Integral de Riemann

Cauchy → Riemann → Riemann-Stieltjes → Lebesgue

Riemann → Darboux

Riemann → Dani, Áscoli

Riemann-Stieltjes → HK

Nota: la teoría a continuación se refiere a funciones acotadas.

Def: Una partición P del intervalo $[a,b]$ es un conjunto finito: $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ donde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Notación: $\mathcal{P}[a,b]$ denota el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.

Notas:

1) Una partición $P' \in \mathcal{P}[a,b]$ es un refinamiento de $P \in \mathcal{P}[a,b]$, si $P \subset P'$

Notación: si $P \subset P'$ $\Rightarrow$ se denota: $P' \leq P$

i) $P \leq P$ $(\Leftrightarrow P \subset P)$, $\forall P \in \mathcal{P}[a,b]$.

ii) Si $P' \leq P$ y $P \leq P'$ $\Rightarrow$ $P = P'$

iii) Si $P' \leq P$ y $P'' \leq P'$ $\Rightarrow$ $P'' \leq P$

$\Rightarrow$ la relación $\leq$ es de orden parcial.

2) Para $P \in \mathcal{P}[a,b]$, $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$, es la longitud del k-ésimo subintervalo en la partición. Nótese que:

•) $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$

3) La norma o malla de $P \in \mathcal{P}[a,b]$ se define: $\|P\| = \text{máx}\{\Delta x_k : k = 1, 2, \dots, n\}$

Note que, si $P' \leq P$ $\Rightarrow$ $\|P'\| \leq \|P\|$

Def: Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$ y sean, para $k = 1, \dots, n$,

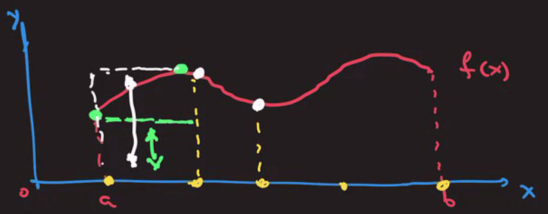
$$M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$m_k(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Entonces, los números:

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k, \quad L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\Delta x_k$$

se llaman la suma superior e inferior de Darboux de f para la partición P.



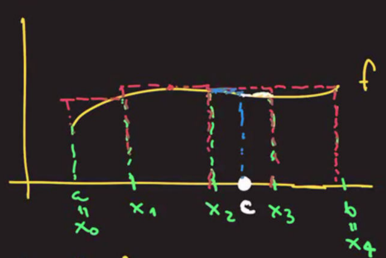
Prop: Sean $P, P', P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$. Entonces,

1) $P' \leq P$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} U(P',f) \leq U(P,f) \\ L(P',f) \geq L(P,f) \end{cases}$

2) $L(P_1,f) \leq U(P_2,f)$

Dem:

(1)



Sea $P' = P \cup \{c\}$ y suponga que $c \in [x_{i-1}, x_i] \subset P$

$$\Rightarrow U(P',f) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} M_k(f)\Delta x_k + M'(c - x_{i-1}) + M''(x_i - c).$$

Como $M' \leq M_i(f)$ y $M'' \leq M_i(f)$, entonces

$$\Rightarrow U(P', f) \leq \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} M_k(f)\Delta x_k + M_i(f)\Big[\underbrace{(\cancel{t}-x_{i-1})+(x_i-\cancel{t})}_{\Delta x_i}\Big]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k = U(P, f).$$

2) Como $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$, sea $P = P_1 \cup P_2$.

Como $P \leq P_1$ y $P \leq P_2$, entonces,

$$L(P_1, f) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq U(P_2, f)$$

$\square$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

2) La integral inferior de Riemann de f sobre $[a,b]$ se define

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

Ej: 1) Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \ni f(x) = c$

$$\Rightarrow U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} c\,\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = c(b-a)$$

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} c\,\Delta x_k = c(b-a)$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\} = c(b-a)$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\} = c(b-a)$$

Ej 2) Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ni f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I}rr \end{cases}$

Sea $P \in \mathcal{P}[0,1]$. Entonces.

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} 1\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1 - 0 = 1$$

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} 0\,\Delta x_k = 0$$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1} f = \inf\{U(\underbrace{P,f}_{1}) : P \in \mathcal{P}[0,1]\} = 1$$

$$\underline{\int_0^1} f = \sup\{L(\underbrace{P,f}_{0}) : P \in \mathcal{P}[0,1]\} = 0$$