③ Si $f, g \in C(X) \Rightarrow$ se define $d(f,g) := \| f - g \|$.

④ Lenguaje; En algunos casos a los cerrados de $C(X)$ se les llama uniformemente cerrados y a la cerradura de $A \subset C(X)$ se le llama cerradura uniforme.

Teorema: $(C(X), d)$ es un espacio métrico completo.

Norma del supremo y convergencia

Sea $(X, +, \cdot, \mathbb{R})$ un esp. vectorial.

Recordatorios:

① Def: Una función $\|\cdot\| : X \longrightarrow [0, \infty)$ es una norma sobre X, si:

i) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

iii) $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$.

al par $(X, \|\cdot\|)$ se le dice espacio normado.

② Def: Una sucesión $(x_n) \subset X$ converge a $x \in X$, si $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$

Def: Una sucesión $(x_n) \subset X$ es de Cauchy si $\forall \epsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n, m \geq N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon$.

- Def: ① Se dice que X es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

② Un espacio vectorial normado y completo es un espacio de Banach.

③ Un espacio vectorial de Banach $\ni$ la norma se obtiene de un producto interno ($\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$) es un espacio de Hilbert.

Def: Sea f una función definida en $A \subset \mathbb{R}$. La norma del supremo (norma uniforme) es el número, sobre $\overline{\mathbb{R}}$, $\|f\|_\infty := \sup\{ |f(x)| : x \in A \}$

Nota: Una sucesión (x_n) de elementos en $\overline{\mathbb{R}}$ converge a $x \in \mathbb{R}$ si $\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni x_n$ es finito si $n \geq N$ y si la sucesión de reales (x_n) converge a x.

$1, \infty, 2, \infty, 3, \infty, \ldots, \square, \square, \square$

Prop: Sean (f_n) una sucesión de funciones definidas en $A \subseteq \mathbb{R}$ y f una función definida en A. Los enunciados siguientes son equivalentes:

(1) (f_n) converge uniformemente.

(2) La sucesión $(\|f_n - f\|_\infty)$ sobre $\overline{\mathbb{R}}$ converge a 0.

Dem: (1) $\Rightarrow$ (2) Como (f_n) converge uniformemente a f

$\Rightarrow$ Dado $\epsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, $\forall x \in A$. Por otro lado, si $n \geq N$, entonces:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{ |(f_n - f)(x)| : x \in A \}$$
$$= \sup\{ |f_n(x) - f(x)| : x \in A \} < \epsilon$$

Por la arbitrariedad de ϵ, se tiene que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

(2) $\Rightarrow$ (1) Supóngase que $(\|f_n - f\|_\infty)$ converge a 0. $\Rightarrow$ Dado $\epsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty < \epsilon$. Nótese que, entonces, $\forall n \geq N$, $\forall x \in A$, se tiene que

$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup\{ |f_n(x) - f(x)| : x \in A \} =$

$= \sup\{ |(f_n - f)(x)| : x \in A \} = \|f_n - f\|_\infty < \epsilon$ $\square$

Ej: Sea $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f_n$ converge puntualmente a la función $f(x) = 0$. Entonces,

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{ |\tfrac{x}{n} - 0| : x \in \mathbb{R} \} = \underbrace{\sup\{ \tfrac{|x|}{n} : x \in \mathbb{R} \}}_{= \infty}$$

$\Rightarrow$ como $(\|f_n - f\|_\infty)$ no converge a cero $\Rightarrow$ la convergencia no es uniforme.

Ej: Sea $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$. El límite puntual de esta sucesión $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow (f_n - f)(x) = f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \leq x < 1 \\ \underbrace{x^n - 1}_{0}, & x = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty = \sup\{ |(f_n - f)(x)| : 0 \leq x < 1 \}$$
$$= \sup\{ x^n : 0 \leq x < 1 \} = 1, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$\Rightarrow$ la convergencia no es uniforme.

Ej. Sea $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{\sqrt{n}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Esta sucesión converge puntualmente a $f(x) = 0$. Entonces:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\left\{ \left| \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{\sqrt{n}} - 0 \right| : x \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \sup\left\{ \frac{|\operatorname{sen}(n\pi x)|}{\sqrt{n}} : x \in \mathbb{R} \right\} = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ la convergencia es uniforme.

Teorema (criterio de Cauchy uniforme)

Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas sobre un conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Los enunciados siguientes son equivalentes:

(i) (f_n) converge uniformemente a una función $f(x)$

(ii) Dado $\epsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $m, n \geq N$, entonces $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, $\forall x \in A$.

(iii) Dado $\epsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $m, n \geq N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$.

Dem: (i) $\Rightarrow$ (ii) Supóngase que (f_n) converge uniformemente a f. $\Rightarrow$ Dado $\epsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N$ $\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall x \in A$. Entonces, $m, n \geq N$ se tiene que $|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)|$ $\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Dado $\epsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $m, n \geq N$ $\Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon, \ \forall x \in A$

$\Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty = \sup\{|(f_n - f_m)(x)| : x \in A\} =$

$= \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in A\} < \epsilon$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Dado $\epsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n, m \geq N$,

$\Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$. $(\forall x \in A)$.

Entonces, $\forall x \in A$, se tiene que:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sup\{|f_m(x) - f_n(x)| : x \in A\}$$
$$= \sup\{|(f_m - f_n)(x)| : x \in A\}$$
$$= \|f_m - f_n\|_\infty < \epsilon, \ \forall n, m \geq N$$

$\Rightarrow (f_n(x))$ es de Cauchy

$\Rightarrow$ definamos $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$, $\forall x \in A$.

Si $n \to \infty$ en $(**)$, entonces

$$|f_m(x) - f(x)| < \epsilon, \ \forall m \geq N, \ \forall x \in A$$

$\Rightarrow$ la convergencia de (f_n) a f es uniforme. $\square$

Teorema: Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas sobre $A \subset \mathbb{R}$ que converge uniformemente a la función f definida sobre A. Si cada f_n es continua en $c \in A$ $\Rightarrow$ f es continua en $c \in A$.

Dem: Dado $\epsilon > 0$ $\exists \boxed{N} \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ $\forall x \in A$. Entonces:

$$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(c)| + |f_N(c) - f(c)|$$

$$\leq \frac{\epsilon}{3} + |f_N(x) - f_N(c)| + \frac{\epsilon}{3}.$$

Como f_N es continua en $c \in A \Rightarrow \exists \delta > 0 \ni$ si $|x - c| < \delta$ $\Rightarrow |f_N(x) - f_N(c)| < \frac{\epsilon}{3}$.

Entonces, dado $\epsilon > 0$ $\exists \delta > 0 \ni$ si $|x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - f(c)| < \epsilon$. $\Rightarrow$ f es continua en $c \in A$. $\square$

Nota: El teorema anterior se puede parafrasear así:

$$\lim_{x \to c} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to c} f_n(x).$$

¿Tiene el Teorema anterior un converso?

Teorema (Dini) Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado I. Suponga (f_n) converge puntualmente a una función continua f y que (f_n) es monótona. Entonces, (f_n) converge uniformemente a f.

$$\overset{\text{continua}}{f_n} \underset{\text{puntual sobre compacto}}{\longrightarrow} \overset{\text{continua}}{f} + (f_n) \text{ es monótona} \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$$