$$\Rightarrow \overline{\int_0^1} f = \inf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}[0,1]\} = 1$$

$$\underline{\int_0^1} f = \sup\{L(P,f) : P \in \mathcal{P}[0,1]\} = 0$$

Prop: $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$

Dem: Sea $\epsilon > 0$. Como $\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$

$\Rightarrow \exists\, P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b] \ni U(P_\epsilon, f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon$

$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f + \epsilon$ es cota superior de

$\{L(P,f) : P \in [a,b]\} \Rightarrow \sup\{L(P,f) : P \in [a,b]\} < \overline{\int_a^b} f + \epsilon \Rightarrow \underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f + \epsilon$. Dada la arbitrariedad de ϵ, se tiene:

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$$

□

Def: Se dice que una función acotada f es Riemann integrable sobre $[a,b]$, si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En este caso,

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

El conjunto de funciones Riemann integrables sobre $[a,b]$ se denota $\mathcal{R}[a,b]$.

Teorema (criterio de Cauchy Riemann para integrabilidad)

Una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable sobre $[a,b]$ ssi $\forall \epsilon > 0\ \exists\, P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b] \ni \forall P \le P_\epsilon$, se tiene que

$$0 \le U(P,f) - L(P,f) < \epsilon.$$

Dem:

($\Rightarrow$) Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Sea $\epsilon > 0$ y sea

$$A = \int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

$\Rightarrow$ Existen particiones $P', P'' \in \mathcal{P}[a,b] \ni$

$$U(P', f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon/2$$

$$L(P'', f) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\epsilon}{2}$$

Sea $P_\epsilon = P' \cup P''$ y considere $P \le P_\epsilon$. Entonces,

$$A - \frac{\epsilon}{2} < L(P'', f) \le L(P_\epsilon, f) \le L(P,f) \le U(P,f) \le U(P_\epsilon, f) \le U(P', f) < A + \epsilon/2$$

Entonces: $A - \epsilon/2 < L(P,f)$, y

$U(P,f) < A + \epsilon/2$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\cancel{A} + \epsilon/2 > -L(P,f) \\ \cancel{A} + \epsilon/2 > U(P,f) \end{array}\right\} +$$

$$\epsilon > U(P,f) - L(P,f).$$

($\Leftarrow$) Sea $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists\, P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b] \ni P \le P_\epsilon$, se tiene que $U(P,f) - L(P,f) < \epsilon \iff U(P,f) \le L(P,f) + \epsilon$

Para esta partición se tiene que:

$$\overline{\int_a^b} f \le U(P,f) \le L(P,f) + \epsilon \le \underline{\int_a^b} f + \epsilon$$

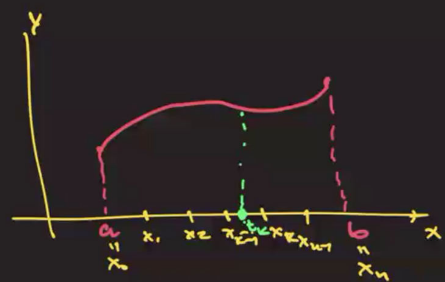
$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f < \underline{\int_a^b} f + \epsilon$. Por la arbitrariedad de ϵ, se tiene que: $\overline{\int_a^b} f \le \underline{\int_a^b} f$. Por teorema anterior, sabemos que:

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$$

$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]$. □

Teorema: Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Entonces, $f \in \mathcal{R}[c,d]$, para cualquier $[c,d] \subset [a,b]$. □

0:45:33



$A_1, A_2, \ldots, A_n$

$\{t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots, t_n\}$

$m_k(f) \leq f(t_k) \leq M_k(f)$

---

de ϵ, se tiene que: $\overline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} f$. Por teorema anterior, sabemos que:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b].$$ $\square$

Teorema: Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Entonces, $f \in \mathcal{R}[c,d]$, para cualquier $[c,d] \subset [a,b]$. $\square$

Def: Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$ y sea $t_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset P$, $k = 1, \ldots, n$. Una suma del tipo:

$$S(P, f, \{t_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \Delta x_k$$

se llama suma de Riemann de f para la partición P y con la muestra $t_1, \ldots, t_n$.

Teorema: Los enunciados siguientes son equivalentes:

a) $f \in \mathcal{R}[a,b]$

b) Existe un número A con la siguiente propiedad: $\forall \epsilon > 0 \ \exists \ P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b] \ \ni \ P \succeq P_\epsilon$

$t_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset [a,b]$, $k = 1, \ldots, n$, se cumple: $|S(P, f, \{t_k\}) - A| < \epsilon$.

$$A = \underbrace{\lim_{\boxed{\substack{\|P\| \to 0 \\ n \to \infty}}}}_{\text{Riemann}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \Delta x_k$$

Dem:

a ⇒ b: Sabemos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y suponga que $A = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Sea $\epsilon > 0$ y considere particiones $P', P'' \in \mathcal{P}[a,b]$, tales que

---

$$U(P,f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon, \quad P \succeq P'$$

$$L(P,f) > \underline{\int_a^b} f - \epsilon, \quad P \succeq P''$$

Sea $P_\epsilon = P' \cup P''$ y sea $P \succeq P_\epsilon$. Entonces,

$$\underline{\int_a^b} f - \epsilon < L(P,f) \leq S(P, f, \{t_k\}) \leq U(P,f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon$$

$$\Rightarrow \cancel{\underline{\int_a^b} f}^{\,A} - \epsilon < S(P, f, \{t_k\}) < \cancel{\overline{\int_a^b} f}^{\,A} + \epsilon$$

$$\Rightarrow -\epsilon < S(P, f, \{t_k\}) - A < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |S(P, f, \{t_k\}) - A| < \epsilon.$$