tales que las f_i son continuas.*

4. *S es una subbase para τ.*

Topologia producto

Sea X_α un conjunto, $\forall \alpha \in I$. El producto cartesiano de las x_α, es el conjunto

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha := \{x : I \to \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \ni x(\alpha) \in X_\alpha, \forall \alpha \in I\}$$

Definición 22. *Sea $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de espacios topológicos y sea $X = \prod_{\alpha \in I} x_\alpha$. La topologia menos fina que hace continuas a las proyecciones sobre X, es la topologia producto.*

Definición 23. *Sean (X_α, τ_α), $\alpha \in I$ espacios topologicos y sea $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$*

1. *Las funciones $\pi_k : X \to X_k$ se llaman proyecciones.*

2. *La topologia generada por las proyecciones en la topologia producto de X.*

3. *Es decir, es la topologia menos fuerte que hace continuas a las proyeccciones.*

4. *Un espacio producto tiene la forma*

$$\left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, \tau \right)$$

Proposición 19. *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de espacios de Hausdorff, y sea $X = \prod_\alpha X_\alpha$ el espacio producto. Entonces, X es de Hausdorff.*

Problema 1. *Una funcion f del espacio topologico $\prod_\alpha X_\alpha$ es continua ssi para cada proyeccion π_i, se tiene que $\pi_\alpha \circ f$ es continua.*

1.1. Compactos

Definición 24. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico una clase* $\{H_i\}$ *de abiertos de* X *es una cubierta abierta de* X*, si* $\bigcup_i H_i = X$.

Definición 25. *Una subclase de una cubierta abierta de* X *que también es cubierta abierta es una subcubierta de la inicial.*

Definición 26. *Un espacio compacto es un espacio topológico en el que cada cubierta abierta tiene una subcubierta finita. Es representar* $X = \bigcup_{i \in I}^{n} H_i$

Teorema 18. *Todo subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.*

Teorema 19. *Cualquier imagen continua de un espacio compacto es compacto.*

Proposición 20. *Propiedad de intersección finita*

Teorema 20. *Los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. X *es un espacio compacto.*

2. *Para cada clase* $\{F_i\}$ *de cerrados de* $X \ni \bigcap_i F_i = \varnothing$*, se cumple que* $\{F_i\}$ *contiene una subclase finita* $\{F_{i_1}, \cdots, F_{i_m}\} \ni F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_m} = \varnothing$

Teorema 21. X *es un espacio compacto ssi cadad clase de cerrados de* X *que tiene la pif, tinee intersección no vacía.*

Teorema 22. *Un espacio topológico es compacto si cada cubierta abierta básica tiene subcubierta abierta finita.*

Teorema 23. *Un espacio topológico es compacto si cada cubierta abierta subbásica tiene una subcubierta finita.*

Teorema 24. *En un espacio de* T_2*, cualquier punto y un subespacio disjunto y compacto, puede separarse por abiertos, en el sentido que tienen vecindades disjuntas.*

Teorema 25. *Cada subespacio compacto de un* T_2 *es cerrado.*

Teorema 26. *Un mapeo biyectivo y continuo de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff es un homeomorfismo.*

Definición 27. *Un espacio X es T_1 si, para $x, y \in X$, $x \neq y$, existen vecindades G y H tales que $x \in G$ y $y \notin G$; $y \in H$ y $x \notin H$*

Teorema 27. *Un espacio topológico es T_1 ssi los unitarios son cerrados.*

Proposición 21. *Tenemos*

1. *$\mathbb{R}$ con la topología usual es T_1.*

2. *Cada T_2 es T_1.*

Teorema 28. *Cada subespacio de un T_1 es un T_1.*

Definición 28. *Un espacio X es regular ssi satisface: si F es un cerrado de X y $p \in X \ni p \notin F$, existen abiertos G y $G \ni F \subset G$ y $\{p\} \subset H$. $G \cap H = \varnothing$*

Definición 29. *Un espacio topológico es T_3 si es regular y T_1.*

Teorema 29. *Si X es T_3 entonces X es T_2.*

Teorema 30. *Un espacio X es normal es normal si para F_1 y F_2, cerrados disjuntos de X, existen vecindades dijuntas G y H tal que $F_1 \subset G$ y $F_2 \subset H$.*

Definición 30. *Un espacio topológico que es normal y T_1 es un T_4.*

Teorema 31. *Los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *X es normal*

2. *Si H es un superconjunto abierto del cerrado F, existe un abierto G tal que*

$$F \subset G \subset \overline{G} \subset H$$

Proposición 22. *Si X es un $T_4 \implies X$ es un T_3.*

Definición 31. *Sea $F := \{f_j : j \in I\}$ la clase de funciones del conjunto X en el conjunto Y. Se dice que F separa puntos si, $\forall x, y \in X, x \neq y$, se tiene que $f_i(x) \neq f_i(y)$.*

Proposición 23. *Si $C(X,\mathbb{R})$ es la clase de funciones continuas y de valores reales sobre X, que separa puntos $\Longrightarrow$ X es Hausdorff.*

Definición 32. *Un espacio topológico es completamente regular ssi satisface: SIi F es un cerrado de X y $p \in X \ni p \notin F$, entonces existe una función continua. $f : X \to [0,1] \ni f(p) = 0$ y $f(F) = \{1\}$.*

Teorema 32. *Si X es completamente regular, entonces X es regular.*

Problema 2. *1. 1. Demuestre que $f : X \to Y$ es continua ssi $f^{-1}(A^0) \subset [f^{-1}(A)]^0$, para cada $A \subset X$.*

2. 2. Considere a $\mathbb{R}$ con la topología usual. Pruebe que si cada función $f : X \to \mathbb{R}$ es continua, entonces X es un espacio discreto.

3. 3. Sea $f : X \to Y$ un mapeo entre espacios topológicos. Demuestre los enunciados siguientes:

a*) 3.1. f es cerrado ssi $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$ para cada $A \subset X$.*

b*) 3.2. f es abierto ssi $f(A^0) \subset (f(A))^0$ para cada $A \subset X$.*

4. 4. Pruebe cada una de las siguientes es una propiedad topológica: Punto límite, Interior, Frontera, Vecindad

5. Suponga que X, Y son espacios topológicos tales que $X = \cup X_n \& Y = \cup Y_n$, donde (X_n), (Y_n) son sucesiones de conjuntos abiertos disjuntos en X & Y, respectivamente. Pruebe que, si X_n es homemorfo a Y_n para cada n, entonces X & Y son homeomorfos.

Problema 3. *1. 1.1. Si* $A \subset X$*, demuestre que la familia de todos los subconjuntos de* X *que contienen a* A*, junto con el conjunto vacío* $\emptyset$*, es una topología sobre* X*. 1.2. ¿Qué topología resulta cuando* $A = \emptyset$ *? ¿Y cuando* $A = X$ *? 2. 2.1. Pruebe la operación* $A \mapsto A^0$*, en un espacio topológico* X *tiene las propiedades siguientes: a)* $A^0 \subset A$ *b)* $(A^0)^0 = A^0$ *c)* $A^0 \cap B^0 = (A \cap B)^0$ *d)* $X^0 = X$ *e)* G *es abierto ssi* $G^0 = G$ *2.2. Conversamente, demuestre que si* X *es un conjunto, cualquier mapeo de* $\mathcal{P}(X)$ *en* $\mathcal{P}(X)$*, tal que* $A \mapsto A^0$ *y que satisface de las propiedades a), b), c) y d), y si los conjuntos abiertos se definen en* X *mediante e), entonces el resultado es una topología sobre* X *en la cual el interior de un conjunto* $A \subset X$ *es* A^0*. 3. Pruebe que las topologías sobre un conjunto fijo* X*, parcialmente ordenadas por la inclusión, forman un retículo. (Ayuda: Ver problema 3G de Willard). 4. Un subconjunto abierto* G *en un espacio topológico es regularmente abierto ssi* G *es el interior de su cerradura. Un subconjunto cerrado es regularmente cerrado ssi es la cerradura de su interior. Pruebe que: 4.1. El complemento de un conjunto regularmente abierto es regularmente cerrado y viceversa. 4.2. Si* A *es un subconjunto cualquiera de un espacio topológico, entonces* $(\bar{A})^0$ *es regularmente abierto. 4.3. La intersección de dos conjuntos regularmente abiertos es regularmente abierto. ¿Se cumple esta propiedad en el caso de la unión? 5. Demuestre que si* $\mathcal{B}$ *es una base para una topología sobre* X*, entonces la topología generada por* $\mathcal{B}$ *es igual a la intersección de todas las topologías sobre* X *que contienen a* B*.*