si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)-h(x,y)}{\|(x,y)-(a,b)\|} = 0$

Ej: Retomando a la función:

$$f(x,y) = \big||x|-|y|\big| - |x| - |y|$$

Recordemos que $z=0$ es el plano tangente a $f(x,y)$ en $(0,0)$

Nótese que:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{f(x,y)-h(x,y)}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{|x|-|x|-0}{|x|} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{f(x,y)-h(x,y)}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{-2|x|}{\ }$$

⇒ Como el límite no existe ⇒ la aproximación lineal del plano tangente no cumple el requerimiento ⇒ $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$

Def: Sea $\mathcal{X}$ un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f:\mathcal{X}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función escalar. Sea $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathcal{X}$. Entonces, f es diferenciable en a si existen todas las parciales $\partial f/\partial x_i(a)$, $i=1,\dots,n$, y si

$$h(x) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x-a_1)+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x-a_n)$$

es una buena aproximacio

⇒ Como el límite no existe ⇒ la aproximación lineal del plano tangente no cumple el requerimiento ⇒ $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$

Def: Sea $\mathcal{X}$ un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f:\mathcal{X}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función escalar. Sea $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathcal{X}$. Entonces, f es diferenciable en a si existen todas las parciales $\partial f/\partial x_i(a)$, $i=1,\dots,n$, y si

$$h(x) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1-a_1)+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n-a_n)$$

es una buena aproximación lineal de f

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-h(x)}{\|x-a\|} = 0$$

Nota: Recordemos que, si $f:\mathcal{X}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, entonces el gradiente de f es el vector:

$$\nabla f(\underset{(x_1,\dots,x_n)}{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

Def (*): Sea $f:\mathcal{X}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\mathcal{X}$ abierto y $a\in\mathcal{X}$. La derivada de f en a, denotada $Df(a)$, es la matriz fila cuyas entradas son las componentes de $\nabla f(a)$

$$Df(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right]$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

Nota: Considere $x=(x_1,\dots,x_n)$, $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$\Rightarrow x-a = \begin{pmatrix} x_1-a_1\\ x_2-a_2\\ \vdots\\ x_n-a_n\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

$$\Rightarrow \nabla f(a)\cdot(x-a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot(x_1-a_1)+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n-a_n)$$

$$\Rightarrow h(x) = f(a) + \nabla f(a)\cdot(x-a)$$

⇒ Decimos que es $h(x)$ es buena aproximación lineal de f en una vecindad de a, si: $$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - [f(a) + \nabla f(a)\cdot(x-a)]}{\|x-a\|} = 0$$

Note que: $f(a) + \nabla f(a)\cdot(x-a)$ es equivalente a la expresión:

vectores

$$f(a) + Df(a)(x-a)$$

matrices

② La gráfica de la función $f: X\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es una hipersuperficie en $\mathbb{R}^{n+1}$, ya que:

$= f(x_1,\dots,x_n)$

③ Si f es diferenciable en a, entonces en hipersuperficie determinada por la gráfica de f tiene un hiperplano tangente en $(a, f(a))$. Este hiperplano se obtiene

$$x_{n+1} = h(x_1,\dots,x_n) = f(a) + \underbrace{\nabla f(a)}_{\text{vector}}\cdot\underbrace{(x-a)}_{\text{vector}}$$
$$= f(a) + \underbrace{Df(a)}_{\text{matriz}}\cdot\underbrace{(x-a)}_{\text{matriz}}$$

Generalizando: Sean X un abierto de $\mathbb{R}^n$ y una función $f: X\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.
(función vectorial)

(c) Construyamos la matriz de derivadas parciales de f

$$\underbrace{f(x_1,\dots,x_n)}_{\in\mathbb{R}^n} = (f_1(x_1,\dots,x_n), \dots, f_m(x_1,\dots,x_n)) \in \mathbb{R}^m \qquad f_i: X\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow Df(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Def: Sea $X\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto, y sean $f: X\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ∋ $a\in X$. Se dice que f es diferenciable en a si $Df(a)$ existe y si la función $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, definida por:

$$h(x) = f(a) + Df(a)\cdot(x-a)$$

es una buena aproximación lineal a f cerca de a. Es decir, se debe cumplir que:

$$\lim_{x\to a}\frac{\|f(x) - h(x)\|}{\|x-a\|} = \lim_{x\to a}\frac{\|f(x) - [f(a) + Df(a)(x-a)]\|}{\|x-a\|} = 0$$

Teorema (A): Si $f: X\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es diferenciable en $a\in X$ $\Rightarrow$ f es continua en a.

Teorema (B): Si $f: X\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es tal que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i=1,\dots,m$ y $j=1,\dots,n$, existen y son continuas en una vecindad de $a\in X$ $\Rightarrow$ f es diferenciable en a.

Teorema (C): Una función $f: X\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es diferenciable en $a\in X$ ssi cada función componente $f_i: X\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $i=1,\dots,m$, es diferenciable en a.

Ej. Sea $f:\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}\to\mathbb{R}^3$ ∋

$$f(x,y,z) = \Big(\underbrace{\frac{3}{x^2+y^2+z^2}}_{f_1}, \underbrace{xy}_{f_2}, \underbrace{xz}_{f_3}\Big)$$

$$\Rightarrow Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{-6x}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-6y}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-6z}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

Nótese que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i=1,2,3$, $j=1,2,3$, existen y son continuas en $\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$ $\Rightarrow$ $f(x,y,z)$ es diferenciable en $\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$.