Prop: Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Entonces, $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$. Además, se tiene:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Dem: Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$. Se tiene que:

$$M_k(|f|) - m_k(|f|) = \sup \{ \underbrace{|f(x)| - |f(y)|}_{\leq |f(x) - f(y)|} : x, y \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

$$\leq \sup \{ |f(x) - f(y)| : x, y \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

$$= M_k(f) - m_k(f)$$

$$\sum_{k=1}^{n} [M_k(|f|) - m_k(|f|)] \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k$$

$$\Rightarrow U(P, |f|) - L(P, |f|) \leq U(P, f) - L(P, f), \quad \forall P \in \mathcal{P}[a,b].$$

Sea $\epsilon > 0$. Como f satisface el criterio de Cauchy en $[a,b] \Rightarrow \exists \boxed{P_\epsilon} \in \mathcal{P}[a,b] \ni$ para $P \supseteq P_\epsilon$, se tiene que $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon \Rightarrow |f|$ también cumple el criterio de Cauchy, y entonces $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.

A probar: $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

$$\Leftrightarrow \quad -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

Entonces, nótese que:

$$\big| f(x) \big| \leq |f(x)|$$

$$\Rightarrow -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \qquad \square$$

Nota: (1) Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, se tiene que: $\overline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} g$; $\underline{\int_a^b} f \le \underline{\int_a^b} g$

(2) $\left|\overline{\int_a^b} f\right| \le \overline{\int_a^b} |f|$; $\left|\underline{\int_a^b} f\right| \le \underline{\int_a^b} |f|$.

Prop: Sea $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$. □

Teorema: Si $f, g \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$

Dem: Como $f, g \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow$

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right] \in \mathcal{R}[a,b]$$

□

Prop: Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $m, M \in \mathbb{R} \ni$ $\boxed{m \le f(x)} \le M$, $\forall x \in [a,b]$. Entonces:

a) $m(b-a) \le \underline{\int_a^b} f$

b) $\overline{\int_a^b} f \le M(b-a)$

Dem: Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$. Entonces,

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\,\Delta x_k \ge m \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = m(b-a)$$

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta x_k \le M \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = M(b-a)$$

$$\Rightarrow m(b-a) \le \sup\{L(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\} = \underline{\int_a^b} f$$

$$\Rightarrow M(b-a) \ge \inf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\} = \overline{\int_a^b} f$$

□

Teorema (★★★) Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I. Sea $a \in I$ y considere las funciones:

$$\overline{F}(x) = \overline{\int_a^x} f \quad \text{y} \quad \underline{F}(x) = \underline{\int_a^x} f, \quad \forall x \in I.$$

Entonces:

a) $\bar{F}$ y $\underline{F}$ son continuas en I.

b) Si f es continua en $c \in I \Rightarrow \bar{F}$ y $\underline{F}$ son derivables en c y además:

$$\bar{F}'(c) = \underline{F}'(c) = f(c)$$

Dem: Sea $M = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$. Sea $c \in I$.

A probar: $\bar{F}$ es continua en c.

Sea $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists\ \delta = \boxed{} > 0 \ni$ si $x \in I \cap (c, c+\delta)$, $\ni$

$$|\bar{F}(x) - \bar{F}(c)| = \left| \overline{\int_a^x} f - \overline{\int_a^c} f \right| = \left| \overline{\int_a^x} f + \overline{\int_c^a} f \right|$$

$$= \left| \overline{\int_c^x} f \right| \le \overline{\int_c^x} |f| \le M \overline{\int_c^x} 1 = M|x-c| \le$$

$$\le \frac{\epsilon}{M} \cdot M = \epsilon$$

De forma análoga se prueba para $x \in I \cap (c-\delta, c]$

$\Rightarrow \bar{F}$ es continua en c. $\Rightarrow \bar{F}$ es continua en I.

b) Como f es continua en $c \in I \Rightarrow \exists\ \delta > 0 \ni$

$|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$.

$$\Rightarrow f(c) - \epsilon \le f(x) \le f(c) + \epsilon,$$

con $x \in I \cap (c-\delta, c+\delta)$

$$\Rightarrow \overline{\int_c^x} [f(c) - \epsilon] \le \overline{\int_c^x} f \le \overline{\int_a^x} [f(c) + \epsilon]$$

$$\Rightarrow (f(c) - \epsilon)(x-c) \le \overline{\int_c^x} f \le [f(c) + \epsilon](x-c),$$

$x \in I$ y $x > c$.

$$\Rightarrow f(c) - \epsilon \le \frac{\overline{\int_a^x} f}{x-c} \le f(c) + \epsilon$$

$$\Rightarrow f(c) - \epsilon \le \frac{\bar{F}(x) - \bar{F}(c)}{x-c} \le f(c) + \epsilon$$

$$\Rightarrow -\epsilon \le \frac{\bar{F}(x) - \bar{F}(c)}{x-c} - f(c) \le \epsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| \leq \epsilon.$$

Si $\epsilon \to 0 \Rightarrow F$ es diferenciable en c y se tiene que $F'(c) = f(c)$. $\square$

Teorema (Primer teorema fundamental del cálculo).

Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R} \ni$

$$F(x) := \int_a^x f \,, \quad x [a,b]$$

Si f es continua en $c \in [a,b] \Rightarrow F$ es derivable en c y $F'(c) = f(c)$. $\square$

Teorema (Segundo Teorema Fundamental del cálculo) (Fórmula Newton-Leibniz).

Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y sea G una función derivable en $(a,b) \ni G' = f$. Entonces,

$$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

Dem: Sea $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$. Entonces

$$G(b) - G(a) = \sum_{k=1}^{n} [G(x_k) - G(x_{k-1})].$$

Como G es derivable en (a,b), entonces

$$\Rightarrow G(x_k) - G(x_{k-1}) = G'(t_k) \cdot (x_k - x_{k-1}), \quad \text{T}$$

$$t_k \in (x_{k-1}, x_k)$$

$$\Rightarrow \sum^{n} [G(x_k) - G(x_{k-1})] = \sum^{n} f(t_k)\, \Delta x_k$$

$$\Rightarrow L(P_n, f) := \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\, \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, \Delta x_k$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\, \Delta x_k$$

$$\Rightarrow L(P_n, f) \leq G(b) - G(a) \leq U(P_n, f)$$

Si $n \to \infty \Rightarrow G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\, dx.$ $\square$