Teorema: Suponga que $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, funciones acotadas y tales que $f(x) = g(x)$, excepto en un número finito de puntos $x \in [a,b]$. Entonces $f \in R[a,b]$ ssi $g \in R[a,b]$, y se tiene que:

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Dem: Suponga que f y g difieren en un punto $c \in [a,b]$. Además, como f y g son acotadas, $\exists\, M \geq 0 \ni$ $|f|, |g| \leq M$, en $[a,b]$.

A probar: si f es integrable $\Rightarrow$ g es integrable

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} g} \quad \text{y} \quad \underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} g$$

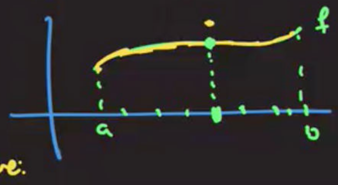
$$\Leftrightarrow \quad \overline{\int_a^b} g \leq \overline{\int_a^b} f \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} g$$

Sea $\epsilon > 0$ y $P \in \mathcal{P}[a,b] \ni U(f,P) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\epsilon}{2}$

Considere el refinamiento Q de P $\ni$

$$Q = \{I_1, I_2, \dots, I_n\} \ni |I_k| < \delta, \; k = 1, \dots, n.$$

donde $\delta = \frac{\epsilon}{8M}$.



Si g difiere de f en el intervalo I_k, se tiene:

$$\left| \sup_{I_k}(g) - \sup_{I_k}(f) \right| \leq \sup_{I_k} |g| + \sup_{I_k} |f| \leq 2M$$

En el resto de intervalos $\sup_{I_i}(g) - \sup_{I_i}(f) = 0$

$$\Rightarrow |U(g,Q) - U(f,Q)| = \left| \sum_{k=1}^{n} M_k(g)|I_k| - \sum_{k=1}^{n} M_k(f)|I_k| \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} [M_i(g) - M_i(f)] \cdot |I_i| \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \sup_{I_i}(g) - \sup_{I_i}(f) \right| \cdot |I_i|$$

$$\leq 2(2M)(2\delta)$$

$$\sum_{1} \quad |\cdot|I_i| = \Big[\underbrace{\left|\left(\sup_{I_1}(g) - \sup_{I_2}(f)\right)\right|}_{2M} |I_1| + \underbrace{\left|\left(\sup_{I_2}(g) - \sup_{J_2}(f)\right)\right|}_{2M} \Big] \cdot |I_2|, \quad |I_1| \to \delta, \ |I_2| \to \delta$$

$$= (2M + 2M)\delta = (2M)(2\delta)$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} [M_i(g) - M_i(f)] \cdot |I_i| \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \sup_{I_i}(g) - \sup_{I_i}(f) \right| \cdot |I_i|$$

$$\leq 4M\delta = 4M\left(\frac{\epsilon}{8M}\right) = \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow |U(g,Q) - U(f,Q)| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} g \leq U(g,Q) < U(f,Q) + \frac{\epsilon}{2} \leq U(f,P) + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\leq \overline{\int_a^b} f + \cancel{\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}} \ \epsilon$$

$\Rightarrow$ Por la arbitrariedad de ϵ, se tiene que:

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} g \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Intercambiando los roles de f y g

$$\overline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} g$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} g$$

De forma similar, se obtiene: $\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} g$.

$$\Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b] \iff g \in \mathcal{R}[a,b] \qquad \square$$

Prop: Suponga que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es acotada e integrable en $[a,r]$, para cada $a<r<b$. Entonces, f es integrable en $[a,b]$ y se tiene:

$$\int_a^b f = \lim_{r\to b^-}\int_a^r f$$

Ej: Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R} \ni f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\frac{1}{x}, & 0<x\leq 1 \\ 0, & x=0\end{cases}$

- f es acotada en $[0,1]$
- f es $\boxed{\text{continua}}$ en cada subintervalo de la forma $[r,1]$, $0<r<1$.

Integrable

$\Rightarrow f\in R[0,1]$. y $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{r\to 0^+}\int_r^1 f(x)\,dx$

Dem: Sea f acotada en $[a,b]$ e integrable en $[a,r]$, $a<r<b$.

Entonces, $\exists M>0 \ni |f|\leq M$, en $[a,b]$, sea $\epsilon>0$ y definamos:

$$r = b-\frac{\epsilon}{4M},$$

donde ϵ es suficientemente pequeño para que $a<r$.

$\Rightarrow$ Como $f\in R[a,r] \Rightarrow \exists\, Q\in P[a,r] \ni$

$U(f,Q)-L(f,Q)<\epsilon/2$.

Sea $P = Q\cup\{b\}\in P[a,b]$. (El último subintervalo de P es $[r,b]$).

f es acotada en $[a,b] \Rightarrow$ se tiene que:

$$\sup_{[r,b]}(f) - \inf_{[r,b]}(f) \leq 2M$$

$$\Rightarrow U(f,P)-L(f,P) = U(f,Q)-L(f,Q) + \left[\sup_{[r,b]}(f)-\inf_{[r,b]}(f)\right](b-r) <$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + 2M(b-r) = \frac{\epsilon}{2}+2M\left(\frac{\epsilon}{4M}\right) = \epsilon$$

$\Rightarrow U(f,P)-L(f,P)<\epsilon \Rightarrow f\in R[a,b]$.

además,

$$\left|\int_a^b f - \int_a^r f\right| = \left|\cancel{\int_a^r f} + \int_r^b f - \cancel{\int_a^r f}\right| =$$