Teorema (criterio de Kummer): Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ una serie divergente $\ni b_n > 0$. además, considere:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}}\right).$$

1) Si $\alpha > 0 \Rightarrow \sum a_n$ converge.

2) Si $\alpha < 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.

3) Si $\alpha = 0$, el criterio no es concluyente

Nota.

① Hagamos $b_n = 1$, i.e. considere la serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, $b_n > 0$. Entonces:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1+\alpha \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1+\alpha}$$

- Si $\alpha > 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Leftrightarrow \sum a_n$ converge
- Si $\alpha < 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Leftrightarrow \sum a_n$ diverge
- Si $\alpha = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Leftrightarrow$ El criterio no es concluyente.

i.e. Kummer con $b_n = 1$ es el criterio de la razón para series de términos positivos

② Sea $b_n = \frac{1}{n} > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge. Entonces,

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1/n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{1/(n+1)}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\right) = \lim_{n\to\infty}\left[n\frac{a_n}{a_{n+1}} - n\right] - 1$$

$$\Rightarrow \alpha + 1 = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = L$$

$\alpha > 0 \Leftrightarrow \sum a_n$ converge $\Leftrightarrow L > 1$

$\alpha < 0 \Leftrightarrow \sum a_n$ diverge $\Leftrightarrow L < 1$

$\alpha = 0 \Leftrightarrow L = 1 \Leftrightarrow$ El criterio

Dem (Kummer): Sea $\alpha = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}}\right]$.

Hagamos $p_n = \frac{1}{b_n}$. Entonces:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\left[p_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1}\right].$$

Caso $\alpha > 0$: Sea $r \in \mathbb{R} \ni 0 < r < \alpha$ $\quad \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni n \geq N$

$$\Rightarrow r < p_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1}$$

Nótese que:

$$\left.\begin{aligned} n=1&: \; p_1a_1 - p_2a_2 > ra_2 \\ n=2&: \; p_2a_2 - p_3a_3 > ra_3 \\ &\;\vdots \\ n=m-1&: \; p_{m-1}a_{m-1} - p_ma_m > ra_m \end{aligned}\right\} +$$

$$\Rightarrow p_1a_1 - p_ma_m > \sum_{k=1}^{m} ra_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m} a_k < \frac{p_1a_1 - p_ma_m}{r} = \text{constante}$$

i.e. La sucesión de sumas parciales

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} a_k.$$

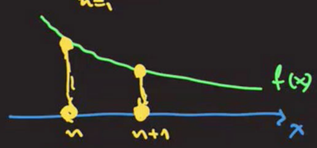
i) Es creciente; y

ii) Es acotada

$\Rightarrow$ La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)}} \leq \text{Kte}$$

Teorema (Criterio de la integral): Suponga que f es una función integrable, positiva y decreciente en $[1,\infty)$ y que $f(n) = a_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ssi $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge



Dem. Sea $x \in [n, n+1]$

$$\Rightarrow f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx$$

$$\Rightarrow f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le a_n, \quad n=1,2,\ldots$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \le \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \le \int_1^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ converge

Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Teorema (Criterio de comparación en el límite).

Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series de términos positivos y si $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty \Rightarrow$ ambas series convergen o divergen.

Dem: Sea $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n > N \Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \epsilon$

$\Leftrightarrow -\epsilon < \frac{a_n}{b_n} - L < \epsilon$

$\Leftrightarrow L - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \epsilon \Rightarrow (L-\epsilon)\, b_n < a_n < (L+\epsilon)\, b_n$

$$\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} (L-\epsilon)\, b_n < \sum_{n=N}^{\infty} a_n < \sum_{n=N}^{\infty} (L+\epsilon)\, b_n$$

Si $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

Si $\sum a_n$ converge $\Rightarrow \sum b_n$ converge

Si $\sum b_n$ diverge $\Rightarrow \sum a_n$ diverge

Si $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge. □

Teorema (Leibniz) (Series alternantes)

Suponga que (a_n) es una sucesión decreciente de números positivos $\ni \lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge.

Dem: Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$. Considere:

(1) $S_{2n} \le S_{2n+2}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. En efecto

$$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1}(-1)^{2n+2} + a_{2n+2}(-1)^{2n+3}$$

$$= S_{2n} + \underbrace{a_{2n+1} - a_{2n+2}}_{\ge 0,\ a_n \text{ es decreciente}}$$

$\Rightarrow S_{2n} \le S_{2n+2}$.

(2) $S_{2n+1} \ge S_{2n+3}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. En efecto,

$$S_{2n+3} = S_{2n+1} + a_{2n+2}(-1)^{2n+3} + a_{2n+3}(-1)^{2n+4}$$

$$= S_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} \Rightarrow S_{2n+3} \le S_{2n+1}$$

(3) $S_{2k+1} \ge S_{2l}$, $\forall k, l \in \mathbb{Z}^+$. En efecto:

$$S_{2n+1} = S_{2n} + (-1)^{2n+2} a_{2n+1}$$

$$= S_{2n} + a_{2n+1}$$

$\Rightarrow S_{2n+1} \ge S_{2n}$

$\Rightarrow S_{2n}$ es creciente y acotada superiormente

S_{2n+1} es decreciente y acotada inferiormente

$\Rightarrow$ Sea $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = x$ y $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = y$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} [S_{2n+1} - S_{2n}] = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$

$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge.