Universidad del Valle de Guatemala

MM2034 - 1 semestre - 2021

Licenciatura en matemática aplicada

ANÁLISIS DE VARIABLE REAL 1

Catedrático: Dorval Carías

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay
Carné: 19857
Correo: rom19857@uvg.edu.gt

5 de julio de 2021

Índice

1. Sesión 1 - 5 de julio de 2021

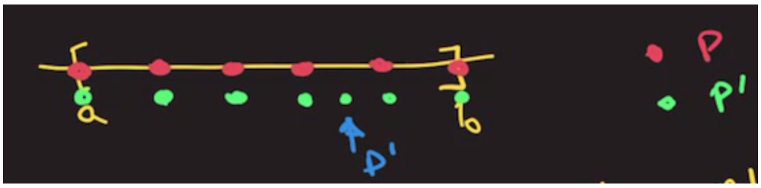
NOTA. *La teoría a continuación se refiere a funciones acotadas.*

Definición 1. *Una **partición** P del intervalo $[a,b]$ es un conjunto finito: $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ donde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.*

NOTA. *$P[a,b]$ denota el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.*

NOTA.

1. *Una partición $P' \in P[a,b]$ es un **refinamiento** de $P \in P[a,b]$, si $P \subset P'$*

   ***Notación:** si $P \subset P' \implies$ Se denota: $P' \preceq P$.*

   a) $P \preceq P(\iff P \subset P), \ \forall P \in P[a,b]$.

   b) *Si $P' \preceq P$ y $P \preceq P' \implies P = P'$.*

   c) *Si $P' \preceq P$ y $P'' \preceq P' \implies P'' \preceq P$.*

   $\implies$ *La relación $\preceq$ es de orden parcial.*

2. *Para $P \in P[a,b], \Delta x_k := x_k - x_{k-1}$, es la longitud del k-ésimo subintervalo en la partición. Nótese que:*

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$$

3. *La norma o malla de $P \in P[a,b]$ se define: $\|P\| = \max\{\Delta x_k : k = 1, 2, \cdots, n\}$. Note que, si $P' \preceq P \implies \|P'\| \preceq \|P\|$.*

Definición 2. *Sea* $P \in P[a,b]$ *y sean, para* $k = 1, \cdots, n$,

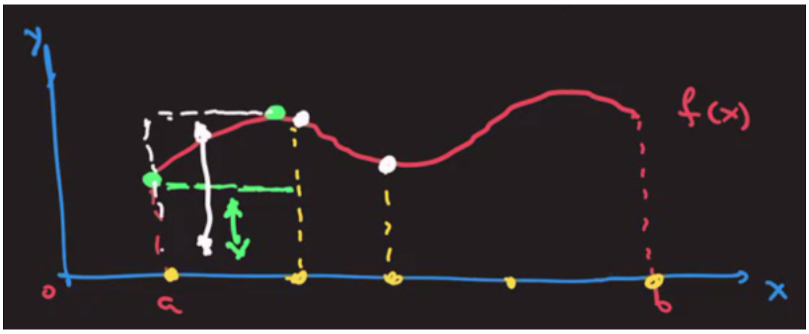
$$M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$m_k(f) = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Entonces, los números:

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k, \quad L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\Delta x_k$$

se llaman la suma superior e inferior de Darboux de f *para partición* P.

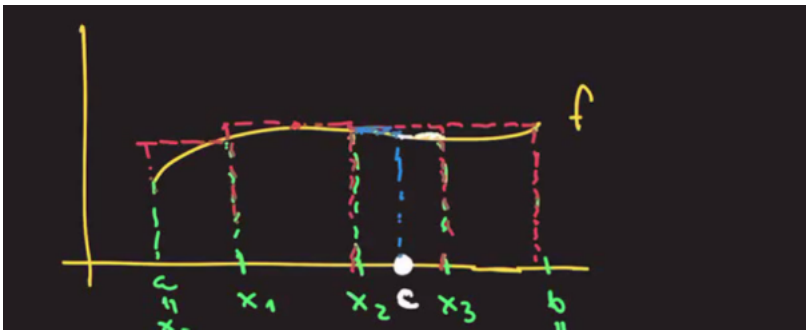


Proposición 1. *Sean* $P, P', P_1, P_2 \in P[a,b]$. *Entonces,*

1. $$P' \preceq P \implies P' \preceq P \implies \begin{cases} U(P',f) \leqslant U(P,f) \\ L(P',f) \geqslant L(P,f) \end{cases}$$

2. $$L(P_1,f) \leq U(P_2,f)$$

Demostración. Tenemos:



1. Sea $P' = P \cup \{c\}$ y suponga que $c \in [x_{i-1}, x_i] \subset P \implies U(P', f) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} M_k(f)\Delta x_k + M'(c - x_{i-1}) + M''(x_i - c)$. Como $M' \leq M_i(f)$ y $M'' \leq M_i(f)$. $\implies U(P', f) \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} M_k(f)\Delta x_k + M_i(f) \underbrace{[(c - x_{i-1}) + (x_i - c)]}_{\Delta x_i} = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k = U(P, f)$.

2. Como $P_1, P_2 \in P[a, b]$, sea $P = P_1 \cup P_2$. Como $P \preceq P_1$ y $P \preceq P_2$, entonces $L(P_1, f) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq U(P_2, f)$.

$\blacksquare$

Definición 3. *1. Se define la integral superior de Riemman de f sobre $[a, b]$.*

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P, f) : P \in P[a, b]\}$$

2. Se define la integral interior de Riemman de f sobre $[a, b]$.

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P, f) : P \in P[a, b]\}$$

Ejemplo 1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R} \ni f(x) = c$.*

1. $U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} c\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c(b - a) \implies \overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P, f) : P \in P[a, b]\} = c(b - a)$.

2. $L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} c\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c(b - a) \implies \underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P, f) : P \in P[a, b]\} = c(b - a)$

Ejemplo 2. *Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R} \ni$*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{I}rr \end{cases}$$

Sea $P \in P[0, 1]$. Entonces,

1. $U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} 1\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1 - 0 = 1 \implies \overline{\int_0^1} f = \inf\{\underbrace{U(P, f)}_{1} : P \in P[0, 1]\} = 1$.

2. $L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} 0\Delta x_k = 0 \implies \underline{\int_0^1} f = \sup\{\underbrace{L(P, f)}_{0} : P \in P[0, 1]\} = 0$.