Teorema: Una función monótona $f:[a,b]\to\mathbb{R}$
sobre un compacto
es Riemann-integrable.

Dem: Suponga que f es monótona creciente en $[a,b]$. Sea $P_n=\{I_1,I_2,\dots,I_n\}$ una partición de $[a,b]$ $\ni$ $I_k=[x_{k-1},x_k]$, $|I_k|=\frac{b-a}{n}$, y $x_k=a+\frac{(b-a)}{n}k$, $k=0,1,\dots,n$.

$$\Rightarrow\ M_k(f)=\sup_{I_k}(f)=f(x_k)\ ,\quad m_k(f)=f(x_{k-1})$$

$$\Rightarrow\ U(f,P_n)-L(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n}\left[M_k(f)-m_k(f)\right]\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$=\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_k)-f(x_{k-1})\right]$$

$$=\left(\frac{b-a}{n}\right)\left[f(b)-f(a)\right].\quad \text{Si } n\to\infty$$

$$\Rightarrow\ U(f,P_n)-L(f,P_n)\to 0\ \Rightarrow\ f\in\mathcal{R}[a,b].\ \square$$

Nota: Una función monótona no es necesariamente continua [¿Qué sucede si f tiene un conjunto no contable de discontinuidades de salto en $[a,b]$?]

Prop $\displaystyle\int_a^b cf = c\int_a^b f$ $\quad(f\in\mathcal{R}[a,b])$

Dem.

$\boxed{c>0}$ $$\overline{\int_a^b} cf=\inf_{P\in\mathcal{P}[a,b]}U(cf,P)=\inf_{P\in\mathcal{P}[a,b]}\sum_{k=1}^{n}\sup_{I_k}(cf)\cdot|I_k|$$

$$=\inf_{P}\, c\sum_{k=1}^{n}\sup_{I_k}(f)\cdot|I_k|=c\inf_{P}U(f,P)$$

$$=c\overline{\int_a^b} f$$

Por otra parte: $\displaystyle\underline{\int_a^b} cf=\sup_P L(cf,P)=$

$$=\sup_P cL(f,P)=c\sup_P L(f,P)=c\underline{\int_a^b} f$$

Si $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \int_a^b cf = c\int_a^b f$.

$\boxed{c<0}$ Considere $-f \Rightarrow \sup_A(-f) = -\inf_A(f)$

$\inf_A(-f) = -\sup_A(f)$

Entonces:

$$\overline{\int_a^b}(-f) = \inf_P U(-f,P) = \inf_P \sum_{k=1}^{n} \sup_{I_k}(-f)\cdot|I_k|$$

$$= \inf_P (-1)\cdot\sum_{k=1}^{n}\inf(f)\cdot|I_k| =$$

$$=(-1)\sup_P L(f,P) = -\underline{\int_a^b} f$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b}(-f) = \sup_P L(-f,P) = \sup_P (-1)\, U(f,P) =$$

$$= (-1)\inf U(f,P) = -\overline{\int_a^b} f$$

Como $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \int_a^b(-f) = -\int_a^b f$.

Por último, $-c = -|c|$

$$\Rightarrow \int_a^b(-|c|)f = -\int_a^b |c| f = -|c|\int_a^b f$$

$\square$

Nota: Sean f y g funciones acotadas sobre el intervalo $I \Rightarrow f+g$ es acotada.

0:36:31

Por otra parte se tiene, por las propiedades de ínfimo y supremo, que:

$$\sup_I(f+g) \leq \sup_I(f) + \sup_I(g)$$

$$\inf_I(f+g) \geq \inf_I(f) + \inf_I(g)$$

Suponga que $f,g \in \mathcal{R}(I)$

$$\Rightarrow \operatorname{osc}_I(f+g) = \sup_I(f+g) - \inf_I(f+g) \leq$$

$$\leq [\sup_I(f) + \sup_I(g) - \inf_I(f+g)$$

$$\leq [\sup_I(f) + \sup_I(g)] - [\inf_I(f) + \inf_I(g)]$$

$$= \left[\sup_I(f) - \inf_I(f)\right] + \left[\sup_I(g) - \inf_I(g)\right]$$

$$= \underset{I}{\mathrm{osc}}(f) + \underset{I}{\mathrm{osc}}(g).$$

Como $f, g \in R(I) \Rightarrow f+g \in R(I)$.

Ej. Sean $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ni$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases} \leftarrow \text{Dirichlet}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1, & x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Nótese que $g = 1 - f$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1} f = 1 = \overline{\int_0^1} g \quad ; \quad \underline{\int_0^1} f = 0 = \underline{\int_0^1} g$$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1}(f+g) = 1 = \underline{\int_0^1}(f+g)$$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1}(f+g) < \overline{\int_0^1} f + \overline{\int_0^1} g$$

$$\underline{\int_0^1} f+g > \underline{\int_0^1} f + \underline{\int_0^1} g$$

0:50:00

Entonces: Las integrales superior e inferior de funciones no integrables no son, en general, lineales.

Def. Sea $a < b$.

a) $\overline{\int_a^b} f := - \overline{\int_b^a} f$ y $\underline{\int_a^b} f := - \underline{\int_b^a} f$.

si las integrales coinciden, entonces:

$$\int_a^b f = - \int_b^a f.$$

b) $\forall c \in [a,b]$, se define: $\overline{\int_c^c} f = \underline{\int_c^c} f = 0$

Prop: (a) $\overline{\int_a^b}(f+g) \le \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g$

(b) $\underline{\int_a^b}(f+g) \ge \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g$

□

Teorema: Si $f,g \in R \Rightarrow \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$

Dem: $\overline{\int_a^b}(f+g) \le \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g = \underline{\int_a^b} f + \int_a^b g$

$$\le \underline{\int_a^b}(f+g)$$

además, sabemos:

$$\underline{\int_a^b}(f+g) \le \overline{\int_a^b}(f+g)$$

$\Rightarrow \underline{\int_a^b}(f+g) = \int_a^b (f+g) \Rightarrow f+g \in R[a,b]$

$\Rightarrow \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$

□

Prop: Sean $f,g \in R[a,b]$ y suponga que $f(x) \le g(x), \forall x \in [a,b]$. Entonces:

$$\int_a^b f \le \int_a^b g \qquad \boxed{\text{monoticidad}}$$

Dem: Sea f integrable y supóngase que $f \ge 0$.

Sea $P \in \mathcal{P}[a,b] \ni P = [a,b]$

$\Rightarrow L(f,P) = \inf_P(f)\cdot(b-a) \ge 0$

$\Rightarrow \int_a^b f = \underline{\int_a^b} f \ge L(P,f) \ge 0$

$\Rightarrow$ Si $f \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f \ge 0.$

Si se tiene que $f(x) \le g(x), \forall x \in [a,b]$,

hagamos $h(x) = g(x) - f(x), \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow h(x) \ge 0, \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b h(x)\,dx \ge 0$

$\Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx \ge 0$

$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \ge 0.$

□

Teorema: Suponga que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y sean
$M = \sup_{[a,b]}(f)$ y $m = \inf_{[a,b]} f$.

Entonces, $m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$.

Dem: Sabemos que $m \le f \le M$

$\Rightarrow \int_a^b m \le \int_a^b f \le \int_a^b M$

$\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$. $\square$

Teorema (Valor medio para integrales)
Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces
$\exists\, c \in [a,b] \ni$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

Dem: Como f es continua sobre el compacto $[a,b]$, entonces f alcanza su máximo, M, y su mínimo m, en $[a,b]$. Entonces,

$m \le f \le M \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$

$\Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f \le M$

Como f es continua en $[a,b]$, por el Teorema del valor medio, existe $c \in [a,b] \ni$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

$\square$

Lunes: • Teoremas fundamentales del cálculo.