Teoría Electromagnética 1

Semanas 14, 15 y 16

UVG
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Simon Denis Poisson (1781-1840)
Pierre Simon de Laplace (1749-1829)

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \varepsilon \vec{E} = \rho_{vol}$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\nabla \cdot \varepsilon(-\nabla V) = \rho_{vol}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_{vol}}{\varepsilon} \qquad \text{(Poisson)}$$

si $\rho_{vol} = 0$

$$\nabla^2 V = 0 \qquad \text{(Laplace)}$$

Recordar el operador ∇^2

cartesianas $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

cilíndricas $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \dfrac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

esféricas $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial V}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \dfrac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$

¡Importante en la solución del problema la geometría!

Teorema de la Unicidad

¿si hay muchas formas de resolver un problema (analítico, gráfico, numérico, experimental ...), si resolvemos la ecuación de Laplace de diferentes formas dará resultados diferentes?

Así que resolvamos la ecuación de Laplace y veamos que si las soluciones satisfacen un conjunto de condiciones de frontera, ¿la solución es única?

Lo probaremos por "contradicción"

Sean dos soluciones V_1 y V_2 de la Ecuación de Laplace y que satisfacen las condiciones de frontera

$$\nabla^2 V_1 = 0 \qquad \nabla^2 V_2 = 0$$

En la frontera $V_1 = V_2$

Sea $V_d = V_2 - V_1$ (la diferencia)

Así

$$\nabla^2 V_d = \nabla^2 V_2 - \nabla^2 V_1 = 0$$

$V_d = 0$ (frontera)

Por el teorema de la Divergencia

$$\int_{Vol} \nabla \cdot \vec{A} \, dVol = \oint_{S} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

SEA $A = V_d \nabla V_d$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot (V_d \nabla V_d) = V_d \nabla^2 V_d + \nabla V_d \cdot \nabla V_d$$

PERO $\nabla^2 V_d = 0$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla V_d \cdot \nabla V_d$$

$$\int_{Vol} (\nabla V_d \cdot \nabla V_d)\, dVol = \oint_S V_d \nabla V_d \cdot d\vec{S}$$

ESTA ES CERO

$$\int_{Vol} |\nabla V_d|^2 \, dVol = 0$$

$$\nabla V_d = 0$$

$$V_d = V_2 - V_1 = \text{constante en todos lados del volumen}$$

TEOREMA de la Unicidad

Si una solución de la ecuación de Laplace satisface las condiciones de frontera entonces la solución es única.

Para resolver problemas con condiciones de frontera debo:

1) usar la ecuación apropiada (Laplace o Poisson)
2) la región de la solución
3) las condiciones de frontera

SEA UN COMPONENTE QUE TIENE UNA DENSIDAD DE CARGA $\rho_{vol} = \rho_0 \frac{x}{a}$. SI $\vec{E}=0$ EN $x=0$ Y $V=0$ EN $x=a$. HALLAR V Y $\vec{E}$

Poisson $\nabla^2 V = -\frac{\rho_{vol}}{\varepsilon}$

EN CARTESIANAS Y SÓLO EN x

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}^{0} + \cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}_{0} = -\frac{1}{\varepsilon}\left(\rho_0 \frac{x}{a}\right)$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon a} x$$

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon a} \frac{x^2}{2} + A$$

$$V = -\frac{\rho_0}{\varepsilon a} \frac{x^3}{6} + Ax + B$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho_o}{\varepsilon a}x$$

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{\rho_o}{\varepsilon a}\frac{x^2}{2} + A$$

$$V = -\frac{\rho_o}{\varepsilon a}\frac{x^3}{6} + Ax + B$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(-\frac{3\rho_o x^2}{6\varepsilon a} + A\right)$$

$$\vec{E} = \frac{3\rho_o x^2}{6\varepsilon a} + A$$

bc

$x = 0 \quad E = 0$

$$0 = \frac{3\rho_0 (0)^2}{6\varepsilon a} + A$$

$$A = 0$$

$x = a \quad V = 0$

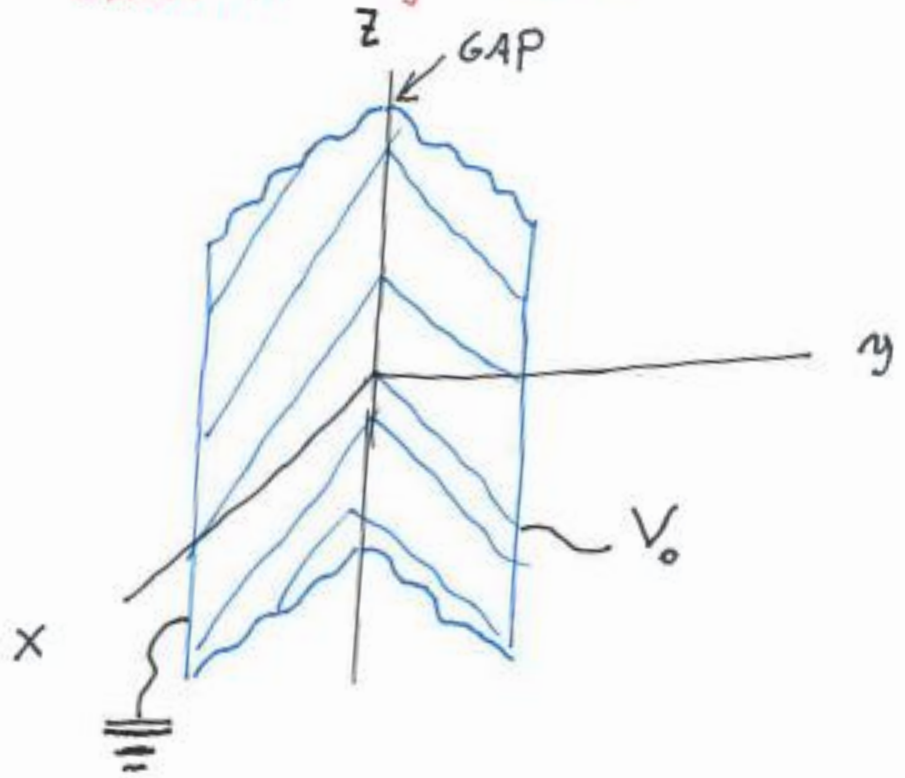
$$0 = -\frac{\rho_0 a^3}{6\varepsilon a} + 0x + B$$

$$B = \frac{\rho_0 a^3}{6\varepsilon a}$$

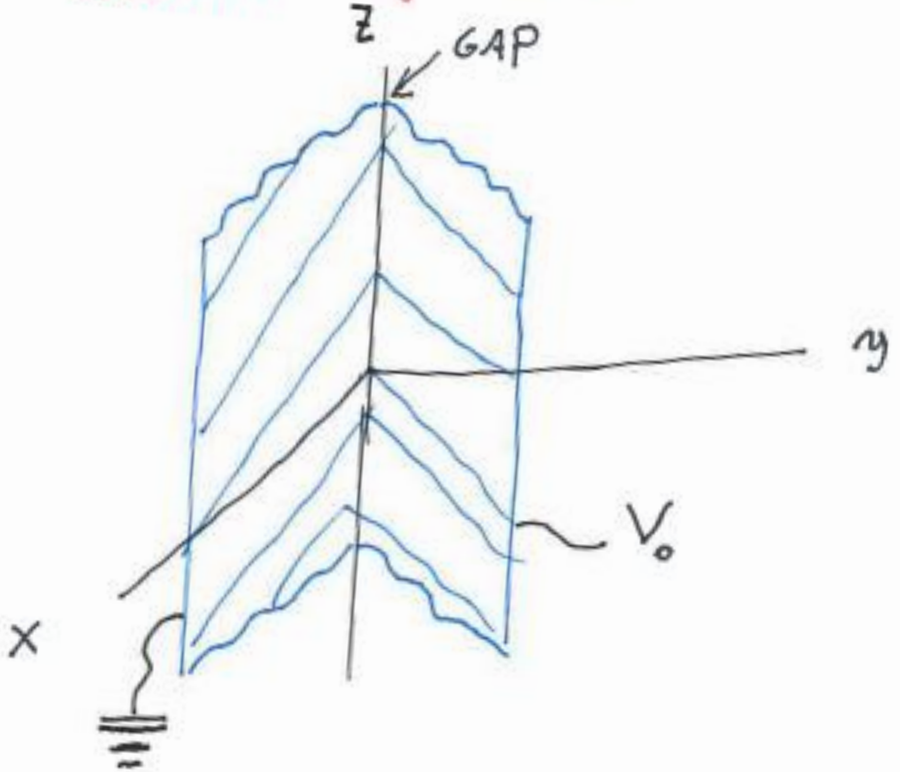
$$V = -\frac{\rho_0 x^3}{6\varepsilon a} + \frac{\rho_0 a^3}{6\varepsilon a}$$

$$\vec{E} = \frac{3\rho_0 x^2}{6\varepsilon a}\,\vec{a}_x$$

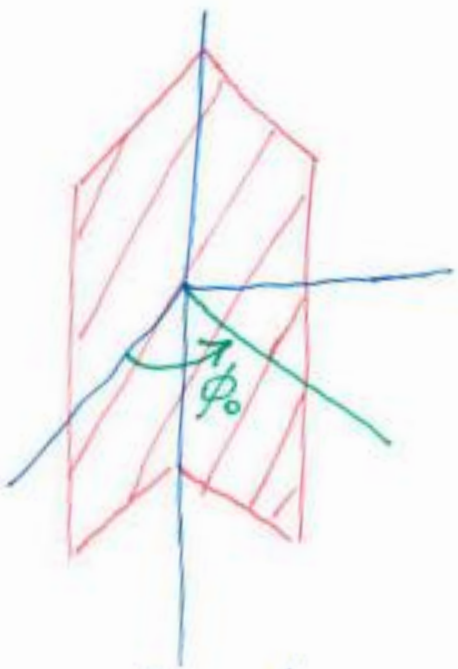
Dos planos semiinfinitos, $\phi = 0$ y $\phi = \pi/6$ están separados por un aislante por una brecha infinitesimal.
Sean $V(\phi = 0) = 0$ y $V(\phi = \pi/6) = 100$ V.
Calcular V y $\vec{E}$ en la región entre los planos.



Dos planos seminfinitos, $\phi = 0$ y $\phi = \pi/6$ están separados por un aislante por una brecha infinitesimal.
Sean $V(\phi=0) = 0$ y $V(\phi = \pi/6) = 100$ V.
Calcular V y $\vec{E}$ en la región entre los planos.



GEOMETRÍA CILÍNDRICA



depende de ϕ

depende de ϕ

$$\frac{1}{\rho}\cancel{\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right)}^{0} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}_{0} = 0$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0$$

$$\frac{dV}{d\phi} = A$$

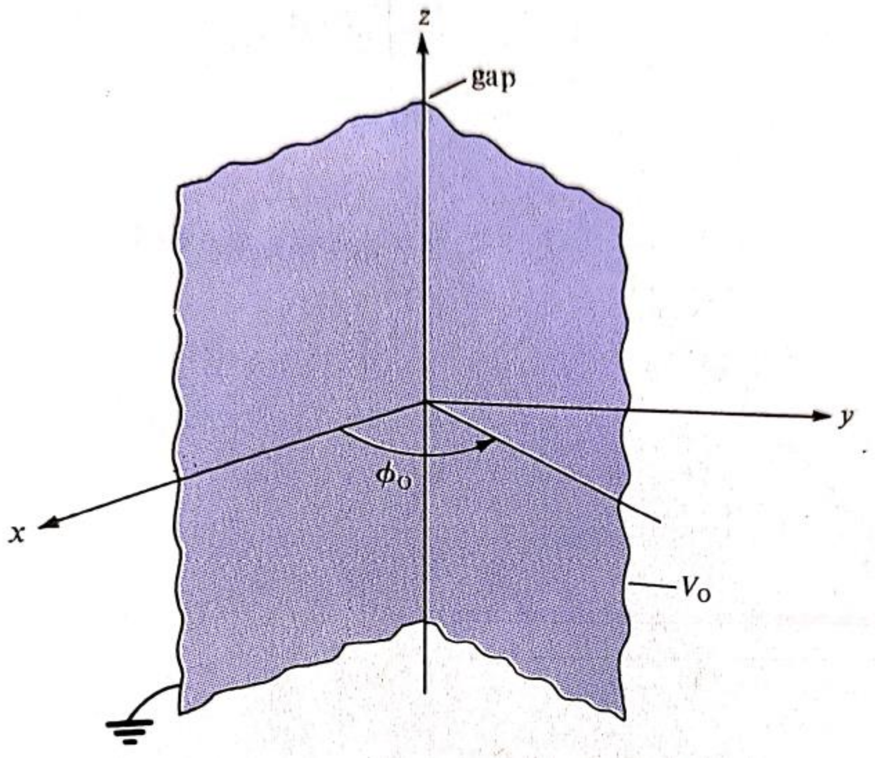
$$V = A\phi + B$$

bc $\phi = 0 \quad V = 0$

$$V = A\phi + B$$
$$0 = A(0) + B$$
$$0 = B$$

$\phi = \pi/6 \quad V = 100$

$$V = A\phi$$
$$100 = A(\pi/6)$$
$$\frac{600}{\pi} = A$$

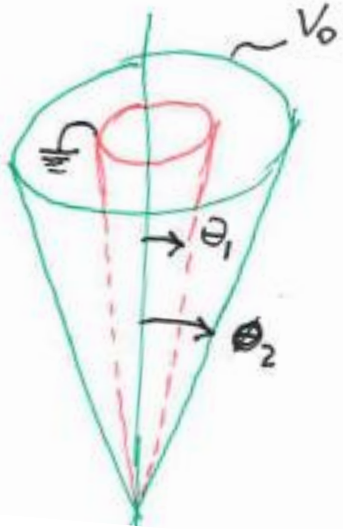


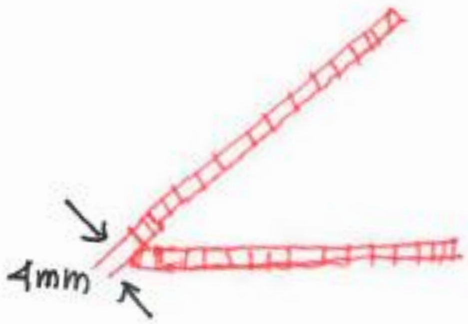
$$V = \frac{600}{\pi}\phi$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{a}_\phi$$

$$\vec{E} = -\frac{600}{\pi\rho}\vec{a}_\phi$$

Dos conos conductores ($\theta = \pi/10$ y $\theta = \pi/6$) están separados por una brecha infinitesimal en $r = 0$. Si $V(\theta = \pi/10) = 0$ y $V(\theta = \pi/6) = 50\text{ V}$. Encontrar V y $\vec{E}$ entre los conos.





GEOMETRÍA ESFÉRICA

depende de θ

$$\underbrace{\cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)}}_{0} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}} = 0$$

$$\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{dV}{d\theta}\right] = 0$$

$$\operatorname{sen}\theta\frac{dV}{d\theta} = A$$

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{A}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$dV = A\frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$V = A \ln\left|\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta\right| + B$$

bc

$\theta = \pi/10 \quad V = 0$

$\theta = \pi/6 \quad V = 50$

$$0 = A \ln\left|\operatorname{cosec}\frac{\pi}{10} - \cot\frac{\pi}{10}\right| + B$$

$$50 = A \ln\left|\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6} - \cot\frac{\pi}{6}\right| + B$$

$\pi/10 \simeq 18^\circ$

$\pi/6 \simeq 30^\circ$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A(-1.845) + B \\ 50 &= A(-1.312) + B \end{aligned}\right\}$$

$$50 = 0.533 A$$

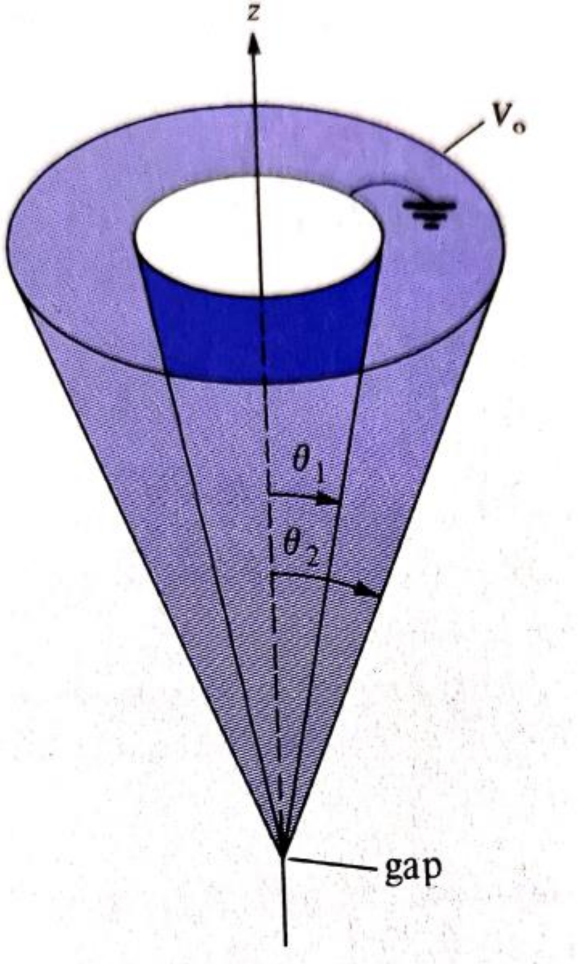
$$A = 93.81$$

$$B = -A(-1.845)$$

$$B = (93.81)(1.845)$$

$$B = 173.1$$

$$V = 93.81 \ln\left|\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta\right| + 173.1$$



$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{a}_\theta$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{r}\left[\frac{93.81}{\operatorname{sen}\theta}\right] a_\theta \quad V/m$$

SEA UNA UNIÓN p-n ENTRE LAS DOS MITADES DE UNA BARRA SEMICONDUCTORA QUE SE EXTIENDE EN LA DIRECCIÓN DE x. SUPONGA QUE LA REGIÓN PARA $x<0$ ES DOPADA CON IMPUREZAS TIPO P Y PARA LA REGIÓN $x>0$ ES DOPADA CON IMPUREZAS TIPO n. EXISTE UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGA DADA POR

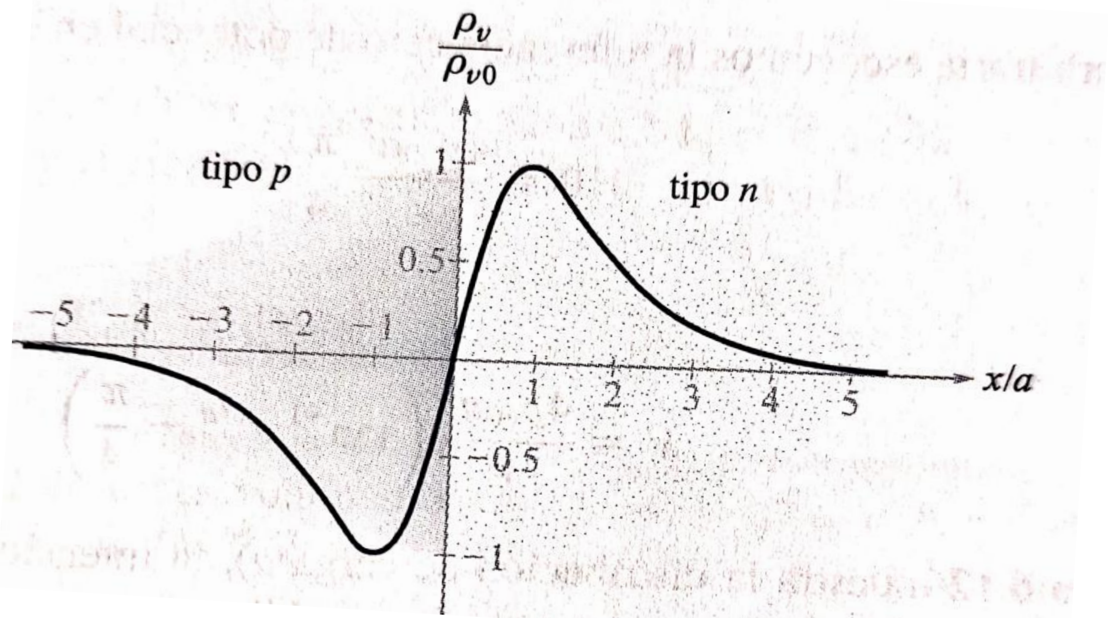
$$\rho_{Vol} = 2\rho_0 \operatorname{sech}\frac{x}{a} \tanh\frac{x}{a}$$

EXISTE UNA DENSIDAD DE CARGA MÁXIMA

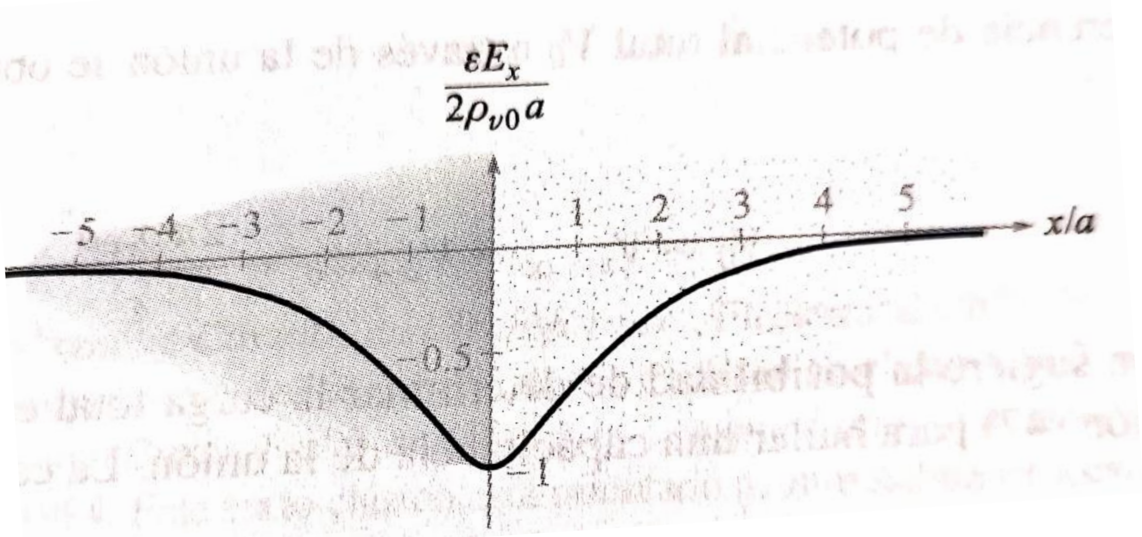
$$\rho_{Vol\,MAX} = \rho_0 \quad \text{EN} \quad x = 0.881a$$

HALLAR V.

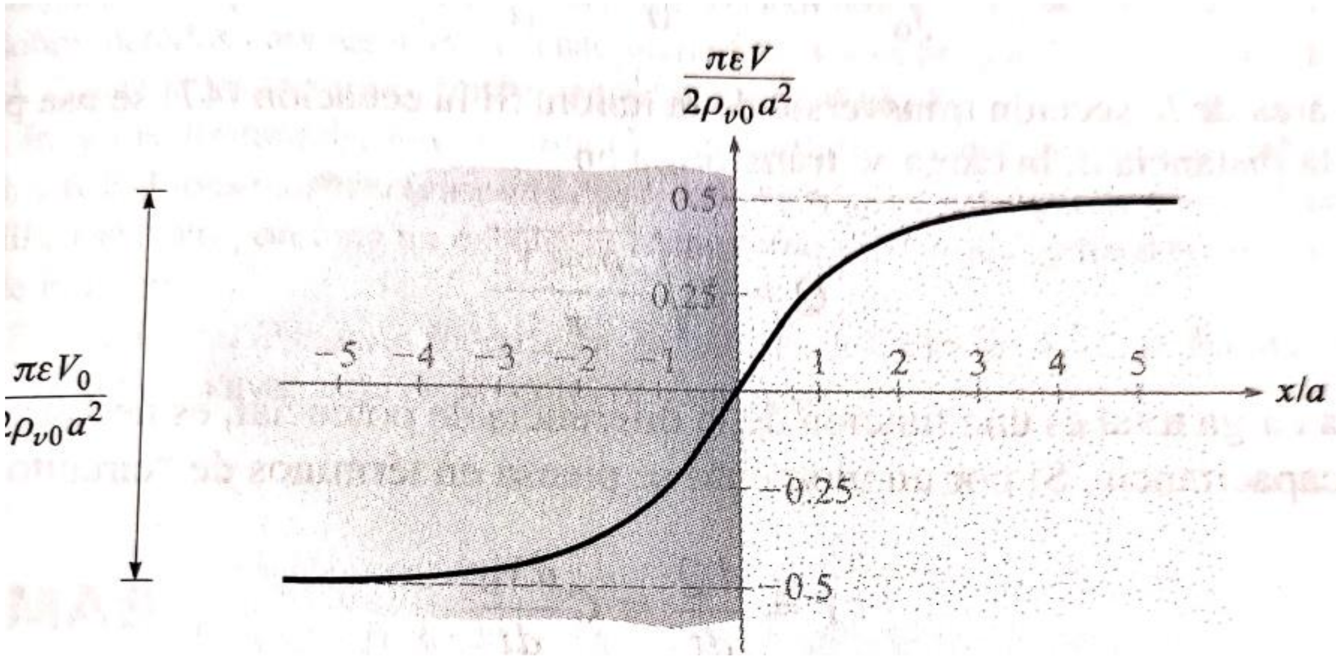
- En esta situación el grado de dopaje es idéntico.
- Observemos que inicialmente que hay huecos en exceso a la izquierda de la unión y electrones en exceso a la derecha. Los huecos y los electrones se difunden a través de la unión hasta que se acumula un campo eléctrico en tal dirección que la corriente de difusión cae a cero. Así, para evitar que más huecos se muevan hacia la derecha, el campo eléctrico en la vecindad de la unión debe estar dirigido hacia la izquierda: E_x es negativo. Este campo es producido por una carga positiva neta a la derecha y una carga negativa neta a la izquierda. Observemos que la capa de la carga positiva consta de dos partes: los huecos que han cruzado la unión y los iones donantes positivos de los que han salido los electrones. La carga negativa esta integrada en forma opuesta por electrones y iones negativos receptores.



$\frac{\rho_v}{\rho_{v0}}$
tipo p
tipo n
1
0.5
−0.5
−1
−5 −4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5
x/a



$\frac{\varepsilon E_x}{2\rho_{v0} a}$
−5 −4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5
x/a
−0.5
−1



$\frac{\pi\varepsilon V}{2\rho_{v0} a^2}$
$\frac{\pi\varepsilon V_0}{2\rho_{v0} a^2}$
0.5
0.25
−0.25
−0.5
−5 −4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5
x/a

Hallar V.

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_{vol}}{\varepsilon}$$

Cartesianas y sólo en x

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{2\rho_o}{\varepsilon}\,\mathrm{sech}\,\frac{x}{a}\,\tanh\frac{x}{a}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2\rho_o a}{\varepsilon}\,\mathrm{sech}\,\frac{x}{a} + A$$

13.34 $$\frac{d}{dx}\coth u = -\mathrm{csch}^2 u\,\frac{du}{dx}$$

13.35 $$\frac{d}{dx}\,\mathrm{sech}\,u = -\mathrm{sech}\,u\,\tanh u\,\frac{du}{dx}$$

13.36 $$\frac{d}{dx}\,\mathrm{csch}\,u = -\mathrm{csch}\,u\,\coth u\,\frac{du}{dx}$$

Notar que $$\vec{E} = -\frac{dV}{dx} = -\frac{2\rho_o a}{\varepsilon}\,\mathrm{sech}\,\frac{x}{a} - A$$

lejos de la unión no puede haber carga neta ni campo $x \to \pm\infty$ $E = 0$

$$A = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2\rho_o a}{\varepsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a}$$

$$V = \frac{4\rho_o a^2}{\varepsilon} \tan^{-1} e^{x/a} + B$$

FIJEMOS $V=0$ EN $x=a$

$$0 = \frac{4\rho_o a^2}{\varepsilon} \left(\tan^{-1} e^{1} \right) + B$$

$$B = -\frac{4\rho_o a^2}{\varepsilon} \tan^{-1} e^{1}$$

$$V = \frac{4\rho_o a^2}{\varepsilon} \tan^{-1} e^{x/a} - \frac{4\rho_o a^2}{\varepsilon} \tan^{-1} e^{1}$$

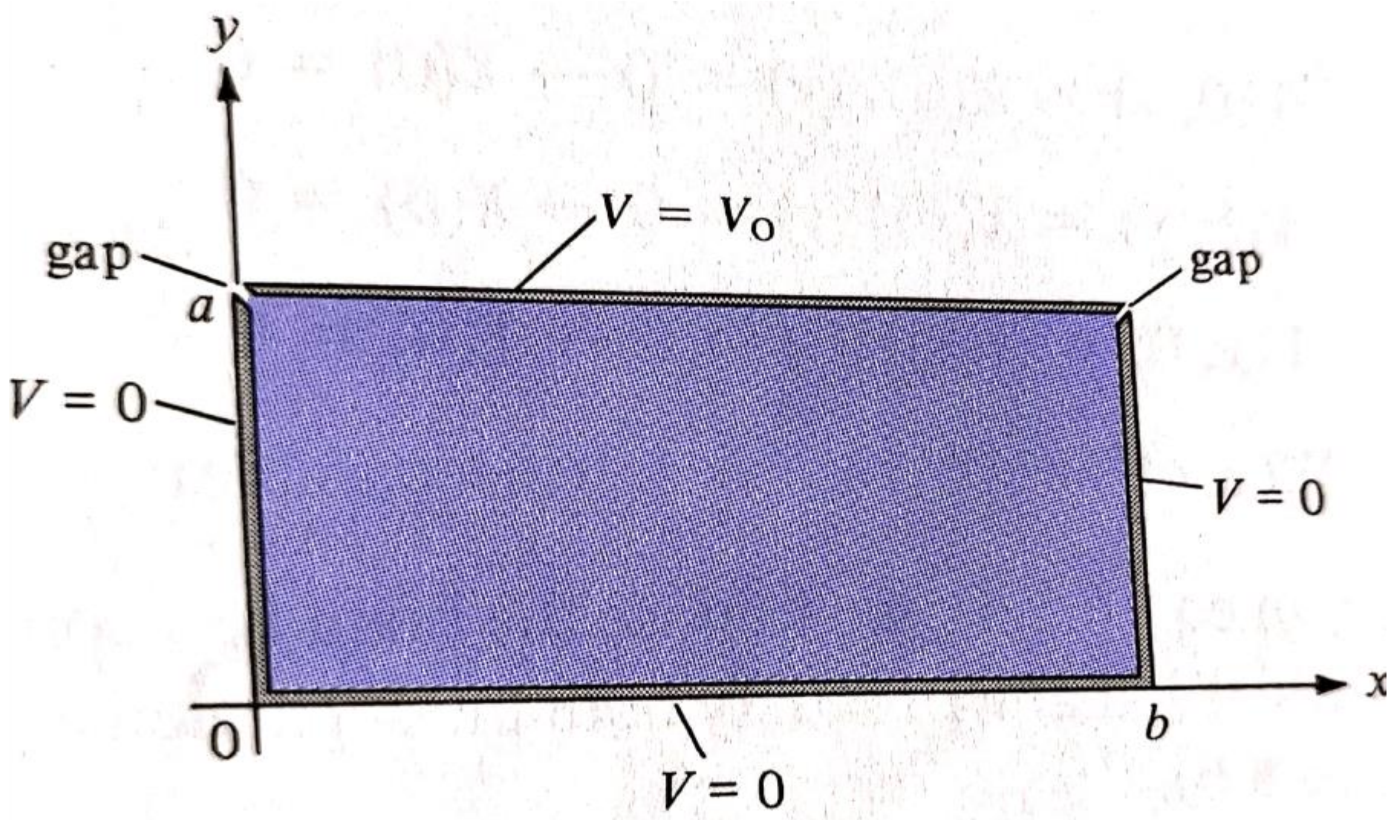
14.626 $\int \operatorname{sech} ax \, dx = \frac{2}{a} \tan^{-1} e^{ax}$

14.627 $\int \operatorname{sech}^2 ax \, dx = \frac{\tanh ax}{a}$

14.628 $\int \operatorname{sech}^3 ax \, dx = \frac{\operatorname{sech} ax \tanh ax}{2a} + \frac{1}{2a} \tan^{-1} \sinh ax$

14.629 $\int \operatorname{sech}^n ax \tanh ax \, dx = -\frac{\operatorname{sech}^n ax}{na}$

- Determinar la función de potencial para la región que está adentro del rectángulo cuya sección transversal se muestra en la figura.



Solución cartesiana en 2D

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

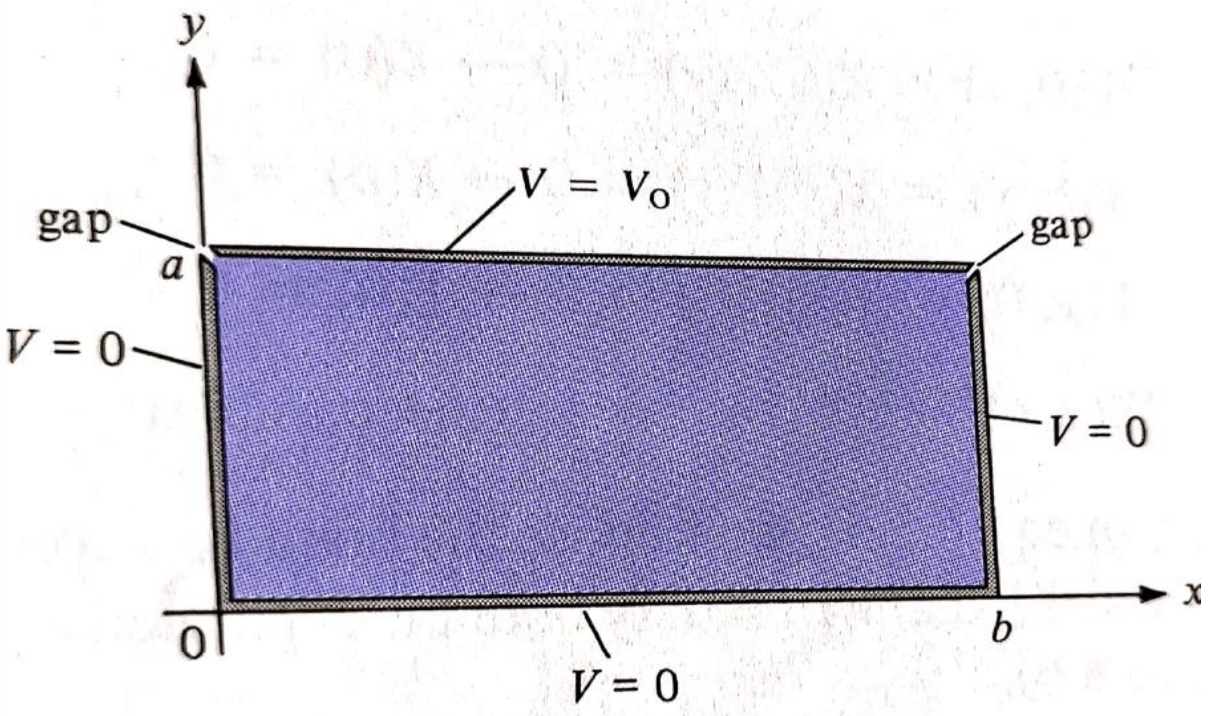
uso técnica de separación de variables

$$V = X(x)\,Y(y) = XY$$

$$\frac{\partial^2 (XY)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (XY)}{\partial y^2} = 0$$

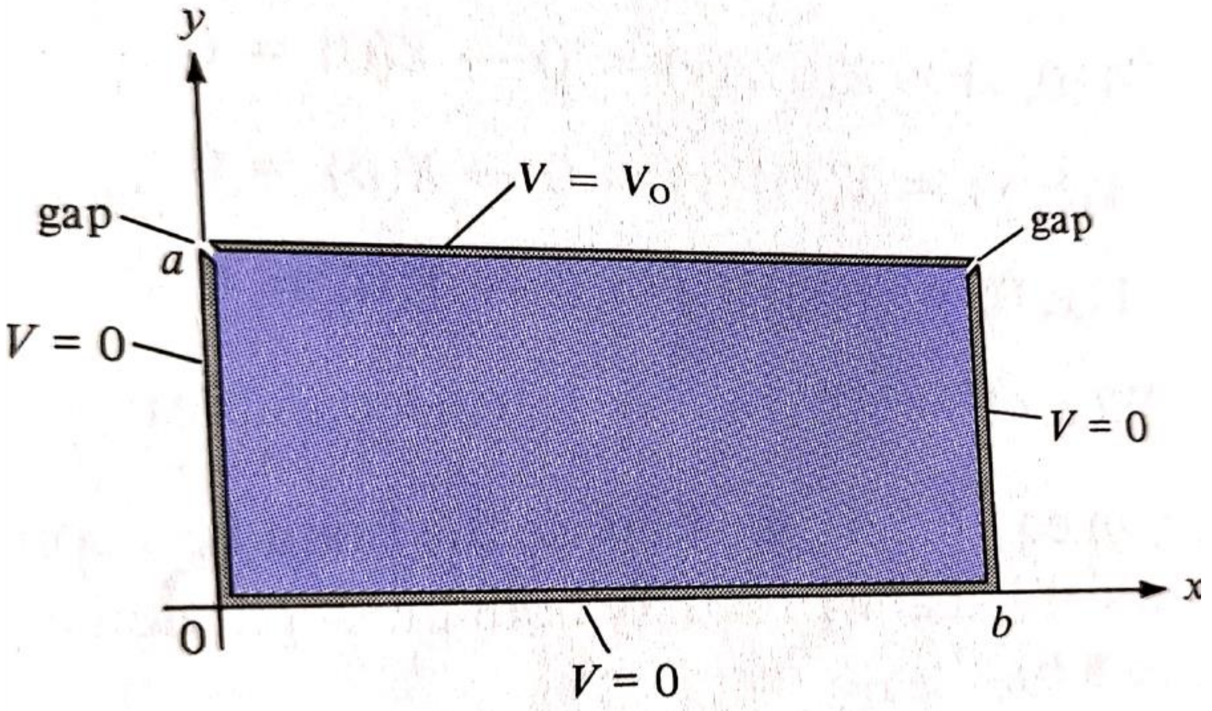
$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$



CONDICIONES DE FRONTERA

$$V(x=0,\ 0 \le y \le a) = 0$$
$$V(x=b,\ 0 \le y \le a) = 0$$
$$V(0 \le x \le b,\ y=0) = 0$$
$$V(0 \le x \le b,\ y=a) = V_0$$



$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda$$

dado que el primer término es independiente de y y el segundo independiente de x, cada uno es igual a una constante de separación

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$Y'' - \lambda Y = 0$$

igualamos a una constante de separación luego resolvemos para cada variable y el resultado lo expresamos como un producto.

la constante de separación podría ser:

$\lambda = 0$ $\rightarrow$ solución trivial

$\lambda < 0$ $\rightarrow$ solución trivial

$\lambda > 0$ $\rightarrow$ la que estudiaremos

sea $\lambda > 0$ y la constante de separación $\beta^2 = \lambda$

$$X'' + \beta^2 X = 0$$

$$(D^2 + \beta^2) X = 0$$

$$D X = \pm j \beta x \qquad j = \sqrt{-1}$$

$$X(x) = C_0 e^{j\beta x} + C_1 e^{-j\beta x}$$

PERO

$$e^{j\beta x} = \cos \beta x - j \operatorname{sen} \beta x$$

$$X(x) = g_0 \cos \beta x + g_1 \operatorname{sen} \beta x$$

donde $\quad g_0 = C_0 + C_1$

$\qquad\quad\;\; g_1 = C_0 - jC_1$

POR bc

$$X(x=0)=0 \rightarrow 0 = g_0(1)+0 \qquad g_0=0$$

$$X(x=b)=0 \rightarrow 0 = 0 + g_1 \operatorname{SEN} \beta b$$

PARA QUE SEA CERO

$$\operatorname{SEN} \beta b = 0 = \operatorname{SEN} n\pi$$

$$\beta = \frac{n\pi}{b} \qquad n=1,2,\ldots$$

PARA UN valor dado dE n

$$X_0(x) = g_0 \operatorname{SEN} \frac{n\pi x}{b}$$

$$\lambda = \beta^2 = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

PARA

$$Y'' - \beta^2 Y = 0$$

$$Y(y) = h_0 \cosh \beta y + h_1 \operatorname{senh} \beta y$$

POR bc

$$Y(y=0) = 0 \rightarrow 0 = h_0(1) + 0$$

$$h_0 = 0$$

$$Y_n(y) = h_n \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{b}$$

Así:

$$V_n(x,y) = g_n h_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi y}{b}$$

por superposición

$$V = c_1 V_1 + c_2 V_2 + \dots + c_n V_n$$

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi y}{b}$$

por bc

$$V(x, y=a) = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}$$

Serie de Fourier con expansión en V_0

$$\int_0^b V_0 \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{b}\, dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \int_0^b \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{b}\, dx$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi/2 & m = n \end{cases}$$

Así:

$$C_n \operatorname{senh} \frac{\pi x a}{b} = \frac{2V_0}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4V_0}{n\pi} & n = 1,3,5,\dots \\ 0 & n = 2,4,6,\dots \end{cases}$$

sustituyendo C_n

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{b}}{n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b}}$$

SUPONGAMOS QUE:

$$V_0 = 100\ V$$

$$b = 2a$$

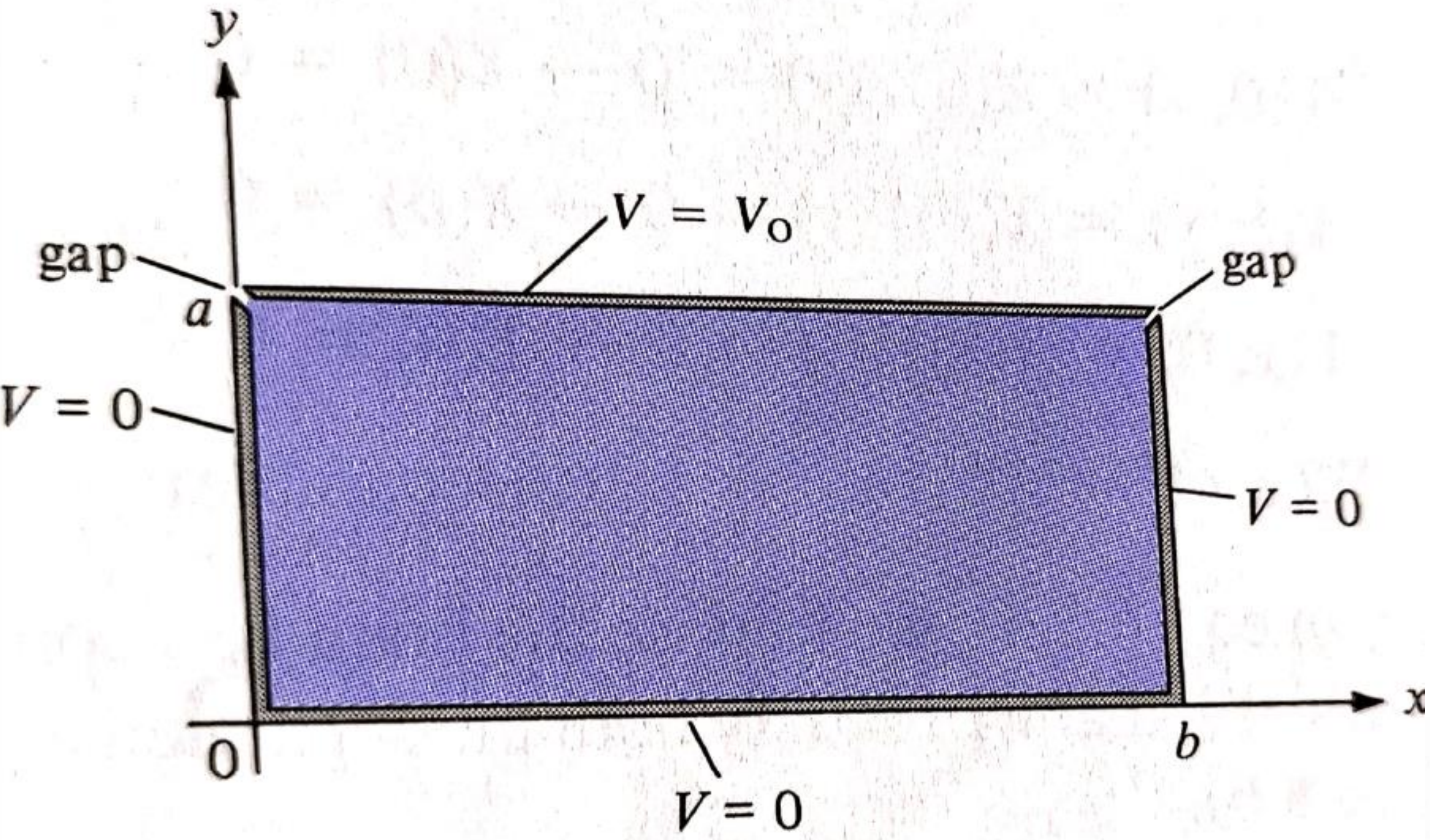
hallar el potencial en $x = a/2 \quad y = 3a/4$

$$V\left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{4}\right) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi (a/2)}{2a} \operatorname{senh} \frac{n\pi (3a/4)}{2a}}{n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{2a}}$$

$$V\left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{4}\right) = \frac{4V_0}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} \pi/4 \operatorname{senh} 3\pi/8}{\operatorname{senh} \pi/2} + \frac{\operatorname{sen} 3\pi/4 \operatorname{senh} 9\pi/8}{3 \operatorname{senh} 3\pi/2} + \frac{\operatorname{sen} 5\pi/4 \operatorname{senh} 15\pi/4}{5 \operatorname{senh} 5\pi/2} + \cdots \right]$$

$$V\left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{4}\right) = \frac{4V_0}{\pi}\left(0.4517 + 0.0725 - 0.01985 - 0.00645 + 0.00229 + \ldots\right)$$

$$V\left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{4}\right) = 0.6374\ V_0$$



$$V(x, y) = \frac{4V_o}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \dfrac{n\pi x}{b} \sinh \dfrac{n\pi y}{b}}{n \sinh \dfrac{n\pi a}{b}}$$

Solución cilíndrica

Sea $V = R(r)\,\Phi(\phi)\,Z(z)$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\Phi Z}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{RZ}{r^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + R\Phi\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

dividamos entre $R\Phi Z$

$$\frac{\Phi Z}{R\Phi Z r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{RZ}{R\Phi Z r^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \frac{R\Phi}{R\Phi Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

$$\frac{1}{Rr}\left(r\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{dR}{dr}(1)\right) + \frac{1}{\Phi r^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

doble separación

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{Rr}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -b^2$$

ASÍ

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = b^2$$

SOLUCIÓN

$$Z = C_1 \cosh bz + C_2 \operatorname{senh} bz$$

PARA LA OTRA, VOLVEMOS A SEPARAR Y MULTIPLICAMOS POR r^2

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R}\frac{dR}{dr} + b^2 r^2 = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = a^2$$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -a^2$$

$$\Phi = C_3 \cos a\phi + C_4 \operatorname{sen} a\phi$$

En r

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(b^2 - \frac{a^2}{r^2}\right)R = 0$$

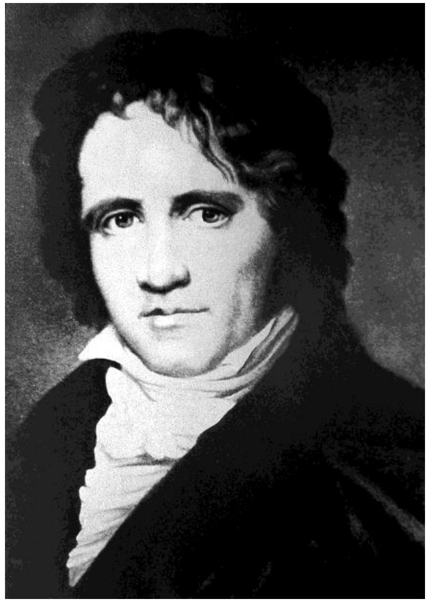
Ecuación diferencial de Bessel

Solución es en series de potencias llamadas Funciones de Bessel

$$R = C_s J_a(br) + C_c N_a(br)$$

$$J_a(br) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (br/2)^{a+2m}}{m!\,\Gamma(a+m+1)}$$

$$N_a(br) = \frac{(\cos a\pi) J_a(br) - J_{-a}(br)}{\operatorname{sen} a\pi}$$



full name	Friedrich Wilhelm Bessel
date of birth	Thursday, July 22, 1784 (236 years ago)
place of birth	Minden, North Rhine-Westphalia, Germany
date of death	Tuesday, March 17, 1846 (age: 61 years) (175 years ago)
place of death	Kaliningrad, Kaliningrad, Russia

The series $J_a(br)$ is known as a Bessel function of the *first kind, order a*; if $a = n$, an integer, the gamma function in the power series may be replaced by $(n+m)!$. $N_a(br)$ is a Bessel function of the *second kind, order a*; if $a = n$, an integer, $N_n(br)$ is defined as the limit of the above quotient as $a \to n$.

The function $N_a(br)$ behaves like $\ln r$ near $r = 0$ (see Fig. 8-3). Therefore, it is not involved in the solution ($C_6 = 0$) whenever the potential is known to be finite at $r = 0$.

For integral order n and large argument x, the Bessel functions behave like damped sine waves:

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) \qquad N_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right)$$

See Fig. 8-3.

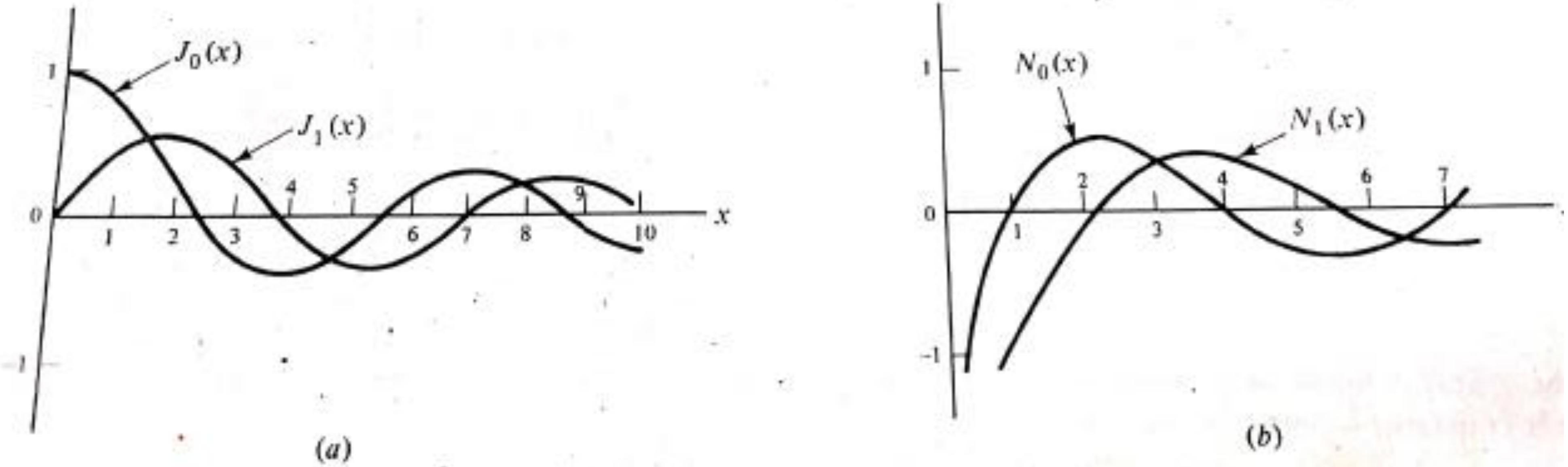


Fig. 8-3

Solución esféricas 2 D

$V = R(r)\,\Theta(\theta)$ NO VARÍA EN ϕ

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = 0$$

haciendo el proceso

$$\left(\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2r}{R}\frac{dR}{dr}\right) + \left(\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{\Theta\tan\theta}\frac{d\Theta}{d\theta}\right) = 0$$

Aquí la constante de separación es $n(n+1)$, donde n es entero

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{\tan\Theta}\frac{d\Theta}{d\theta} + n(n+1)\Theta = 0$$

solución en:

r

$$R = C_1 r^n + C_2 r^{-(n+1)}$$

Θ solución de polinomios de grado n para la variable $\xi = \cos\theta$

$$P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\xi^n}(\xi^2 - 1)^n \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

$P_n(\xi)$ polinomios de Legendre de orden n

full name	Adrien-Marie Legendre
date of birth	Monday, September 18, 1752 (268 years ago)
place of birth	Paris, Ile-de-France, France
date of death	Wednesday, January 9, 1833 (age: 80 years) (188 years ago)
place of death	Paris, Ile-de-France, France

$$P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi^2 - 1)^n \qquad \xi = \cos\theta$$

$$P_1(\xi) = \frac{1}{2^1\, 1!} \frac{d^1}{d\xi^1} (\xi^2 - 1)^1$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} (\xi^2 - 1) = \frac{1}{2} (2\xi) = \xi = \cos\theta$$

$$P_2(\xi) = \frac{1}{2^2\, 2!} \frac{d^2}{d\xi^2}(\xi^2-1)^2$$

$$= \frac{1}{4\,(2)} \frac{d^2}{d\xi^2}(\xi^2-1)^2$$

$$= \frac{1}{4(2)} \frac{d}{d\xi}\left(2(\xi^2-1)(2\xi)\right)$$

$$= \frac{1}{8} \frac{d}{d\xi}(4\xi(\xi^2-1))$$

$$= \frac{1}{8}\left(4\xi(2\xi) + (\xi^2-1)(4)\right)$$

$$= \frac{1}{8}(8\xi^2 + 4\xi^2 - 4)$$

$$= \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$P_3(\xi) = \frac{1}{2^3\, 3!} \frac{d^3}{d\xi^3}(\xi^2-1)^3$$

$$\frac{d}{d\xi}(\xi^2-1)^3 = 3(\xi^2-1)^2(2\xi) = 6\xi(\xi^2-1)^2$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}(\xi^2-1)^3 = 6\xi(2)(\xi^2-1)(2\xi) + 6(\xi^2-1)^2$$

$$= 24\xi^2(\xi^2-1) + 6(\xi^2-1)^2$$

$$\frac{d^3}{d\xi^3}(\xi^2-1)^3 = 24\xi^2(2\xi) + 24(2\xi)(\xi^2-1) + 12(\xi^2-1)(2\xi)$$

$$= 48\xi^3 + 48\xi^3 - 48\xi + 24\xi^3 - 24\xi$$

$$= 120\xi^3 - 72\xi$$

$$P_3(\xi) = \frac{1}{8(6)}(120\xi^3 - 72\xi)$$

$$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{48}(120\cos^3\theta - 72\cos\theta)$$

$$= \frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

$$P_0(\cos\theta) = 1$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

$$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{2}\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right)$$

$$P_4(\cos\theta) = \frac{1}{8}\left(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3\right)$$

Solución

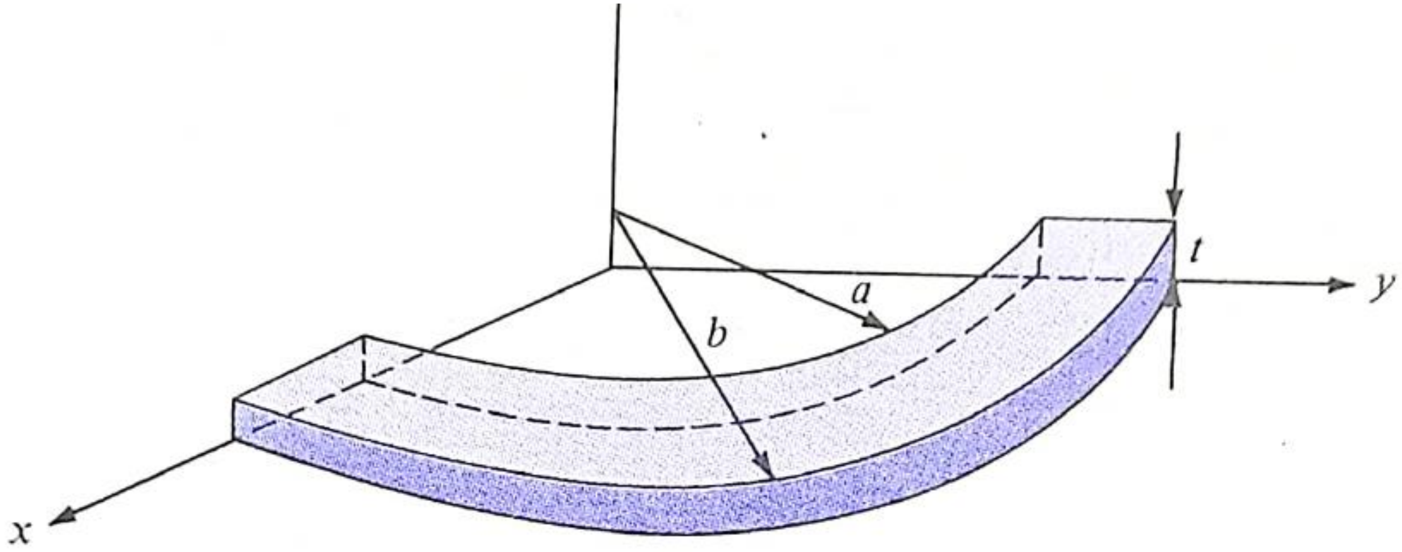
$$V = R(r)\,\Theta(\theta)$$

$$V(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\theta)$$

Una barra metálica de conductividad σ se dobla y un forma un ángulo plano de 90° entre el radio interno a y el radio externo b, además con el espesor t.

Mostrar que la resistencia de la barra entre las superficies verticales $\rho = a$ y $\rho = b$ es

$$R = \frac{2\pi \ln \frac{b}{a}}{\sigma \pi t}$$



utilizamos cilíndricas $\quad V = V(\rho)$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dV}{d\rho}\right) = 0$$

$$\rho \frac{dV}{d\rho} = A$$

$$V = A \ln \rho + B$$

bc

$$V(\rho = a) = 0 \rightarrow 0 = A \ln a + B$$

$$V(\rho = b) = V_0 \rightarrow V_0 = A \ln b + B$$

$$B = -A \ln a$$

$$V_0 = A \ln b - A \ln a \rightarrow A = \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a}}$$

$$V = A \ln \rho + B = A \ln \rho - A \ln a$$

$$V = A \ln \frac{\rho}{a}$$

$$V = \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{\rho}{a}$$

$$E = -\nabla V = -\frac{dV}{d\rho}\vec{a}_\rho = \frac{-V_0}{\rho \ln \frac{b}{a}}\vec{a}_\rho$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad dS = -\rho\, d\phi\, dz\ \vec{a}_\rho$$

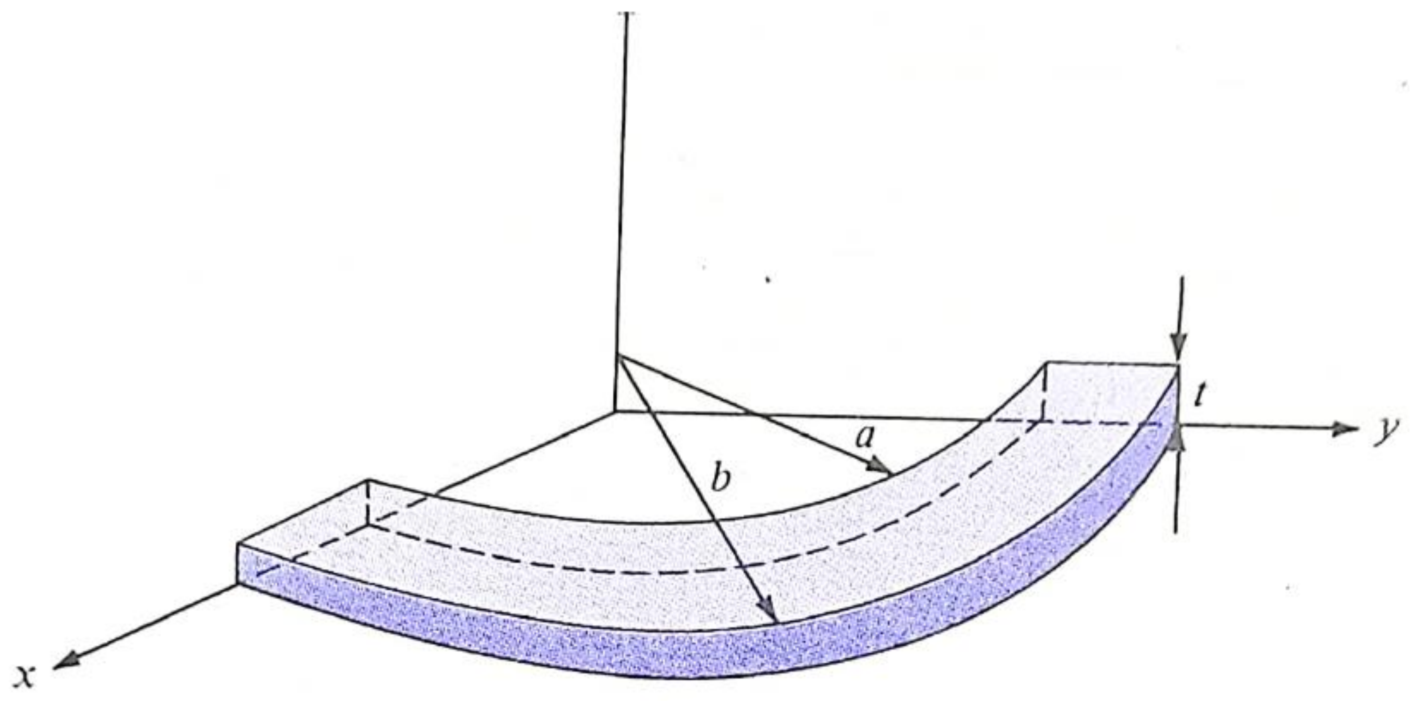
$$I = \int \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{z=0}^{t} \frac{V_0\, a}{\rho \ln \frac{b}{a}}\, dz\, \rho\, d\phi$$

$$I = \frac{\pi}{2}\, \frac{t\, V_0\, \sigma}{\ln \frac{b}{a}}$$

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{2 \ln \frac{b}{a}}{\sigma \pi t}$$

Mostrar que la resistencia entre las dos superficies horizontales $z=0$ y $z=t$ es

$$R' = \frac{4t}{\sigma\pi(b^2-a^2)}$$



cilindricas $\quad V = V(z)$

$$\frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

$$V = Az + B$$

bc

$V(z=0) = 0 \rightarrow 0 = A(0) + B \rightarrow B = 0$

$V(z=t) = V_0 \rightarrow V_0 = At \rightarrow A = \frac{V_0}{t}$

$$V = \frac{V_0}{t} z$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dz}\vec{a}_z = -\frac{V_0}{t}\vec{a}_z$$

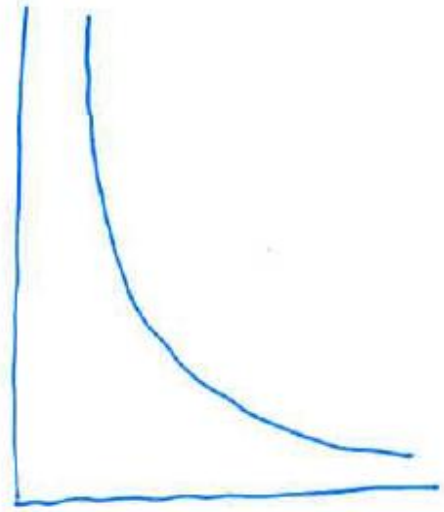
$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad d\vec{S} = -\rho \, d\phi \, d\rho \, \vec{a}_z$$

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{\rho=a}^{b} \int_{\phi=0}^{\pi/2} \frac{V_0 \sigma}{t} \rho \, d\phi \, d\rho$$

$$I = \frac{V_0 \sigma \pi (b^2 - a^2)}{4t}$$

$$R' = \frac{V_0}{I} = \frac{4t}{\sigma \pi (b^2 - a^2)}$$

Un electrodo con una forma hiperbólica ($xy = 4$) se coloca cercano a una esquina angular recta puesta a tierra. Calcular V y $\vec{E}$ en el punto $(1, 2, 0)$ cuando el electrodo está conectado a una fuente de 20 V.



$$\nabla^2 V = 0$$

PARA x $\frac{d^2V}{dx^2} = 0$

$$\frac{dV}{dx} = A$$

$$V = Ax + B$$

PARA y $\nabla^2 V = 0$

$$\frac{d^2V}{dy^2} = 0$$

$$\frac{dV}{dy} = C$$

$$V = Cy + D$$

EN $x=0$ $V=0$

$y=0$ $V=0$

$$V_x = Ax + B$$

$$0 = A(0) + B$$

$$B = 0$$

$$V_y = Cy + D$$

$$0 = C(0) + D$$

$$D = 0$$

$$V = (Ax)(Cy) = Fxy$$

$$V(4) = 20$$

$$20 = F(4)$$

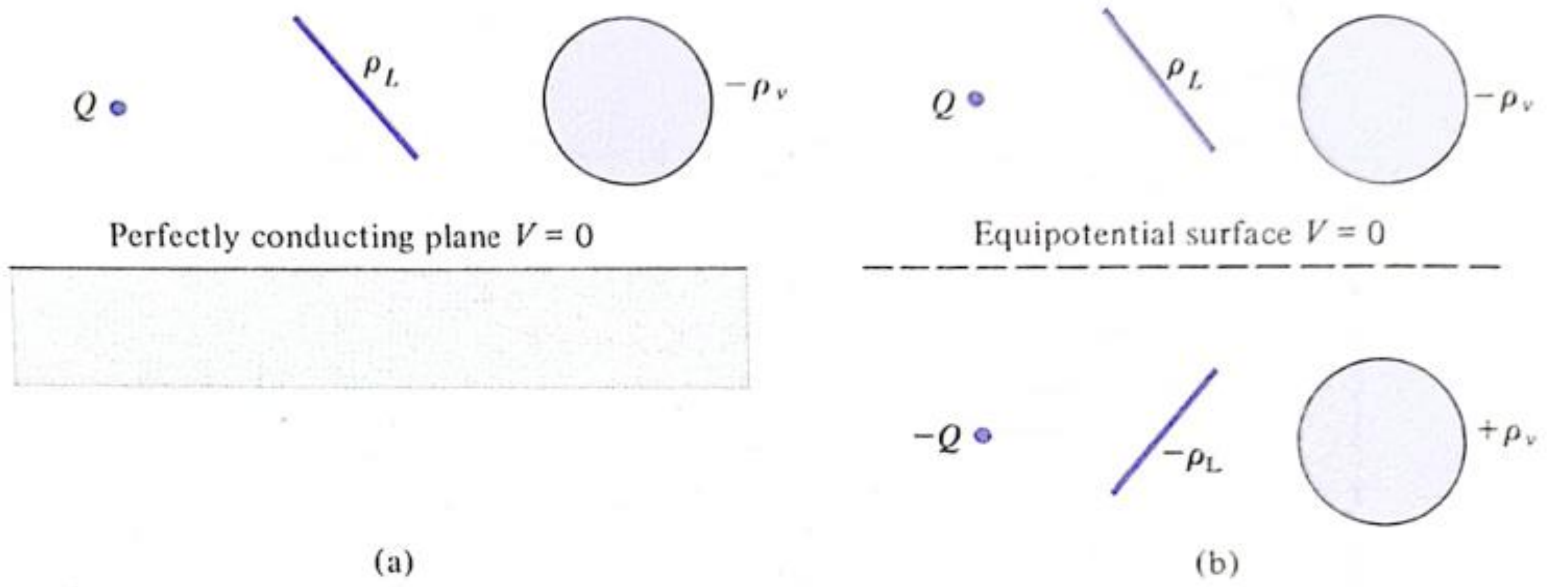
$$5 = F$$

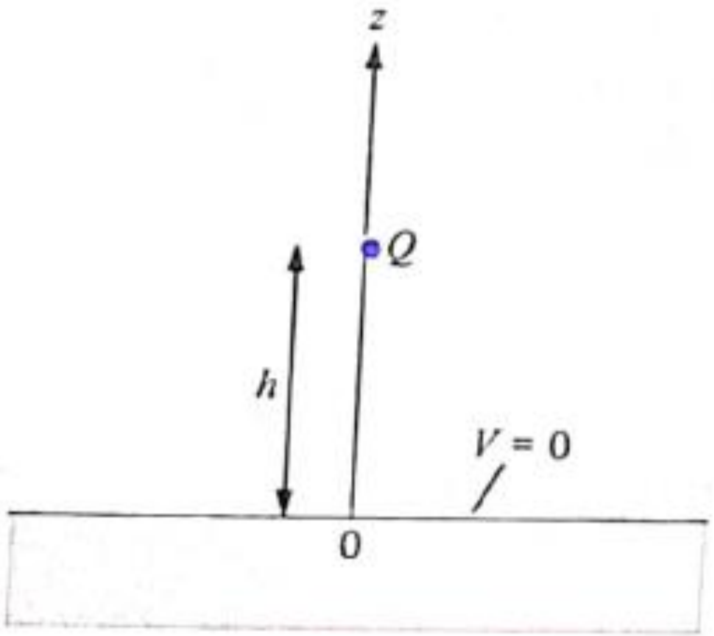
$$V = 5xy$$

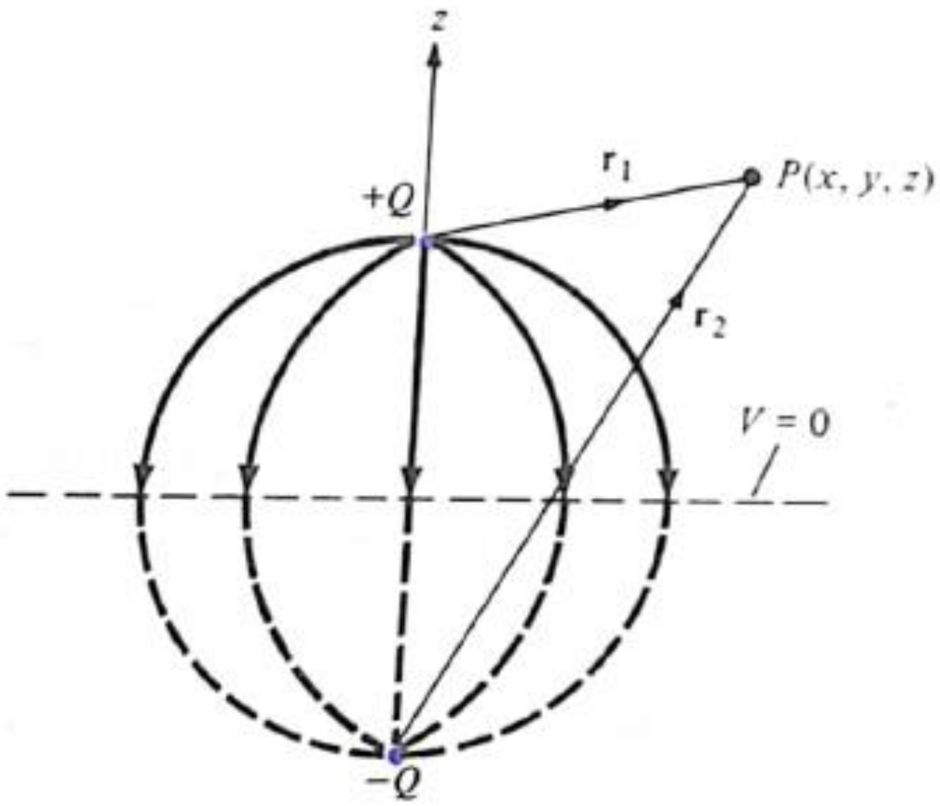
$$E(1,2) = (-10, -5) \quad E = -\nabla V = -5y\,\vec{a}_x - 5x\,\vec{a}_y$$

Método de Imágenes

- La teoría dice que para una configuración de carga dada cerca de un plano conductor perfecto a tierra puede ser reemplazada por una configuración que sea su imagen y una superficie equipotencial en lugar del plano.


Q
ρ_L
$-\rho_v$
Perfectly conducting plane $V = 0$
(a)
Q
ρ_L
$-\rho_v$
Equipotential surface $V = 0$
$-Q$
$-\rho_L$
$+\rho_v$
(b)

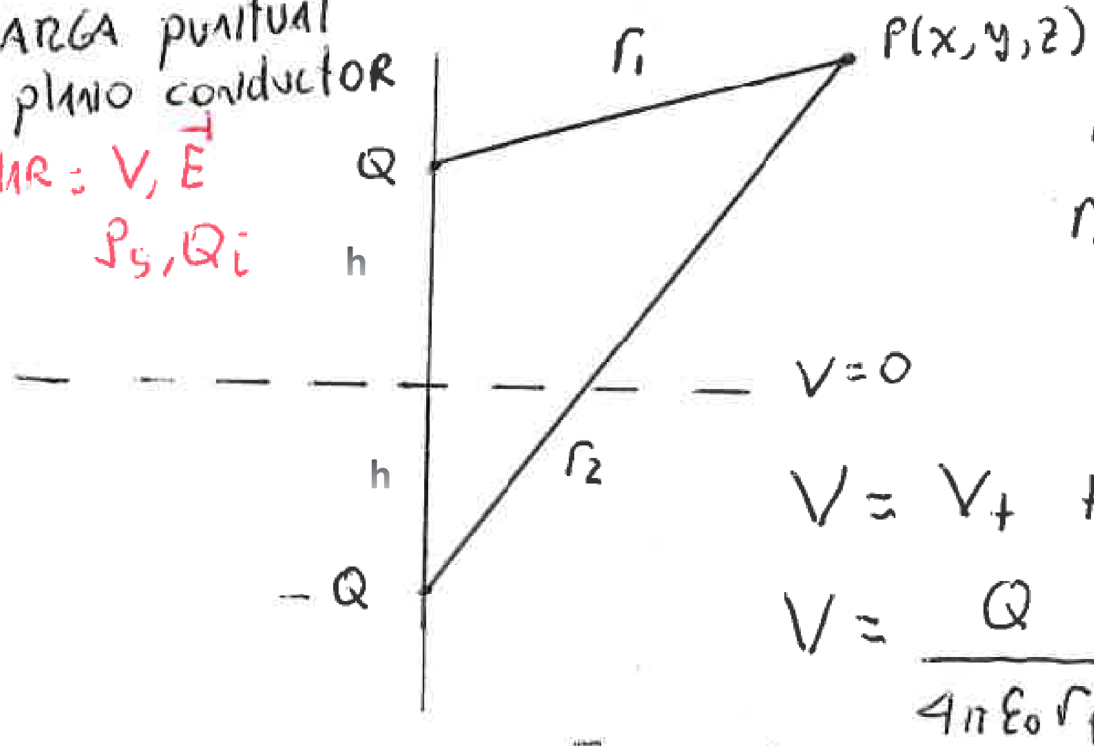

z
Q
h
V = 0
0


z
r1
P(x, y, z)
+Q
r2
V = 0
−Q

CARGA puntual
y plano conductor

Hallar: $V, \vec{E}$

ρ_s, Q_i



$$r_1 = (x,y,z) - (0,0,h) = (x,y,z-h)$$

$$r_2 = (x,y,z) - (0,0,-h) = (x,y,z+h)$$

$$V = V_+ + V_-$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(x^2+y^2+(z-h)^2)^{1/2}} - \frac{1}{(x^2+y^2+(z+h)^2)^{1/2}}\right]$$

$$\vec{E} = -\nabla V = \Big(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2+(z-h)^2)^{-3/2}2x + \frac{1}{2}(x^2+y^2+(z+h)^2)^{-3/2}2x,$$

$$-\frac{1}{2}(x^2+y^2+(z-h)^2)^{-3/2}2y + \frac{1}{2}(x^2+y^2+(z+h)^2)^{-3/2}2y,$$

$$-\frac{1}{2}(x^2+y^2+(z-h)^2)^{-3/2}(2)(z-h) + \frac{1}{2}(x^2+y^2+(z+h)^{-3/2}2(z+h)\Big)$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x\vec{a}_x + \vec{y}\,\vec{a}_y + (z-h)\,\vec{a}_z}{((x^2+y^2+(z-h)^2)^{3/2}} - \frac{x\vec{a}_x + y\,\vec{a}_y + (z+h)\,\vec{a}_z}{(x^2+y^2+(z+h)^2)^{3/2}}\right]$$

$$\text{Si } z=0 \rightarrow V=0$$

$$\text{Si } z=0 \rightarrow \vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[0,\ 0,\ \frac{-2h}{(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}\right]$$

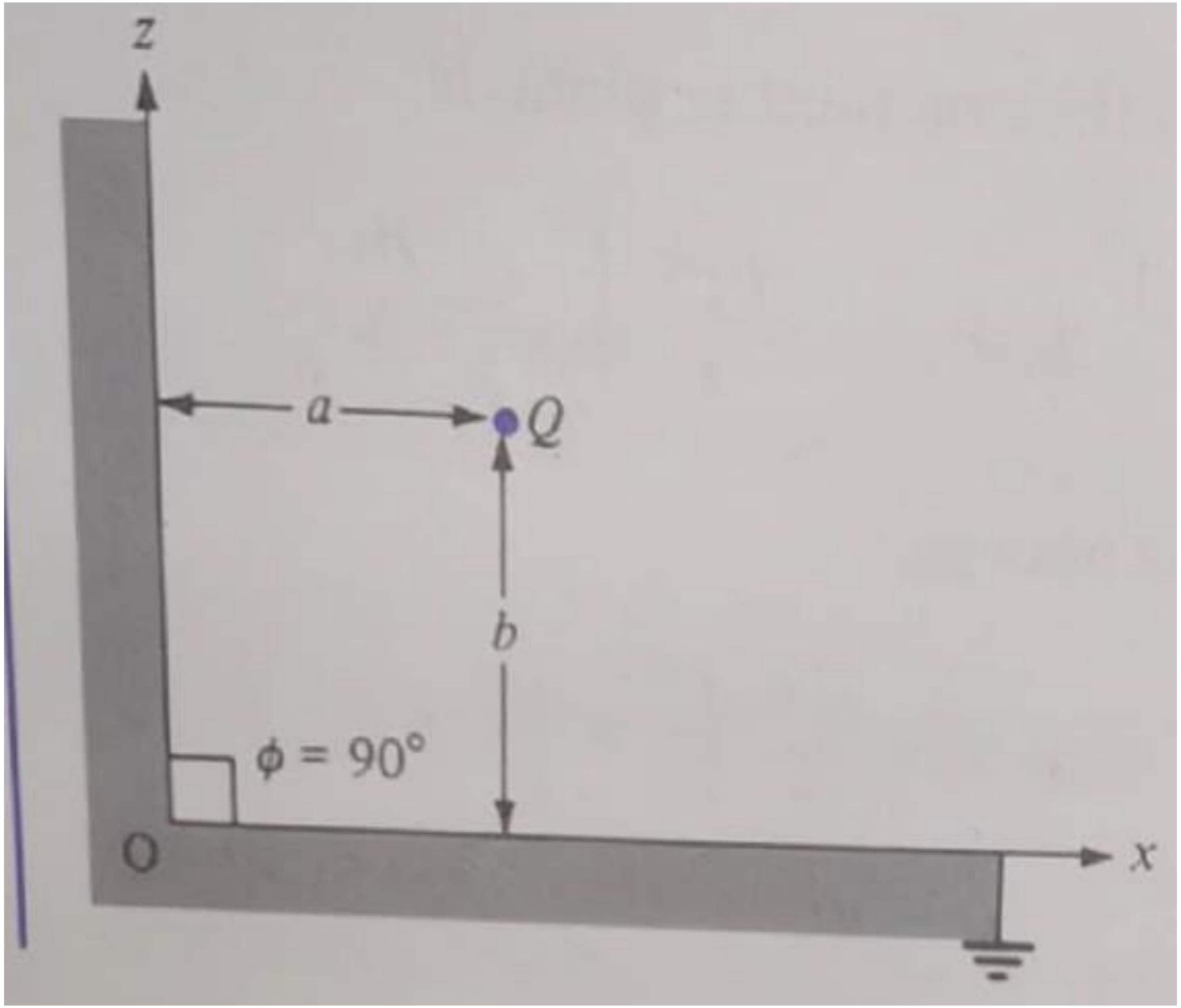
↑ Normal a la superficie

$$\rho_s=\vec{D}_n=\varepsilon_0 E_n=\varepsilon_0\left[\frac{-2hQ}{4\pi\varepsilon_0\,(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}\right]=\frac{-Qh}{2\pi(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}$$

$$Q_i=\int\rho_s\,dS=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-Qh\,dx\,dy}{2\pi(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=-\frac{Qh}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\rho\,d\rho\,d\phi}{[\rho^2+h^2]^{3/2}}$$

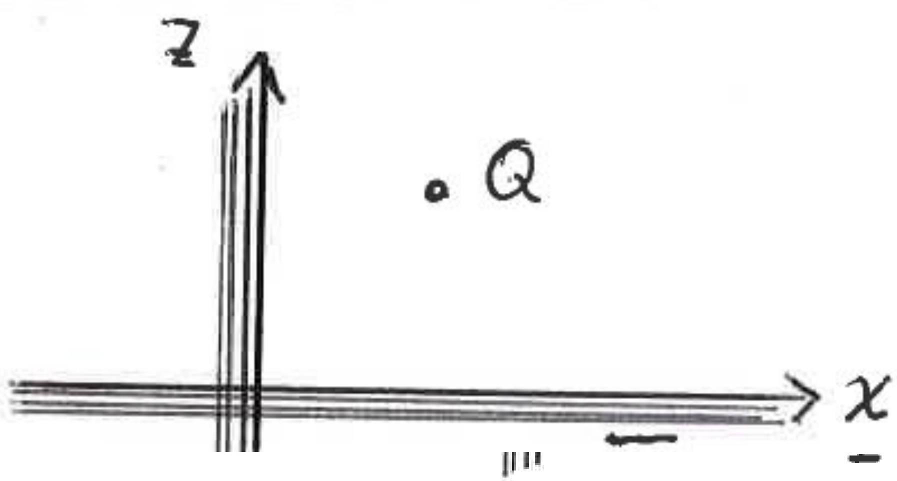
$$\rho=x^2+y^2$$
$$dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\phi$$

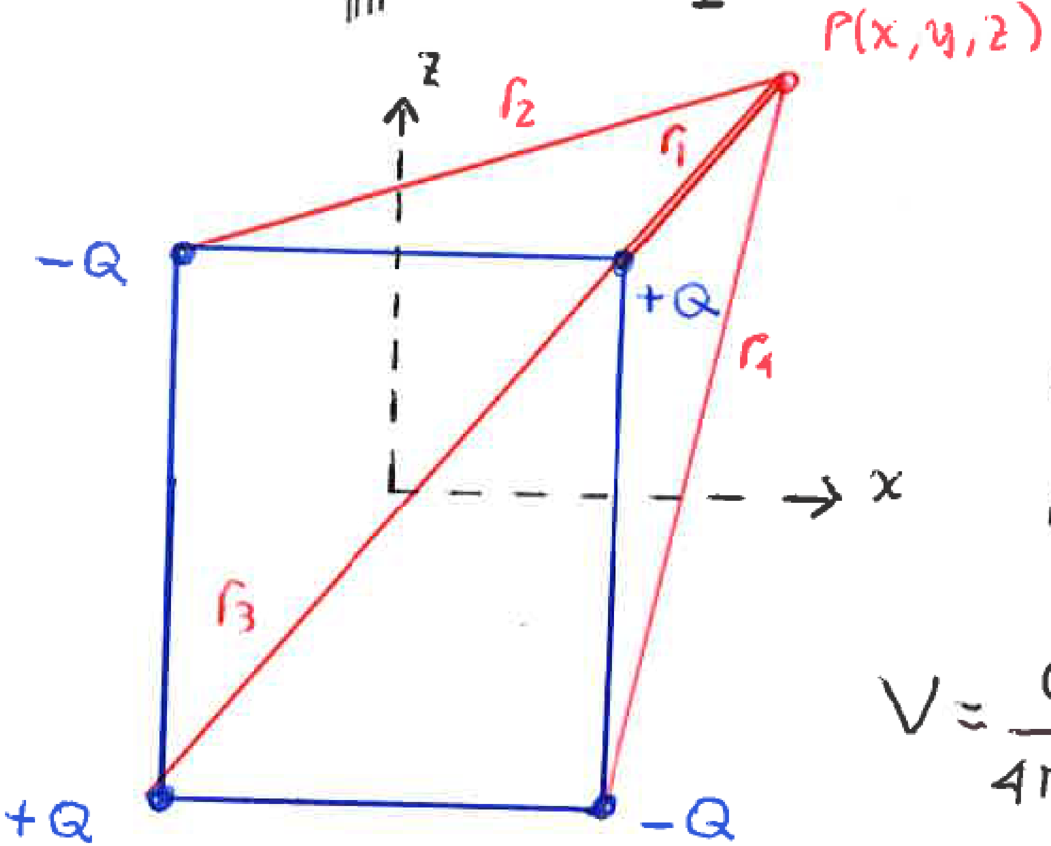
$$Q_i=-Q$$


z
a
Q
b
ϕ = 90°
O
x

CARGA puntual Q ubicada en $(a,0,b)$
Entre dos planos semiinfinitos conductores

Hallar V





$$r_1 = \left[(x-a)^2 + y^2 + (z-b)^2\right]^{1/2}$$

$$r_2 = \left[(x+a)^2 + y^2 + (z-b)^2\right]^{1/2}$$

$$r_3 = \left[(x+a)^2 + y^2 + (z+b)^2\right]^{1/2}$$

$$r_4 = \left[(x-a)^2 + y^2 + (z+b)^2\right]^{1/2}$$

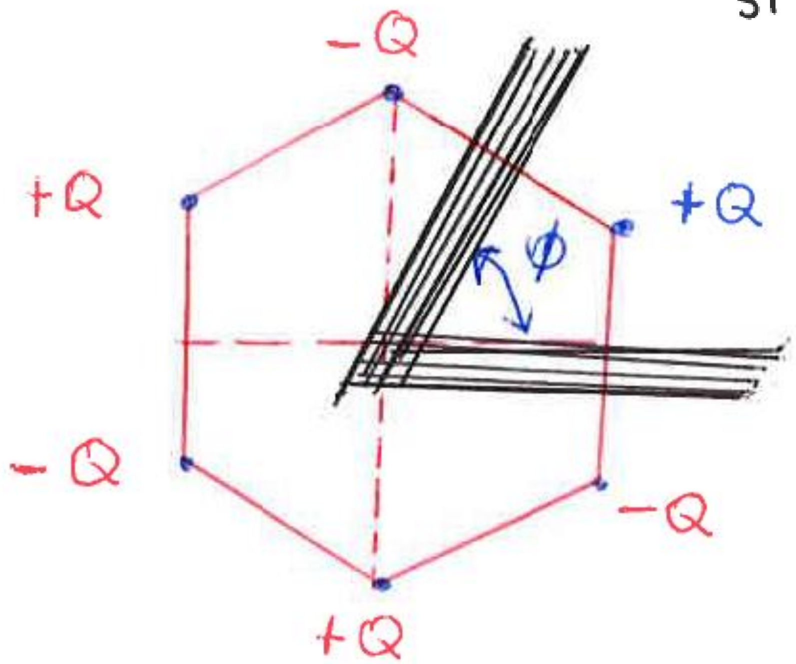
$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right]$$

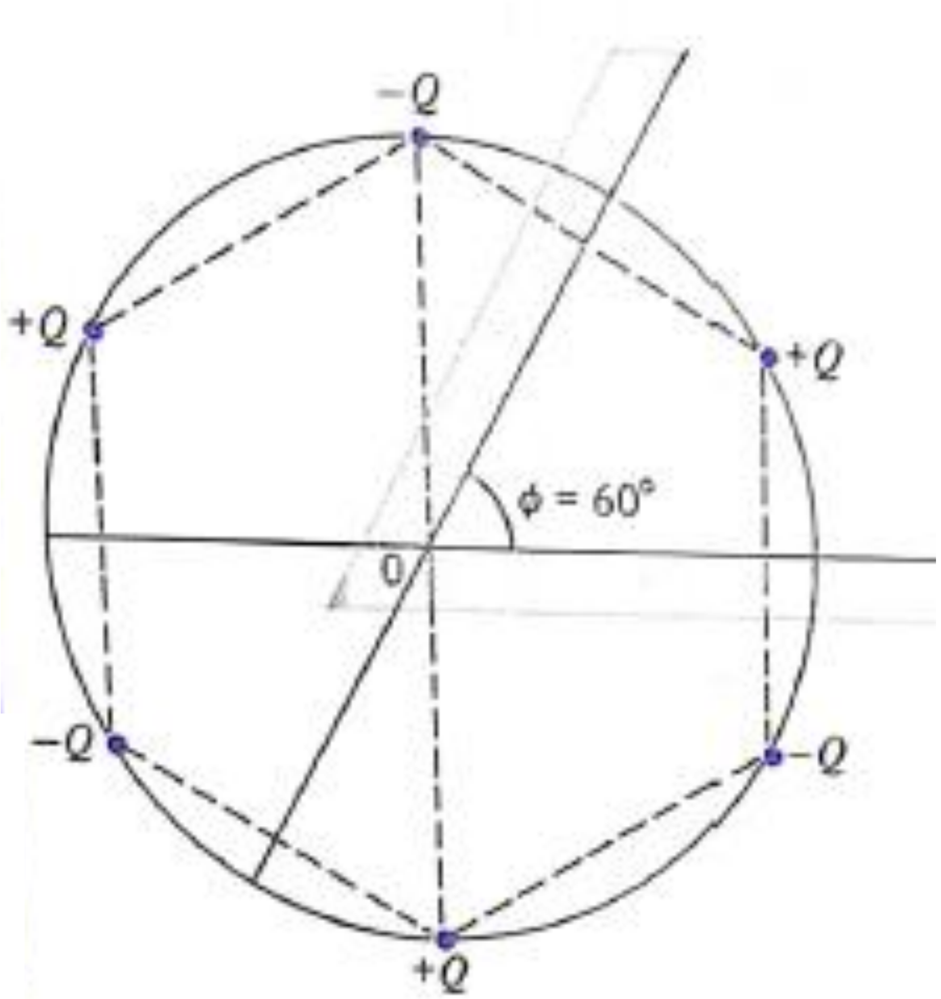
EN GENERAL, PARA UN SISTEMA FORMADO POR UNA CARGA PUNTUAL SITUADA ENTRE DOS PLANOS CONDUCTORES SEMINFINITOS INCLINADOS A UN ÁNGULO ϕ (EN GRADOS), EL NÚMERO DE IMÁGENES ESTÁ EXPRESADO POR

$$N = \left(\frac{360^\circ}{\phi} - 1\right)$$

Si por ejemplo $\phi = 60^\circ$

$$N = \left(\frac{360}{60} - 1\right) = 5$$

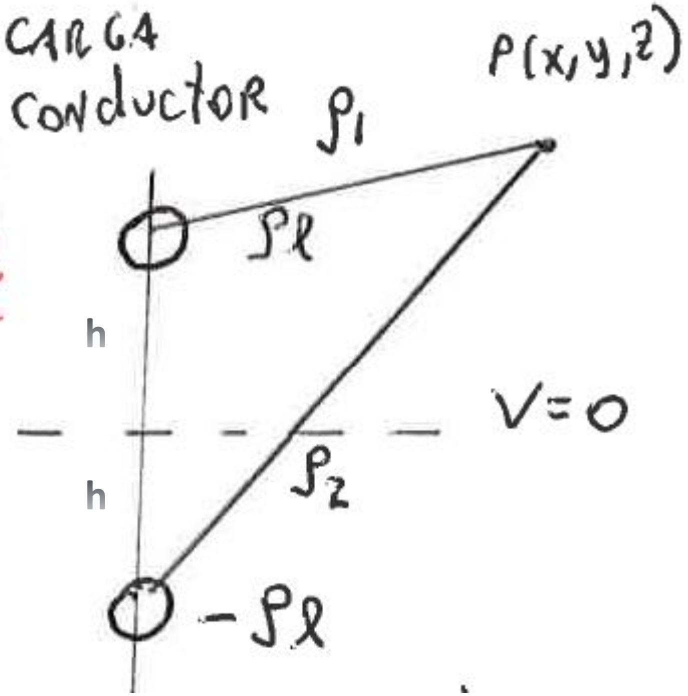




$$N = \left(\frac{360°}{\Phi} - 1\right)$$

LÍNEA DE CARGA
y plano conductor

Hallar $\vec{E}$, V, ρ_s, ρ_i



ρ_ℓ ubicada EN $x=0$ $z=h$
$-\rho_\ell$ ubicada EN $x=0$ $z=-h$
(paralelas al EJE y)

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 \rho_1}\,\vec{a}_{\rho_1} + \frac{-\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 \rho_2}\,\vec{a}_{\rho_2}$$

$$\vec{\rho}_1 = (x,y,z) - (0,y,h) = (x,0,z-h)$$
$$\vec{\rho}_2 = (x,y,z) - (0,y,-h) = (x,0,z+h)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x\vec{a}_x + (z-h)\vec{a}_z}{x^2+(z-h)^2} - \frac{x\vec{a}_x + (z+h)\vec{a}_z}{x^2+(z+h)^2}\right]$$

si $z=0$

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x\vec{a}_x - h\vec{a}_z - x\vec{a}_x - h\vec{a}_z}{x^2+h^2}\right]$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-2h\vec{a}_z}{x^2+h^2}\right]$$

NORMAL A LA SUPERFICIE

ahora $\quad V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$V = V_+ + V_- = \frac{-\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \rho_1 - \frac{-\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \rho_2$$

$$V = -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$V = \frac{-\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \left[\frac{x^2 + (z-h)^2}{x^2 + (z+h)^2} \right]^{1/2} \quad \text{si } z \geq 0$$

$$V = 0 \quad \text{si} \quad z \leq 0$$

$$V = 0 \quad \text{si} \quad z = 0$$

$$\rho_s = D_n = \varepsilon_0 E_z \Big|_{z=0}$$

$$\rho_s = \frac{-\rho_l h}{\pi (x^2 + h^2)}$$

$$\rho_i = \int \rho_s \, dx = -\frac{\rho_l h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + h^2} = -\rho_l$$

Campo Magnético

"Observación de ciertas piedras que se atraían entre sí."

Magnetismo ⟶ Magnesia ⟶ "piedras"

Griegos (Siglo VIII a C)

- trozo magnetita mineral (piedra imán o calamita) atraía un trozo de hierro pero no lo hacía con otros materiales
- podía atraer o repeler otro trozo de magnetita según la orientación
- Estas fuerzas no son de origen eléctrico

SIGLO XII

"PEQUEÑO TROZO DE MAGNETITA EN FORMA DE AGUJA SE SUSPENDE DE MODO QUE GIRE ALREDEDOR DEL EJE VERTICAL."

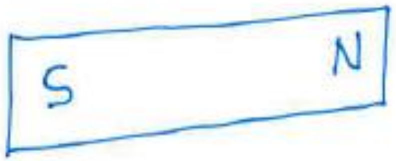
ESTO LO HACE AUNQUE NO EXISTA NINGÚN OTRO TROZO DE MAGNETITA O HIERRO CERCANO

GIRARÁ Y SE DETENDRÁ CON UN EXTREMO SEÑALANDO HACIA EL POLO NORTE GEOGRÁFICO DE LA TIERRA.

SIEMPRE APUNTARÁ EN ESA DIRECCIÓN SIN IMPORTAR DONDE EFECTUEMOS EL EXPERIMENTO.

Brújula Magnética

Imán de barra



Brújula magnética

¿Giro?

Alambre que transporta una corriente

Brújula magnética

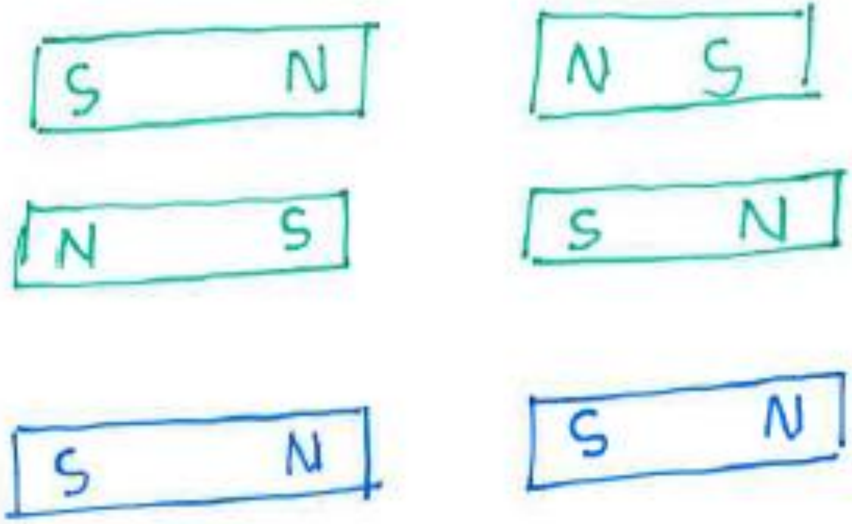
¿Giro?

¿RELACIÓN ENTRE CORRIENTE Y MAGNETISMO?

¿EXISTIRÁN "CARGAS" MAGNÉTICAS AISLADAS?

¿RELACIÓN ENTRE CAMPOS ELÉCTRICOS Y CAMPOS MAGNÉTICOS?

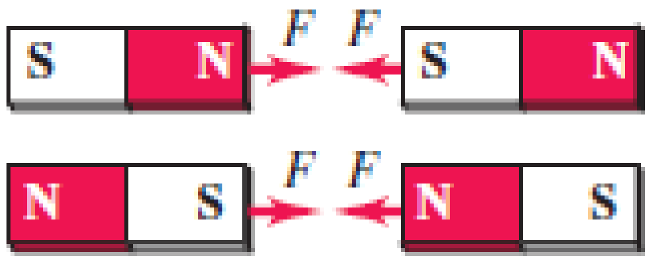
CARGA ELÉCTRICA EN MOVIMIENTO $\longrightarrow$ CAMPO MAGNÉTICO



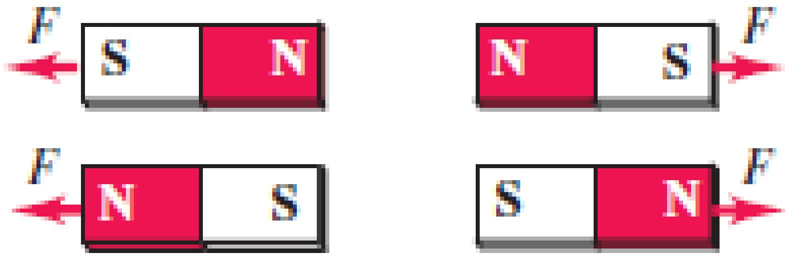
REPULSIÓN
(polos iguales)

ATRACCIÓN
(polos opuestos)

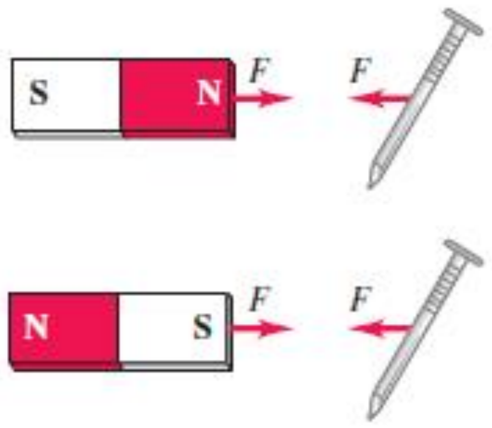
EN 1820 HANS CHRISTIAN OERSTED ENCONTRÓ LA RELACIÓN ENTRE CAMPO MAGNÉTICO Y CAMPO ELÉCTRICO *a*) Los polos opuestos se atraen.



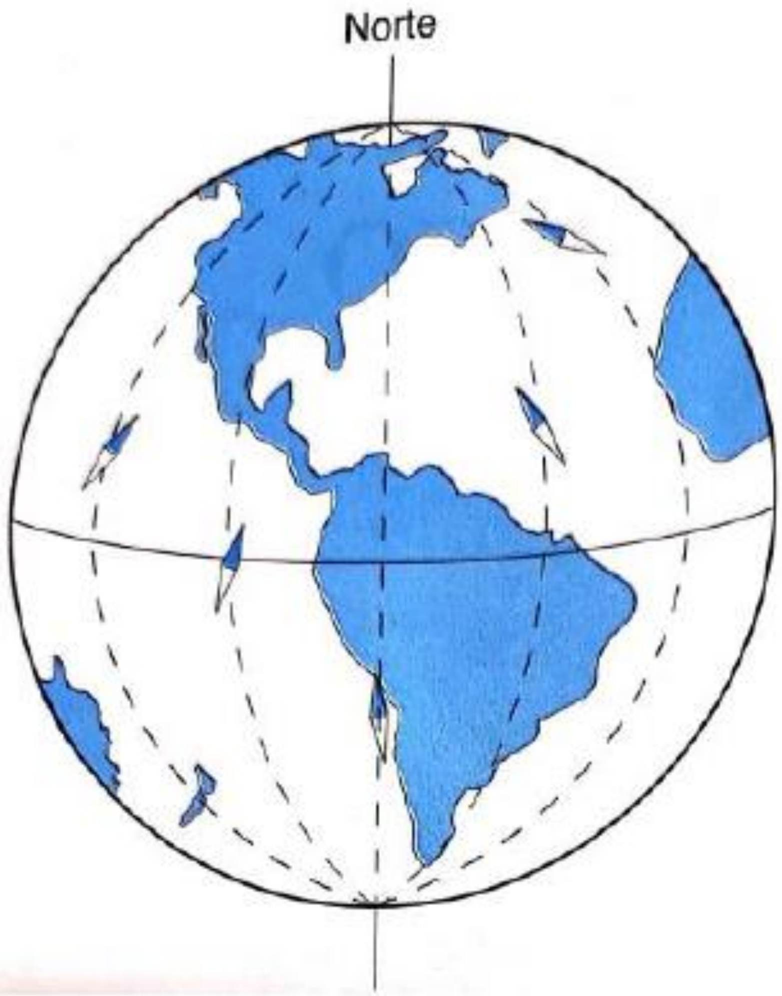
b) Los polos iguales se repelen.

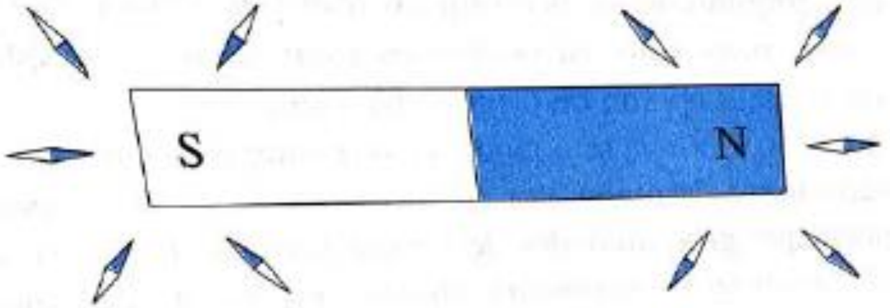


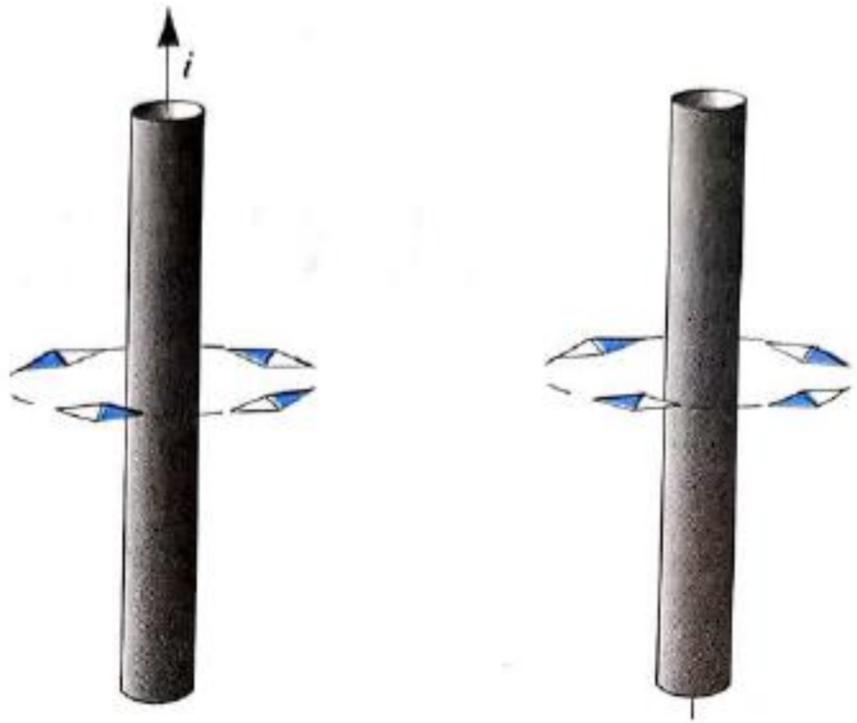
a)

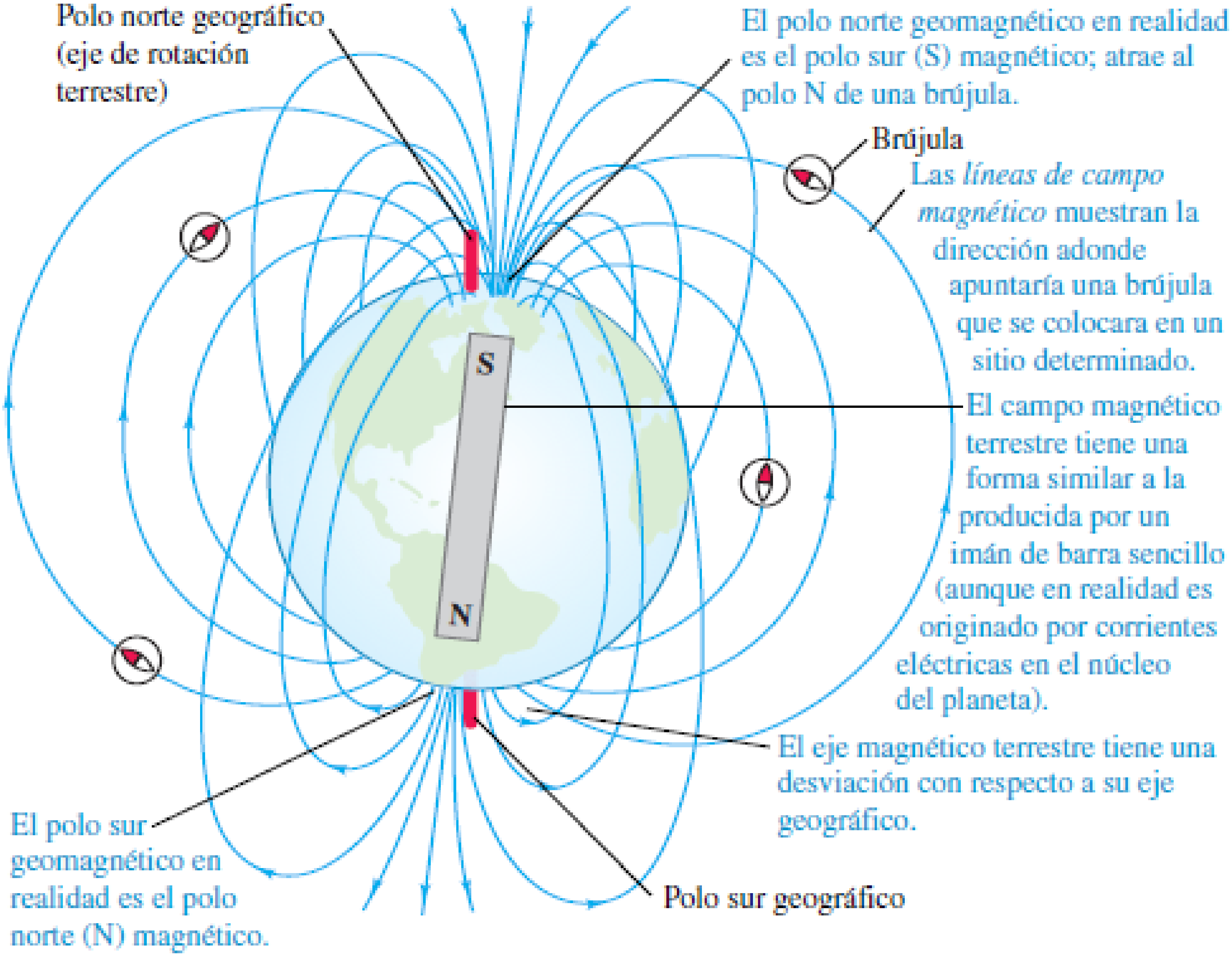


b)

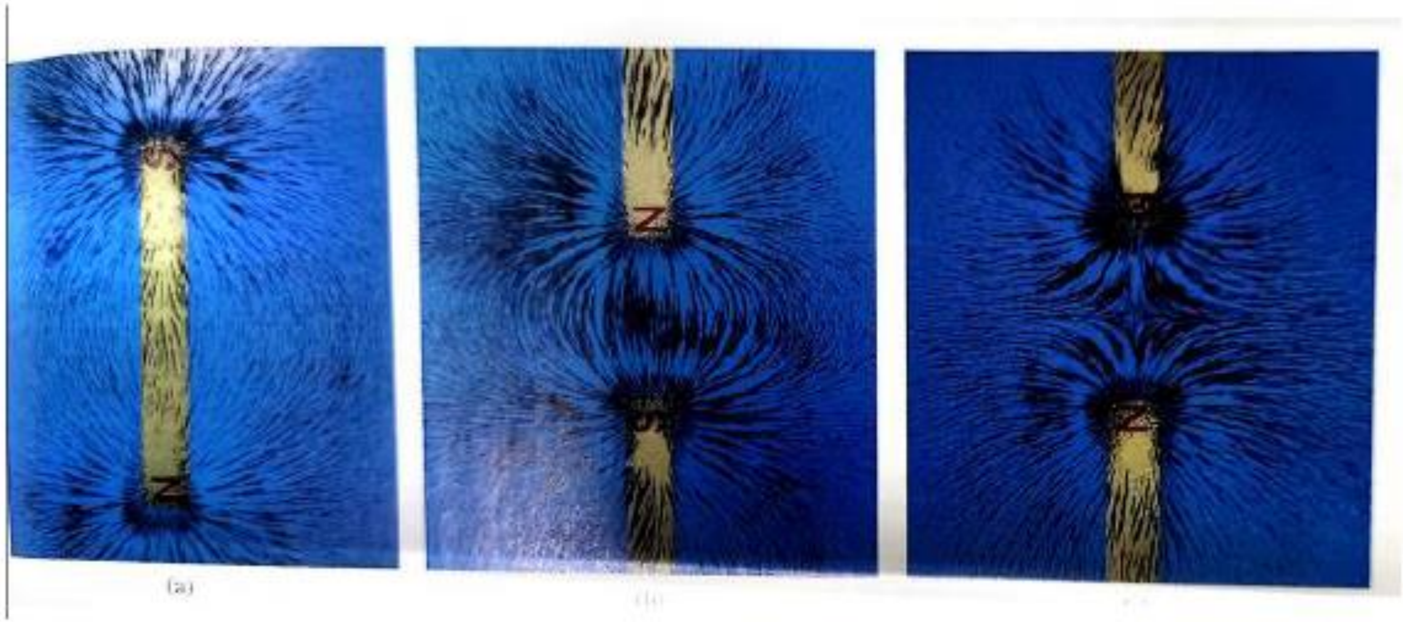

Norte

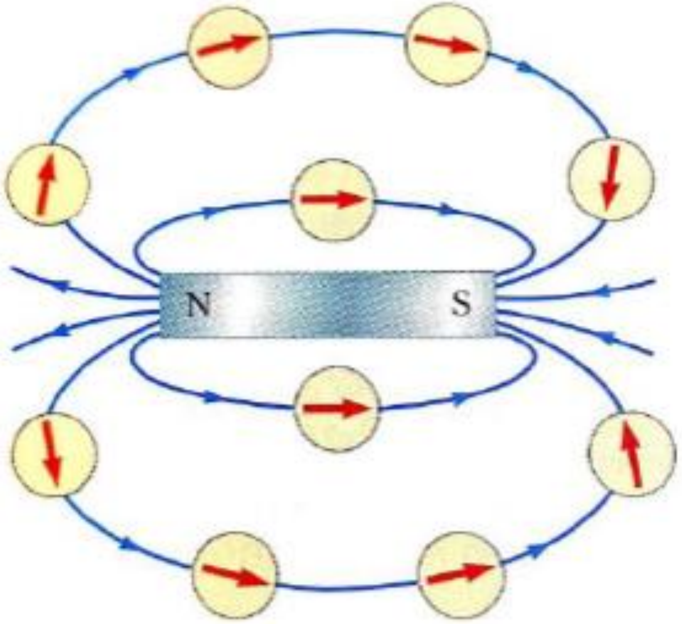

S
N

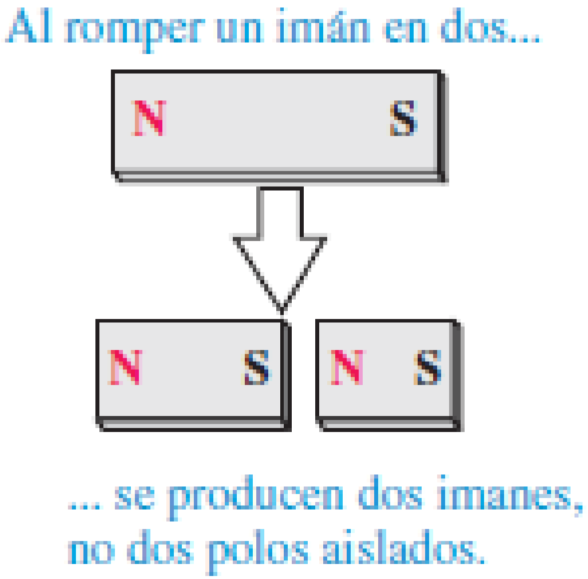

i



Polo norte geográfico (eje de rotación terrestre)
El polo norte geomagnético en realidad es el polo sur (S) magnético; atrae al polo N de una brújula.
Brújula
Las *líneas de campo magnético* muestran la dirección adonde apuntaría una brújula que se colocara en un sitio determinado.
S
N
El campo magnético terrestre tiene una forma similar a la producida por un imán de barra sencillo (aunque en realidad es originado por corrientes eléctricas en el núcleo del planeta).
El eje magnético terrestre tiene una desviación con respecto a su eje geográfico.
El polo sur geomagnético en realidad es el polo norte (N) magnético.
Polo sur geográfico




N
S



27.5 En el experimento de Oersted, se coloca una brújula directamente sobre un alambre horizontal (visto aquí desde arriba). Cuando la brújula se coloca directamente bajo el alambre, la desviación de la brújula se invierte.