

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE
GUATEMALA

MM2034 - 1 SEMESTRE - 2021

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA APLICADA

ANÁLISIS DE VARIABLE REAL 2

Catedrático: Dorval Carías

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay

Carné: 19857

Correo: rom19857@uvg.edu.gt

18 de agosto de 2021

Índice

1 Sesión 1 - 5 de julio de 2021	1
2 Sesión 2	6
3 Sesión 3	9
4 Sesión 4	14
5 Sesión 5	21
6 Sesión 6	27
7 Sesión 7	31
8 Sesión 8	36
8.1 Integrales impropias	36
9 Sesión 9 y Sesión 10	40
9.1 Sucesiones de funciones	40
9.2 Series	40

10 Sesión 11 y Sesión 12 **45**

11 Sesión 13 **49**

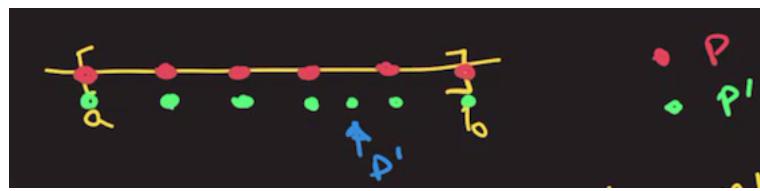
1. Sesión 1 - 5 de julio de 2021

NOTA. La teoría a continuación se refiere a funciones acotadas.

Definición 1. Una **partición** P del intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito: $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ donde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

NOTA. $P[a, b]$ denota el conjunto de todas las particiones de $[a, b]$.

NOTA. 1. Una partición $P' \in P[a, b]$ es un **refinamiento** de $P \in P[a, b]$, si $P \subset P'$



Notación: si $P \subset P' \implies$ Se denota: $P' \preceq P$.

a) $P \preceq P (\iff P \subset P), \forall P \in P[a, b]$.

b) Si $P' \preceq P$ y $P \preceq P' \implies P = P'$.

c) Si $P' \preceq P$ y $P'' \preceq P' \implies P'' \preceq P$.

\implies La relación \preceq es de orden parcial.

2. Para $P \in P[a, b]$, $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$, es la longitud del k -ésimo subintervalo en la partición. Nótese que:

$$\sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a$$

3. La norma o malla de $P \in P[a, b]$ se define: $\|P\| = \max\{\Delta x_k : k = 1, 2, \dots, n\}$. Note que, si $P' \preceq P \implies \|P'\| \leq \|P\|$.

Definición 2. Sea $P \in P[a, b]$ y sean, para $k = 1, \dots, n$,

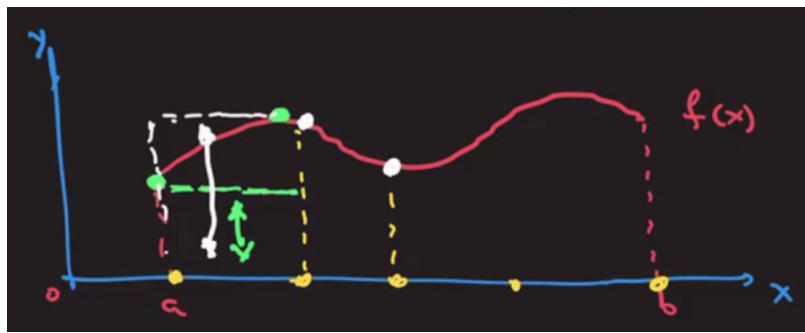
$$M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$m_k(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Entonces, los números:

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta x_k, \quad L(P, f) = \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta x_k$$

se llaman la suma superior e inferior de Darboux de f para partición P .



Proposición 1. Sean $P, P', P_1, P_2 \in P[a, b]$. Entonces,

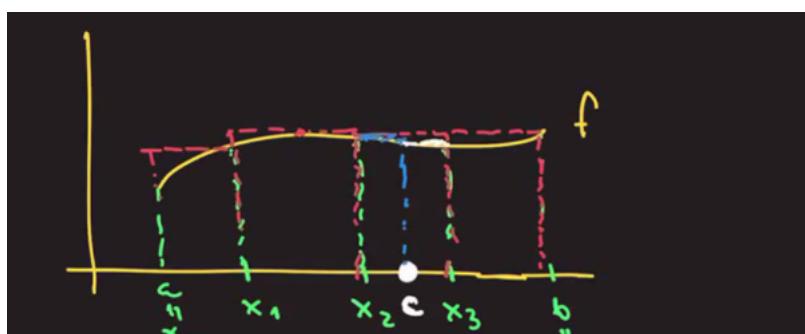
1.

$$P' \preceq P \implies P' \preceq P \implies \begin{cases} U(P', f) \leq U(P, f) \\ L(P', f) \geq L(P, f) \end{cases}$$

2.

$$L(P_1, f) \leq U(P_2, f)$$

Demostración. Tenemos:



1. Sea $P' = P \cup \{c\}$ y suponga que $c \in [x_{i-1}, x_i] \subset P \implies U(P', f) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n M_k(f) \Delta x_k + M'(c - x_{i-1}) + M''(x_i - c)$. Como $M' \leq M_i(f)$ y $M'' \leq M_i(f)$. $\implies U(P', f) \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n M_k(f) \Delta x_k + M_i(f) \underbrace{[(c - x_{i-1}) + (x_i - c)]}_{\Delta x_i} = \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta x_k = U(P, f)$.
2. Como $P_1, P_2 \in P[a, b]$, sea $P = P_1 \cup P_2$. Como $P \preceq P_1$ y $P \preceq P_2$, entonces $L(P_1, f) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq U(P_2, f)$.

■

Definición 3. 1. Se define la integral superior de Riemann de f sobre $[a, b]$.

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P, f) : P \in P[a, b]\}$$

2. Se define la integral interior de Riemann de f sobre $[a, b]$.

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P, f) : P \in P[a, b]\}$$

Ejemplo 1. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \ni f(x) = c$.

1. $U(P, f) = \sum_{k=1}^n c \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n \Delta x_k = c(b - a) \implies \overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P, f) : P \in P[a, b]\} = c(b - a)$.
2. $L(P, f) = \sum_{k=1}^n c \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n \Delta x_k = c(b - a) \implies \underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P, f) : P \in P[a, b]\} = c(b - a)$

Ejemplo 2. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \ni$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{Irr} \end{cases}$$

Sea $P \in P[0, 1]$. Entonces,

1. $U(P, f) = \sum_{k=1}^n 1 \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = 1 - 0 = 1 \implies \overline{\int_0^1} f = \inf\{\underbrace{U(P, f)}_1 : P \in P[0, 1]\} = 1$.
2. $L(P, f) = \sum_{k=1}^n 0 \Delta x_k = 0 \implies \underline{\int_0^1} f = \sup\{\underbrace{L(P, f)}_0 : P \in P[0, 1]\} = 0$.

Integral de Riemann



Nota: La teoría a continuación se refiere a funciones acotadas.

Def: Una partición P del intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito: $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ donde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Notación: $P[a, b]$ denota al conjunto de todas las particiones de $[a, b]$.

Notas:

- 1) Una partición $P' \in P[a, b]$ es un refinamiento de $P \in P[a, b]$, si $P \subset P'$



Notación: Si $P \subset P' \Rightarrow$ se denota: $P' \leq P$

i) $P \leq P \quad (\Leftrightarrow P \subset P)$, $\forall P \in P[a, b]$.

ii) Si: $P' \leq P$ y $P \leq P' \Rightarrow P = P'$

iii) Si: $P' \leq P$ y $P'' \leq P' \Rightarrow P'' \leq P$

\Rightarrow La relación \leq es de orden parcial.

2) Para $P \in P[a, b]$, $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$, es la longitud del k -ésimo subintervalo en la partición. Nótese que:

a) $\sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a$

3) La norma o malla de $P \in P[a, b]$

se define: $\|P\| = \max \{\Delta x_k : k=1, 2, \dots, n\}$

Note que, si $P' \leq P \Rightarrow \|P'\| \leq \|P\|$

Def: Sea $P \in P[a, b]$ y sea, para $k=1, \dots, n$,

$$M_k(f) = \sup \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

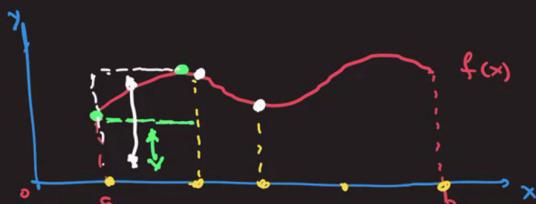
$$m_k(f) = \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Entonces, los números:

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta x_k, \quad L(P, f) = \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta x_k$$

se llaman la suma superior e inferior

de Darboux de f para la partición P .



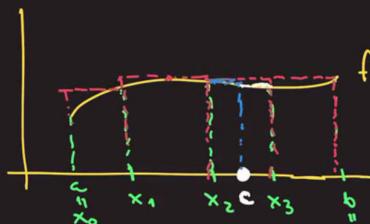
Prop: Sean $P, P', P_1, P_2 \in P[a, b]$. Entonces,

1) $P' \leq P \Rightarrow \begin{cases} U(P', f) \leq U(P, f) \\ L(P', f) \geq L(P, f) \end{cases}$

2) $L(P_1, f) \leq U(P_2, f)$

Dem:

(1)



Sea $P' = P \cup \{c\}$ y supóngase que $c \in [x_{i-1}, x_i] \subset P$

$$\Rightarrow U(P', f) = \sum_{k=1}^{i-1} M_k(f) \Delta x_k + M'(c-x_{i-1}) + M''(x_i-c).$$

Como $M' \leq M_i(f)$ y $M'' \leq M_i(f)$, entonces

$$\Rightarrow U(P, f) \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n M_k(f) \Delta x_k + m_i(f) \left[\underbrace{(x - x_{i-1})}_{\Delta x_i} + (x_i - x) \right] \\ = \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta x_k = U(P, f).$$

2) Como $P, P_2 \in P[a, b]$, sea $P = P_1 \cup P_2$.

Como $P \leq P_1$ y $P \leq P_2$, entonces.

$$L(P_1, f) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq U(P_2, f)$$

□

$\int_a^b f = \inf \{ U(P, f) : P \in P[a, b] \}$

2) La integral inferior de Riemann de f sobre $[a, b]$ se define

$$\underline{\int_a^b f} = \sup_{\substack{P \\ \text{particiones}}} \{ L(P, f) : P \in P[a, b] \}$$

Ej: 1) Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \ni f(x) = c$

$$\Rightarrow U(P, f) = \sum_{k=1}^n c \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n \Delta x_k = c(b-a)$$

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^n c \Delta x_k = c(b-a)$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b f} = \inf \{ U(P, f) : P \in P[a, b] \} = c(b-a)$$

$$\underline{\int_a^b f} = \sup \{ L(P, f) : P \in P[a, b] \} = c(b-a)$$

Ej 2) Sea $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \ni f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Sea $P \in P[0, 1]$. Entonces.

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^n 1 \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = 1 - 0 = 1$$

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^n 0 \Delta x_k = 0$$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1 f} = \inf \{ U(P, f) : P \in P[0, 1] \} = 1$$

$$\underline{\int_0^1 f} = \sup \{ L(P, f) : P \in P[0, 1] \} = 0$$

2. Sesión 2

Proposición 2. $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Definición 4. Se dice que una función acotada f es Riemann integrable sobre $[a, b]$, si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En este caso:

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Definición 5. El conjunto de funciones Riemann integrables sobre $[a, b]$ se denota $R[a, b]$.

Teorema 1. (Criterio de Cauchy-Riemann para integrabilidad) Una función acotada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable sobre $[a, b]$ ssi $\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon \in P[a, b] \ni \forall P \leqslant P_\varepsilon$, se tiene que

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon.$$

Teorema 2. Sea $f \in R[a, b]$. Entonces, $f \in R[c, d]$, para cualquier $[c, d] \subset [a, b]$.

Definición 6. Sea $P \in P[a, b]$ y sea $t_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset P$, $k = 1, \dots, n$. Una suma del tipo:

$$S(P, f, \{t_k\}) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$$

se llama suma de Riemann de f para la partición P y con la muestra t_1, \dots, t_n .

Teorema 3. Los enunciados siguientes son equivalentes:

1. $f \in R[a, b]$.
2. Existe un número A con la siguiente propiedad: $\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon \in P[a, b] \ni P \leqslant P_\varepsilon$.

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b f} = \inf \{ U(P, f) : P \in \mathcal{P}[a, b] \} = 1$$

$$\underline{\int_a^b f} = \sup \{ L(P, f) : P \in \mathcal{P}[a, b] \} = 0$$

Prop: $\underline{\int_a^b f} \leq \overline{\int_a^b f}$

You are muted now. Press Shift+Command+A to unmute your microphone, or press and hold the SPACE key to temporarily unmute.

Dem: Sea $\epsilon > 0$. Como $\overline{\int_a^b f} = \inf \{ U(P, f) : P \in \mathcal{P}[a, b] \}$
 $\Rightarrow \exists P_\epsilon \in \mathcal{P}[a, b] \ni U(P_\epsilon, f) < \overline{\int_a^b f} + \epsilon$
 $\Rightarrow \overline{\int_a^b f} + \epsilon$ es cota superior de

$$\{ L(P, f) : P \in \mathcal{P}[a, b] \} \Rightarrow \sup \{ L(P, f) : P \in \mathcal{P}[a, b] \} < \overline{\int_a^b f} + \epsilon. \text{ Dada la arbitrariedad de } \epsilon, \text{ se tiene:}$$

$$\underline{\int_a^b f} \leq \overline{\int_a^b f} \quad \square$$

El conjunto de funciones Riemann integrables sobre $[a, b]$ se denota $R[a, b]$.

Teorema (Criterio de Cauchy-Riemann para integrabilidad)

Una función acotada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable sobre $[a, b]$ si y sólo si $\forall \epsilon > 0 \exists P_\epsilon \in \mathcal{P}[a, b] \ni \forall P \leq P_\epsilon$, se tiene que

$$0 < U(P, f) - L(P, f) < \epsilon.$$

Dem:

(\Rightarrow) Sea $f \in R[a, b]$. Sea $\epsilon > 0$ y sea

$$A = \underline{\int_a^b f} = \overline{\int_a^b f} = \overline{\int_a^b f}$$

$$\Rightarrow \text{Existen particiones } P' \in \mathcal{P}[a, b] \ni U(P', f) < \overline{\int_a^b f} + \frac{\epsilon}{2}$$

$$L(P'', f) > \underline{\int_a^b f} - \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{Sea } P_\epsilon = P' \cup P'' \text{ y considere } P \leq P_\epsilon. \text{ Entonces,}$$

$$A - \frac{\epsilon}{2} < L(P'', f) \leq L(P_\epsilon, f) \leq \underline{\int_a^b f} \leq$$

$$\leq U(P, f) \leq U(P_\epsilon, f) \leq U(P', f) < A + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{Entonces: } A - \frac{\epsilon}{2} < L(P, f), \text{ y}$$

$$U(P, f) < A + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow -A + \frac{\epsilon}{2} > -L(P, f)$$

$$\cancel{U(P, f)} + \frac{\epsilon}{2} > U(P, f)$$

$$\epsilon > U(P, f) - L(P, f).$$

(\Leftarrow) Sea $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists P_\epsilon \in \mathcal{P}[a, b] \ni P \leq P_\epsilon$, se tiene que $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon \Leftrightarrow U(P, f) \leq L(P, f) + \epsilon$. Para esta partición se tiene que:

$$\overline{\int_a^b f} \leq U(P, f) \leq L(P, f) + \epsilon \leq \underline{\int_a^b f} + \epsilon$$

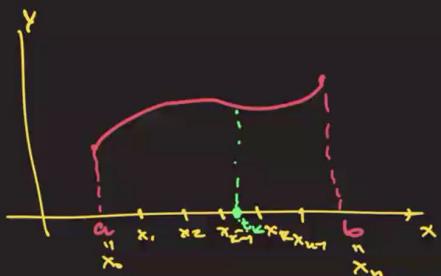
$$\Rightarrow \underline{\int_a^b f} < \overline{\int_a^b f} + \epsilon. \text{ Por la arbitrariedad}$$

de ϵ , se tiene que: $\underline{\int_a^b f} \leq \overline{\int_a^b f}$. Por teorema anterior, sabemos que:

$$\underline{\int_a^b f} \leq \overline{\int_a^b f}$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b f} = \overline{\int_a^b f} \Rightarrow f \in R[a, b]. \quad \square$$

Teorema: Sea $f \in R[a, b]$. Entonces, $f \in R[c, d]$, para cualquier $[c, d] \subset [a, b]$. \square



$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \vdots$
 $\{t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_n\}$
 $m_k(f) \leq f(t_k) \leq M_k(f)$

de ϵ , se tiene que: $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$. Por teorema anterior, sabemos que:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \Rightarrow f \in R[a, b]. \quad \square$$

Teorema: Sea $f \in R[a, b]$. Entonces, $f \in L[c, d]$, para cualquier $[c, d] \subset [a, b]$. \square

Def: Sea $P \in P[a, b]$ y sea $t_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset P$, $k=1, \dots, n$. Una suma del tipo:

$$S(P, f, \{t_k\}) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$$

se llama suma de Riemann de f para la partición P y con la muestra t_1, \dots, t_n .

Teorema: Los enunciados siguientes son equivalentes:

a) $f \in R[a, b]$

b) Existe un número A con la siguiente propiedad:
 $\forall \epsilon > 0 \exists P \in P[a, b] \ni P \leq P_\epsilon$

$t_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset [a, b]$, $k=1, \dots, n$, se cumple: $|S(P, f, \{t_k\}) - A| < \epsilon$.

$$A = \lim_{\substack{\text{if } P \rightarrow D \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$$

Dem.: Sabemos que $f \in R[a, b]$ y supongamos que $a \rightarrow b$:
 $A = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$. Sea $\epsilon > 0$ y considere particiones P' , $P'' \in P[a, b]$, tales que

$$U(P, f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon, \quad P \leq P'$$

$$L(P, f) > \underline{\int_a^b} f - \epsilon, \quad P \leq P''$$

Sea $P_\epsilon = P' \cup P''$ y sea $P \leq P_\epsilon$. Entonces,

$$\underline{\int_a^b} f - \epsilon < L(P, f) \leq S(P, f, \{t_k\}) \leq U(P, f)$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f - \epsilon < S(P, f, \{t_k\}) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon$$

$$\Rightarrow -\epsilon < S(P, f, \{t_k\}) - A < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |S(P, f, \{t_k\}) - A| < \epsilon.$$

3. Sesión 3

Definición 7. La *oscilación* de una función acotada f sobre un conjunto A es $\text{osc}_A(f) := \sup_A(f) - \inf_A(f)$.

NOTA. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada, y si $P \in P[a, b]$, entonces:

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)]\Delta x_k = \sum_{k=1}^n \text{osc}_{I_k}(f)\Delta x_k$$

Proposición 3. Suponga que $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son acotadas y suponga que $g \in R[a, b]$. Si $\exists c > 0 \ni \text{osc}_I(f) \leq c \text{osc}_I(g)$, sobre cada subintervalo $I \subseteq [a, b]$, entonces $f \in R[a, b]$.

Teorema 4. $f \in R[a, b]$ ssi existe una sucesión de particiones (P_n) , $P_n \in P[a, b]$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \ni \lim_{n \rightarrow \infty} [U(f, P_n) - L(f, P_n)] = 0$. En este caso,

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n).$$

Teorema 5. Una función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable.

Teorema 6. Una función monótona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable.

(b) \Rightarrow (a): Sea $\epsilon > 0$ y sea $P_\epsilon \in P[a, b]$ s.t. $P \leq P_\epsilon$,
y consideremos $t_k, t'_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset P$, se cumple:

$$\left| \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k - A \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

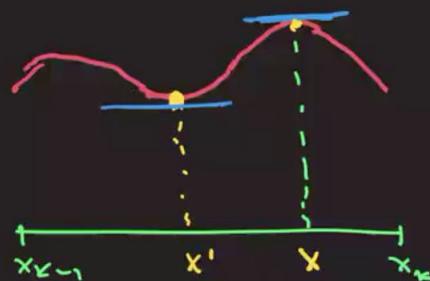
$$\left| \sum_{k=1}^n f(t'_k) \Delta x_k - A \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left| \sum_{k=1}^n [f(t_k) - f(t'_k)] \Delta x_k \right| = \\ & = \left| \left(\sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k - A \right) + \left(A - \sum_{k=1}^n f(t'_k) \Delta x_k \right) \right| \end{aligned} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \leq & \left| \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k - A \right| + \left| \sum_{k=1}^n f(t'_k) \Delta x_k - A \right| \\ & < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$M_K(f) - m_K(f) = \inf \left\{ f(x) - f(x') : x, x' \in [x_{k-1}, x_k] \right\}$$



$$\begin{aligned} \leq & \left| \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k - A \right| + \left| \sum_{k=1}^n f(t'_k) \Delta x_k - A \right| \\ & < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$M_K(f) - m_K(f) = \inf \left\{ f(x) - f(x') : x, x' \in [x_{k-1}, x_k] \right\}$$

Entonces, para $h > 0$ podemos encontrar t_k, t'_k
en $[x_{k-1}, x_k] \ni$

$$f(t_k) - f(t'_k) > M_K(f) - m_K(f) - h$$

$$\text{Sea } h = \frac{\epsilon}{3(b-a)}$$

$$\begin{aligned}
 U(P, f) - L(P, f) &= \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k \\
 &\leq \sum_{k=1}^n [f(t_k) - f(t_k') + h] \Delta x_k \\
 &\leq \sum_{k=1}^n [f(t_k) - f(t_k')] \Delta x_k + \sum_{k=1}^n h \Delta x_k \\
 &\leq \left| \sum_{k=1}^n [f(t_k) - f(t_k')] \Delta x_k \right| + h \sum_{k=1}^n \Delta x_k \\
 &\leq \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3(b-a)} (b-a) = \epsilon.
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Por el criterio de Cauchy, se tiene

$$f \in R[a, b] \quad \square$$

Def. La oscilación de una función acotada f sobre un conjunto A es $\text{osc}_A(f) := \sup_A(f) - \inf_A(f)$

Nota: Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada, y si

$P \in P[a, b]$, entonces:

$$\begin{aligned}
 U(P, f) - L(P, f) &= \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \text{osc}_{I_k}(f) \Delta x_k
 \end{aligned}$$

Prop. Suponga que $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son acotadas y suponga que $g \in R[a, b]$. Si $\exists c > 0$ tal que

$\text{osc}_I(f) \leq c \text{osc}_I(g)$, sobre cada subintervalo

$I \subseteq [a, b]$, entonces $f \in R[a, b]$.

Dem. Sea $\epsilon > 0$ y $P_\epsilon \in P[a, b]$ tal que $P \leq P_\epsilon$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 U(P, f) - L(P, f) &= \sum_{k=1}^n \text{osc}_{I_k}(f) \Delta x_k \cdot |I_k| \leq \\
 &\xrightarrow[I_k \subset P]{} c \text{osc}_{I_k}(g) \cdot |I_k| = c [U(P, g) - L(P, g)] < \epsilon
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f \in R[a, b]$.

Teorema (***): $f \in R[a, b]$ ssi existe una sucesión de particiones (P_n) , $P_n \in P[a, b]$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [U(f, P_n) - L(f, P_n)] = 0.$$

En este caso, $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n).$

Dem:

(\Leftarrow) Dado $\epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{Z}^+$ para $P_n \in P[a, b]$, se cumple $U(f, P_n) - L(f, P_n) < \epsilon$. Entonces, por el criterio de integrabilidad de Cauchy, se cumple: $f \in R[a, b]$.

(\Rightarrow) Sea $f \in R[a, b] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ \exists P_n \in P[a, b]$, $U(f, P_n) - L(f, P_n) < \frac{1}{n} \Rightarrow U(f, P_n) - L(f, P_n) \rightarrow 0$

*: Ejercicio.

Ej: Considere $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ s.t. $f(x) = x^2$.

Sea P_n la partición de $[0, 1]$ en n subintervalos de tamaño $1/n$, y con puntos $x_k = \frac{k}{n}$, $k=0, \dots, n$. Si $I_k = [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, entonces.

$$\sup_{I_k} (f) = x_k^2, \inf_{I_k} (f) = x_{k-1}^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U(f, P_n) &= \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot \frac{1}{n} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{n}{n}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{2n+1}{n}\right) = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

sobre un compacto $[a, b]$

Teorema (***): Una función continua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann-integrable

Dem: Sea $\epsilon > 0$. Sabemos que f es uniformemente continua sobre $[a, b] \Rightarrow \exists \delta > 0 \exists$

$$\text{si } |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}, \forall x, y \in [a, b]$$

Considera una partición $P = \{I_1, I_2, \dots, I_n\} \in P[a, b]$,
tal que $\boxed{|I_k| < \delta}$ $k = 1, \dots, n$. Weierstrass
Como f es continua sobre $[a, b] \Rightarrow \exists x_k, y_k \in I_k$
t.g. $M_k(f) - m_k(f) = f(x_k) - f(y_k) < \frac{\epsilon}{b-a}$.

$$\begin{aligned} \text{Entonces, } U(P, f) - L(P, f) &= \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{\epsilon}{b-a} \Delta x_k = \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) = \epsilon. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f \in R[a, b]$$

□

• Teorema: Una función monótona $\overbrace{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}}$
sobre un compacto
es Riemann-integrable.

4. Sesión 4

Teorema 7. Una función monótona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann-integrable.

NOTA. Una función monótona no es necesariamente continua [*¿Qué sucede si f tiene un conjunto no contable de discontinuidades de salto en $[a, b]$?*]

Proposición 4. Sea

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f \quad (f \in R[a, b]).$$

NOTA. Sean f y g funciones acotadas sobre el intervalo $I \implies f + g$ es acotada.

Proposición 5. (*Supremos e ínfimos*)

$$\sup_I(f + g) \leq \sup_I(f) + \sup_I(g)$$

$$\inf_I(f + g) \geq \inf_I(f) + \inf_I(g)$$

Proposición 6. Sea

$$\text{osc}_I(f + g) = \text{osc}_I(f) + \text{osc}_I(g)$$

Proposición 7. $f, g \in R(I) \implies f + g \in R(I)$.

NOTA. Las integrales superior e inferior de funciones no integrables no son, en general, lineales.

Definición 8. Sea $a < b$.

1. $\overline{\int_a^b} f := -\underline{\int_a^b} f$ y $\underline{\int_a^b} f := -\overline{\int_b^a} f$. Si las integrales coinciden, entonces:

$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

2. $\forall c \in [a, b]$, se define: $\overline{\int_c^c} f = \underline{\int_a^c} f = 0$.

Proposición 8. (*Varios*)

$$1. \overline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b}f + \overline{\int_a^b}g.$$

$$2. \underline{\int_a^b}(f+g) \leq \underline{\int_a^b}f + \underline{\int_a^b}g.$$

Teorema 8. Si $f, g \in R \implies \int_a^b(f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$

Proposición 9. (Monotonidad) Sean $f, g \in R[a, b]$ y suponga que $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$. Entonces:

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Teorema 9. Suponga que $f \in R[a, b]$ y sea $M = \sup_{[a, b]}(f)$ y $m = \inf_{[a, b]}(f)$.

Entonces,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Teorema 10. (Valor medio para integrales) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces $\exists c \in [a, b] \ni$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

• Teorema: Una función monótona $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$
sobre un compacto es Riemann-integrable.

Dem.: Supongamos que f es monótona creciente en $[a,b]$, sea $P_n = \{I_1, I_2, \dots, I_m\}$ una partición de $[a,b]$ s.t. $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $|I_k| = \frac{b-a}{n}$, y $x_k = a + \frac{(b-a)}{n}k$, $k=0,1,\dots,n$.

$$\Rightarrow M_k(f) = \sup_{I_k}(f) = f(x_k), \quad m_k(f) = f(x_{k-1})$$

$$\Rightarrow U(f, P_n) - L(f, P_n) = \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})]$$

$$= \left(\frac{b-a}{n}\right) [f(b) - f(a)]. \quad \text{Si } n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow U(f, P_n) - L(f, P_n) \rightarrow 0 \Rightarrow f \in R[a,b].$$

Nota: Una función monótona no es necesariamente continua [¿Qué puede ocurrir si f tiene un conjunto no contable de discontinuidades de salto en $[a,b]$?]

Prop $\int_a^b cf = c \int_a^b f \quad (f \in R[a,b])$

Dem. $\int_a^b cf = \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} U(cf, P) = \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \sum_{k=1}^n \sup_{I_k}(cf) \cdot |I_k|$

$$= \inf_P c \sum_{k=1}^n \sup_I(f) \cdot |I_k| = c \inf_P U(f, P)$$

$$= c \int_a^b f$$

Por otra parte: $\int_a^b cf = \sup_P L(cf, P) =$

$$= \sup_P c L(f, P) = c \sup_P L(f, P) = c \int_a^b f$$

$$\text{Si } f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow \int_a^b cf = c \int_a^b f.$$

$c < 0$ Considera $-f \Rightarrow \sup_I (-f) = -\inf_I (f)$
 $\inf_I (-f) = -\sup_I (f)$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_a^b (-f) &= \inf_P U(-f, P) = \inf_P \sum_{k=1}^n \sup_{I_k} (-f) \cdot |I_k| \\ &= \inf_P (-1) \cdot \sum_{k=1}^n \inf(I_k) \cdot |I_k| = \\ &= (-1) \sup_P L(f, P) = - \int_a^b f \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^b (-f) = \sup_P L(-f, P) = \sup_P (-1) U(f, P) = \\ = (-1) \inf U(f, P) = - \int_a^b f$$

$$\text{Como } f \in \mathcal{L}[a, b] \Rightarrow \int_a^b (-f) = - \int_a^b f.$$

Por ultimo, $-c = -|c|$

$$\Rightarrow \int_a^b (-|c|) f = - \int_a^b |c| f = -|c| \int_a^b f \quad \square$$

Nota: Sean f y g funciones acotadas sobre el intervalo $I \Rightarrow f+g$ es acotada.

Por otra parte se tiene, por las propiedades de infino y supremo, que:

$$\sup_I (f+g) \leq \sup_I f + \sup_I g$$

$$\inf_I (f+g) \geq \inf_I f + \inf_I g$$

Supongamos que $f, g \in \mathcal{R}(I)$

$$\Rightarrow \text{osc}_I (f+g) = \sup_I (f+g) - \inf_I (f+g) \leq$$

$$\leq [\sup_I f + \sup_I g] - \inf_I (f+g)$$

$$\leq [\sup_I f + \sup_I g] - [\inf_I f + \inf_I g]$$

$$= \left[\sup_I f - \inf_I f \right] + \left[\sup_I g - \inf_I g \right]$$

$$= OSC_I(f) + OSC_I(g).$$

Como $f, g \in R(I)$ $\Rightarrow f+g \in R(I)$.

Ej. Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ \exists

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & x \in [0, 1] - \mathbb{Q} \end{cases} \quad \leftarrow \text{Dirichlet}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1, & x \in [0, 1] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

No tiene que $g = 1 - f$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1 f} = 1 = \overline{\int_0^1 g} \quad ; \quad \underline{\int_0^1 f} = 0 = \underline{\int_0^1 g}$$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1 (f+g)} = 1 = \underline{\int_0^1 (f+g)}$$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1 (f+g)} < \overline{\int_0^1 f} + \overline{\int_0^1 g}$$

$$\underline{\int_0^1 f+g} > \underline{\int_0^1 f} + \underline{\int_0^1 g}$$

0:50:00

Entonces: Las integrales superior e inferior de funciones no integrables no son, en general, lineales.

Def. Sea $a < b$.

$$a) \quad \overline{\int_a^b f} := - \overline{\int_b^a f} \quad ; \quad \underline{\int_a^b f} := - \underline{\int_b^a f} .$$

Si las integrales coinciden, entonces:

$$\int_a^b f = - \int_b^a f .$$

$$b) \quad \forall c \in [a, b], \text{ se define } \int_c^c f = \int_a^a f = 0$$

$$\underline{\text{Prop:}} \quad (\text{a}) \quad \underline{\int_a^b} (f+g) \leq \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g$$

$$(\text{b}) \quad \underline{\int_a^b} (f+g) \geq \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g$$

□

$$\underline{\text{Teorema:}} \quad \text{Si } f, g \in R \Rightarrow \underline{\int_a^b} (f+g) = \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g.$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Dem:}} \quad \underline{\int_a^b} (f+g) &\leq \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g = \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \\ &\leq \underline{\int_a^b} (f+g) \end{aligned}$$

Además, sabemos:

$$\underline{\int_a^b} (f+g) \leq \underline{\int_a^b} (f+g)$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} (f+g) = \underline{\int_a^b} (f+g) \Rightarrow f+g \in R[a,b]$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} (f+g) = \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g. \quad \square$$

Prop: Sean $f, g \in R[a,b]$ y supóngase que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Entonces:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} g \quad \boxed{\text{monotonidad}}$$

Dem: Sea f integrable y supóngase que $f \geq 0$.

$$\text{Sea } P \in P[a,b] \ni P = [a,b]$$

$$\Rightarrow L(f,P) = \inf_P (f) \cdot (b-a) \geq 0$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f \geq L(P,f) \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{Si } f \geq 0 \Rightarrow \underline{\int_a^b} f \geq 0.$$

Si se tiene que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$,

hagamos $h(x) = g(x) - f(x)$, $\forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow h(x) \geq 0, \forall x \in [a,b] \Rightarrow \underline{\int_a^b} h(x) dx \geq 0$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} [g(x) - f(x)] dx \geq 0$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} g(x) dx - \underline{\int_a^b} f(x) dx \geq 0. \quad \square$$

Teorema: Supongamos que $f \in R[a,b]$ y sean

$$M = \sup_{[a,b]} f \quad \text{y} \quad m = \inf_{[a,b]} f.$$

$$\text{Entonces, } m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Dem.: Sabemos que $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M$

$$\Rightarrow \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

□

Teorema (Valor medio para integrales)

Si $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\exists c \in [a,b] \text{ s.t.}$$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Dem.: Como f es continua sobre el compacto

$[a,b]$, entonces f alcanza su máximo,

sus mínimos m , en $[a,b]$. Entonces,

$$m \leq f \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M$$

Como f es continua en $[a,b]$, por el

Teorema del valor medio, existe $c \in [a,b]$ s.t.

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

Lunes: . Teoremas fundamentales del

cálculo.

□

5. Sesión 5

Proposición 10. Sea $f \in R[a, b]$. Entonces, $|f| \in R[a, b]$. Además, se tiene:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

NOTA. 1. Si $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$, se tiene que:

$$\overline{\int_a^b f} \leq \overline{\int_a^b g}; \underline{\int_a^b f} \leq \underline{\int_a^b g}.$$

2.

$$\left| \overline{\int_a^b f} \right| \leq \overline{\int_a^b |f|}; \left| \underline{\int_a^b f} \right| \leq \underline{\int_a^b |f|}$$

Proposición 11. Sea $f \in R[a, b] \implies f^2 \in R[a, b]$.

Teorema 11. Si $f, g \in R[a, b] \implies f \cdot g \in R[a, b]$.

Proposición 12. Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y $m, M \in R \ni m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$. Entonces:

$$1. m(b-a) \leq \underline{\int_a^b f}.$$

$$2. \overline{\int_a^b f} \leq M(b-a).$$

Teorema 12. (***) Sea I un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en I . Sea $a \in I$ y considere las funciones:

$$\overline{F(x)} = \overline{\int_a^x f} \quad y \quad \underline{F(x)} = \underline{\int_a^x f}, \forall x \in I.$$

Entonces:

1. \overline{F} y \underline{F} son continuas en I .

2. Si f es continua en $c \in I \implies \overline{F}$ y \underline{F} son derivables en c y además:

$$\overline{F}'(c) = \underline{F}'(c) = f(c).$$

Teorema 13. (*Primer teorema fundamental del cálculo*) Sea $f \in R[a, b]$. Sea

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \ni$$

$$F(x) := \int_a^x f, \quad x \in [a, b]$$

Si f es continua en $c \in [a, b] \implies F$ es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

Teorema 14. (*Segundo teorema fundamental del cálculo- Fórmula Newton-Leibniz*) Sea $f \in R[a, b]$ y sea G una función derivable en $(a, b) \ni G' = f$. Entonces,

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

Prop.: Sea $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Entonces, $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$.
Además, se tiene:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Dem.: Sea $P \in \mathcal{P}[a, b]$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} M_k(|f|) - m_k(|f|) &= \sup_{\{x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}} \underbrace{|f(x)| - |f(y)|}_{\leq |f(x) - f(y)|} \\ &\leq \sup_{\{x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}} |f(x) - f(y)| \\ &= M_k(f) - m_k(f) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n [M_k(|f|) - m_k(|f|)] \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k$$

Dorval Jr

$$\Rightarrow U(P, |f|) - L(P, |f|) \leq U(P, f) - L(P, f),$$

$\forall P \in \mathcal{P}[a, b]$.

Sea $\epsilon > 0$. Como f satisface el criterio de Cauchy en $[a, b] \Rightarrow \exists [P_\epsilon] \in \mathcal{P}[a, b] \ni$ para $P \leq P_\epsilon$, se tiene que $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon \Rightarrow |f|$ también cumple el criterio de Cauchy, y entonces $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$.

A probar: $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

$$\Leftrightarrow - \int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

Entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned} &\left| f(x) \right| \leq |f(x)| \\ \Rightarrow - |f(x)| &\leq f(x) \leq |f(x)|, \forall x \in [a, b] \\ \Rightarrow - \int_a^b |f| &\leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \end{aligned}$$

□

Nota: (1) Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, se tiene



que: $\int_a^b f \leq \int_a^b g$; $\int_a^b f \geq \int_a^b g$

$$(2) \quad \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|; \quad \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Prop: Sea $f \in R[a,b] \Rightarrow f^2 \in R[a,b]$. \square

Teorema: Si $f, g \in R[a,b] \Rightarrow f \cdot g \in R[a,b]$

Dem: Como $f, g \in R[a,b] \Rightarrow$

$$f \cdot g = \frac{1}{4} [(f+g)^2 - (f-g)^2] \in R[a,b]. \quad \square$$

Prop: Sean $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y $m, M \in \mathbb{R} \exists$
 $\boxed{m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]}$. Entonces.

$$a) m(b-a) \leq \int_a^b f$$

$$b) \int_a^b f \leq M(b-a)$$

Dem. Sea $P \in P[a,b]$. Entonces,

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta x_k \geq m \sum_{k=1}^n \Delta x_k = m(b-a)$$

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta x_k \leq M \sum_{k=1}^n \Delta x_k = M(b-a)$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \inf \{ L(P,f) : P \in P[a,b] \} = \int_a^b f$$

$$\Rightarrow M(b-a) \geq \inf \{ U(P,f) : P \in P[a,b] \} = \int_a^b f \quad \square$$

Teorema (***) Sea I un intervalo y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en I . Sea $a \in I$ y considere las funciones:

$$\bar{F}(x) = \int_a^x f \quad y \quad F(x) = \int_a^x f, \quad \forall x \in I.$$



Entonces:

a) \bar{F} y \underline{F} son continuas en I .

b) Si f es continua en $c \in I \Rightarrow \bar{F}$ y \underline{F} son derivables en c y ademáis:

$$\bar{F}'(c) = \underline{F}'(c) = f(c)$$

Dem. Sea $M = \sup \{ |f(x)| : x \in I \}$. Sea $c \in I$.

A probar: \bar{F} es continua en c .

Sea $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta = \boxed{\square} > 0$ s.t. $x \in I \cap (c, c+\delta)$,

$$|\bar{F}(x) - \bar{F}(c)| = \left| \int_a^x f - \int_a^c f \right| = \left| \int_a^c f + \int_c^x f \right|$$

$$= \left| \int_c^x f \right| \leq \int_c^x |f| \leq M \int_c^x 1 = M|x-c| \leq \frac{\epsilon}{M} \cdot M = \epsilon$$

De forma análoga se prueba para $x \in I \cap (c-\delta, c)$

$$\Rightarrow \bar{F}$$
 es continua en $c \Rightarrow \bar{F}$ es continua en I .

b) Como f es continua en $c \in I \Rightarrow \exists \delta > 0 \exists$

$$|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon.$$

$$\Rightarrow f(c) - \epsilon \leq f(x) \leq f(c) + \epsilon,$$

con $x \in I \cap (c-\delta, c+\delta)$

$$\Rightarrow \int_c^x [f(c) - \epsilon] \leq \int_c^x f \leq \int_c^x [f(c) + \epsilon]$$

$$\Rightarrow (f(c) - \epsilon)(x-c) \leq \int_c^x f \leq [f(c) + \epsilon](x-c),$$

$x \in I$ y $x > c$.

$$\Rightarrow f(c) - \epsilon \leq \frac{\int_c^x f}{x-c} \leq f(c) + \epsilon$$

$$\Rightarrow f(c) - \epsilon \leq \frac{\bar{F}(x) - \bar{F}(c)}{x-c} \leq f(c) + \epsilon$$

$$\Rightarrow -\epsilon \leq \frac{\bar{F}(x) - \bar{F}(c)}{x-c} - f(c) \leq \epsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\bar{F}(x) - \bar{F}(c)}{x - c} - f(c) \right| \leq \epsilon.$$

Si $\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \bar{F}$ es diferenciable en c y
se tiene que $\bar{F}'(c) = f(c)$. \square

Teorema {Primer teorema fundamental del cálculo}.

Sea $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Sea $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow$

$$F(x) := \int_a^x f, \quad x \in [a, b]$$

Si f es continua en $c \in [a, b] \Rightarrow F$ es
derivable en c y $F'(c) = f(c)$. \square

Teorema (segundo Teorema Fundamental del cálculo) 
(Fórmula Newton-Leibniz).

Sea $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y sea G una función derivable en $(a, b) \ni G' = f$. Entonces,

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

Dem: Sea $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$. Entonces:

$$G(b) - G(a) = \sum_{k=1}^n [G(x_k) - G(x_{k-1})].$$

Como G es derivable en (a, b) , entonces

$$\Rightarrow G(x_k) - G(x_{k-1}) = G'(t_k) \cdot (x_k - x_{k-1}), \quad t_k \in (x_{k-1}, x_k)$$

$$\Rightarrow \sum [G(x_k) - G(x_{k-1})] = \sum f(t_k) \Delta x_k$$

$$\Rightarrow L(P_n, f) = \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$$

$$\leq \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta x_k$$

$$\Rightarrow L(P_n, f) \leq G(b) - G(a) \leq U(P_n, f)$$

$$\text{Si } n \rightarrow \infty \Rightarrow G(b) - G(a) = \int_a^b f(x) dx. \quad \square$$

6. Sesión 6

Teorema 15. Suponga que $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, funciones acotadas y tales que $f(x) = g(x)$, excepto en un número finito de puntos $x \in [a, b]$. Entonces $f \in R[a, b]$ ssi $g \in R[a, b]$, y se tiene que:

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Proposición 13. Suponga que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada e integrable en $[a, r]$, para cada $a < r < b$. Entonces, f es integrable en $[a, b]$ y se tiene:

$$\int_a^b f = \lim_{r \rightarrow b^-} \int_a^r f.$$

Teorema: Suponga que $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, funciones acotadas y tales que $f(x) = g(x)$, excepto en un número finito de puntos $x \in [a, b]$. Entonces $f \in R[a, b]$ si: $g \in R[a, b]$, y se tiene que:

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Dem: Supongamos que f y g difieren en un punto $c \in [a, b]$. Además, como f y g son acotadas, $\exists M > 0$, $|f|, |g| \leq M$, en $[a, b]$.

A probar: Si f es integrable $\Rightarrow g$ es integrable

$$\Leftrightarrow \left[\int_a^b f = \int_a^b g \right] \text{ y } \int_a^b f = \int_a^b g$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b g \leq \int_a^b f \\ \int_a^b f \leq \int_a^b g \end{array} \right.$$

Sea $\epsilon > 0$ y $P \in \mathcal{P}[a, b]$ s.t. $U(f, P) < \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2}$

Considera el refinamiento Q de P s.t.

$$Q = \{I_1, I_2, \dots, I_n\} \quad |I_k| < \delta, k=1, \dots, n.$$

$$\text{donde } \delta = \frac{\epsilon}{8M}.$$

Si g difiere de f en un intervalo I_k , se tiene:

$$\left| \sup_{I_k} (g) - \sup_{I_k} (f) \right| \leq \sup_{I_k} |g| + \sup_{I_k} |f| \leq 2M$$

En el resto de intervalos $\sup_{I_i} (g) - \sup_{I_i} (f) = 0$

$$\Rightarrow |U(g, Q) - U(f, Q)| = \left| \sum_{k=1}^n M_k(g) |I_k| - \sum_{k=1}^n M_k(f) |I_k| \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{i=1}^n [M_i(g) - M_i(f)] \cdot |I_i| \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left| \sup_{I_i}(g) - \sup_{I_i}(f) \right| \cdot |I_i|^{\delta} \\
&\leq 2(2M)(2\delta)^{2m} \\
\sum_i & \left| M_i(g) - M_i(f) \right| = \underbrace{\left[\left(\sup_{I_1}(g) - \sup_{I_1}(f) \right) + \left(\sup_{I_2}(g) - \sup_{I_2}(f) \right) \right]}_{2M} \cdot |I_1|^{\delta} \\
&+ \underbrace{\left[\left(\sup_{I_2}(g) - \sup_{I_2}(f) \right) + \left(\sup_{I_3}(g) - \sup_{I_3}(f) \right) \right]}_{2M} \cdot |I_2|^{\delta} \\
&= (2M + 2M)\delta = (2M)(2\delta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{i=1}^n [M_i(g) - M_i(f)] \cdot |I_i| \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left| \sup_{I_i}(g) - \sup_{I_i}(f) \right| \cdot |I_i|^{\delta} \\
&\leq 4M\delta = 4M\left(\frac{\epsilon}{8M}\right) = \frac{\epsilon}{2} \\
\Rightarrow & |U(g, Q) - U(f, Q)| \leq \frac{\epsilon}{2} \\
\Rightarrow & \int_a^b g \leq U(g, Q) \leq U(f, Q) + \frac{\epsilon}{2} \leq \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \\
\Rightarrow & \text{Por la arbitrariedad de } \epsilon, \text{ se tiene que:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_a^b g \leq \int_a^b f. \\
&\text{Intercambiando los roles de } f \text{ y } g \\
&\int_a^b f \leq \int_a^b g \\
&\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g \\
&\text{De forma similar, se obtiene: } \int_a^b f = \int_a^b g. \\
&\Rightarrow f \in R[a, b] \Leftrightarrow g \in R[a, b]
\end{aligned}$$

Prop: Suponga que $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada e integrable en $[a, r]$, para cada $a < r < b$. Entonces, f es integrable en $[a, b]$ y se tiene:

$$\int_a^b f = \lim_{r \rightarrow b^-} \int_a^r f$$

Ej: Sea $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

• f es acotada en $[0, 1]$

• f es continua en cada subintervalo de la forma $[r, 1]$, $0 < r < 1$.

Integrable $\Rightarrow f \in R[0, 1]$. y $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_r^1 f(x) dx$

Dem: Sea f acotada en $[a, b]$ e integrable en

$[a, r]$, $a < r < b$.

Entonces, $\exists M > 0 \exists |f| \leq M$, en $[a, b]$, $\forall \epsilon > 0$

y definimos:

$$r = b - \frac{\epsilon}{4M},$$

donde ϵ es suficientemente pequeño para que $a < r$.

\Rightarrow Como $f \in R[a, r] \Rightarrow \exists Q \in P[a, r] \ni$

$$U(f, Q) - L(f, Q) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $P = Q \cup \{b\} \in P[a, b]$. (El útimo subintervalo de P es $[r, b]$).

f es acotada en $[a, b] \Rightarrow$ se tiene que:

$$\sup_{[r, b]} (f) - \inf_{[r, b]} (f) \leq 2M$$

$$\Rightarrow U(f, P) - L(f, P) = U(f, Q) - L(f, Q) +$$

$$+ [\sup_{[r, b]} (f) - \inf_{[r, b]} (f)] (b-r) <$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + 2M(b-r) = \frac{\epsilon}{2} + 2M \left(\frac{\epsilon}{4M} \right) = \epsilon$$

$$\Rightarrow U(f, P) - L(f, P) < \epsilon \Rightarrow f \in R[a, b].$$

Además,

$$\left| \int_a^b f - \int_a^r f \right| = \left| \int_a^r f + \int_r^b f - \int_a^r f \right| =$$

7. Sesión 7

Lema 16. Sean $f, g \in R[a, b]$. Para cada $P \in P[a, b]$ y cualquier selección de números t_1, t_2, \dots, t_n , donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, y cualquier selección de números f_1, f_2, \dots, f_n , con $f_k \in \{M_k(f), m_k(f)\}$, considere

$$w(P, f, g) = \sum_{k=1}^n f_k g(t_k) \Delta x_k.$$

Teorema 17. (Bonnet) Sean $f \in R[a, b]$ y g una función no negativa, acotada y monótona decreciente. Entonces, $\exists \mu \in [a, b] \ni$

$$\int_a^b f g = g(a) \int_a^\mu f.$$

Teorema 18. Suponga que $f, g \in C[a, b]$ y f y g , son diferenciables en (a, b) . Suponga, además, que f' , $g' \in R[a, b]$. Entonces,

$$\int_a^b f g' dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f' g dx.$$

Teorema 19. Suponga que $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y que g' es integrable en I . Sea $g(I) = J$. Si $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, entonces, $\forall a, b \in I$, se cumple:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Lema: Sean $f, g \in R[a, b]$. Para cada $P \in P[a, b]$ y cualquier selección de números t_1, t_2, \dots, t_n , donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, y cualquier selección de números f_1, f_2, \dots, f_n , con $f_k \in \{M_k(f), m_k(f)\}$, considere

$$w(P, f, g) = \sum_{k=1}^n f_k g(t_k) \Delta x_k,$$

Entonces, $w(P, f, g)$ converge, en el sentido de Riemann, al valor de $\int_a^b fg$.

Dem.

- Consideremos el caso $g \geq 0$ y sea $\beta > 0$ una constante superior de g . Sea $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists P_1 \in P[a, b] \ni \forall P \leq P_1$

se tiene que $U(P, f) - L(P, f) < \frac{\epsilon}{2\beta}$

Por otro lado, sabemos que $f, g \in R[a, b]$.

- Entonces, $\exists P_2 \in P[a, b] \ni \forall P \leq P_2$ y si consideramos los puntos $t_1, t_2, \dots, t_n \in P$, entonces

$$\left| S(P, fg, \Delta x_k) - \int_a^b fg \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

- Sea $P_\epsilon = P_1 \cup P_2 \Rightarrow \forall P \leq P_\epsilon$, se tiene:

$$\begin{aligned} \left| w(P, f, g) - \int_a^b fg \right| &= \left| w(P, f, g) - w(P, f, g) + w(P, fg, \Delta x_k) + \right. \\ &\quad \left. + S(P, fg, \Delta x_k) - \int_a^b fg \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| w(P, f, g) - S(P, fg, \Delta x_k) \right| + \left| S(P, fg, \Delta x_k) - \int_a^b fg \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n f_k g(t_k) \Delta x_k - \sum_{k=1}^n f(t_k) g(t_k) \Delta x_k \right| + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \left| \sum_{k=1}^n [f_k - f(t_k)] g(t_k) \Delta x_k \right| + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f_k - f(t_k)| \cdot g(t_k) \Delta x_k + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \sum_{k=1}^n [U(P, f) - L(P, f)] g(t_k) \Delta x_k + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2\beta} \sum_{k=1}^n g(t_k) \Delta x_k + \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon\beta}{2\beta} \sum_{k=1}^n \Delta x_k + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq |W(P, f, g) - S(P, fg, f_{t_k}g_{t_k})| + |S(P, fg, f_{t_k}g_{t_k}) - \int_a^b fg| \\
 &\leq \left| \sum_{k=1}^n f_{t_k}g_{t_k} \Delta x_k - \sum_{k=1}^n f(t_k)g(t_k) \Delta x_k \right| + \epsilon/2 \\
 &= \left| \sum_{k=1}^n [f_{t_k} - f(t_k)] g(t_k) \Delta x_k \right| + \epsilon/2 \\
 &\leq \sum_{k=1}^n |f_{t_k} - f(t_k)| \cdot g(t_k) \Delta x_k + \epsilon/2 \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \text{osc}(f) \overset{\leq \beta}{\cancel{g(t_k)}} \Delta x_k + \epsilon/2 \\
 &\leq \beta [U(P, f) - L(P, f)] + \epsilon/2 \leq \frac{\epsilon}{2\beta} \cdot \beta + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
 \end{aligned}$$

CÁMARA

$\Rightarrow W(P, f, g)$ converge, en el sentido de Riemann,
 a $\int_a^b fg$.
 \therefore

$$\begin{aligned}
 g(x) &< 0, \quad \forall x \in [a, b] \\
 \Rightarrow \underbrace{g(x) + k}_{\geq 0}, \\
 -\underbrace{g(x)}_{h(x)} &> 0
 \end{aligned}$$

0:37:31

$\Rightarrow W(P, f, g)$ converge, en el sentido de Riemann,
 a $\int_a^b fg$.

\therefore Si g es negativa, se considera $-g$ o bien
 se encuentra $k \in \mathbb{R}$ s.t. $g(x) + k \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$. \square

Teorema (Bonnet): Sean $f \in R[a, b]$ y g una función no negativa, acotada y monótona decreciente. Entonces, $\exists M \in [a, b] \ni$

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^M f$$

Dem: o) Como g es acotada y monótona decreciente en $[a, b] \Rightarrow g \in R[a, b] \Rightarrow f_g \in R[a, b]$. Entonces, $g(a) > 0$, ya que, si $g(a) = 0 \Rightarrow g(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.

o) Sea $P \in P[a, b]$ y considere:

$$\omega(P, f, g) = \sum_{k=1}^n f_k g_k \Delta x_k, \text{ donde } g_k = g(x_{k-1}), \text{ y}$$

$f_k \in \{M_k(f), m_k(f)\}$. Entonces:

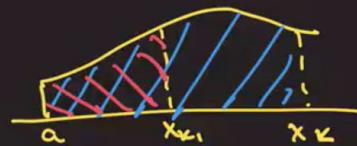
$$m_k(f) \Delta x_k \leq \int_a^{x_k} f \leq M_k(f) \Delta x_k$$

$$\Rightarrow m_k(f) \leq \frac{1}{\Delta x_k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f \leq M_k(f)$$

Sea $F(x) = \int_a^x f, x \in [a, b]$, y sea ω

números $F_k = F(x_k), k = 0, 1, \dots, n$.

$$\Rightarrow F_k - F_{k-1} = \int_a^{x_k} f - \int_a^{x_{k-1}} f$$



Sea $F(x) = \int_a^x f, x \in [a, b]$, y sea ω

números $F_k = F(x_k), k = 0, 1, \dots, n$.

$$\Rightarrow F_k - F_{k-1} = \int_a^{x_k} f - \int_a^{x_{k-1}} f = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f$$

$$\Rightarrow m_k(f) \leq \frac{F_k - F_{k-1}}{\Delta x_k} \leq M_k(f)$$

Continuará...

Teorema: Suponga que $f, g \in C[a, b]$ y f y g no diferenciables en (a, b) . Suponga, además, que $f', g' \in R[a, b]$. Entonces,

$$\int_a^b f'g \, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b fg' \, dx$$

Dem: Sabemos que $(fg)' = f'g + fg'$

$$\Rightarrow \int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'$$

$$\Rightarrow fg \Big|_a^b = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'$$

$$\Rightarrow f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f'g + \int_a^b fg' \quad \square$$

Teorema: Supongamos que $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y que g' es integrable en I . Sea $J = g(I)$.

Si $f: J \rightarrow \mathbb{R}$, entonces, si $a, b \in I$, se cumple.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du.$$

$$\int_1^2 \sqrt{x^2+1} (2x) \, dx = \int_{g(1)}^{g(2)} \sqrt{u} \, du$$

$$u = x^2 + 1 = g(x)$$

$$du = 2x \, dx$$

8. Sesión 8

Teorema 20. Suponga que $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y que g' es integrable en I .

Sea $g(I) = J$. Si $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces, $\forall a, b \in I$, se cumple:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du,$$

Proposición 14. Suponga que $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$ y $f_n \in R[a, b], \forall n$; y suponga que $f_n \rightarrow_{uniforme} f$ sobre $[a, b]$. Entonces:

1. $f \in R[a, b]$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

8.1. Integrales impropias

Definición 9. Suponga que $f : (a, B] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemman integrable en $[c, d] \ni a < c < b$. Entonces, la integral impropia de f sobre $[a, b]$ es:

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f.$$

La integral impropia converge si este límite existe. En otro caso, la integral diverge.

Definición 10. Suponga que $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre $[a, r], r > a$. Entonces, la integral impropia de f es:

$$\int_a^\infty f = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r f.$$

Teorema: Supongamos que $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y que g' es integrable en I . Sea $g(I) = J$.

Si $f: J \rightarrow \mathbb{R}$, entonces, si $a, b \in I$, se cumple.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

TFC (2): Sean $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ s.t. $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.
 $\Rightarrow F$ es continua en $[a, b]$. Si f es continua en $[a, b]$
 $\Rightarrow F' = f$.

TFC (1): Si $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua sobre $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) , con $F' = f$ y $f \in \mathcal{R}[a, b]$, entonces:

Teorema: Supongamos que $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y que g' es integrable en I . Sea $g(I) = J$.

Si $f: J \rightarrow \mathbb{R}$, f es continua en J , entonces, si $a, b \in I$, se cumple.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

TFC (2): Sean $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ s.t. $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.
 $\Rightarrow F$ es continua en $[a, b]$. Si f es continua en $[a, b]$
 $\Rightarrow F' = f$.

TFC (1): Si $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua sobre $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) , con $F' = f$ y $f \in \mathcal{R}[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Dem: Sea $F(x) = \int_a^x f(u) du$. Como f es continua $\Rightarrow F' = f$ (TFC 2). Entonces, notaremos que:

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b (F \circ g)'(x) dx = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

$$\Rightarrow (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

$$\Rightarrow F(g(b)) - F(g(a)) = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_{g(a)}^{g(b)} F'(u) du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

Nota: Prop: Suponga que $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$ y $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$, $\forall n$; y suponga que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ sobre $[a, b]$. Entonces

(i) $f \in \mathcal{R}[a, b]$; y

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

$\begin{array}{c} [a, b] \\ / \quad \backslash \\ \text{cerrado} \quad \text{acotado} \end{array}$

Integrales Impropias:

Def: Suponga que $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable en $[c, b]$, $a < c < b$. Entonces, la integral impropia de f sobre $[a, b]$ es:

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f$$

La integral impropia converge si este límite existe.
En otro caso, la integral diverge.

Ej: Sea $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$, cuando $x \in (0, 1]$, $p > 0$.

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_{\epsilon}^1 =$$

↑
Integral de Riemann.

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{-p+1} - \frac{\epsilon^{-p+1}}{-p+1} \right] = \begin{cases} \text{convergente, } 0 < p < 1 \\ \text{divergente, } p \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Si } p = 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln(x) \Big|_{\epsilon}^1 =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\ln 1 - \ln \epsilon] \rightarrow \text{diverge.}$$

0:50:37

Def: Suponga que $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre $[a, r]$, $r > a$. Entonces, la integral impropia

de f es:

$$\int_a^{\infty} f = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r f$$

Ej: Considere la integral de Frullani:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx, \quad a, b > 0,$$

y donde $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y en t.q.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(\infty) < \infty.$$

• Sea $I = I_1 + I_2$

$$I_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon a}^b \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx ; I_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{b/\epsilon} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$$

Estudiamos I_1 : SPG, hagamos: $0 < a < b$, $\frac{x}{a} = ax$, $t = bx$

$$\Rightarrow I_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\epsilon a}^a \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{\epsilon b}^b \frac{f(t)}{t} dt \right]$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[- \int_a^{\epsilon a} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{\epsilon a}^{\epsilon b} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{\epsilon b}^b \frac{f(t)}{t} dt + \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt \right]$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\epsilon a}^b \frac{f(t)}{t} dt - \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt \right].$$

$$\Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon a}^b \frac{f(t)}{t} dt = ?$$

$$\Rightarrow \int_{\epsilon a}^b \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\epsilon a}^b \frac{f(t)}{t} dt - \int_{\epsilon a}^b \frac{f(0)}{t} dt + \int_{\epsilon a}^b \frac{f(0)}{t} dt =$$

$$= \int_{\epsilon a}^b \left[\frac{f(t) - f(0)}{t} \right] dt + f(0) \int_{\epsilon a}^b \frac{dt}{t}$$

$$= \int_{\epsilon a}^b \left[\frac{f(t) - f(0)}{t} \right] dt + f(0) \cdot \ln t \Big|_{\epsilon a}^b$$

$$\leq \int_{\epsilon a}^b \left| \frac{f(t) - f(0)}{t} \right| dt + f(0) \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$= \int_{\epsilon a}^b |f(t) - f(0)| \cdot \frac{1}{t} dt + f(0) \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$\leq \int_{\epsilon a}^b \max |f(t) - f(0)| \cdot \frac{1}{t} dt + f(0) \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

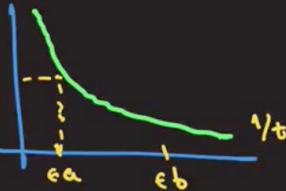
$$= \max |f(t) - f(0)| \int_{\epsilon a}^b \frac{1}{t} dt + f(0) \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$\leq \max |f(t) - f(0)| \left\{ \int_{\epsilon a}^b \frac{1}{t} dt + f(0) \cdot \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right\}$$

$$= \max |f(t) - f(0)| \cdot \frac{1}{t} (\epsilon b - \epsilon a) + f(0) \cdot \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$= \max |f(t) - f(0)| \cdot \left(\frac{b-a}{a} \right) + f(0) \cdot \ln \left(\frac{b}{a} \right) \rightarrow 0$$

$$\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \Rightarrow I_1 = f(0) \ln \left(\frac{b}{a} \right) - \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt$$



9. Sesión 9 y Sesión 10

9.1. Sucesiones de funciones

Definición 11. Una sucesión de funciones $f_n : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ converge puntualmente en $E_0 \subset E$, si $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x) \mathbb{Z}^+ \ni n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. i.e $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

Definición 12. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ y sea la sucesión de funciones (f_n) , $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que (f_n) converge uniformemente a $f(x)$, $\forall x \in E_0 \subset E$, si $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \ni n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in E_0$. Notación $f_n \rightarrow_{unif} f$ (con dos flechas también).

Definición 13. (Criterio de Cauchy) Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ y (f_n) una sucesión de funciones sobre E . Entonces, (f_n) converge uniformemente a alguna función $f(x)$ en $E_0 \subset E$, ssi $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^+ \ni \text{si } m, n \geq N, \text{ entonces } |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in E_0$.

9.2. Series

Definición 14. Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ssi la sucesión de sumas parcial $(s_n)^*$ converge; i.e $\sum a_n$ converge ssi $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L < \infty$.

Dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$$

Definición 15. Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Teorema 21. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces la serie converge.

NOTA. Recuerde el caso de las serie en \mathbb{C} . Entonces dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, los $c_n \in \mathbb{C}$, se considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$, la cual es una serie de número reales.

Sucesiones de Funciones

Def Una sucesión de funciones $f_n: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ converge puntualmente en $E_0 \subset E$, si $\forall \epsilon > 0$

$$\exists N = N(\epsilon, x) \in \mathbb{Z}^+ \text{ s.t. } \forall n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$

Ej: 1) Sea $f_n(x) = x^n$, $\forall x \in [0, 1]$. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

La sucesión converge puntualmente.

** Note que $f_n(x) = x^n$ no continua $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, pero $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ sí es continua.

② Considera $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$, la cual:

$$i) f'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1/n}}, \text{ i.e. } f_n \text{ es diferenciable, para todo } x \in \mathbb{R}.$$

$$ii) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1/n} = \sqrt{x^2} = |x|, \text{ la cual no es diferenciable en } x=0.$$

③ Sea $f_n(x) = \frac{\sin(n^3 x)}{n}$, la cual:

$$i) f'_n(x) = \frac{n^3 \cos(n^3 x)}{n} = n^2 \cos(n^3 x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$ii) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

④ Sea $u_n(x) = nx(1-x^2)^n$, $\forall x \in [0, 1]$

02:17

i) $u_n(x)$ es continua, $\forall x \in [0, 1] \Rightarrow u_n(x) \in \mathbb{R} [0, 1]$

$$\text{ii)} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} nx(1-x^2)^n = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 u_n(x) dx = \int_0^1 nx(1-x^2)^n dx = -\frac{n}{2} \int u^n du =$$

$$w = 1-x^2 \quad \left| = -\frac{n}{2} \cdot \frac{u^{n+1}}{n+1} \right. =$$

$$-\frac{1}{2} dw = x dx \quad \left| = -\frac{n}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1} \right|_0^1$$

$$= \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}$$

$$\text{Además, } \int_0^1 u'_n(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 u_n(x) dx = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} u'_n(x) dx = 0.$$

5) Sea $u_n = [\lfloor n! \pi x \rfloor]$, $\forall x \in [0, 1]$
(u_n es continua, $\forall x \in [0, 1]$)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & \text{si } x \in [0, 1] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

función de Dirichlet
(discontinua $\forall x$)

Def: Sea $E \subset \mathbb{R}$ y sea la sucesión de funciones (f_n) , $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que (f_n) converge uniformemente a $f(x)$, $\forall x \in E_0 \subset E$, si $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon)$ $\forall n \geq N \Rightarrow \forall x \in E_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Notación: $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$; $f_n \rightarrow f$

Teorema (criterio de Cauchy) Sean $E \subseteq \mathbb{R}$ y
 (f_n) una sucesión de funciones sobre E .
Entonces, (f_n) converge uniformemente a alguna función $f(x)$ en $E_0 \subseteq E$, ssi
 $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{Z}^+ \exists n, m > N$, entonces
 $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall x \in E_0$.

Dem: (\Rightarrow) Sabemos $f_n \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} f$, $\forall x \in E_0$.
 $\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \exists n > N \text{ s.t. } |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall x \in E_0$,
y también, si $m > N \Rightarrow |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall x \in E$,
 $\Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n(x) - f(x)) + (f(x) - f_m(x))|$

$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad \forall x \in E_0.$$

(\Leftarrow) $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)|$
↑
convergencia puntual

$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad \forall x \in E_0.$$

Serie:

Def: Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ssi.
la sucesión de sumas parciales $(s_n)^*$ converge;
i.e. $\sum a_n$ converge ssi $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L < \infty$.

*: Dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, se tiene;

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$$

$$\Rightarrow s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_{n-1} + a_n$$

(s_n) : es la sucesión de sumas parciales

Ej: 1) Encuentre la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}}_{a_n}$$

$$\Rightarrow \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \frac{C}{n+1} + \frac{D}{(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow A = C = 0; \quad B = 1, \quad D = -1$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$



$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^\circ$$

$$= 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}} ; \quad a_n = \frac{n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}} =$$

$$= \frac{n - \sqrt{(n+1)(n-1)}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} = \frac{n}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n-1}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}}$$

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$= \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{0}}{\sqrt{1}}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) + \dots + \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}} = 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} , \quad m \in \mathbb{Z}^+$

Ej: Encuentre la serie y su suma, si (S_n) esté dada por:

$$1) \quad S_n = \frac{n+1}{n} . \quad \text{Notar que } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

Sabemos: $S_n = S_{n-1} + a_n \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} =$

$$= \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n-1} = \frac{(n+1)(n-1) - n^2}{n(n-1)} = \frac{n^2-1-n^2}{n(n-1)}$$

\Rightarrow La serie de: $2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

Además, si $n=1 \Rightarrow a_1 = S_1 = \frac{1+1}{1} = 2$

$$2) \quad S_n = \frac{2^n - 1}{2^n} \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} =$$

$$= \frac{2^n - 1}{2^n} - \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} = \frac{(2^n - 1) - 2(2^{n-1} - 1)}{2^n} =$$

$$= \frac{2^n - 2^{n-1} + 2}{2^n} = \frac{1}{2^n}, \quad n=0, 1, 2.$$

$$\Rightarrow \text{La serie es } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$$

$$\bullet \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^0 = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

$$= 2 - 1 = 1$$

\Rightarrow La serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Teorema (criterio de divergencia)

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Dem. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente y sea (S_n) la sucesión de sus sumas parciales $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L < \infty$.

$$\Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [S_n - S_{n-1}] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = L - L = 0$$

Nota: La contrapuesta del teorema anterior es: Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Def: Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Teorema: Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente \Rightarrow la serie converge.

Dem: (a) Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, considera

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \Rightarrow S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^n a_k =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k. Entonces, el criterio de Cauchy se escribe:
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$
 converge si $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \exists$$$

$$\text{si } n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \epsilon, \forall p, p=1,2,3,\dots$$

(b) Considera $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, que es absolutamente convergente i.e. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \exists$

$$\text{si } n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \epsilon, \forall p, p=1,2,\dots$$

Notese que $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \epsilon, \forall p, p=1,2,\dots$

\Rightarrow Por el criterio de Cauchy $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Nota: Recuerde el caso de las series en \mathbb{C} .

\Rightarrow Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, los $c_n \in \mathbb{C}$, se considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$, la cual es una serie de números reales.

10. Sesión 11 y Sesión 12

Prop. Si $|r| < 1 \Rightarrow \left[\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \right] = \frac{1}{1-r}$, y la serie diverge para $|r| \geq 1$ (series geométricas).

Dem: $|r| \neq 1$

$$\text{Considera: } 1 - r^{n+1} = (1-r)(1+r+r^2+\dots+r^n), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 1+r+r^2+\dots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \quad r \neq 1$$

Si $n \rightarrow \infty \Rightarrow 1+r+r^2+\dots+r^n+\dots \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & |r| < 1 \\ \infty, & r = 1 \end{cases}$

$|r|=1 \begin{cases} r=1 \\ r=-1 \end{cases}$. Nótese que, en ambos casos, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n \neq 0$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \neq 0 \Rightarrow \text{La serie diverge}$$

Nota: Recorremos: $1+x+x^2+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$.

Prop: (criterio de comparación). $\exists \alpha_k, \beta_k, c_k$ Términos positivos

- Si $\sum \beta_k$ converge y $0 \leq \alpha_k \leq \beta_k \Rightarrow \sum \alpha_k$ converge.
- Si $\sum c_k$ diverge y $0 \leq \alpha_k \leq c_k \Rightarrow \sum \alpha_k$ diverge.

Dem: (i) Sea $\sum \beta_k$ converge \Rightarrow La sucesión de sumas parciales de la serie forma una sucesión de Cauchy \Rightarrow Para cada $K \in \mathbb{Z}^+$ y para cada $p = 1, 2, \dots$ se tiene que: $\alpha_{K+p} + \alpha_{K+p+1} + \dots + \alpha_{K+p+p} \leq \beta_K + \beta_{K+1} + \dots + \beta_{K+p}$, $p = 1, 2, \dots$ \Rightarrow La sucesión de sumas parciales de $\sum \alpha_k$ es de Cauchy $\Rightarrow \sum \alpha_k$ converge.

ii) Supongamos que $\sum c_k$ diverge y que $0 \leq \alpha_k \leq c_k$. En decir, la serie diverge a ∞ .

\Rightarrow Dado $M > 0 \exists K_0 \in \mathbb{Z}^+$ para $K > K_0$, se tiene

$$c_1 + c_2 + \dots + c_K > M$$

\Rightarrow Se cumple que $d_1 + \dots + d_K \geq c_1 + c_2 + \dots + c_K > M$

 \Rightarrow La serie $\sum d_k$ diverge. \square

Prop: (p-series): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge para $p > 1$ y diverge para $p \leq 1$.

Dem: ① Caso $p = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (criterio de condensación)

② Caso $p \leq 1$, entonces, la serie es de término

positivo y sabemos que, para $p \leq 1$, se tiene $n^p \leq n^1 \Rightarrow \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow$ por comparación $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge.

③ $p \geq 1$ (criterio de comparación)

Prop: (criterio de la razón)

④ Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existe y es menor que 1 \Rightarrow La serie $\sum a_n$ converge absolutamente. ⑤ Si el límite tiende a infinito o es mayor que 1, \Rightarrow La serie diverge. ⑥ Si el límite es 1, el criterio no es concluyente.

Dem: ④ Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r < 1$

Sea $r' \in \mathbb{R}$ y $r < r' < 1$ y sea $N_0 \in \mathbb{Z}^+$, si $n \geq N_0$

$\Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < r'$. Entonces, si $K \geq N_0$, se tiene:

$$|a_K| \leq r' |a_{K-1}| \leq (r')^2 |a_{K-2}| \leq \dots \leq (r')^{K-N_0} |a_{N_0}|$$

$$\Rightarrow$$
 La serie $\sum_{K=N_0}^{\infty} |a_K| \leq \sum_{K=N_0}^{\infty} |a_{N_0}| \cdot (r')^{K-N_0}$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} |a_{N_0}| \cdot (r')^K$$

$\therefore \sum_{K=0}^{\infty} |a_K|$ converge por comparación con la serie geométrica.

⑤ Considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, la cual es convergente por p-serie. P.d.o.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{n+1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Por otra parte, la serie divergente $1+1+1+\dots$

$$\text{es t.g. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$$

⑥ Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r > 1$. Sea $r' \in \mathbb{R} \Rightarrow r > r' > 1$ y sea $N_0 \in \mathbb{Z}^+$ si $n \geq N_0$, entonces $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > r' \Rightarrow |a_{n+1}| > r' |a_n| > (r')^2 |a_{n-1}| > \dots > (r')^{K-N_0} |a_{N_0}|$

Teorema (condensación): Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq a_n > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$
 si (a_n) es decreciente. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

convergen o divergen de forma conjunta

$$\text{Ej.: 1) Sea } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \Rightarrow \text{considere } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1. \text{ Como } \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ diverge } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge.}$$

$$\text{2) Sea } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \text{ Entonces, consideremos la serie}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \left(\frac{1}{(2^n)^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n + 1 - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$

$$3.- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n [\ln(n)]^2} \Rightarrow \text{considere } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n [\ln(2^n)]^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(2^n)]^2} = \underbrace{\frac{1}{(\ln 2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n [\ln(n)]^2} \text{ converge por condensación.}$$

$$4) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n) \sqrt{\ln(\ln n)}}. \text{ Considerar}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=3}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n (\ln 2^n) \sqrt{\ln(\ln 2^n)}} =$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2) n \sqrt{\ln(\ln 2)}} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln(\ln 2)}}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n \sqrt{\ln(2^n \ln 2)}}$$

Condensación

$$= \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln 2^n + \ln(\ln 2)}} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n \ln 2 + \ln(\ln 2)}}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{2^n \ln 2 + \ln(\ln 2)}} \Rightarrow$$

Condensación

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{\sqrt{2^x \ln 2 + \ln(\ln 2)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2}{2 \sqrt{2^x \ln 2 + \ln(\ln 2)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2^x \ln 2 + \ln(\ln 2)}}{\ln 2} \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \text{La serie diverge.}$$

Ejercicio: $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln(\ln n))}.$

Nota: 1) criterio de la integral
 sea $f(x)$ una función continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$, y sea $f(n) = a_n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces,
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge.

② Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y considere $\int f(x) dx$
 Sea $x = 2^t \Rightarrow dx = 2^t \ln 2 dt$
 $\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx = (\ln 2) \int_0^{\infty} 2^t f(2^t) dt$
 Si $x=1 \Rightarrow t=0 \Rightarrow 2^t=1$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $\int_0^{\infty} f(2^t) dt$
 Si $x=\infty \Rightarrow t=\infty$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n f(2^n) a_n$ converge.

Teorema (2º criterio de la razón).
 Considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, y sean

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2n}}{a_n} \right| = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2n+1}}{a_n} \right| = L_2.$$

Si:
 i) $L_1 < \frac{1}{2}$ y $L_2 < \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
 ii) $L_1 > \frac{1}{2}$ y $L_2 > \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
 iii) $L_1 = \frac{1}{2}$ y $L_2 = \frac{1}{2}$, o si $L_1 > \frac{1}{2}$ y $L_2 < \frac{1}{2}$.
 O viceversa, el criterio no es concluyente.

Ej.: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$. Utilizando el 2º criterio de la razón:

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n}{8n^3+4n}}{\frac{n}{n^3+1}} =$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(n^3+n)}{n(8n^3+1)} &= \frac{1}{4} = L_1 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{n}}{\frac{(2n+1)^3+1}{n^3+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(n^3+1)}{n[(2n+1)^3+1]} \\ &= \frac{1}{4} = L_2. \end{aligned}$$

Como $L_1 < \frac{1}{2}$ y $L_2 < \frac{1}{2} \Rightarrow$ la serie converge.

$$\text{Ej: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(2n)}{\ln(n)}}{\frac{n^2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2n)}{\ln(n)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n} \cdot 2}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{n}}{\frac{(2n+1)^2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \ln(2n+1)}{(2n+1)^2 \ln n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2n+1)}{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n+1} (2)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+1} = 1 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} = L_2$$

$\Rightarrow L_1 = \frac{1}{4} < L_2 \Rightarrow$ la serie converge.
 $L_2 = \frac{1}{4} < 1/2$

$$\text{Ej: } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n} \ln(2n)}}{\frac{1}{\sqrt{n} \ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \ln(n)}{\sqrt{2n} \sqrt{n} \ln(2n)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{\ln(2n)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n} \cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = L_1. \end{aligned}$$

$$\underbrace{\sqrt{2} < 2}_{\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+1} \ln(2n+1)}}{\frac{1}{\sqrt{n} \ln n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{\sqrt{2n+1} \ln(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \cdot \frac{\ln n}{\ln 2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = L_2 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n+1} \cdot 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow L_1 > 1/2 \\ L_2 > 1/2 \\ \Rightarrow \text{la serie diverge.} \end{array} \right.$$

Teorema (criterio de Raabe): Sea $\sum a_n$, $a_n > 0$, y asumimos que $L = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$.

i) Si $L > 1 \Rightarrow$ la serie converge.

ii) Si $L < 1 \Rightarrow$ la serie diverge.

iii) Si $L = 1 \Rightarrow$ el criterio no es concluyente.

Ej: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Por Raabe:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{1/n^3}{1/(n+1)^3} - 1 \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{(n+1)^3 - n^3}{n^3} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{3n^2 + 3n + 1}{n^3} \right) = 3 > 1 \Rightarrow \text{la serie converge.} \end{aligned}$$

Ej: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$; Por Raabe, se tiene.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{n!/2^n}{(n+1)/2^{n+1}} - 1 \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{n! \cdot 2^{n+1}}{(n+1)! \cdot 2^n} - 1 \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{2}{n+1} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{2-n-1}{n+1} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-n^2-1}{n+1} \rightarrow -\infty < 1 \Rightarrow \text{la serie diverge.} \end{aligned}$$

$$\text{Ej: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad ; \text{ Recordemos.}$$

$$(2n)!! = (2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 2$$

$$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 1$$

Por Raabe,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}} - 1 \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{(2n-1)!!(2n+2)(2n)!!}{(2n)!!(2n+1)(2n+3)!!} - 1 \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{(2n+2) - (2n+1)}{(2n+1)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

\Rightarrow la serie diverge.

11. Sesión 13

Teorema (criterio de Kummer): Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ una serie divergente $\Rightarrow b_n > 0$. Además, considere

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right).$$

- 1) Si $\alpha > 0 \Rightarrow \sum a_n$ converge.
- 2) Si $\alpha < 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.
- 3) Si $\alpha = 0$, el criterio no es concluyente.

Nota:

① Hagamos $b_n = 1$, i.e. considere la serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, $b_n > 0$. Entonces:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \alpha \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1 + \alpha}$$

• Si $\alpha > 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Leftrightarrow \sum a_n$ converge

• Si $\alpha < 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Leftrightarrow \sum a_n$ diverge.

• Si $\alpha = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Leftrightarrow$ El criterio no es concluyente.

i.e. Kummer con $b_n = 1$ es el criterio de la razón para series de términos positivos

② Sea $b_n = \frac{1}{n} > 0$ y $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Entonces,

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1/n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{1/(n+1)} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \frac{a_n}{a_{n+1}} - n \right] - 1$$

$$\Rightarrow \alpha + 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = L$$

$\alpha > 0 \Leftrightarrow \sum a_n$ converge $\Leftrightarrow L > 1$
 $\alpha < 0 \Leftrightarrow \sum a_n$ diverge $\Leftrightarrow L < 1$
 $\alpha = 0 \Leftrightarrow L = 1 \Leftrightarrow$ El criterio

Deur (Kummer): Sea $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right]$.

Hagamos $p_n = \frac{1}{b_n}$. Entonces:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \right].$$

Caso $\alpha > 0$: Sea $r \in \mathbb{R}$ q $0 < r < \alpha$ $\exists n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} < p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1}$$

Notese que: $n=1: p_1 a_1 - p_2 a_2 > r a_2$
 $n=2: p_2 a_2 - p_3 a_3 > r a_3$
 \vdots
 $n=m-1: p_{m-1} a_{m-1} - p_m a_m > r a_m$

$$\Rightarrow p_1 a_1 - p_m a_m > \sum_{k=1}^m r a_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^m a_k < \frac{p_1 a_1 - p_m a_m}{r} = \text{constante}$$

i.e. La sucesión de sumas parciales

$$S_m = \sum_{k=1}^m a_k.$$

- i) Es creciente; y
- ii) Es acotada

\Rightarrow La serie $\sum a_k$ converge.

$$\left\{ \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n(n+1)} \right\} \leq K(k)$$

Teorema (Criterio de la integral):

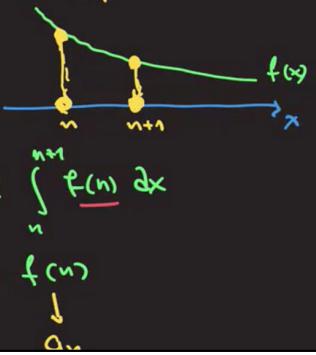
Supongamos que f es una función integrable, positiva y decreciente en $[1, \infty)$ y que $f(n) = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\sum a_n$ converge si $\int_1^\infty f(x) dx$ converge

Demos, sea $x \in [n, n+1]$

$$\Rightarrow f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx$$

$$\Rightarrow f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$$



$$\Rightarrow a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq a_n, \quad n=1,2,\dots$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \leq \int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Si $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

Si $\int_1^{\infty} f(x) dx$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Teorema (Criterio de comparación en el límite). Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series de términos positivos y si $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty \Rightarrow$ ambas series convergen o divergen.

Dem: Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+$

$\exists n > N \Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \epsilon$

$\Leftrightarrow -\epsilon < \frac{a_n}{b_n} - L < \epsilon$

$\Leftrightarrow L - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \epsilon \Rightarrow (L - \epsilon)b_n < a_n < (L + \epsilon)b_n$

$$\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} (L - \epsilon)b_n < \sum_{n=N}^{\infty} a_n < \sum_{n=N}^{\infty} (L + \epsilon)b_n$$

Si $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

Si $\sum a_n$ converge $\Rightarrow \sum b_n$ converge

Si $\sum b_n$ diverge $\Rightarrow \sum a_n$ diverge

Si $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge. \square

Teorema (Leibniz) (series alternantes)

Suponga que (a_n) es una sucesión decreciente de números positivos $\geq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$
 converge.

Dem: Sea $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k$. Considera:

(1) $s_{2n} \leq s_{2n+2}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. En efecto

$$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1}(-1)^{2n+2} + a_{2n+2}(-1)^{2n+3}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

$$= s_{2n} + \underbrace{a_{2n+1} - a_{2n+2}}_{\geq 0}, \quad a_n \text{ es decreciente}$$

$$\Rightarrow s_{2n} \leq s_{2n+2}.$$

(2) $s_{2n+1} \geq s_{2n+3}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. En efecto,

$$s_{2n+3} = s_{2n+1} + a_{2n+2}(-1)^{2n+3} + a_{2n+3}(-1)^{2n+4}$$

$$= s_{2n+1} - \underbrace{a_{2n+2} + a_{2n+3}}_{\leq 0} \Rightarrow s_{2n+3} \leq s_{2n+1}$$

(3) $s_{2n+1} \geq s_{2n}$, $\forall n, l \in \mathbb{Z}^+$. En efecto:

$$s_{2n+1} = s_{2n} + (-1)^{2n+2} a_{2n+1}$$

$$= s_{2n} + a_{2n+1}$$

$$\Rightarrow s_{2n+1} \geq s_{2n}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & & & & & & & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & & & \\ & s_2 & s_4 & s_6 & s_8 & \dots & & & s_7 & s_5 & s_3 & s_1 & & \\ \end{array}$$

$\Rightarrow s_{2n}$ es creciente y acotada superiormente

s_{2n+1} es decreciente y acotada inferiormente

\Rightarrow Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = x \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = y$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} [s_{2n+1} - s_{2n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} \quad \text{D}$$

$$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge.