Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

Análisis y diseño de algoritmos - Catedrático: Tomás Galvéz
17 de marzo de 2023

Tarea

Problema 1. *Use el método de substitución para determinar la solución a la siguiente recurrencia: $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$. La solución de acuerdo con el Master Method es $\Theta\left(n^2\right)$, pero usar la hipótesis $T(n) = cn^2$ falla. Realice el procedimiento bajo esa hipótesis para comprobar que falla y luego modifique la hipótesis para que funcione.*

Solución. Por el método de substitución, suponemos que $T(n) \leq cn^2 \implies T\left(\frac{n}{2}\right) \leq c\left(\frac{n}{2}\right)^2$, entonces:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 4c\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n \\ &= cn^2 + n \\ &\not\leq cn^2 \end{aligned}$$

Por lo que la hipótesis falla. Ahora, se propone otra hipótesis:

$$T(n) = cn^2 - n$$

Ahora tenemos dos casos, encontrar $O(n^2)$ y $\Omega(n^2)$.

- Para $T(n) = O(n^2)$,
  - Paso inductivo, $T(n) \leq cn^2 - n \implies T\left(\frac{n}{2}\right) \leq c\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right)$, tal que:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 4\left(c\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right)\right) + n \\ &= cn^2 - 2n + n \\ &= cn^2 - n \end{aligned}$$

  - Paso base, sea $n = 1, T(1) = O(1) = 1$ y $T(1) \leq c - 1$, para $c \geq 2$ lo cual es cierto.

$$\therefore T(n) = O(n^2)$$

- Para $\Omega(n^2)$,
  - Paso inductivo, $T(n) \geq cn^2 - n \implies T\left(\frac{n}{2}\right) \geq c\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right)$, tal que:

$$\begin{aligned} T(n) &\geq 4\left(c\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right)\right) + n \\ &= cn^2 - 2n + n \\ &= cn^2 - n \end{aligned}$$

  - Paso base, sea $n = 1, T(1) = \Omega(1) = 1$ y $T(1) \geq c - 1$ para $c = 1$ lo cual es cierto.

$$\therefore T(n) = \Omega(n^2)$$

Por lo tanto, la hipótesis es cierta. Tenemos que $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$ es $\Theta\left(n^2\right)$ □

Problema 2. *Resuelva la recurrencia $T(n) = 3T(\sqrt{n}) + \log_2 n$. Para hacerlo demuestre primero que se puede convertir en $S(m) = 3S\left(\frac{m}{2}\right) + m$; y luego resuelva esta recurrencia con el método de substitución. Con este resultado provea la respuesta para la recurrencia original.*

> *Hint: note que, en $S(m), m$ parece ocupar el lugar que $\log_2 n$ tiene en $T(n)$.*

Solución. Sea $T(n) = 3T(\sqrt{n}) + \log_2 n$, entonces hacemos $m = \log_2 n \implies 2^m = 2^{\log_2 n} = n$. Entonces,

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T(\sqrt{n}) + \log_2 n \\ T(2^m) &= 3T(\sqrt{2^m}) + m = 3T(2^{m/2}) + m \end{aligned}$$

Sea $S(m) = T(2^m)$

$$S(m) = 3S\left(\frac{m}{2}\right) + m$$

Por medio del Master Method, tenemos que $f(m) = m, a = 3, b = 2$, tal que $m^{\log_2 3}$. Es decir

$$m^1 \leq m^{\log_2 3} = m^{1{,}58}$$

Entonces, podemos aplicar el primer caso del Master Method, $S(m) = \Theta(m^{\log_2 3})$. A partir de esto, procedemos a usar substitución:

- Para $S(m) = O(m^{\log_2 3})$
  - Paso inductivo, sea $c \geq 0$, ahora sea $S(m) \leq cm^{\log_2 3} - dm \implies S\left(\frac{m}{2}\right) \leq c\left(\frac{m}{2}\right)^{\log_2 3} - d\left(\frac{m}{2}\right)$, tal que:

$$\begin{aligned} S(m) = 3S\left(\frac{m}{2}\right) + m &\leq 3\left(c\left(\frac{m}{2}\right)^{\log_2 3} - d\left(\frac{m}{2}\right)\right) + m \\ &= cm^{log_2 3} - \frac{3dm}{2} + m \\ &\leq cm^{log_2 3} - dm + m \\ &= cm^{log_2 3} + m(1-d) \end{aligned}$$

Como $m(1-d) \leq dm$, cuando $d \geq 1$

$$\leq cm^{log_2 3} + dm$$

- Paso base, se cumple trivialmente.

- Para $S(m) = \Omega(m^{\log_2 3})$

  - Paso inductivo, sea $c \geq 0$, ahora sea $S(m) \geq cm^{\log_2 3} - dm \implies S\left(\frac{m}{2}\right) \geq c\left(\frac{m}{2}\right)^{\log_2 3} - d\left(\frac{m}{2}\right)$, tal que:

$$\begin{aligned} S(m) = 3S\left(\frac{m}{2}\right) + m \geq 3\left(c\left(\frac{m}{2}\right)^{\log_2 3} - d\left(\frac{m}{2}\right)\right) + m \\ = cm^{log_2 3} - \frac{3dm}{2} + m \\ \geq cm^{log_2 3} - dm + m \\ = cm^{log_2 3} + m(1-d) \end{aligned}$$

Como $m(1-d) \geq dm$, cuando $d \leq 0$

$$\geq cm^{log_2 3} + dm$$

  - Paso base, se cumple trivialmente.

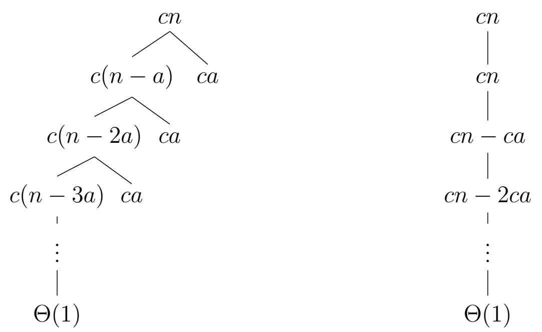
Por lo tanto, $S(m) = \Theta(m^{\log_2 3})$, como se propuso. Hacemos el retroceso de variables

$$\begin{aligned} T(n) &= T(2^m) \\ &= S(m) \\ &= \Theta(m^{\log_2 3}) \\ &= \Theta((\log_2 n)^{\log_2 3}) \end{aligned}$$

□

Problema 3. *Use un árbol de recursión para proveer una cota ajustada a la recurrencia $T(n-a)+T(a)+cn$, donde $a \geq 1, c > 0$; ambas constantes. Puede suponer que n es múltiplo de a.*

Solución. Sea



Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned}
T(n) &= cn + cn + cn - ca + cn - 2ca + cn - 3ca + \cdots + \Theta(1) \\
&= cn + \sum_{i=0}^{n/a} (cn - ica) \\
&= cn + \sum_{i=0}^{n/a} (cn) - ca \sum_{i=0}^{n/a} (i) \\
&= cn + \left(\frac{n}{a}\right)(cn) - ca \sum_{i=0}^{n/a} (i) \\
&= cn + \left(\frac{n}{a}\right)(cn) - \left[ca0 + ca \sum_{i=1}^{n/a} (i)\right] \\
&= cn + \left(\frac{n}{a}\right)(cn) - ca \sum_{i=1}^{n/a} (i) \\
&= cn + \left(\frac{n}{a}\right)(cn) - ca \left(\frac{\frac{n}{a}\left(\frac{n}{a}+1\right)}{2}\right) \\
&= cn + \frac{cn^2}{a} - \frac{ca}{2}\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{n}{a}\right) \\
&= cn + \frac{cn^2}{a} - \frac{cn^2}{2a} - \frac{cn}{2} \\
&= \Theta(n^2)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por recurrencia $T(n-a)+ T(a) + cn$ tiene una cota ajustada $\Theta(n^2)$. □

Problema 4. *Use el Master Method (si es posible) para dar cotas ajustadas a las siguientes recurrencias:*

1. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$

   Solución. Por Master Method, $\log_4 2 = 1/2$ y como $\sqrt{n} = n^{1/2}$. Entonces, $n^{\log_4 2} = \sqrt{n}$. Tenemos el segundo caso del teorema, por lo tanto, $T(n) = \Theta\left(n^{\log_4 2}\log_4 n\right)$. □

2. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2\log_2 n$

   Solución. Por Master Method, $\log_2 4 = 2$. Ahora bien, $f(n) = n^2\log_2 n$, por lo que descartamos el segundo caso del teorema, entonces verificaremos si es el primero o el segundo caso. Por comparación al límite, si da ∞, $f(n)$ crece más rápido que $g(n)$, si es 0, entonces $g(n)$ crece mas rápido que $f(n)$. Sea entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\log_2 n}{n^{\log_2 4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\log_2 n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \log_2 n = \infty$$

   Entonces, $n^{\log_2 4} \leq n^2 \log n$. Y además, la condición de regularidad nos da:

$$a * f(n/b) = 4\left(\frac{n}{2}\right)^2 \log_2\left(\frac{n}{2}\right) = n^2\log_2\left(\frac{n}{2}\right) \leq c * f(n) = cn^2\log_2 n$$

Al despejar c,

$$\frac{\log_2\left(\frac{n}{2}\right)}{\log_2 n} \leq c \implies 1 - \frac{1}{\log_2 n} \leq c$$

Pero de esto, no podemos extraer una c que satisfaga la hipotesis de que $c < 2$. Por lo tanto, el problema no se puede resolver con master method. □

Problema 5. *Dé una recurrencia que cumpla con las condiciones del tercer caso del Master Method excepto la condición de regularidad.*

Solución. Sea

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + e^n$$

Entonces, $\log_2 1 = 0$. Es decir, $n^{\log_2 1} = n^0 = 1 \leq e^n$. Pero,

$$a * f\left(\frac{n}{b}\right) = 1\left(\exp\left(\frac{n}{2}\right)\right) \leq cf(n) = c\left(\exp\left(n\right)\right)$$

Al despejar c:

$$\left(\frac{\exp\left(\frac{n}{2}\right)}{\exp\left(n\right)}\right) \leq c \implies \exp\left(-\frac{n}{2}\right) \leq c$$

Pero nótese que n es un positivo lo suficientemente grande y $c < 1$. Entonces la regularidad nunca se cumple, ya que si $n = 1$ (el positivo mas pequeño),

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\right) = 0{,}6 \leq c$$

Por lo tanto, la recurrencia es correcta. □

Problema 6. *Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido. Deseamos determinar si existe un camino que conecte a dos nodos, $u, v \in V$; esto se conoce como el problema de conectividad-st o STCON. El algoritmo de Savitch, presentado a continuación, determina si existe un camino con tamaño máximo 2^i entre dos nodos u, v del grafo G:*

```
if i=0 then
     if  u=v then
         return T
     else if (u, v) is an edge then
         return T
     end if
else
     for every vertex  w do
         if  R(G, u, w, i-1)  and R(G, w, v, i-1) then
             return  T
         end if
     end for
end if
return F
```

Identifique las partes Divide, Conquer y Combine de este algoritmo, y determine (con notación asintótica) una cota superior para su tiempo de ejecución si se ejecuta para $i = \log_2 n$*, donde* n *es el número de vértices en el grafo. El tiempo de ejecución que encuentre, ¿será indicador de eficiencia (es decir, será que el algoritmo es rápido") o de ineficiencia ("lento")?*

Solución. Las partes de Divide, Conquer y Combine son las siguientes:

1. Divide: El problema de encontrar una ruta entre nodos u y v se divide en dos subproblemas de encontrar rutas entre u y un nodo intermedio w, y entre w y v. Esto se hace en las líneas 8-11 del algoritmo.

2. Conquer: Los subproblemas se resuelven recursivamente llamando a la función R(G,u,w,i-1) y R(G,w,v,i-1) para encontrar caminos entre u y w, y entre w y v, respectivamente. Esto se hace en la línea 9 del algoritmo.

3. Combine: Si ambos subproblemas devuelven T, lo que indica que existen rutas entre u y w, y entre w y v, entonces existe una ruta entre los nodos u y v. Esto se hace en la línea 9 del algoritmo.

En primer lugar, $G(V,E)$ es un grafo dirigido, es decir que su matrix de adyacencia A_G de dimensiones $n \times n$, donde $n = |V|$, tal que:

$$(i,j) = \begin{cases} 1, & (i,j) \in \text{arista} \\ 0, & (i,j) \in \text{vértice} \end{cases}$$

En resumen, lo que nos da la hipótesis, es $R(u,v,i) \iff$ hay una trayectoria en G de u a v de longitud a lo sumo 2^i. Que en el algoritmo está representado por un punto medio w tal que se cumple que hay una distancia 2^{i-1} entre u a w, y de w a v. Entonces, nos damos cuenta que el algoritmo que nos proporcionan, en la linea 9, la recurrencia nos quiere decir que,

$$R(G,u,v,i) \iff (\exists w)[R(G,u,w,i-1) \wedge R(G,w,v,i-1)]$$

Ahora bien, nótese que este tipo de recursión ya lo habíamos estudiado en la prueba del Master Method, es decir que tenemos la profundidad $i = \log_2 n$, además que el tamaño entre dos nodos decrece a la mitad en cada llama recursiva, es decir de 2^i a 2^{i-1}, es decir que la cantidad de llamadas recursivas se puede expresar como $n^{\log_2 n}$. Es decir que el algoritmo de Savitch es de $O(n^{\log_2 n})$, el cual es una cota superior por su definición. Por último, veáse que $O(n^{\log_2 n})$ es un pésimo indicador de eficiencia, ya que con cada n la complejidad va aumentando, entonces es ineficiente. □