Teorema (criterio de la raíz): Suponga que $\lim_{n\to\infty} (|a_n|)^{1/n} = L$. Entonces,

i) Si $L < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge.

ii) Si $L > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.

iii) Si $L = 1 \Rightarrow$ el criterio no es concluyente. *

Dem:

(i) Sabemos que $\lim_{n\to\infty} (|a_n|)^{1/n} = L < 1$. Sea $L' \in \mathbb{R}^+ \ni L < L' < 1$, y sea $N \in \mathbb{Z}^+$, tal que si $n \geq N \Rightarrow |a_n|^{1/n} < L' \Rightarrow (|a_n|^{1/n})^n < (L')^n$

$\Rightarrow |a_n| < (L')^n \Rightarrow \sum |a_n| < \sum (L')^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum |a_n|$ converge por comparación $\Rightarrow \sum a_n$ converge absolutamente $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

(ii) Ejercicio.

(iii) Nótese que $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = 1$.

Sea $y = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} \Rightarrow \ln y = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[\cancel{\ln(1)}^{0} - \ln(n)] = \lim_{n\to\infty} -\frac{\ln(n)}{n} =$

$= \lim_{n\to\infty} -\frac{1/n}{1} = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1$

y nótese que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Por otra parte, considere $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n} = 1$, y nótese que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. $\Rightarrow$ el criterio de la raíz no es concluyente.

Series de Funciones

Nota: 1) Suponga que $\boxed{\{f_n\}}$ es una sucesión de funciones definida sobre el conjunto E, y suponga que la sucesión numérica $\boxed{\{f_n(x)\}}$ converge para cada $x \in E$.

Entonces, se define una función f así

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad \forall x \in E$$

$\Rightarrow$ se dice que $\{f_n\}$ converge a f sobre E (o bien, que f es el límite de f_n)

2) Similarmente, si $\sum f_n(x)$ converge para cada $x \in E$, y si se define: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in E$ (2)

$\Rightarrow$ la función f es la suma de $\sum f_n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Problema: Determinar los casos en los cuales las propiedades importantes se preservan bajo (1) y (2).

0:38:13

Teorema (M-test de Weierstrass)

Suponga que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones definidas en E, y suponga que $|f_n(x)| \leq M_n$, $\forall x \in E$ y $M_n \in \mathbb{R}$., $n = 1, 2, \ldots$. Si $\sum M_n$ converge $\Rightarrow \sum f_n(x)$ converge uniformemente.

↑ convergencia absoluta.

Dem: Sean $n, m \in \mathbb{Z}^+$, lo suficientemente grandes para que: sea $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n, m \geq N \Rightarrow$ se tiene $(m > n)$

$$|S_m - S_n| \left|\sum_{i=n+1}^{m} f_n(x)\right| \leq \sum_{i=n+1}^{m} |f_n(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{m} M_n < \epsilon,$$

$\forall x \in E \Rightarrow \sum f_n(x)$ converge uniformemente. $\square$

Ej: (1) Considere la serie $L(x) = \sum_{k=1} \frac{x}{k^2}$ (función dilogaritmo de Euler).

• Encontremos el dominio de convergencia de $L(x)$.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}}{\frac{x^k}{k^2}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{x^{k+1} \cdot k^2}{x^k \cdot (k+1)^2}\right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} |x| \cdot \left(\cancel{\frac{k}{k+1}}^{1}\right)^2 = |x| < 1 \leftarrow \text{Radio de convergencia.}$$

$\Rightarrow$ la serie converge en $-1 < x < 1$.

Sea $x = 1 \Rightarrow L(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, la cual converge por p-series

Sea $x = -1 \Rightarrow L(-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$, la cual converge por alternante.

0:51:08

⇒ el dominio de convergencia de la serie es $-1 \le x \le 1$.

••) Sea $\left|\frac{x^k}{k^2}\right| = \frac{|x|^k}{k^2} \le \frac{1}{k^2}$ M_k, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$.

⇒ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge por p-series

⇒ por M-test ⇒ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ converge uniformemente en $[-1,1]$.

2) Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ converge uniformemente sobre $(0,\infty)$.

Sea $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$, $x \in (0,\infty)$.

⇒ $f_n'(x) = 2x e^{-nx} - nx^2 e^{-nx} = x e^{-nx}\underbrace{(2-nx)}_{=0}$

⇒ $x = \frac{2}{n}$ (valor crítico) ⇒ $f_n(x)$ tiene un máximo en $\left(\frac{2}{n}, \left(\frac{4}{n^2}\right) e^{-\cancel{n}\left(\frac{2}{\cancel{n}}\right)}\right) = \left(\frac{2}{n}, e^{-2}\frac{4}{n^2}\right)$

⇒ $0 \le f_n(x) \le \underbrace{e^{-2}\left(\frac{4}{n^2}\right)}_{M_n}$, $n = 1, 2, \dots$

⇒ Nótese que $\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{(4e^{-2})}/n^2$ converge por p-series.

⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ converge uniformemente en $(0,\infty)$

1:04:47

Teorema: Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas sobre E y si $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ ⇒ f es continua sobre E. □

Ej: 1) Considere la sucesión $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$, $[0,\infty)$.

1.1) Calcule el límite puntual de $f_n(x)$, y llámele $f(x)$.

1.2) ¿ $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ sobre $[0,1]$?

Sol.

1.1) Sea $x=0$ ⇒ $f_n(0)=0$.

Sea $x \neq 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+nx} = 1$

⇒ $f(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ 1, & x \in (0,\infty). \end{cases}$

1.2) Nótese que $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ es continua en $[0,1]$, pero su límite $f(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ 1, & x\in(0,1] \end{cases}$ no es continua ⇒ la convergencia no es uniforme (convergencia unif. preserva continuidad).

(2) Estudie la convergencia de la sucesión $\{\underbrace{x^n(1-x)}_{f_n(x)}\}$ en $[0,1]$.

Nótese: si $x=1$ ⇒ $f_n(1)=0$
si $x=0$ ⇒ $f_n(0)=0$ $\Big\}$ ⇒ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

si $x \in (0,1)$ ⇒ $f_n(x) \longrightarrow 0$

¿Es la convergencia uniforme?

• Dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $N = N(\epsilon) \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \ge N$

⇒ $|f_n(x) - 0| < \epsilon$, $\forall x \in [0,1]$

•• $|f_n(x)| < (\text{cota}) < \epsilon$

independiente de x

$f_n(x) = x^n(1-x)$

Considere $f(x) = x^n(1-x)$ toma un máximo $[0,1]$. El máximo debe darse en $(0,1)$. Entonces,

$f'(x) = nx^{n-1}(1-x) + x^n(-1) = x^{n-1}[n(1-x) - x]$

$= x^{n-1}\underbrace{[n - (n+1)x]}_{=0} = nx^{n-1} - (n+1)x^n$

⇒ $x \neq 0$ o $n - (n+1)x = 0$ ⇒ $x = \frac{n}{n+1}$

Por criterio de 2da derivada

⇒ $f''(x) = n(n-1)x^{n-2} - n(n+1)x^{n-1}$

⇒ $f''\left(\frac{n}{n+1}\right) = n(n-1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-2} - n(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}$

$= n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-2}\left[(\cancel{n}-1) - \cancel{(n+1)}\left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n+1}}\right)\right] =$

$= -n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-2} < 0 \Rightarrow$ Hay máximo relativo en $x = \frac{n}{n+1}$

$\Rightarrow f_n(x) \le \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left[1 - \frac{n}{n+1}\right] = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right)$

$1/\epsilon - 1 \qquad \le \frac{1}{n+1}, \forall n.$

Dado $\epsilon > 0 \ \exists \ N = \underline{1/\epsilon} \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \ge N$, entonces

$|f_n(x) - 0| = f_n(x) \le \frac{1}{n+1} < \epsilon$

$n+1 > \frac{1}{\epsilon}$

$\Rightarrow \boxed{n > \frac{1}{\epsilon} - 1}$

$\Rightarrow$ La convergencia es uniforme.

Ej: Pruebe que $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ converge uniformemente en $(0,\infty)$

(M-test)

Sea $f_n(x) = x^2 e^{-nx} \Rightarrow f_n'(x) = 2x e^{-nx} - n x^2 e^{-nx} =$

$= x e^{-nx}[2 - nx] = 0 \Rightarrow \cancel{x=0}$ o $2 - nx = 0$

$\Rightarrow x = \frac{2}{n}$ (máx)

$\Rightarrow 0 \le x^2 e^{-nx} \le f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \left(e^{-n(2/n)}\right) =$

$= e^{-2}\left(\frac{2}{n}\right)^2 = 4e^{-2}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Nótese que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge por p-series $\Rightarrow$ por M-test, la serie converge unif.

0:19:55

Nota: ① Sea α una función monótona creciente sobre $[a,b]$. Nótese que, como $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ son finitos $\Rightarrow \alpha(x)$ es acotada en $[a,b]$

② Considere $P \in \mathcal{P}[a,b]$ y hagamos $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$, $a \le x_{i-1} \le x_i \le b$.

③ Para cualquier función f acotada sobre $[a,b]$, definamos:

$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\,\Delta\alpha_i \quad \to M_i = \sup\{|f(x)| \ldots\}$

$L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\,\Delta\alpha_i$

y también:

0:30:04

$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \inf\{U(P,f,\alpha) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$

$\underline{\int_a^b} f\,d\alpha = \sup\{L(P,f,\alpha) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$.

④ Si $\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \underline{\int_a^b} f\,d\alpha =: \int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$, (*)

la cual es la integral de Riemann-Stieltjes de f con respecto a α sobre $[a,b]$.

⑤ Si (*) existe, entonces f es integrable con respecto a α (en el sentido de Riemann), lo cual se denota $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

⑥ Si $\alpha(x) = x \Rightarrow$ la integral de R-S es la integ

$\left[\ \int_0^1 (x^3+1)\,dx^2 = \int_0^1 (x^3+1)(2x)\,dx = \ldots\ \right]$

Teorema: Sea α monótona creciente en $[a,b]$. Suponga que $f_n \in \mathcal{R}(\alpha)$, $n = 1, 2, \ldots$ y suponga que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente sobre $[a,b]$. Entonces,

① $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ sobre $[a,b]$ y:

$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,d\alpha = \int_a^b f\,d\alpha.$ ②

Dem: Sea $\varepsilon_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\}$

$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$

$\Rightarrow -\varepsilon_n <$

$\Rightarrow f_n(x) - \varepsilon_n \le f(x) \le f_n(x) + \varepsilon_n, \quad a \le x \le b$

$\Rightarrow \int_a^b [f_n(x) - \varepsilon_n]\,d\alpha \le \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \le \overline{\int_a^b} f\,d\alpha \le \int_a^b (f_n(x) + \varepsilon_n)\,d\alpha$

$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f\,d\alpha \le \int_a^b (f_n + \varepsilon_n)\,d\alpha$

$-\underline{\int_a^b} f\,d\alpha \le -\int_a^b (f_n - \varepsilon_n)\,d\alpha \quad \}+$

$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f\,d\alpha - \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \le \cancel{\int_a^b f_n\,d\alpha} + \int_a^b \varepsilon_n\,d\alpha - \cancel{\int_a^b f_n\,d\alpha} + \int_a^b \varepsilon_n\,d\alpha$

$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f\,d\alpha - \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \le 2\varepsilon_n \int_a^b d\alpha \cdot \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 \le \overline{\int_a^b} f\,d\alpha - \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \le 2\varepsilon_n[\alpha(b)-\alpha(a)]$$

cuando $n\to\infty \Rightarrow \varepsilon_n \to 0 \Rightarrow \overline{\int_a^b} f\,d\alpha - \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \to 0$

$\Rightarrow f\in \mathcal{R}(\alpha)$.

Por otra parte:

$$\Rightarrow \int_a^b [f_n-\varepsilon_n]\,d\alpha \le \int_a^b f\,d\alpha \le \int_a^b [f_n+\varepsilon_n]\,d\alpha$$

$$\Rightarrow \int_a^b f_n\,d\alpha - \varepsilon_n \int_a^b d\alpha \le \int_a^b f\,d\alpha \le \int_a^b f_n\,d\alpha + \varepsilon_n\int_a^b d\alpha$$

$$\Rightarrow -\varepsilon_n[\alpha(b)-\alpha(a)] \le \int_a^b f\,d\alpha - \int_a^b f_n\,d\alpha \le \varepsilon_n[\alpha(b)-\alpha(a)]$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f\,d\alpha - \int_a^b f_n\,d\alpha\right| \le \varepsilon_n[\alpha(b)-\alpha(a)]$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b [f_n - f]\,d\alpha\right| \le \varepsilon_n[\alpha(b)-\alpha(a)]$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,d\alpha = \int_a^b f\,d\alpha. \quad \square$$

Corolario: Si $f_n \in \mathcal{R}(\alpha)$ sobre $[a,b]$ y si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, uniformemente sobre $[a,b]$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \square$$

Norma del supremo

Def: Sea X un esp. métrico y sea $C(X)$ el conjunto de todas las funciones continuas y acotadas sobre X.

Para $f\in C(X)$ se define:

$$\|f\| = \sup_{x\in X}|f(x)|,$$

que se denomina la norma del supremo de f sobre X.

Nota: ① Como f es acotada $\Rightarrow |f(x)|<\infty$, $\forall x\in X$.
además, $\|f\|=0$ ssi $f(x)\equiv 0$

② Si $h=f+g \Rightarrow |h(x)| \le |f(x)|+|g(x)|$

$$\Rightarrow \|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$$