Universidad del Valle de Guatemala

MM2034 - 1 semestre - 2021

Licenciatura en matemática aplicada

# ANÁLISIS DE VARIABLE REAL 2

Catedrático: Dorval Carías

*Estudiante:* Rudik Roberto Rompich Cotzojay
*Carné:* 19857
*Correo:* rom19857@uvg.edu.gt

14 de julio de 2021

# Índice

# 1. Sesión 1 - 5 de julio de 2021

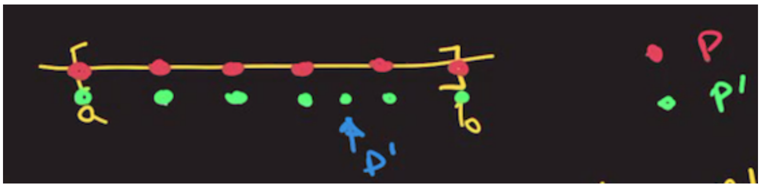
**NOTA.** *La teoría a continuación se refiere a funciones acotadas.*

**Definición 1.** *Una* ***partición*** *$P$ del intervalo $[a,b]$ es un conjunto finito: $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ donde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.*

**NOTA.** *$P[a,b]$ denota el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.*

**NOTA.**

1. *Una partición $P' \in P[a,b]$ es un* ***refinamiento*** *de $P \in P[a,b]$, si $P \subset P'$*

   ***Notación:*** *si $P \subset P' \implies$ Se denota: $P' \preceq P$.*

   a) *$P \preceq P (\iff P \subset P)$, $\forall P \in P[a,b]$.*

   b) *Si $P' \preceq P$ y $P \preceq P' \implies P = P'$.*

   c) *Si $P' \preceq P$ y $P'' \preceq P' \implies P'' \preceq P$.*

   $\implies$ *La relación $\preceq$ es de orden parcial.*

2. *Para $P \in P[a,b], \Delta x_k := x_k - x_{k-1}$, es la longitud del $k$-ésimo subintervalo en la partición. Nótese que:*

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$$

3. *La norma o malla de $P \in P[a,b]$ se define: $\|P\| = \text{máx}\{\Delta x_k : k = 1, 2, \cdots, n\}$. Note que, si $P' \preceq P \implies \|P'\| \preceq \|P\|$.*

**Definición 2.** *Sea $P \in P[a,b]$ y sean, para $k = 1, \cdots, n$,*

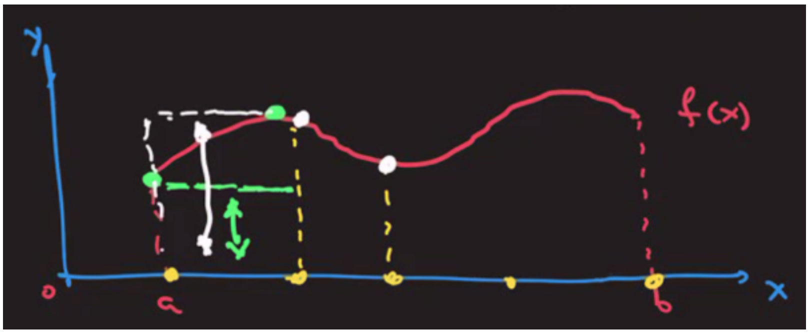
$$M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$m_k(f) = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

*Entonces, los números:*

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k, \quad L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\Delta x_k$$

*se llaman la suma superior e inferior de Darboux de $f$ para partición $P$.*

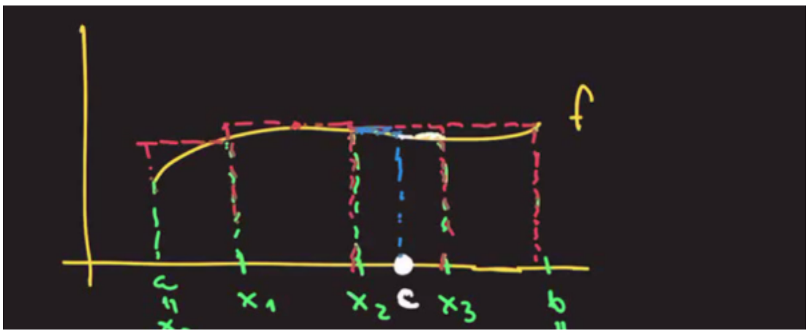



**Proposición 1.** *Sean $P, P', P_1, P_2 \in P[a,b]$. Entonces,*

1.
$$P' \preceq P \implies P' \preceq P \implies \begin{cases} U(P',f) \leqslant U(P,f) \\ L(P',f) \geqslant L(P,f) \end{cases}$$

2.
$$L(P_1,f) \leq U(P_2,f)$$

*Demostración.* Tenemos:



1. Sea $P' = P \cup \{c\}$ y suponga que $c \in [x_{i-1}, x_i] \subset P \implies U(P', f) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} M_k(f)\Delta x_k + M'(c - x_{i-1}) + M''(x_i - c)$. Como $M' \leq M_i(f)$ y $M'' \leq M_i(f)$. $\implies U(P', f) \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} M_k(f)\Delta x_k + M_i(f)\underbrace{[(c - x_{i-1}) + (x_i - c)]}_{\Delta x_i} = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k = U(P, f)$.

2. Como $P_1, P_2 \in P[a, b]$, sea $P = P_1 \cup P_2$. Como $P \preceq P_1$ y $P \preceq P_2$, entonces $L(P_1, f) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq U(P_2, f)$.

■

**Definición 3.** *1. Se define la integral superior de Riemman de $f$ sobre $[a, b]$.*

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P, f) : P \in P[a, b]\}$$

*2. Se define la integral interior de Riemman de $f$ sobre $[a, b]$.*

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P, f) : P \in P[a, b]\}$$

**Ejemplo 1.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R} \ni f(x) = c$.*

*1. $U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} c\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c(b - a) \implies \overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P, f) : P \in P[a, b]\} = c(b - a)$.*

*2. $L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} c\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c(b - a) \implies \underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P, f) : P \in P[a, b]\} = c(b - a)$*

**Ejemplo 2.** *Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R} \ni$*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{I}rr \end{cases}$$

*Sea $P \in P[0, 1]$. Entonces,*

*1. $U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} 1\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1 - 0 = 1 \implies \overline{\int_0^1} f = \inf\{\underbrace{U(P, f)}_{1} : P \in P[0, 1]\} = 1$.*

*2. $L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} 0\Delta x_k = 0 \implies \underline{\int_0^1} f = \sup\{\underbrace{L(P, f)}_{0} : P \in P[0, 1]\} = 0$.*

## Integral de Riemann

Cauchy → Riemann → Darboux; Riemann-Stieltjes → Lebesgue → HK; Dani, Áscoli

**Nota:** La teoría a continuación se refiere a funciones acotadas.

**Def:** Una *partición* $P$ del intervalo $[a,b]$ es un conjunto finito: $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ donde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

**Notación:** $\mathcal{P}[a,b]$ denota al conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.

**Notas:**

1) Una partición $P' \in \mathcal{P}[a,b]$ es un refinamiento de $P \in \mathcal{P}[a,b]$, si $P \subset P'$


**Notación:** si $P \subset P' \Rightarrow$ se denota: $P' \leq P$

i) $P \leq P$ ($\Leftrightarrow P \subset P$), $\forall P \in \mathcal{P}[a,b]$.

ii) Si $P' \leq P$ y $P \leq P' \Rightarrow P = P'$

iii) Si $P' \leq P$ y $P'' \leq P' \Rightarrow P'' \leq P$

$\Rightarrow$ la relación $\leq$ es de orden parcial.

2) Para $P \in \mathcal{P}[a,b]$, $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$, es la longitud del $k$-ésimo subintervalo en la partición. Nótese que:

•) $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$

3) La <u>norma</u> o <u>malla</u> de $P \in \mathcal{P}[a,b]$ se define: $\|P\| = \max\{\Delta x_k : k = 1, 2, \dots, n\}$

Note que, si $P' \leq P \Rightarrow \|P'\| \leq \|P\|$

**Def:** Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$ y sean, para $k = 1, \dots, n$,

$$M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

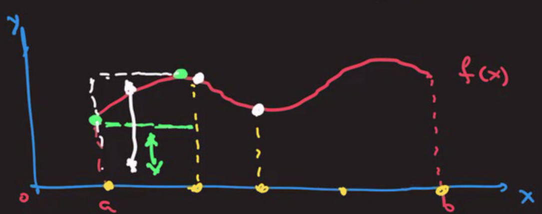


$$m_k(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Entonces, los números:

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta x_k, \quad L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\,\Delta x_k$$

se llaman la suma superior e inferior de Darboux de $f$ para la partición $P$.



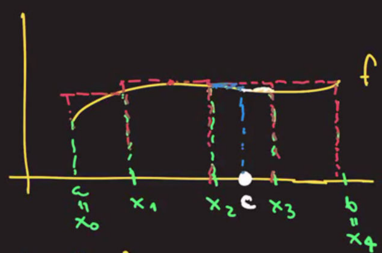

**Prop:** Sean $P, P', P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$. Entonces,

1) $P' \leq P \Rightarrow \begin{cases} U(P',f) \leq U(P,f) \\ L(P',f) \geq L(P,f) \end{cases}$

2) $L(P_1,f) \leq U(P_2,f)$

**Dem:**

(1)




Sea $P' = P \cup \{c\}$ y suponga que $c \in [x_{i-1}, x_i] \subset P$

$$\Rightarrow U(P',f) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} M_k(f)\,\Delta x_k + M'(c - x_{i-1}) + M''(x_i - c).$$

Como $M' \leq M_i(f)$ y $M'' \leq M_i(f)$, entonces

$$\Rightarrow U(P',f) \leq \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} M_k(f)\Delta x_k + M_i(f)\Big[\underbrace{(\cancel{y}-x_{i-1})+(x_i-\cancel{y})}_{\Delta x_i}\Big]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k = U(P,f).$$

2) Como $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$, sea $P = P_1 \cup P_2$.

Como $P \leq P_1$ y $P \leq P_2$, entonces

$$L(P_1,f) \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq U(P_2,f)$$

$\square$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

2) La integral inferior de Riemann de $f$ sobre $[a,b]$ se define

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

Ej: 1) Sea $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \ni f(x) = c$

$$\Rightarrow U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} c\,\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = c(b-a)$$

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} c\,\Delta x_k = c(b-a)$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\} = c(b-a)$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\} = c(b-a)$$

Ej 2) Sea $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ni f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I}rr \end{cases}$

Sea $P \in \mathcal{P}[0,1]$. Entonces

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} 1\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = 1-0 = 1$$

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} 0\,\Delta x_k = 0$$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1} f = \inf\{U(\underbrace{P,f}_{1}) : P \in \mathcal{P}[0,1]\} = 1$$

$$\underline{\int_0^1} f = \sup\{L(\underbrace{P,f}_{0}) : P \in \mathcal{P}[0,1]\} = 0$$

## 2. Sesión 2

**Proposición 2.** $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

**Definición 4.** *Se dice que una función acotada $f$ es Riemann integrable sobre $[a, b]$, si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En este caso:*

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

**Definición 5.** *El conjunto de funciones Riemann integrables sobre $[a, b]$ se denota $R[a, b]$.*

**Teorema 1.** *(Criterio de Cauchy-Riemann para integrabilidad) Una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable sobre $[a, b]$ ssi $\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon \in P[a, b] \ni \forall P \leqslant P_\varepsilon$, se tiene que*

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon.$$

**Teorema 2.** *Sea $f \in R[a, b]$. Entonces, $f \in R[c, d]$, para cualquier $[c, d] \subset [a, b]$.*

**Definición 6.** *Sea $P \in P[a, b]$ y sea $t_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset P$, $k = 1, \cdots, n$. Una suma del tipo:*

$$S(P, f, \{t_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \Delta x_k$$

*se llama suma de Riemann de $f$ para la partición $P$ y con la muestra $t_1, \cdots, t_n$.*

**Teorema 3.** *Los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *$f \in R[a, b]$.*

2. *Existe un número $A$ con la siguiente propiedad: $\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon \in P[a, b] \ni P \leqslant P_\varepsilon$.*

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1} f = \inf\{\overset{1}{U(P,f)} : P \in \mathcal{P}[0,1]\} = 1$$

$$\underline{\int_0^1} f = \sup\{\overset{0}{L(P,f)} : P \in \mathcal{P}[0,1]\} = 0$$

**Prop:** $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$



**Dem:** Sea $\epsilon > 0$. Como $\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$

$\Rightarrow \exists\, P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b] \ni U(P_\epsilon, f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon$

$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f + \epsilon$ es cota superior de

$\{L(P,f) : P \in [a,b]\} \Rightarrow \sup\{L(P,f) : P \in [a,b]\} < \overline{\int_a^b} f + \epsilon \Rightarrow \underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f + \epsilon$. Dada la arbitrariedad de $\epsilon$, se tiene:

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$$

□

**Def:** Se dice que una función acotada $f$ es Riemann integrable sobre $[a,b]$, si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En este caso,

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

El conjunto de funciones Riemann integrables sobre $[a,b]$ se denota $\mathcal{R}[a,b]$.

**Teorema** (criterio de Cauchy Riemann para integrabilidad)

Una función acotada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable sobre $[a,b]$ ssi $\forall \epsilon > 0\ \exists\, P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b] \ni \forall P \le P_\epsilon$, se tiene que

$$0 \le U(P,f) - L(P,f) < \epsilon.$$

**Dem:**

$(\Rightarrow)$ Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Sea $\epsilon > 0$ y sea

$$A = \int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

$\Rightarrow$ Existen particiones $P', P'' \in \mathcal{P}[a,b] \ni$

$$U(P', f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon/2$$

$$L(P'', f) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\epsilon}{2}$$

Sea $P_\epsilon = P' \cup P''$ y considere $P \le P_\epsilon$. Entonces,

$A - \frac{\epsilon}{2} < L(P'', f) \le L(P_\epsilon, f) \le L(P,f) \le$
$\le U(P,f) \le U(P_\epsilon, f) \le U(P', f) < A + \epsilon/2$

Entonces: $A - \epsilon/2 < L(P,f)$, y
$U(P,f) < A + \epsilon/2$

$$\Rightarrow \begin{aligned} -\cancel{A} + \epsilon/2 &> -L(P,f) \\ \cancel{A} + \epsilon/2 &> U(P,f) \quad + \\ \hline \epsilon &> U(P,f) - L(P,f). \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Sea $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists\, P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b] \ni P \le P_\epsilon$, se tiene que $U(P,f) - L(P,f) < \epsilon \iff U(P,f) < L(P,f) + \epsilon$

Para esta partición se tiene que:

$$\overline{\int_a^b} f \le U(P,f) < L(P,f) + \epsilon \le \underline{\int_a^b} f + \epsilon$$

$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f < \underline{\int_a^b} f + \epsilon$. Por la arbitrariedad de $\epsilon$, se tiene que: $\overline{\int_a^b} f \le \underline{\int_a^b} f$. Por teorema anterior, sabemos que:

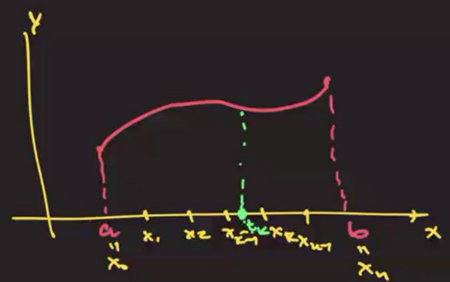
$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b].$$

□

**Teorema:** Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Entonces, $f \in \mathcal{R}[c,d]$, para cualquier $[c,d] \subset [a,b]$. □

0:45:33




$A_1, A_2, \dots, A_n$

$\{t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_n\}$

$m_k(f) \le f(t_k) \le M_k(f)$

---

de $\epsilon$, se tiene que: $\overline{\int_a^b} f \le \underline{\int_a^b} f$. Por teorema anterior, sabemos que:

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]. \qquad \square$$

**Teorema**: Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Entonces, $f \in \mathcal{R}[c,d]$, para cualquier $[c,d] \subset [a,b]$. $\square$

**Def**: Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$ y sea $t_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset P$, $k = 1, \dots, n$. Una suma del tipo:

---

$$S(P, f, \{t_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, \Delta x_k$$

se llama suma de Riemann de $f$ para la partición $P$ y con la muestra $t_1, \dots, t_n$.

**Teorema**: Los enunciados siguientes son equivalentes:

a) $f \in \mathcal{R}[a,b]$

b) Existe un número $A$ con la siguiente propiedad: $\forall \epsilon > 0$ $\exists P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b]$ $\ni$ $P \preceq P_\epsilon$

---

$t_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset [a,b]$, $k = 1, \dots, n$, se cumple: $|S(P, f, \{t_k\}) - A| < \epsilon$.

$$A = \lim_{\boxed{\substack{\|P\| \to 0 \\ n \to \infty}}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, \Delta x_k$$

Riemann

Dem:

$a \Rightarrow b$: Sabemos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y suponga que $A = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Sea $\epsilon > 0$ y considere particiones $P', P'' \in \mathcal{P}[a,b]$, tales que

---

$$U(P,f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon, \quad P \preceq P'$$

$$L(P,f) > \underline{\int_a^b} f - \epsilon, \quad P \preceq P''$$

Sea $P_\epsilon = P' \cup P''$ y sea $P \preceq P_\epsilon$. Entonces,

$$\underline{\int_a^b} f - \epsilon < L(P,f) \le S(P, f, \{t_k\}) \le U(P,f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon$$

$$\Rightarrow \overset{A}{\cancel{\underline{\int_a^b} f}} - \epsilon < S(P, f, \{t_k\}) < \overset{A}{\cancel{\overline{\int_a^b} f}} + \epsilon$$

$$\Rightarrow -\epsilon < S(P, f, \{t_k\}) - A < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |S(P, f, \{t_k\}) - A| < \epsilon.$$

# 3. Sesión 3

**Definición 7.** *La* ***oscilación*** *de una función acotada $f$ sobre un conjunto $A$ es* $\mathrm{osc}_A(f) := \sup_A(f) - \inf_A(f)$.

**NOTA.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada, y si $P \in P[a,b]$, entonces:*

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{osc}_{I_k}(f)\Delta x_k$$

**Proposición 3.** *Suponga que $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son acotadas y suponga que $g \in R[a,b]$. Si $\exists c > 0 \ni \mathrm{osc}_I(f) \leq c\,\mathrm{osc}_I(g)$, sobre cada subintervalo $I \subseteq [a,b]$, entonces $f \in R[a,b]$.*

**Teorema 4.** *$f \in R[a,b]$ ssi existe una sucesión de particiones $(P_n)$, $P_n \in P[a,b], \forall n \in \mathbb{Z}^+ \ni \lim_{n\to\infty} [U(f,P_n) - L(f,P_n)] = 0$. En este caso,*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n).$$

**Teorema 5.** *Una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable.*

**Teorema 6.** *Una función monótona $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable.*

(b) $\Rightarrow$ (a): Sea $\epsilon > 0$ y sea $P_\epsilon \in P[a,b] \ni \forall P \preceq P_\epsilon$, y cualesquiera $t_k, t'_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset P$, se cumple:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k - A \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{y}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\,\Delta x_k - A \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t'_k)]\,\Delta x_k \right| = \qquad (*)$$

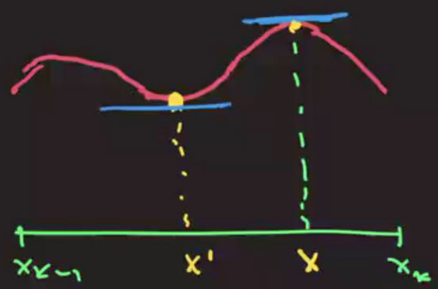
$$= \left| \left( \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k - A \right) + \left( A - \sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\,\Delta x_k \right) \right|$$

$$\leq \left| \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k - A \right| + \left| \sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\,\Delta x_k - A \right|$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3}.$$

Por otro lado:

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup\{ f(x) - f(x') : x, x' \in [x_{k-1}, x_k] \}$$





$$\leq \left| \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k - A \right| + \left| \sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\,\Delta x_k - A \right|$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3}.$$

Por otro lado:

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup\{ f(x) - f(x') : x, x' \in [x_{k-1}, x_k] \}$$


Entonces, para $h > 0$ podemos encontrar $t_k, t'_k$ en $[x_{k-1}, x_k] \ni$

$$f(t_k) - f(t'_k) > M_k(f) - m_k(f) - h$$

Sea $h = \dfrac{\epsilon}{3(b-a)}$

$$\Rightarrow U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k$$

$$< \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_k') + h] \Delta x_k$$

$$< \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_k')] \Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} h \Delta x_k$$

$$\leq \left| \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_k')] \Delta x_k \right| + h \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$$

$$\leq \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3\cancel{(b-a)}} \cancel{(b-a)} = \epsilon.$$

$\Rightarrow$ Por el criterio de Cachy, se tiene

$f \in R[a,b]$ ☐

<u>Def</u>: La <u>oscilación</u> de una función acotada $f$ sobre un conjunto $A$ es $\operatorname{osc}_A(f) := \sup_A(f) - \inf_A(f)$

<u>Nota</u>: si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada, y si $P \in P[a,b]$, entonces:

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{osc}_{I_k}(f) \Delta x_k$$

<u>Prop</u>: Suponga que $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ son acotadas y suponga que $g \in R[a,b]$. Si $\exists\ c > 0$ ∋ $\operatorname{osc}_I(f) \leq c \operatorname{osc}_I(g)$, sobre cada subintervalo $I \subseteq [a,b]$, entonces $f \in R[a,b]$.

<u>Dem</u>: Sea $\epsilon > 0$ y $P_\epsilon \in P[a,b]$ ∋ $P \supsetneq P_\epsilon$. Entonces,

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{osc}_{I_k}(f) \Delta x_k - |I_k| \leq$$

$I_k \subset P$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} c \operatorname{osc}_{I_k}(g) \cdot |I_k| = c\,[\underbrace{U(P,g) - L(P,g)}_{<\epsilon}]$$

$\Rightarrow f \in R[a,b]$.

**Teorema** (***): $f \in R[a,b]$ ssi existe una sucesión de particiones $(P_n)$, $P_n \in P[a,b]$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ $\ni$

$$\lim_{n\to\infty} \left[ U(f,P_n) - L(f,P_n) \right] = 0.$$

En este caso, $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n)$.

**Dem:**

($\Leftarrow$) Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $n \in \mathbb{Z}^+$ $\ni$ para $P_n \in P[a,b]$, se cumple $U(f,P_n) - L(f,P_n) < \epsilon$. Entonces, por el criterio de integrabilidad de Cauchy, se cumple: $f \in R[a,b]$.

($\Rightarrow$) Sea $f \in R[a,b] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+$ $\exists$ $P_n \in P[a,b]$ $\ni$

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) < \frac{1}{n} \Rightarrow U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0$$

*: Ejercicio.

**Ej:** Considere $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ $\ni$ $f(x) = x^2$. Sea $P_n$ la partición de $[0,1]$ en $n$ subintervalos de tamaño $1/n$, y con puntos $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, \dots, n$. Si $I_k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, entonces

$$\sup_{I_k}(f) = x_k^2, \quad \inf_{I_k}(f) = x_{k-1}^2$$

$$\Rightarrow U(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

**Teorema** (***): Una función continua $\boxed{f: [a,b] \to \mathbb{R}}$ sobre un compacto $[a,b]$ es Riemann-integrable.

**Dem:** Sea $\epsilon > 0$. Sabemos que $f$ es uniformemente continua sobre $[a,b] \Rightarrow \exists\, \delta > 0 \ni$

si $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}, \forall x, y \in [a,b]$

Considere una partición $P = \{I_1, I_2, \dots, I_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$,
tal que $\boxed{|I_k| < \delta}$ $k = 1, \dots, n$.

Weierstrass

Como $f$ es continua sobre $[a,b] \Rightarrow \exists\, x_k, y_k \in I_k$
t.q. $M_k(f) - m_k(f) = f(x_k) - f(y_k) < \frac{\epsilon}{b-a}$.

Entonces, $U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a} \Delta x_k = \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\epsilon}{\cancel{b-a}} \cancel{(b-a)} = \epsilon.$$

$\Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]$ $\square$

---

**Teorema**: Una función monótona $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sobre un compacto es Riemann-integrable