Sucesiones de Funciones

Def Una sucesión de funciones $f_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge puntualmente a $f(x)$ en $E_0 \subset E$, si $\forall \epsilon > 0$ $\exists N = N(\epsilon, x) \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Ejs: 1) Sea $f_n(x) = x^n$, $\forall x \in [0,1]$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

- La sucesión converge puntualmente.

** • Note que $f_n(x) = x^n$ es continua $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, pero $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ no es continua.

② Considere $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$, la cual:

i) $f_n'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1/n}}$, i.e. f_n es diferenciable, para todo $x \in \mathbb{R}$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \cancel{1/n}^{\,0}} = \sqrt{x^2} = |x|$, la cual no es diferenciable en $x = 0$.

③ Sea $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(n^3 x)}{n}$, la cual:

i) $f_n'(x) = \dfrac{n^3 \cos(n^3 x)}{n} = n^2 \cos(n^3 x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

④ Sea $u_n(x) = nx(1-x^2)^n$, $\forall x \in [0,1]$

0:21:17

i) $u_n(x)$ es continua, $\forall x \in [0,1] \Rightarrow u_n(x) \in \mathcal{R}[0,1]$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} nx(1-x^2)^n = 0$

$$\Rightarrow \int_0^1 u_n(x)\,dx = \int_0^1 nx(1-x^2)^n\,dx = -\frac{n}{2}\int u^n\,du = -\frac{n}{2}\cdot\frac{u^{n+1}}{n+1} = -\frac{n}{2}\,\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{n}{2}\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}$$

$w = 1 - x^2$

$-\frac{1}{2}\,dw = x\,dx$

además, $\int_0^1 \overset{0}{u(x)}\,dx = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^1 u_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} u(x)\,dx = 0.$$

0:28:15

5) Sea $u_n = [\![\cos^2(n!\pi x)]\!]$, $\forall x \in [0,1]$

(u_n es continua, $\forall x \in [0,1]$)

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \underbrace{\begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{si } x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases}}_{\text{función de Dirichlet (discontinua } \forall x)}$$

Def: Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ y sea la sucesión de funciones (f_n), $f_n : E \to \mathbb{R}$. Se dice que (f_n) converge uniformemente a $f(x)$, $\forall x \in E_0 \subset E$, si $\forall \epsilon > 0\ \exists \boxed{N = N(\epsilon)} \ni$ si $n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, $\boxed{\forall x \in E_0}$. **Notación:** $f_n \xrightarrow[\text{unif}]{} f$; $f_n \rightrightarrows f$

Teorema (criterio de Cauchy) Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ y (f_n) una sucesión de funciones sobre E. Entonces, (f_n) converge uniformemente a alguna función $f(x)$ en $E_0 \subset E$, ssi $\forall \epsilon > 0\ \exists\ N = N(\epsilon) \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $m, n \geq N$, entonces $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon,\ \forall x \in E_0$.

Dem: $(\Rightarrow)$ Sabemos $f_n \xrightarrow[\text{unif}]{} f,\ \forall x \in E_0$.

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists\ N = N(\epsilon) \ni \underbrace{|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}}_{\text{si } n \geq N},\ \forall x \in E_0,$

y también, si $m \geq N \Rightarrow |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}\ \forall x \in E_0$

$\Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n(x) - f(x)) + (f(x) - f_m(x))|$

$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$
$\forall x \in E_0.$

$(\Leftarrow)$ $\lim\limits_{n \to \infty} |f_m(x) - f_n(x)|$

$\uparrow$
convergencia puntual

$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$
$\forall x \in E_0.$

$\blacksquare$

Series:

Def: Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ssi la sucesión de sumas parciales $(S_n)^*$ converge; i.e. $\sum a_n$ converge ssi $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = L < \infty$.

$*$: Dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, se tiene:

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$

6 / 9

$\Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_{n-1} + a_n$

(S_n): es la sucesión de sumas parciales

Ej: 1) Encuentre la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}}_{a_n}.$$

$$\Rightarrow \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \frac{C}{n+1} + \frac{D}{(n+1)^2}$$

$\Rightarrow A = C = 0;\ B = 1,\ D = -1$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$= \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2^2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2^2}} - \cancel{\tfrac{1}{3^2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3^2}} - \tfrac{1}{4^2}\right) + \dots + \left(\cancel{\tfrac{1}{n^2}} - \tfrac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \cancelto{0}{\frac{1}{(n+1)^2}}\right]$$

$$= 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$; $\displaystyle a_n = \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}} =$

$$= \frac{n-\sqrt{(n+1)(n-1)}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}} = \frac{n}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}\ \sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$= \left(\cancel{\tfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}} - \cancel{\tfrac{\sqrt{0}}{\sqrt{1}}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} - \cancel{\tfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}}\right) + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} - \cancel{\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \cancel{\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}} = 1$$

Ej (*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}$, $m \in \mathbb{Z}^+$.

Ej: Encuentre la serie y suma, si (S_n) está dada por:

1) $S_n = \dfrac{n+1}{n}$. Nótese que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

Sabemos: $S_n = S_{n-1} + a_n \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} =$

$$= \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n-1} = \frac{(n+1)(n-1) - n^2}{n(n-1)} = \frac{\cancel{n^2} - 1 - \cancel{n^2}}{n(n-1)}$$

$n \geq 2$

$\Rightarrow$ La serie es: $\displaystyle 2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

Además, si $n = 1 \Rightarrow a_1 = S_1 = \frac{1+1}{1} = 2$

2) $S_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n} \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} =$

$$= \frac{2^n - 1}{2^n} - \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} = \frac{(2^n - 1) - 2(2^{n-1} - 1)}{2^n} =$$

$$= \frac{\cancel{2^n} - 1 - \cancel{2^n} + 2}{2^n} = \frac{1}{2^n}, \quad n = 0, 1, 2.$$

$\Rightarrow$ La serie es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - (1/2)} = 2$

• $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \cancelto{0}{\frac{1}{2^n}}\right) = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$
$$= 2 - 1 = 1$$

$\Rightarrow$ La serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Teorema (criterio de divergencia)

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Dem. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente y sea (S_n) la sucesión de sus sumas parciales $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = L < \infty$.

$\Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} [S_n - S_{n-1}] =$

$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = L - L = 0$ $\square$

Nota: La contrapuesta del teorema anterior es: Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Def: Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Teorema: Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente $\Rightarrow$ la serie converge.

Dem: ($\bullet$) Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, considere

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \Rightarrow S_{n+p} - S_n = \sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k =$

$= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$. Entonces, el criterio de Cauchy se escribe: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge ssi $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \epsilon$, $\forall p$, $p = 1, 2, 3 \ldots$

($\bullet$) Considere $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, que es absolutamente convergente i.e. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \epsilon$, $\forall p$, $p = 1, 2 \ldots$

Nótese que $\underbrace{\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right|}_{S_{n+p} - S_n} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \epsilon$, $\forall p$, $p = 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow$ Por el criterio de Cauchy $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. $\square$

Nota: Recuerde el caso de las series en $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow$ Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, los $c_n \in \mathbb{C}$, se considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$, la cual es una serie de números reales.