Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2034 - Análisis de Variable Real 2 - Catedrático: Dorval Carías
19 de julio de 2021

HT 1

Problema 1. *Suponga que* $f \geq 0, f$ *es continua en* $[a, b]$, y $\int_a^b f(x)dx = 0$. *Demuestre que* $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.

Demostración. Por reducción al absurdo, supóngase que $f(c) \neq 0 \ni \exists c \in [a, b]$. Por hipótesis, sabemos que $f \geq 0$, entonces $f(c) > 0$. Ahora bien, sabemos que f es una función continua. $\implies$ Por la definición, f es continua en c, dado un $f(c) > \varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si x es un punto en $[a, b]$ que satisface $|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \epsilon$. $\implies$ Aplicamos el teorema aditivo[1] tal que

$$\int_a^b f = \int_a^{c-\delta} f + \int_{c-\delta}^{c+\delta} + \int_{c+\delta}^{b} > 0$$

Ahora bien, sabemos $f > 0$, ya que $f(c) - \varepsilon > 0$, pero esto quiere de $f(x)dx > 0$ y $f(x)dx = 0(\rightarrow\leftarrow)$. $\therefore$ $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.

■

Problema 2. *Sean* f, g *y* h *funciones acotadas en* $[a, b]$.

1. *Demuestre que si* $h(x) = 0$ *en* $[a, b]$, *excepto en un número finito de puntos de* $[a, b]$, *entonces* h *es Riemann integrable en* $[a, b]$ *y se tiene que* $\int_a^b h = 0$.

   Demostración. Por hipótesis, tenemos un número finito de puntos en donde $h(x) \neq 0$ en $[a, b]$. Supóngase que este número finito de puntos se puede expresar como una partición $P_n = \{s_0, s_1, s_2, s_3, \cdots, s_k\}$ tal que $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$. Nótese que $|h(x)| \leq M$. Para P_n, proponemos encontrar su integral inferior y superior tal que

$$\sup\{L(P, f)\} = \sup\{\sum_{i=1}^{n} m_i(h)\Delta x_k\}$$

$$\text{ínf}\{M(P, f)\} = \text{ínf}\{\sum_{i=1}^{n} M_i(g)\Delta x_k\}$$

[1]Teorema 7.2.13 de Introduction to Real Analysis de Bartle & Sherbert - 4 edición.

$\implies h$ es Riemann integrable, entonces por teorema, sabemos que existe una sucesión de particiones $(P_n), P_n \in P[a,b], \forall n \in \mathbb{Z}^+ \ni \text{lím}_{n\to\infty}\left[U(f,P_n) - L(f,P_n)\right] = 0$. En este caso,

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n).$$

$$\therefore \int_a^b h = 0.$$

■

2. *Demuestre que si f y g son Riemann integrables en $[a,b]$ y $f(x) = g(x)$ en $[a,b]$, excepto en un número finito de puntos de ese intervalo, entonces se tiene que:*

$$\int_a^b f = \int_a^b g$$

Demostración. Dígase que tenemos una partición $P_\varepsilon = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k\}$ tal que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Supóngase que el número finito de puntos en donde $f(x) \neq g(x)$ en $[a,b]$, se puede expresar como una partición $P_\varepsilon^* = \{s_0, s_1, s_2, s_3, \cdots, s_k\}$ tal que $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = b$ y otra partición P_ε^{**} que agrupa a los puntos $f(x) = g(x)$. Entonces, $P_\varepsilon = P_\varepsilon^* \cup P_\varepsilon^{**}$. Nótese que $|f(x)| \leq M$ y $|g(x)| \leq M = \boxed{\sup\{g(x) - g(y) : x, y \in [a,b]\}}$. $\implies$ Como sabemos que f y g son Riemann integrables, por el Criterio de Cauchy, $\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon \in P[a,b] \ni P_\varepsilon \subset P$, se tiene que:

$$U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon/2.$$

Supóngase además que los intervalos de P_ε están definidos como $\Delta x_k < \varepsilon/(2nM)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
U(g,P_\epsilon) - L(g,P_\epsilon) &= U(g,P_\epsilon^*) - L(g,P_\epsilon^*) + U(g,P_\epsilon^{**}) - L(g,P_\epsilon^{**}) \\
&= U(g,P_\epsilon^*) - L(g,P_\epsilon^*) + U(f,P_\epsilon^{**}) - L(f,P_\epsilon^{**}) \\
&< \frac{\epsilon}{2nM} nM + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

$$\therefore \int_a^b f = \int_a^b g$$

■

Problema 3. *Sea f una función acotada en $[a,b]$. Suponga que f es integrable en todo intervalo de la forma $[c,d]$, con $a < c < d < b$. Demuestre que f es integrable en $[a,b]$.*

Demostración. Por hipótesis, conocemos que f está acotada en $[a,b]$. Además, f es integrable en todo intervalo de la forma $[c,d]$, en donde $a < c < d < b$. Proponemos una partición $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \ni a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$. $\implies$ Todo intervalo de la forma $[c, d]$, que es integrable, se puede expresar como $\{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$. $\Longrightarrow$ Previamente, definimos $a = x_0$ y $b = x_n$. Por el teorema aditivo[2], conocemos:

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_{c.}^b$$

$\Longrightarrow$ Si aplicamos el teorema aditivo a todos los intervalos sucesivamente, tenemos

$$\int_a^b = \int_{x_0}^{x_n} = \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_n} f = \int_{x_0}^{x_1} f + \int_{x_1}^{x_2} f + \int_{x_2}^{x_n} f = \int_{x_0}^{x_1} f + \int_{x_1}^{x_2} f + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f.$$

$$\Longrightarrow \int_{x_0}^{x_n} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f. \tag{1}$$

$\Longrightarrow$ Para demostrar que (1) es integrable en f procederemos por inducción.

$\boxed{\text{Paso base}}$ $n = 1$:

$$\int_{x_0}^{x_1} f = \int_{x_0}^{x_1} f \qquad \text{(Integrable por hipótesis.)}$$

$\boxed{\text{Paso inductivo}}$ Asumimos que (1) es verdadera para $n = k \geq 1$. Es decir,

$$\int_{x_0}^{x_k} f = \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f$$

Entonces, ahora es necesario demostrar que si $n = k + 1$, entonces

$$\int_{x_0}^{x_{k+1}} f = \sum_{i=1}^{k+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f.$$

Por lo cual,

$$\int_{x_0}^{x_{k+1}} f = \underbrace{\int_{x_0}^{x_k} f + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f}_{\text{teorema aditivo}} = \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f = \sum_{i=1}^{k+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f.$$

$\therefore$ f es integrable en $[a, b]$. ■

Problema 4. *Considere f la función definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & , x \in \mathbb{Q} \\ x & , x \in \mathbb{I}rr \end{cases}$$

¿Es f integrable en $[0, 1]$ *?*

[2]Teorema 7.2.13 de Introduction to Real Analysis de Bartle & Sherbert - 4 edición.

Solución. Para determinar que f es integrable en $[0,1]$, debemos comprobar que:

$$\underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f = \int_0^1 f.$$

Entonces,

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{k} M_k(f)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{k}(x)\Delta x_k = x\sum_{k=1}^{k}\Delta x_k = x(1-0) = x. \tag{1}$$

$$\begin{aligned} L(P,f) &= \sum_{k=1}^{k} m_k(f)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{k}(1-x)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{k}\Delta x_k - x\sum_{k=1}^{k}\Delta x_k = \\ &= (1-0) - x(1-0) = 1-x. \end{aligned} \tag{2}$$

Por (1) sabemos que,

$$\overline{\int_0^1} f = \inf_{P\in P[0,1]}\{U(P,f)\} = 0.$$

Por (2) sabemos que,

$$\underline{\int_0^1} f = \sup_{P\in P[0,1]}\{L(P,f)\} = 1.$$

$\implies \underline{\int_0^1} f \neq \overline{\int_0^1} f.$ $\therefore f$ no es integrable en $[0,1]$. □

> Un caso particular, como se demostró en clase, si $x = 0$ (función de Dirichlet) entonces no es integrable.

Problema 5. *Suponga que f es una función acotada de valores reales sobre $[a,b]$, y que $f^2 \in R[a,b]$. ¿Implica lo anterior que $f \in R[a,b]$?*

Solución. Procederemos con un contraejemplo. Sean f^2 y f definidos sobre $[a,b]$, tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{I}rr \end{cases} \implies f^2(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & x \in \mathbb{I}rr. \end{cases}$$

Comprobamos que $f^2(x) \in R[a,b]$,

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{k} M_k(f)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{k}(x^2)\Delta x_k = x^2\sum_{k=1}^{k}\Delta x_k = x^2(1-0) = x^2. \tag{1}$$

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{k} m_k(f)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{k}(x^2)\Delta x_k = x^2\sum_{k=1}^{k}\Delta x_k = x^2(1-0) = x^2. \tag{2}$$

Por (1) sabemos que,

$$\overline{\int_0^1} f = \inf_{P\in P[a,b]}\{U(P,f)\} = x^2.$$

Por (2) sabemos que,

$$\underline{\int_0^1} f = \sup_{P\in P[a,b]}\{L(P,f)\} = x^2.$$

$$\implies \underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f. \ \therefore f^2(x) \in R[a,b]$$

Ahora bien, comprobamos que $f(x) \in R[a,b]$,

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{k} M_k(f)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{k} (x^2)\Delta x_k = x\sum_{k=1}^{k} \Delta x_k = x(1-0) = x. \tag{1}$$

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{k} m_k(f)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{k} (-x)\Delta x_k = -x\sum_{k=1}^{k} \Delta x_k = -x(1-0) = -x. \tag{2}$$

Por (1) sabemos que,

$$\overline{\int_0^1} f = \inf_{P\in P[a,b]} \{U(P,f)\} = x.$$

Por (2) sabemos que,

$$\underline{\int_0^1} f = \sup_{P\in P[a,b]} \{L(P,f)\} = -x.$$

$$\implies \underline{\int_0^1} \neq \overline{\int_0^1} f. \ \therefore f \notin R[0,1].$$

Por lo que podemos concluir que si f es una función acotada de valores reales sobre $[a,b]$, y que $f^2 \in R[a,b]$, no necesariamente implica que $f \in R[a,b]$.

□

Un ejemplo sería $x = 1$.