Teo (Dini) (f_n) continuas sobre un $\boxed{\text{compacto } I \subseteq \mathbb{R}}$

$f_n \longrightarrow f$ (puntualmente), f continua

$\boxed{(f_n) \text{ es monótona}} \to$ creciente

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{unif} f$

Dem: Sea $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

$*\begin{cases} \cdot\ (g_n) \text{ es decreciente.} \\ \cdot\ f_n \longrightarrow f \text{ puntualmente} \Rightarrow g_n \longrightarrow 0 \end{cases}$

A probar: $g_n \xrightarrow{unif} 0 \iff \|g_n(x)\|_\infty \longrightarrow 0$ (indep. de x)

Como (g_n) es decreciente $\Rightarrow$

$\|g_{n+1}\|_\infty = \sup\{g_{n+1}(x) : x \in I\}$

$\le \sup\{g_n(x) : x \in I\} = \|g_n\|_\infty$

$\Rightarrow (\|g_n\|_\infty)$ es decreciente.

Por otro lado, las g_n son continuas $\Rightarrow$ por el Teorema de Weierstrass, $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \ \exists\, x_n \in I \ni$

$g_n(x_n) = \max\{g_n(x) : x \in I\} = \sup\{g_n(x) : x \in I\}$
$= \|g_n\|_\infty$

Además, note que (x_n) está acotada (ya que $x_n \in I$) $\Rightarrow$, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass), que existe una subsucesión (x_{i_n}) que converge a $c \in I$.

i) $g_n \longrightarrow 0$ puntualmente $\exists\, N_1 \in \mathbb{Z}^+ \ni g_{N_1}(c) < \frac{\epsilon}{2}$.

ii) además g_{N_1} es continua en c; i.e. $\exists\, \delta > 0 \ni$ si $x \in I \ni |x - c| < \delta \Rightarrow |g_{N_1}(x) - g_{N_1}(c)| < \frac{\epsilon}{2}$

iii) Como (x_{i_n}) converge a $c \Rightarrow \exists\, N_2 \geq N_1 \ni$ $|x_{i_{N_2}} - c| < \delta$ y entonces:

$$|g_{N_1}(x_{i_{N_2}}) - g_{N_1}(c)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $N_0 = i_{N_2} \geq N_2 \geq N_1 \Rightarrow$ para $n \geq N_0$

$\Rightarrow \|g_n\|_\infty \leq \|g_{N_0}\|_\infty = g_{N_0}(x_{N_0}) = g_{i_{N_2}}(x_{i_{N_2}}) \leq$

$\leq g_{N_1}(x_{i_{N_2}}) \leq |g_{N_1}(x_{i_{N_2}}) - g_{N_1}(c)| + |g_{N_1}(c)|$

$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \Rightarrow \|g_n\| < \epsilon \Rightarrow \|g_n\|_\infty \longrightarrow 0$

$\Rightarrow g_n \xrightarrow{unif} 0$ □

Pregunta: ¿Son las sucesiones buenas detectoras de propiedades analíticas? Sí, en $\mathbb{R} \to$ en esp. métricos

- Si (f_n) continuas y $f_n \xrightarrow{unif} f \Rightarrow f$ es continua

  Si $\boxed{\text{continuidad de } f + \text{otras}} \Rightarrow f_n \xrightarrow{unif} f$

- Funciones integrables
- Funciones diferenciables

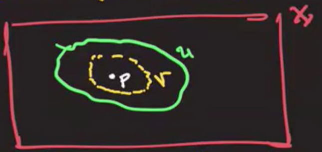
- ¿En qué tipo de conjuntos se puede hablar de convergencia de sucesiones?

- Métricos (agotado)
- Topológicos (X, τ)
  ↑colección de abiertos.

Def: Sea (X, τ) un esp. top. y sea $p \in X$. Una vecindad de p es cualquier conjunto $U \ni$

i) $p \in U$

ii) $\exists\, V \in \tau \ni V \subseteq U$ y $p \in V$



Def: Sea (X, τ) un esp. top. Una sucesión sobre X es cualquier función $f: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow X$.

Def: Se dice que la sucesión (x_n) en el esp. top. (X, τ) converge a $p \in X$, si:

Cada vecindad de x contiene a la cola de la sucesión.

$\forall U$, vecindad de p $\exists\, N \in \mathbb{Z}^+ \ni x_n \in U, \forall n \geq N$.

- las sucesiones no son buenas detectoras de propiedades de las funciones y de los espacios
  - No son buenas detectoras de:
    - funciones continuas
    - puntos de acumulación

    ⋮

$\Rightarrow$ Se "generalizan" las sucesiones

Def: Un conjunto D es <u>Dirigido</u> si existe una relación binaria $\leq$ sobre $D \ni$

i) $m \leq m, \ \forall\, m \in D.$

ii) Si $m \leq n$ y $n \leq r \Rightarrow m \leq r$ $\Big\}$ relación de cuasi orden.

iii) Si $m, n \in D \Rightarrow \exists\, r \in D \ni m \leq r$ y $n \leq r$

Entonces, $(D, \leq)$ es el <u>conjunto dirigido</u> y a $\leq$ se le llama <u>dirección</u>.

Ej.: ① $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ es conjunto Dirigido

② $(\mathbb{R}, \leq)$ es ______ ______.

③ Sea (X, τ) un esp. top y sea $x \in X$

Sea D la colección de todas las vecindades de x en X, y definamos la relación $\leq$ en D así:

$$U \leq V \ \text{ssi} \ V \subseteq U, \quad U, V \in D.$$

Nótese que:

i) $U \subseteq U \Rightarrow U \leq U, \ \forall\, U \in D$

ii) Si $U \leq V$ y $V \leq H$, entonces

$V \subseteq U$ y $H \subseteq V \Rightarrow H \subseteq U \Rightarrow U \leq H$

iii) Si $U, V \in D \Rightarrow U \cap V \subseteq U$, $U \cap V \subseteq V$ y además,

como $x \in U$ y $x \in V \Rightarrow x \in U \cap V \in D$

$\Rightarrow U \leq U \cap V$ y $V \leq U \cap V$

$\Rightarrow (D, \leq)$ es un conjunto dirigido.

Def: Una <u>red</u> en un conjunto X es una función $f: D \to X$, donde D es un conjunto dirigido

Nota: ① Si $D = \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$ La red es una sucesión.

② Notación $(x_m)_{m \in D}$

③ Red es también conocida como sucesión de Moore-Smith.