Universidad del Valle de Guatemala

MM2034 - 2 semestre - 2022

Licenciatura en matemática aplicada

LÓGICA

Catedrático: Paulo Mejía

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay

Carné: 19857

Correo: rom19857@uvg.edu.gt

15 de marzo de 2023

Índice

1. Topología

Definición 1. *Sea $X \neq \varnothing$. Una clase τ de subconjunto de X es una topología sobre X, se cumple:*

1. $\varnothing, X \in \tau$
2. *La unión de una clase arbitraria de conjuntos en τ es un miembro de τ.*
3. *La intersección de una clase finita de miembros de τ está en τ.*

Los miembros de τ son los abiertos de X.

1. El par (X, τ) es un espacio topológico.
2. A los elementos de X se les llama puntos.

estructura topológica

Ejemplo 1.

1. *Sea $X \neq \varnothing \implies \tau = P(X)$ es una topología sobre X. A τ se le llama topología discreta de X, y (X, τ) es un espacio discreto.*
2. *Sea $X \neq \varnothing \implies \tau = \{\varnothing, X\}$ es una topología sobre X. A τ se le llama topología indiscreta, y (X, τ) es un espacio indiscreto.*
3. *$X = \mathbb{R}^2$ y τ es la colección de abiertos de $\mathbb{R}^2$ definido en términos de la métrica usual. A τ se le llama topología usual de $\mathbb{R}^2$.*
4. *Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$.*
   a) *Sea $\tau_1 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\} \implies \tau_1$ es una topología sobre X.*
   b) *Sea $\tau_2 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$. Note que $\{a\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\} \notin \tau_2 \implies \tau_2$ no es topología sobre X*
   c) *Sea X un conjunto infinito y sea τ el vacío junto con la colección de subconjunto de X cuyos complementos son finitos. τ es una topología sobre X, y se llama topología cofinita sobre X.*

NOTA. *Un espacio metrizable es un espacio topológico X con la propiedad que existe una métrica que genera los abiertos de la topología dada.*
Problema 1. *¿Qué tipos de espacios topológicos son metrizables?*

Proposición 1. *Si τ_1 y τ_2 son topologías sobre X, entonces $\tau_1 \cap \tau_2$ es topología sobre X.*

Demostración.

1. Como τ_1 y τ_2 son topologías, etnonces: $X, \varnothing \in \tau_1$ y $X, \varnothing \in \tau_2 \implies X \in \tau_1 \cap \tau_2$ y $\varnothing \in \tau_1 \cap \tau_2$.

2. Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una subcolección de $\tau_1 \cap \tau_2 \implies G_i \in \tau_1, \forall i \in I \implies \bigcup_i G_i \in \tau_i$ y $G_i \in \tau_2, \forall i \in I \implies \bigcup_i G_i \in \tau_2$. Entonces $\bigcup_i G_i \in \tau_1 \cap \tau_2$

3. Sea G_1 y $G_2 \in \tau_1 \cap \tau_2 \implies G_1 \in \tau_1$ y $G_1 \in \tau_2$. $G_2 \in \tau_1$ y $G_2 \in \tau_2$. Entonces $G_1 \cap G_2 \in \tau_1$ y $G_1 \cap G_2 \in \tau_2 \implies G_1 \cap G_2 \in \tau_1 \cap \tau_2$. Entonces, $\tau_1 \cap \tau_2$ es una topología sobre X.

■

NOTA. *Sea $X = \{a, b, c\}$ y sean:*

- $\tau_1 = \{X, \varnothing, \{a\}\}$, $\tau_2 = \{X, \varnothing, \{b\}\}$. *Entonces,* $\tau_1 \cup \tau_2 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}\}$, *pero* $\{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$. $\therefore \tau_1 \cup \tau_2$ *no es topología sobre* X.

Ejemplo 2. *Sea $f : X \to Y$, donde X es un conjunto no vacío y Y es el espacio topológico de (Y, τ'). Entonces $\tau = \{f^{-1}(G) : G \in \tau'\}$ es una topología sobre X. En efecto:*

1. $\varnothing \implies \tau' \implies f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \tau$. $Y \in \tau' \implies f^{-1}(Y) = X \in \tau$

2. *Sea $\{G_i\}$ una subclase de τ. Como $G_i \in \tau, \forall \implies \exists H_i \in \tau' \ni G_i = f^{-1}(H_i) \implies \cup_i G_i = \cup_i f^{-1}(H_i) = f^{-1}(\underbrace{\bigcup_i H_i}_{\in\tau'}) \in \tau$*

Definición 2. *Sean X y Y espacios topológicos y f un mapeo de X en Y. Se dice que f es continua si $f^{-1}(G)$ es un abierto de X para cada abierto de G de Y.*

Definición 3. *Se dice que el mapeo es abierto si, para cada abierto G de X, se cumple que $f(G)$ es abierto de Y.*

Definición 4. *Si f es continuo, entonces $f(x)$ es la imagen continua de X bajo f.*

Definición 5 (Homeomorfismo). *Un homeomorfismo es un mapeo biyectivo y bicontinuo (continuo y abierto) entre espacios topológicos. En este caso, los espacios son homeomorfos.*

> **NOTA.** *Una propiedad topológica es una propiedad que si la tiene el espacio topológico X, la tiene también cualquier espacio homeomorfo a X*

NOTA. *Sea A un subconjunto no vacío del espacio topológico (X, τ). Considerese la clase:*

$$\tau_A = \{A \cap G : G \in \tau \textit{es abierto de } X\}$$

Entonces, τ_A es una topologia sobre A, la cual se llama topologia relativa sobre A.

Definición 6. *El par (A, τ_A) es un espacio topologico y se dice es un subespacio de X,*

1. $\varnothing \in \tau \implies A \cap \varnothing = \varnothing \in \tau_A$ *y* $X \in \tau \implies A \cap X = A \in \tau_A$.
2. *Sea* $\{G_i\}_{i \in I}$ *una colección de miembros de* $\tau_A \implies \exists H_i \in \tau \ni G_i = A \cap H_i, \forall i \implies \bigcup_i G_i = \bigcup_i (A \cap H_i) = A \cap \left(\underbrace{\bigcup_i H_i}_{\in \tau} \right) \in \tau_A$
3. *Sean* $G_1, G_2 \in \tau_A \implies \exists H_i \in \tau \ni G_i = A \cap H_i$, $i = 1, 2$. *Entonces,* $G_1 \cap G_2 = (A \cap H_1) \cap (A \cap H_2) = A \cap (\underbrace{H_1 \cap H_2}_{\in \tau}) \in \tau_A \implies \tau_A$ *es topología sobre* A.

Ejemplo 3. *Tenemos,*

1. *Sea* τ *la topología usual de* $\mathbb{R}$ *y considere la topología relativa* $\tau_{\mathbb{Z}^+}$ *(en este caso,* $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{R}$*). Nótese que* $\{n_0\}$ *es abierto, la unión de unitarios es abierto de* $\tau_{\mathbb{Z}^+} \implies \tau_{\mathbb{Z}^+}$ *es la topología discreta de* $\mathbb{Z}^+$.

2. *Considere* $(\mathbb{R}, \tau)$, *donde* τ *es la topología usual de* $\mathbb{R}$ *y sea* $I = [0, 1]$. *Entonces,*

   a) $(1/2, 1] = [0, 1] \cap (1/2, 2) \in \tau_I$

   b) $(1/2, 2/3) = [0, 1] \cap (1/2, 2/3) \in \tau_I$

   c) $(0, 1/2] \notin \tau_I$, *ya que no existe un abierto* $G \in \tau \ni (0, 1/2] = I \cap G$.

3. *Sea* $X = \{a, b, c, d, e\}$ *y sea*

$$\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

> $\tau_A = \{A, \varnothing, \{a\}, \{a, c\}, \{a, e\}\}$

Considere $A = \{a, c, e\}$ *entonces:*

- $A \cap X = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap \{a\} = \{a\}$
- $A \cap \{a, b\} = \{a\}$
- $A \cap \{a, c, d\} = \{a, c\}$
- $A \cap \{a, b, c, d\} = \{a, c\}$
- $A \cap \{a, b, e\} = \{a, e\}$

1.0.1. Objeto de estudio de la topología

: Estudio de todas las propiedades topológicas de los espacios

Definición 7. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Un subconjunto $A \subset X$ es cerrado si y solo si $A^c \in \tau$.*

Ejemplo 4. *Sea (X,τ) un espacio discreto. Sea $A \subset X \implies A \in \tau \implies A^c \subset X \implies A^c \in \tau \implies A$ es cerrado. Entonces, $A \subset X$ es abierto y cerrado en X.*

> **NOTA.** *Sea (X,τ) un espacio topológico,*
>
> 1. *$\phi \in \tau \implies \phi^c = X$ es cerrado. $X \in \tau \implies X^c = \phi$ es cerrado.*
> 2. *Considere una familia arbitraria $\{F_i\}$ de cerrados en $\tau \implies \{F_i^c\} \subset \tau \implies \bigcup_i F_i^c \in \tau \implies \left(\bigcup_i F_i^c\right)^c = \bigcap_i F_i$ es cerrado.*
> 3. *Sean F_1 y F_2 cerrados en $\tau \implies F_1^c$ y $F_2^c \in \tau \implies F_1^c \cap F_2^c \in \tau \implies (F_1^c \cap F_2^c)^c = F_1 \cup F_2$ es cerrado.*

Definición 8. *Sea X un espacio topológico:*

1. *Una vecindad de un punto (o de un conjunto), es un abierto de X que contiene al punto (o al conjunto).*

2. *Sea $A \subseteq X$. Un punto x en A es aislado si existe una vecindad de x que no contiene ningún otro punto de A.*

3. *Sea $A \subseteq X$. Un punto de $y \in X$ es un punto límite de A si, $\forall G \in \tau \ni y \in G$, se tiene que $(G - \{y\}) \cap A \neq \varnothing$.*

   > *EL conjunto de puntos límite de A se llama derivado de A, $(A', D(A))$.*

4. *Sea $A \subseteq X$. La cerradura de A, denotado $\overline{A}$, es el cerrado más pequeño que contiene a A. Es decir, si F_i son los cerrados de X que contiene a $A \implies \overline{A} = \bigcap_i F_i$.*

   > *Tenemos:*
   >
   > a) *$A \subseteq \overline{A}$*
   >
   > b) *Si A es cerrado $\implies A = \overline{A}$.*

5. *Un subconjunto A de X es denso (siempre denso), si $\overline{A} = X$.*

6. *El espacio topológico X es separable si tiene un subconjunto separable contable y denso.*

7. *Un punto de adherencia de $A \subseteq X$ es cualquier elemento de $\overline{A}$.*

Proposición 2. *Sea $A \subset B \implies A' \subset B'$.*

Proposición 3. *Sea $A \subset B$ y sea $x \in A' \implies$ si G es un abierto $\ni x \in G \implies (G - \{x\}) \cap B \supset (G - \{x\}) \cap A \neq \varnothing \implies x \in B' \implies A' \subset B'$.*

Proposición 4. *Derivado de la unión $(A \cup B)' = A' \cup B'$*

Demostración. Por doble contención:

- $(\supseteq)$. A probar: $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$. Sea $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B \implies A' \subseteq (A \cup B)'$ y $B' \subseteq (A \cup B)' \implies A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$

- $(\subseteq)$. A probar $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B' \iff x \in (A \cup B)' \implies x \in A' \cup B' \iff$ si $x \notin A' \cup B' \implies x \notin (A \cup B)'$.

    - Suponemos que $x \notin A' \cup B' \implies x \notin A'$ y $x \notin B' \implies$ existen G, H abiertos de $X \ni x \in G$ y $x \in H$ y $(G - \{x\}) \cap A = \varnothing$ y $(H - \{x\}) \cap B = \varnothing$ ya que $x \in G$ y $x \in H \implies x \in G \cap H$. Además, $G \cap H \subseteq G$ y $G \cap H \subseteq H$. Entonces $(G \cap H - \{x\}) \cap A = \varnothing$ y $(G \cap H - \{x\}) \cap B = \varnothing$. Por lo tanto, $(G \cap H - \{x\}) \cap (A \cup B) = \varnothing$.

■

Proposición 5. *$A \subseteq X$ es cerrado ssi $A' \subseteq A$.*

Demostración. Sea

- $(\implies)$

- $(\impliedby)$

■

Proposición 6. *Sea F un superconjunto cerrado de A, entonces $A' \subset F$.*

Demostración. Como $A \subset F \implies A' \subset F'$. Como F es cerrado, $F' \subset F \implies A' \subset F$. ■

Proposición 7. *$A \cup A'$ es cerrado.*

Demostración. A probar: $(A \cup A')^c$ es abierto. Sea $x \in (A \cup A')^c \implies x \notin A$ y $x \notin A' \implies \exists G$ abierto $\ni G \cap A = \varnothing$.

Sea $G \cap A' = \varnothing$. Supóngase que $y \in G \cap A' \implies y \in G$ y $y \in A' \implies (G - \{y\}) \cap A \neq 0 (\rightarrow\leftarrow)$

Por otra parte, $G \cap A' = \varnothing$. Entonces,

$$\begin{aligned} G \cap (A \cup A') &= (G \cap A) \cup (G \cap A') \\ &= \varnothing \cup \varnothing \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

$\implies G \subset (A \cup A')^c \implies (A \cup A')^c$ es abierto $\implies A \cup A'$ es cerrado. ■

Proposición 8. $\overline{A} = A \cup A'$

Demostración. Sea

- A probar $\overline{A} \subset A \cup A' \implies A \subset \underbrace{A}_{cerrado} \cup A' \implies A \subset \overline{A} \subset A \cup \overline{A}$.
- A probar: $A \cup A' \subset \overline{A}$. Entonces $A \subset \overline{A}$, $A' \subset (\overline{A})' \subset \overline{A}$. Entonces $A \subset \overline{A}$ y $\overline{A} \subset \overline{A}$, entonces $A \cup A' \subset \overline{A}$.

■

Proposición 9. *Si $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.*

Demostración. $A \subset B \implies A' \subset B' \implies A \cup A' \subset B \cup B' \implies \overline{A} \subset \overline{B}$. ■

Proposición 10. $\overline{A \cup B} = \underbrace{\overline{A} \cup \overline{B}}_{cerrado}$

Demostración.

- Sabemos que $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \implies A \cup \subset \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
- $A \subset A \cup B \implies \overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $B \subset A \cup B \implies \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Entones $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$

$\blacksquare$

Teorema 1. *Sea*

1. $\overline{\varnothing} = \varnothing$
2. $A \subset \overline{A}$
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
4. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Demostración.

1. Como $\varnothing$ es cerraddo entonces $\overline{\varnothing} = \varnothing$
2. $A \subset \overline{A}$, por la cerradura.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, por propiedad anterior.
4. Como $\overline{A}$ es cerrado, entonces $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

$\blacksquare$

Definición 9.

1. *Un punto P de X es interior de $A \subseteq X$, si existe un abierto $G \ni$*

$$p \in G \subset A$$

2. *El interior de A, denotado $\int(A)$ o A°, es el conjunto de todos los puntos interiores de A.*

Definición 10. *Un punto frontera de $A \subset X$ es un punto tal que, cada vecindad del punto intersecta a A y A^c.*

2. Bases y subases de una topología

Definición 11. *Una base β (abierta) para el espacio topológico (X, τ) es una clase de abiertos de X tal que cada abierto en τ puede escribirse como uniones de los miembros de la clase.*

Ejemplo 5. *Sea (X, τ) un espacio discreto. Entonces $\beta = \{\{x\} : x \in X\}$ es una base para τ*

NOTA. *1. Si cada $G \in \tau$ puede representarse como $G = \bigcup_i B_i$, donde $B_i \in \beta \implies$ para cada $x \in G \implies x \in B_{i_0}$, (miembro de la unión) para algún i_0. $\implies x \in B_{i_0} \subseteq \bigcup_i B_i = G$*

Definición 12. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Una subclase S de abiertos en τ es una subbase de la topología τ, si las intersecciones finitas de miembros de S producen una base τ.*

Ejemplo 6. *1. Sean $a, b \in \mathbb{R} \ni a < b$. Nótese que*

$$(a, b) \subseteq \mathbb{R}$$

2. ejemplo 2

3. Sea $a = \{\{a\}\}$, entonces $\beta = \{\{a\}, X\} \implies \tau = \{X, \varnothing, \{a\}\}$

4. $a = \{\varnothing\} \implies \beta = \{X, \varnothing\} \implies \tau = \{X, \varnothing\}$

Teorema 2. *Los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *Una familia β de subconjuntos abiertos del espacio topológico (X, τ) es una base para τ, si cada abierto de τ es unión de miembros de β.*

2. *$\beta \subset \tau$ es una base para τ ssi $\forall G \in \tau, \forall p \in G \exists B_p \in \beta \ni p \in B_p \subset G$.*

Demostración.

- $(i) \to (ii)$ Sea $G \in \tau$ y sea $p \in G$. Como $G \in \tau$ y β es base de $\tau \implies G = \bigcup_i B_i, B_i \in \beta$. Como $p \in G \implies p \in \bigcup_i B_i \implies \exists i_p \ni p \in B_{i_p} \implies$ dado $p \in G \exists B_{i_p} \in \beta \ni p \in B_{i_p} \subset G$.

- $(ii) \to (i)$ Sea $G \in \tau \implies$ Para cada $x \in G \exists B_x = \beta \ni x \in B_x \subset G \implies \bigcup_{x \in G} = G \implies$ es union de miembros de β.

■

Teorema 3. *Sea β una familia de subconjuntos de un conjunto no vacío X. Entonces, β es una base para una topologia τ sobre X ssi se cumplen:*

1. $X = \bigcup_{B \in \beta} B$
2. *$\forall B, B^* \in \beta$ se tiene que $B \cap B^*$ la union de miembros de $\beta(\iff p \in B \cap B^* \exists B_p \in \beta \ni p \in B_p \subset B \cap B^*)$*

Demostración.

- $(\to)$ Sea β la base de una topologia τ sobre X. Sabemos que X es abierto $\implies X = \bigcup_{B \in \beta} B$, donde esta union se toma sobre todos los miembros de β. Como β es base para $\tau \implies B \cap B^*$ puede escribirse como union de miembros de β.

- $(\leftarrow)$ Sea τ la colección de las uniones de miembros de la familia de subconjuntos de X. A probar: τ es topologia.

  1. Por (i) $X \in \tau$. Además, la union de la clase vacia de β es $\varnothing \implies \varnothing \in \tau$.
  2. Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de miembros de τ. Entonces, $G_i = \bigcup_{B \in \beta} B_{G_i}$ (donde cada G_i es union de miembros de β) $\implies \bigcup_i$ es union de uniones de miembros de $\beta \implies \bigcup_i G_i \in \tau$.
  3. Sean $G_1, G_2 \in \tau \implies G_i = \bigcup \{B_i : i \in I\}$ y $G_2 = \bigcup \{B_j : j \in J\}$. Entonces, $G_1 \cap G_2 = (\bigcup_i B_i) \cap (\bigcup_j B_j) = \bigcup_{i=j} (B_i \cap B_j) \implies G_1 \cap G_2 \in \tau \implies \tau$ es una topologia sobre X.

■

Ejemplo 7. *Sean (a_1, b_1) y (a_2, b_2) intervalos abiertos y acotados de $\mathbb{R} \implies$*

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, a_1 < x < b_1, a_2 < y < b_2 \right\} \tag{1}$$

Teorema 4. *Sea X cualquier conjunto no vacío y sea S una clase arbitraria de subconjuntos de X. Entonces, S puede constituirse en la subbase para una topología abierta para una topología sobre X en el sentido que las intersecciones finitas de los miembros de S producen una base para dicha topología.*

Teorema 5. *Sea $X \neq \varnothing$ y sea S una clase arbitraria de subconjunto de X. Entonces, S puede servir como subbase abierta de una topología sobre X en el sentido que la clase τ de todas las uniones de intersecciones finitas en S es una topogía.*

Demostración. Tenemos:

1. $S = \varnothing \implies \beta = \{X\} \implies \tau = \{X, \varnothing\}$ es la topología indiscreta.

2. $S \neq \varnothing$l. A probar: τ es topología.

   a) $\varnothing, X \in \tau$

   b) $\{G_i\}_{i \in I}$ una subclase arbitraria de τ. A probar: $\bigcup_i G_i \in \tau$. Cada G_i es unión de intersecciones finitas de miembros de S. Entonces, $\bigcup_i G_i$ es unión de uniones de intersecciones finitas de miembros de $S \implies \bigcup_i G_i \in \tau$.

   c) Sea $G_1, G_2 \in \tau$. A probar $G_1 \cap G_2 \in \tau$. $G_1 \cap G_2$ es unión de intersecciones finitas de miembros de S.

■

Lema 6. *Si S es subbase de las topologías τ y τ^* sobre $X \implies \tau = \tau^*$*

Demostración. A probar: $\tau \subseteq \tau^*$. Sea $G \in \tau \implies$ Como S es subbase de $\tau \implies$

$$G = \bigcup_i \left(S_{i_1} \cap S_{i_2} \cdots \cap S_{i_{n_i}}\right), S_{i_k} \in S$$

Sabemos que S genera a $\tau^*(S \subset \tau^*) \implies S_{i_1} \cap S_{i_2} \cdots \cap S_{i_{n_i}} \in \tau^* \implies G = \bigcup_i \left(S_{i_1} \cap S_{i_2} \cdots \cap S_{i_{n_i}}\right) \in \tau^* \implies \tau \subset \tau^*$. De forma similar, se tiene que $\tau^* \subset \tau$. ■

Teorema 7. *Sea X un subconjunto no vacío y sea S una clase de subconjuntos de X. La topología τ sobre X, generada por S, es la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a S.*

Demostración. Sea $\tau^* = \bigcap_i \tau_i$, donde cada τ_i es una topología sobre X que contiene a S. A probar: $\tau = \tau^*$

- ($\supseteq$) Como S genera a $\tau \implies S \subset \tau \implies \tau^* \subset \tau$
- ($\subseteq$). Sea $G \in \tau \implies G = \bigcup_i \left(S_{i_1} \cap S_{i_2} \cdots \cap S_{i_{n_i}}\right), S_{i_k} \in S$. Como $S \subseteq \tau^* \implies S_{i_k} \in \tau^* \implies G \in \tau^*$

■

¿Cuándo es útil una base para una topología?

- Simplificación en cardinalidad.

Definición 13. *Un espacio topológico que tiene una base contable es un espacio segundo contable.*

Teorema 8 (de Lindelof)**.** *Sea X un espacio vacío no contable. Si un abierto de G de X se puede representar como unión de una clase $\{G_i\}$ de abierto de $X \implies G$ puede representarse como unión contable de los G_i.*

Demostración.

1. Sea G un abierto no vació de $X \ni G = \bigcup_i G_i$. Como X es segundo contable, entonces X tiene una base contable $\beta \implies$ cada G_i es unión contable de los elementos de $\beta \implies G$ falla.
2. Sea $G = \bigcup_i G_i, G \in \tau, G \neq \varnothing$. Como X es segundo contable $\implies G$ es unión contable de miembros de $\beta = \{\beta_j\}$ además los G_i, por ser abiertos, son únicos de $\beta_j \implies$ como por cada $\beta_i \exists G_i^* \ni B_i \subseteq G_i^* \implies G = \bigcup_i \beta_i = \bigcup_i G_i^* \subseteq$.

■

Definición 14. *Un espacio topológico es un espacio de Hausdorf (T_2) si dados $x, y \in X, x \not\mid y, \exists u, v \in \tau \ni x \in U, y \in V$ y $u \cap v = \varnothing$*

Ejemplo 8. *Sea* $X = \{a, b\}$ *con topología discreta* $\implies X$ *es* T_2. *Ahora con la topología* $\tau_m = \{x, \varnothing, \{a\}\}$ *no* T_2.

Teorema 9. *Sea* (X, d) *un espacio métrico y sean* $x, y \in X, x \not/ y \implies$ *sea* $\delta = d(x, y) \implies u = \beta_{\delta/2}(x)$ *y* $v = \beta_{\delta/2}(y) \implies x \in u$ *y* $y \in V$ *y* $u \cap v = \varnothing$. *Por lo tanto, es de Hausdorf.*

Teorema 10. *Composición de mapeos continuos es un mapeo continuo. Sean* $(X, \tau), (Y, \tau^*), (Z, \tau^{**})$ *espacio topológicos y sean* $f : X \to Y$ *y* $g : Y \to Z$ *mapeos continuos. A probar* $g \circ f : X \to Z$. *Sea* $G \in \tau^{**} \implies g^{-1}(G) \in \tau^* \implies f^{-1}[g^{-1}(G)] \in \tau = (g \circ f)^{-1}(G) \in \tau$.

Teorema 11. *Sea* $\{\tau_i\}$ *sobre* X, *si* $f : X \to Y$ *continua,* $\forall \tau_i \implies f$ *es continuo con respecto a* $\bigcap_i \tau_i$.

Definición 15. *Sea* (x_n) *una sucesión en un espacio topológico* X, *se dice que* (x_n) *converge a un punto* $y \in X$ *si* $\forall u \in \tau \ni y \in U, \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni n \geq N \implies x_n \in U$

Teorema 12. *Si* X *es un* $T_2 \implies$ *cualquier sucesión de puntos en* X *(a lemas) es un punto de* X.

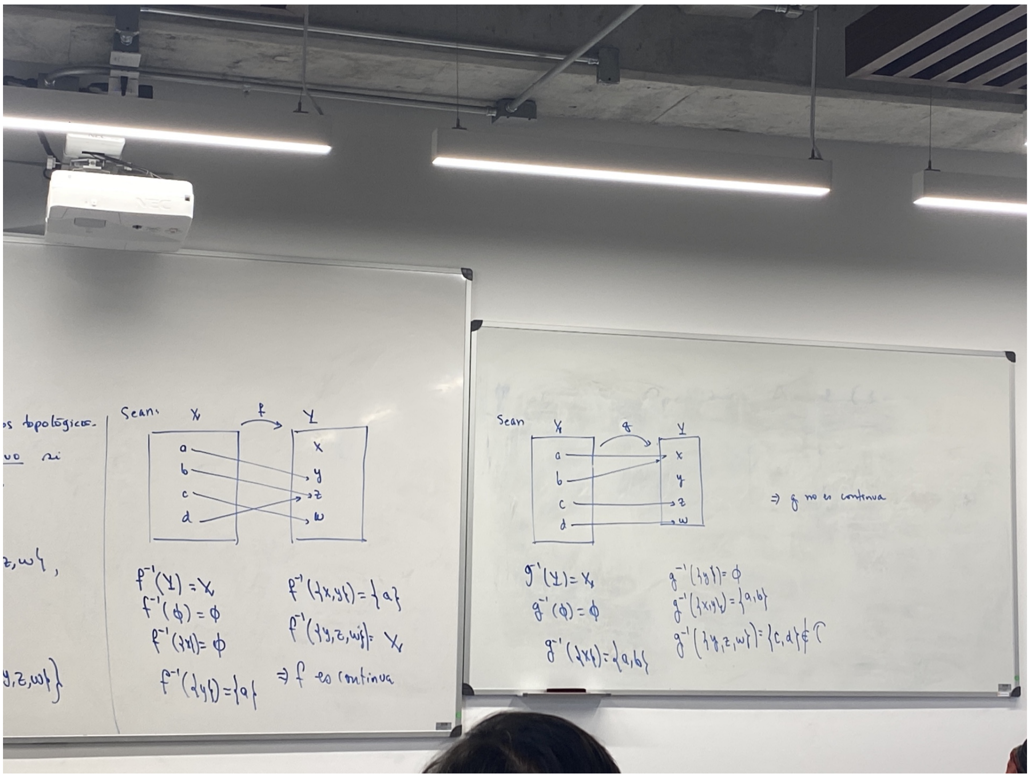
Demostración. Suponga que a y b son límites de la sucesión $(x_n) \implies$ por ser X de Hausdorf $\implies \exists u, v \in \tau \ni a \in U$ y $b \in V$ y $U \cap V = \varnothing$ como son límites $\implies \exists N_1, N_2 \in \mathbb{Z}^+ \ni n \geq N_1 \implies X_n \in U$ y $m \geq N_2 \implies X_m \in V$. Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\} \implies n > N \implies X_n \in U$ y $X_n \in V \implies X_n \in U \cap V \implies U \cap V \neq \varnothing (\to\leftarrow)$ ■

Teorema 13. *Cada subconjunto límite* $A \subseteq X$ *es un* T_2 *es cerrado.*

Continuidad

Definición 16. *Sea* (X, τ) *y* (Y, τ^*) *esapacios topológicos. El mapeo* $f : X \to Y$ *es continuo si para cada* $G \in \tau^*$ *se tiene que* $f^{-1}(G) \in \tau$

Ejemplo 9. *Sean $X = \{a, b, c, d\}$ y $Y = \{x, y, z, w\}$, la topología $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ y $Y = \{Y, \varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{x, z, w\}\}$*



NOTA. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ un mapeo y suponga que $\beta = \{B_i\}$ es una base para τ^*. Sea $G \in \tau^* \implies G = \bigcup_i B_i, B_i \in \beta$. Entonces, $f^{-1}(G) = g^{-1}\left(\bigcup_i B_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(B_i) \implies f^{-1}(G) \in \tau$, si $f^{-1}(B_i) \in \tau$.*

NOTA. *Dado un mapeo $f : X \to Y$ y si $A \subseteq Y \implies f^{-1}[A^c] = [f^{-1}(A)]^c$. En efecto: Sea $x \in f^{-1}(A^c) \iff f(x) \in A^c \iff f(x) \notin A \iff x \notin f^{-1}(A) \iff x \in [f^{-1}(A)]^c$*

NOTA.

1. *Sean $f : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ un mapeo continuo y sea F un cerrado de $Y \implies f^{-1}(F^c) = [f^{-1}(F)]^c \in \tau \implies f^{-1}(F)$ es cerrado en X.*

2. *Sea G un abierto de $Y \implies G^c$ es cerrado de Y. Si $f^{-1}[G^c] = [f^{-1}(G)]^c$ es cerrado, entonces $f^{-1}(G) \in \tau \implies f$ es continuo*

Proposición 11. *Sea $f : X \to Y$ un mapeo entre espacios topológicos. Entonces, f es un mapeo continuo ssi $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}, \forall A \subseteq X$*

> *Propiedades:*
>
> 1. $f[f^{-1}(A)] = A$
> 2. $f^{-1}[\underbrace{f(A)}_{\subseteq X}] \supset A$

Demostración. Sea

- ($\implies$) Suponga que f es continuo y sabemos que $f(A) \subset \overline{f(A)} \implies f^{-1}[f(A)] \subset f^{-1}[\overline{f(A)}]$. Además, como $\overline{f(A)}$ es cerrado $\implies f^{-1}[\overline{f(A)}]$ es cerrado (ya que f continuo). Entonces,

$$A \subseteq \underbrace{f^{-1}[\overline{A}]}_{cerrado} \implies A \subset \overline{A} \subset f^{-1}[\overline{f(A)}]$$

$$\implies f(\overline{A}) \subset f[f^{-1}[\overline{f(A)}]]$$

$$\implies f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

- ($\impliedby$) Supóngase que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}, \forall A \subseteq X$. Sea C un cerrado de Y. Sea $A = f^{-1}(C) \implies f[\overline{f^{-1}(C)}] \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \implies f[\overline{f^{-1}(C)}] \subseteq C \implies f^{-1}[f[\overline{f^{-1}(C)}]] \subseteq f^{-1}(C) \implies \overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(C) \implies f^{-1}(C) \subset \overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(C) \implies f^{-1}(C) = \overline{f^{-1}(C)} \implies f^{-1}(C)$ es cerrado.

■

Proposición 12. *Sea $\{\tau_i\}$ una colección de topologías sobre X. Si $f : X \to Y$ es continuo con respecto a cada $\tau_i \implies f$ es continuo con respecto a $\tau = \bigcap_i \tau_i \implies f$ es continuo respecto a $\tau = \bigcap_i \tau_i$.*

Demostración. Sea G un abierto de $Y \implies f^{-1}(G) \in \tau_i$ para cada i. Entonces, $f^{-1}(G) \in \bigcap_i \tau_i = \tau \implies f$ es continua con respecto a τ. ■

Proposición 13. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau)$ un mapeo continuo, si $A \subset X \implies f|_A : (A, \tau_A) \to (Y, \tau')$ es continua.*

Demostración. Como f es continua $\implies$ si $G \in \tau'$ $\implies$ $f^{-1} \in \tau$ $\implies$ $A \cap f^{-1}(G) \in \tau_A \implies f|_A$ es continua (respecto a τ_A). ■

Ejemplo 10. *No se tomo bien la foto :(*

Ejemplo 11. *Sea $f : (X, \tau) \to (X, \tau')$ tal que $\tau' = \{Y, \varnothing\}$. Entonces, $f^{-1}(Y) = X$ y $f^{-1}(Y) = X$ y $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \tau \implies f$ es continua, independientemente de τ.*

Ejemplo 12. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$, tal que: $\tau = P(X) \implies$ si $G \in \tau' \implies f^{-1}(G) \in P(X) \implies f$ es continua (para cada topologia τ').*

Ejemplo 13. *Considere el mapeo identidad*

$$i : (X, \tau) \to (X, \tau')$$

$\implies$ *si $G \in \tau' \implies f^{-1}(G) = G \in \tau$.*

Continuidad local $\tau' \subset \tau$.

Definición 17. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$ un subconjunto $U \subseteq X$ es vecindad de x, si $\exists V \in \tau \ni x \in V \subset U$ (es decir, x es un punto interior de U.)*

Definición 18. *Lqa colección de todas las vecindades de un punto $x \in X$ se llamna sistema de vecindades de x. Notación: N_x.*

Proposición 14. *N_x es cerrado bajo intersecciones y extensiones. Es decir:*

1. *Si $u, w \in N_x \implies u \cap w \in N_x$.*

2. *Si $u \in N_x$ y $u \subseteq w \implies w \in N_x$.*

Demostración. Sea

1. Si $u \in N_x \implies \exists$ abierto $G \ni x \in G \subset u$. Si $w \in N_x \implies \exists$ abierto $H \ni x \in H \subset w \implies x \in G \cap H \subseteq u \cap w \implies u \cap w \in N_x$.

2. Si $u \in N_x \implies \exists$ abierto $G \ni x \in G \subset u \subseteq w \implies w \in N_x$

■

Proposición 15. *Sea A un subconjunto del espacio topológico $(X, \tau) \ni \forall x \in A \exists G \in \tau \ni x \in G \subset A$. Entonces, A es abierto en τ.*

Proposición 16. *Un conjunto G es abierto ssi G es vecindad de cada uno de sus puntos.*

Demostración. Sea

1. Prop. anterior.

2. Si $x \in G \implies \exists$ abierto $G \ni x \in G \subset G \implies G \in N_x, \forall x \in G$.

■

Proposición 17. *Sea*

1. *$N_x \neq \varnothing$ y $x \in A, \forall A \in N_x$.*

2. *Cada miembro $A \in N_x$ es un superconjunto de un miembro $G \in N_x$, donde G es vecindad de cada uno de sus puntos.*

Definición 19. *Un mapeo $f : X \to Y$ entre espacios topologicos es continuo en un punto $x \in X$, para cada $U \in N_f(x) \exists V \in N_x \ni f(V) \subset U$.*

Teorema 14 (Mala foto :(). *Un mapeo $f : X \to Y$ entre espacios topologicos, es continuio ssi es continuo en cada punto de X.*

Teorema 15. *Un mapeo $f : X \to Y$ es continuo ssi es continuo en cada punto de X.*

Demostración. Sea

- Sea f continua en cada punto de X y sea H un abierto en Y. A probar: $f^{-1}(H)$ es abierto en $X \iff f^H$ es vecindad de cada uno de sus puntos.

- Sea $x \in f^{-1}(H) \implies f(x) \in H \implies H \in N_{f(x)}$. Por la continuidad de f en $x \exists G \in N_x \ni f(G) \subset H \implies x \in G \subset f^{-1}[f(G)] \subset f^{-1}(H)$

■

Ejemplo 14. *Sea* $X = \{a, b, c, d\}$ *y* $\tau_1 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ *y* $\tau_2 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$. *Considere* $f : X \to X$ *tal que*

$$a \to b$$

$$b \to d$$

$$c \to b$$

$$d \to c$$

Probar:

1. f *es continua en* c

2. f *es continua en* d.

Ejemplo 15. *Sea* $f : X \to Y$ *y sea* $\{p\}$ *un abierto de* X.

1. *Si* $\{p\}$ *es abierto,* $\forall p \in X \implies$ *la topologia de* X *es la discreta* $\implies f$ *es continua.*

2. *Si* $\{p\}$ *es abierto, para algún* $p \in X$. *Sea* $H \in N_{f(p)} \implies \exists\{p\} \in N_{f(p)} \implies \exists\{p\} \in N_p \ni f(\{p\}) \subset H \implies f$ *es continua en* p.

Definición 20. *Una función* $f : X \to Y$ *es secuencialmente continua en un punto* $p \in X$ *ssi para cada sucesión* (a_n), *se cumple que: si* $a_n \to p \implies f(a_n) \to f(p)$

> *Sea*
>
> $$a_n \to p$$
>
> $\forall G$, *abierto de* $X \ni p \in G$, *se tiene que* $\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ *si* $n \geq N \implies a_n \in G$.

Teorema 16. *Si una función* $f : X \to Y$ *es continua en* $p \in X$, *entonces* f *es secuencialmente continua en* $p \in X$.

Solución. Sea

1. Ejercicio.

2. Suponga quie f es continua en $p \in X$ y que (a_n), cumple:

$$a_n \to p$$

A probar: $f(a_n) \to f(p) \iff \forall G$, abierto de $Y \ni f(p) \in G$, la cola de $f(a_n)$ esta en G.

$\square$

Definición 21. *Un mapeo $f : X \to Y$ es*

1. Abierto, si $\forall G$, abierto de X, $f(G)$ es abierto de Y.

2. Cerrado, si $\forall H$, cerrado de X, $f(H)$ es cerrado de Y.

Ejemplo 16. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Entonces, f es continua. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.*

1. Si A es abierto, entonces $f(A) = \{1\} \implies f$ no es abierta.

2. Si A es cerrado $\implies f(A) = \{1\}$ es un cerrado $\implies f$ es cerrado.

Definición 22. *Los espacios topológicos (X, τ) y (Y, τ') son homeomorfos si existe una función $f : X \to Y$ tal que:*

1. f es biyectiva.

2. f y f^{-1} son continuas.

En este caso, f es un homeomorfismo.

NOTA. *1. Se dice que una función es bicontinua si es abierto y continua.*

2. Un mapeo $f : X \to Y$ es un homeomorfismo ssi f es bicontinuo y biyectivo.

Ejemplo 17. *Sea $X = (-\pi/2, \pi/2)$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \tan x$. Note que:*

1. f es biyectiva.

2. f es continua y $f^{-1}(x) = \arctan x$ es continua.

Entocnes f es un homeomorfismos. Tal que $(-\pi/2, \pi/2)$ y R son homeomorfos. (topologicamente los mismos.)

NOTA. *Una propiedad p que comparten espacios topológicos homeomorfos es una invariante topológica.*

Ejemplo 18. *La acotación no es una invariante topológica.*

Ejemplo 19. *Sea $D_1 = \{(r, \theta) \ni |r| < 1\}$ y $D_2 = \{(r, \theta) \ni |r| < 2\}$. Entonces, considere $f : D_1 \to D_2 \ni f(r, \theta) = (2r, \theta)$. Entonces, f es un homeomorfismo entre D_1 y D_2. Note que el área no es un invariante topológico.*

Ejemplo 20. *Sean (X, τ_D) y (Y, τ_D) espacios discretos y sea $f : X \to Y$. Entonces f es:*

1. *continua.*
2. *abierta*

Entonces, es un homeomorfismo si comparten ccaardinalidad.

NOTA. *Sean*

1. *X, Y, Z espacios topológicos.*

   NOTA. *Notación: $X \approx Y$ significa X es homeomorfo a Y.*

   a) $X \approx X, \forall X$

   b) *Si* $X \approx Y \implies Y \approx X$.

   c) *Si* $X \approx Y$ *y* $Y \approx Z \implies X \approx Z$.

   $\implies$ *la relación $\approx$ es de equivalencia. (Implica que se produce una partición en el conjuntos de definición de la relación)*

Proposición 18. *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$ un mapeo abierto e inyectivo y sea $A \subset X$ tal que $f(A) = B$. Entonces, la restricción $f_A : (A, \tau_A) \to (B, \tau_B)$ es abierto e inyectivo.*

Demostración. 1. La inyectividad se hereda.

2. A probar: f es abierta, sea $H \in \tau_A \implies f(H) \in \tau_B^*$. Como $H \in \tau_A \implies \exists G \in \tau \ni G \cap A = H$. Tenemos

$$f(H) = f(G \cap A)$$

Por la inyectividad:

$$\begin{aligned} &= f(G) \cap f(A) \\ &= \underbrace{f(G)}_{\in \tau^*} \cap B \in \tau_B^* \end{aligned}$$

■

Problema 2. *Sea* $\{(Y_i, \tau_i)\}$ *una colección cualquiera de espacios topológicos, y para cada* i *considere:*

$$f_i : X \to Y_i$$

donde X *es un conjunto no-vacío cualquiera. Encuentra la topología para* $X \ni$ *cada* f_i *es continua.*

Teorema 17. *Sea* $\{f_i : X \to (Y_i, \tau_i)\}$ *una colección de mapeos definidos sobre un conjunto vacio de* X *sobre los espacios topologicos* (Y_i, τ_i)*, sea*

$$S = \bigcup_i \{f^{-1}(H) : H \in \tau_i\},$$

y definamos τ *como la topologia sobre* X *generada por* S*.*

1. *Todos los* f_i *son continuas con respecto a* τ*.*

2. *Si* τ^* *es la intersección de todas las topologias sobre* X *con respecto a las cuales las* f_i *son continuas, entonces* $\tau = \tau^*$*.*

3. τ *es la topologia menos fina sobre* X *tales que las* f_i *son continuas.*

4. S *es una subbase para* τ*.*

Ejemplo 21. *Una función constante* $f_i : X \to Y_i$ *es continua con respecto a cada topologia sobre* X*. Entonces, todas las* f_i *son continuas con respecto a la topologia indiscreta, es decir* $\tau_i = \{X, \varnothing\}$*. Note que* τ_i *es la topologia menos fina sobre* $X \implies \tau_I$ *es la topologia menos fina que hace continuas a las* f_i*.*

Ejemplo 22. *Sea* $Y = \{a, b, c, d\}$ *y la topologia sobre* Y*,* $\tau = \{Y, \varnothing, \{c\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}\}$*. Considere* $X = \{1, 2, 3, 4\}$ *y sean:* $f : X \to (Y, \tau)$ *y* $g : X \to (Y, \tau) \ni$

$$f:$$

$$1 \to a$$

$$2 \to a$$

$$3 \to d$$

$$4 \to b$$

$$g:$$

$$1 \to b$$

$$2 \to c$$

$$3 \to c$$

$$4 \to d$$

Entonces, la topologia sobre X *que tiene menos abiertos y que hace continuos a* f *y* g*, es la que tiene subbase:*

$$S = \{f^{-1}(H) : H \in \tau\} \bigcup \{g^{-1}(H) : H \in \tau\}$$

Entonces

$$S = \{X, \varnothing, \{1, 2, 4\}, \{3\}\} \bigcup \{X, \varnothing, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$$

Entonces,

$$S = \{X, \varnothing, \{1, 2, 4\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$$

Topologia producto

Sea X_α un conjunto, $\forall \alpha \in I$. El producto cartesiano de las x_α, es el conjunto

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha := \{x : I \to \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \ni x(\alpha) \in X_\alpha, \forall \alpha \in I\}$$

Ejemplo 23. *Sea* $I = \{1,2,3\}$ *y sean* $X_1 = \{a,e\}, X_2 = \{o\}, X_3 = \{o,u\}$. *Entonces*

$$\begin{aligned} x_1 \times x_2 \times x_3 &= \left\{ x : \{1,2,3\} \to \bigcup_{i=1}^{3} X_i \ni x(\alpha) \in X_\alpha \right\} \\ &= \{x : \{1,2,3\} \to \{a,e,o,u\} : x(\alpha) \in X_\alpha\} \end{aligned}$$

Ademas

$$\begin{array}{llll} x(1) = a \in X_1 & x(1) = a \in X_1 & x(1) = e \in X_1 & x(1) = e \in X_1 \\ x(2) = o \in X_2 & x(2) = o \in X_2 & x(2) = o \in X_2 & x(2) = o \in X_2 \\ x(3) = o \in X_3 & x(3) = u \in X_3 & x(3) = o \in X_1 & x(3) = u \in X_1 \end{array}$$

Entonces

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = \{(a,o,o),(a,o,u),(e,o,o),(e,o,u)\}$$

Ejemplo 24.

$I = \{1,2\}$ *y* $X = \{0,1\}$, *entonces:*

$$x \times x_1 = x^2 = \left\{ x : \{1,2\} \to \{0,1\} \Rightarrow \begin{array}{ll} x(\alpha) & \in x_\alpha \\ & \forall \alpha = 1,2 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} x(1) = 0 & x(1) = 1 & x(1) = 0 & x(1) = 1 \\ x(2) = 0 & x(2) = 1 & x(2) = 1 & x(2) = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2 = \{(0,0),(1,1),(0,1),(1,0)\}$$

Ejemplo 25. *Sea*

$$I = \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \{x : \mathbb{Z}^+ \to \cup_{\alpha \in I} x_\alpha \exists x(\alpha) = x_\alpha, \forall \alpha \in I\}$$
$$= \{(x_1, x_2, \ldots) : x(\alpha) \in x_\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{Z}^+\}$$

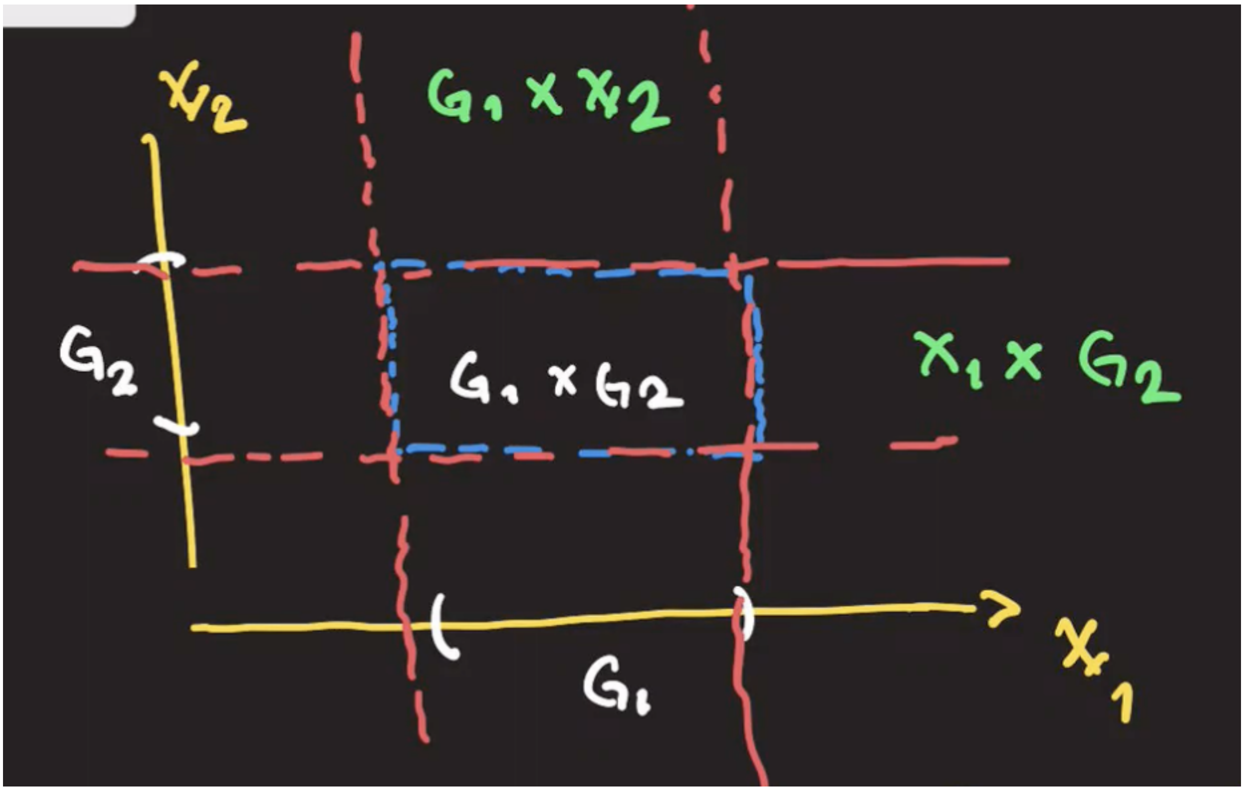
Ejemplo 26. *Si en al ejemplo anterior hacemos $X_\alpha = X$, sea I un conjunta de indices cualquiera*

$$\Rightarrow \prod_{\alpha \in I} x_\alpha = \{x : I \to x : x(\alpha) \in x, \forall \alpha \in I\}$$
$$= x^I$$

Problema 3. *Sea X_α es un espacio topologica, $\forall \alpha \in I$. Se desea construir una topologia para $\prod_{\alpha \in I} \ni$*

1. *Esta topologia sea natural*

2. *Produzca suficientes teoremas de la forma: Si x_α tiene la propiedad $p, \forall \alpha \in I$.*



$\implies G_1 \times G_2 = (G_1 \times X_2) \cap (X_1 \times G_2)$. *Entonces, con dos espacios factor, los abiertos subbasicos serian las franjas* $G_1 \times X_2$ *y* $X_1 \times G_2$. *Entonces , en el caso de* $n-$*espacios factor, los abiertos subbasicos serian de la forma:*

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times G_i \times X \cdots \times X_n$$

Recordemos: Se define la k-Esima proyección π_k cono el mapeo:

$$\pi_K : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \longrightarrow X_\alpha \ni$$

$$\pi_k(\omega) \longmapsto \omega_k$$

$$\text{Ej: } \pi_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \ni$$

$$\pi_2\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_2$$

Definición 23. *Sea* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *una colección de espacios topológicos y sea* $X = \prod_{\alpha \in I} x_\alpha$. *La topologia menos fina que hace continuas a las proyecciones sobre* X*, es la topologia producto.*

Si cada X_α es Hausdorff $\implies \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es Hausdorff.

Definición 24. *Sean* (X_α, τ_α)*,* $\alpha \in I$ *espacios topologicos y sea* $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$

1. *Las funciones* $\pi_k : X \to X_k$ *se llaman proyecciones.*

2. *La topologia generada por las proyecciones en la topologia producto de* X*.*

3. *Es decir, es la topologia menos fuerte que hace continuas a las proyeccciones.*

4. *Un espacio producto tiene la forma*

$$\left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, \tau\right)$$

Proposición 19. *Sea* $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *una colección de espacios de Hausdorff, y sea* $X = \prod_\alpha X_\alpha$ *el espacio producto. Entonces,* X *es de Hausdorff.*

Demostración. Sea $x, y \in X, x \neq y$. Entonces, $\exists k \ni$ los puntos x y y difieren en la k-esima coordenada. $\pi_k : X \to X_k$, produce las imagenes

$$pi_k(x) = x_k$$

Y

$$\pi_k(y) = y_k$$

Como x_k es Hausdorff, existen abiertos G y H de x_k tal que $x_k \in G$, $y_k \in H$ y $G \cap H = \varnothing$. Entonces, $\pi_k^{-1}(G)$ y $\pi_k^{-1}(H)$ son abiertos de X, $x \in \pi_k^{-1}$, $y \in \pi_k^{-1}(H)$ y $\pi_k^{-1}(G) \cap \pi_k^{-1}(H) = \varnothing$ Entonces X es Hausdorff. ■

Sea

1. Topologia producto;

$$S = \bigcup_\alpha \left\{\pi_\alpha^{-1}(u) : u \in \tau_\alpha\right\}$$

2. Por lo que los abiertos basicos tienen la forma:

$$\pi_{k_1}^{-1}\left(G_{k_1}\right) \cap \pi_{k_2}^{-1}\left(G_{k_2}\right) \cap \cdots \cap \pi_{k_n}^{-1}\left(G_{k_n}\right)$$

donde $G_{k_j} \in \tau_k$.

Ademas

$$\pi_i(G) = \begin{cases} \bigcap G_{i_\alpha}, k_n = 1 \\ x_i, i \neq k_j, k = 1, \cdots, n \end{cases}$$

Problema 4. *Una funcion f del espacio topologico $\prod_\alpha X_\alpha$ es continua ssi para cada proyeccion π_i, se tiene que $\pi_\alpha \circ f$ es continua.*

Demostración. Sea

- Como f es continua y las π_α son continuas $\implies \pi_\alpha \circ f$ son continuas.
- Sea H un abierto en la topologia producto. A probar $f^{-1}(H)$ es abierto en Y.

■

Ejemplo 27. *Sea* $X = \mathbb{R}$*,* $I = \mathbb{R}$*. Entonces*

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni f(\alpha) \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo 28. *Sea* $X = \mathbb{R} \implies I = \mathbb{Z}^+$*.*

$$\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^+} = \{x : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}, x(m) \in \mathbb{R}_n\}$$

2.1. Compactos

Definición 25. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico una clase* $\{H_i\}$ *de abiertos de* X *es una cubierta abierta de* X*, si* $\bigcup_i H_i = X$*.*

Definición 26. *Una subclase de una cubierta abierta de* X *que también es cubierta abierta es una subcubierta de la inicial.*

Definición 27. *Un espacio compacto es un espacio topológico en el que cada cubierta abierta tiene una subcubierta finita. Es representar* $X = \bigcup_{i \in I}^{n} H_i$

NOTA. *Un subespacio compacto de* X *es un subespacio que es compacto por derecho propio.*

Teorema 18. *Todo subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.*

Demostración. Sea F un cerrado de X y considere el subespacio (F, τ_F). Sea $\{G_i\}$ una cubierta abierta de F, con $G_i \in \tau_F$. $G_i = F \cap H_i$, donde $H_i \in \tau$. Considere la cubierta abierta de $X : \{H_i\} \cup F^c$. Como X es compacto, hay una subcubierta finita de la cubierta anterior: $\{H_{i_1}, H_{i_2}, H_{i_3}, \cdots, H_{i_m}\} \cup F^c$. Entonces, tenemos $H_{i_j} \cap F = G_{ij}$, donde $h \subseteq \{G_{ij}\}$ son una subcubierta finita de F. ■

Teorema 19. *Cualquier imagen continua de un espacio compacto es compacto.*

Demostración. Sea (X, τ) es un espacio topológico compacto y sea (Y, τ') y sea $f : X \to Y$ un mapeo continuo. A probar: $f(x)$ es compacto. Sea $\{G_i\} \subseteq \tau'_{f(x)}$ una cubierta de $f(x)$, donde los G_i son abiertos de $f(x)$ (topología relativa).

Tenemos:

1. $G_i = f(x) \cap \underbrace{H_i}_{\in \tau'}$
2. $\bigcup G_i = f(x)$

Entonces $f(x) \cap [\bigcup_i H_i] = f(x)$.Además,

$$\begin{aligned} f(x) &\subset \bigcup_i H_i \\ f^{-1}(f(x)) &\subset f^{-1}(\bigcup_i H_i) \\ x &\subset \bigcup_i f^{-1}(H_i) \\ x &= \bigcup_{i=1}^{m} f^{-1}(H_i) \\ f(x) &= \bigcup_{i=1}^{m} f(f^{-1}(H_i)) \end{aligned}$$

■

Proposición 20. *Propiedad de intersección finita*

Teorema 20. *Los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *X es un espacio compacto.*
2. *Para cada clase $\{F_i\}$ de cerrados de $X \ni \bigcap_i F_i = \varnothing$, se cumple que $\{F_i\}$ contiene una subclase finita $\{F_{i_1}, \cdots, F_{i_m}\} \ni F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_m} = \varnothing$*

Demostración. $(i) \implies (ii)$ Sea X un espacio compacto y $\{F_i\}$ una clase de cerrados con $\{F_i\} \ni \bigcap_i F_i = \varnothing$. Entonces

$$X = \left(\bigcap_i F_i\right)^c = \bigcup_i F_i^c$$

Entonces $\{F_i^c\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, dicha cubierta tiene una subcubierta finita, $\{F_{i_1}^c, \cdots, F_{i_k}^c\}$, entonces

$$X = \bigcup_{j=1}^{k} F_{i_j}^c$$

Entonces

$$\varnothing = F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k}$$

$(ii) \implies (i)$ Sea $\{G_i\}$ una cubierta abierta de X. Entonces $\bigcup_i G_i = X \implies (\bigcup_i G_i)^c = X^c \implies \bigcap_i G_i^c = \varnothing$. Donde $\{G_i^c\}$ es la clase de cerrados. Entonces $\{G_i^c\}$ tiene una subclase finita:

$$\{G_{i_1}^c, \cdots, G_{i_m}^c\} \ni G_{i_1}^c \cap \cdots \cap G_{i_m}^c = \varnothing$$

Por De Morgan, $G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_m} = X$. Es decir que $\{G_{i_j}\}$ es una subcubierta finita para X. Entonces, X es compacto. ■

NOTA. *Dada una clase de conjuntos $C = \{C_i\}$, se dice que C tiene la propiedad de intersección finita (Pif) si para cada $C_{i_1}, \cdots C_{i_k}$ se cumple $\bigcap_{j=1}^k C_{i_j} \neq \varnothing$.*

Ejemplo 29. *Considere:*

$$C = \{[1,\infty), [2,\infty), \cdots, [n,\infty), \cdots\}$$

Considere

$$C_1 = [n,\infty), C_2 = [n_2,\infty), \cdots, C_k = [n_k,\infty)$$

Entonces

$$\bigcup_{i=1}^{k} C_i = [\max_{1\le i\le k}\{n_i\}, \infty) \neq \varnothing$$

Entonces C tiene la pif.

Ejemplo 30. *Sea* $C = \{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ *Entonces,* $C_1 = \left(-\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_1}\right), C_2 = \left(-\frac{1}{n_2}, \frac{1}{n_2}\right) \cdots C_k = \left(-\frac{1}{n_k}, \frac{1}{n_k}\right)$. *Entonces*

$$\bigcap_{i=1}^{k}\left(-\frac{1}{n_i}, \frac{1}{n_i}\right) = \left(-\frac{1}{\text{máx}\{n_i\}}, \frac{1}{\text{máx}\{n_i\}}\right)$$

Entonces, C *tiene la pif.*

NOTA. *En el teorema anterior, la contrapuesta de* (ii) *es para toda clase de cerrados de* X*,* $\{F_i\}$ *tal que cada subclase finita tiene intersección no vacía, entonces* $\bigcap_i F_i \neq \varnothing$. *Es decir, cada clase de cerrados de* X *que tiene la pif, tiene intersección no vacía.*

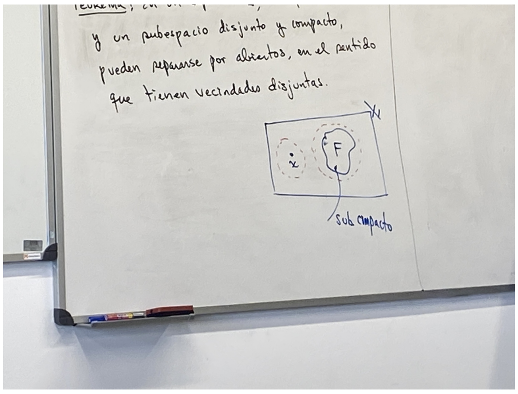
Teorema 21. X *es un espacio compacto ssi cadad clase de cerrados de* X *que tiene la pif, tinee intersección no vacía.*

Teorema 22. *Un espacio topológico es compacto si cada cubierta abierta básica tiene subcubierta abierta finita.*

Demostración. Sea $\{G_i\}$ una cubierta abierta del espacio topológico X y sea $\{B_i\}$ una base para X. Sabemos que cada G_i es unión de algunos B_j, es decir $\{B_j\}$ es uan cubierta abierta («básica») de X. Por hipótesis, $\{B_j\}$ tiene una subcubierta finita. Tomemos, para cada miembro de la subcubierta, un G_i que lo contenga. Entonces, X es compacto. ∎

Teorema 23. *Un espacio topológico es compacto si cada cubierta abierta subbásica tiene una subcubierta finita.*

Teorema 24. *En un espacio de T_2, cualquier punto y un subespacio disjunto y compacto, puede separarse por abiertos, en el sentido que tienen vecindades disjuntas.*



Demostración. Sea $x \in X$ y sea F un subesapcio compacto de X tal que $x \notin F$. Sea $y \in F \implies$ Como X es T_2, existen vecindades disjuntas G_y y H_y tal que $x \in G_y, y \in H_y$, $G_x \cap H_y = \varnothing$. Variando y sobre todo F, se tiene que $\bigcup_y H_y$ es una cubierta abierta de F. Como F es compacto, existe una subcubierta finita de F, digamos:

$$F \subset H_{y_1} \cup H_{y_2} \cup \cdots \cup H_{y_k} = H$$

y considere la vecindad de X, $G = G_{y_1} \cap G_{y_2} \cap \cdots \cap G_{y_k}$ Nótese que G y H son disjuntos. ■

Teorema 25. *Cada subespacio compacto de un T_2 es cerrado.*

Demostración. Sea X un T_2 y F un subespacio compacto de X. A probar: F^c es abierto.

1. Que $F^c = \varnothing' \implies$ es abierto.

2. Supóngase que $F^c \neq \varnothing \implies$ sea $x \in F^c$. Por el teorema anterior, existen vecindades disjuntas G_x y H_F, es decir $x \in G_x \subset F^c \implies F^c$ es abierto, entonces F es cerrado.

■

Teorema 26. *Un mapeo biyectivo y continuo de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff es un homeomorfismo.*

Definición 28. *Un espacio X es T_1 si, para $x, y \in X$, $x \neq y$, existen vecindades G y H tales que $x \in G$ y $y \notin G$; $y \in H$ y $x \notin H$*

Teorema 27. *Un espacio topológico es T_1 ssi los unitarios son cerrados.*

Demostración. Sea $x \in X$ y sea $\{x\}$ un cerrado de $X \iff \{x\}^c$ es un abierto $\iff$ si $y \neq x$, y tiene una vecindad que no contiene a $x \iff X$ es T_1. ■

Proposición 21. *Tenemos*

1. $\mathbb{R}$ *con la topología usual es* T_1.

2. *Cada* T_2 *es* T_1.

Ejemplo 31. *Encuentre un espacio T_1 que no es T_2. $\mathbb{R}$ con la topología cofinita.*

Ejemplo 32. *Sea $X = \{a, b\}$ y $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}\}$ entonces (X, T) no es T_1.*

Teorema 28. *Cada subespacio de un T_1 es un T_1.*

Demostración. Sea A un subespacio de (X, τ). Sean $x, y \in A, x \neq y$

- Como $x, y \in A \subset X \implies \exists G, H \in \tau \ni x \in G, y \notin G, x \notin H, y \in H$.

- A probar: si $x \in A \implies \{x\}$ es cerrado de $\tau_A \iff \{x\}^c = A - \{x\}$ es abierto de τ_A. Entonces, $\underbrace{(X - \{x\})}_{\in\tau} \cap A = A - \{x\} \in \tau_A \implies A - [A - \{x\}]$ es un cerrado, que implica que es igual a $\{x\}$

■

NOTA. *Un subconjunto finito de un T_1 no tiene puntos límite. Considere el conjunto finito $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ en X, el cual también es cerrado. Tomemos ahora, $\{a_2, a_3, \cdots, a_n\}$, el cual es cerrado. Esto implica que $\{a_2, a_3 \cdots, a_n\}^c$ es un abierto. Note que $a_1 \in \{a_2, a_3, \cdots, a_n\}^c$*

Definición 29. *Un espacio X es regular ssi satisface: si F es un cerrado de X y $p \in X \ni p \notin F$, existen abiertos G y $G \ni F \subset G$ y $\{p\} \subset H$. $G \cap H = \varnothing$*

NOTA. *Sean $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b, c\}\}$ los cerrados de X son: $X, \varnothing, \{b, c\}, \{a\}$. Nótese que $\{b\}$ no es cerrado $\Longrightarrow$ X no es T_1, además, X es regular.*

Definición 30. *Un espacio topológico es T_3 si es regular y T_1.*

Teorema 29. *Si X es T_3 entonces X es T_2.*

Demostración. Sean $x, y \in X, x \neq y$. Entonces, $\{x\}$ es cerrado, ya que X es T_1. Como X es regular, existen vecindades disjuntas G y $H \ni x \in \{X\} \subset G$ y $y \in H$, $G \cap H = \varnothing \implies X$ es un T_2. ■

Teorema 30. *Un espacio X es normal es normal si para F_1 y F_2, cerrados disjuntos de X, existen vecindades dijuntas G y H tal que $F_1 \subset G$ y $F_2 \subset H$.*

Ejemplo 33. *Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ los cerrados son: $\varnothing, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}$. Como $\{a\}$ no es cerrado entonces X no es T_1 y X no es normal.*

Definición 31. *Un espacio topológico que es normal y T_1 es un T_4.*

Teorema 31. *Los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *X es normal*

2. *Si H es un superconjunto abierto del cerrado F, existe un abierto G tal que*

$$F \subset G \subset \overline{G} \subset H$$

Demostración. Sea

- ($\Longleftarrow$) Sean F_1 y F_2 cerrados disjuntos de X. Entonces, existen un abierto $G \ni F_1 \subset G \subset \overline{G} \subset F_2^c$. Entonces, como $\overline{G} \subset F_2^c \implies (F_2^c)^c \subset (\overline{G})^c \implies F_2 \subset (\overline{G})^c$ (aabierto, disjunto de G)

- Sea X normal, F un cerrado de y H un superconjunto abierto de F. Nótese que H^c es un cerrado disjunto de $F \implies$ existen abiertos G y $L \ni G \subset G$ y $H^c \subset L \implies L^c \subset H$, además: $F \subset G, L^c \subset H$. $G \subset L^c \implies F \subset G \subset \overline{G} \subset H$.

■

Proposición 22. *Si X es un $T_4 \implies X$ es un T_3.*

Demostración. Como X es $T_4 \implies X$ es normal y T_1. A probar: X es regular. Sean $x \in X$ y F es un cerrado de $X \ni x \notin F \implies \{x\}$ es un cerrado disjunto de $F \implies$ existen abiertos disjuntos G y $H \ni x \in \{x\} \subset G$ y $F \subset H \implies X$ es regular. ■