Lema: Sean $f, g \in R[a,b]$. Para cada $P \in \mathcal{P}[a,b]$ y cualquier selección de números $t_1, t_2, \dots, t_n$, donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, y cualquier selección de números $f_1, f_2, \dots, f_n$, con $f_k \in \{M_k(f), m_k(f)\}$, considere

$$\omega(P, f.g) = \sum_{k=1}^{n} f_k\, g(t_k)\, \Delta x_k ,$$

Entonces, $\omega(P, f, g)$ converge, en el sentido de Riemann, al valor de $\int_a^b fg$.

Dem:

• Considere el caso $g \geq 0$ y sea $\beta > 0$ una cota superior de g. Sea $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists P_1 \in \mathcal{P}[a,b] \ni \forall P \precsim P_1$

se tiene que $U(P,f) - L(P,f) < \frac{\epsilon}{2\beta}$

Por otro lado, sabemos que $f.g \in R[a,b]$.

••) Entonces, $\exists P_2 \in \mathcal{P}[a,b] \ni$ si $P \precsim P_2$ y si consideramos los puntos $t_1, t_2, \dots, t_n \in P$, entonces

$$\left| S(P, fg, \{t_k\}) - \int_a^b fg \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

•••) Sea $P_\epsilon = P_1 \cup P_2 \Rightarrow \forall P \precsim P_\epsilon$, se tiene:

$$\left| \omega(P,f,g) - \int_a^b fg \right| = \left| \omega(P,f,g) - S(P, fg, \{t_k\}) + \right.$$
$$\left. + S(P, fg, \{t_k\}) - \int_a^b fg \right| \leq$$

$$\leq \left| \omega(P,f,g) - S(P,fg,\{t_k\}) \right| + \left| S(P,fg,\{t_k\}) - \int_a^b fg \right|$$

$$\leq \left| \sum_{k=1}^{n} f_k\, g(t_k)\, \Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, g(t_k)\, \Delta x_k \right| + \epsilon/2$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} [f_k - f(t_k)]\, g(t_k)\, \Delta x_k \right| + \epsilon/2$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |f_k - f(t_k)| \cdot g(t_k)\, \Delta x_k + \epsilon/2$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} [U(P,f) - L(P,f)]\, g(t_k)\, \Delta x_k + \epsilon/2$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2\beta} \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\, \Delta x_k + \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon\beta}{2\beta} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\le \left|W(P,f,g) - S(P,fg,\{t_k\})\right| + \left|S(P,fg,\{t_k\}) - \int_a^b fg\right|$$

$$\le \left|\sum_{k=1}^{n} f_k\, g(t_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, g(t_k)\Delta x_k\right| + \epsilon/2$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} \left[f_k - f(t_k)\right] g(t_k)\Delta x_k\right| + \epsilon/2$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \left|f_k - f(t_k)\right| \cdot g(t_k)\Delta x_k + \epsilon/2$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \operatorname{osc}_{I_k}(f)\, \overset{\le \beta}{g(t_k)}\, \Delta x_k + \epsilon/2$$

$$\le \beta\left[U(P,f) - L(P,f)\right] + \epsilon/2 \le \frac{\epsilon}{2\beta}\cdot\beta + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

$\Rightarrow W(P,f,g)$ converge, en el sentido de Riemann, a $\int_a^b fg$.

∷]

$g(x) < 0, \ \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow \underbrace{g(x) + k} \geq 0,$

$\underbrace{-g(x)}_{h(x)} \geq 0$

$\Rightarrow W(P,f,g)$ converge, en el sentido de Riemann, a $\int_a^b fg$.

∷] Si g es negativa, se considera $-g$ o bien se encuentra $k \in \mathbb{R} \ni g(x) + k \geq 0, \ \forall x \in [a,b]$. □

Teorema (Bonnet): Sean $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y g una función no negativa, acotada y monótona decreciente. Entonces, $\exists\, \mu \in [a,b] \ni$

$$\int_a^b fg = g(a)\int_a^{\mu} f$$

Dem: •) Como g es acotada y monótona decreciente en $[a,b] \Rightarrow g \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow fg \in \mathcal{R}[a,b]$. Entonces, $g(a) > 0$, ya que, si $g(a) = 0 \Rightarrow g(x) = 0, \forall x \in [a,b]$. ∘ ∘ ∘ $\Rightarrow$ el teorema es válido para cualquier μ

••) Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$ y considere:

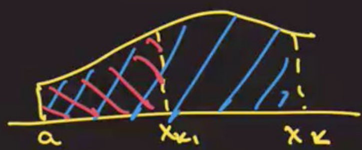
$\omega(P,f,g) = \sum_{k=1}^{n} f_k g_k \Delta x_k$, donde $g_k = g(x_{k-1})$, y $f_k \in \{M_k(f), m_k(f)\}$. Entonces:

$$m_k(f)\Delta x_k \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} f \leq M_k(f)\Delta x_k$$

$$\Rightarrow m_k(f) \leq \frac{1}{\Delta x_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f \leq M_k(f)$$

Sea $F(x) = \int_a^x f$, $x \in [a,b]$, y sean los números $F_k = F(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$.

$$\Rightarrow F_k - F_{k-1} = \int_a^{x_k} f - \int_a^{x_{k-1}} f$$



Sea $F(x) = \int_a^x f$, $x \in [a,b]$, y sean los números $F_k = F(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$.

$$\Rightarrow F_k - F_{k-1} = \int_a^{x_k} f - \int_a^{x_{k-1}} f = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f$$

$$\Rightarrow m_k(f) \leq \frac{F_k - F_{k-1}}{\Delta x_k} \leq M_k(f)$$

Continuará...

Teorema: Suponga que $f, g \in C[a,b]$ y f y g son diferenciables en (a,b). Suponga, además, que $f', g' \in \mathcal{R}[a,b]$. Entonces,

$$\int_a^b f g' \, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f' g \, dx$$

Dem: Sabemos que $(fg)' = f'g + fg'$

$$\Rightarrow \int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'$$

$$\Rightarrow fg \Big|_a^b = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'$$

$$\Rightarrow f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f'g + \int_a^b fg' \qquad \square$$

Teorema: Suponga que $g: I \to \mathbb{R}$ es diferenciable y que g' es integrable en I. Sea $g(I) = J$. Si $f: J \to \mathbb{R}$, entonces, $\forall a, b \in I$, se cumple.

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du.$$

$$\int_1^2 \sqrt{x^2+1} \, (2x) \, dx = \int_{g(1)}^{g(2)} \sqrt{u} \, du$$

$u = x^2 + 1 = g(x)$

$du = 2x \, dx$