AVR2 : 6/9/2021

Teorema: Suponga que $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es acotada sobre A, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, y que $f_n \to f$ uniformemente sobre A. Entonces, $f : A \to \mathbb{R}$ es acotada sobre A.

Dem: Sea $\epsilon = 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < 1, \ \forall x \in A$. (conv. uniforme). Como (f_n) es sucesión de funciones acotadas $\Rightarrow$

si $n \geq N \Rightarrow \exists M > 0 \ni |f_n(x)| \leq M, \ \forall x \in A$

$\Rightarrow |f(x)| - |f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| < 1$

$\Rightarrow |f(x)| < 1 + |f_n(x)| \leq 1 + M, \ \forall x \in A$

$\Rightarrow f(x)$ está acotada. $\square$

Ej: Considere la sucesión de funciones (f_n) definidas:

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni \quad f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{1+nx^2} = 0$ (límite puntual, independiente del valor de x; i.e. la convergencia es uniforme). Entonces:

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} 0$$

En efecto: Debemos probar que $|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| < \epsilon, \ \forall n \geq N \in \mathbb{Z}^+$.

$\Leftrightarrow |f_n(x)|$ tiene cota.

Forma 1: $|f_n(x)| = \left| \dfrac{x}{1+nx^2} \right| = \dfrac{|x|}{1+nx^2} =$

$$= \frac{|x|}{1+(\sqrt{n}x)^2} = \frac{\sqrt{n}|x|}{\sqrt{n}\left[1+(\sqrt{n}x)^2\right]} = \frac{\sqrt{n}|x|}{\sqrt{n}\left[1+(\sqrt{n}x)^2\right]}$$

(Sea $t = \sqrt{n}|x| > 0$

$$= \frac{t}{\sqrt{n}\left[1+t^2\right]} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$(1-t)^2 \geq 0$

$1 - 2t + t^2 \geq 0$

$2t \leq 1 + t^2, \quad t > 0$

$\Rightarrow 2 \leq \dfrac{1+t^2}{t}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{t}{1+t^2}, \ t > 0$

$\Rightarrow$ Dado $\epsilon > 0 \ \exists N = \dfrac{1}{4\epsilon^2} \ni$ si $n \geq N$, entonces,

$|f_n(x) - 0| < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \epsilon, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f_n \to 0$ uniformemente

Forma 2: Sea $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$, entonces

$$f_n'(x) = \frac{1+nx^2 - x(2nx)}{(1+nx^2)^2} = \frac{1+nx^2-2nx^2}{(1+nx^2)^2} =$$

$$= \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2} = 0 \Rightarrow 1 - nx^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{n}} = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$$

		$-1/\sqrt{n}$		$1/\sqrt{n}$	
$1-nx^2$	$-$		$+$		$-$
$(1+nx^2)^2$	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
		min		max	

$\Rightarrow f_n(x)$ tiene máximo en $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dfrac{1}{2\sqrt{n}}\right)$

$\Rightarrow |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \cdots$

$\Rightarrow f_n \to 0$, uniformemente.

Como cada f_n es diferenciable, entonces:

$$f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$$

si $x = 0 \Rightarrow f_n' \to 1$

si $x \neq 0 \Rightarrow f_n' \to 0$

$\Rightarrow$ la sucesión (f_n') converge a $g(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \neq 0$

$\Rightarrow$ El límite de la sucesión de derivadas no es igual a la derivada del límite.

Teorema (Weierstrass): Suponga que (f_n) es una sucesión de funciones diferenciables, $f_n : (a,b) \to \mathbb{R} \ni$

$f_n \to f$ puntualmente y $f_n' \to g$ uniformemente, donde f y $g : (a,b) \to \mathbb{R}$. Entonces, f es diferenciable sobre (a,b) y $f' = g$.

Dem: Sean $c \in (a,b)$ y $\epsilon > 0$. A probar: $f'(c) = g(c)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = g(c)$

Nótese:

$$\left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - g(c) \right|$$

$$= \left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - \frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c} + \frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c} - f_n'(c) + f_n'(c) - g(c) \right|$$

$$\le \left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - \frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c} \right| + \left| \frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c} - f_n'(c) \right| + |f_n'(c) - g(c)|$$

(••)

(•) Como $f_n' \longrightarrow g$ uniformemente $\Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N_1 \Rightarrow |f_n'(c) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{3}$

(••) Sean f_n y f_m diferenciables en (a,b) $\Rightarrow f_m - f_n$ es diferenciable en (a,b)

$\Rightarrow f_m - f_n$ es diferenciable en cualquier intervalo que contenga a c y a x. Por el Teorema del valor medio,

$\exists\, \xi$ entre c y x $\ni$

$$\frac{(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(c)}{x-c} = (f_m - f_n)'(\xi)$$

$$\Rightarrow \frac{f_m(x) - f_m(c)}{x-c} - \frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c} = f_m'(\xi) - f_n'(\xi)$$

Como (f_n') converge uniformemente $\Rightarrow$ converge uniformemente según Cauchy $\Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $m, n \geq N_2 \Rightarrow |f_m'(\xi) - f_n(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\xi \in (a,b)$.

$\Rightarrow$ Si $m \to \infty$, se obtiene:

$$\left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - \frac{f_n(x) - f(c)}{x-c} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(•••) Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$ y sea $n \geq N \Rightarrow$ la diferenciabilidad de f_n implica que: $\exists\, \delta > 0 \ni$ $|x-c| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f_n(c)}{x-c} - f_n'(c) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

$\Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - g(c) \right| < \varepsilon$, si $|x-c| < \delta \Rightarrow f$ es diferenciable en c y $f'(c) = g(c)$. ◻

Def: Sea (f_n) una sucesión de funciones en $A \subseteq \mathbb{R}$.

i) Se dice que (f_n) es creciente, si $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ y $\forall x \in A$.

ii) Se dice que (f_n) es decreciente, si $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ y $\forall x \in A$.

iii) Si (f_n) es creciente o decreciente, entonces (f_n) es monótona.

Teorema (Dini) Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas sobre un compacto $I \subseteq \mathbb{R}$. Suponga que $f_n \longrightarrow f$ puntualmente y (f_n) es monótona. Entonces, $f_n \longrightarrow f$ uniformemente.

Dem: Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ definimos:

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$$

$\Rightarrow$ Nótese que: •) $g_n \longrightarrow 0$ puntualmente

••) g_n es decreciente

A probar: $g_n \longrightarrow 0$ uniformemente.

Como g_n es decreciente, se tiene que:

$$\|g_{n+1}(x)\|_\infty = \sup\{|g_{n+1}(x)| : x \in I\} = \sup\{g_{n+1}(x) : x \in I\} \leq \sup\{g_n(x) : x \in I\} = \|g_n(x)\|_\infty$$

• $\|g_n\|_\infty = g_n(x_n)$, $x_n \in I$

Punto

$= \sup\{|g_n(x)| : x \in I\} = g_n(x_n)$

$\boxed{\text{Lim sup}}$

$\boxed{\text{Lim inf}}$