Nótese que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i=1,2,3$, $j=1,2,3$, existen y son continuas en $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ $\Rightarrow$ $f(x,y,z)$ es diferenciable en $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$.

27/9/2021

Dem (A):

Lema: Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Si $y = Bx$ (i.e. $y \in \mathbb{R}^m$), entonces $\|y\| \leq K\|x\|$, donde

$$K = \left(\sum_{i,j} b_{ij}^2\right)^{1/2}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n \\ \vdots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \cdots + b_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 \cdot x \\ b_2 \cdot x \\ \vdots \\ b_m \cdot x \end{pmatrix}, \quad b_i: \text{ la i-ésima fila de } B.$$

$\Rightarrow$ Como $y = Bx \Rightarrow \|y\| = \|Bx\| =$

$$= \left[(b_1\cdot x)^2 + (b_2 \cdot x)^2 + \cdots + (b_m \cdot x)^2\right]^{1/2}$$

$$\underset{\text{C-B-S}}{\leq} \left[\|b_1\|^2 \|x\|^2 + \|b_2\|^2 \|x\|^2 + \cdots + \|b_m\|^2 \|x\|^2\right]^{1/2}$$

$$= \left[\|b_1\|^2 + \|b_2\|^2 + \cdots + \|b_m\|^2\right]^{1/2} \cdot \|x\|$$

Nótese que $\|b_i\|^2 = b_{i1}^2 + b_{i2}^2 + \cdots + b_{in}^2 = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2$, $1 \leq i \leq m$

$$\Rightarrow \|b_1\|^2 + \|b_2\|^2 + \cdots + \|b_m\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \|b_i\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2 = \sum_{i,j} b_{ij}^2$$

$\Rightarrow$ Sea $K = \left[\sum_{i,j} b_{ij}^2\right]^{1/2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|y\| \leq K\|x\|$ □ Lema.

Dem (A) A probar: $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en a $\Leftrightarrow$ $\|f(x) - f(a)\| \to 0$, cuando $\|x\| \to \|a\|$

Como f es diferenciable en a, entonces:

$$\|f(x) - f(a)\| = \|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a) + Df(a)(x-a)\|$$

$$= \|(f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)) + Df(a)(x-a)\|$$

$$\leq \|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\| + \|Df(a)(x-a)\|$$

matriz - vector

Si $\|x-a\|$ es pequeño, entonces

$$\|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\| \leq \|x-a\|$$

(ver siguiente pág)

Entonces, si $\|x-a\|$ es suficientemente pequeño, se tiene que:

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|x-a\| + \overbrace{K\|x-a\|}^{\text{Lema}} =$$

$$\lim_{x\to a} \frac{\|f(x) - h(x)\|}{\|x-a\|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{\|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\|x-a\|$ es pequeño, entonces

$$\|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\| \leq \|x-a\|$$

$\Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq (1+K)\|x-a\|$.

Si $x \to a \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \to 0 \Rightarrow$

f es continua en a. □

Dem (B)

Sea $f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. A probar: Si $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ existen y son continuas en a, entonces f es diferenciable en a.

en una vecindad de a.

Considere:

$$f(x_1,x_2) - f(a_1,a_2) = \underbrace{f(x_1,x_2) - f(a_1,x_2)} + \underbrace{f(a_1,x_2) - f(a_1,a_2)}$$

- Por el Teorema del valor medio (TVM), $\exists\, c_1$ entre a_1 y x_1, tal que:

$$f(x_1,x_2) - f(a_1,a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, x_2) \cdot (x_1 - a_1)$$

- Por el TVM, $\exists\, c_2$ entre x_2 y a_2 $\ni$

$$f(a_1,x_2)-f(a_1,a_2)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,c_2)(x_2-a_2) \quad \text{(B)}$$

$$\Rightarrow \left| \underbrace{f(x_1,x_2)-f(a_1,a_2)} - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)(x_1-a_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)\cdot(x_2-a_2)\right| =$$

$$= \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1,x_2)(x_1-a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,c_2)(x_2-a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)(x_1-a_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)(x_2-a_2)\right|$$

$$\leq \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1,x_2)(x_1-a_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)(x_1-a_1)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,c_2)(x_2-a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)(x_2-a_2)\right|$$

$$= \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1,x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)\right|\cdot|x_1-a_1| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,c_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)\right|\cdot|x_2-a_2| \leq$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sqrt{(x_1-a_1)^2} \leq \sqrt{(x_1-a_1)^2+\underbrace{(x_2-a_2)^2}_{\geq 0}} = \|x-a\| \\ |x_1-a_1| \leq \|x-a\|\end{array}}$$

$$\leq \left[\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1,x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,c_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)\right|\right] * \|x-a\|$$

$$\Rightarrow \frac{\left|f(x_1,x_2)-f(a_1,a_2)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)(x_1-a_1)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)(x_2-a_2)\right|}{\|x-a\|}$$

$$\leq \left|\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1,x_2)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)}_{(*)}\right| + \left|\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,c_2)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)}_{(*)}\right|$$

$\longrightarrow 0$, cuando $x\to a$, ya que $c_1\to a_1$, $c_2\to a_2$ y, dada la continuidad de las parciales, los términos $(*)$ y $(*)$ se anulan.

$\Rightarrow$ f es diferenciable en a.

Nota: El mismo argumento se utiliza para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

Considere $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$. A probar:

$$\lim_{x\to a}\frac{\|f(x)-f(a)-Df(a)(x-a)\|}{\|x-a\|}=0$$

$$f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m,$$

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\big(\underbrace{f_1(x_1,\dots,x_n)}_{f_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}},\ \underbrace{f_2(x_1,\dots,x_n)}_{f_2:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}},\dots,\ \overbrace{f_m(x_1,\dots,x_n)}^{f_m:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}}\big)$$