(b) ⇒ (a): Sea $\epsilon > 0$ y sea $P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b] \ni \forall P \preceq P_\epsilon$, y cualesquiera $t_k, t'_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset P$, se cumple:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k - A\right| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{y}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\Delta x_k - A\right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t'_k)]\Delta x_k\right| = \qquad (*)$$

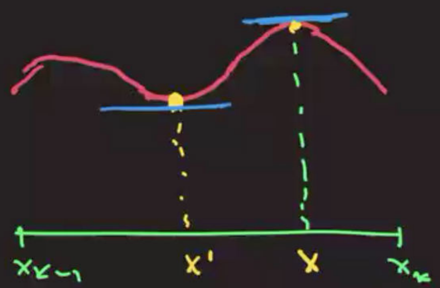
$$= \left|\left(\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k - A\right) + \left(A - \sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\Delta x_k\right)\right|$$

$$\leq \left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k - A\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\Delta x_k - A\right|$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3}.$$

Por otro lado:

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup\{ f(x) - f(x') : x, x' \in [x_{k-1}, x_k]\}$$



$$\leq \left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k - A\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\Delta x_k - A\right|$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3}.$$

Por otro lado:

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup\{ f(x) - f(x') : x, x' \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Entonces, para $h > 0$ podemos encontrar t_k, t'_k en $[x_{k-1}, x_k] \ni$

$$f(t_k) - f(t'_k) > M_k(f) - m_k(f) - h$$

Sea $h = \dfrac{\epsilon}{3(b-a)}$

$$\Rightarrow U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k$$

$$< \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_k') + h] \Delta x_k$$

$$< \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_k')] \Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} h \Delta x_k$$

$$\leq \left| \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_k')] \Delta x_k \right| + h \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$$

$$\leq \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3(b-a)} (b-a) = \epsilon.$$

$\Rightarrow$ Por el criterio de Cachy, se tiene

$f \in R[a,b]$ $\square$

<u>Def:</u> La <u>oscilación</u> de una función acotada f sobre un conjunto A es $\underset{A}{\operatorname{osc}}(f) := \sup_A(f) - \inf_A(f)$

<u>Nota:</u> si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada, y si $P \in P[a,b]$, entonces:

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underset{I_k}{\operatorname{osc}}(f) \Delta x_k$$

<u>Prop:</u> Suponga que $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ son acotadas y suponga que $g \in R[a,b]$. Si $\exists\, c > 0$ $\ni$ $\underset{I}{\operatorname{osc}}(f) \leq c\, \underset{I}{\operatorname{osc}}(g)$, sobre cada subintervalo $I \subseteq [a,b]$, entonces $f \in R[a,b]$.

<u>Dem:</u> Sea $\epsilon > 0$ y $P_\epsilon \in P[a,b]$ $\ni$ $P \supsetneq P_\epsilon$. Entonces,

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} \underset{I_k}{\operatorname{osc}}(f) \Delta x_k \leq$$

$I_k \subset P$ $\qquad$ $\Delta x_k = |I_k|$ $\qquad$ $< \epsilon$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} c\, \underset{I_k}{\operatorname{osc}}(g) \cdot |I_k| = c\,[U(P,g) - L(P,g)]$$

$\Rightarrow f \in R[a,b]$.

Teorema (★★★): $f \in R[a,b]$ ssi existe una sucesión de particiones (P_n), $P_n \in P[a,b], \forall n \in \mathbb{Z}^+ \ni$

$$\lim_{n\to\infty} [U(f,P_n) - L(f,P_n)] = 0.$$

En este caso, $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n)$.

Dem:

($\Leftarrow$) Dado $\epsilon > 0$ $\exists\, n \in \mathbb{Z}^+ \ni$ para $P_n \in P[a,b]$, se cumple $U(f,P_n) - L(f,P_n) < \epsilon$. Entonces, por el criterio de integrabilidad de Cauchy, se cumple: $f \in R[a,b]$.

($\Rightarrow$) Sea $f \in R[a,b] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ \;\exists\, P_n \in P[a,b] \ni$

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) < \frac{1}{n} \Rightarrow U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0$$

★: Ejercicio.

Ej: Considere $f : [0,1] \to \mathbb{R} \ni f(x) = x^2$.
Sea P_n la partición de $[0,1]$ en n subintervalos de tamaño $1/n$, y con puntos $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, \dots, n$. Si $I_k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, entonces.

$$\sup_{I_k}(f) = x_k^2, \quad \inf_{I_n}(f) = x_{k-1}^2$$

$$\Rightarrow U(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Teorema (★★★) Una función continua $\boxed{f : [a,b] \to \mathbb{R}}$ sobre un compacto $[a,b]$ es Riemann-integrable

Dem: Sea $\epsilon > 0$. Sabemos que f es uniformemente continua sobre $[a,b] \Rightarrow \exists\, \delta > 0 \ni$

si $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$, $\forall x, y \in [a,b]$

Considere una partición $P = \{I_1, I_2, \dots, I_n\} \in P[a,b]$,

tal que $\boxed{|I_k| < \delta}$ $k = 1, \dots, n$. Weierstrass

Como f es continua sobre $[a,b] \Rightarrow \exists\, x_k, y_k \in I_k$

t.q. $M_k(f) - m_k(f) = f(x_k) - f(y_k) < \frac{\epsilon}{b-a}$.

Entonces, $U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a} \Delta x_k = \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\epsilon}{\cancel{b-a}} \cancel{(b-a)} = \epsilon.$$

$\Rightarrow f \in R[a,b]$ $\square$

Teorema: Una función monótona $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sobre un compacto

es Riemann-integrable