Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

Geometría diferencial - Catedrático: Alan Reyes
10 de abril de 2023

Tarea

Problema 1. *Mostrar que la ecuación del plano tangente en* $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$ *a una superficie regular* $S : f(x, y, z) = 0$*, con 0 un valor regular de* f *es*

$$f_x(\mathbf{p})\,(x - x_0) + f_y(\mathbf{p})\,(y - y_0) + f_z(\mathbf{p})\,(z - z_0) = 0$$

Solución. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función continua diferenciable con 0 un valor regular de f y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = 0\}$ una superficie regular. Por definición de plano regular,

$$T_{\mathbf{p}}S = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} \text{ es tangente a } S \text{ en } \mathbf{p}\}$$

Sea $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ tangente a S en $\mathbf{p} \in S$ en donde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \ni \alpha(0) = \mathbf{p}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. A probar:

$$\begin{aligned}
T_{\mathbf{p}}S &= f_x(\mathbf{p})\,(x - x_0) + f_y(\mathbf{p})\,(y - y_0) + f_z(\mathbf{p})\,(z - z_0) \\
&= \langle (f_x(\mathbf{p}), f_y(\mathbf{p}), f_z(\mathbf{p}))\,, (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle \\
&= \langle \nabla f(\mathbf{p}), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle \\
&= \langle \nabla f(\mathbf{p}), \mathbf{v} \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ahora bien, definamos $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ que pasa por el punto $\mathbf{p}$ para $t = 0$. De esto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
f(\alpha(t)) &= f(x(t), y(t), z(t)) \\
&= 0 \quad \text{(definición de } S\text{)}
\end{aligned}$$

Ahora bien, derivando la expresión anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f(\alpha(t)) &= \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) \\
&= \frac{\partial f(x(t), y(t), z(t))}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f(x(t), y(t), z(t))}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial f(x(t), y(t), z(t))}{\partial z} z'(t) \\
&= f_x(x, y, z) \cdot x'(t) + f_y(x, y, z) \cdot y'(t) + f_z(x, y, z) \cdot z'(t) \\
&= \langle \nabla f(x, y, z), \alpha'(t) \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Entonces, ahora tenemos el caso particular de $t = 0$, tal que:

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(\mathbf{p}), \alpha'(0) \rangle &= 0\\ \langle \nabla f(\mathbf{p}), \mathbf{v} \rangle &= 0\end{aligned}$$

Entonces, si $\mathbf{v} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, tal que:

$$\langle \nabla f(\mathbf{p}), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0$$

$\square$

- *¿Cómo queda la ecuación del plano tangente en el caso de una superfície regular de la forma $z = f(x, y)$?*

  Solución. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función continua diferenciable $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | g(x, y, z) = f(x, y) - z\}$ una superficie regular. Ahora bien, notamos que entonces, tenemos un caso particular del inciso anterior, por lo que solo hace falta calcular el gradiente:

$$\begin{aligned}\langle \nabla g(\mathbf{p}), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle &= 0\\ \langle (g_x(x_0, y_0), g_y(x_0, y_0), g_z(x_0, y_0)) , (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle &= 0\\ \langle (g_x(x_0, y_0), g_y(x_0, y_0), -1) , (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle &= 0\\ g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) - 1(z - z_0) &= 0\end{aligned}$$

$\square$

Problema 2. *Pruebe que las normales a una superficie parametrizada de la forma*

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)), \quad f(u) \neq 0, g'(u) \neq 0$$

pasan todas por el eje Oz

Demostración. A probar: las normales a una superficie parametrizada de la forma $\mathbf{x}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$, donde $f(u) \neq 0$ y $g'(u) \neq 0$, pasan todas por el eje Oz. Sea entonces:

- La forma de los vectores normales. Calculamos las derivadas parciales de $\mathbf{x}$ con respecto a u y v:

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u))$$

$$\mathbf{x}_v(u, v) = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0)$$

  Entonces, el vector normal a la superficie en el punto (u, v) está dado por el producto cruz de $\mathbf{x}_u$ y $\mathbf{x}_v$:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}(u, v) &= \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f'(u) \cos v & f'(u) \sin v & g'(u) \\ -f(u) \sin v & f(u) \cos v & 0 \end{vmatrix}\\ &= (-f(u)g'(u) \cos v, -f(u)g'(u) \sin v, f'(u)f(u))\end{aligned}$$

- Ahora bien, es necesario mostrar que todas las normales pasan por Oz. Si trazamos una línea desde un punto (u, v) en la superficie en la dirección del vector normal $\mathbf{n}(u, v)$, tenemos que la ecuación de esta línea es:

  $$\begin{aligned}(x, y, z) &= \mathbf{x}(u, v) + t\mathbf{n}(u, v)\\ &= \big(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)\big) + t\left(-f(u)g'(u)\cos v, -f(u)g'(u)\sin v, f'(u)f(u)\right)\end{aligned}$$

  Ahora bien, debemos encontrar el punto donde esta línea intersecta al eje Oz, por lo que debemos encontrar el valor de t para el cual $x = y = 0$. Es decir, tenemos el sistema de ecuaciones:

  $$\begin{aligned}0 &= f(u)\cos v - tf(u)g'(u)\cos v\\ 0 &= f(u)\sin v - tf(u)g'(u)\sin v\\ z &= g(u) + tf'(u)f(u)\end{aligned}$$

  Despejando para t en las primeras dos expresiones,

  $$t = \frac{1}{g'(u)}$$

  Reemplazando este valor en z, tenemos:

  $$z = g(u) + \frac{f'(u)f(u)}{g'(u)}$$

  Este valor de z no depende de v, lo que significa que todas las normales a la superficie pasan por el eje Oz.

$\blacksquare$

Problema 3. *Un punto crítico de una función diferenciable $f : S \to \mathbb{R}$ definida sobre una superficie regular S es un punto $\mathbf{p} \in S$ tal que $Df(\mathbf{p}) = 0$*

1. *Si $f : S \to \mathbb{R}$ es dada por $f(\mathbf{p}) = |\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|$, con $\mathbf{p}_0 \notin S$, mostrar que $\mathbf{p}$ es punto crítico de f si, y sólo si, la recta de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{p}_0$ es normal a S.*

   Demostración. Por definición de plano regular tenemos, $\mathbf{v} \in T_\mathbf{p}S$ tangente a S en $\mathbf{p} \in S$ en donde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ tal que $\alpha(0) = \mathbf{p}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. A probar: $Df(\mathbf{p}) = 0 \iff \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 \perp T_\mathbf{p}S$. Por otra parte, la derivada de f en el punto $\mathbf{p}$ en la dirección de $\mathbf{v}$ se define como:

   $$Df(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}f(\alpha(t)), \quad t = 0$$

   Además, tenemos por hipótesis que

   $$f(\mathbf{p}) = |\mathbf{p} - \mathbf{p}_0| = \sqrt{\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{p} - \mathbf{p}_0\rangle}$$

   Con esto, podemos calcular su derivada en un punto $\mathbf{p} \in S$ en la dirección de $\mathbf{v}$:

$$
\begin{aligned}
Df(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}f(\alpha(t)) &= \frac{d}{dt}\sqrt{\langle \alpha(t)-\mathbf{p}_0, \alpha(t)-\mathbf{p}_0\rangle} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\langle \alpha(t)-\mathbf{p}_0, \alpha(t)-\mathbf{p}_0\rangle}}\frac{d}{dt}\langle \alpha(t)-\mathbf{p}_0, \alpha(t)-\mathbf{p}_0\rangle \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\langle \alpha(t)-\mathbf{p}_0, \alpha(t)-\mathbf{p}_0\rangle}} \cdot 2\langle \alpha'(t), \alpha(t)-\mathbf{p}_0\rangle \\
&= \frac{\langle \alpha'(t), \alpha(t)-\mathbf{p}_0\rangle}{\sqrt{\langle \alpha(t)-\mathbf{p}_0, \alpha(t)-\mathbf{p}_0\rangle}} \\
&= \frac{\langle \alpha'(t), \alpha(t)-\mathbf{p}_0\rangle}{|\alpha(t)-\mathbf{p}_0|}
\end{aligned}
$$

Cuando $t=0$,

$$
\begin{aligned}
Df(\alpha(0)) &= \frac{\langle \alpha'(0), \alpha(0)-\mathbf{p}_0\rangle}{|\alpha(0)-\mathbf{p}_0|} \\
Df(\mathbf{p}) &= \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}-\mathbf{p}_0\rangle}{|\mathbf{p}-\mathbf{p}_0|}
\end{aligned}
$$

Con esto, procedemos a probar las dos implicaciones:

- ($\implies$) Si $\mathbf{p}$ es un punto crítico de $f \implies Df(\mathbf{p}) = 0$ entonces:

  $$Df(\mathbf{p}) = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}-\mathbf{p}_0\rangle}{|\mathbf{p}-\mathbf{p}_0|} = 0$$

  Entonces
  $$\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}-\mathbf{p}_0\rangle = 0$$

  Por lo tanto, la recta de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{p}_0$ es normal a S.

- ($\impliedby$) Tenemos que la recta de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{p}_0$ es normal a $S \implies \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}-\mathbf{p}_0\rangle = 0 \implies Df(\mathbf{p}) = 0 \implies \mathbf{p}$ es un punto crítico de f.

■

2. *Si $h : S \to \mathbb{R}$ es dada por $h(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{v}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vector unitario, mostrar que $\mathbf{p}$ es punto crítico de h si, y sólo si, $\mathbf{v}$ es un vector normal a S en $\mathbf{p}$.*

   Demostración. Por definición de plano regular tenemos, $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$ tangente a S en $\mathbf{p} \in S$ en donde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ tal que $\alpha(0) = \mathbf{p}$ y $\alpha'(0) = \mathbf{w}$. A probar: $Dh(\mathbf{p}) = 0 \iff \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0$. Por otra parte, la derivada de f en el punto $\mathbf{p}$ en la dirección de $\mathbf{w}$ se define como:

   $$Dh(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}h(\alpha(t)), \quad t = 0$$

   Además, tenemos por hipótesis que

   $$h(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{v}\rangle$$

Con esto, podemos calcular su derivada en un punto $\mathbf{p} \in S$ en la dirección de $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned} Dh(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}h(\alpha(t)) &= \frac{d}{dt}\langle \alpha(t), \mathbf{v}\rangle \\ &= \langle \alpha'(t), \mathbf{v}\rangle + \langle \alpha(t), 0\rangle \\ &= \langle \alpha'(t), \mathbf{v}\rangle \end{aligned}$$

Cuando $t = 0$,

$$\begin{aligned} Dh(\alpha(0)) &= \langle \alpha'(0), \mathbf{v}\rangle \\ Dh(\mathbf{p}) &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle \end{aligned}$$

Con esto, procedemos a probar las dos implicaciones:

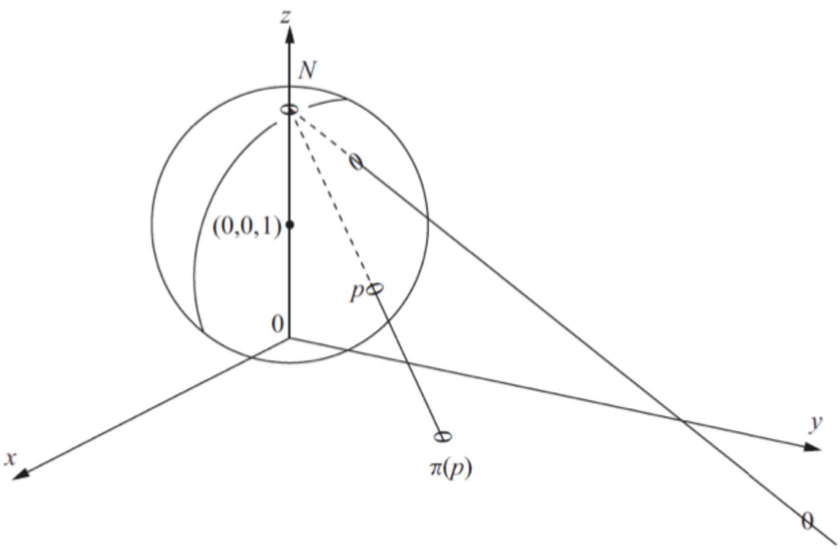
- ($\implies$) Si $\mathbf{p}$ es un punto crítico de $h \implies Dh(\mathbf{p}) = 0$ entonces:

$$Dh(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle = 0$$

  Por lo tanto, $\mathbf{v}$ es un vector normal a S en $\mathbf{p}$.
- ($\impliedby$) Tenemos que $\mathbf{v}$ es un vector normal a S en $\mathbf{p} \implies \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle = 0 \implies Dh(\mathbf{p}) = 0 \implies \mathbf{p}$ es un punto crítico de h.

■

Problema 4. *Obtenga la primera forma fundamental de la parametrización de la esfera S^2 dada por la proyección estereográfica.*



Demostración. Considerando la tarea anterior, tenemos la proyección estereográfica definida como:

$$x(u,v) = \pi^{-1}(u,v) = \left(\frac{4u}{u^2+v^2+4}, \frac{4v}{u^2+v^2+4}, \frac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4}\right)$$

Con la siguiente línea de código de *Mathematica* deducimos x_u y x_v respectivamente:

```
In[36]:= d1 := Grad[4 * u / (v^2 + u^2 + 4), {u, v}];
         d2 := Grad[4 * v / (v^2 + u^2 + 4), {u, v}];
         d3 := Grad[2 * (u^2 + v^2) / (u^2 + v^2 + 4), {u, v}];
         xu := Simplify[{d1[[1]], d2[[1]], d3[[1]]}]
         xv := Simplify[{d1[[2]], d2[[2]], d3[[2]]}]

In[41]:= {xu, xv}
```

$$\text{Out[41]=} \left\{\left\{\frac{4\,(4-u^2+v^2)}{(4+u^2+v^2)^2}, -\frac{8\,u\,v}{(4+u^2+v^2)^2}, \frac{16\,u}{(4+u^2+v^2)^2}\right\}, \left\{-\frac{8\,u\,v}{(4+u^2+v^2)^2}, \frac{4\,(4+u^2-v^2)}{(4+u^2+v^2)^2}, \frac{16\,v}{(4+u^2+v^2)^2}\right\}\right\}$$

- x_u:
$$x_u = \left(\frac{4(4-u^2+v^2)}{(4+u^2+v^2)^2}, -\frac{8uv}{(4+u^2+v^2)^2}, \frac{16u}{(4+u^2+v^2)^2}\right)$$
- x_v:
$$x_v = \left(-\frac{8uv}{(4+u^2+v^2)^2}, \frac{4(4+u^2-v^2)}{(4+u^2+v^2)^2}, \frac{16v}{(4+u^2+v^2)^2}\right)$$

Considerando esto, procedemos a encontrar la primera fórmula fundamental con lo siguiente:

$$\begin{aligned}
E = \langle x_u, x_u\rangle &= \frac{16(4-u^2+v^2)^2}{(4+u^2+v^2)^4} + \frac{64u^2v^2}{(4+u^2+v^2)^4} + \frac{256u^2}{(4+u^2+v^2)^4} \\
&= \frac{16}{(4+u^2+v^2)^2} \\
F = \langle x_u, x_v\rangle &= -\frac{32uv(4-u^2+v^2)}{(4+u^2+v^2)^4} - \frac{32uv(4-u^2+v^2)}{(4+u^2+v^2)^4} + \frac{256uv}{(4+u^2+v^2)^4} \\
&= 0 \\
G = \langle x_v, x_v\rangle &= \frac{64u^2v^2}{(4+u^2+v^2)^4} + \frac{16(4+u^2-v^2)^2}{(4+u^2+v^2)^4} + \frac{256v^2}{(4+u^2+v^2)^4} \\
&= \frac{64u^2v^2 + 16(4+u^2-v^2)^2 + 256v^2}{(4+u^2+v^2)^4} \\
&= \frac{16}{(4+u^2+v^2)^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la formula fundamental es:

$$\begin{aligned}
I &= \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{16}{(4+u^2+v^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{16}{(4+u^2+v^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

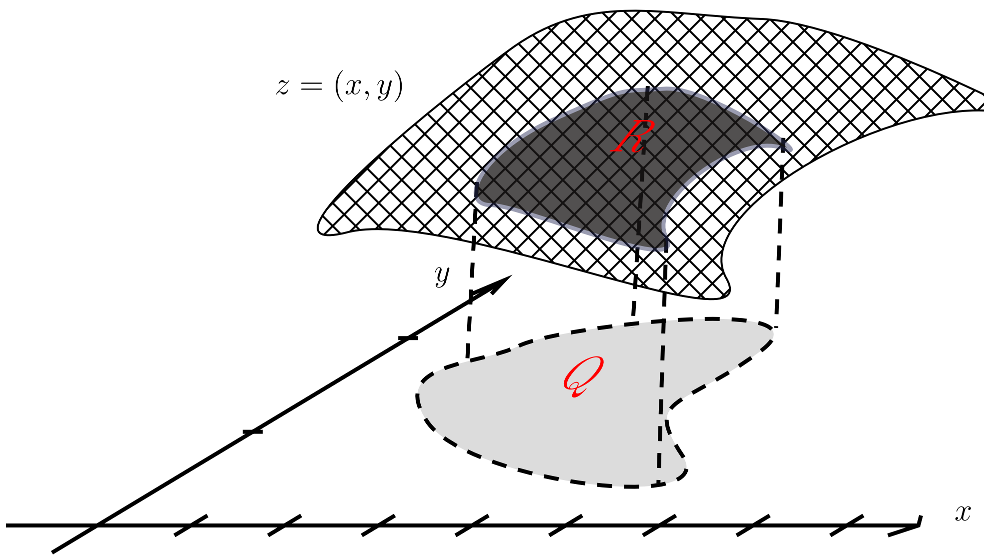
■

Problema 5. *Muestre que el área A de una región limitada R sobre la superficie $z = f(x, y)$, con f diferenciable, es*

$$A = \iint_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dxdy$$

donde Q es la proyección ortogonal de R sobre el plano Oxy.

Demostración. Considérese la siguiente figura:



Por el siguiente teorema deducido en clase:

> Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $R \subseteq S$ una región limitada en S, contenida dentro de una vecindad parametrizada $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$. Entonces, el área superficial de R está dada por
>
> $$A(R) = \int\int_Q |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| dudv, \quad Q = \mathbf{x}^{-1}(R)$$

Por la hipótesis, tenemos $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ tal que

$$\mathbf{x}(x, y) = (x, y, f(x, y)),$$

tal que el área superficial (donde Q es la proyección ortogonal de R, es decir $\pi(x, y, z) = (x, y)$):

$$A(R) = \int\int_Q |\mathbf{x}_x \times \mathbf{x}_y| dxdy, \quad Q = \mathbf{x}^{-1}(R) = \pi(R)$$

Entonces, tenemos:

$$\mathbf{x}_x = (1, 0, f_x) \quad \mathbf{x}_y = (0, 1, f_y)$$

Tal que:

$$\mathbf{x}_x \times \mathbf{x}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A(R) &= \int\int_Q |\mathbf{x}_x \times \mathbf{x}_y| dxdy \\ &= \int\int_Q |(-f_x, -f_y, 1)| dxdy \\ &= \iint_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy \end{aligned}$$

■

Problema 6. *Las curvas coordenadas de una parametrización $\mathbf{x}(u,v)$ de S constituyen una red de Tchebyshev si las longitudes de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por ellas son iguales.*

1. *Pruebe una condición necesaria y sufieciente para que esto suceda es que*

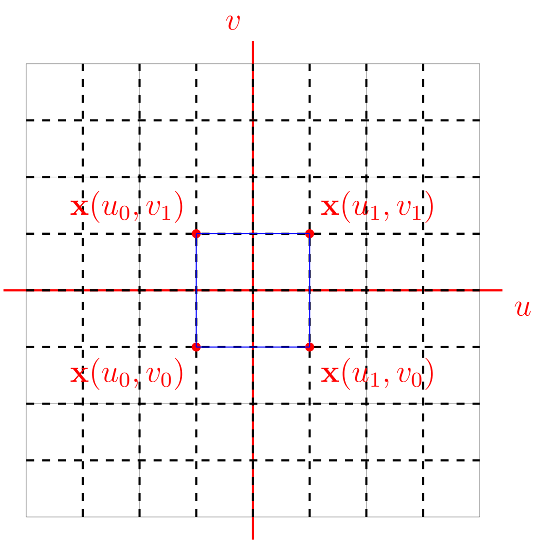
$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0 \quad y \quad \frac{\partial G}{\partial u} = 0$$

Demostración. A probar: las curvas coordenadas de una parametrización $\mathbf{x}(u,v)$ de S constituyen una red de Tchebyshev si las longitudes de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por ellas son iguales. $\iff \frac{\partial E}{\partial v} = 0 \land \frac{\partial G}{\partial u} = 0$.

Considérese la primera forma fundamental de una superficie se define como:

$$I = \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

En donde $E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle$, $F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle$ y $G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$. Ahora bien, consideremos un cuadrilátero formado por las curvas coordenadas de la parametrización $\mathbf{x}(u,v)$ en la superficie S, formado por los vértices del cuadrilátero son $\mathbf{x}(u_0, v_0)$, $\mathbf{x}(u_0, v_1)$, $\mathbf{x}(u_1, v_0)$ y $\mathbf{x}(u_1, v_1)$, considérese la siguiente ilustración:



Ahora bien, la longitud de la curva, de acuerdo a la definición vista en clase:

Dado $\mathbf{x}(u(t), v(t))$ con t en el intervalo $[a, b]$, entonces la longitud de la curva está dada por:

$$L(\alpha(t)) = \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}dt$$

Ahora bien, calculamos las longitudes de los lados opuestos:

- La longitud del lado opuesto al lado formado por los puntos $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ y $\mathbf{x}(u_0, v_1)$. Consideremos el segmento de curva en la superficie que une los puntos $\mathbf{x}(u_1, v_0)$ y $\mathbf{x}(u_1, v_1)$. Este segmento de curva puede ser parametrizado por $\mathbf{x}(u_1, v)$ con v en el intervalo $[v_0, v_1]$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}|\mathbf{x}(u_1, v_0) - \mathbf{x}(u_1, v_1)| &= |L(\mathbf{x}(u_1, v))| \\ &= \left|\int_{v_0}^{v_1} \sqrt{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F\frac{du}{dv}\frac{dv}{dv} + G\left(\frac{dv}{dv}\right)^2}dv\right| \\ &= \left|\int_{v_0}^{v_1} \sqrt{E\,(0)^2 + 2F(0)(1) + G\,(1)^2}dv\right| \\ &= \left|\int_{v_0}^{v_1} \sqrt{G(u_1, v)}dv\right|\end{aligned}$$

- La longitud del lado opuesto al lado formado por los puntos $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ y $\mathbf{x}(u_1, v_0)$. Consideremos el segmento de curva en la superficie que une los puntos $\mathbf{x}(u_0, v_1)$ y $\mathbf{x}(u_1, v_1)$. Este segmento de curva puede ser parametrizado por $\mathbf{x}(u, v_1)$ con u en el intervalo $[u_0, u_1]$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}|\mathbf{x}(u_0, v_1) - \mathbf{x}(u_1, v_1)| &= |L(\mathbf{x}(u, v_1))| \\ &= \left|\int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{du}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{du}\right)\left(\frac{dv}{du}\right) + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2}dt\right| \\ &= \left|\int_a^b \sqrt{E\,(1)^2 + 2F\,(1)\,(0) + G\,(0)^2}dt\right| \\ &= \left|\int_a^b \sqrt{E(u, v_1)}dt\right|\end{aligned}$$

Entonces, lo que la hipótesis nos dice es que los lados opuestos del cuadrilátero sean iguales, es decir:

$$\int_{v_0}^{v_1} \sqrt{G(u_1, v)}dv = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E(u, v_1)}du$$

. Entonces, procedemos por doble implicación:

- ($\Longrightarrow$) Las curvas coordenadas de una parametrización $\mathbf{x}(u,v)$ de S constituyen una red de Tchebyshev si las longitudes de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por ellas son iguales $\Longrightarrow$

$$\int_{v_0}^{v_1} \sqrt{G(u_1,v)}dv = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E(u,v_1)}du$$

Ambas expresiones son constantes, entonces si las derivamos

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\int_{v_0}^{v_1} \sqrt{G(u_1,v)}dv\right) = 0 \Longrightarrow \int_{v_0}^{v_1} \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{G(u_1,v)}dv = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{G(u_1,v)} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E(u,v_1)}du\right) = 0 \Longrightarrow \int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial}{\partial v}\sqrt{E(u,v_1)}du = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial v}\sqrt{E(u,v_1)} = 0$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

- ($\Longleftarrow$) Ahora, sea

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

Entonces, si integramos ambas expresiones tenemos:

$$E = E(v) \quad \text{y} \quad G = G(u).$$

y el procedimiento es el mismo que en la condición anterior, solo que yendo de regreso.

■

2. *Mostrar que si las curvas coordenadas forman una red de Tchebyshev, entonces es posible reparametrizar la vecindad coordenada de tal forma que $E = 1, F = \cos\theta$ y $G = 1$.*

Demostración. Supongamos que las curvas coordenadas de una parametrización $\mathbf{x}(u,v)$ de una superficie S forman una red de Tchebyshev y considérese lo deducido en el inciso anterior. Entonces, lo que nos están pidiendo son funciones $f(u,v)$ y $g(u,v)$ tales que $\mathbf{x}(u,v) = \mathbf{x}(f(u,v), g(u,v))$, tal que si elegimos f y g adecuadamente, podemos hacer que los coeficientes E, F y G, sean:

$$E = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f} \right\rangle = 1$$
$$F = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial g} \right\rangle = \cos\theta$$
$$G = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial g}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial g} \right\rangle = 1$$

Además, tenemos:

$$\int_{v_0}^{v_1} \sqrt{G(u_1,v)}dv = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E(u,v_1)}du$$

Que implica:

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

De esto, elegimos arbitrariamente que:

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \int_{v_0}^{v_1} \sqrt{G(u_1,v)}dv \\ g(u,v) &= \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E(u,v_1)}du \end{aligned}$$

Entonces, procedemos a encontrar las derivadas de $\mathbf{x}(u,v)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial u} \\ &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f}(0) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial g}\left(\sqrt{E(u,v_1)}\right) \\ &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial g}\sqrt{E(u,v_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial v} \\ &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f}\left(\sqrt{G(u_1,v)}\right) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial g}(0) \\ &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f}\sqrt{G(u_1,v)} \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} E &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f} \right\rangle = \left\langle \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}}{\sqrt{G(u_1,v)}}, \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}}{\sqrt{G(u_1,v)}} \right\rangle = \cos 0 = 1 \\ F &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial f}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial g} \right\rangle = \left\langle \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}}{\sqrt{G(u_1,v)}}, \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}}{\sqrt{E(u_1,v)}} \right\rangle = \cos \theta \\ G &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial g}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial g} \right\rangle = \left\langle \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}}{\sqrt{E(u_1,v)}}, \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}}{\sqrt{E(u_1,v)}} \right\rangle = \cos 0 = 1 \end{aligned}$$

■

Problema 7. *Sea S una superficie de revolución y $C : I \to \mathbb{R}^2$ su curva generatriz (en el plano Oxz). Sea s la longitud de arco de la curva, y denotamos por $\rho = \rho(s)$ la distancia del punto correspondiente $C(s)$ al eje de rotación.*

- *Mostrar el Teorema de Pappus: El área de S está dada por*

  $$A = 2\pi \int_0^L \rho(s) ds$$

  donde L es la longitud de la curva C.

  Demostración. Ya en clase se había deducido la parametrización para una superficie de revolución, Sea

  $$x = f(v), \quad z = g(v), \quad a < v < b, \quad f(v) > 0$$

  la parametrización de C. Entonces la parametrización de S:

  $$\mathbf{x}(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)), \quad u, v \in (0, 2\pi)$$

  Entonces:

  $$\begin{aligned}
  \mathbf{x}_u &= (-f(v)\sin u, f(v)\cos u, 0)\\
  \mathbf{x}_v &= (f'(v)\cos u, f'(v)\sin u, g'(v))
  \end{aligned}$$

  De esto:

  $$\begin{aligned}
  E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = f^2(v)\\
  F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0\\
  G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = f'(v)^2 + g'(v)^2 = 1
  \end{aligned}$$

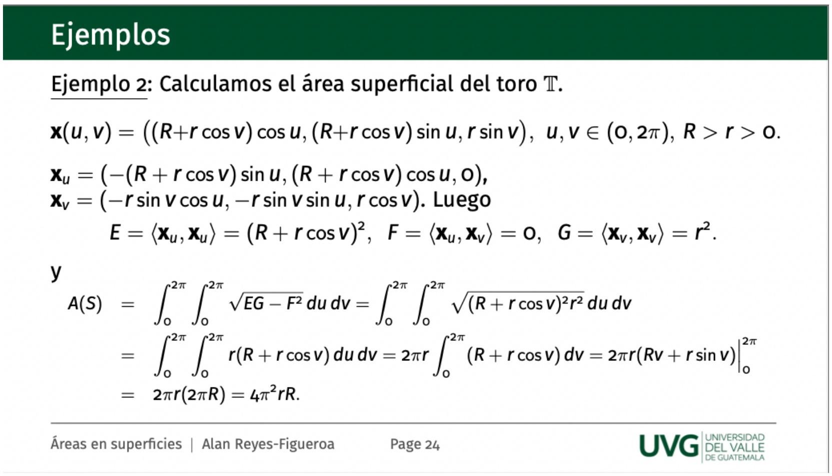
  y

  $$\begin{aligned}
  A(S) &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2} dudv\\
  &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \sqrt{f^2(v)} dudv\\
  &= \int_0^L \int_0^{2\pi} f(v) dudv\\
  &= 2\pi \int_0^L f(v) dv\\
  &= 2\pi \int_0^L \rho(s) ds
  \end{aligned}$$

  ■

- *Aplicar la parte (a) para calcular el área de la superficie de un toro.*

Demostración. Este problema se resolvió en clase, en el ejemplo 2 de la presentación de áreas en superficies:



$\blacksquare$

Problema 8. *El gradiente de una función diferenciable $f : S \to \mathbb{R}$ definida sobre una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es la aplicación diferenciable $\nabla f : S \to \mathbb{R}^3$ que asocia a cada punto $\mathbf{p} \in S$ un vector $\nabla f(\mathbf{p}) \in T_\mathbf{p}S$ tal que*

$$\langle \nabla f(\mathbf{p}), \mathbf{v} \rangle_\mathbf{p} = Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in T_\mathbf{p}S$$

Demuestre que si E, F, G son los coeficientes de la primera forma fundamental en una parametrización $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$, entonces el gradiente $\nabla f(\mathbf{p})$ en $\mathbf{x}(U)$ está dado por

$$\nabla f = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2}\mathbf{x}_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2}\mathbf{x}_v$$

En particular, si $S = \mathbb{R}^2$, con coordenadas x, y, entonces

$$\nabla f = f_x \mathbf{e}_1 + f_y \mathbf{e}_2$$

Demostración. A probar:

$$\nabla f = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2}\mathbf{x}_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2}\mathbf{x}_v.$$

Sea $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización de la superficie S, entonces los coeficientes de la primera forma fundamental son:

$$E = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \right\rangle, F = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\rangle, G = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\rangle.$$

Ahora bien, considérese la función $f : S \to \mathbb{R}$ y su composición con la parametrización $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ definida como $f(\mathbf{x}(u,v))$. Obtenemos sus derivadas parciales:

$$f_u = \frac{\partial}{\partial u} f(\mathbf{x}(u,v)) = Df(\mathbf{x}(u,v)) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$$
$$f_v = \frac{\partial}{\partial v} f(\mathbf{x}(u,v)) = Df(\mathbf{x}(u,v)) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$$

Entonces, tenemos la siguiente definición que nos da el problema:

> El gradiente de una función diferenciable $f : S \to \mathbb{R}$ definida sobre una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es la aplicación diferenciable $\nabla f : S \to \mathbb{R}^3$ que asocia a cada punto $\mathbf{p} \in S$ un vector $\nabla f(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}S$ tal que
>
> $$\langle \nabla f(\mathbf{p}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{p}} = Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$$

Sea $\mathbf{v} = a\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} + b\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \in T_{\mathbf{p}}S$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
Df(\mathbf{x}(u,v)) \cdot \mathbf{v} &= Df(\mathbf{x}(u,v)) \cdot \left(a\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} + b\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) \\
&= aDf(\mathbf{x}(u,v))\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} + bDf(\mathbf{x}(u,v))\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \\
&= af_u + bf_v
\end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos el vector $\nabla f = A\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} + B\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$, tal que:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{p}} &= \left\langle A\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} + B\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, a\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} + b\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\rangle \\
&= Aa\left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \right\rangle + Ab\left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\rangle + Ba\left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \right\rangle + Bb\left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\rangle \\
&= AaE + AbF + BaF + BbG \\
&= a(AE + BF) + b(AF + BG)
\end{aligned}$$

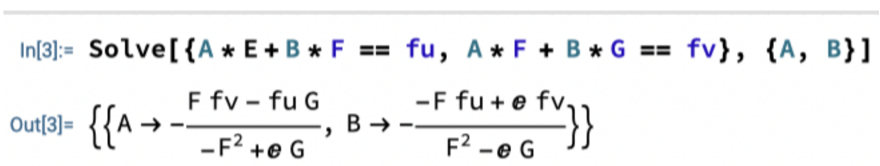
Entonces, igualadas ambas expresiones que obtuvimos anteriormente:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f(\mathbf{p}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{p}} &= Df(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} \\
af_u + bf_v &= a(AE + BF) + b(AF + BG)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
f_u &= AE + BF \\
f_v &= AF + BG
\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones para A y B,



Obtenemos que:

$$A = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} \qquad B = \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2}$$

Por lo tanto, el gradiente ∇f en $\mathbf{x}(U)$ está dado por:

$$\nabla f = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2}\mathbf{x}_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2}\mathbf{x}_v$$

Ahora, para el caso particular, si $S = \mathbb{R}^2$, con coordenadas x, y. A probar:

$$\nabla f = f_x \mathbf{e}_1 + f_y \mathbf{e}_2$$

Entonces, sea

$$\mathbf{x}(x, y) = (x, y, 0)$$

Con sus derivadas:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_x &= (1, 0, 0)\\ \mathbf{x}_y &= (0, 1, 0)\end{aligned}$$

Además:

$$E = \langle \mathbf{x}_x, \mathbf{x}_x \rangle = 1, \quad F = \langle \mathbf{x}_x, \mathbf{x}_y \rangle = 0, G = \langle \mathbf{x}_y, \mathbf{x}_y \rangle = 1$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \frac{f_x G - f_y F}{EG - F^2}\mathbf{x}_x + \frac{f_x E - f_y F}{EG - F^2}\mathbf{x}_y\\ &= \frac{f_x(1) - f_y(0)}{(1)(1) - (0)^2}\mathbf{x}_x + \frac{f_x(1) - f_y(0)}{(1)(1) - (0)^2}\mathbf{x}_y\\ &= f_x \mathbf{x}_x + f_x \mathbf{x}_y\\ &= f_x(1, 0, 0) + f_x(0, 1, 0)\\ &= f_x \mathbf{e}_1 + f_y \mathbf{e}_2\end{aligned}$$

■

Problema 9. *La orientación puede no ser preservada por difeomorfismos. Sea $\varphi : S_1 \to S_2$ un difeomorfismo entre superficies.*

1. *Muestre que S_1 es orientable si y solo si, S_2 es orientable.*

   Demostración. Tenemos una doble implicación. Considérese las siguientes definiciones vistas en clase:

   > Una superficie $S \subseteq \mathbf{R}^3$ es orientable cuando existe al menos un atlas coherente de clase C^k en S.

   > Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regular. Dos parametrizaciones $x_1 : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to V_1 \cap S$ y $x_2 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to V_2 \cap S$ en la superficie S son **coherentes** cuando $W = V_1 \cap V_2 \cap S = \varnothing$, o cuando $W = V_1 \cap V_2 \cap S \neq \varnothing$ y la matriz jacobiana satisface $\det D(x_2^{-1} \circ x_1)(q) > 0, \forall q \in x_1^{-1}(W)$

   Procedemos por doble implicación, la idea de la prueba será demotrar: S es orientable $\iff$ Una superficie $S \subseteq \mathbf{R}^3$ es orientable cuando existe al menos un atlas coherente de clase C^k en $S \iff$ existe un atlas $\mathcal{A}$ para S tal que para cualquier par de cartas $(U, \mathbf{x}), (V, \mathbf{y}) \in \mathcal{A}$ con $U \cap V \neq \emptyset$, la función de transición $\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x} : \mathbf{y}(U \cap V) \to \mathbf{x}(U \cap V)$ tiene jacobiano positivo en todos los puntos de $\mathbf{x}^{-1}(U \cap V)$.

- ($\Longrightarrow$) A probar: S_2 orientable. Sea S_1 orientable $\Longrightarrow$ existe un atlas $\mathcal{A}_1$ para S_1 con la propiedad mencionada anteriormente $\Longrightarrow$ Podemos construir un atlas $\mathcal{A}_2$ para S_2 utilizando el difeomorfismo φ. Para cada carta $(U, \mathbf{x}) \in \mathcal{A}_1$, definimos una carta $(\varphi(U), \mathbf{y})$ en S_2 donde $\mathbf{y} = \varphi \circ \mathbf{x} \Longrightarrow$ Comprobamos que por lo menos dos parametrizaciones son coherentes, consideremos dos cartas $(U, \mathbf{x}), (V, \mathbf{z}) \in \mathcal{A}_1$ con $U \cap V \neq \varnothing$. Las correspondientes cartas en $\mathcal{A}_2$ son $(\varphi(U), \varphi \circ \mathbf{x})$ y $(\varphi(V), \varphi \circ \mathbf{z})$. La composición de estas dos cartas en S_2 es

$$(\varphi \circ \mathbf{z})^{-1} \circ (\varphi \circ \mathbf{x}) = (\mathbf{z}^{-1} \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \mathbf{x}) = \mathbf{z}^{-1} \circ \mathbf{x}$$

  La cual tiene jacobiano positivo en todos los puntos de $\varphi(\mathbf{x}^{-1}(U \cap V))$ ya que tanto φ como las funciones de x y z en S_1 tienen jacobianos positivos. Por lo tanto, S_2 también es orientable.
- ($\Longleftarrow$) A probar: S_1 es orientable. En este caso, usamos el hecho que φ es un difeomorfismo, es decir que el procedimiento es análogo al iniciso anterior, ya que con la inversa aplica lo mismo.

■

2. *Considera la aplicación antípoda $\varphi : S^2 \to S^2$ dada por $\varphi(\mathbf{p}) = -\mathbf{p}$. Utilizar esta aplicación para mostrar que en (a), la orientación inducida por φ puede ser distinta de la original.*

   Solución. Usando lo deducido anteriormente, usando cartas específicas y $S_1 = S^2 = S_2$, debemos mostrar que el determinante del jacobiano de

$$\mathbf{z}^{-1} \circ \mathbf{x}$$

   no es necesariamente positivo. □

Problema 10. *10. Mostrar que la botella de Klein $\mathbb{K}$ no es orientable. Para ello, puede considerar el siguiente modelo de la botella de Klein:*

$$\mathbb{K} = [0,1] \times [0,1]/\sim, \qquad \textit{donde } (u,0) \sim (u,1), \text{y} (0,v) \sim (1, 1-v)$$

u otro modelo similar, como se ilustra en la Figura 1.

Demostración. Sea $\mathbb{K} = [0,1] \times [0,1]/\sim$. Denotemos estas dos cartas por $\mathbf{x}_1 : U_1 \to V_1$ y $\mathbf{x}_2 : U_2 \to V_2$

- $U_1 = [0, 3/4) \times [0,1]$ y $V_1 = \mathbf{x}_1(U_1)$
- $U_2 = (1/4, 1] \times [0,1]$ y $V_2 = \mathbf{x}_2(U_2)$

Las funciones $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ están definidas por

$$\mathbf{x}_1(u,v) = (u,v), \quad \mathbf{x}_2(u,v) = \begin{cases} (u+1/4, v), & \text{si } 1/4 < u \leq 3/4 \\ (u-3/4, 1-v), & \text{si } 3/4 < u \leq 1 \end{cases}$$

La intersección $W = V_1 \cap V_2$ tiene dos componentes conexas: $W_1 = (3/4, 1) \times [0,1]$ y $W_2 = [0, 1/4] \times [0,1]$.

1. En W_1,

$$D(\mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_1)(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\mathbf{x}_2^{-1}\circ\mathbf{x}_1)_1}{\partial u} & \frac{\partial(\mathbf{x}_2^{-1}\circ\mathbf{x}_1)_1}{\partial v} \\ \frac{\partial(\mathbf{x}_2^{-1}\circ\mathbf{x}_1)_2}{\partial u} & \frac{\partial(\mathbf{x}_2^{-1}\circ\mathbf{x}_1)_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. En W_2,

$$D(\mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_1)(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\mathbf{x}_2^{-1}\circ\mathbf{x}_1)_1}{\partial u} & \frac{\partial(\mathbf{x}_2^{-1}\circ\mathbf{x}_1)_1}{\partial v} \\ \frac{\partial(\mathbf{x}_2^{-1}\circ\mathbf{x}_1)_2}{\partial u} & \frac{\partial(\mathbf{x}_2^{-1}\circ\mathbf{x}_1)_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, no es orientable. ■