Universidad del Valle de Guatemala

MM2034 - 1 semestre - 2021

Licenciatura en matemática aplicada

ANÁLISIS DE VARIABLE REAL 2

Catedrático: Dorval Carías

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay
Carné: 19857
Correo: rom19857@uvg.edu.gt

16 de agosto de 2021

Índice

1. Sesión 1 - 5 de julio de 2021

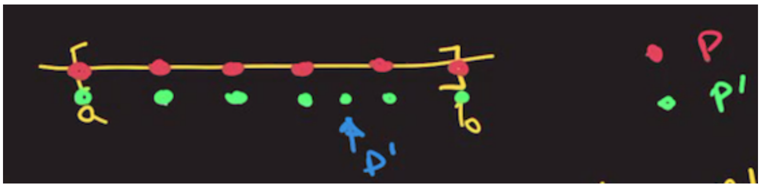
NOTA. *La teoría a continuación se refiere a funciones acotadas.*

Definición 1. *Una **partición** P del intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito: $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ donde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.*

NOTA. *$P[a, b]$ denota el conjunto de todas las particiones de $[a, b]$.*

NOTA.

1. *Una partición $P' \in P[a, b]$ es un **refinamiento** de $P \in P[a, b]$, si $P \subset P'$*

   ***Notación:** si $P \subset P' \implies$ Se denota: $P' \preceq P$.*

   a) $P \preceq P(\iff P \subset P)$, $\forall P \in P[a, b]$.

   b) *Si* $P' \preceq P$ *y* $P \preceq P' \implies P = P'$.

   c) *Si* $P' \preceq P$ *y* $P'' \preceq P' \implies P'' \preceq P$.

   $\implies$ *La relación $\preceq$ es de orden parcial.*

2. *Para $P \in P[a, b], \Delta x_k := x_k - x_{k-1}$, es la longitud del k-ésimo subintervalo en la partición. Nótese que:*

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$$

3. *La norma o malla de $P \in P[a, b]$ se define: $\|P\| = \max\{\Delta x_k : k = 1, 2, \cdots, n\}$. Note que, si $P' \preceq P \implies \|P'\| \preceq \|P\|$.*

Definición 2. *Sea $P \in P[a,b]$ y sean, para $k = 1, \cdots, n$,*

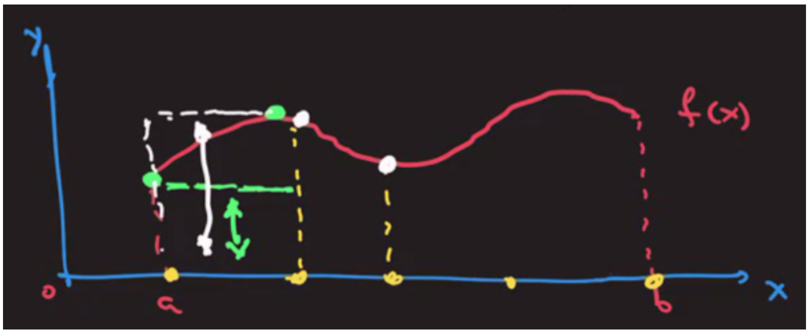
$$M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$m_k(f) = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Entonces, los números:

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k, \quad L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\Delta x_k$$

se llaman la suma superior e inferior de Darboux de f para partición P.



Proposición 1. *Sean $P, P', P_1, P_2 \in P[a,b]$. Entonces,*

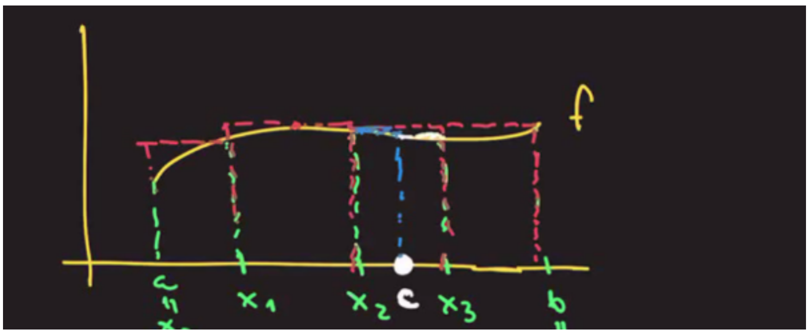
1.

$$P' \preceq P \implies P' \preceq P \implies \begin{cases} U(P',f) \leqslant U(P,f) \\ L(P',f) \geqslant L(P,f) \end{cases}$$

2.

$$L(P_1, f) \leq U(P_2, f)$$

Demostración. Tenemos:



1. Sea $P' = P \cup \{c\}$ y suponga que $c \in [x_{i-1}, x_i] \subset P \implies U(P', f) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} M_k(f)\Delta x_k + M'(c - x_{i-1}) + M''(x_i - c)$. Como $M' \leq M_i(f)$ y $M'' \leq M_i(f)$. $\implies U(P', f) \leq \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} M_k(f)\Delta x_k + M_i(f)\underbrace{[(c - x_{i-1}) + (x_i - c)]}_{\Delta x_i} = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k = U(P, f)$.
2. Como $P_1, P_2 \in P[a, b]$, sea $P = P_1 \cup P_2$. Como $P \preceq P_1$ y $P \preceq P_2$, entonces $L(P_1, f) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq U(P_2, f)$.

■

Definición 3. *1. Se define la integral superior de Riemman de f sobre $[a, b]$.*

$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{U(P, f) : P \in P[a, b]\}$$

2. Se define la integral interior de Riemman de f sobre $[a, b]$.

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P, f) : P \in P[a, b]\}$$

Ejemplo 1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R} \ni f(x) = c$.*

1. $U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} c\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c(b - a) \implies \overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{U(P, f) : P \in P[a, b]\} = c(b - a)$.
2. $L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} c\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c(b - a) \implies \underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P, f) : P \in P[a, b]\} = c(b - a)$

Ejemplo 2. *Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R} \ni$*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{I}rr \end{cases}$$

Sea $P \in P[0, 1]$. Entonces,

1. $U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} 1\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1 - 0 = 1 \implies \overline{\int_0^1} f = \text{ínf}\{\underbrace{U(P, f)}_{1} : P \in P[0, 1]\} = 1$.
2. $L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} 0\Delta x_k = 0 \implies \underline{\int_0^1} f = \sup\{\underbrace{L(P, f)}_{0} : P \in P[0, 1]\} = 0$.

Integral de Riemann

$\int$ Cauchy $\longrightarrow$ Riemann $\longrightarrow$ Riemann-Stieltjes $\longrightarrow$ Lebesgue

Riemann $\longrightarrow$ Darboux

Riemann $\longrightarrow$ Dani, Áscoli $\longrightarrow$ HK

Nota: la teoría a continuación se refiere a funciones acotadas.

Def: Una *partición* P del intervalo $[a,b]$ es un conjunto finito: $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ donde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Notación: $\mathcal{P}[a,b]$ denota al conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.

Notas:

1) Una partición $P' \in \mathcal{P}[a,b]$ es un refinamiento de $P \in \mathcal{P}[a,b]$, si $P \subset P'$

Notación: si $P \subset P'$ $\Rightarrow$ se denota: $P' \leq P$

i) $P \leq P$ $(\Leftrightarrow P \subset P)$, $\forall P \in \mathcal{P}[a,b]$.

ii) Si $P' \leq P$ y $P \leq P'$ $\Rightarrow$ $P = P'$

iii) Si $P' \leq P$ y $P'' \leq P'$ $\Rightarrow$ $P'' \leq P$

$\Rightarrow$ la relación $\leq$ es de orden parcial.

2) Para $P \in \mathcal{P}[a,b]$, $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$, es la longitud del k-ésimo subintervalo en la partición. Nótese que:

•) $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$

3) La **norma** o **malla** de $P \in \mathcal{P}[a,b]$ se define: $\|P\| = \text{máx}\{\Delta x_k : k = 1, 2, \dots, n\}$

Note que, si $P' \leq P$ $\Rightarrow$ $\|P'\| \leq \|P\|$

Def: Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$ y sean, para $k = 1, \dots, n$,

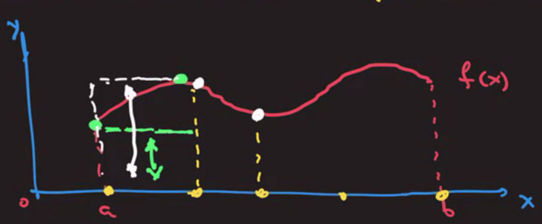
$$M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$m_k(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Entonces, los números:

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k, \quad L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\Delta x_k$$

se llaman la suma superior e inferior de Darboux de f para la partición P.



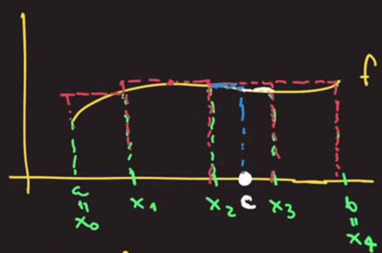
Prop: Sean $P, P', P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$. Entonces,

1) $P' \leq P \Rightarrow \begin{cases} U(P',f) \leq U(P,f) \\ L(P',f) \geq L(P,f) \end{cases}$

2) $L(P_1,f) \leq U(P_2,f)$

Dem:

(1)



Sea $P' = P \cup \{c\}$ y suponga que $c \in [x_{i-1}, x_i] \subset P$

$$\Rightarrow U(P',f) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} M_k(f)\Delta x_k + M'(c - x_{i-1}) + M''(x_i - c).$$

Como $M' \leq M_i(f)$ y $M'' \leq M_i(f)$, entonces

$$\Rightarrow U(P',f) \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} M_k(f)\Delta x_k + M_i(f)\Big[\underbrace{(\cancel{t}-x_{i-1}) + (x_i-\cancel{t})}_{\Delta x_i}\Big]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k = U(P,f).$$

2) Como $P_1, P_2 \in P[a,b]$, sea $P = P_1 \cup P_2$.

Como $P \trianglelefteq P_1$ y $P \trianglelefteq P_2$, entonces

$$L(P_1,f) \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq U(P_2,f)$$

$\square$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{\, U(P,f) : P \in P[a,b] \,\}$$

2) La integral inferior de Riemann de f sobre $[a,b]$ se define

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\, L(P,f) : P \in P[a,b] \,\}$$

Ej: 1) Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \ni f(x) = c$

$$\Rightarrow U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} c\,\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c(b-a)$$

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} c\,\Delta x_k = c(b-a)$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f = \inf\{\, U(P,f) : P \in P[a,b] \,\} = c(b-a)$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\, L(P,f) : P \in P[a,b] \,\} = c(b-a)$$

Ej 2) Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ni f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I}rr \end{cases}$

Sea $P \in P[0,1]$. Entonces

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} 1\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1 - 0 = 1$$

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} 0\,\Delta x_k = 0$$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1} f = \inf\{\, U\overbrace{(P,f)}^{1} : P \in P[0,1] \,\} = 1$$

$$\underline{\int_0^1} f = \sup\{\, L\overbrace{(P,f)}^{0} : P \in P[0,1] \,\} = 0$$

2. Sesión 2

Proposición 2. $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Definición 4. *Se dice que una función acotada f es Riemann integrable sobre $[a,b]$, si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En este caso:*

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Definición 5. *El conjunto de funciones Riemann integrables sobre $[a,b]$ se denota $R[a,b]$.*

Teorema 1. *(Criterio de Cauchy-Riemann para integrabilidad) Una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable sobre $[a,b]$ ssi $\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon \in P[a,b] \ni \forall P \leqslant P_\varepsilon$, se tiene que*

$$U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon.$$

Teorema 2. *Sea $f \in R[a,b]$. Entonces, $f \in R[c,d]$, para cualquier $[c,d] \subset [a,b]$.*

Definición 6. *Sea $P \in P[a,b]$ y sea $t_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset P$, $k = 1, \cdots, n$. Una suma del tipo:*

$$S(P,f,\{t_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \Delta x_k$$

se llama suma de Riemann de f para la partición P y con la muestra $t_1, \cdots, t_n$.

Teorema 3. *Los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *$f \in R[a,b]$.*

2. *Existe un número A con la siguiente propiedad: $\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon \in P[a,b] \ni P \leqslant P_\varepsilon$.*

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1} f = \inf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}[0,1]\} = 1$$

$$\underline{\int_0^1} f = \sup\{L(P,f) : P \in \mathcal{P}[0,1]\} = 0$$

Prop: $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$

Dem: Sea $\epsilon > 0$. Como $\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$

$\Rightarrow \exists\, P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b] \ni U(P_\epsilon, f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon$

$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f + \epsilon$ es cota superior de $\{L(P,f) : P \in [a,b]\} \Rightarrow \sup\{L(P,f) : P \in [a,b]\} < \overline{\int_a^b} f + \epsilon \Rightarrow \underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f + \epsilon$. Dada la arbitrariedad de ϵ, se tiene:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

□

Def: Se dice que una función acotada f es Riemann integrable sobre $[a,b]$, si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En este caso,

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

El conjunto de funciones Riemann integrables sobre $[a,b]$ se denota $\mathcal{R}[a,b]$.

Teorema (criterio de Cauchy Riemann para integrabilidad)

Una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable sobre $[a,b]$ ssi $\forall \epsilon > 0\ \exists\, P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b] \ni \forall P \leq P_\epsilon$, se tiene que

$$0 \leq U(P,f) - L(P,f) < \epsilon.$$

Dem:

($\Rightarrow$) Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Sea $\epsilon > 0$ y sea

$$A = \int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

$\Rightarrow$ Existen particiones $P', P'' \in \mathcal{P}[a,b] \ni$

$$U(P', f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon/2$$

$$L(P'', f) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\epsilon}{2}$$

Sea $P_\epsilon = P' \cup P''$ y considere $P \leq P_\epsilon$. Entonces,

$$A - \frac{\epsilon}{2} < L(P'', f) \leq L(P_\epsilon, f) \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq U(P_\epsilon, f) \leq U(P', f) < A + \epsilon/2$$

Entonces: $A - \epsilon/2 < L(P,f)$, y

$U(P,f) < A + \epsilon/2$

$$\Rightarrow \begin{aligned} -\cancel{A} + \epsilon/2 &> -L(P,f) \\ \cancel{A} + \epsilon/2 &> U(P,f) \end{aligned} \Big\} +$$

$$\epsilon > U(P,f) - L(P,f).$$

($\Leftarrow$) Sea $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists\, P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b] \ni P \leq P_\epsilon$, se tiene que $U(P,f) - L(P,f) < \epsilon \Leftrightarrow U(P,f) < L(P,f) + \epsilon$

Para esta partición se tiene que:

$$\overline{\int_a^b} f \leq U(P,f) < L(P,f) + \epsilon \leq \underline{\int_a^b} f + \epsilon$$

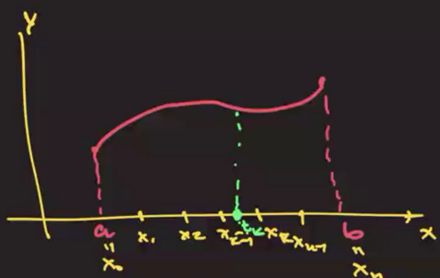
$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f < \underline{\int_a^b} f + \epsilon$. Por la arbitrariedad de ϵ, se tiene que: $\overline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} f$. Por teorema anterior, sabemos que:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b].$$

□

Teorema: Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Entonces, $f \in \mathcal{R}[c,d]$, para cualquier $[c,d] \subset [a,b]$. □



$A_1, A_2, \ldots, A_n$

$\{t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots, t_n\}$

$m_k(f) \leq f(t_k) \leq M_k(f)$

de ϵ, se tiene que: $\overline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} f$. Por teorema anterior, sabemos que:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]. \quad \square$$

Teorema: Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Entonces, $f \in \mathcal{R}[c,d]$, para cualquier $[c,d] \subset [a,b]$. $\square$

Def: Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$ y sea $t_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset P$, $k = 1, \ldots, n$. Una suma del tipo:

$$S(P, f, \{t_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k$$

se llama suma de Riemann de f para la partición P y con la muestra $t_1, \ldots, t_n$.

Teorema: Los enunciados siguientes son equivalentes:

a) $f \in \mathcal{R}[a,b]$

b) Existe un número A con la siguiente propiedad: $\forall \epsilon > 0 \; \exists \, P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b] \ni P \preceq P_\epsilon$, $t_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset [a,b]$, $k = 1, \ldots, n$, se cumple: $|S(P, f, \{t_k\}) - A| < \epsilon$.

$$\ulcorner \; A = \lim_{\substack{\boxed{\|P\| \to 0 \\ n \to \infty} \\ \text{Riemann}}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k \; \lrcorner$$

Dem.:

$a \Rightarrow b$: Sabemos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y suponga que $A = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Sea $\epsilon > 0$ y considere particiones $P', P'' \in \mathcal{P}[a,b]$, tales que

$$U(P,f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon, \quad P \preceq P'$$

$$L(P,f) > \underline{\int_a^b} f - \epsilon, \quad P \preceq P''$$

Sea $P_\epsilon = P' \cup P''$ y sea $P \preceq P_\epsilon$. Entonces,

$$\underline{\int_a^b} f - \epsilon < L(P,f) \leq S(P, f, \{t_k\}) \leq U(P,f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon$$

$$\Rightarrow \overset{A}{\cancel{\underline{\int_a^b} f}} - \epsilon < S(P, f, \{t_k\}) < \overset{A}{\cancel{\overline{\int_a^b} f}} + \epsilon$$

$$\Rightarrow -\epsilon < S(P, f, \{t_k\}) - A < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |S(P, f, \{t_k\}) - A| < \epsilon.$$

3. Sesión 3

Definición 7. *La **oscilación** de una función acotada f sobre un conjunto A es* $\operatorname{osc}_A(f) := \sup_A(f) - \operatorname{ínf}_A(f)$.

NOTA. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada, y si $P \in P[a, b]$, entonces:*

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{osc}_{I_k}(f)\Delta x_k$$

Proposición 3. *Suponga que $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son acotadas y suponga que $g \in R[a, b]$. Si $\exists c > 0 \ni \operatorname{osc}_I(f) \leq c \operatorname{osc}_I(g)$, sobre cada subintervalo $I \subseteq [a, b]$, entonces $f \in R[a, b]$.*

Teorema 4. *$f \in R[a, b]$ ssi existe una sucesión de particiones (P_n), $P_n \in P[a, b], \forall n \in \mathbb{Z}^+ \ni \operatorname{lím}_{n\to\infty} [U(f, P_n) - L(f, P_n)] = 0$. En este caso,*

$$\int_a^b f = \operatorname*{lím}_{n\to\infty} U(f, P_n) = \operatorname*{lím}_{n\to\infty} L(f, P_n).$$

Teorema 5. *Una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable.*

Teorema 6. *Una función monótona $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable.*

(b) $\Rightarrow$ (a): Sea $\epsilon > 0$ y sea $P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b] \ni \forall\, P \preceq P_\epsilon$, y cualesquiera $t_k, t'_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset P$, se cumple:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k - A \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{y}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\,\Delta x_k - A \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t'_k)]\,\Delta x_k \right| = \qquad (*)$$

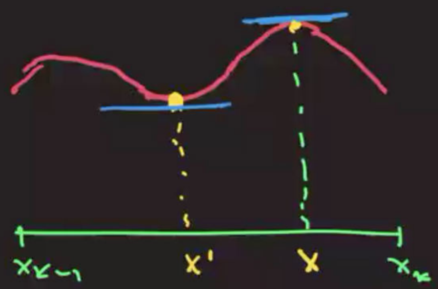
$$= \left| \left(\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k - A \right) + \left(A - \sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\,\Delta x_k \right) \right|$$

$$\leq \left| \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k - A \right| + \left| \sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\,\Delta x_k - A \right|$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3}.$$

Por otro lado:

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup \{ f(x) - f(x') : x, x' \in [x_{k-1}, x_k] \}$$



$$\leq \left| \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k - A \right| + \left| \sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\,\Delta x_k - A \right|$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3}.$$

Por otro lado:

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup \{ f(x) - f(x') : x, x' \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

Entonces, para $h > 0$ podemos encontrar t_k, t'_k en $[x_{k-1}, x_k] \ni$

$$f(t_k) - f(t'_k) > M_k(f) - m_k(f) - h$$

Sea $h = \dfrac{\epsilon}{3(b-a)}$

$$\Rightarrow U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\Delta x_k$$

$$< \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_k') + h]\Delta x_k$$

$$< \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_k')]\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} h\Delta x_k$$

$$\leq \left|\sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_k')]\Delta x_k\right| + h\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$$

$$\leq \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3\cancel{(b-a)}}\cancel{(b-a)} = \epsilon.$$

$\Rightarrow$ Por el criterio de Cachy, se tiene

$f \in R[a,b]$ ⊠

<u>Def:</u> La <u>oscilación</u> de una función acotada f sobre un conjunto A es $\underset{A}{\text{osc}}(f) := \sup_A(f) - \inf_A(f)$

<u>Nota:</u> si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada, y si $P \in P[a,b]$, entonces:

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underset{I_k}{\text{osc}}(f)\,\Delta x_k$$

<u>Prop:</u> Suponga que $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ son acotadas y suponga que $g \in R[a,b]$. Si $\exists\, c > 0 \ni$ $\underset{I}{\text{osc}}(f) \leq c\,\underset{I}{\text{osc}}(g)$, sobre cada subintervalo $I \subseteq [a,b]$, entonces $f \in R[a,b]$.

<u>Dem:</u> Sea $\epsilon > 0$ y $P_\epsilon \in P[a,b] \ni P \supseteq P_\epsilon$. Entonces,

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} \underset{I_k}{\text{osc}}(f)\,\Delta x_k \to |I_k| \leq$$

$I_k \subset P$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} c\,\underset{I_k}{\text{osc}}(g)\cdot|I_k| = c\,[U(P,g) - L(P,g)] \to < \epsilon$$

$\Rightarrow f \in R[a,b].$

Teorema (***): $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ssi existe una sucesión de particiones (P_n), $P_n \in \mathcal{P}[a,b]$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ $\ni$

$$\lim_{n\to\infty} \left[U(f,P_n) - L(f,P_n) \right] = 0.$$

En este caso, $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n)$.

Dem:

($\Leftarrow$) Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $n \in \mathbb{Z}^+$ $\ni$ para $P_n \in \mathcal{P}[a,b]$, se cumple $U(f,P_n) - L(f,P_n) < \epsilon$. Entonces, por el criterio de integrabilidad de Cauchy, se cumple: $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

($\Rightarrow$) Sea $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+$ $\exists$ $P_n \in \mathcal{P}[a,b]$ $\ni$

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) < \frac{1}{n} \Rightarrow U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0$$

*: Ejercicio.

Ej: Considere $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\ni$ $f(x) = x^2$. Sea P_n la partición de $[0,1]$ en n subintervalos de tamaño $1/n$, y con puntos $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, \ldots, n$. Si $I_k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, entonces

$$\sup_{I_k}(f) = x_k^2, \quad \inf_{I_k}(f) = x_{k-1}^2$$

$$\Rightarrow U(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Teorema (***): Una función continua sobre un compacto $[a,b]$ $\boxed{f : [a,b] \to \mathbb{R}}$ es Riemann-integrable

Dem: Sea $\epsilon > 0$. Sabemos que f es uniformemente continua sobre $[a,b] \Rightarrow \exists\, \delta > 0 \ni$

si $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$, $\forall x,y \in [a,b]$

Considere una partición $P=\{I_1, I_2, \dots, I_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$,

tal que $\boxed{|I_k|<\delta}$ $k=1,\dots,n$. Weierstrass

Como f es continua sobre $[a,b] \Rightarrow \exists\ x_k, y_k \in I_k$

t.q. $M_k(f) - m_k(f) = f(x_k) - f(y_k) < \frac{\epsilon}{b-a}$.

Entonces, $U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\Delta x_k$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a}\Delta x_k = \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \frac{\epsilon}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)} = \epsilon.$$

$\Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]$ $\square$

● **Teorema**: Una función monótona $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (sobre un compacto) es Riemann-integrable

4. Sesión 4

Teorema 7. *Una función monótona* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es Riemann-integrable.*

NOTA. *Una función monótona no es necesariamente continua [¿Qué sucede si* f *tiene un conjunto no contable de discontinuidades de salto en* $[a, b]$*?]*

Proposición 4. *Sea*

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f \qquad (f \in R[a, b]).$$

NOTA. *Sean* f *y* g *funciones acotadas sobre el intervalo* $I \implies f + g$ *es acotada.*

Proposición 5. *(Supremos e ínfimos)*

$$\sup_I(f + g) \leq \sup_I(f) + \sup_I(g)$$

$$\inf_I(f + g) \geq \inf_I(f) + \inf_I(g)$$

Proposición 6. *Sea*

$$\operatorname{osc}_I(f + g) = \operatorname{osc}_I(f) + \operatorname{osc}_I(g)$$

Proposición 7. $f, g \in R(I) \implies f + g \in R(I)$.

NOTA. *Las integrales superior e inferior de funciones no integrables no son, en general, lineales.*

Definición 8. *Sea* $a < b$.

1. $\overline{\int_a^b} f := -\overline{\int_a^b} f$ *y* $\underline{\int_a^b} f := -\underline{\int_b^a} f$. *Si las integrales coinciden, entonces:*

$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

2. $\forall c \in [a, b]$, *se define:* $\overline{\int_c^c} f = \underline{\int_a^c} f = 0$.

Proposición 8. *(Varios)*

1. $\overline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g$.

2. $\underline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g$.

Teorema 8. *Si* $f, g \in R \implies \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Proposición 9. *(Monotonicidad) Sean* $f, g \in R[a,b]$ *y suponga que* $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]$. *Entonces:*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b f$$

Teorema 9. *Suponga que* $f \in R[a,b]$ *y sea* $M = \sup_{[a,b]}(f)$ *y* $m = \text{ínf}_{[a,b]} f$. *Entonces,*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Teorema 10. *(Valor medio para integrales) Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es continua, entonces* $\exists c \in [a,b] \ni$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

Teorema: Una función monótona $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (sobre un compacto) es Riemann-integrable.

Dem: Suponga que f es monótona creciente en $[a,b]$. Sea $P_n=\{I_1,I_2,\dots,I_n\}$ una partición de $[a,b]$ $\ni$ $I_k=[x_{k-1},x_k]$, $|I_k|=\frac{b-a}{n}$, y $x_k=a+\frac{(b-a)}{n}k$, $k=0,1,\dots,n$.

$$\Rightarrow M_k(f)=\sup_{I_k}(f)=f(x_k),\quad m_k(f)=f(x_{k-1})$$

$$\Rightarrow U(f,P_n)-L(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n}[M_k(f)-m_k(f)]\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$=\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]$$

$$=\left(\frac{b-a}{n}\right)[f(b)-f(a)].\quad \text{Si } n\to\infty$$

$$\Rightarrow U(f,P_n)-L(f,P_n)\to 0\Rightarrow f\in\mathcal{R}[a,b].\ \square$$

Nota: Una función monótona no es necesariamente continua [¿Qué sucede si f tiene un conjunto no contable de discontinuidades de salto en $[a,b]$?]

0:15:52

Prop $\int_a^b cf = c\int_a^b f \qquad (f\in\mathcal{R}[a,b])$

Dem.

$\boxed{c>0}$ $$\overline{\int_a^b} cf=\inf_{P\in P[a,b]}U(cf,P)=\inf_{P\in P[a,b]}\sum_{k=1}^{n}\sup_{I_k}(cf)\cdot|I_k|$$

$$=\inf_P c\sum_{k=1}^{n}\sup_{I_k}(f)\cdot|I_k|=c\inf_P U(f,P)$$

$$=c\overline{\int_a^b} f$$

Por otra parte: $$\underline{\int_a^b} cf=\sup_P L(cf,P)=$$

$$=\sup_P cL(f,P)=c\sup_P L(f,P)=c\underline{\int_a^b} f$$

Si $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \int_a^b cf = c\int_a^b f$.

$\boxed{c<0}$ Considere $-f \Rightarrow \sup_A(-f) = -\inf_A(f)$

$$\inf_A(-f) = -\sup_A(f)$$

Entonces:

$$\overline{\int_a^b}(-f) = \inf_P U(-f,P) = \inf_P \sum_{k=1}^{n} \sup_{I_k}(-f)\cdot|I_k|$$

$$= \inf_P (-1)\cdot \sum_{k=1}^{n} \inf(f)\cdot|I_k| =$$

$$=(-1)\sup_P L(f,P) = -\underline{\int_a^b} f$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b}(-f) = \sup_P L(-f,P) = \sup_P (-1)\, U(f,P) =$$

$$= (-1)\inf U(f,P) = -\overline{\int_a^b} f$$

Como $f\in\mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \int_a^b(-f) = -\int_a^b f$.

Por último, $-c = -|c|$

$$\Rightarrow \int_a^b(-|c|)f = -\int_a^b |c| f = -|c|\int_a^b f$$

□

Nota: Sean f y g funciones acotadas sobre el intervalo $I \Rightarrow f+g$ es acotada.

Por otra parte se tiene, por las propiedades de ínfimo y supremo, que:

$$\sup_I(f+g) \le \sup_I(f)+\sup_I(g)$$

$$\inf_I(f+g) \geq \inf_I(f)+\inf_I(g)$$

Suponga que $f,g\in\mathcal{R}(I)$

$$\Rightarrow \operatorname{osc}_I(f+g) = \sup_I(f+g) - \inf_I(f+g) \le$$

$$\le [\sup_I(f)+\sup_I(g) - \inf_I(f+g)$$

$$\le [\sup_I(f)+\sup_I(g)] - [\inf_I(f)+\inf_I(g)]$$

$$= \left[\sup_I(f) - \inf_I(f)\right] + \left[\sup_I(g) - \inf_I(g)\right]$$

$$= \operatorname{osc}_I(f) + \operatorname{osc}_I(g).$$

Como $f, g \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow f+g \in \mathcal{R}(I)$.

Ej: Sean $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ni$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases} \leftarrow \text{Dirichlet}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1, & x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Nótese que $g = 1 - f$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1} f = 1 = \overline{\int_0^1} g \quad ; \quad \underline{\int_0^1} f = 0 = \underline{\int_0^1} g$$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1}(f+g) = 1 = \underline{\int_0^1}(f+g)$$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1}(f+g) < \overline{\int_0^1} f + \overline{\int_0^1} g$$

$$\underline{\int_0^1} f+g > \underline{\int_0^1} f + \underline{\int_0^1} g$$

0:50:00

Entonces: Las integrales superior e inferior de funciones no integrables no son, en general, lineales.

Def. Sea $a < b$.

a) $\displaystyle \overline{\int_a^b} f := -\overline{\int_b^a} f$ & $\displaystyle \underline{\int_a^b} f := -\underline{\int_b^a} f$.

si las integrales coinciden, entonces:

$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

b) $\forall c \in [a,b]$, se define: $\displaystyle \overline{\int_c^c} f = \underline{\int_c^c} f = 0$

Prop: (a) $\overline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g$

(b) $\underline{\int_a^b}(f+g) \geq \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g$

□

Teorema: Si $f, g \in R \Rightarrow \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Dem: $\overline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g = \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g$

$$\leq \underline{\int_a^b}(f+g)$$

además, sabemos:

$$\underline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b}(f+g)$$

$\Rightarrow \underline{\int_a^b}(f+g) = \overline{\int_a^b}(f+g) \Rightarrow f+g \in R[a,b]$

$\Rightarrow \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

□

Prop: Sean $f, g \in R[a,b]$ y suponga que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Entonces:

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g \qquad \boxed{\text{monotonicidad}}$$

Dem: Sea f integrable y supóngase que $f \geq 0$.

Sea $P \in \mathcal{P}[a,b] \ni P = [a,b]$

$\Rightarrow L(f,P) = \inf_P(f) \cdot (b-a) \geq 0$

$\Rightarrow \int_a^b f = \underline{\int_a^b} f \geq L(P,f) \geq 0$

$\Rightarrow$ Si $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$.

Si se tiene que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$,

hagamos $h(x) = g(x) - f(x)$, $\forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow h(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b h(x)\,dx \geq 0$

$\Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx \geq 0$

$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

□

Teorema: Suponga que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y sean

$M = \sup_{[a,b]} (f)$ y $m = \inf_{[a,b]} f$.

Entonces, $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

Dem: Sabemos que $m \leq f \leq M$

$\Rightarrow \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M$

$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

$\square$

Teorema (Valor medio para integrales)

Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces

$\exists\, c \in [a,b] \ni$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Dem: Como f es continua sobre el compacto $[a,b]$, entonces f alcanza su máximo, M, y su mínimo m, en $[a,b]$. Entonces,

$m \leq f \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$

$\Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M$

Como f es continua en $[a,b]$, por el Teorema del valor medio, existe $c \in [a,b] \ni$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

$\square$

Lunes: • Teoremas fundamentales del cálculo.

5. Sesión 5

Proposición 10. *Sea $f \in R[a,b]$. Entonces, $|f| \in R[a,b]$. Además, se tiene:*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

NOTA. 1. *Si $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]$, se tiene que:*

$$\overline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} g; \underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} g.$$

2. $$\left|\overline{\int_a^b} f\right| \leq \overline{\int_a^b} |f|; \left|\underline{\int_a^b} f\right| \leq \underline{\int_a^b} |f|$$

Proposición 11. *Sea $f \in R[a,b] \implies f^2 \in R[a,b]$.*

Teorema 11. *Si $f, g \in R[a,b] \implies f \cdot g \in R[a,b]$.*

Proposición 12. *Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $m, M \in R \ni m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$. Entonces:*

1. $m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f$.
2. $\overline{\int_a^b} f \leq M(b-a)$.

Teorema 12. *(***) Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I. Sea $a \in I$ y considere las funciones:*

$$\overline{F(x)} = \overline{\int_a^x} f \quad y \quad \underline{F(x)} = \underline{\int_a^x} f, \forall x \in I.$$

Entonces:

1. $\overline{F}$ *y* $\underline{F}$ *son continuas en* I.
2. *Si f es continua en $c \in I \implies \overline{F}$ y $\underline{F}$ son derivables en c y además:*

$$\overline{F}'(c) = \underline{F}'(c) = f(x).$$

Teorema 13. *(Primer teorema fundamental del cálculo) Sea* $f \in R[a, b]$*. Sea* $F : [a, b] \to \mathbb{R} \ni$

$$F(x) := \int_a^x f, \quad x[a, b]$$

Si f *es continua en* $c \in [a, b] \implies I$ *es derivable en* c *y* $F'(c) = f(c)$*.*

Teorema 14. *(Segundo teorema fundamental del cálculo- Fórmula Newton-Leibniz) Sea* $f \in R[a, b]$ *y sea* G *una función derivable en* $(a, b) \ni G' = f$*. Entonces,*

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

Prop: Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Entonces, $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.
además, se tiene:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Dem: Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$. Se tiene que:

$$M_k(|f|) - m_k(|f|) = \sup \{ \underbrace{|f(x)| - |f(y)|}_{\leq |f(x) - f(y)|} : x, y \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

$$\leq \sup \{ |f(x) - f(y)| : x, y \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

$$= M_k(f) - m_k(f)$$

$$\sum_{k=1}^{n} [M_k(|f|) - m_k(|f|)] \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k$$

$$\Rightarrow U(P, |f|) - L(P, |f|) \leq U(P, f) - L(P, f), \quad \forall P \in \mathcal{P}[a,b].$$

Sea $\epsilon > 0$. Como f satisface el criterio de Cauchy en $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\exists \boxed{P_\epsilon} \in \mathcal{P}[a,b]$ $\ni$ para $P \succeq P_\epsilon$, se tiene que $U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$ $\Rightarrow$ $|f|$ también cumple el criterio de Cauchy, y entonces $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.

A probar: $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

$$\Leftrightarrow \quad -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

Entonces, nótese que:

$$\left| f(x) \right| \leq |f(x)|$$

$$\Rightarrow -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \qquad \square$$

Nota: (1) Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, se tiene que: $\overline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} g$; $\underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} g$

(2) $\left| \overline{\int_a^b} f \right| \leq \overline{\int_a^b} |f|$; $\left| \underline{\int_a^b} f \right| \leq \underline{\int_a^b} |f|$.

Prop: Sea $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$. $\square$

Teorema: Si $f, g \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$

Dem: Como $f, g \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow$

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right] \in \mathcal{R}[a,b]$$
$\square$

Prop. Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $m, M \in \mathbb{R} \ni$ $\boxed{m \leq f(x)} \leq M$, $\forall x \in [a,b]$. Entonces

a) $m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f$

b) $\overline{\int_a^b} f \leq M(b-a)$

Dem. Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$. Entonces,

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\,\Delta x_k \geq m \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = m(b-a)$$

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta x_k \leq M \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = M(b-a)$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \sup\{L(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\} = \underline{\int_a^b} f$$

$$\Rightarrow M(b-a) \geq \inf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\} = \overline{\int_a^b} f$$
$\square$

Teorema (★★★) Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I. Sea $a \in I$ y considere las funciones:

$$\overline{F}(x) = \overline{\int_a^x} f \quad \text{y} \quad \underline{F}(x) = \underline{\int_a^x} f, \quad \forall x \in I.$$

Entonces:

a) $\overline{F}$ y $\underline{F}$ son continuas en I.

b) Si f es continua en $c \in I \Rightarrow \overline{F}$ y $\underline{F}$ son derivables en c y además:

$$\overline{F}'(c) = \underline{F}'(c) = f(c)$$

Dem: Sea $M = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$. Sea $c \in I$.

A probar: $\overline{F}$ es continua en c.

Sea $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \delta = \boxed{} > 0 \ni$ si $x \in I \cap (c, c+\delta)$, $\ni$

$$|\overline{F}(x) - \overline{F}(c)| = \left| \overline{\int_a^x} f - \overline{\int_a^c} f \right| = \left| \overline{\int_a^x} f + \overline{\int_c^a} f \right|$$

$$= \left| \overline{\int_c^x} f \right| \le \overline{\int_c^x} |f| \le M \overline{\int_c^x} 1 = M|x-c| \le$$

$$\le \frac{\epsilon}{M} \cdot M = \epsilon$$

De forma análoga se prueba para $x \in I \cap (c-\delta, c]$

$\Rightarrow \overline{F}$ es continua en c. $\Rightarrow \overline{F}$ es continua en I.

b) Como f es continua en $c \in I \Rightarrow \exists\, \delta > 0 \ni$

$|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$.

$$\Rightarrow f(c) - \epsilon \le f(x) \le f(c) + \epsilon,$$

con $x \in I \cap (c-\delta, c+\delta)$

$$\Rightarrow \overline{\int_c^x} [f(c) - \epsilon] \le \overline{\int_c^x} f \le \overline{\int_a^x} [f(c) + \epsilon]$$

$$\Rightarrow (f(c) - \epsilon)(x-c) \le \overline{\int_c^x} f \le [f(c) + \epsilon](x-c),$$

$x \in I$ y $x > c$.

$$\Rightarrow f(c) - \epsilon \le \frac{\overline{\int_a^x} f}{x-c} \le f(c) + \epsilon$$

$$\Rightarrow f(c) - \epsilon \le \frac{\overline{F}(x) - \overline{F}(c)}{x-c} \le f(c) + \epsilon$$

$$\Rightarrow -\epsilon \le \frac{\overline{F}(x) - \overline{F}(c)}{x-c} - f(c) \le \epsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c) \right| \leq \epsilon.$$

Si $\epsilon \to 0 \Rightarrow F$ es diferenciable en c y se tiene que $F'(c) = f(c)$. $\square$

Teorema (Primer teorema fundamental del cálculo).

Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Sea $F: [a,b] \to \mathbb{R} \ni$

$$F(x) := \int_a^x f, \quad x[a,b]$$

Si f es continua en $c \in [a,b] \Rightarrow F$ es derivable en c y $F'(c) = f(c)$. $\square$

Teorema (segundo Teorema Fundamental del cálculo) (Fórmula Newton-Leibniz).

Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y sea G una función derivable en $(a,b) \ni G' = f$. Entonces,

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

Dem: Sea $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$. Entonces

$$G(b) - G(a) = \sum_{k=1}^{n} [G(x_k) - G(x_{k-1})].$$

Como G es derivable en (a,b), entonces

$$\Rightarrow G(x_k) - G(x_{k-1}) = G'(t_k) \cdot (x_k - x_{k-1}), \quad t_k \in (x_{k-1}, x_k)$$

$$\Rightarrow \sum [G(x_k) - G(x_{k-1})] = \sum f(t_k) \Delta x_k$$

$$\Rightarrow L(P_n, f) := \sum_{k=1}^{n} m_k(f) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(f) \Delta x_k$$

$$\Rightarrow L(P_n, f) \leq G(b) - G(a) \leq U(P_n, f)$$

Si $n \to \infty \Rightarrow G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\, dx$. $\square$

6. Sesión 6

Teorema 15. *Suponga que* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$*, funciones acotadas y tales que* $f(x) = g(x)$*, excepto en un número finito de puntos* $x \in [a, b]$*. Entonces* $f \in R[a, b]$ *ssi* $g \in R[a, b]$*, y se tiene que:*

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Proposición 13. *Suponga que* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es acotada e integrable en* $[a, r]$*, para cada* $a < r < b$*. Entonces,* f *es integrable en* $[a, b]$ *y se tiene:*

$$\int_a^b = \lim_{r \to b^-} \int_a^r f.$$

Teorema: Suponga que $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, funciones acotadas y tales que $f(x)=g(x)$, excepto en un número finito de puntos $x\in[a,b]$. Entonces $f\in\mathcal{R}[a,b]$ ssi $g\in\mathcal{R}[a,b]$, y se tiene que:

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Dem: Suponga que f y g difieren en un punto $c\in[a,b]$. Además, como f y g son acotadas, $\exists\, M\geq 0 \ni$ $|f|,|g|\leq M$, en $[a,b]$.

A probar: si f es integrable $\Rightarrow$ g es integrable

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} g} \quad y \quad \underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} g$$

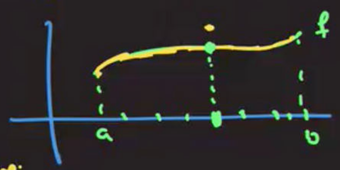
$$\Leftrightarrow \quad \overline{\int_a^b} g \leq \overline{\int_a^b} f \quad y \quad \overline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} g$$

Sea $\epsilon>0$ y $P\in\mathcal{P}[a,b] \ni U(f,P) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\epsilon}{2}$

Considere el refinamiento Q de P $\ni$

$$Q=\{I_1,I_2,\dots,I_n\} \ni |I_k|<\delta,\ k=1,\dots,n.$$

donde $\delta = \frac{\epsilon}{8M}$.



Si g difiere de f en el intervalo I_k, se tiene:

$$\left|\sup_{I_k}(g) - \sup_{I_k}(f)\right| \leq \sup_{I_k}|g| + \sup_{I_k}|f| \leq 2M$$

En el resto de intervalos $\sup_{I_i}(g) - \sup_{I_i}(f) = 0$

$$\Rightarrow |U(g,Q)-U(f,Q)| = \left|\sum_{k=1}^{n} M_k(g)|I_k| - \sum_{k=1}^{n} M_k(f)|I_k|\right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} [M_i(g) - M_i(f)] \cdot |I_i| \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \sup_{I_i}(g) - \sup_{I_i}(f) \right| \cdot |I_i|$$

$$\leq 2(2M)(2\delta)$$

$$\sum_1 | \cdot | \, |I_i| = \Big[\underbrace{\left| \left(\sup_{I_1}(g) - \sup_{I_2}(f)\right) \right|}_{2M} |I_1| \to \delta$$

$$+ \underbrace{\left| \left(\sup_{I_2}(g) - \sup_{J_2}(f)\right) \right|}_{2M} \Big] \cdot |I_2| \to \delta$$

$$= (2M + 2M)\delta = (2M)(2\delta)$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} [M_i(g) - M_i(f)] \cdot |I_i| \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \sup_{I_i}(g) - \sup_{I_i}(f) \right| \cdot |I_i|$$

$$\leq 4M\delta = 4M\left(\frac{\epsilon}{8M}\right) = \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow |U(g,Q) - U(f,Q)| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} g \leq U(g,Q) < U(f,Q) + \frac{\epsilon}{2} \leq U(f,P) + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\leq \overline{\int_a^b} f + \underbrace{\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}}_{\epsilon}$$

$\Rightarrow$ Por la arbitrariedad de ϵ, se tiene que:

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} g \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Intercambiando los roles de f y g

$$\overline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} g$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} g$$

De forma similar, se obtiene: $\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} g$.

$\Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b] \iff g \in \mathcal{R}[a,b]$ $\square$

Prop: Suponga que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es acotada e integrable en $[a,r]$, para cada $a<r<b$. Entonces, f es integrable en $[a,b]$ y se tiene:

$$\int_a^b f = \lim_{r\to b^-}\int_a^r f$$

Ej: Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R} \ni f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}\frac{1}{x}, & 0<x\le 1\\ 0, & x=0\end{cases}$

- f es acotada en $[0,1]$
- f es $\boxed{\text{continua}}$ en cada subintervalo de la forma $[r,1]$, $0<r<1$.

Integrable

$\Rightarrow f\in\mathcal{R}[0,1]$. y $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{r\to 0^+}\int_r^1 f(x)\,dx$

Dem: Sea f acotada en $[a,b]$ e integrable en $[a,r]$, $a<r<b$.

Entonces, $\exists\, M>0 \ni |f|\le M$, en $[a,b]$, sea $\epsilon>0$ y definamos:

$$r = b-\frac{\epsilon}{4M},$$

donde ϵ es suficientemente pequeño para que $a<r$.

$\Rightarrow$ Como $f\in\mathcal{R}[a,r] \Rightarrow \exists\, Q\in\mathcal{P}[a,r] \ni$
$U(f,Q)-L(f,Q)<\epsilon/2$.

Sea $P=Q\cup\{b\}\in\mathcal{P}[a,b]$. (El último subintervalo de P es $[r,b]$).

f es acotada en $[a,b] \Rightarrow$ se tiene que:

$$\sup_{[r,b]}(f)-\inf_{[r,b]}(f)\le 2M$$

$$\Rightarrow U(f,P)-L(f,P) = U(f,Q)-L(f,Q) + \left[\sup_{[r,b]}(f)-\inf_{[r,b]}(f)\right](b-r) <$$

$$< \frac{\epsilon}{2}+2M(b-r) = \frac{\epsilon}{2}+2M\left(\frac{\epsilon}{4M}\right)=\epsilon$$

$\Rightarrow U(f,P)-L(f,P)<\epsilon \Rightarrow f\in\mathcal{R}[a,b]$.

además,

$$\left|\int_a^b f-\int_a^r f\right| = \left|\cancel{\int_a^r f}+\int_r^b f-\cancel{\int_a^r f}\right| =$$

7. Sesión 7

Lema 16. *Sean $f, g \in R[a,b]$. Para cada $P \in P[a,b]$ y cualquier selección de números $t_1, t_2, \cdots, t_n$, donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, y cualquier selección de números $f_1, f_2, \cdots, f_n$, con $f_k \in \{M_k(f), m_k(f)\}$, considere*

$$w(P, f, g) = \sum_{k=1}^{n} f_k g(t_k) \Delta x_k.$$

Teorema 17. *(Bonnet) Sean $f \in R[a,b]$ y g una función no negativa, acotada y monótona decreciente. Entonces, $\exists \mu \in [a,b] \ni$*

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^{\mu} f.$$

Teorema 18. *Suponga que $f, g \in C[a,b]$ y f y g, son difereciables en (a,b). Suponga, además, que f', $g' \in R[a,b]$. Entonces,*

$$\int_a^b fg'dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'gdx.$$

Teorema 19. *Suponga que $g : I \to \mathbb{R}$ es diferenciable y que g' es integrable en I. Sea $g(I) = J$. Si $f : J \to \mathbb{R}$, entonces, $\forall a, b \in I$, se cumple:*

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Lema: Sean $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Para cada $P \in \mathcal{P}[a,b]$ y cualquier selección de números $t_1, t_2, \dots, t_n$, donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, y cualquier selección de números $f_1, f_2, \dots, f_n$, con $f_k \in \{M_k(f), m_k(f)\}$, considere

$$w(P, f \cdot g) = \sum_{k=1}^{n} f_k \, g(t_k) \Delta x_k ,$$

Entonces, $w(P, f, g)$ converge, en el sentido de Riemann, al valor de $\int_a^b fg$.

Dem:

- Considere el caso $g \geq 0$ y sea $\beta > 0$ una cota superior de g. Sea $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists\, P_1 \in \mathcal{P}[a,b] \ni \forall P \preceq P_1$

se tiene que $U(P, f) - L(P, f) < \frac{\epsilon}{2\beta}$

Por otro lado, sabemos que $f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$.

••) Entonces, $\exists\, P_2 \in \mathcal{P}[a,b] \ni$ si $P \preceq P_2$ y si consideramos los puntos $t_1, t_2, \dots, t_n \in P$, entonces

$$\left| S(P, fg, \{t_k\}) - \int_a^b fg \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

•••) Sea $P_\epsilon = P_1 \cup P_2 \Rightarrow \forall P \preceq P_\epsilon$, se tiene:

$$\left| w(P, f, g) - \int_a^b fg \right| = \Big| w(P, f, g) - S(P, fg, \{t_k\}) + $$

$$+ S(P, fg, \{t_k\}) - \int_a^b fg \Big| \leq$$

$$\leq \left| w(P, f, g) - S(P, fg, \{t_k\}) \right| + \left| S(P, fg, \{t_k\}) - \int_a^b fg \right|$$

$$\leq \left| \sum_{k=1}^{n} f_k \, g(t_k) \Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} f(t_k) g(t_k) \Delta x_k \right| + \epsilon/2$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} [f_k - f(t_k)] \, g(t_k) \Delta x_k \right| + \epsilon/2$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} | f_k - f(t_k) | \cdot g(t_k) \Delta x_k + \epsilon/2$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} [U(P, f) - L(P, f)] \, g(t_k) \Delta x_k + \epsilon/2$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2\beta} \sum_{k=1}^{n} g(t_k) \Delta x_k + \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon \beta}{2\beta} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\leq \left| W(P,f,g) - S(P,fg,\{t_k\}) \right| + \left| S(P,fg,\{t_k\}) - \int_a^b fg \right|$$

$$\leq \left| \sum_{k=1}^{n} f_k\, g(t_k)\,\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, g(t_k)\,\Delta x_k \right| + \epsilon/2$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} \left[f_k - f(t_k) \right] g(t_k)\,\Delta x_k \right| + \epsilon/2$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \left| f_k - f(t_k) \right| \cdot g(t_k)\,\Delta x_k + \epsilon/2$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \operatorname{osc}_{I_k}(f)\, \underbrace{g(t_k)}_{\leq \beta}\,\Delta x_k + \epsilon/2$$

$$\leq \beta \left[U(P,f) - L(P,f) \right] + \epsilon/2 \leq \frac{\epsilon}{2\beta}\cdot\beta + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

$\Rightarrow W(P,f,g)$ converge, en el sentido de Riemann, a $\int_a^b fg$.

$\because$]

$g(x) < 0$, $\forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow \underbrace{g(x) + k}\ \geq 0,$

$\underbrace{-g(x)}_{h(x)} \geq 0$

$\Rightarrow W(P,f,g)$ converge, en el sentido de Riemann, a $\int_a^b fg$.

$\because$] Si g es negativa, se considera $-g$ o bien se encuentra $k \in \mathbb{R} \ni g(x) + k \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$. $\square$

Teorema (Bonnet): Sean $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y g una función no negativa, acotada y monótona decreciente. Entonces, $\exists\, M \in [a,b] \ni$

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^M f$$

Dem: •) Como g es acotada y monótona decreciente en $[a,b] \Rightarrow g \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow fg \in \mathcal{R}[a,b]$. Entonces, $g(a) > 0$, ya que, si $g(a) = 0 \Rightarrow g(x) = 0,\ \forall x \in [a,b]$ ... $\Rightarrow$ el teorema es válido para cualquier f.

••) Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$ y considere:

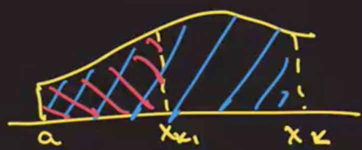
$\omega(P,f,g) = \sum_{k=1}^{n} f_k g_k \Delta x_k$, donde $g_k = g(x_{k-1})$, y $f_k \in \{M_k(f), m_k(f)\}$. Entonces:

$$m_k(f)\Delta x_k \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} f \leq M_k(f)\Delta x_k$$

$$\Rightarrow m_k(f) \leq \frac{1}{\Delta x_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f \leq M_k(f)$$

Sea $F(x) = \int_a^x f$, $x \in [a,b]$, y sean los números $F_k = F(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

$$\Rightarrow F_k - F_{k-1} = \int_a^{x_k} f - \int_a^{x_{k-1}} f$$



Sea $F(x) = \int_a^x f$, $x \in [a,b]$, y sean los números $F_k = F(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

$$\Rightarrow F_k - F_{k-1} = \int_a^{x_k} f - \int_a^{x_{k-1}} f = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f$$

$$\Rightarrow m_k(f) \leq \frac{F_k - F_{k-1}}{\Delta x_k} \leq M_k(f)$$

Continuará...

Teorema: Suponga que $f, g \in C[a,b]$ y f y g son diferenciables en (a,b). Suponga, además, que $f', g' \in \mathcal{R}[a,b]$. Entonces,

$$\int_a^b f g' \, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f' g \, dx$$

Dem: Sabemos que $(fg)' = f'g + fg'$

$$\Rightarrow \int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'$$

$$\Rightarrow fg\Big|_a^b = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'$$

$$\Rightarrow f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) = \int_a^b f'g + \int_a^b fg' \qquad \square$$

Teorema: Suponga que $g: I \to \mathbb{R}$ es diferenciable y que g' es integrable en I. Sea $g(I) = J$. Si $f: J \to \mathbb{R}$, entonces, $\forall\, a, b \in I$, se cumple.

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du.$$

$$\int_1^2 \sqrt{x^2+1}\,(2x)\,dx = \int_{g(1)}^{g(2)} \sqrt{u}\,du$$

$u = x^2 + 1 = g(x)$

$du = 2x\,dx$

8. Sesión 8

Teorema 20. *Suponga que $g : I \to \mathbb{R}$ es diferenciable y que g' es integrable en I. Sea $g(I) = J$. Si $f : J \to \mathbb{R}$ es continua, entonces, $\forall a, b \in I$, se cumple:*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du,$$

Proposición 14. *Suponga que $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$ y $f_n \in R[a, b], \forall n$; y suponga que $f_n \longrightarrow_{uniforme} f$ sobre $[a, b]$. Entonces:*

1. *$f \in R[a, b]$.*

2. *$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.*

8.1. Integrales impropias

Definición 9. *Suponga que $f : (a, B] \to \mathbb{R}$ es Riemman integrable en $[c, d] \ni a < c < b$. Entonces, la integral impropia de f sobre $[a, b]$ es:*

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f.$$

La integral impropia converge si este límite existe. En otro caso, la integral diverge.

Definición 10. *Suponga que $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ es integrable sobre $[a, r], r > a$. Entonces, la integral impropia de f es:*

$$\int_a^\infty f = \lim_{r\to\infty} \int_a^r f.$$

Teorema: Suponga que $g: I \to \mathbb{R}$ es diferenciable y que g' es integrable en I. Sea $g(I) = J$. Si $f: J \to \mathbb{R}$, entonces, $\forall\, a, b \in I$, se cumple.

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du.$$

TFC (2): Sean $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\ni$ $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.
$\Rightarrow$ F es continua en $[a,b]$. Si f es continua en $[a,b]$
$\Rightarrow$ $F' = f$.

TFC (1): Si $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua sobre $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), con $F' = f$ y $f \in \mathcal{R}[a,b]$, entonces:

Teorema: Suponga que $g: I \to \mathbb{R}$ es diferenciable y que g' es integrable en I. Sea $g(I) = J$. Si $f: J \to \mathbb{R}$ es continua, entonces, $\forall\, a, b \in I$, se cumple.

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du.$$

TFC (2): Sean $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\ni$ $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.
$\Rightarrow$ F es continua en $[a,b]$. Si f es continua en $[a,b]$
$\Rightarrow$ $F' = f$.

TFC (1): Si $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua sobre $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), con $F' = f$ y $f \in \mathcal{R}[a,b]$, entonces:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Dem: Sea $F(x) = \int_a^x f(u)\, du$. Como f es continua $\Rightarrow$ $F' = f$ (TFC 2). Entonces, nótese que:

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x))\, g'(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b (F \circ g)'(x)\, dx = \int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx$$

$$\Rightarrow (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = \int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx$$

$$\Rightarrow F(g(b)) - F(g(a)) = \int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \int_{g(a)}^{g(b)} F'(u)\, du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du = \int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx \quad \square$$

Nota: Prop: Suponga que $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$ y $f_n \in \mathcal{R}[a,b]$, $\forall n$; y suponga que $f_n \xrightarrow[\text{unif}]{} f$ sobre $[a,b]$. Entonces

(i) $f \in \mathcal{R}[a,b]$; y

(ii) $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

$[a,b]$

cerrado   acotado

Integrales Impropias:

Def: Suponga que $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable en $[c,b]$ $\ni$ $a<c<b$. Entonces, la integral impropia de f sobre $[a,b]$ es:

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^b f$$

La integral impropia converge si este límite existe. En otro caso, la integral diverge.

Ej: Sea $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$, cuando $x \in (0,1]$, $p>0$.

Impropia

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{0+\epsilon}^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\epsilon\to 0} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_\epsilon^1 =$$

Integral de Riemann.

$p \neq 1$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{1}{-p+1} - \frac{\epsilon^{-p+1}}{-p+1}\right] = \begin{cases} \text{convergente}, & 0<p<1 \\ \text{divergente}, & p>1 \end{cases}$$

Si $p=1 \Rightarrow$ $$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon\to 0} \ln(x)\Big|_\epsilon^1 =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\ln 1 - \ln \epsilon\right] \to \text{diverge.}$$

Def: Suponga que $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ es integrable sobre $[a,r]$, $r>a$. Entonces, la integral impropia de f es:

$$\int_a^\infty f = \lim_{r\to\infty} \int_a^r f$$

Ej: Considere la integral de Frullani:

$$I = \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx, \quad a,b>0,$$

y donde $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ es continua y es t.q.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(\infty) < \infty.$$

- Sea $I = I_1 + I_2$

$$I_1 = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx \;;\quad I_2=\lim_{r\to\infty}\int_{1}^{r} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx$$

Estudiemos I_1: SPG, hagamos: $0<a<b$, y $u=ax$, $t=bx$

$$\Rightarrow I_1=\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{\epsilon a}^{a}\frac{f(u)}{u}\,du-\int_{\epsilon b}^{b}\frac{f(t)}{t}\,dt\right]$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\left[-\int_{a}^{\epsilon a}\frac{f(u)}{u}\,du-\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\frac{f(u)}{u}\,du-\int_{\epsilon b}^{b}\frac{f(t)}{t}\,dt+\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\frac{f(t)}{t}\,dt\right]$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\frac{f(t)}{t}\,dt-\int_{a}^{b}\frac{f(t)}{t}\,dt\right].$$

$$\Rightarrow \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\frac{f(t)}{t}\,dt=\;?$$

$$\Rightarrow \int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\frac{f(t)}{t}\,dt=\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\frac{f(t)}{t}\,dt-\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\frac{f(0)}{t}\,dt+\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\frac{f(0)}{t}\,dt=$$

$$=\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\left[\frac{f(t)-f(0)}{t}\right]dt+f(0)\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\frac{dt}{t}$$

$$=\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\left[\frac{f(t)-f(0)}{t}\right]dt+f(0)\cdot\underbrace{\ln t\Big|_{\epsilon a}^{\epsilon b}}_{\ln(b/a)}$$

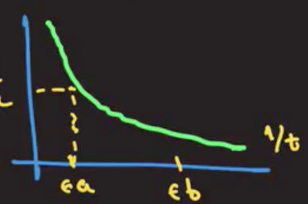
$$\le\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\left|\frac{f(t)-f(0)}{t}\right|dt+f(0)\ln(b/a)$$

$$=\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}|f(t)-f(0)|\cdot\frac{1}{t}\,dt+f(0)\ln(b/a)$$

$$\le\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\text{máx}\,|f(t)-f(0)|\cdot\frac{1}{t}\,dt+f(0)\ln(b/a)$$

$$=\text{máx}\,|f(t)-f(0)|\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\frac{1}{t}\,dt+f(0)\ln(b/a)$$

$$\le\text{máx}\,|f(t)-f(0)|\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\frac{1}{\epsilon a}\,dt+f(0)\cdot\ln(b/a)$$



$$=\text{máx}\,|f(t)-f(0)|\cdot\frac{1}{\cancel{\epsilon}a}(\cancel{\epsilon}b-\cancel{\epsilon}a)+f(0)\cdot\ln(b/a)$$

$$=\text{máx}\,|f(t)-f(0)|\cdot\left(\frac{b-a}{a}\right)+f(0)\cdot\ln(b/a)\to 0$$

$$\xrightarrow[\epsilon\to 0]{}\qquad\Rightarrow I_1=f(0)\ln(b/a)-\int_{a}^{b}\frac{f(t)}{t}\,dt$$

9. Sesión 9 y Sesión 10

9.1. Sucesiones de funciones

Definición 11. *Una sucesión de funciones* $f_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *converge puntualmente en* $E_0 \subset E$, *si* $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x)\mathbb{Z}^+ \ni$ *si* $n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. *i.e* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Definición 12. *Sea* $E \subseteq \mathbb{R}$ *y sea la sucesión de funciones* (f_n), $f_n : E \to \mathbb{R}$. *Se dice que* (f_n) *converge uniformemente a* $f(x), \forall x \in E_0 \subset E$, *si* $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \ni$ *si* $n \geq N \implies |f_n(x) - f(x) \leq \varepsilon, \forall x \in \varepsilon_0$. *Notación* $f_n \to_{unif} f$ *(con dos flechas también).*

Definición 13. *(Criterio de Cauchy) Sea* $E \subseteq \mathbb{R}$ *y* (f_n) *una sucesión de funciones sobre* E. *Entonces,* (f_n) *converge uniformemente a alguna función* $f(x)$ *en* $E_0 \subset E$, *ssi* $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^+ \ni$ *si* $m, n \geq N$, *entonces* $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in E_0$.

9.2. Series

Definición 14. *Se dice que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge ssi la sucesión de sumas parcial* $(s_n)^*$ *converge; i.e* $\sum a_n$ *converge ssi* $\lim_{n\to\infty} S_n = L < \infty$.

Dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R}$, *se tiene:*

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$$

Definición 15. *Una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente, si* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge.*

Teorema 21. *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente, entonces la serie converge.*

NOTA. *Recuerde el caso de las serie en* $\mathbb{C}$. *Entonces dada la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, *los* $c_n \in \mathbb{C}$, *se considera la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$, *la cual es una serie de número reales.*

Sucesiones de Funciones

Def Una sucesión de funciones $f_n: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge puntualmente a $f(x)$ en $E_0 \subset E$, si $\forall \epsilon > 0$ $\exists\, N = N(\epsilon, x) \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Ejs: 1) Sea $f_n(x) = x^n$, $\forall x \in [0,1]$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

- La sucesión converge puntualmente.

** • Note que $f_n(x) = x^n$ es continua $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, pero $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ no es continua.

② Considere $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$, la cual:

i) $f_n'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1/n}}$, i.e. f_n es diferenciable, para todo $x \in \mathbb{R}$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \cancel{1/n}^{\,0}} = \sqrt{x^2} = |x|$, la cual no es diferenciable en $x = 0$.

③ Sea $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(n^3 x)}{n}$, la cual:

i) $f_n'(x) = \dfrac{n^3 \cos(n^3 x)}{n} = n^2 \cos(n^3 x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

④ Sea $u_n(x) = nx(1-x^2)^n$, $\forall x \in [0,1]$

0:21:17

i) $u_n(x)$ es continua, $\forall x \in [0,1] \Rightarrow u_n(x) \in \mathcal{R}[0,1]$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} nx(1-x^2)^n = 0$

$$\Rightarrow \int_0^1 u_n(x)\,dx = \int_0^1 nx(1-x^2)^n\,dx = -\frac{n}{2}\int u^n\,du = -\frac{n}{2}\cdot\frac{u^{n+1}}{n+1} = -\frac{n}{2}\,\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{n}{2}\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}$$

$w = 1 - x^2$

$-\frac{1}{2}\,du = x\,dx$

además, $\int_0^1 \underset{\to 0}{u(x)}\,dx = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 u_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \underset{\to 0}{u(x)}\,dx = 0.$$

0:28:15

5) Sea $u_n = [\![\cos^2(n!\pi x)]\!]$, $\forall x \in [0,1]$

(u_n es continua, $\forall x \in [0,1]$)

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \underbrace{\begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{si } x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases}}_{\substack{\text{función de Dirichlet} \\ (\text{discontinua } \forall x)}}$$

Def: Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ y sea la sucesión de funciones (f_n), $f_n: E \to \mathbb{R}$. Se dice que (f_n) converge uniformemente a $f(x)$, $\forall x \in E_0 \subset E$, si $\forall \epsilon > 0\ \exists \boxed{N = N(\epsilon)} \ni$ si $n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, $\boxed{\forall x \in E_0}$. Notación: $f_n \xrightarrow[\text{unif}]{} f$; $f_n \rightrightarrows f$

Teorema (criterio de Cauchy) Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ y (f_n) una sucesión de funciones sobre E. Entonces, (f_n) converge uniformemente a alguna función $f(x)$ en $E_0 \subset E$, ssi $\forall \epsilon > 0 \; \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $m, n \geq N$, entonces $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon, \forall x \in E_0$.

Dem: $(\Rightarrow)$ Sabemos $f_n \xrightarrow[\text{unif}]{} f$, $\forall x \in E_0$.

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \; \exists N = N(\epsilon) \ni \underbrace{|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}}_{\text{si } n \geq N}, \forall x \in E_0$,

y también, si $m \geq N \Rightarrow |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall x \in E_0$,

$\Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n(x) - f(x)) + (f(x) - f_m(x))|$

$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, $\forall x \in E_0$.

$(\Leftarrow)$ $\lim_{n \to \infty} |f_m(x) - f_n(x)|$

$\uparrow$

convergencia puntual

$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, $\forall x \in E_0$.

$\blacksquare$

Series:

Def: Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ssi la sucesión de sumas parciales $(S_n)^*$ converge; i.e. $\sum a_n$ converge ssi $\lim_{n \to \infty} S_n = L < \infty$.

*: Dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$$

$\Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_{n-1} + a_n$

(S_n): es la sucesión de sumas parciales

Ej: 1) Encuentre la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}}_{a_n}.$$

$$\Rightarrow \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \frac{C}{n+1} + \frac{D}{(n+1)^2}$$

$\Rightarrow A = C = 0;\ B = 1,\ D = -1$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$
$$= \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2^2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2^2}} - \cancel{\tfrac{1}{3^2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3^2}} - \tfrac{1}{4^2}\right) + \cdots + \left(\cancel{\tfrac{1}{n^2}} - \tfrac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \cancel{\frac{1}{(n+1)^2}}^{\,0}\right]$$
$$= 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$; $a_n = \dfrac{n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}} =$

$$= \frac{n - \sqrt{(n+1)(n-1)}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}} = \frac{n}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}\,\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$
$$= \left(\cancel{\tfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}} - \cancel{\tfrac{\sqrt{0}}{\sqrt{1}}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} - \cancel{\tfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}}\right) + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} - \cancel{\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \cancel{\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}} = 1$$

Ej (*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}$, $m \in \mathbb{Z}^+$.

Ej: Encuentre la serie y suma, si (S_n) está dada por:

1) $S_n = \dfrac{n+1}{n}$. Nótese que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

Sabemos: $S_n = S_{n-1} + a_n \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} =$

$$= \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n-1} = \frac{(n+1)(n-1) - n^2}{n(n-1)} = \frac{\cancel{n^2} - 1 - \cancel{n^2}}{n(n-1)}$$

$n \geq 2$

$\Rightarrow$ La serie es: $\displaystyle 2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

Además, si $n = 1 \Rightarrow a_1 = S_1 = \dfrac{1+1}{1} = 2$

2) $S_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n} \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} =$

$$= \frac{2^n - 1}{2^n} - \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} = \frac{(2^n - 1) - 2(2^{n-1} - 1)}{2^n} =$$

$$= \frac{\cancel{2^n} - 1 - \cancel{2^n} + 2}{2^n} = \frac{1}{2^n}, \quad n = 0, 1, 2.$$

$$\Rightarrow \text{La serie es } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - (1/2)} = 2$$

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \cancel{\frac{1}{2^n}}^{\,0}\right) = 1$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = 2 - 1 = 1$$

$\Rightarrow$ La serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Teorema (criterio de divergencia)

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Dem. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente y sea (S_n) la sucesión de sus sumas parciales $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = L < \infty$.

$\Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} [S_n - S_{n-1}] =$

$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = L - L = 0$ □

Nota: La contrapuesta del teorema anterior es: Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Def: Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Teorema: Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente $\Rightarrow$ la serie converge.

Dem: (•) Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, considere

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \Rightarrow S_{n+p} - S_n = \sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k =$

$= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$. Entonces, el criterio de Cauchy se escribe: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge ssi $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \epsilon$, $\forall p$, $p = 1, 2, 3 \ldots$

(•) Considere $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, que es absolutamente convergente i.e. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \epsilon$, $\forall p$, $p = 1, 2 \ldots$

Nótese que $\underbrace{\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right|}_{S_{n+p} - S_n} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \epsilon$, $\forall p$, $p = 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow$ Por el criterio de Cauchy $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. □

Nota: Recuerde el caso de las series en $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow$ Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, los $c_n \in \mathbb{C}$, se considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$, la cual es una serie de números reales.

10. Sesión 11 y Sesión 12

Prop. Si $|r|<1 \Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a r^n} = \frac{1}{1-r}$, y la serie diverge para $|r|\geq 1$ (series geométricas). $\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1}$

Dem: $|r|\neq 1$

Considere: $1-r^{n+1} = (1-r)(1+r+r^2+\dots+r^n)$, $n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow 1+r+r^2+\dots+r^n = \frac{1-\boxed{r^{n+1}}}{1-r}$, $r\neq 1$

Si $n\to\infty \Rightarrow 1+r+r^2+\dots+r^n+\dots \to \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & |r|<1 \\ \text{Diverge}, & |r|>1 \end{cases}$

$|r|=1$ $\begin{cases} r=1 \\ r=-1 \end{cases}$. Nótese que, en ambos casos, se tiene que $\boxed{\lim_{n\to\infty} 1^n \neq 0}$ y $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \neq 0 \Rightarrow$ La serie diverge

---

Nota: Recordemos: $1+x+x^2+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x|<1$

Prop: (Criterio de comparación)... Términos positivos

i) Si $\sum_1^{\infty} b_k$ converge y $\boxed{0\leq a_k \leq b_k} \Rightarrow \sum_1^{\infty} a_k$ converge.

ii) Si $\sum_1^{\infty} c_k$ diverge y $\boxed{0\leq c_k \leq d_k} \Rightarrow \sum_1^{\infty} d_k$ diverge.

Dem: (i) Sea $\sum_1^{\infty} b_k$ converge $\Rightarrow$ La sucesión de sumas parciales de la serie forma una sucesión de Cauchy $\Rightarrow$ Para cada $k\in\mathbb{Z}^+$ y para cada $p=1,2,\dots$ se tiene que: $a_k+a_{k+1}+\dots+a_{k+p} \leq b_k+b_{k+1}+\dots+b_{k+p}$, $p=1,2,\dots$

$\Rightarrow$ la sucesión de sumas parciales de $\sum_1^{\infty} a_k$ es de Cauchy $\Rightarrow \sum a_k$ converge.

---

ii) Suponga que $\sum_1^{\infty} c_k$ diverge y que $0\leq c_k\leq d_k$. Es decir, la serie diverge a ∞.

$\Rightarrow$ Dado $M>0$ $\exists$ $k_0\in\mathbb{Z}^+ \ni$ para $k\geq k_0$, se tiene:

$$c_1+c_2+\dots+c_k > M$$

$\Rightarrow$ Se cumple que $d_1+\dots+d_k \geq c_1+c_2+\dots+c_k > M$

$\Rightarrow$ La serie $\sum_1^{\infty} d_k$ diverge. □

Prop: (P-series): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge para $p>1$ y diverge para $p\leq 1$.

Dem. ① Caso $p=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (criterio de condensación)

② Caso $p\leq 1$. Entonces, la serie es de términ

---

positivos y sabemos que, para $p\leq 1$, se tiene $n^p \leq n^1 \Rightarrow \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow$ por comparación $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge.

③ $p>1$ (criterio de condensación)

Prop: (Criterio de la razón)

① Suponga que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existe y es menor que 1 $\Rightarrow$ La serie $\sum_1^{\infty} a_n$ converge absolutamente. ② Si el límite tiende a infinito o es mayor que 1. $\Rightarrow$ La serie diverge. ③ Si el límite es 1, el criterio no es concluyente.

Dem. ① Suponga que $\lim_{n\to\infty} \boxed{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = r < 1$

Sea $r'\in\mathbb{R} \ni r<r'<1$ y sea $N_0\in\mathbb{Z}^+ \ni$ si $n\geq N_0$ $\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r'$. Entonces, $\forall\, k\geq N_0$, se tiene:

$$|a_k| \leq r'|a_{k-1}| \leq (r')^2 \cdot |a_{k-2}| \leq \dots \leq (r')^{k-N_0} \cdot |a_{N_0}|$$

$\Rightarrow$ La serie $\sum_{k=N_0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=N_0}^{\infty} |a_{N_0}| \cdot (r')^{k-N_0}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} |a_{N_0}| \cdot (r')^k$$

$\therefore \sum_{k=N_0}^{\infty} |a_k|$ converge por comparación con la serie geométrica.

---

③ Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, la cual es convergente por p-serie. Pero:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Por otra parte, la serie divergente $1+1+1+\dots$ es t.q. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1$

② Suponga que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r > 1$. Sea $r'\in\mathbb{R} \ni r>r'>1$ y sea $N_0\in\mathbb{Z}^+ \ni$ Si $n\geq N_0$, entonces $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > r' \Rightarrow |a_k| > r'|a_{k-1}| > (r')^2 \cdot |a_{k-2}| > \dots > (r')^{k-N_0} \cdot |a_{N_0}|$

Teorema (condensación): Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ni a_n > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ y (a_n) es decreciente. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

convergen o divergen de forma conjunta

Ej.: 1) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. $\Rightarrow$ considere $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{2^n} \cdot \frac{1}{\cancel{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$. Como $\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

2) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Entonces, consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \left(\frac{1}{(2^n)^2}\right) = \sum_{n=1} \frac{2^n}{2^{2n}} = \sum_{n=1} \frac{1}{2^n} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = \frac{1}{1 - 1/2} - 1 = 2 - 1$
$= 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

3.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n[\ln(n)]^2} \Rightarrow$ Considere $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{2^n} \cdot \frac{1}{\cancel{2^n} \cdot [\ln(2^n)]^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n \ln 2]^2} = \underbrace{\frac{1}{(\ln 2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\text{converge}}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n[\ln n]^2}$ converge por condensación.

4) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)\sqrt{\ln(\ln n)}}$. Considere

$\sum_{n=3}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \cancel{2^n} \frac{1}{\cancel{2^n}(\ln 2^n)\sqrt{\ln(\ln 2^n)}} =$

$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n \ln 2)\sqrt{\ln(n \ln 2)}} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n \ln 2)}}$.

$\overset{\text{condensación}}{\Rightarrow} \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \cancel{2^n} \cdot \frac{1}{\cancel{2^n} \cdot \sqrt{\ln(2^n \cdot \ln 2)}}$

$= \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln 2^n + \ln(\ln 2)}} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n \ln 2 + \ln(\ln 2)}}$.

$\overset{\text{condensación}}{\Rightarrow} \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{2^n \ln 2 + \ln(\ln 2)}} \Rightarrow$

0:28:22

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{\sqrt{2^x \ln 2 + \ln(\ln 2)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x \cancel{\ln 2}}{\frac{2^x (\cancel{\ln 2})^2}{2\sqrt{2^x \ln 2 + \ln(\ln 2)}}} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2^x \ln 2 + \ln(\ln 2)}}{\ln 2} \longrightarrow \infty$

$\Rightarrow$ La serie diverge.

Ejercicio: $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln(\ln n))}$.

Nota: 1) Criterio de la integral

Sea $f(x)$ una función continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$, y sea $f(n) = a_n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ssi $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

0:32:37

② Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y considere $\int_1 f(x)\,dx$

Sea $x = 2^t \Rightarrow dx = 2^t \ln 2\, dt$

$\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx = (\ln 2) \int_0^{\infty} 2^t f(2^t)\,dt$

$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = 1 \Rightarrow 1 = 2^t \Rightarrow t = 0 \\ \text{Si } x = \infty \Rightarrow t = \infty \end{array}\right] \Rightarrow \sum a_n$ converge ssi $\sum 2^n \underbrace{f(2^n)}_{a_{2^n}}$ converge.

Teorema (2^{do} criterio de la razón).

Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, y sean

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{2n}}{a_n}\right| = L_1$ y $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{2n+1}}{a_n}\right| = L_2$.

Si:

i) $L_1 < \frac{1}{2}$ y $L_2 < \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

ii) $L_1 > \frac{1}{2}$ y $L_2 > \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

iii) $L_1 = \frac{1}{2}$ o $L_2 = \frac{1}{2}$, o si $L_1 > \frac{1}{2}$ y $L_2 < \frac{1}{2}$, o viceversa, el criterio no es concluyente.

Ej: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$. Utilizando el 2^{do} criterio de la razón:

$\cdot)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{8n^3+1}}{\frac{n}{n^3+1}}$

0:46:57

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n(n^3+1)}{n(8n^3+1)} = \frac{1}{4} = L_1$$

$$\cdot\cdot) \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{2n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{(2n+1)^3+1}}{\frac{n}{n^3+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(n^3+1)}{n[(2n+1)^3+1]} = \frac{1}{4} = L_2.$$

Como $L_1 < \frac{1}{2}$ y $L_2 < \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ La serie converge.

Ej: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(2n)}{4\cancel{n^2}}}{\frac{\ln(n)}{\cancel{n^2}}} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2n)}{\ln(n)} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n}\cdot 2}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4}$$

$$\cdot\cdot) \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{\ln(2n+1)}{(2n+1)^2}}{\frac{\ln n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \ln(2n+1)}{(2n+1)^2 \ln n}$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2n+1)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n+1}(2)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} = 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(2n+1)^2} \cdot 1$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2n+1)}{\ln n}$$

$$= \frac{1}{4} = L_2$$

$\Rightarrow$ $L_1 = \frac{1}{4} < 1/2$, $L_2 = \frac{1}{4} < 1/2$ $\Rightarrow$ la serie converge.

Ej: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$;

$$\cdot) \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}\ln(2n)}}{\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n}}\ln(n)}{\sqrt{2}\cancel{\sqrt{n}}\ln(2n)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(2n)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\frac{1}{2n}\cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = L_1$$

$\sqrt{2} < 2$ $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$

$$\cdot\cdot) \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+1}\ln(2n+1)}}{\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\ln n}{\sqrt{2n+1}\ln(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \cdot \frac{\ln n}{\ln 2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = L_2$$

$$\lim \frac{\ln n}{\ln(2n+1)} = \lim \frac{1/n}{\frac{1}{2n+1}\cdot 2} = \lim \frac{2n+1}{2n} = 1$$

$\Rightarrow$ $L_1 > 1/2$, $L_2 > 1/2$ $\Rightarrow$ la serie diverge.

<u>Teorema</u> (criterio de Raabe): Sea $\sum_{n=1} a_n$, $a_n > 0$, y asuma que $L = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$.

i) Si $L > 1$ $\Rightarrow$ La serie converge.

ii) Si $L < 1$ $\Rightarrow$ La serie diverge.

iii) Si $L = 1$ $\Rightarrow$ el criterio no es concluyente.

Ej: Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Por Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1/n^3}{1/(n+1)^3} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(n+1)^3 - n^3}{n^3}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3n^2+3n+1}{n^3}\right) = 3 > 1 \Rightarrow \text{La serie converge.}$$

Ej: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$; Por Raabe, se tiene.

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{n!/2^n}{(n+1)!/2^{n+1}} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{n!\,2^{n+1}}{(n+1)!\,2^n} - 1\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{2}{n+1} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2-n-1}{n+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n-n^2-1}{n+1} \to -\infty < 1 \Rightarrow \text{la serie diverge.}$$

Ej: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$; Recordemos.

$(2n)!! = (2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 2$

$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 1$

Por Raabe,

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}} - 1\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{\cancel{(2n-1)!!}\,(2n+2)\,\cancel{(2n)!!}}{\cancel{(2n)!!}\,(2n+1)\,\cancel{(2n-1)!!}} - 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(\cancel{2n}+2) - (\cancel{2n}+1)}{(2n+1)}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ la serie diverge.