Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2034 - Análisis de Variable Real 2 - Catedrático: Dorval Carías
1 de agosto de 2021

HT 2

Problema 1. *Pruebe que si $f \in R[a,b]$ entonces $f^2 \in R[a,b]$.*

Demostración. Conocemos que $f \in R[a,b]$, por definición f es acotada en $[a,b]$. $\implies$ $\exists M > 0 \ni |f| \leq M$. Por otra parte, nótese que $|f^2| = |f||f| \leq 2M$, por lo que f^2 también es acotada en $[a,b]$. Ahora bien, por el *criterio de Cauchy* aplicado a f, sabemos que $\forall \varepsilon/2M > 0, \exists P \in P[a,b] \ni$

$$U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon/2M.$$

Definamos la partición $P = a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Ahora considérese,

$$M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \quad \text{y} \quad m_k(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$
$$M_k^*(f^2) = \sup\{f^2(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \quad \text{y} \quad m_k^*(f^2) = \inf\{f^2(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Arbitrariamente, tomamos $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ tal que,

$$\left|f^2(x) - f^2(y)\right| = |f(x) - f(y)||f(x) + f(y)| \leq 2M|f(x) - f(y)|. \tag{1}$$

Nótese que,

$$\left|f^2(x) - f^2(y)\right| \leq M_k^*(f^2) - m_k^*(f^2)$$

Además,

$$|f(x) - f(y)| \leq M_k(f) - m_k(f)$$

Por (1) podemos concluir que,

$$M_k^*(f^2) - m_k^*(f^2) \leq 2M[M_k(f) - m_k(f)]$$

Como queremos comprobar que f^2 es integrable, proponemos :

$$\begin{aligned} U(P,f^2)-L(P,f^2) &= \sum_{k=1}^{n}\left[M_k^*(f^2)-m_k^*(f^2)\right]\Delta x_k \\ &\leq 2M\sum_{k=1}^{n}\left[M_k(f)-m_k(f)\right]\Delta x_k = \\ &= 2M\left[U(P,f)-L(P,f)\right] < 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\therefore$ Por el *criterio de Cauchy* $f^2 \in R[a,b]$.

■

Problema 2. *Indique si el enunciado a continuación es verdadero o falso, justificando su respuesta:·"Si $f \geq 0$ en $[a,b]$,* y *si la integral superior de f se anula en $[a,b]$, entonces $f \in R[a,b]$".*

Demostración. Por hipótesis, tenemos que $f \geq 0$ y $\overline{\int_a^b} = 0$ en el intervalo $[a,b]$. Por propiedad, sabemos que

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f = 0.$$

Pero, como sabíamos que $f \geq 0$, entonces:

$$\underline{\int_a^b} f = 0.$$

Por lo tanto,

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = 0, \qquad f \in R[a,b].$$

■

Problema 3. *Sean $g \in R[a,b]; f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada; (x_n) una sucesión de puntos en $[a,b]$, tales que $f(x) = g(x)$, para todos los $x \in [a,b], x \neq x_n$. Presente un ejemplo que muestre que f no necesariamente es Riemann integrable.*

Solución. Proponemos un intervalo $[0,1]$, tal que:

1. $g(x) = 0, \forall x \in [0,1] \ni \int_0^1 g(x) = 0$.
2. $(x_n) \in [0,1]$, donde (x_n) es una sucesión de racionales.

Supóngase que $f(x_n) = 1$ y $f(x) = 0$ si $x \neq x_n$. Por lo tanto, $\int_0^1 f(x)$ no existe y consecuentemente, no es Riemann integrable. □

Problema 4. *Sea $f \in C[a,b]$, tal que $\int_a^b f = 0$. Pruebe que existe $x_0 \in [a,b] \ni f(x_0) = 0$.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supóngase que $f(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$. $\implies$ $f > 0$ o $f < 0$. Además, conocemos que $f \in C[a,b]$, tal que $\int_a^b f = 0$. Por la **HT 1**, conocemos si f es continua, $f \geq 0$ y $\int_a^b f = 0$; entonces $f(x) = 0, \forall x \in [a,b]$. $(\rightarrow\leftarrow)$ Por lo tanto,

$$\exists x_0 \in [a,b] \ni f(x_0) = 0.$$

■

Problema 5. *Si* $f, g \in R[a,b]$, *pruebe que* $h(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$ *y* $k(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$ *son Riemann-integrables en* $[a,b]$. *Además, compruebe que:*

$$\int_a^b h + \int_a^b k = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Demostración. Comenzaremos comprobando que $h(x)$ y $k(x)$ son integrables [1], haciéndole un cambio de forma a las expresiones

$$\begin{aligned} h(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|) \\ k(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|) \end{aligned}$$

Por hipótesis, conocemos que $f(x)$ y $g(x)$ son integrables. Previamente, ya se había demostrado que las sumas, el valor absoluto y la resta no afectan la integrabilidad de las funciones. Por lo tanto, $h(x)$ y $k(x)$ son integrables.

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \int_a^b h + \int_a^b k &= \int_a^b \text{máx}\{f(x), g(x)\} + \int_a^b \text{mín}\{f(x), g(x)\} \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b (f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|) + \frac{1}{2}\int_a^b (f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|) \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b f(x) + \frac{1}{2}\int_a^b g(x) + \frac{1}{2}\int_a^b |f(x) - g(x)| + \frac{1}{2}\int_a^b f(x) + \frac{1}{2}\int_a^b g(x) - \\ &- \frac{1}{2}\int_a^b |f(x) - g(x)| \\ &= \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x). \end{aligned}$$

■

[1] Documentando ampliamente en la literatura, $\text{máx}\{a,b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ y $\text{mín}\{a,b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$