

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE
GUATEMALA

MM2034 - 1 SEMESTRE - 2021

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA APLICADA

ANÁLISIS DE VARIABLE REAL 2

Catedrático: Dorval Carías

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay

Carné: 19857

Correo: rom19857@uvg.edu.gt

29 de septiembre de 2021

Índice

1 Sesión 1 - 5 de julio de 2021	1
2 Sesión 2	6
3 Sesión 3	9
4 Sesión 4	14
5 Sesión 5	21
6 Sesión 6	27
7 Sesión 7	31
8 Sesión 8	36
8.1 Integrales impropias	36
9 Sesión 9 y Sesión 10	40
9.1 Sucesiones de funciones	40
9.2 Series	40

10 Sesión 11 y Sesión 12	45
11 Sesión 13	50
12 Sesión 14 y 15	53
12.1 Series de funciones	53
12.2 Integral Riemann -Stiljes	54
13 Sesión 16	59
13.1 Norma del supremo	59
13.1.1 Convergencia	60
14 Sesión 17	64
15 Sesión 18	67
16 Sesión 19	70
16.0.1 Diferenciacion en \mathbb{R}^n	70
17 Sesión 20	73
18 Sesión 21	76

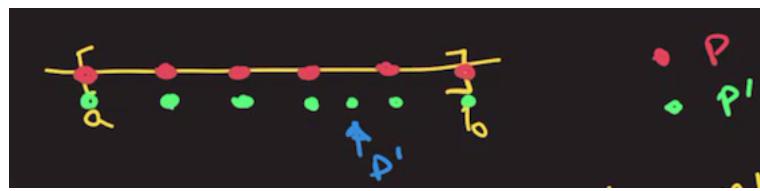
1. Sesión 1 - 5 de julio de 2021

NOTA. La teoría a continuación se refiere a funciones acotadas.

Definición 1. Una **partición** P del intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito: $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ donde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

NOTA. $P[a, b]$ denota el conjunto de todas las particiones de $[a, b]$.

NOTA. 1. Una partición $P' \in P[a, b]$ es un **refinamiento** de $P \in P[a, b]$, si $P \subset P'$



Notación: si $P \subset P' \implies$ Se denota: $P' \preceq P$.

a) $P \preceq P (\iff P \subset P), \forall P \in P[a, b]$.

b) Si $P' \preceq P$ y $P \preceq P' \implies P = P'$.

c) Si $P' \preceq P$ y $P'' \preceq P' \implies P'' \preceq P$.

\implies La relación \preceq es de orden parcial.

2. Para $P \in P[a, b]$, $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$, es la longitud del k -ésimo subintervalo en la partición. Nótese que:

$$\sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a$$

3. La norma o malla de $P \in P[a, b]$ se define: $\|P\| = \max\{\Delta x_k : k = 1, 2, \dots, n\}$. Note que, si $P' \preceq P \implies \|P'\| \leq \|P\|$.

Definición 2. Sea $P \in P[a, b]$ y sean, para $k = 1, \dots, n$,

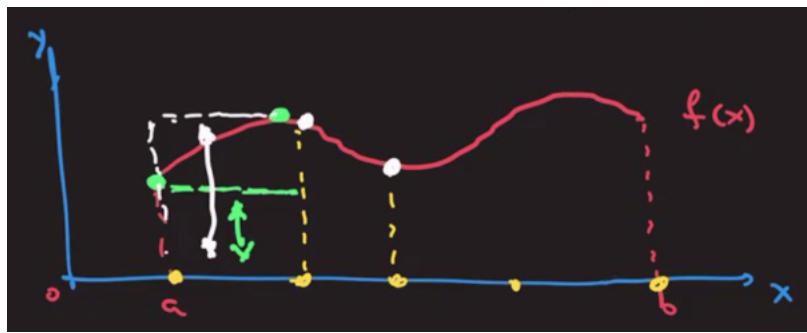
$$M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$m_k(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Entonces, los números:

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta x_k, \quad L(P, f) = \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta x_k$$

se llaman la suma superior e inferior de Darboux de f para partición P .



Proposición 1. Sean $P, P', P_1, P_2 \in P[a, b]$. Entonces,

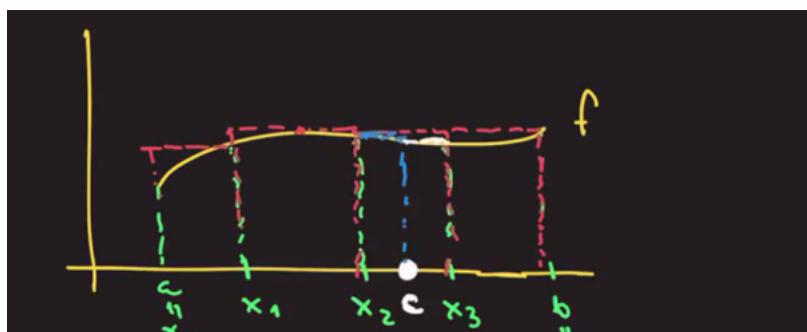
1.

$$P' \preceq P \implies P' \preceq P \implies \begin{cases} U(P', f) \leq U(P, f) \\ L(P', f) \geq L(P, f) \end{cases}$$

2.

$$L(P_1, f) \leq U(P_2, f)$$

Demostración. Tenemos:



1. Sea $P' = P \cup \{c\}$ y suponga que $c \in [x_{i-1}, x_i] \subset P \implies U(P', f) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n M_k(f) \Delta x_k + M'(c - x_{i-1}) + M''(x_i - c)$. Como $M' \leq M_i(f)$ y $M'' \leq M_i(f)$. $\implies U(P', f) \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n M_k(f) \Delta x_k + M_i(f) \underbrace{[(c - x_{i-1}) + (x_i - c)]}_{\Delta x_i} = \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta x_k = U(P, f)$.
2. Como $P_1, P_2 \in P[a, b]$, sea $P = P_1 \cup P_2$. Como $P \preceq P_1$ y $P \preceq P_2$, entonces $L(P_1, f) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq U(P_2, f)$.

■

Definición 3. 1. Se define la integral superior de Riemann de f sobre $[a, b]$.

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P, f) : P \in P[a, b]\}$$

2. Se define la integral interior de Riemann de f sobre $[a, b]$.

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P, f) : P \in P[a, b]\}$$

Ejemplo 1. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \ni f(x) = c$.

1. $U(P, f) = \sum_{k=1}^n c \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n \Delta x_k = c(b - a) \implies \overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P, f) : P \in P[a, b]\} = c(b - a)$.
2. $L(P, f) = \sum_{k=1}^n c \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n \Delta x_k = c(b - a) \implies \underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P, f) : P \in P[a, b]\} = c(b - a)$

Ejemplo 2. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \ni$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{Irr} \end{cases}$$

Sea $P \in P[0, 1]$. Entonces,

1. $U(P, f) = \sum_{k=1}^n 1 \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = 1 - 0 = 1 \implies \overline{\int_0^1} f = \inf\{\underbrace{U(P, f)}_1 : P \in P[0, 1]\} = 1$.
2. $L(P, f) = \sum_{k=1}^n 0 \Delta x_k = 0 \implies \underline{\int_0^1} f = \sup\{\underbrace{L(P, f)}_0 : P \in P[0, 1]\} = 0$.

Integral de Riemann



Nota: La teoría a continuación se refiere a funciones acotadas.

Def: Una partición P del intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito: $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ donde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Notación: $P[a, b]$ denota al conjunto de todas las particiones de $[a, b]$.

Notas:

- Una partición $P' \in P[a, b]$ es un refinamiento de $P \in P[a, b]$, si $P \subset P'$



Notación: Si $P \subset P' \Rightarrow$ se denota: $P' \leq P$

i) $P \leq P \quad (\Leftrightarrow P \subset P)$, $\forall P \in P[a, b]$.

ii) Si $P' \leq P$ y $P \leq P' \Rightarrow P = P'$

iii) Si $P' \leq P$ y $P'' \leq P' \Rightarrow P'' \leq P$

⇒ La relación \leq es de orden parcial.

2) Para $P \in P[a, b]$, $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$, es la longitud del k -ésimo subintervalo en la partición. Nótese que:

•) $\sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a$

3) La norma o malla de $P \in P[a, b]$

se define: $\|P\| = \max \{\Delta x_k : k=1, 2, \dots, n\}$

Note que, si $P' \leq P \Rightarrow \|P'\| \leq \|P\|$

Def: Sea $P \in P[a, b]$ y sea, para $k=1, \dots, n$,

$$M_k(f) = \sup \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Press ESC or double-click to exit full screen mode

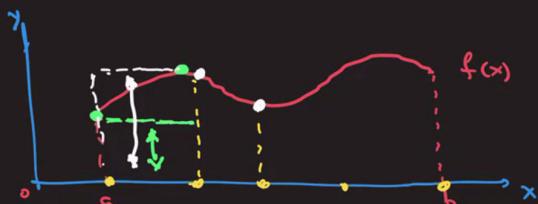
$$m_k(f) = \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Entonces, los números:

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta x_k, \quad L(P, f) = \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta x_k$$

se llaman la suma superior e inferior

de Darboux de f para la partición P .



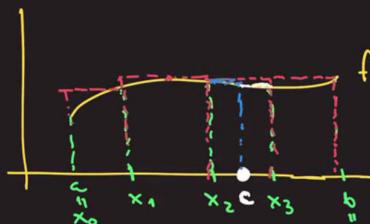
Prop: Sean $P, P', P_1, P_2 \in P[a, b]$. Entonces,

1) $P' \leq P \Rightarrow \begin{cases} U(P', f) \leq U(P, f) \\ L(P', f) \geq L(P, f) \end{cases}$

2) $L(P_1, f) \leq U(P_2, f)$

Dem:

(1)



Sea $P' = P \cup \{c\}$ y supóngase que $c \in [x_{i-1}, x_i] \subset P$

$$\Rightarrow U(P', f) = \sum_{k=1}^{i-1} M_k(f) \Delta x_k + M'(c-x_{i-1}) + M''(x_i - c).$$

Como $M' \leq M_i(f)$ y $M'' \leq M_i(f)$, entonces

$$\Rightarrow U(P, f) \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n M_k(f) \Delta x_k + m_i(f) \left[\underbrace{(x - x_{i-1})}_{\Delta x_i} + (x_i - x) \right] \\ = \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta x_k = U(P, f).$$

2) Como $P, P_2 \in P[a, b]$, sea $P = P_1 \cup P_2$.

Como $P \leq P_1$ y $P \leq P_2$, entonces.

$$L(P_1, f) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq U(P_2, f)$$

□

$\int_a^b f = \inf \{ U(P, f) : P \in P[a, b] \}$

2) La integral inferior de Riemann de f sobre $[a, b]$ se define

$$\int_a^b f = \sup_{\substack{\rightarrow \\ P}} \{ L(P, f) : P \in P[a, b] \}$$

Ej: 1) Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \ni f(x) = c$

$$\Rightarrow U(P, f) = \sum_{k=1}^n c \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n \Delta x_k = c(b-a)$$

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^n c \Delta x_k = c(b-a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f = \inf \{ U(P, f) : P \in P[a, b] \} = c(b-a)$$

$$\int_a^b f = \sup \{ L(P, f) : P \in P[a, b] \} = c(b-a)$$

Ej 2) Sea $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \ni f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Sea $P \in P[0, 1]$. Entonces.

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^n 1 \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = 1 - 0 = 1$$

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^n 0 \Delta x_k = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f = \inf \{ U(P, f) : P \in P[0, 1] \} = 1$$

$$\int_0^1 f = \sup \{ L(P, f) : P \in P[0, 1] \} = 0$$

2. Sesión 2

Proposición 2. $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Definición 4. Se dice que una función acotada f es Riemann integrable sobre $[a, b]$, si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En este caso:

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Definición 5. El conjunto de funciones Riemann integrables sobre $[a, b]$ se denota $R[a, b]$.

Teorema 1. (Criterio de Cauchy-Riemann para integrabilidad) Una función acotada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable sobre $[a, b]$ ssi $\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon \in P[a, b] \ni \forall P \leqslant P_\varepsilon$, se tiene que

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon.$$

Teorema 2. Sea $f \in R[a, b]$. Entonces, $f \in R[c, d]$, para cualquier $[c, d] \subset [a, b]$.

Definición 6. Sea $P \in P[a, b]$ y sea $t_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset P$, $k = 1, \dots, n$. Una suma del tipo:

$$S(P, f, \{t_k\}) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$$

se llama suma de Riemann de f para la partición P y con la muestra t_1, \dots, t_n .

Teorema 3. Los enunciados siguientes son equivalentes:

1. $f \in R[a, b]$.
2. Existe un número A con la siguiente propiedad: $\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon \in P[a, b] \ni P \leqslant P_\varepsilon$.

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b f} = \inf \{ U(P, f) : P \in \mathcal{P}[a, b] \} = 1$$

$$\underline{\int_a^b f} = \sup \{ L(P, f) : P \in \mathcal{P}[a, b] \} = 0$$

Prop: $\underline{\int_a^b f} \leq \overline{\int_a^b f}$

You are muted now. Press Shift+Command+A to unmute your microphone, or press and hold the SPACE key to temporarily unmute.

Dem: Sea $\epsilon > 0$. Como $\overline{\int_a^b f} = \inf \{ U(P, f) : P \in \mathcal{P}[a, b] \}$
 $\Rightarrow \exists P_\epsilon \in \mathcal{P}[a, b] \ni U(P_\epsilon, f) < \overline{\int_a^b f} + \epsilon$
 $\Rightarrow \overline{\int_a^b f} + \epsilon$ es cota superior de

$$\{ L(P, f) : P \in \mathcal{P}[a, b] \} \Rightarrow \sup \{ L(P, f) : P \in \mathcal{P}[a, b] \} < \overline{\int_a^b f} + \epsilon. \text{ Dada la arbitrariedad de } \epsilon, \text{ se tiene:}$$

$$\underline{\int_a^b f} \leq \overline{\int_a^b f} \quad \square$$

El conjunto de funciones Riemann integrables sobre $[a, b]$ se denota $R[a, b]$.

Teorema (Criterio de Cauchy-Riemann para integrabilidad)

Una función acotada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable sobre $[a, b]$ si y sólo si $\forall \epsilon > 0 \exists P_\epsilon \in \mathcal{P}[a, b] \ni \forall P \leq P_\epsilon$, se tiene que

$$0 < U(P, f) - L(P, f) < \epsilon.$$

Dem:

(\Rightarrow) Sea $f \in R[a, b]$. Sea $\epsilon > 0$ y sea

$$A = \underline{\int_a^b f} = \overline{\int_a^b f} = \overline{\int_a^b f}$$

$$\Rightarrow \text{Existen particiones } P' \cup P'' \in \mathcal{P}[a, b] \ni$$

$$U(P', f) < \overline{\int_a^b f} + \frac{\epsilon}{2}$$

$$L(P'', f) > \underline{\int_a^b f} - \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{Sea } P_\epsilon = P' \cup P'' \text{ y considere } P \leq P_\epsilon. \text{ Entonces,}$$

$$A - \frac{\epsilon}{2} < L(P'', f) \leq L(P_\epsilon, f) \leq \underline{\int_a^b f} \leq$$

$$\leq U(P_\epsilon, f) \leq U(P', f) < A + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{Entonces: } A - \frac{\epsilon}{2} < L(P, f), \text{ y}$$

$$U(P, f) < A + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow -A + \frac{\epsilon}{2} > -L(P, f)$$

$$\cancel{f} + \frac{\epsilon}{2} > U(P, f) \quad |+$$

$$\epsilon > U(P, f) - L(P, f).$$

(\Leftarrow) Sea $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists P_\epsilon \in \mathcal{P}[a, b] \ni P \leq P_\epsilon$, se tiene que $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon \Leftrightarrow U(P, f) \leq L(P, f) + \epsilon$. Para esta partición se tiene que:

$$\overline{\int_a^b f} \leq U(P, f) \leq L(P, f) + \epsilon \leq \underline{\int_a^b f} + \epsilon$$

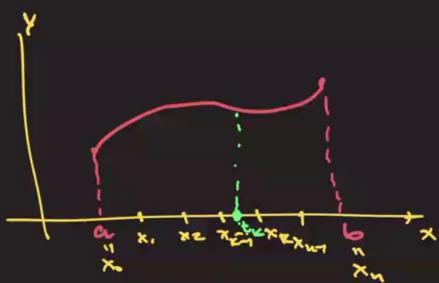
$$\Rightarrow \underline{\int_a^b f} < \overline{\int_a^b f} + \epsilon. \text{ Por la arbitrariedad}$$

de ϵ , se tiene que: $\underline{\int_a^b f} \leq \overline{\int_a^b f}$. Por teorema anterior, sabemos que:

$$\underline{\int_a^b f} \leq \overline{\int_a^b f}$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b f} = \overline{\int_a^b f} \Rightarrow f \in R[a, b]. \quad \square$$

Teorema: Sea $f \in R[a, b]$. Entonces, $f \in R[c, d]$, para cualquier $[c, d] \subset [a, b]$. \square



$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \vdots$
 $\{t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k\}$
 $m_k(f) \leq f(t_k) \leq M_k(f)$

de ϵ , se tiene que: $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$. Por teorema anterior, sabemos que:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \Rightarrow f \in R[a,b]. \quad \square$$

Teorema: Sea $f \in R[a,b]$. Entonces, $f \in L[c,d]$, para cualquier $[c,d] \subset [a,b]$. \square

Def: Sea $P \in P[a,b]$ y sea $t_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset P$, $k=1, \dots, n$. Una suma del tipo:

$$S(P, f, \{t_k\}) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$$

se llama suma de Riemann de f para la partición P y con la muestra t_1, \dots, t_n .

Teorema: Los enunciados siguientes son equivalentes:

a) $f \in R[a,b]$

b) Existe un número A con la siguiente propiedad:
 $\forall \epsilon > 0 \exists P \in P[a,b] \ni P \leq P_\epsilon$

$t_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset [a,b]$, $k=1, \dots, n$, se cumple: $|S(P, f, \{t_k\}) - A| < \epsilon$.

$$A = \lim_{\substack{\text{if } P \rightarrow D \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$$

Dem.: Sabemos que $f \in R[a,b]$ y supongamos que $a \Rightarrow b$:
 $A = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$. Sea $\epsilon > 0$ y considere particiones P' , $P'' \in P[a,b]$, tales que

$$U(P, f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon, \quad P \leq P'$$

$$L(P, f) > \underline{\int_a^b} f - \epsilon, \quad P \leq P''$$

Sea $P_\epsilon = P' \cup P''$ y sea $P \leq P_\epsilon$. Entonces,

$$\underline{\int_a^b} f - \epsilon < L(P, f) \leq S(P, f, \{t_k\}) \leq U(P, f)$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f - \epsilon < S(P, f, \{t_k\}) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon$$

$$\Rightarrow -\epsilon < S(P, f, \{t_k\}) - A < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |S(P, f, \{t_k\}) - A| < \epsilon.$$

3. Sesión 3

Definición 7. La *oscilación* de una función acotada f sobre un conjunto A es $\text{osc}_A(f) := \sup_A(f) - \inf_A(f)$.

NOTA. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada, y si $P \in P[a, b]$, entonces:

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)]\Delta x_k = \sum_{k=1}^n \text{osc}_{I_k}(f)\Delta x_k$$

Proposición 3. Suponga que $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son acotadas y suponga que $g \in R[a, b]$. Si $\exists c > 0 \ni \text{osc}_I(f) \leq c \text{osc}_I(g)$, sobre cada subintervalo $I \subseteq [a, b]$, entonces $f \in R[a, b]$.

Teorema 4. $f \in R[a, b]$ ssi existe una sucesión de particiones (P_n) , $P_n \in P[a, b]$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \ni \lim_{n \rightarrow \infty} [U(f, P_n) - L(f, P_n)] = 0$. En este caso,

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n).$$

Teorema 5. Una función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable.

Teorema 6. Una función monótona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable.

(b) \Rightarrow (a): Sea $\epsilon > 0$ y sea $P_\epsilon \in P[a, b]$ s.t. $P \leq P_\epsilon$,
 y consideremos $t_k, t'_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset P$, se cumple:

$$\left| \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k - A \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

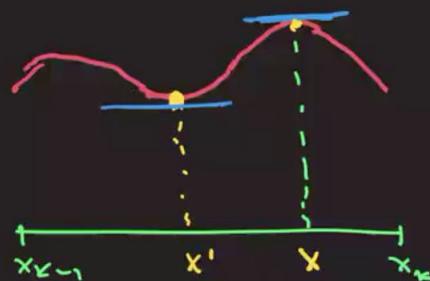
$$\left| \sum_{k=1}^n f(t'_k) \Delta x_k - A \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left| \sum_{k=1}^n [f(t_k) - f(t'_k)] \Delta x_k \right| = \\ & = \left| \left(\sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k - A \right) + \left(A - \sum_{k=1}^n f(t'_k) \Delta x_k \right) \right| \end{aligned} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \leq & \left| \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k - A \right| + \left| \sum_{k=1}^n f(t'_k) \Delta x_k - A \right| \\ & < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$M_K(f) - m_K(f) = \inf \left\{ f(x) - f(x') : x, x' \in [x_{k-1}, x_k] \right\}$$



$$\begin{aligned} \leq & \left| \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k - A \right| + \left| \sum_{k=1}^n f(t'_k) \Delta x_k - A \right| \\ & < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$M_K(f) - m_K(f) = \inf \left\{ f(x) - f(x') : x, x' \in [x_{k-1}, x_k] \right\}$$

Entonces, para $h > 0$ podemos encontrar t_k, t'_k
 en $[x_{k-1}, x_k] \ni$

$$f(t_k) - f(t'_k) > M_K(f) - m_K(f) - h$$

$$\text{Sea } h = \frac{\epsilon}{3(b-a)}$$

$$\begin{aligned}
 U(P, f) - L(P, f) &= \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k \\
 &\leq \sum_{k=1}^n [f(t_k) - f(t_k') + h] \Delta x_k \\
 &\leq \sum_{k=1}^n [f(t_k) - f(t_k')] \Delta x_k + \sum_{k=1}^n h \Delta x_k \\
 &\leq \left| \sum_{k=1}^n [f(t_k) - f(t_k')] \Delta x_k \right| + h \sum_{k=1}^n \Delta x_k \\
 &\leq \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3(b-a)} (b-a) = \epsilon.
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Por el criterio de Cauchy, se tiene

$$f \in R[a, b] \quad \square$$

Def. La oscilación de una función acotada f sobre un conjunto A es $\text{osc}_A(f) := \sup_A(f) - \inf_A(f)$

Nota: si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada, y si

$P \in P[a, b]$, entonces:

$$\begin{aligned}
 U(P, f) - L(P, f) &= \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \text{osc}_{I_k}(f) \Delta x_k
 \end{aligned}$$

Prop. Suponga que $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son acotadas y suponga que $g \in R[a, b]$. Si $\exists c > 0$ tal que

$\text{osc}_I(f) \leq c \text{osc}_I(g)$, sobre cada subintervalo

$I \subseteq [a, b]$, entonces $f \in R[a, b]$.

Dem. Sea $\epsilon > 0$ y $P_\epsilon \in P[a, b]$ tal que $P \leq P_\epsilon$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 U(P, f) - L(P, f) &= \sum_{k=1}^n \text{osc}_{I_k}(f) \Delta x_k \cdot |I_k| \leq \\
 &\xrightarrow[I_k \subset P]{} c \text{osc}_{I_k}(g) \cdot |I_k| = c [U(P, g) - L(P, g)] < \epsilon
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f \in R[a, b]$.

Teorema (***): $f \in R[a, b]$ ssi existe una sucesión de particiones (P_n) , $P_n \in P[a, b]$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [U(f, P_n) - L(f, P_n)] = 0.$$

En este caso, $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n).$

Dem:

(\Leftarrow) Dado $\epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{Z}^+$ para $P_n \in P[a, b]$, se cumple $U(f, P_n) - L(f, P_n) < \epsilon$. Entonces, por el criterio de integrabilidad de Cauchy, se cumple: $f \in R[a, b]$.

(\Rightarrow) Sea $f \in R[a, b] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ \exists P_n \in P[a, b]$, $U(f, P_n) - L(f, P_n) < \frac{1}{n} \Rightarrow U(f, P_n) - L(f, P_n) \rightarrow 0$

*: Ejercicio.

Ej: Considere $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ s.t. $f(x) = x^2$.

Sea P_n la partición de $[0, 1]$ en n subintervalos de tamaño $1/n$, y con puntos $x_k = \frac{k}{n}$, $k=0, \dots, n$. Si $I_k = [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, entonces.

$$\sup_{I_k} (f) = x_k^2, \inf_{I_k} (f) = x_{k-1}^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U(f, P_n) &= \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot \frac{1}{n} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{n}{n}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{2n+1}{n}\right) = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

sobre un compacto $[a, b]$

Teorema (***): Una función continua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann-integrable

Dem: Sea $\epsilon > 0$. Sabemos que f es uniformemente continua sobre $[a, b] \Rightarrow \exists \delta > 0 \exists$

$$\text{si } |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}, \forall x, y \in [a, b]$$

Considera una partición $P = \{I_1, I_2, \dots, I_n\} \in P[a, b]$,
tal que $\boxed{|I_k| < \delta}$ $k = 1, \dots, n$. Weierstrass
Como f es continua sobre $[a, b] \Rightarrow \exists x_k, y_k \in I_k$
t.g. $M_k(f) - m_k(f) = f(x_k) - f(y_k) < \frac{\epsilon}{b-a}$.

$$\begin{aligned} \text{Entonces, } U(P, f) - L(P, f) &= \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{\epsilon}{b-a} \Delta x_k = \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) = \epsilon. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f \in R[a, b]$$

□

• Teorema: Una función monótona $\overbrace{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}}$
sobre un compacto
es Riemann-integrable.

4. Sesión 4

Teorema 7. Una función monótona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann-integrable.

NOTA. Una función monótona no es necesariamente continua [*¿Qué sucede si f tiene un conjunto no contable de discontinuidades de salto en $[a, b]$?*]

Proposición 4. Sea

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f \quad (f \in R[a, b]).$$

NOTA. Sean f y g funciones acotadas sobre el intervalo $I \implies f + g$ es acotada.

Proposición 5. (*Supremos e ínfimos*)

$$\sup_I(f + g) \leq \sup_I(f) + \sup_I(g)$$

$$\inf_I(f + g) \geq \inf_I(f) + \inf_I(g)$$

Proposición 6. Sea

$$\text{osc}_I(f + g) = \text{osc}_I(f) + \text{osc}_I(g)$$

Proposición 7. $f, g \in R(I) \implies f + g \in R(I)$.

NOTA. Las integrales superior e inferior de funciones no integrables no son, en general, lineales.

Definición 8. Sea $a < b$.

1. $\overline{\int_a^b} f := -\underline{\int_a^b} f$ y $\underline{\int_a^b} f := -\overline{\int_b^a} f$. Si las integrales coinciden, entonces:

$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

2. $\forall c \in [a, b]$, se define: $\overline{\int_c^c} f = \underline{\int_a^c} f = 0$.

Proposición 8. (*Varios*)

$$1. \overline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b}f + \overline{\int_a^b}g.$$

$$2. \underline{\int_a^b}(f+g) \leq \underline{\int_a^b}f + \underline{\int_a^b}g.$$

Teorema 8. Si $f, g \in R \implies \int_a^b(f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$

Proposición 9. (Monotonidad) Sean $f, g \in R[a, b]$ y suponga que $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$. Entonces:

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Teorema 9. Suponga que $f \in R[a, b]$ y sea $M = \sup_{[a, b]}(f)$ y $m = \inf_{[a, b]}(f)$.

Entonces,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Teorema 10. (Valor medio para integrales) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces $\exists c \in [a, b] \ni$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

• Teorema: Una función monótona $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$
sobre un compacto es Riemann-integrable.

Dem.: Supongamos que f es monótona creciente en $[a,b]$, sea $P_n = \{I_1, I_2, \dots, I_m\}$ una partición de $[a,b]$ s.t. $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $|I_k| = \frac{b-a}{n}$, y $x_k = a + \frac{(b-a)}{n}k$, $k=0,1,\dots,n$.

$$\Rightarrow M_k(f) = \sup_{I_k}(f) = f(x_k), \quad m_k(f) = f(x_{k-1})$$

$$\Rightarrow U(f, P_n) - L(f, P_n) = \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})]$$

$$= \left(\frac{b-a}{n}\right) [f(b) - f(a)]. \quad \text{Si } n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow U(f, P_n) - L(f, P_n) \rightarrow 0 \Rightarrow f \in R[a,b].$$

Nota: Una función monótona no es necesariamente continua [¿Qué puede ocurrir si f tiene un conjunto no contable de discontinuidades de salto en $[a,b]$?]

Prop $\int_a^b cf = c \int_a^b f \quad (f \in R[a,b])$

Dem. $\int_a^b cf = \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} U(cf, P) = \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \sum_{k=1}^n \sup_{I_k}(cf) \cdot |I_k|$

$$= \inf_P c \sum_{k=1}^n \sup_I(f) \cdot |I_k| = c \inf_P U(f, P)$$

$$= c \int_a^b f$$

Por otra parte: $\int_a^b cf = \sup_P L(cf, P) =$

$$= \sup_P c L(f, P) = c \sup_P L(f, P) = c \int_a^b f$$

$$\text{Si } f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow \int_a^b cf = c \int_a^b f.$$

$c < 0$ Considera $-f \Rightarrow \sup_I (-f) = -\inf_I (f)$
 $\inf_I (-f) = -\sup_I (f)$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_a^b (-f) &= \inf_P U(-f, P) = \inf_P \sum_{k=1}^n \sup_{I_k} (-f) \cdot |I_k| \\ &= \inf_P (-1) \cdot \sum_{k=1}^n \inf(I_k) \cdot |I_k| = \\ &= (-1) \sup_P L(f, P) = - \int_a^b f \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^b (-f) = \sup_P L(-f, P) = \sup_P (-1) U(f, P) = \\ = (-1) \inf U(f, P) = - \int_a^b f$$

$$\text{Como } f \in \mathcal{L}[a, b] \Rightarrow \int_a^b (-f) = - \int_a^b f.$$

Por ultimo, $-c = -|c|$

$$\Rightarrow \int_a^b (-|c|) f = - \int_a^b |c| f = -|c| \int_a^b f \quad \square$$

Nota: Sean f y g funciones acotadas sobre el intervalo $I \Rightarrow f+g$ es acotada.

Por otra parte se tiene, por las propiedades de infino y supremo, que:

$$\sup_I (f+g) \leq \sup_I f + \sup_I g$$

$$\inf_I (f+g) \geq \inf_I f + \inf_I g$$

Supongamos que $f, g \in \mathcal{R}(I)$

$$\Rightarrow \text{osc}_I (f+g) = \sup_I (f+g) - \inf_I (f+g) \leq$$

$$\leq [\sup_I f + \sup_I g] - \inf_I (f+g)$$

$$\leq [\sup_I f + \sup_I g] - [\inf_I f + \inf_I g]$$

$$= \left[\sup_I f - \inf_I f \right] + \left[\sup_I g - \inf_I g \right]$$

$$= OSC_I(f) + OSC_I(g).$$

Como $f, g \in R(I)$ $\Rightarrow f+g \in R(I)$.

Ej. Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ \exists

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & x \in [0, 1] - \mathbb{Q} \end{cases} \quad \leftarrow \text{Dirichlet}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1, & x \in [0, 1] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

No tiene que $g = 1 - f$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1 f} = 1 = \overline{\int_0^1 g} \quad ; \quad \underline{\int_0^1 f} = 0 = \underline{\int_0^1 g}$$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1 (f+g)} = 1 = \underline{\int_0^1 (f+g)}$$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1 (f+g)} < \overline{\int_0^1 f} + \overline{\int_0^1 g}$$

$$\underline{\int_0^1 f+g} > \underline{\int_0^1 f} + \underline{\int_0^1 g}$$

0:50:00

Entonces: Las integrales superior e inferior de funciones no integrables no son, en general, lineales.

Def. Sea $a < b$.

$$a) \quad \overline{\int_a^b f} := - \overline{\int_b^a f} \quad ; \quad \underline{\int_a^b f} := - \underline{\int_b^a f} .$$

Si las integrales coinciden, entonces:

$$\int_a^b f = - \int_b^a f .$$

$$b) \quad \forall c \in [a, b], \text{ se define } \int_c^c f = \int_a^a f = 0$$

$$\underline{\text{Prop:}} \quad (\text{a}) \quad \int_a^b (f+g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$(\text{b}) \quad \int_a^b (f+g) \geq \int_a^b f + \int_a^b g$$

□

$$\underline{\text{Teorema:}} \quad \text{Si } f, g \in R \Rightarrow \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Dem:}} \quad \int_a^b (f+g) &\leq \int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b f + \int_a^b g \\ &\leq \int_a^b (f+g) \end{aligned}$$

Además, sabemos:

$$\int_a^b (f+g) \leq \int_a^b (f+g)$$

$$\Rightarrow \int_a^b (f+g) = \int_a^b (f+g) \Rightarrow f+g \in R[a,b]$$

$$\Rightarrow \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

□

Prop: Sean $f, g \in R[a,b]$ y supóngase que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Entonces:

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g \quad \boxed{\text{monotonidad}}$$

Dem: Sea f integrable y supóngase que $f \geq 0$.

$$\text{Sea } P \in P[a,b] \ni P = [a,b]$$

$$\Rightarrow L(f,P) = \inf_P (f) \cdot (b-a) \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b f \geq L(P,f) \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{Si } f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0.$$

Si se tiene que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$,

hagamos $h(x) = g(x) - f(x)$, $\forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow h(x) \geq 0, \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b h(x) dx \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

□

Teorema: Supongamos que $f \in R[a,b]$ y sean

$$M = \sup_{[a,b]} f \quad \text{y} \quad m = \inf_{[a,b]} f.$$

$$\text{Entonces, } m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Dem.: Sabemos que $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M$

$$\Rightarrow \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

□

Teorema (Valor medio para integrales)

Si $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\exists c \in [a,b] \text{ s.t.}$$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Dem.: Como f es continua sobre el compacto

$[a,b]$, entonces f alcanza su máximo,

sus mínimos m , en $[a,b]$. Entonces,

$$m \leq f \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M$$

Como f es continua en $[a,b]$, por el

Teorema del valor medio, existe $c \in [a,b]$ s.t.

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

Lunes: . Teoremas fundamentales del

cálculo.

□

5. Sesión 5

Proposición 10. Sea $f \in R[a, b]$. Entonces, $|f| \in R[a, b]$. Además, se tiene:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

NOTA. 1. Si $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$, se tiene que:

$$\overline{\int_a^b f} \leq \overline{\int_a^b g}; \underline{\int_a^b f} \leq \underline{\int_a^b g}.$$

2.

$$\left| \overline{\int_a^b f} \right| \leq \overline{\int_a^b |f|}; \left| \underline{\int_a^b f} \right| \leq \underline{\int_a^b |f|}$$

Proposición 11. Sea $f \in R[a, b] \implies f^2 \in R[a, b]$.

Teorema 11. Si $f, g \in R[a, b] \implies f \cdot g \in R[a, b]$.

Proposición 12. Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y $m, M \in R \ni m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$. Entonces:

$$1. m(b-a) \leq \underline{\int_a^b f}.$$

$$2. \overline{\int_a^b f} \leq M(b-a).$$

Teorema 12. (***) Sea I un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en I . Sea $a \in I$ y considere las funciones:

$$\overline{F(x)} = \overline{\int_a^x f} \quad y \quad \underline{F(x)} = \underline{\int_a^x f}, \forall x \in I.$$

Entonces:

1. \overline{F} y \underline{F} son continuas en I .

2. Si f es continua en $c \in I \implies \overline{F}$ y \underline{F} son derivables en c y además:

$$\overline{F}'(c) = \underline{F}'(c) = f(c).$$

Teorema 13. (*Primer teorema fundamental del cálculo*) Sea $f \in R[a, b]$. Sea

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \ni$$

$$F(x) := \int_a^x f, \quad x \in [a, b]$$

Si f es continua en $c \in [a, b] \implies F$ es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

Teorema 14. (*Segundo teorema fundamental del cálculo- Fórmula Newton-Leibniz*) Sea $f \in R[a, b]$ y sea G una función derivable en $(a, b) \ni G' = f$. Entonces,

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

Prop.: Sea $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Entonces, $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$.
Además, se tiene:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Dem.: Sea $P \in \mathcal{P}[a, b]$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} M_k(|f|) - m_k(|f|) &= \sup_{\{x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}} \underbrace{|f(x)| - |f(y)|}_{\leq |f(x) - f(y)|} \\ &\leq \sup_{\{x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}} |f(x) - f(y)| \\ &= M_k(f) - m_k(f) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n [M_k(|f|) - m_k(|f|)] \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k$$

Dorval Jr

$$\Rightarrow U(P, |f|) - L(P, |f|) \leq U(P, f) - L(P, f),$$

$\forall P \in \mathcal{P}[a, b]$.

Sea $\epsilon > 0$. Como f satisface el criterio de Cauchy en $[a, b] \Rightarrow \exists [P_\epsilon] \in \mathcal{P}[a, b] \ni$ para $P \leq P_\epsilon$, se tiene que $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon \Rightarrow |f|$ también cumple el criterio de Cauchy, y entonces $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$.

A probar: $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

$$\Leftrightarrow - \int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

Entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned} &\left| f(x) \right| \leq |f(x)| \\ \Rightarrow - |f(x)| &\leq f(x) \leq |f(x)|, \forall x \in [a, b] \\ \Rightarrow - \int_a^b |f| &\leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \end{aligned}$$

□

Nota: (1) Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, se tiene



que: $\int_a^b f \leq \int_a^b g$; $\int_a^b f \geq \int_a^b g$

$$(2) \quad \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|; \quad \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Prop: Sea $f \in R[a, b] \Rightarrow f^2 \in R[a, b]$. \square

Teorema: Si $f, g \in R[a, b] \Rightarrow f \cdot g \in R[a, b]$

Dem: Como $f, g \in R[a, b] \Rightarrow$

$$f \cdot g = \frac{1}{4} [(f+g)^2 - (f-g)^2] \in R[a, b]. \quad \square$$

Prop: Sean $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y $m, M \in \mathbb{R} \exists$
 $\boxed{m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]}$. Entonces

$$a) m(b-a) \leq \int_a^b f$$

$$b) \int_a^b f \leq M(b-a)$$

Dem. Sea $P \in P[a, b]$. Entonces,

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta x_k \geq m \sum_{k=1}^n \Delta x_k = m(b-a)$$

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta x_k \leq M \sum_{k=1}^n \Delta x_k = M(b-a)$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \inf \{ L(P, f) : P \in P[a, b] \} = \int_a^b f$$

$$\Rightarrow M(b-a) \geq \inf \{ U(P, f) : P \in P[a, b] \} = \int_a^b f \quad \square$$

Teorema (***) Sea I un intervalo y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en I . Sea $a \in I$ y considere las funciones:

$$\bar{F}(x) = \int_a^x f \quad y \quad F(x) = \int_a^x f, \quad \forall x \in I.$$



Entonces:

a) \bar{F} y \underline{F} son continuas en I .

b) Si f es continua en $c \in I \Rightarrow \bar{F}$ y \underline{F} son derivables en c y ademáis:

$$\bar{F}'(c) = \underline{F}'(c) = f(c)$$

Dem. Sea $M = \sup \{ |f(x)| : x \in I \}$. Sea $c \in I$.

A probar: \bar{F} es continua en c .

Sea $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta = \boxed{\square} > 0$ s.t. $x \in I \cap (c, c+\delta)$,

$$|\bar{F}(x) - \bar{F}(c)| = \left| \int_a^x f - \int_a^c f \right| = \left| \int_a^c f + \int_c^x f \right|$$

$$= \left| \int_c^x f \right| \leq \int_c^x |f| \leq M \int_c^x 1 = M|x-c| \leq \frac{\epsilon}{M} \cdot M = \epsilon$$

De forma análoga se prueba para $x \in I \cap (c-\delta, c)$

$$\Rightarrow \bar{F}$$
 es continua en $c \Rightarrow \bar{F}$ es continua en I .

b) Como f es continua en $c \in I \Rightarrow \exists \delta > 0 \exists$

$$|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon.$$

$$\Rightarrow f(c) - \epsilon \leq f(x) \leq f(c) + \epsilon,$$

con $x \in I \cap (c-\delta, c+\delta)$

$$\Rightarrow \int_c^x [f(c) - \epsilon] \leq \int_c^x f \leq \int_c^x [f(c) + \epsilon]$$

$$\Rightarrow (f(c) - \epsilon)(x-c) \leq \int_c^x f \leq [f(c) + \epsilon](x-c),$$

$x \in I$ y $x > c$.

$$\Rightarrow f(c) - \epsilon \leq \frac{\int_c^x f}{x-c} \leq f(c) + \epsilon$$

$$\Rightarrow f(c) - \epsilon \leq \frac{\bar{F}(x) - \bar{F}(c)}{x-c} \leq f(c) + \epsilon$$

$$\Rightarrow -\epsilon \leq \frac{\bar{F}(x) - \bar{F}(c)}{x-c} - f(c) \leq \epsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\bar{F}(x) - \bar{F}(c)}{x - c} - f(c) \right| \leq \epsilon.$$

Si $\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \bar{F}$ es diferenciable en c y
se tiene que $\bar{F}'(c) = f(c)$. \square

Teorema {Primer teorema fundamental del cálculo}.

Sea $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Sea $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow$

$$F(x) := \int_a^x f, \quad x \in [a, b]$$

Si f es continua en $c \in [a, b] \Rightarrow F$ es
derivable en c y $F'(c) = f(c)$. \square

Teorema (segundo Teorema Fundamental del cálculo) 
(Fórmula Newton-Leibniz).

Sea $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y sea G una función derivable en $(a, b) \ni G' = f$. Entonces,

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

Dem: Sea $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$. Entonces:

$$G(b) - G(a) = \sum_{k=1}^n [G(x_k) - G(x_{k-1})].$$

Como G es derivable en (a, b) , entonces

$$\Rightarrow G(x_k) - G(x_{k-1}) = G'(t_k) \cdot (x_k - x_{k-1}), \quad t_k \in (x_{k-1}, x_k)$$

$$\Rightarrow \sum [G(x_k) - G(x_{k-1})] = \sum f(t_k) \Delta x_k$$

$$\Rightarrow L(P_n, f) = \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$$

$$\leq \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta x_k$$

$$\Rightarrow L(P_n, f) \leq G(b) - G(a) \leq U(P_n, f)$$

$$\text{Si } n \rightarrow \infty \Rightarrow G(b) - G(a) = \int_a^b f(x) dx. \quad \square$$

6. Sesión 6

Teorema 15. Suponga que $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, funciones acotadas y tales que $f(x) = g(x)$, excepto en un número finito de puntos $x \in [a, b]$. Entonces $f \in R[a, b]$ ssi $g \in R[a, b]$, y se tiene que:

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Proposición 13. Suponga que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada e integrable en $[a, r]$, para cada $a < r < b$. Entonces, f es integrable en $[a, b]$ y se tiene:

$$\int_a^b f = \lim_{r \rightarrow b^-} \int_a^r f.$$

Teorema: Suponga que $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, funciones acotadas y tales que $f(x) = g(x)$, excepto en un número finito de puntos $x \in [a, b]$. Entonces $f \in R[a, b]$ si: $g \in R[a, b]$, y se tiene que:

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Dem: Supongamos que f y g difieren en un punto $c \in [a, b]$. Además, como f y g son acotadas, $\exists M > 0$, $|f|, |g| \leq M$, en $[a, b]$.

A probar: Si f es integrable $\Rightarrow g$ es integrable

$$\Leftrightarrow \boxed{\int_a^b f = \int_a^b g} \quad y \quad \int_a^b f = \int_a^b g$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\int_a^b g \leq \int_a^b f} \quad y \quad \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Sea $\epsilon > 0$ y $P \in \mathcal{P}[a, b]$ s.t. $U(f, P) < \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2}$

Considera el refinamiento Q de P s.t.

$$Q = \{I_1, I_2, \dots, I_n\} \quad |I_k| < \delta, k=1, \dots, n.$$

$$\text{donde } \delta = \frac{\epsilon}{8M}.$$

Si g difiere de f en un intervalo I_k , se tiene:

$$|\sup_{I_k} (g) - \sup_{I_k} (f)| \leq \sup_{I_k} |g| + \sup_{I_k} |f| \leq 2M$$

En el resto de intervalos $\sup_{I_i} (g) - \sup_{I_i} (f) = 0$

$$\Rightarrow |U(g, Q) - U(f, Q)| = \left| \sum_{k=1}^n M_k(g) |I_k| - \sum_{k=1}^n M_k(f) |I_k| \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{i=1}^n [M_i(g) - M_i(f)] \cdot |I_i| \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left| \sup_{I_i}(g) - \sup_{I_i}(f) \right| \cdot |I_i|^{\delta} \\
&\leq 2(2M)(2\delta)^{\frac{2m}{2m}} \\
\sum_1 & \quad 1 \cdot |I_i| = \underbrace{\left[(\sup_{I_1}(g) - \sup_{I_1}(f)) + (\sup_{I_2}(g) - \sup_{I_2}(f)) \right]}_{2M} \cdot |I_1|^{\delta} \\
&+ \underbrace{\left[(\sup_{I_2}(g) - \sup_{I_2}(f)) + (\sup_{I_3}(g) - \sup_{I_3}(f)) \right]}_{2M} \cdot |I_2|^{\delta} \\
&= (2M + 2M)\delta = (2M)(2\delta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{i=1}^n [M_i(g) - M_i(f)] \cdot |I_i| \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left| \sup_{I_i}(g) - \sup_{I_i}(f) \right| \cdot |I_i|^{\delta} \\
&\leq 4M\delta = 4M\left(\frac{\epsilon}{8M}\right) = \frac{\epsilon}{2} \\
\Rightarrow & |U(g, Q) - U(f, Q)| \leq \frac{\epsilon}{2} \\
\Rightarrow & \int_a^b g \leq U(g, Q) \leq U(f, Q) + \frac{\epsilon}{2} \leq \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

\Leftrightarrow Por la arbitrariedad de ϵ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_a^b g \leq \int_a^b f. \\
&\text{Intercambiando los roles de } f \text{ y } g \\
&\int_a^b f \leq \int_a^b g \\
&\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g \\
&\text{De forma similar, se obtiene: } \int_a^b f = \int_a^b g. \\
&\Rightarrow f \in R[a, b] \Leftrightarrow g \in R[a, b]
\end{aligned}$$

Prop: Suponga que $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada e integrable en $[a, r]$, para cada $a < r < b$. Entonces, f es integrable en $[a, b]$ y se tiene:

$$\int_a^b f = \lim_{r \rightarrow b^-} \int_a^r f$$

Ej: Sea $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

• f es acotada en $[0, 1]$

• f es continua en cada subintervalo de la forma $[r, 1]$, $0 < r < 1$.

Integrable $\Rightarrow f \in R[0, 1]$. y $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_r^1 f(x) dx$

Dem: Sea f acotada en $[a, b]$ e integrable en

$[a, r]$, $a < r < b$.

Entonces, $\exists M > 0 \exists |f| \leq M$, en $[a, b]$, $\forall \epsilon > 0$

y definimos:

$$r = b - \frac{\epsilon}{4M},$$

donde ϵ es suficientemente pequeño para que $a < r$.

\Rightarrow Como $f \in R[a, r]$ $\Rightarrow \exists Q \in P[a, r] \exists$

$$U(f, Q) - L(f, Q) < \epsilon/2.$$

Sea $P = Q \cup \{b\} \in P[a, b]$. (El útimo subintervalo de P es $[r, b]$).

f es acotada en $[a, b] \Rightarrow$ se tiene que:

$$\sup_{[r, b]} (f) - \inf_{[r, b]} (f) \leq 2M$$

$$\Rightarrow U(f, P) - L(f, P) = U(f, Q) - L(f, Q) +$$

$$+ [\sup_{[r, b]} (f) - \inf_{[r, b]} (f)] (b-r) <$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + 2M(b-r) = \frac{\epsilon}{2} + 2M \left(\frac{\epsilon}{4M} \right) = \epsilon$$

$$\Rightarrow U(f, P) - L(f, P) < \epsilon \Rightarrow f \in R[a, b].$$

Además,

$$\left| \int_a^b f - \int_a^r f \right| = \left| \int_a^r f + \int_r^b f - \int_a^r f \right| =$$

7. Sesión 7

Lema 16. Sean $f, g \in R[a, b]$. Para cada $P \in P[a, b]$ y cualquier selección de números t_1, t_2, \dots, t_n , donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, y cualquier selección de números f_1, f_2, \dots, f_n , con $f_k \in \{M_k(f), m_k(f)\}$, considere

$$w(P, f, g) = \sum_{k=1}^n f_k g(t_k) \Delta x_k.$$

Teorema 17. (Bonnet) Sean $f \in R[a, b]$ y g una función no negativa, acotada y monótona decreciente. Entonces, $\exists \mu \in [a, b] \ni$

$$\int_a^b f g = g(a) \int_a^\mu f.$$

Teorema 18. Suponga que $f, g \in C[a, b]$ y f y g , son diferenciables en (a, b) . Suponga, además, que f' , $g' \in R[a, b]$. Entonces,

$$\int_a^b f g' dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f' g dx.$$

Teorema 19. Suponga que $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y que g' es integrable en I . Sea $g(I) = J$. Si $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, entonces, $\forall a, b \in I$, se cumple:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Lema: Sean $f, g \in R[a, b]$. Para cada $P \in P[a, b]$ y cualquier selección de números t_1, t_2, \dots, t_n , donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, y cualquier selección de números f_1, f_2, \dots, f_n , con $f_k \in \{M_k(f), m_k(f)\}$, considere

$$w(P, f, g) = \sum_{k=1}^n f_k g(t_k) \Delta x_k,$$

Entonces, $w(P, f, g)$ converge, en el sentido de Riemann, al valor de $\int_a^b fg$.

Dem.

- Consideremos el caso $g \geq 0$ y sea $\beta > 0$ una constante superior de g . Sea $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists P_1 \in P[a, b] \ni \forall P \leq P_1$

se tiene que $U(P, f) - L(P, f) < \frac{\epsilon}{2\beta}$

Por otro lado, sabemos que $f, g \in R[a, b]$.

- Entonces, $\exists P_2 \in P[a, b] \ni \forall P \leq P_2$ y si consideramos los puntos $t_1, t_2, \dots, t_n \in P$, entonces

$$\left| S(P, fg, \Delta x_k) - \int_a^b fg \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

- Sea $P_\epsilon = P_1 \cup P_2 \Rightarrow \forall P \leq P_\epsilon$, se tiene:

$$\begin{aligned} \left| w(P, f, g) - \int_a^b fg \right| &= \left| w(P, f, g) - w(P, f, g) + w(P, fg, \Delta x_k) + \right. \\ &\quad \left. + S(P, fg, \Delta x_k) - \int_a^b fg \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| w(P, f, g) - S(P, fg, \Delta x_k) \right| + \left| S(P, fg, \Delta x_k) - \int_a^b fg \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n f_k g(t_k) \Delta x_k - \sum_{k=1}^n f(t_k) g(t_k) \Delta x_k \right| + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \left| \sum_{k=1}^n [f_k - f(t_k)] g(t_k) \Delta x_k \right| + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f_k - f(t_k)| \cdot g(t_k) \Delta x_k + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \sum_{k=1}^n [U(P, f) - L(P, f)] g(t_k) \Delta x_k + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2\beta} \sum_{k=1}^n g(t_k) \Delta x_k + \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon\beta}{2\beta} \sum_{k=1}^n \Delta x_k + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |W(P, f, g) - S(P, fg, f_{t_k}g_{t_k})| + |S(P, fg, f_{t_k}g_{t_k}) - \int_a^b fg| \\
&\leq \left| \sum_{k=1}^n f_{t_k}g_{t_k} \Delta x_k - \sum_{k=1}^n f(t_k)g(t_k) \Delta x_k \right| + \epsilon/2 \\
&= \left| \sum_{k=1}^n [f_{t_k} - f(t_k)] g(t_k) \Delta x_k \right| + \epsilon/2 \\
&\leq \sum_{k=1}^n |f_{t_k} - f(t_k)| \cdot g(t_k) \Delta x_k + \epsilon/2 \\
&\leq \sum_{k=1}^n \text{osc}(f) \overset{\leq \beta}{\cancel{g(t_k)}} \Delta x_k + \epsilon/2 \\
&\leq \beta [U(P, f) - L(P, f)] + \epsilon/2 \leq \frac{\epsilon}{2\beta} \cdot \beta + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

CÁMARA

$\Rightarrow W(P, f, g)$ converge, en el sentido de Riemann,
 a $\int_a^b fg$.
 \therefore

$$\begin{aligned}
&g(x) < 0, \forall x \in [a, b] \\
&\Rightarrow \underbrace{g(x) + k}_{> 0}, \\
&\quad - \underbrace{g(x)}_{h(x)} > 0
\end{aligned}$$

0:37:31

$\Rightarrow W(P, f, g)$ converge, en el sentido de Riemann,
 a $\int_a^b fg$.

\therefore Si g es negativa, se considera $-g$ o bien
 se encuentra $k \in \mathbb{R}$ s.t. $g(x) + k > 0$, $\forall x \in [a, b]$. \square

Teorema (Bonnet): Sean $f \in R[a, b]$ y g una función no negativa, acotada y monótona decreciente. Entonces, $\exists M \in [a, b] \ni$

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^M f$$

Dem: o) Como g es acotada y monótona decreciente en $[a, b] \Rightarrow g \in R[a, b] \Rightarrow f_g \in R[a, b]$. Entonces, $g(a) > 0$, ya que, si $g(a) = 0 \Rightarrow g(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.

o) Sea $P \in P[a, b]$ y considere:

$$\omega(P, f, g) = \sum_{k=1}^n f_k g_k \Delta x_k, \text{ donde } g_k = g(x_{k-1}), \text{ y}$$

$f_k \in \{M_k(f), m_k(f)\}$. Entonces:

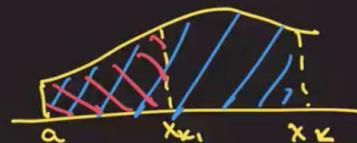
$$m_k(f) \Delta x_k \leq \int_a^{x_k} f \leq M_k(f) \Delta x_k$$

$$\Rightarrow m_k(f) \leq \frac{1}{\Delta x_k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f \leq M_k(f)$$

Sea $F(x) = \int_a^x f, x \in [a, b]$, y sea ω

números $F_k = F(x_k), k = 0, 1, \dots, n$.

$$\Rightarrow F_k - F_{k-1} = \int_a^{x_k} f - \int_a^{x_{k-1}} f$$



Sea $F(x) = \int_a^x f, x \in [a, b]$, y sea ω

números $F_k = F(x_k), k = 0, 1, \dots, n$.

$$\Rightarrow F_k - F_{k-1} = \int_a^{x_k} f - \int_a^{x_{k-1}} f = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f$$

$$\Rightarrow m_k(f) \leq \frac{F_k - F_{k-1}}{\Delta x_k} \leq M_k(f)$$

Continuará...

Teorema: Suponga que $f, g \in C[a, b]$ y f y g no diferenciables en (a, b) . Suponga, además, que $f', g' \in R[a, b]$. Entonces,

$$\int_a^b f'g \, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg' \, dx$$

Dem: Sabemos que $(fg)' = f'g + fg'$

$$\Rightarrow \int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'$$

$$\Rightarrow fg \Big|_a^b = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'$$

$$\Rightarrow f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f'g + \int_a^b fg' \quad \square$$

Teorema: Supongamos que $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y que g' es integrable en I . Sea $J = g(I)$.

Si $f: J \rightarrow \mathbb{R}$, entonces, si $a, b \in I$, se cumple.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du.$$

$$\int_1^2 \sqrt{x^2+1} (2x) \, dx = \int_{g(1)}^{g(2)} \sqrt{u} \, du$$

$$u = x^2 + 1 = g(x)$$

$$du = 2x \, dx$$

8. Sesión 8

Teorema 20. Suponga que $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y que g' es integrable en I .

Sea $g(I) = J$. Si $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces, $\forall a, b \in I$, se cumple:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du,$$

Proposición 14. Suponga que $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$ y $f_n \in R[a, b], \forall n$; y suponga que $f_n \rightarrow_{uniforme} f$ sobre $[a, b]$. Entonces:

1. $f \in R[a, b]$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

8.1. Integrales impropias

Definición 9. Suponga que $f : (a, B] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemman integrable en $[c, d] \ni a < c < b$. Entonces, la integral impropia de f sobre $[a, b]$ es:

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f.$$

La integral impropia converge si este límite existe. En otro caso, la integral diverge.

Definición 10. Suponga que $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre $[a, r], r > a$. Entonces, la integral impropia de f es:

$$\int_a^\infty f = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r f.$$

Teorema: Supongamos que $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y que g' es integrable en I . Sea $g(I) = J$.

Si $f: J \rightarrow \mathbb{R}$, entonces, si $a, b \in I$, se cumple.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

TFC (2): Sean $f \in L[a, b]$ y $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ s.t. $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.
 $\Rightarrow F$ es continua en $[a, b]$. Si f es continua en $[a, b]$
 $\Rightarrow F' = f$.

TFC (1): Si $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua sobre $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) , con $F' = f$ y $f \in L[a, b]$, entonces:

Teorema: Supongamos que $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y que g' es integrable en I . Sea $g(I) = J$.

Si $f: J \rightarrow \mathbb{R}$, f es continua en J , entonces, si $a, b \in I$, se cumple.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

TFC (2): Sean $f \in L[a, b]$ y $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ s.t. $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.
 $\Rightarrow F$ es continua en $[a, b]$. Si f es continua en $[a, b]$
 $\Rightarrow F' = f$.

TFC (1): Si $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua sobre $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) , con $F' = f$ y $f \in L[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Dem: Sea $F(x) = \int_a^x f(u) du$. Como f es continua $\Rightarrow F' = f$ (TFC 2). Entonces, notese que:

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b (F \circ g)'(x) dx = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

$$\Rightarrow (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

$$\Rightarrow F(g(b)) - F(g(a)) = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_{g(a)}^{g(b)} F'(u) du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

□

Nota: Prop: Suponga que $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$ y $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$, $\forall n$; y suponga que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ sobre $[a, b]$. Entonces

(i) $f \in \mathcal{R}[a, b]$; y

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

$\begin{array}{c} [a, b] \\ / \quad \backslash \\ \text{cerrado} \quad \text{acotado} \end{array}$

Integrales Impropias:

Def: Suponga que $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable en $[c, b]$, $a < c < b$. Entonces, la integral impropia de f sobre $[a, b]$ es:

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f$$

La integral impropia converge si este límite existe.
En otro caso, la integral diverge.

Ej: Sea $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$, cuando $x \in (0, 1]$, $p > 0$.

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_{\epsilon}^1 =$$

Integral de Riemann.

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{-p+1} - \frac{\epsilon^{-p+1}}{-p+1} \right] = \begin{cases} \text{convergente, } 0 < p < 1 \\ \text{divergente, } p \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Si } p = 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln(x) \Big|_{\epsilon}^1 =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\ln 1 - \ln \epsilon] \rightarrow \text{diverge.}$$

0:50:37

Def: Suponga que $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre $[a, r]$, $r > a$. Entonces, la integral impropia

de f es:

$$\int_a^{\infty} f = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r f$$

Ej: Considere la integral de Frullani:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx, \quad a, b > 0,$$

y donde $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y en t.q.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(\infty) < \infty.$$

• Sea $I = I_1 + I_2$

$$I_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon a}^b \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx ; I_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{b/\epsilon} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$$

Estudiamos I_1 : SPG, hagamos: $0 < a < b$, $\frac{x}{a} = ax$, $t = bx$

$$\Rightarrow I_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\epsilon a}^a \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{\epsilon b}^b \frac{f(t)}{t} dt \right]$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[- \int_a^{\epsilon a} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{\epsilon a}^{\epsilon b} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{\epsilon b}^b \frac{f(t)}{t} dt + \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt \right]$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\epsilon a}^b \frac{f(t)}{t} dt - \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt \right].$$

$$\Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon a}^b \frac{f(t)}{t} dt = ?$$

$$\Rightarrow \int_{\epsilon a}^b \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\epsilon a}^b \frac{f(t)}{t} dt - \int_{\epsilon a}^b \frac{f(0)}{t} dt + \int_{\epsilon a}^b \frac{f(0)}{t} dt =$$

$$= \int_{\epsilon a}^b \left[\frac{f(t) - f(0)}{t} \right] dt + f(0) \int_{\epsilon a}^b \frac{dt}{t}$$

$$= \int_{\epsilon a}^b \left[\frac{f(t) - f(0)}{t} \right] dt + f(0) \cdot \ln t \Big|_{\epsilon a}^b$$

$$\leq \int_{\epsilon a}^b \left| \frac{f(t) - f(0)}{t} \right| dt + f(0) \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$= \int_{\epsilon a}^b |f(t) - f(0)| \cdot \frac{1}{t} dt + f(0) \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$\leq \int_{\epsilon a}^b \max |f(t) - f(0)| \cdot \frac{1}{t} dt + f(0) \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

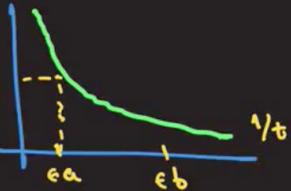
$$= \max |f(t) - f(0)| \int_{\epsilon a}^b \frac{1}{t} dt + f(0) \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$\leq \max |f(t) - f(0)| \left\{ \int_{\epsilon a}^b \frac{1}{t} dt + f(0) \cdot \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right\}$$

$$= \max |f(t) - f(0)| \cdot \frac{1}{t} (\epsilon b - \epsilon a) + f(0) \cdot \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$= \max |f(t) - f(0)| \cdot \left(\frac{b-a}{a} \right) + f(0) \cdot \ln \left(\frac{b}{a} \right) \rightarrow 0$$

$$\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \Rightarrow I_1 = f(0) \ln \left(\frac{b}{a} \right) - \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt$$



9. Sesión 9 y Sesión 10

9.1. Sucesiones de funciones

Definición 11. Una sucesión de funciones $f_n : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ converge puntualmente en $E_0 \subset E$, si $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x) \mathbb{Z}^+ \ni n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. i.e $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

Definición 12. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ y sea la sucesión de funciones (f_n) , $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que (f_n) converge uniformemente a $f(x)$, $\forall x \in E_0 \subset E$, si $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \ni n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in E_0$. Notación $f_n \rightarrow_{unif} f$ (con dos flechas también).

Definición 13. (Criterio de Cauchy) Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ y (f_n) una sucesión de funciones sobre E . Entonces, (f_n) converge uniformemente a alguna función $f(x)$ en $E_0 \subset E$, ssi $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^+ \ni \text{si } m, n \geq N, \text{ entonces } |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in E_0$.

9.2. Series

Definición 14. Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ssi la sucesión de sumas parcial $(s_n)^*$ converge; i.e $\sum a_n$ converge ssi $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L < \infty$.

Dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$$

Definición 15. Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Teorema 21. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces la serie converge.

NOTA. Recuerde el caso de las serie en \mathbb{C} . Entonces dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, los $c_n \in \mathbb{C}$, se considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$, la cual es una serie de número reales.

Sucesiones de Funciones

Def Una sucesión de funciones $f_n: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ converge puntualmente en $E_0 \subset E$, si $\forall \epsilon > 0$

$$\exists N = N(\epsilon, x) \in \mathbb{Z}^+ \text{ s.t. } \forall n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$

Ej: 1) Sea $f_n(x) = x^n$, $\forall x \in [0, 1]$. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

La sucesión converge puntualmente.

** Note que $f_n(x) = x^n$ no continua $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, pero $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ sí es continua.

② Considera $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$, la cual:

$$i) f'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1/n}}, \text{ i.e. } f_n \text{ es diferenciable, para todo } x \in \mathbb{R}.$$

$$ii) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1/n} = \sqrt{x^2} = |x|, \text{ la cual no es diferenciable en } x=0.$$

③ Sea $f_n(x) = \frac{\sin(n^3 x)}{n}$, la cual:

$$i) f'_n(x) = \frac{n^3 \cos(n^3 x)}{n} = n^2 \cos(n^3 x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$ii) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

④ Sea $u_n(x) = nx(1-x^2)^n$, $\forall x \in [0, 1]$

02:17

i) $u_n(x)$ es continua, $\forall x \in [0, 1] \Rightarrow u_n(x) \in \mathbb{R} [0, 1]$

$$\text{ii)} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} nx(1-x^2)^n = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 u_n(x) dx = \int_0^1 nx(1-x^2)^n dx = -\frac{n}{2} \int u^n du =$$

$$w = 1-x^2 \quad \left| = -\frac{n}{2} \cdot \frac{u^{n+1}}{n+1} \right. =$$

$$-\frac{1}{2} dw = x dx \quad \left| = -\frac{n}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1} \right|_0^1$$

$$= \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}$$

$$\text{Además, } \int_0^1 u'_n(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 u_n(x) dx = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} u'_n(x) dx = 0.$$

5) Sea $u_n = [\lfloor n! \pi x \rfloor]$, $\forall x \in [0, 1]$
(u_n es continua, $\forall x \in [0, 1]$)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & \text{si } x \in [0, 1] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

función de Dirichlet
(discontinua $\forall x$)

Def: Sea $E \subset \mathbb{R}$ y sea la sucesión de funciones (f_n) , $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que (f_n) converge uniformemente a $f(x)$, $\forall x \in E_0 \subset E$, si $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon)$ $\forall n \geq N \Rightarrow \forall x \in E_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Notación: $f_n \xrightarrow{u} f$; $f_n \rightarrow f$

Teorema (criterio de Cauchy) Sean $E \subseteq \mathbb{R}$ y
 (f_n) una sucesión de funciones sobre E .
Entonces, (f_n) converge uniformemente a alguna función $f(x)$ en $E_0 \subseteq E$, ssi
 $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{Z}^+ \exists n, m > N$, entonces
 $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon, \forall x \in E_0$.

Dem: (\Rightarrow) Sabemos $f_n \xrightarrow{n \infty} f$, $\forall x \in E_0$.
 $\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \exists n > N \text{ s.t. } |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall x \in E_0$,
y también, si $m > N \Rightarrow |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall x \in E$,
 $\Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n(x) - f(x)) + (f(x) - f_m(x))|$

$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \forall x \in E_0.$$

(\Leftarrow) $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)|$
↑
convergencia puntual

$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \forall x \in E_0.$$

Serie:

Def: Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ssi.
la sucesión de sumas parciales $(s_n)^*$ converge;
i.e. $\sum a_n$ converge ssi $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L < \infty$.

*: Dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, se tiene;

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$$

$$\Rightarrow s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_{n-1} + a_n$$

(s_n) : es la sucesión de sumas parciales

Ej: 1) Encuentre la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}}_{a_n}.$$

$$\Rightarrow \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \frac{C}{n+1} + \frac{D}{(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow A = C = 0; B = 1, D = -1$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$



$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^\circ$$

$$= 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}} ; \quad a_n = \frac{n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}} =$$

$$= \frac{n - \sqrt{(n+1)(n-1)}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} = \frac{n}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n-1}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}}$$

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$= \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{0}}{\sqrt{1}}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) + \dots + \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}} = 1$$

Ej. (*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} , \quad m \in \mathbb{Z}^+$

Ej.: Encuentre la serie y su suma, si (S_n) esté dada por:

- $S_n = \frac{n+1}{n}$. Nótese que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$

Sabemos: $S_n = S_{n-1} + a_n \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} =$

$$= \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n-1} = \frac{(n+1)(n-1) - n^2}{n(n-1)} = \frac{n^2-1-n^2}{n(n-1)}$$

\Rightarrow La serie de: $2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

Además, si $n=1 \Rightarrow a_1 = S_1 = \frac{1+1}{1} = 2$

- $S_n = \frac{2^n - 1}{2^n} \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} =$

$$= \frac{2^n - 1}{2^n} - \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} = \frac{(2^n - 1) - 2(2^{n-1} - 1)}{2^n} =$$

$$= \frac{2^n - 2^{n-1} + 2}{2^n} = \frac{1}{2^n}, \quad n=0, 1, 2.$$

$$\Rightarrow$$
 La serie es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^0 = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

$$= 2 - 1 = 1$$

\Rightarrow La serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Teorema (criterio de divergencia)

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Dem. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente y sea (S_n) la sucesión de sus sumas parciales $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L < \infty$.

$$\Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [S_n - S_{n-1}] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = L - L = 0$$

Nota: La contrapuesta del teorema anterior es: Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Def: Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Teorema: Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente \Rightarrow la serie converge.

Dem: (a) Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, considera

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \Rightarrow S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k. Entonces, el criterio de Cauchy se escribe:
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \text{ converge} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \exists$$

$$\text{si } n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \epsilon, \forall p, p=1,2,3,\dots$$
(b) Considera $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, que es absolutamente convergente i.e. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \exists$

$$\text{si } n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \epsilon, \forall p, p=1,2,\dots$$$$

Notese que $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \epsilon, \forall p, p=1,2,\dots$

\Rightarrow Por el criterio de Cauchy $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Nota: Recuerde el caso de las series en \mathbb{C} .

\Rightarrow Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, los $c_n \in \mathbb{C}$, se considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$, la cual es una serie de números reales.

10. Sesión 11 y Sesión 12

Proposición 15. (*Series geométricas*) Si $|r| < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = 1/(1 - r)$, y la serie diverge para $|r| \geq 1$.

Proposición 16. (*Criterio de comparación*)

1. Si $\sum b_k$ converge y $0 \leq a_k \leq b_k \implies \sum a_k$ converge.
2. Si $\sum c_k$ diverge y $0 \leq c_k \leq d_k \implies \sum d_k$ diverge.

Proposición 17. (*P-Series*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge para $p > 1$ y diverge para $p \leq 1$.

Proposición 18. (*Criterio de la razón*)

1. Suponga que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existe y es menor que 1. \implies La serie $\sum a_n$ converge absolutamente.
2. Si el límite tiene a infinito o es mayor que 1 \implies la serie diverge.
3. Si el límite es 1, el límite no es concluyente.

Teorema 22. (*Condensación*) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ni a_n > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ y (a_n) es decreciente. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad y \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

converge o divergen de forma conjunta.

Proposición 19. (*Criterio de la integral*) Sea $f(x)$ una función integrable, continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$, y sea $f(n) = a_n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergessi $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge.

Teorema 23. (*2 criterio de la razón*) Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y sean

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2n}}{a_n} \right| = L_1 \quad y \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2n+1}}{a_n} \right| = L_2$$

Si

1. $L_1 < 1/2$ y $L_2 < 1/2 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
2. $L_1 > 1/2$ y $L_2 > 1/2 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

3. $L_1 = 1/2$ o $L_2 = 1/2$, o si $L_1 > 1/2$ y $L_2 < 1/2$.

Teorema 24. (*Criterio de Raabe*) Sea $\sum a_n, a_n > 0$ y asuma que $L = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$.

1. Si $L > 1 \implies$ la serie converge.

2. Si $L < 1 \implies$ la serie diverge.

3. Si $L = 1 \implies$ el criterio no es concluyente.

Prop. Si $|r| < 1 \Rightarrow \left[\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \right] = \frac{1}{1-r}$, y la serie diverge para $|r| \geq 1$ (series geométricas).

Dem: $|r| \neq 1$

$$\text{Considera: } 1 - r^{n+1} = (1-r)(1+r+r^2+\dots+r^n), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r}, \quad r \neq 1$$

$$\text{Si: } n \rightarrow \infty \Rightarrow 1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots \rightarrow \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1$$

$$|r| = 1 \begin{cases} r=1 \\ r=-1 \end{cases}. \quad \text{ Nótese que, en ambos casos, se tiene que } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n \neq 0 \quad \text{y Diverge, } |r| > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \neq 0 \Rightarrow \text{La serie diverge}$$

Nota: Recorremos: $1+x+x^2+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$.

Prop: (criterio de comparación). $\exists \alpha_k, \beta_k, c_k$ Términos positivos

i) Si $\sum \beta_k$ converge y $0 \leq \alpha_k \leq \beta_k \Rightarrow \sum \alpha_k$ converge.

ii) Si $\sum c_k$ diverge y $0 \leq \alpha_k \leq c_k \Rightarrow \sum \alpha_k$ diverge.

Dem: i) Sea $\sum \beta_k$ converge \Rightarrow La sucesión de sumas parciales de la serie forma una sucesión de Cauchy \Rightarrow Para cada $K \in \mathbb{Z}^+$ y para cada $p = 1, 2, \dots$ se tiene que: $\alpha_{K+p} + \alpha_{K+p+1} + \dots + \alpha_{K+p+p} \leq \beta_K + \beta_{K+1} + \dots + \beta_{K+p}$, $p = 1, 2, \dots$

\Rightarrow La sucesión de sumas parciales de $\sum \alpha_k$ es de Cauchy $\Rightarrow \sum \alpha_k$ converge.

iii) Supongamos que $\sum c_k$ diverge y que $0 \leq \alpha_k \leq c_k$. En decir, la serie diverge a ∞ .

\Rightarrow Dado $M > 0 \exists K_0 \in \mathbb{Z}^+$ para $K > K_0$, se tiene

$$c_1 + c_2 + \dots + c_K > M$$

\Rightarrow Se cumple que $c_1 + \dots + c_K \geq c_1 + c_2 + \dots + c_K > M$

\Rightarrow La serie $\sum \alpha_k$ diverge. \square

Prop: (p-series): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge para $p > 1$ y diverge para $p \leq 1$.

Dem: ① Caso $p = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (criterio de condensación)

② Caso $p \leq 1$, entonces, la serie es de término

positivo y sabemos que, para $p \leq 1$, se tiene $n^p \leq n^1 \Rightarrow \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow$ por comparación $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge.

③ $p > 1$ (criterio de condensación)

Prop: (criterio de la razón)

④ Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existe y es menor que 1

\Rightarrow La serie $\sum a_n$ converge absolutamente. ⑤ Si el límite tiende a infinito o es mayor que 1.

\Rightarrow La serie diverge. ⑥ Si el límite es 1, el criterio no es concluyente.

Dem: ④ Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r < 1$

sea $r' \in \mathbb{R}$ y $r < r' < 1$ y sea $N_0 \in \mathbb{Z}^+$ si $n > N_0$

$\Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < r'$. Entonces, $\forall k \geq N_0$, se tiene:

$$|a_k| \leq r' |a_{k-1}| \leq (r')^2 |a_{k-2}| \leq \dots \leq (r')^{k-N_0} |a_{N_0}|$$

$$\Rightarrow \text{La serie } \sum_{k=N_0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=N_0}^{\infty} |a_{N_0}| \cdot (r')^{k-N_0}$$

$$= \sum_{k=N_0}^{\infty} |a_{N_0}| \cdot (r')^k$$

$\therefore \sum_{k=N_0}^{\infty} |a_k|$ converge por comparación con la serie geométrica.

⑤ Considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, la cual es convergente por p-series. Pues:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{n+1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Por otra parte, la serie divergente $1+1+1+\dots$

$$\text{es t.g. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$$

⑥ Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r > 1$. Sea $r' \in \mathbb{R} \Rightarrow r > r' > 1$ y sea $N_0 \in \mathbb{Z}^+$ si $n > N_0$, entonces

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > r' \Rightarrow |a_{n+1}| > r' |a_n| > (r')^2 |a_{n-1}| > \dots > (r')^{k-N_0} |a_{N_0}|$$

Teorema (condensación): Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq a_n > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$
 si (a_n) es decreciente. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

convergen o divergen de forma conjunta

$$\text{Ej.: 1) Sea } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \Rightarrow \text{considere } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1. \text{ Como } \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge.}$$

$$\text{2) Sea } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \text{ Entonces, consideremos la serie} \\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \left(\frac{1}{(2^n)^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n + 1 - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge.}$

$$3.- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n [\ln(n)]^2} \Rightarrow \text{considere } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n [\ln(2^n)]^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(2^n)]^2} = \underbrace{\frac{1}{(\ln 2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}$$

converge

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n [\ln(n)]^2} \text{ converge por condensación.}$$

4) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n) \sqrt{\ln(\ln n)}}. \text{ Considerar}$

$$\sum_{n=3}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=3}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n (\ln 2^n) \sqrt{\ln(\ln 2^n)}} =$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2) n \sqrt{\ln(\ln 2)}} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln(\ln 2)}}.$$

↑

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n \sqrt{\ln(2^n \ln 2)}}$$

Condensación

$$= \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln 2^n + \ln(\ln 2)}} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n \ln 2 + \ln(\ln 2)}}.$$

↑

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{2^n \ln 2 + \ln(\ln 2)}} \Rightarrow$$

Condensación

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{\sqrt{2^x \ln 2 + \ln(\ln 2)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2}{2 \sqrt{2^x \ln 2 + \ln(\ln 2)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2^x \ln 2 + \ln(\ln 2)}}{\ln 2} \rightarrow \infty$$

\Rightarrow La serie diverge.

Ejercicio: $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln(\ln n))}.$

Nota: 1) criterio de la integral
 sea $f(x)$ una función continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$, y sea $f(n) = a_n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces,
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge.

② Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y considere $\int f(x) dx$
 Sea $x = 2^t \Rightarrow dx = 2^t \ln 2 dt$
 $\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx = (\ln 2) \int_0^{\infty} 2^t f(2^t) dt$
 Si $x=1 \Rightarrow t=0 \Rightarrow 2^t=1$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $\int_0^{\infty} f(2^t) dt$
 Si $x=\infty \Rightarrow t=\infty$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n f(2^n) \text{ converge}$
 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Teorema (2º criterio de la razón).
 Considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, y sean

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2n}}{a_n} \right| = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2n+1}}{a_n} \right| = L_2.$$

Si:

i) $L_1 < \frac{1}{2}$ y $L_2 < \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

ii) $L_1 > \frac{1}{2}$ y $L_2 > \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

iii) $L_1 = \frac{1}{2}$ y $L_2 = \frac{1}{2}$, o si $L_1 > \frac{1}{2}$ y $L_2 < \frac{1}{2}$.

o viceversa, el criterio no es concluyente.

Ej.: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$. Utilizando el 2º criterio de la razón:

$$\text{i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n}{2n^3+1}}{\frac{n}{n^3+1}} =$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(n^3+n)}{n(8n^3+1)} = \frac{1}{4} = L_1 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{2n+1}}{\frac{n}{n^3+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(n^3+1)}{n[(2n+1)^3+1]} \\ &= \frac{1}{4} = L_2. \end{aligned}$$

Como $L_1 < \frac{1}{2}$ y $L_2 < \frac{1}{2} \Rightarrow$ la serie converge.

$$\text{Ej: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(2n)}{\ln(n)}}{\frac{n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2n)}{\ln(n)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n} \cdot 2}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{2n+1}}{\frac{n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \ln(2n+1)}{(2n+1)^2 \ln n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2n+1)}{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n+1} (2)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+1} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{\ln(2n+1)} &= \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} = L_2$$

$\Rightarrow L_1 = \frac{1}{4} < L_2 \Rightarrow$ la serie converge.
 $L_2 = \frac{1}{4} < 1/2$

$$\text{Ej: } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n} \ln(2n)}}{\frac{1}{\sqrt{n} \ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \ln(n)}{\sqrt{2n} \sqrt{n} \ln(2n)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{\ln(2n)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n} \cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = L_1$$

$\sqrt{2} < 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+1} \ln(2n+1)}}{\frac{1}{\sqrt{n} \ln n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{\sqrt{2n+1} \ln(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \cdot \frac{\ln n}{\ln 2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = L_2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n+1} \cdot 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n} \left| \begin{array}{l} \Rightarrow L_1 > 1/2 \\ L_2 > 1/2 \\ \Rightarrow \text{la serie diverge.} \end{array} \right.$$

Teorema (criterio de Raabe): Sea $\sum a_n$, $a_n > 0$, y asumimos que $L = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$.

i) Si $L > 1 \Rightarrow$ la serie converge.

ii) Si $L < 1 \Rightarrow$ la serie diverge.

iii) Si $L = 1 \Rightarrow$ el criterio no es concluyente.

Ej: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Por Raabe:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{1/n^3}{1/(n+1)^3} - 1 \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{(n+1)^3 - n^3}{n^3} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{3n^2 + 3n + 1}{n^3} \right) = 3 > 1 \Rightarrow \text{la serie converge.} \end{aligned}$$

$$\text{Ej: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}; \text{ por Raabe, se tiene.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{n!/2^n}{(n+1)/2^{n+1}} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{n! \cdot 2^{n+1}}{(n+1)! \cdot 2^n} - 1 \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{2}{n+1} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{2-n-1}{n+1} \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-n^2-1}{n+1} \rightarrow -\infty < 1 \Rightarrow \text{la serie diverge.}$$

$$\text{Ej: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad ; \text{ recordemos.}$$

$$(2n)!! = (2n)(2n-2)(2n-4)\dots 2$$

$$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3)\dots 1$$

Por Raabe,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}} - 1 \right] &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{(2n-1)!!(2n+2)(2n)!!}{(2n)!!(2n+1)(2n+2)!!} - 1 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{(2n+2) - (2n+1)}{(2n+1)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \\ \Rightarrow \text{la serie diverge.} & \end{aligned}$$

11. Sesión 13

Teorema 25. (*Criterio de Kummer*) Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos.

Sea $\sum b_n$ una serie divergente $\exists b_n > 0$. Además, considere:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right)$$

1. Si $\alpha > 0 \implies \sum a_n$ converge.
2. Si $\alpha < 0 \implies \sum a_n$ diverge.
3. Si $\alpha = 0$, el criterio no es concluyente.

Teorema 26. (*Criterio de comparación en el límite*) Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ sobre series de términos positivos y si $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n < \infty \implies$ ambas series convergen o divergen.

Teorema 27. (*Leibniz- Series alternantes*) Supongamos que (a_n) es una sucesión decreciente de números positivos $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge.

Teorema (criterio de Kummer): Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ una serie divergente $\Rightarrow b_n > 0$. Además, considere

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right).$$

- 1) Si $\alpha > 0 \Rightarrow \sum a_n$ converge.
- 2) Si $\alpha < 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.
- 3) Si $\alpha = 0$, el criterio no es concluyente.

Nota:

- ① Hagamos $b_n = 1$, i.e. considere la serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, $b_n > 0$. Entonces:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \alpha \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1 + \alpha}$$

• Si $\alpha > 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Leftrightarrow \sum a_n$ converge

• Si $\alpha < 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Leftrightarrow \sum a_n$ diverge.

• Si $\alpha = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Leftrightarrow$ El criterio no es concluyente.

i.e. Kummer con $b_n = 1$ es el criterio de la razón para series de términos positivos

② Sea $b_n = \frac{1}{n} > 0$ y $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Entonces,

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1/n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{1/(n+1)} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \frac{a_n}{a_{n+1}} - n \right] - 1$$

$$\Rightarrow \alpha + 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = L$$

$\alpha > 0 \Leftrightarrow \sum a_n$ converge $\Leftrightarrow L > 1$
 $\alpha < 0 \Leftrightarrow \sum a_n$ diverge $\Leftrightarrow L < 1$
 $\alpha = 0 \Leftrightarrow L = 1 \Leftrightarrow$ El criterio

Deur (Kummer): Sea $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right]$.

Hagamos $p_n = \frac{1}{b_n}$. Entonces:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \right].$$

Caso $\alpha > 0$: Sea $r \in \mathbb{R}$ q $0 < r < \alpha$ $\exists n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} < p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1}$$

Notese que: $n=1: p_1 a_1 - p_2 a_2 > r a_2$
 $n=2: p_2 a_2 - p_3 a_3 > r a_3$
 \vdots
 $n=m-1: p_{m-1} a_{m-1} - p_m a_m > r a_m$

$$\Rightarrow p_1 a_1 - p_m a_m > \sum_{k=1}^m r a_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^m a_k < \frac{p_1 a_1 - p_m a_m}{r} = \text{constante}$$

i.e. La sucesión de sumas parciales

$$S_m = \sum_{k=1}^m a_k.$$

- i) Es creciente; y
- ii) Es acotada

\Rightarrow La serie $\sum a_k$ converge.

$$\left\{ \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n(n+1)} \right\} \leq K(k)$$

Teorema (Criterio de la integral):

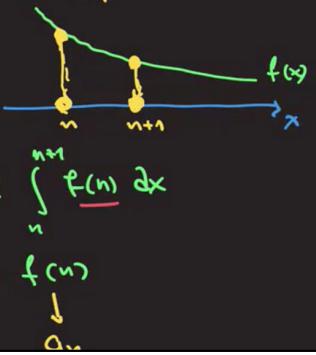
Suponga que f es una función integrable, positiva y decreciente en $[1, \infty)$ y que $f(n) = a_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Entonces, $\sum a_n$ converge si $\int_1^\infty f(x) dx$ converge

Dm: Sea $x \in [n, n+1]$

$$\Rightarrow f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx$$

$$\Rightarrow f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$$



$$\Rightarrow a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq a_n, \quad n=1,2,\dots$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \leq \int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Si $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

Si $\int_1^{\infty} f(x) dx$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Teorema (Criterio de comparación en el límite). Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series de términos positivos y si $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty \Rightarrow$ ambas series convergen o divergen.

Dem: Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+$

$\exists n > N \Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \epsilon$

$\Leftrightarrow -\epsilon < \frac{a_n}{b_n} - L < \epsilon$

$\Leftrightarrow L - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \epsilon \Rightarrow (L - \epsilon)b_n < a_n < (L + \epsilon)b_n$

$$\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} (L - \epsilon)b_n < \sum_{n=N}^{\infty} a_n < \sum_{n=N}^{\infty} (L + \epsilon)b_n$$

Si $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

Si $\sum a_n$ converge $\Rightarrow \sum b_n$ converge

Si $\sum b_n$ diverge $\Rightarrow \sum a_n$ diverge

Si $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge. \square

Teorema (Leibniz) (series alternantes)

Suponga que (a_n) es una sucesión decreciente de números positivos $\geq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$
 converge.

Dem: Sea $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k$. Considera:

(1) $s_{2n} \leq s_{2n+2}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. En efecto

$$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1}(-1)^{2n+2} + a_{2n+2}(-1)^{2n+3}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

$$= s_{2n} + \underbrace{a_{2n+1} - a_{2n+2}}_{\geq 0}, \quad a_n \text{ es decreciente}$$

$$\Rightarrow s_{2n} \leq s_{2n+2}.$$

(2) $s_{2n+1} \geq s_{2n+3}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. En efecto,

$$s_{2n+3} = s_{2n+1} + a_{2n+2}(-1)^{2n+3} + a_{2n+3}(-1)^{2n+4}$$

$$= s_{2n+1} - \underbrace{a_{2n+2} + a_{2n+3}}_{\leq 0} \Rightarrow s_{2n+3} \leq s_{2n+1}$$

(3) $s_{2n+1} \geq s_{2n}$, $\forall n, l \in \mathbb{Z}^+$. En efecto:

$$s_{2n+1} = s_{2n} + (-1)^{2n+2} a_{2n+1}$$

$$= s_{2n} + a_{2n+1}$$

$$\Rightarrow s_{2n+1} \geq s_{2n}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & \hline s_2 & s_4 & s_6 & s_8 & \dots & s_7 & s_5 & s_3 & s_1 \end{array}$$

$\Rightarrow s_{2n}$ es creciente y acotada superiormente
 s_{2n+1} es decreciente y acotada inferiormente

\Rightarrow Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = x \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = y$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} [s_{2n+1} - s_{2n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} \quad \text{D}$$

$$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge.

12. Sesión 14 y 15

Teorema 28. (*Criterio de la raíz*) Suponga que $\lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{1/n} = L$. Entonces,

1. Si $L < 1 \implies \sum a_n$ converge.
2. Si $L > 1 \implies \sum a_n$ diverge.
3. Si $L = 1 \implies$ el criterio no es concluyente.

12.1. Series de funciones

NOTA. 1. Suponga que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones definida sobre el conjunto E , y suponga que la sucesión numérica $\{f_n(x)\}$ converge para cada $x \in E$. Entonces, se define una función f así:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \forall x \in E.$$

\implies Se dice que $\{f_n\}$ converge a f sobre E (o bien, f es el límite de f_n)

2. Similarmente, si $\sum f_n(x)$ converge para cada $x \in E$, y si se define $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), x \in E \implies$ la función f es la suma de $\sum f_n$.

Teorema 29. (*M-test de Weierstrass*) Suponga que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones definidas en E , y suponga que $|f_n(x)| \leq M_n, \forall x \in E$ y $M_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$. Si $\sum M_n$ converge $\implies \sum f_n(x)$ converge (absolutamente) uniformemente.

Teorema 30. Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas sobre E y si $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \implies f$ es continua sobre E .

12.2. Integral Riemann -Stiljes

1. Sea α una función monótona creciente sobre $[a, b]$. Nótese que como $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ son finitos $\Rightarrow \alpha(x)$ es acotada en $[a, b]$.
2. Considere $P \in P[a, b]$ y hagamos $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$, $a \leq x_{i-1} \leq x_i \leq b$.
3. Para cualquier función f acotada sobre $[a, b]$, definamos:

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n M_i(f) \Delta\alpha_i$$

$$L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n m_i(f) \Delta\alpha_i$$

y también

$$\overline{\int_a^b f d\alpha} = \int \{U(P, f, \alpha) : P \in P[a, b]\}$$

$$\underline{\int_a^b f d\alpha} = \sup\{L(P, f, \alpha) : P \in P[a, b]\}$$

4. Si

$$\overline{\int_a^b f d\alpha} = \underbrace{\int_a^b f d\alpha}_{=: \int_a^b d\alpha} = \int_a^b f(x) d\alpha(x) \quad (*)$$

la cual es la integral de Riemann-Stieltjes de f con respecto a α sobre $[a, b]$.

5. Si $(*)$ existe, entonces f es integrable con respecto a α (en el sentido de Riemann) lo cual se denota $f \in R(\alpha)$.

Teorema 31. *Sea α monótona creciente en $[a, b]$. Suponga que $f_n \in R(\alpha)$, $n = 1, 2, \dots$ y suponga que $f_n \in R(\alpha)$, $n = 1, 2, \dots$ y suponga que $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre $[a, b]$. Entonces $f \in R(\alpha)$ sobre $[a, b]$ y:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n d\alpha = \int_a^b f d\alpha.$$

Corolario 31.1. *Si $f_n \in R(\alpha)$ sobre $[a, b]$ y si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, uniformemente sobre $[a, b]$, entonces:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Teorema (Criterio de la raíz): Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{1/n} = L$. Entonces,

- Si $L < 1 \Rightarrow \sum |a_n| \text{ converge.}$
- Si $L > 1 \Rightarrow \sum |a_n| \text{ diverge.}$
- Si $L = 1 \Rightarrow$ el criterio no es concluyente.

Demo:

- Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{1/n} = L < 1$. Sea $L' \in \mathbb{R}^+ \ni L < L' < 1$, y sea $N \in \mathbb{Z}^+$, tal que si $n \geq N \Rightarrow (|a_n|)^{1/n} \leq L' \Rightarrow (|a_n|^{1/n})^n \leq (L')^n$
- $\Rightarrow |a_n| \leq (L')^n \Rightarrow \sum |a_n| \leq \sum (L')^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum |a_n| \text{ converge por comparación} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge absolutamente} \Rightarrow \sum |a_n| \text{ converge}$

(ii) Ejercicio 20.

(iii) Notemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Sea } y &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} \Rightarrow \ln y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\ln(1/n)^0 - \ln(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\ln(n)}{n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1/n}{1} = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1 \\ &\text{y notemos que } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge} \end{aligned}$$

Por otra parte, considere $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n} = 1$, y notemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. \Rightarrow el criterio de la raíz no es concluyente.

Serios de Funciones

Nota: 1) Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones definidas sobre el conjunto E , y supongamos que la sucesión numérica $\{\int f_n(x)\}$ converge para cada $x \in E$.

Entonces, se define una función f así

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \forall x \in E$$

\Rightarrow se dice que $\{f_n\}$ converge a f sobre E (o bien, que f es el límite de f_n)

2) Similarmente, si $\sum f_n(x)$ converge para cada $x \in E$, y si se define: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in E$ (2)

\Rightarrow la función f es la suma de $\sum f_n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = e^x$$

Problema: Determinar los casos en los cuales las propiedades importantes se preservan bajo (1) y (2).

Teorema (M-test de Weierstrass)

Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones definidas en E , y supongamos que $|f_n(x)| \leq M_n$, $\forall x \in E$ y $M_n \in \mathbb{R}_+$, $n = 1, 2, \dots$. Si $\sum M_n$ converge $\Rightarrow \sum f_n(x)$ converge uniformemente.

* convergencia absoluta.

Demo: Sean $n, m \in \mathbb{Z}^+$, lo suficientemente grandes para que: sea $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n, m \geq N \Rightarrow$ notemos

$$\left| \sum_{i=n+1}^m f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n+1}^m |f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^m M_i < \epsilon,$$

$\forall x \in E \Rightarrow \sum f_n(x)$ converge uniformemente. \square

Ej.: (1) Considera la serie $L(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$

(función dilogaritmo de Euler).

a) Encuentra el dominio de convergencia de $L(x)$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}}{\frac{x^k}{k^2}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{k+1} \cdot k^2}{x^k \cdot (k+1)^2} \right| =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} |x| \cdot \left(\frac{k}{k+1} \right)^2 = |x| < 1 \leftarrow \text{Radio de convergencia.}$$

\Rightarrow la serie converge en $-1 < x < 1$.

Sea $x = 1 \Rightarrow L(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, la cual converge por

P-series.

Sea $x = -1 \Rightarrow L(-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$, la cual converge por alternante.

⇒ el dominio de convergencia de la serie

$$\text{es } -1 \leq x \leq 1.$$

..) Sea $\left| \frac{x^k}{k^2} \right| = \frac{|x|^k}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}$, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$.

⇒ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge por p-series

⇒ por M-test ⇒ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ converge uniformemente en $[-1, 1]$.

2) Prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}$ converge uniformemente sobre $(0, \infty)$.

$$\text{Sea } f_n(x) = x^n e^{-nx}, x \in (0, \infty).$$

$$\Rightarrow f'_n(x) = nx e^{-nx} - nx^2 e^{-nx} = x e^{-nx}(2-nx) = 0$$

⇒ $x = \frac{2}{n}$ (valor crítico) ⇒ $f_n(x)$ tiene un máximo en $(\frac{2}{n}, (\frac{2}{n})^2)$ $e^{-x(\frac{2}{n})} = (\frac{2}{n}, e^{-\frac{4}{n^2}})$

$$\Rightarrow 0 \leq f_n(x) \leq e^{-2} \left(\frac{4}{n^2} \right), n=1, 2, \dots$$

⇒ Nota que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4e^2)}{n^2}$ converge por p-series.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx} \text{ converge uniformemente en } (0, \infty)$$

Teorema: Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas sobre E y si $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \Rightarrow f$ es continua sobre E . \square

Ej: 1) Considera la sucesión $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$, $[0, \infty)$.

1.1) Calcula el límite puntual de $f_n(x)$, y $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$.

1.2) ¿ $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ sobre $[0, 1]$?

Sol.

1.1) Sea $x=0 \Rightarrow f_n(0)=0$.

Sea $x \neq 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+nx} = 1$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ 1, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

1.2) Nota que $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ es continua en $[0, 1]$, pero su límite $f(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ 1, & x \in (0, 1] \end{cases}$ no es continua ⇒ la convergencia no es uniforme (convergencia unif. preserva continuidad).

(2) Estudie la convergencia de la sucesión $\{ \frac{x^n(1-x)}{n} \}$ en $[0, 1]$.

Nota: $\begin{cases} \text{si } x=1 \Rightarrow f_n(1)=0 \\ \text{si } x=0 \Rightarrow f_n(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)=0$

si $x \in (0, 1) \Rightarrow f_n(x) \rightarrow 0$

¿ Es la convergencia uniforme?

• Dado $\epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \forall n > N$

$$\Rightarrow |f_n(x) - 0| < \epsilon, \forall x \in [0, 1]$$

..) $|f_n(x)| < (\text{cota}) < \epsilon$
↑
indpendiente de x

$$f_n(x) = x^n(1-x)$$

Considera $f(x) = x^n(1-x)$ toma un máximo $[0, 1]$. El máximo lo plantea en $(0, 1)$. Entonces,

$$f'(x) = nx^{n-1}(1-x) + x^n(-1) = x^{n-1} [n(1-x) - x]$$

$$= x^{n-1} [n - (n+1)x] = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0$$

$$\Rightarrow x \neq 0 \quad \theta \quad n - (n+1)x = 0 \Rightarrow x = \frac{n}{n+1}$$

Por criterio de 2da derivada

$$\Rightarrow f''(x) = n(n-1)x^{n-2} - n(n+1)x^{n-1}$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{n}{n+1}\right) = n(n-1) \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-2} - n(n+1) \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}$$

$$= n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-2} \left[(n-1) - (n+1) \left(\frac{n}{n+1}\right) \right] =$$

$$= -n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n-2} < 0 \Rightarrow \text{Hay máximo relativo en } x = \frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow f_n(x) \leq \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \left[1 - \frac{n}{n+1} \right] = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \left(\frac{1}{n+1} \right)$$

$$\gamma_{e-1} \leq \frac{1}{n+1}, \forall n.$$

Dado $\epsilon > 0$ y $N = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil \in \mathbb{Z}^+$ si $n \geq N$, entonces

$$|f_n(x) - 0| = f_n(x) \leq \frac{1}{n+1} < \epsilon$$

\Rightarrow La convergencia es uniforme

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} n+1 > \frac{1}{\epsilon} \\ \hline n > \frac{1}{\epsilon} - 1 \end{array}}$$

Ej: Prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}$ converge uniformemente en $(0, \infty)$

(M-test)

Sea $f_n(x) = x^n e^{-nx} \Rightarrow f'_n(x) = nx^{n-1} e^{-nx} - nx^n e^{-nx} = x e^{-nx} [2 - nx] = 0 \Rightarrow x \neq 0 \Leftrightarrow 2 - nx = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{n}$ (máx)

$$\Rightarrow 0 \leq x^n e^{-nx} \leq f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^n \cdot \left(e^{-n \cdot \frac{2}{n}}\right) = e^{-2} \left(\frac{2}{n}\right)^n = 4e^{-2} \left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Notese que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge por p-series \Rightarrow por M-test, la serie converge uniformemente.

Nota: ① Sea d una función monótona creciente sobre $[a, b]$. Notese que, como $d(a)$ y $d(b)$ son finitos $\Rightarrow d(x)$ es acotada en $[a, b]$.

② Considera $P \in P[a, b]$ y hagamos $\Delta d_i = d(x_i) - d(x_{i-1})$, $a \leq x_{i-1} \leq x_i \leq b$.

③ Para cualquier función f acotada sobre $[a, b]$, definimos:

$$U(P, f, d) = \sum_{i=1}^n M_i(f) \Delta d_i \rightarrow \begin{cases} M_i = \sup_{t \in (x_{i-1}, x_i)} f(t) \\ t \in (x_{i-1}, x_i) \end{cases}$$

$$L(P, f, d) = \sum_{i=1}^n m_i(f) \Delta d_i$$

y también:

- $\int_a^b f d\alpha = \inf \{ U(P, f, d) : P \in P[a, b] \}$
- $\int_a^b f d\alpha = \sup \{ L(P, f, d) : P \in P[a, b] \}$
- ④ Si $\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha =: \int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$, (*)
- la cual es la integral de Riemann-Stieltjes de f con respecto a d sobre $[a, b]$.
- ⑤ Si (*) existe, entonces f es integrable con respecto a d (en el sentido de Riemann), lo cual se denota $f \in R(d)$.
- ⑥ Si $d(x) = x \Rightarrow$ la integral de R-S es la integ

$$\Gamma \int_0^1 (x^3 + 1) dx^2 = \int_0^1 (x^3 + 1) (2x) dx = \dots$$

Teorema: Sea d monótona creciente en $[a, b]$. Suponga que $f_n \in R(d)$, $n = 1, 2, \dots$ y suponga que $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre $[a, b]$. Entonces,

① $f \in R(d)$ sobre $[a, b]$ y:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n d\alpha = \int_a^b f d\alpha. \quad \textcircled{2}$$

Dem: Sea $\varepsilon_n = \sup \{ |f_n(x) - f(x)| : x \in [a, b] \}$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$$

$$\Rightarrow -\varepsilon_n <$$

$$\Rightarrow f_n(x) - \varepsilon_n \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon_n, \quad a \leq x \leq b$$

$$\Rightarrow \int_a^b [f_n(x) - \varepsilon_n] d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b (f_n(x) + \varepsilon_n) d\alpha$$

$$\Rightarrow \int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b (f_n + \varepsilon_n) d\alpha$$

$$- \int_a^b f d\alpha \leq - \int_a^b (f_n - \varepsilon_n) d\alpha \quad \{ +$$

$$\Rightarrow \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b f_n d\alpha + \int_a^b \varepsilon_n d\alpha - \int_a^b f_n d\alpha + \int_a^b \varepsilon_n d\alpha$$

$$\Rightarrow \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f d\alpha \leq 2\varepsilon_n \int_a^b d\alpha. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f d\alpha \leq 2\epsilon_n [\alpha(b) - \alpha(a)]$$

Cuando $n \rightarrow \infty \Rightarrow \epsilon_n \rightarrow 0 \Rightarrow \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f d\alpha \rightarrow 0$

$\Rightarrow f \in R(\alpha)$.

Por otra parte:

$$\begin{aligned} & \int_a^b [f_n - \epsilon_n] d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b [f_n + \epsilon_n] d\alpha \\ & \Rightarrow \int_a^b f_n d\alpha - \epsilon_n \int_a^b d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b f_n d\alpha + \epsilon_n \int_a^b d\alpha \\ & \Rightarrow -\epsilon_n [\alpha(b) - \alpha(a)] \leq \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f_n d\alpha \leq \epsilon_n [\alpha(b) - \alpha(a)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \left| \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f_n d\alpha \right| \leq \epsilon_n [\alpha(b) - \alpha(a)] \\ & \Rightarrow \left| \int_a^b [f_n - f] d\alpha \right| \leq \epsilon_n [\alpha(b) - \alpha(a)] \\ & \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n d\alpha = \int_a^b f d\alpha. \quad \square \end{aligned}$$

Corolario: Si $f_n \in R(\alpha)$ sobre $[a, b]$ y si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, uniformemente sobre $[a, b]$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \square$$

Norma del supremo

Def: Sea X un esp. métrico y sea $C(X)$ el conjunto de todas las funciones continuas y acotadas sobre X .

Para $f \in C(X)$ se define:

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

que se denomina la norma del supremo de f sobre X .

Nota: ① Como f es acotada $\Rightarrow |f(x)| < \infty$, $\forall x \in X$.
Además, $\|f\| = 0$ si $f(x) \equiv 0$

$$\begin{aligned} ② \text{ Si } h = f + g \Rightarrow |h(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \\ \Rightarrow \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$

13. Sesión 16

13.1. Norma del supremo

Definición 16. Sea X un espacio métrico y sea $C(x)$ el conjunto de todas las funciones continuas y acotadas sobre X . Para $f \in C(x)$ se define:

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

que se denominan la norma del supremo de f sobre X .

1. Como f es acotada $\implies |f(x)| < \infty, \forall x \in X$. Además, $\|f\| = 0 \iff f(x) = 0$.
2. Si $h = f + g \implies |h(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \implies \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.
3. Si $f, g \in C(X) \implies$ se define $d(f, g) := \|f - g\|$.
4. Lenguaje: En algunas casos a los cerrados de $C(x)$ se les llama uniformemente cerrados y a la cerradura de $A \subset C(X)$ se le llama cerradura uniforme.

13.1.1. Convergencia

Sea $(x, +, \cdot, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial.

Definición 17. Una función $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ es una norma sobre X , si:

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X.$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
3. $\|x\| = 0 \iff x = 0.$

Al par $(x, \|\cdot\|)$ se le dice espacio normado.

Definición 18. Una sucesión $(x_n) \subset X$ converge a $x \in X$, si $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

Definición 19. Una sucesión $(x_n) \subset X$ es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n, m \geq N \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Definición 20. Sea

1. Se dice que X es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente.
2. Un espacio vectorial normado y completo es un espacio de Banach.
3. Un espacio vectorial de Banach tal que la norma se obtiene un producto interno ($\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$), es un espacio de Hilbert.

Definición 21. Sea f una función definida en $A \subset \mathbb{R}$, la norma del supremo (norma uniforme) es el número sobre $\overline{\mathbb{R}}$, $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in A\}$

NOTA. Una sucesión (x_n) de elementos en $\overline{\mathbb{R}}$ converge a $x \in \mathbb{R}$ si $\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni x_n$ es finito si $n \geq N$ y si la sucesión de reales (x_n) converge a x .

Proposición 20. Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en $A \subseteq \mathbb{R}$ y f una función definida en A . Los enunciados siguientes son equivalentes:

1. (f_n) converge uniformemente.
2. La sucesión $(\|f_n - f\|_\infty)$ sobre $\overline{\mathbb{R}}$ converge a 0.

Teorema 32. (*Criterio de Cauchy uniforme*) Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas sobre un conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Los enunciados siguientes son equivalentes:

1. (f_n) converge uniformemente a una función $f(x)$.
2. Dado $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $m, n \geq N$, entonces $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in A$.
3. Dado $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $m, n \geq N \implies \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.

Teorema 33. Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas sobre $A \subset \mathbb{R}$ que converge uniformemente a la función f definida sobre A . Si cada f_n continua en $c \in A \implies f$ es continua en $c \in A$.

Teorema 34. (*Dini*) Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado I . Suponga (f_n) converge puntualmente a una función continua f y que (f_n) es monótona. Entonces, (f_n) converge uniformemente a f .

$$\overbrace{f_n}^{\text{continua}} \xrightarrow{\text{puntual sobre compacto}} \overbrace{f}^{\text{continua}} + (\textcolor{red}{f_n} \text{ es monótona}) \implies f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$$

- ③ Si $f, g \in C(X) \Rightarrow$ se define $d(f, g) := \|f - g\|$.
 ④ Lenguajes: En algunos casos a los cerrados de $C(X)$ se les llama uniformemente cerrados y a la cerradura de $A \subset C(X)$ se le llaman cerraduras uniformes.

Teorema: $(C(X), d.)$ es un espacio métrico completo.

Norma del Supremo y Convergencia

Sea $(X, +, \cdot, \mathbb{R})$ un esp. vectorial.

Recordatorios:

- ① Def.: Una función $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ es una norma sobre X , si:
 i) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$
 ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
 iii) $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

Al par $(X, \|\cdot\|)$ se le dice espacio normado.

- ② Def.: Una sucesión $(x_n) \subset X$ converge a $x \in X$, si $\|x_n - x\| \rightarrow 0$

Def.: Una sucesión $(x_n) \subset X$ es de Cauchy si $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \text{ s.t. } n, m \geq N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon$.

- Def.: Se dice que X es completo si toda sucesión Cauchy es convergente.
 ② Un espacio vectorial normado y completo es un espacio de Banach.
 ③ Un espacio vectorial de Banach \exists la norma se obtiene de un producto interno ($\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$) en un espacio de Hilbert.

Def.: Sea f una función definida en $A \subset \mathbb{R}$.

La norma del supremo (norma uniforme)

en el número, sobre $\bar{\mathbb{R}}$, $\|f\|_\infty := \sup \{ |f(x)| : x \in A \}$

Nota: Una sucesión (x_n) de elementos en $\bar{\mathbb{R}}$ converge a $x \in \mathbb{R}$ si $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ s.t. x_n es finito si $n \geq N$ y si la sucesión de reales (x_n) converge a x .

1, 00, 2, 00, 3, 00, ..., \dots \square \square \square

Prop.: Sean (f_n) una sucesión de funciones definidas en $A \subset \mathbb{R}$ y f una función definida en A . Los enunciados siguientes son equivalentes:

(1) (f_n) converge uniformemente.

(2) La sucesión $(\|f_n - f\|_\infty)$ sobre $\bar{\mathbb{R}}$ converge a 0.

Dem: (1) \Rightarrow (2) Como (f_n) converge uniformemente a $f \Rightarrow$ Dado $\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+$ s.t. si $n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in A$. Por otro lado, si $n \geq N$, entonces:

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_\infty &= \sup \{ |(f_n - f)(x)| : x \in A \} \\ &= \sup \{ |f_n(x) - f(x)| : x \in A \} < \epsilon \end{aligned}$$

Por la arbitrariedad de ϵ , se tiene que $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

(2) \Rightarrow (1) Supóngase que $(\|f_n - f\|_\infty)$ converge a 0. \Rightarrow

Dado $\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+$ s.t. si $n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty < \epsilon$.

Notese que, entonces, si $n \geq N$, $\forall x \in A$, se tiene que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup \{ |f_n(x) - f(x)| : x \in A \} =$$

$$= \sup \{ |(f_n - f)(x)| : x \in A \} = \|f_n - f\|_\infty < \epsilon$$

Ej.: Sea $f_n(x) = \frac{x}{n}, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f_n$ converge puntualmente a la función $f(x) = 0$. Entonces,
 $\|f_n - f\|_\infty = \sup \{ |\frac{x}{n} - 0| : x \in \mathbb{R} \} = \sup \{ \frac{|x|}{n} : x \in \mathbb{R} \} = \infty$
 \Rightarrow como $(\|f_n - f\|_\infty)$ no converge a cero \Rightarrow la convergencia no es uniforme.

Ej.: Sea $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1]$. El límite puntual de esta sucesión $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow (f_n - f)(x) = f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \leq x < 1 \\ x^n - 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty = \sup \{ |(f_n - f)(x)| : 0 \leq x \leq 1 \}$$

$$= \sup \{ x^n : 0 \leq x \leq 1 \} = 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

\Rightarrow La convergencia no es uniforme.

Ej. Sea $f_n(x) = \frac{\sin(n\pi x)}{\sqrt{n}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Esta sucesión converge puntualmente a $f(x) = 0$. Entonces:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup \left\{ \left| \frac{\sin(n\pi x)}{\sqrt{n}} - 0 \right| : x \in \mathbb{R} \right\} = \sup \left\{ \frac{|\sin(n\pi x)|}{\sqrt{n}} : x \in \mathbb{R} \right\} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

\Rightarrow La convergencia es uniforme.

Teorema (Criterio de Cauchy uniforme)

Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas sobre un conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Los enunciados

siguientes son equivalentes:

- (i) (f_n) converge uniformemente a una función $f(x)$
- (ii) Dado $\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni \forall m, n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon, \forall x \in A$.
- (iii) Dado $\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni \forall m, n \geq N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$.

Dem: (i) \Rightarrow (iii) Supóngase que (f_n) converge uniformemente a $f \Rightarrow$ Dado $\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni \forall n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall x \in A$. Entonces, $m, n \geq N$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(ii) \Rightarrow (iii): Dado $\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni \forall m, n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon, \forall x \in A$.

$$\Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty = \sup \left\{ |(f_n - f_m)(x)| : x \in A \right\} = \sup \left\{ |f_n(x) - f_m(x)| : x \in A \right\} < \epsilon.$$

(iii) \Rightarrow (ii): Dado $\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni \forall n, m \geq N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$.

Entonces, $\forall x \in A$, se tiene que:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sup \left\{ |f_m(x) - f_n(x)| : x \in A \right\} = \sup \left\{ |(f_m - f_n)(x)| : x \in A \right\} = \|f_m - f_n\|_\infty < \epsilon, \forall n, m \geq N$$

$\Rightarrow (f_n(x))$ es de Cauchy.

\Rightarrow definimos $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $\forall x \in A$.

Si $n \rightarrow \infty$ en (**), entonces

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall n > N, \forall x \in A$$

\Rightarrow la convergencia de (f_n) a f es uniforme. \square

Teorema: Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas sobre $A \subset \mathbb{R}$ que converge uniformemente a la función f definida sobre A . Si cada f_n es continua en $c \in A \Rightarrow f$ es continua en $c \in A$.

Dem: Dado $\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni \forall n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

$$\forall x \in A. \text{ Entonces: } |f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(c)| + |f_N(c) - f(c)|$$

$$\leq \frac{\epsilon}{3} + |f_N(x) - f_N(c)| + \frac{\epsilon}{3}.$$

Como f_N es continua en $c \in A \Rightarrow \exists \delta > 0 \ni |x - c| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(c)| < \frac{\epsilon}{3}$.

Entonces, dado $\epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon \Rightarrow f$ es continua en $c \in A$. \square

Nota: El teorema anterior no puede parafasear así:

$$\lim_{x \rightarrow c} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow c} f_n(x).$$

¿ Tiene el Teorema anterior un converse?

Teorema (Dini): Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado I . Supongamos (f_n) converge puntualmente a una función continua f y que (f_n) es monótona. Entonces, (f_n) converge uniformemente a f .

continua \uparrow \Rightarrow continua

$$f_n \rightarrow f + (f_n \text{ es monótona}) \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$$

puntual sobre compacto

14. Sesión 17

Teorema 35. Suponga que $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada sobre A , $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, y que $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre A . Entonces, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada sobre A .

Teorema 36. (Weierstrass) Suponga que (f_n) es una sucesión de funciones diferenciables,

$$f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \ni$$

$f_n \rightarrow f$ puntualmente y $f'_n \rightarrow g$ uniformemente, donde f y $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, f es diferenciable sobre (a, b) y $f' = g$.

Definición 22. Sea (f_n) una sucesión de funciones en $A \subseteq \mathbb{R}$.

1. Se dice que (f_n) es creciente, si $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ y $\forall x \in A$.
2. Se dice que (f_n) es decreciente si $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ y $\forall x \in A$.
3. Si (f_n) es creciente o decreciente, entonces (f_n) es monótona.

AVR 2 : 6/9/2021

Teorema: Supongamos que $f_n: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada sobre A , $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, y que $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre A . Entonces, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada sobre A .

Dem: Sea $\epsilon = 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni \forall n \geq N$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < 1$, $\forall x \in A$. (conv. uniforme). Como (f_n) es sucesión de funciones acotadas $\Rightarrow (f_n)$ es sucesión de funciones acotadas \Rightarrow si $n \geq N \Rightarrow \exists M > 0 \ni |f_n(x)| \leq M$, $\forall x \in A$

$$\Rightarrow |f(x)| - |f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| < 1$$

$$\Rightarrow |f(x)| < 1 + |f_n(x)| \leq 1 + M, \forall x \in A$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ está acotada. } \square$$

Ej.: Considera la sucesión de funciones (f_n) definidas:

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+nx^2} = 0$ (límite puntual, independiente del valor de x ; i.e. la convergencia es uniforme). Entonces:

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} 0$$

En efecto: Dilemos y probemos que $|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| < \epsilon$, $\forall n \geq N \in \mathbb{Z}^+$

$$\Leftrightarrow |f_n(x)| \text{ tiene cota.}$$

Forma 1: $|f_n(x)| = \left| \frac{x}{1+nx^2} \right| = \frac{|x|}{1+nx^2} =$

$$= \frac{|x|}{1+(\sqrt{n}|x|)^2} = \frac{\sqrt{n}|x|}{\sqrt{n}[1+(\sqrt{n}|x|)^2]} = \frac{\sqrt{n}|x|}{\sqrt{n}[1+(t^2)]}$$

(Sea $t = \sqrt{n}|x| > 0$)

$$(1-t^2) \geq 0$$

$$1-2t+t^2 \geq 0$$

$$2t \leq 1+t^2, t \geq 0$$

$$\Rightarrow 2 \leq \frac{1+t^2}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{t}{1+t^2}, t \geq 0$$

$(1-t^2) \geq 0$	$1-2t+t^2 \geq 0$	$2t \leq 1+t^2, t \geq 0$	$\Rightarrow 2 \leq \frac{1+t^2}{t}$	$\Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{t}{1+t^2}, t \geq 0$
------------------	-------------------	---------------------------	--------------------------------------	--

$$\Rightarrow \text{Dado } \epsilon > 0 \ni N = \frac{1}{4\epsilon^2} \Rightarrow$$

Si $n \geq N$, entonces,

$$|f_n(x) - 0| < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \epsilon, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow f_n \rightarrow 0 \text{ uniformemente}$$

Forma 2: Sea $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2} \Rightarrow$ entonces

$$f'_n(x) = \frac{1+nx^2 - x(2nx)}{(1+nx^2)^2} = \frac{1+nx^2 - 2nx^2}{(1+nx^2)^2} =$$

$$= \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2} = 0 \Rightarrow 1-nx^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{n}} = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$1-nx^2$	-	+	-
$(1+nx^2)^2$	+	+	+
$f'(x)$	-	+	-

$$\min \quad \max$$

$$\Rightarrow f_n(x) \text{ tiene máximos en } \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \dots$$

$\Rightarrow f_n \rightarrow 0$, uniformemente.

Como cada f_n es diferenciable, entonces:

$$f'_n(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$$

Si $x=0 \Rightarrow f'_n \rightarrow 1$ \Rightarrow la sucesión

Si $x \neq 0 \Rightarrow f'_n \rightarrow 0$

(f'_n) converge a $g(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \neq 0$

\Rightarrow El límite de la sucesión de derivadas no es igual a la derivada del límite.

Teorema (Weierstrass): Supongamos que (f_n) es una sucesión de funciones diferenciables,

$$f_n: (a,b) \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow$$

$f_n \rightarrow f$ puntualmente y $f'_n \rightarrow g$ uniformemente, donde f y $g: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, f es diferenciable sobre (a,b) y $f' = g$.

Dem: Sean $c \in (a,b)$ y $\epsilon > 0$. A probab. $f'(c) = g(c)$

Nótese:

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = g(c)$$

$$\left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - g(c) \right|$$

$$= \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} + \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} - f'_n(c) + f'_n(c) - g(c) \right|$$

$$\leq \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \right| + \left| \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} - f'_n(c) \right| + |f'_n(c) - g(c)|$$

(••)

- (•) Como $f_n' \rightarrow g$ uniformemente $\Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{Z}^+ \ni$
si $n \geq N_1 \Rightarrow |f'_n(c) - g(c)| < \frac{\epsilon}{3}$
- (••) Sean f_m y f_n diferenciables en (a, b)
 $\Rightarrow f_m - f_n$ es diferenciable en (a, b)

$\Rightarrow f_m - f_n$ es diferenciable en cualquier intervalo que contenga a c y a x . Por el Teorema del valor medio,

$\exists \xi$ entre c y $x \ni$

$$\frac{(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(c)}{x - c} = (f_m - f_n)'(\xi)$$

$$\Rightarrow \frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} = f'_m(\xi) - f'_n(\xi)$$

Como $\cdot(f'_n)$ converge uniformemente \Rightarrow converge uniformemente según Cauchy $\Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{Z}^+ \ni$
si $m, n \geq N_2 \Rightarrow |f'_m(\xi) - f'_n(\xi)| < \frac{\epsilon}{3}$, $\forall \xi \in (a, b)$.

\Rightarrow si $m \rightarrow \infty$, se obtiene:

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f(c)}{x - c} \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

(••) Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$ y sea $n \geq N \Rightarrow$ la diferenciabilidad de f_n implica que: $\exists \delta > 0 \ni |x - c| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'_n(c) \right| < \frac{\epsilon}{3}$.

$\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - g(c) \right| < \epsilon$, si $|x - c| < \delta \Rightarrow f$ es diferenciable en c y $f'(c) = g(c)$. \square

Def: Sea (f_n) una sucesión de funciones en $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Se dice que (f_n) es creciente, si $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ y $\forall x \in A$.
- se dice que (f_n) es decreciente, si $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ y $\forall x \in A$.
- Si (f_n) es creciente o decreciente, entonces (f_n) es monótona.

Teorema (Dini) Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas sobre un compacto $I \subseteq \mathbb{R}$. Si se pone que $f_n \rightarrow f$ puntualmente y (f_n) es monótona. Entonces, $f_n \rightarrow f$ uniformemente.

Dem: Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ definimos:

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$$

\Rightarrow Notar que: •) $g_n \rightarrow 0$ puntualmente
•) g_n es decreciente

A probar: $g_n \rightarrow 0$ uniformemente.

Como g_n es decreciente, se tiene que:

$$\begin{aligned} \|g_{n+1}\|_\infty &= \sup \{ |g_{n+1}(x)| : x \in I \} \\ &= \sup \{ g_{n+1}(x) : x \in I \} \\ &\leq \sup \{ g_n(x) : x \in I \} = \|g_n\|_\infty \end{aligned}$$

$$\bullet \|g_n\|_\infty = \sup_{\substack{\uparrow \\ \text{Punto}}} \{ g_n(x) : x \in I \}, \quad x \in I$$

$$= \sup \{ |g_n(x)| : x \in I \} = \sup_{\substack{\downarrow \\ \text{Punto}}} \{ g_n(x) : x \in I \}$$

$$\boxed{\frac{\limsup}{\liminf}}$$

15. Sesión 18

Definición 23. Sea (X, τ) un espacio métrico sea $p \in X$. Una vecindad de p es cualquier conjunto $U \ni p$

1. $p \in U$
2. $\exists V \in \tau \ni V \subseteq U \text{ y } p \in V$.

Definición 24. Sea (X, τ) un espacio topológico una sucesión sobre X es cualquier función $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow X$.

Definición 25. Se dice que la sucesión (x_n) en el espacio topológico (X, τ) converge a $p \in X$, si cada vecindad de p contiene a la cola de la sucesión.

Definición 26. Un conjunto D es dirigido si existe una relación binaria \leqslant sobre $D \ni$

1. $m \leqslant m, \forall m \in D$.
2. Si $m \leqslant n$ y $n \leqslant r \implies m \leqslant r$.
3. Si $m, n \in D \implies \exists r \in D \ni m \leqslant r$ y $n \leqslant r$.

Entonces, (D, \leqslant) es el conjunto dirigido y a \leqslant se le llama dirección.

Definición 27. Una red es un conjunto X es una función $f : D \rightarrow X$, donde D es un conjunto dirigido.

1. Si $D = \mathbb{Z}^+$ \implies la red es una sucesión.
2. Notación $(X_m)_{m \in D}$.
3. Red es también conocida como sucesión de Moore-Smith.

Teo (Dini) (f_n) continuas sobre un compacto $I \subseteq \mathbb{R}$
 $f_n \rightarrow f$ (puntualmente), f continua
 (f_n) en monótona \rightarrow creciente
 $\Rightarrow f_n \text{ unif. } f$

Dem: Sea $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

* $\{g_n\}$ es decreciente.
* $f_n \rightarrow f$ puntualmente $\Rightarrow g_n \rightarrow 0$
A probar: $g_n \xrightarrow{\text{unif.}} 0 \Leftrightarrow \|g_n\|_1 \rightarrow 0$ (^{indep.} de x)

Como (g_n) es decreciente \Rightarrow

$$\|g_n\|_\infty = \sup\{g_n(x) : x \in I\} \leq \sup\{g_n(x) : x \in I\} = \|g_n\|_1$$

$\Rightarrow \|g_n\|_\infty$ es decreciente.

Por otro lado, las g_n son continuas \Rightarrow por el Teorema de Weierstrass, $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \exists x_n \in I$ s.t.

$$g_n(x_n) = \max\{g_n(x) : x \in I\} = \sup\{g_n(x) : x \in I\} = \|g_n\|_\infty$$

Además, note que (x_n) está acotada (ya que $x_n \in I$) \Rightarrow , por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, que existe una subsecuencia (x_{n_k}) que converge a $c \in I$.

i) $g_n \rightarrow 0$ puntualmente $\exists N_1 \in \mathbb{Z}^+ \exists g_{N_1}(c) < \frac{\epsilon}{2}$.

ii) Además g_{N_1} es continua en c ; i.e. $\exists \delta > 0$ s.t. $x \in I \Rightarrow |x - c| < \delta \Rightarrow |g_{N_1}(x) - g_{N_1}(c)| < \frac{\epsilon}{2}$

iii) Como (x_{n_k}) converge a $c \Rightarrow \exists N_2 > N_1$ s.t. $|x_{n_{N_2}} - c| < \delta$ y entonces:

$$|g_{N_1}(x_{n_{N_2}}) - g_{N_1}(c)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $N_0 = i_{N_2} \geq N_2 \geq N_1 \Rightarrow$ para $n \geq N_0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|g_n\|_\infty &\leq \|g_{N_0}\|_\infty = g_{N_0}(x_{N_0}) = g_{i_{N_2}}(x_{i_{N_2}}) \leq \\ &\leq g_{N_0}(x_{i_{N_2}}) \leq |g_{N_0}(x_{i_{N_2}}) - g_{N_0}(c)| + |g_{N_0}(c)| \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \right| = \epsilon \Rightarrow \|g_n\| < \epsilon \Rightarrow \|g_n\|_\infty \rightarrow 0 \Rightarrow g_n \xrightarrow{\text{unif.}} 0$$

Pregunta: ¿Son las sucesiones buenas detectores de propiedades analíticas? Si, en \mathbb{R} o esp. métricos

. si: (f_n) continuas y $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f \Rightarrow f$ es continua

Si continuidad de f + otras $\Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$

. Funciones integrables

. Funciones diferenciables

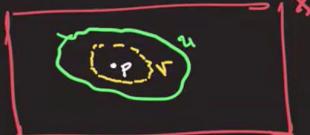
. En qué tipo de conjuntos se puede hablar de convergencia de sucesiones?

- Métricos (agotado)
- Topológicos (X, τ)
colección de abiertos.

Def: Sea (X, τ) un esp. top. y sea $p \in X$. Una vecindad de p es cualquier conjunto U s.t.

ii) $p \in U$

iii) $\exists V \in \tau \Rightarrow V \subseteq U \wedge p \in V$



Def: Sea (X, τ) un esp. top. Una sucesión sobre X es una función $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow X$.

Def: Se dice que la sucesión (x_n) en el esp. top. (X, τ) converge a $p \in X$, si:

Cada vecindad de p contiene a la cola de la sucesión.



$\forall U$, vecindad de $p \exists N \in \mathbb{Z}^+ \exists x_n \in U, \forall n \geq N$.

• Las sucesiones no son buenas detectores de propiedades de las funciones y de los espacios.

- No son buenas detectores de:

- funciones continuas

- puntos de acumulación.

\Rightarrow se "generalizan" las sucesiones

Def: Un conjunto D es dirigido si existe una relación binaria \leq sobre D

- $m \in M, \forall m \in D$.
- Si $m \leq n$ y $n \leq r \Rightarrow m \leq r$ } relación de quasi orden.
- Si $m, n \in D \Rightarrow \exists r \in D \ni m \leq r$ y $n \leq r$

Entonces, (D, \leq) es el conjunto dirigido y a \leq se le llama dirección.

Ej.: ① (\mathbb{Z}^+, \leq) es conjunto dirigido
 ② (\mathbb{R}, \leq) es _____.
 ③ Sea (X, τ) un esp. top y sea $x \in X$

Sea D la colección de todas las vecindades de x en X , y definamos la relación \leq en D así:

$U \leq V$ si $V \subseteq U$, $U, V \in D$.

Notese que:

- $U \subseteq U \Rightarrow U \leq U$, $\forall U \in D$
- Si $U \leq V$ y $V \leq H$, entonces $V \subseteq U$ y $H \subseteq V \Rightarrow H \subseteq U \Rightarrow U \leq H$
- Si $U, V \in D \Rightarrow U \cap V \subseteq U$ y $U \cap V \subseteq V$ y además, como $x \in U$ y $x \in V \Rightarrow x \in U \cap V \in D$
 $\Rightarrow U \leq U \cap V$ y $V \leq U \cap V$

$\Rightarrow (D, \leq)$ es un conjunto dirigido.

Def: Una red en un conjunto X es una función $f: D \rightarrow X$, donde D es un conjunto dirigido

Nota: ① Si $D = \mathbb{Z}^+$ → La red es una sucesión.

- Notación $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- Red es también conocida como sucesión de Moore-Smith.



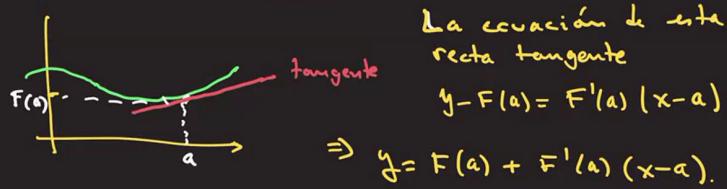
16. Sesión 19

16.0.1. Diferenciacion en \mathbb{R}^n

Sea $F : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \implies F$ es diferenciable en $x = a \in X$ significa que la gráfica de F tiene un recta tangente en $(a, F(a))$,

Diferenciación en \mathbb{R}^n

Nota: Sea $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ⇒ F es diferenciable en $x=a \in \mathbb{R}$ significa que la gráfica de F tiene una recta tangente en $(a, F(a))$.



Hagamos $H(x) = F(a) + F'(a)(x - a)$. Notére que:

$$i) H(a) = F(a)$$

$$ii) H'(a) = F'(a)$$

En efecto:

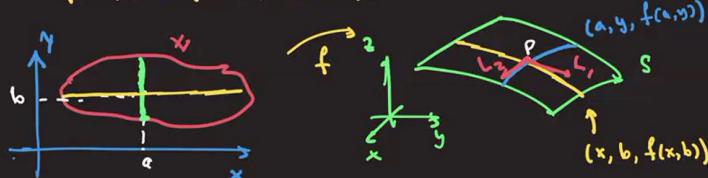
- i) La recta $y = H(x)$ pasa por $F(a)$
- ii) La pendiente de $H(x)$ en $x=a$ es igual a $F'(a)$.

Interpretación geométrica:

F es diferenciable en a si $H(x)$ approxima bien a F en una vecindad de a

i.e. si existe $F'(a)$.

② Sea $f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, X es un abierto.
(a la gráfica de f se le llama superficie)
¿Cuál es el plano tangente a $y=f(x,y)$ en el punto $P(a,b, f(a,b))$.



Suponiendo la existencia de $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$,

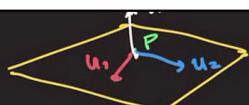
Las ecuaciones de los vectores tangentes L_1 y L_2 a S en el punto P , están dadas por:

$$L_1(t) = (a, b, f(a, b)) + t (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b))$$

$$L_2(t) = (a, b, f(a, b)) + t (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b))$$

⇒ vectores paralelos a estas tangentes son, respectivamente:

$$\begin{aligned} u_1 &= \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \hat{v} \\ u_2 &= \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \hat{k} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{vectores tangentes} \\ \text{a la superficie} \\ \text{en } (a, b, f(a, b)) \end{array} \right\}$$



Un vector normal al plano tangente a la superficie en $(a, b, f(a, b))$ es:

$$n = u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \hat{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \hat{j} + \hat{k}$$

⇒ El plano tangente está dado por la ecuación:

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b) + (z - f(a, b)) = 0$$

$$\Rightarrow z = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

(plano tangente a la superficie en P).

$$\text{Hagamos } h(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

Notére: $\partial h(a, b) = f(a, b)$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial h}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) ; \quad \frac{\partial h}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

Problema:

- (1) En funciones de una variable la existencia de la derivada y de la recta tangente coinciden.
¿Sucede lo mismo con superficies (i.e. entre)
- (2) La existencia de derivadas parciales y la existencia del plano tangente?

ND: Considera $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ \Rightarrow

$$f(x,y) = |x| - |y|$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$\Rightarrow z = 0$, el cual no "aproxima bien" a la superficie cerca de $(0,0)$.

¿Qué significa "aproxima bien"?

- En funciones de una variable:

$$\Rightarrow F'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x-a}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{F(x) - F(a)}{x-a} \right] - F'(a) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{F(x) - F(a)}{x-a} - F'(a) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{F(x) - (F(a) + F'(a)(x-a))}{x-a} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{F(x) - H(x)}{x-a} \right] = 0 \quad \begin{matrix} H(x) \rightarrow F(x) \\ \text{más rápido} \\ \text{que } x \rightarrow a. \end{matrix}$$

Def: Sea X un abierto de \mathbb{R}^2 y sea

$$f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Dicimos que f es diferenciable en $(a,b) \in X$ si existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ y si la función

$$z = h(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

es una buena aproximación lineal a f cerca de (a,b) , i.e.

$$\text{ni } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y) - h(x,y)}{\|(x,y) - (a,b)\|} = 0$$

$$h(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-b) + f(a,b)$$

$$= \nabla f \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + f(a,b)$$



$$F'(a) \cdot (x-a) + F(a)$$

17. Sesión 20

$$\text{ni } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y) - h(x,y)}{\|(x,y) - (a,b)\|} = 0$$

Ej: Retornando a la función:

$$f(x,y) = |x| - |y|$$

Recordemos que $z=0$ es el plano tangente a $f(x,y)$ en $(0,0)$

Notemos que:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{f(x,y) - h(x,y)}{\|(x,y) - (0,0)\|} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{|x| - |x| - 0}{|x|} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{f(x,y) - h(x,y)}{\|(x,y) - (0,0)\|} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{-2|x|}{|x|}$$

\Rightarrow Como el límite no existe \Rightarrow La aproximación lineal del plano tangente no cumple el requerimiento $\Rightarrow f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$

Def: Sea X un abierto de \mathbb{R}^n y $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar. Sea $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in X$. Entonces, f es diferenciable en a si existen todos los parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i=1, \dots, n$, y

$$h(x) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x-a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x-a_n)$$

es una buena aproximación

\Rightarrow Como el límite no existe \Rightarrow La aproximación lineal del plano tangente no cumple el requerimiento $\Rightarrow f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$

Def: Sea X un abierto de \mathbb{R}^n y $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar. Sea $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in X$. Entonces, f es diferenciable en a si existen todos los parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i=1, \dots, n$, y

$$h(x) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1-a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n-a_n)$$

es una buena aproximación lineal de f

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - h(x)}{\|x - a\|} = 0$$

Nota: Recordemos que, si $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, entonces el gradiente de f es el vector:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

$$\Leftrightarrow \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

Def (*): Sea $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, X abierto y $a \in X$. La derivada de f en a , denotada $Df(a)$, es la matriz fila cuyas entradas son las componentes de $\nabla f(a)$.

$$Df(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right]$$

Nota: Considere $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. $a = (a_1, \dots, a_n)$

$$\Rightarrow x - a = \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

$$\Rightarrow \nabla f(a) \cdot (x - a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n)$$

$$\Rightarrow h(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a)$$

\Rightarrow Decimos que es $h(x)$ es buena aproximación lineal de f en una vecindad de a ,

$$\text{Av: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - [f(a) + \nabla f(a) \cdot (x-a)]}{\|x-a\|} = 0$$

Note que: $f(a) + \nabla f(a) \cdot (x-a)$ es equivalente a la expresión:

$$f(a) + Df(a) \cdot (x-a)$$

vector
matrices

- ② La gráfica de la función $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una hipersuperficie en \mathbb{R}^{n+1} , ya que:
- $$= f(x_1, \dots, x_n)$$

③ Si f es diferenciable en a , entonces la hipersuperficie determinada por la gráfica de f tiene un hiperplano tangente en $(a, f(a))$. Este hiperplano se obtiene:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= h(x_1, \dots, x_n) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x-a) \\ &= f(a) + Df(a) \cdot (x-a) \end{aligned}$$

vector
vector
matriz
matriz

Generalizando: Sean X un abierto de \mathbb{R}^n y una función $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

- (a) Construyamos la matriz de derivadas parciales de f

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \Rightarrow Df(x_1, \dots, x_n) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \frac{\partial f_m}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Def.: Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, y sea $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es diferenciable en a si $a \in X$. Se dice que f es diferenciable en a si $Df(a)$ existe y es la función $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida por:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(a) + Df(a) \cdot (x-a) \\ \text{es una buena aproximación lineal a } f \text{ cerca de } a. \text{ Es decir, se debe cumplir que:} \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - h(x)\|}{\|x-a\|} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - [f(a) + Df(a) \cdot (x-a)]\|}{\|x-a\|} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Teorema (A): Si $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $a \in X \Rightarrow f$ es continua en a .

Teorema (B): Si $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es tal que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i=1, \dots, m$ y $j=1, \dots, n$, existen y son continuas en una vecindad de $a \in X \Rightarrow f$ es diferenciable en a .

Teorema (C): Una función $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $a \in X$ si cada función componente $f_i: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1, \dots, m$, es diferenciable en a .

$$\begin{aligned} \text{Ej.} \quad \text{Sea } f: \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \exists \\ f(x,y,z) &= \left(\frac{3}{x^2+y^2+z^2}, \frac{xz}{xy}, \frac{y}{xz} \right) \\ \Rightarrow Df(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{-6x}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-6y}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-6z}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notar que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i=1,2,3$, $j=1,2,3$, existen y son continuas en $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \Rightarrow f(x,y,z)$ es diferenciable en $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$.

18. Sesión 21

No tiene que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i=1,2,3$, $j=1,2,3$, existan y sean continuas en $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \Rightarrow f(x,y,z)$ es diferenciable en $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$.

27/2/2021

Demo (A):

Lema: Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Si $y = Bx$ (i.e. $y \in \mathbb{R}^m$), entonces $\|y\| \leq K \|x\|$, donde $K = \left(\sum_{i,j} b_{ij}^2 \right)^{1/2}$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n \\ \vdots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \dots + b_{mn}x_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} b_{11} \cdot x \\ b_{21} \cdot x \\ \vdots \\ b_{m1} \cdot x \end{pmatrix} \stackrel{e}{\rightarrow}, \quad b_{ij}: \text{la } i\text{\'esima fila de } B. \\
 &\Rightarrow \text{Como } y = Bx \Rightarrow \|y\| = \|Bx\| = \\
 &\leq \left[(b_{11} \cdot x)^2 + (b_{21} \cdot x)^2 + \dots + (b_{m1} \cdot x)^2 \right]^{1/2} \\
 &\leq \left[\|b_{11}\|^2 \|x\|^2 + \|b_{21}\|^2 \|x\|^2 + \dots + \|b_{m1}\|^2 \|x\|^2 \right]^{1/2} \\
 &\stackrel{C-B-S}{=} \left[\|b_{11}\|^2 + \|b_{21}\|^2 + \dots + \|b_{m1}\|^2 \right]^{1/2} \cdot \|x\|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{No tiene que } \|b_i\|^2 = b_{1i}^2 + b_{2i}^2 + \dots + b_{ni}^2 \\
 &= \sum_{j=1}^n b_{ij}^2, \quad 1 \leq i \leq m \\
 \Rightarrow &\|b_1\|^2 + \|b_2\|^2 + \dots + \|b_m\|^2 = \sum_{i=1}^m \|b_i\|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij}^2 \\
 &= \sum_{i,j} b_{ij}^2 \\
 \Rightarrow &\text{Sea } K = \left[\sum_{i,j} b_{ij}^2 \right]^{1/2} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \|y\| \leq K \|x\|. \quad \square \text{ Lema.}
 \end{aligned}$$

Demo (AS) A probar: $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en $a \Leftrightarrow \|f(x) - f(a)\| \rightarrow 0$, cuando $\|x\| \rightarrow \|a\|$

Como f es diferenciable en a , entonces:

$$\begin{aligned}
 &\|f(x) - f(a)\| = \|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a) + Df(a)(x-a)\| \\
 &= \|(f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)) + Df(a)(x-a)\| \\
 &\leq \|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\| + \|Df(a)(x-a)\| \\
 &\text{Si } \|x-a\| \text{ es pequeño, entonces} \quad \text{matriz-vector.} \\
 &\|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\| \leq \|x-a\| \quad (\text{ver siguiente p\'ag.})
 \end{aligned}$$

Entonces, si $\|x-a\|$ es suficientemente pequeña, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 &\|f(x) - f(a)\| \leq \|x-a\| + K \|x-a\| = \\
 &\quad \text{Lema}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a)\|}{\|x-a\|} = 0 \\
 \Leftrightarrow &\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \text{Si } \|x-a\| \text{ es pequeño, entonces} \\
 &\quad \|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\| \leq \|x-a\| \\
 \Rightarrow &\|f(x) - f(a)\| \leq (1+K) \|x-a\|. \\
 &\text{Si } x \rightarrow a \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \rightarrow 0 \Rightarrow \\
 &\quad f \text{ es continua en } a. \quad \square
 \end{aligned}$$

Dem (B)

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. A probar: Si $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ existen y son continuas en a , entonces f es diferenciable en a . (en una vecindad de a)

Considera: $f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) + f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)$

- Por el Teorema del valor medio (TVM), $\exists c_1$ entre a_1 y x_1 , tal que:

$$f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2) \cdot (x_1 - a_1)$$

• Por el T.V.M, si c_2 entre x_2 y $a_2 \exists$

$$f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, c_2)(x_2 - a_2) \quad (*)$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)}_{=} - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2)$$

$$= \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, c_2)(x_2 - a_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2) \right|$$

$$\leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2)(x_1 - a_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) \right| +$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, c_2)(x_2 - a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2) \right|$$

$$= \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right| \cdot |x_1 - a_1| +$$

$$+ \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, c_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right| \cdot |x_2 - a_2| \leq$$

$\sqrt{(x_1 - a_1)^2} \leq \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} = \|x - a\|$
 $|x_1 - a_1| \leq \|x - a\|$

$$\leq \left[\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, c_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right| \right] \cdot \|x - a\|$$

$$\Rightarrow \frac{|f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2)|}{\|x - a\|}$$

$$\leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, c_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right| \quad (*)$$

$\rightarrow 0$, cuando $x \rightarrow a$, ya que $c_1 \rightarrow a_1, c_2 \rightarrow a_2$
 y, dada la continuidad de las parciales,
 los términos (*) y (*) se anulan.
 $\Rightarrow f$ es diferenciable en a .

Nota: El mismo argumento se utiliza para funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} .

Considera $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. A probar:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad f_m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

$$f_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad f_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \dots \quad f_m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$