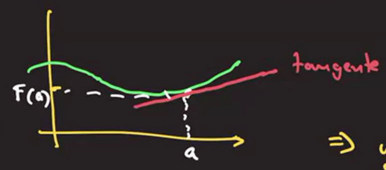
# Diferenciación en $\mathbb{R}^n$

**Nota.** Sea $F: \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow F$ es diferenciable en $x = a \in \mathcal{X}$ significa que la gráfica de $F$ tiene una recta tangente en $(a, F(a))$.




La ecuación de esta recta tangente

$$y - F(a) = F'(a)\,(x-a)$$

$$\Rightarrow y = F(a) + F'(a)\,(x-a).$$

Hagamos $H(x) = F(a) + F'(a)\,(x-a)$. Nótese que:

i) $H(a) = F(a)$

ii) $H'(a) = F'(a)$

Es decir:

i) La recta $y = H(x)$ pasa por $F(a)$

ii) la pendiente de $H(x)$ en $x = a$ es igual a $F'(a)$.

Interpretación geométrica:

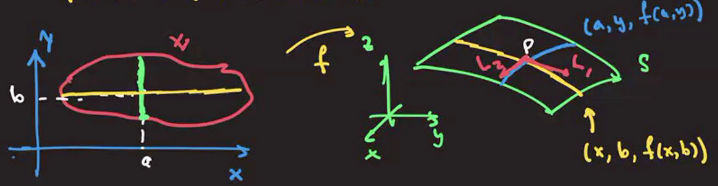
$F$ es diferenciable en $a$ si $H(x)$ aproxima bien a $F$ en una vecindad de $a$

i.e. si existe $F'(a)$.

② Sea $f: \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathcal{X}$ es un abierto.

(a la gráfica de $f$ se le llama superficie)

¿Cuál es el plano tangente a $y = f(x,y)$ en el punto $P\,(a, b, f(a,b))$.




Suponiendo la existencia de $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$,

Las ecuaciones de las rectas tangente $L_1$ y $L_2$ a $S$ en el punto $P$, están dadas por:

$$L_1(t) = (a, b, f(a,b)) + t\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right)$$

$$L_2(t) = (a, b, f(a,b)) + t\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

$\Rightarrow$ vectores paralelos a estas tangente rectas son, respectivamente:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,\hat{k} \\ u_2 &= \hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,\hat{k} \end{aligned}\right\} \text{vectores tangente a la superficie en } (a, b, f(a,b))$$


Un vector normal al plano tangente a la superficie en $(a, b, f(a,b))$ es:

$$n = u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \partial f/\partial x \\ 0 & 1 & \partial f/\partial y \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,\hat{\imath} - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,\hat{\jmath} + \hat{k}$$

$\Rightarrow$ El plano tangente está dado por la ecuación:

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b) + (z - f(a,b)) = 0$$

$$\Rightarrow z = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b) + f(a,b)$$

(plano tangente a la superficie en $P$).

Hagamos $h(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b)$

Nótese: ① $h(a,b) = f(a,b)$

② $\frac{\partial h}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ ; $\frac{\partial h}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$

Problema:

① En funciones de una variable la existencia de la derivada y de la recta tangente coinciden. ¿Sucede lo mismo con superficies (i.e. entre

② la existencia de derivadas parciales y la existencia del plano tangente?

NO. Considere $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ni$

$$f(x,y) = \big||x| - |y|\big| - |x| - |y|$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$\Rightarrow z = 0$, el cual no "aproxima bien" a la superficie cerca de $(0,0)$.

¿Qué significa "aproxima bien"?

- En funciones de una variable:

$$\Rightarrow F'(a) = \lim_{x\to a} \frac{F(x) - F(a)}{x-a}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \left[\frac{F(x) - F(a)}{x-a}\right] - F'(a) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \left[\frac{F(x) - F(a)}{x-a} - F'(a)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \left[\frac{F(x) - (F(a) + F'(a)(x-a))}{x-a}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \left[\frac{F(x) - H(x)}{x-a}\right] = 0$$

$H(x) \to F(x)$ más rápido que $x \to a$.

**Def.** Sea $X$ un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sea

$$f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Decimos que $f$ es diferenciable en $(a,b) \in X$ si existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ y si la función

$$z = h(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

es una buena aproximación lineal a $f$ cerca de $(a,b)$, i.e.

si $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - h(x,y)}{\|(x,y) - (a,b)\|} = 0$$

$$h(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-b) + f(a,b)$$

$$= \nabla f \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + f(a,b)$$

$$\uparrow$$

$$F'(a) \cdot (x-a) + F(a)$$