Universidad del Valle de Guatemala

MM2034 - 1 semestre - 2021

Licenciatura en matemática aplicada

ANÁLISIS DE VARIABLE REAL 2

Catedrático: Dorval Carías

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay

Carné: 19857

Correo: rom19857@uvg.edu.gt

16 de julio de 2021

Índice

1. Sesión 1 - 5 de julio de 2021

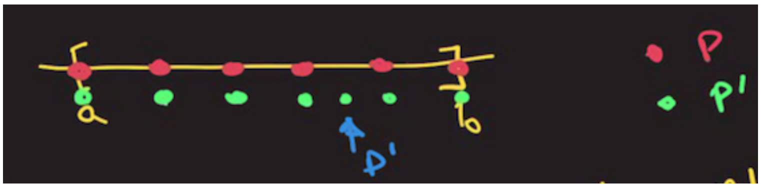
NOTA. *La teoría a continuación se refiere a funciones acotadas.*

Definición 1. *Una **partición** P del intervalo $[a,b]$ es un conjunto finito: $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ donde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.*

NOTA. *$P[a,b]$ denota el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.*

NOTA.

1. *Una partición $P' \in P[a,b]$ es un **refinamiento** de $P \in P[a,b]$, si $P \subset P'$*

   ***Notación:** si $P \subset P' \implies$ Se denota: $P' \preceq P$.*

   a) $P \preceq P(\iff P \subset P)$, $\forall P \in P[a,b]$.

   b) *Si* $P' \preceq P$ *y* $P \preceq P' \implies P = P'$.

   c) *Si* $P' \preceq P$ *y* $P'' \preceq P' \implies P'' \preceq P$.

   $\implies$ *La relación $\preceq$ es de orden parcial.*

2. *Para $P \in P[a,b], \Delta x_k := x_k - x_{k-1}$, es la longitud del k-ésimo subintervalo en la partición. Nótese que:*

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$$

3. *La norma o malla de $P \in P[a,b]$ se define: $\|P\| = \max\{\Delta x_k : k = 1, 2, \cdots, n\}$. Note que, si $P' \preceq P \implies \|P'\| \preceq \|P\|$.*

Definición 2. *Sea $P \in P[a,b]$ y sean, para $k = 1, \cdots, n$,*

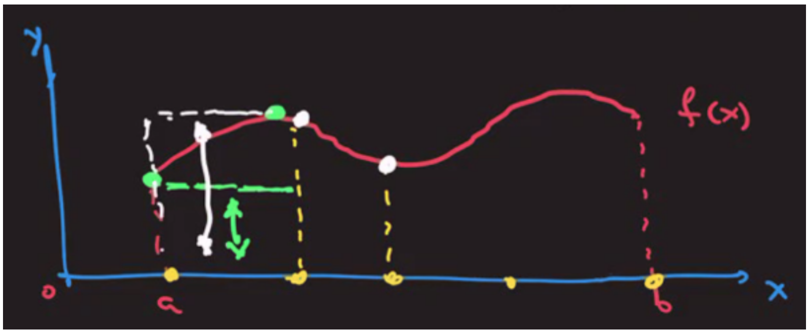
$$M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$m_k(f) = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Entonces, los números:

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k, \quad L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\Delta x_k$$

se llaman la suma superior e inferior de Darboux de f para partición P.

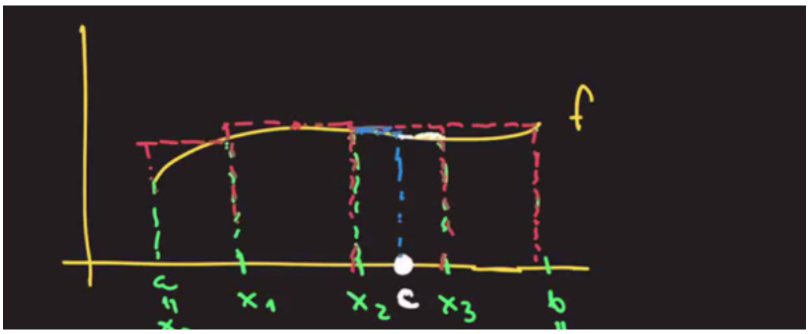


Proposición 1. *Sean $P, P', P_1, P_2 \in P[a,b]$. Entonces,*

1.
$$P' \preceq P \implies P' \preceq P \implies \begin{cases} U(P',f) \leqslant U(P,f) \\ L(P',f) \geqslant L(P,f) \end{cases}$$

2.
$$L(P_1,f) \leq U(P_2,f)$$

Demostración. Tenemos:



1. Sea $P' = P \cup \{c\}$ y suponga que $c \in [x_{i-1}, x_i] \subset P \implies U(P', f) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} M_k(f)\Delta x_k + M'(c - x_{i-1}) + M''(x_i - c)$. Como $M' \leq M_i(f)$ y $M'' \leq M_i(f)$. $\implies U(P', f) \leq \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} M_k(f)\Delta x_k + M_i(f)\underbrace{[(c - x_{i-1}) + (x_i - c)]}_{\Delta x_i} = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k = U(P, f)$.
2. Como $P_1, P_2 \in P[a, b]$, sea $P = P_1 \cup P_2$. Como $P \preceq P_1$ y $P \preceq P_2$, entonces $L(P_1, f) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq U(P_2, f)$.

■

Definición 3. *1. Se define la integral superior de Riemman de f sobre $[a, b]$.*

$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{U(P, f) : P \in P[a, b]\}$$

2. Se define la integral interior de Riemman de f sobre $[a, b]$.

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P, f) : P \in P[a, b]\}$$

Ejemplo 1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R} \ni f(x) = c$.*

1. $U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} c\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c(b - a) \implies \overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{U(P, f) : P \in P[a, b]\} = c(b - a)$.
2. $L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} c\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c(b - a) \implies \underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P, f) : P \in P[a, b]\} = c(b - a)$

Ejemplo 2. *Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R} \ni$*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{I}rr \end{cases}$$

Sea $P \in P[0, 1]$. Entonces,

1. $U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} 1\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1 - 0 = 1 \implies \overline{\int_0^1} f = \text{ínf}\{\underbrace{U(P, f)}_{1} : P \in P[0, 1]\} = 1$.
2. $L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} 0\Delta x_k = 0 \implies \underline{\int_0^1} f = \sup\{\underbrace{L(P, f)}_{0} : P \in P[0, 1]\} = 0$.

Integral de Riemann

Cauchy → Riemann → Darboux
Riemann → Riemann-Stieltjes → Lebesgue
Riemann → Dani, Áscoli → HK

Nota: la teoría a continuación se refiere a funciones acotadas.

Def: Una partición P del intervalo $[a,b]$ es un conjunto finito: $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ donde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Notación: $P[a,b]$ denota al conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.

Notas:

1) Una partición $P' \in P[a,b]$ es un refinamiento de $P \in P[a,b]$, si $P \subset P'$

Notación: si $P \subset P'$ $\Rightarrow$ se denota: $P' \leq P$

i) $P \leq P$ ($\Leftrightarrow P \subset P$), $\forall P \in P[a,b]$.

ii) Si $P' \leq P$ y $P \leq P'$ $\Rightarrow$ $P = P'$

iii) Si $P' \leq P$ y $P'' \leq P'$ $\Rightarrow$ $P'' \leq P$

$\Rightarrow$ la relación $\leq$ es de orden parcial.

2) Para $P \in P[a,b]$, $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$, es la longitud del k-ésimo subintervalo en la partición. Nótese que:

•) $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$

3) La norma o malla de $P \in P[a,b]$ se define: $\|P\| = \text{máx}\{\Delta x_k : k = 1, 2, \dots, n\}$

Note que, si $P' \leq P \Rightarrow \|P'\| \leq \|P\|$

Def: Sea $P \in P[a,b]$ y sean, para $k = 1, \dots, n$,

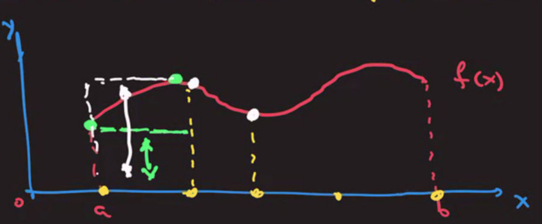
$$M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$m_k(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Entonces, los números:

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k, \quad L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\Delta x_k$$

se llaman la suma superior e inferior de Darboux de f para la partición P.



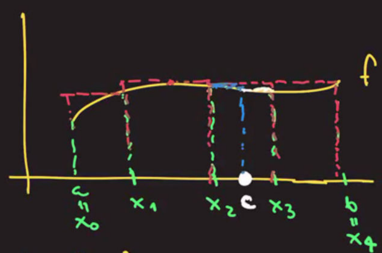
Prop: Sean $P, P', P_1, P_2 \in P[a,b]$. Entonces,

1) $P' \leq P \Rightarrow \begin{cases} U(P',f) \leq U(P,f) \\ L(P',f) \geq L(P,f) \end{cases}$

2) $L(P_1,f) \leq U(P_2,f)$

Dem:

(1)



Sea $P' = P \cup \{c\}$ y suponga que $c \in [x_{i-1}, x_i]$, $\subset P$

$$\Rightarrow U(P',f) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} M_k(f)\Delta x_k + M'(c - x_{i-1}) + M''(x_i - c).$$

Como $M' \leq M_i(f)$ y $M'' \leq M_i(f)$, entonces

$$\Rightarrow U(P',f) \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} M_k(f)\Delta x_k + M_i(f)\left[\underbrace{(\cancel{t}-x_{i-1}) + (x_i-\cancel{t})}_{\Delta x_i}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k = U(P,f).$$

2) Como $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$, sea $P = P_1 \cup P_2$.

Como $P \geq P_1$ y $P \geq P_2$, entonces

$$L(P_1,f) \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq U(P_2,f)$$

$\square$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

2) La integral inferior de Riemann de f sobre $[a,b]$ se define

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

Ej: 1) Sea $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \ni f(x) = c$

$$\Rightarrow U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} c\,\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = c(b-a)$$

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} c\,\Delta x_k = c(b-a)$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\} = c(b-a)$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\} = c(b-a)$$

Ej 2) Sea $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ni f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I}rr \end{cases}$

Sea $P \in \mathcal{P}[0,1]$. Entonces

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} 1\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = 1-0 = 1$$

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} 0\,\Delta x_k = 0$$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1} f = \inf\{\overset{1}{U(P,f)} : P \in \mathcal{P}[0,1]\} = 1$$

$$\underline{\int_0^1} f = \sup\{\overset{0}{L(P,f)} : P \in \mathcal{P}[0,1]\} = 0$$

2. Sesión 2

Proposición 2. $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Definición 4. *Se dice que una función acotada f es Riemann integrable sobre $[a,b]$, si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En este caso:*

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Definición 5. *El conjunto de funciones Riemann integrables sobre $[a,b]$ se denota $R[a,b]$.*

Teorema 1. *(Criterio de Cauchy-Riemann para integrabilidad) Una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable sobre $[a,b]$ ssi $\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon \in P[a,b] \ni \forall P \leqslant P_\varepsilon$, se tiene que*

$$U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon.$$

Teorema 2. *Sea $f \in R[a,b]$. Entonces, $f \in R[c,d]$, para cualquier $[c,d] \subset [a,b]$.*

Definición 6. *Sea $P \in P[a,b]$ y sea $t_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset P$, $k = 1, \cdots, n$. Una suma del tipo:*

$$S(P, f, \{t_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \Delta x_k$$

se llama suma de Riemann de f para la partición P y con la muestra $t_1, \cdots, t_n$.

Teorema 3. *Los enunciados siguientes son equivalentes:*

1. *$f \in R[a,b]$.*

2. *Existe un número A con la siguiente propiedad: $\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon \in P[a,b] \ni P \leqslant P_\varepsilon$.*

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1} f = \inf\{U(P,f) : P\in \mathcal{P}[0,1]\} = 1$$

$$\underline{\int_0^1} f = \sup\{L(P,f) : P\in \mathcal{P}[0,1]\} = 0$$

Prop: $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$

Dem: Sea $\epsilon>0$. Como $\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P,f) : P\in \mathcal{P}[a,b]\}$

$\Rightarrow \exists\, P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b] \ni U(P_\epsilon,f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon$

$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f + \epsilon$ es cota superior de

$\{L(P,f) : P\in [a,b]\} \Rightarrow \sup\{L(P,f) : P\in[a,b]\} < \overline{\int_a^b} f + \epsilon \Rightarrow \underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f + \epsilon$. Dada la arbitrariedad de ϵ, se tiene:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

□

Def: Se dice que una función acotada f es Riemann integrable sobre $[a,b]$, si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En este caso,

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

El conjunto de funciones Riemann integrables sobre $[a,b]$ se denota $\mathcal{R}[a,b]$.

Teorema (Criterio de Cauchy Riemann para integrabilidad)

Una función acotada $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable sobre $[a,b]$ ssi $\forall\, \epsilon>0\ \exists\, P_\epsilon\in\mathcal{P}[a,b] \ni \forall\, P \leq P_\epsilon$, se tiene que

$$0 \leq U(P,f) - L(P,f) < \epsilon.$$

Dem:

$(\Rightarrow)$ Sea $f\in\mathcal{R}[a,b]$. Sea $\epsilon>0$ y sea

$$A = \int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

$\Rightarrow$ Existen particiones $P', P''\in\mathcal{P}[a,b] \ni$

$$U(P',f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon/2$$

$$L(P'',f) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\epsilon}{2}$$

Sea $P_\epsilon = P'\cup P''$ y considere $P\leq P_\epsilon$. Entonces,

$$A - \frac{\epsilon}{2} < L(P'',f) \leq L(P_\epsilon,f) \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq U(P_\epsilon,f) \leq U(P',f) < A + \epsilon/2$$

Entonces: $A - \epsilon/2 < L(P,f)$, y

$$U(P,f) < A + \epsilon/2$$

$$\Rightarrow -\cancel{A} + \epsilon/2 > -L(P,f)$$

$$\cancel{A} + \epsilon/2 > U(P,f) \quad \Big\} +$$

$$\epsilon > U(P,f) - L(P,f).$$

$(\Leftarrow)$ Sea $\epsilon>0 \Rightarrow \exists\, P_\epsilon\in\mathcal{P}[a,b] \ni P\leq P_\epsilon$, se tiene que $U(P,f) - L(P,f) < \epsilon \Leftrightarrow U(P,f) \leq L(P,f)+\epsilon$

Para esta partición se tiene que:

$$\overline{\int_a^b} f \leq U(P,f) \leq L(P,f)+\epsilon \leq \underline{\int_a^b} f + \epsilon$$

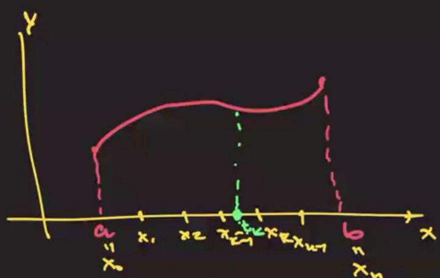
$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f < \underline{\int_a^b} f + \epsilon$. Por la arbitrariedad de ϵ, se tiene que: $\overline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} f$. Por teorema anterior, sabemos que:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \Rightarrow f\in\mathcal{R}[a,b].$$

□

Teorema: Sea $f\in\mathcal{R}[a,b]$. Entonces, $f\in\mathcal{R}[c,d]$, para cualquier $[c,d]\subset[a,b]$. □



$A_1, A_2, \dots, A_n$

$\{t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_n\}$

$m_k(f) \le f(t_k) \le M_k(f)$

de ϵ, se tiene que: $\overline{\int_a^b} f \le \underline{\int_a^b} f$. Por teorema anterior, sabemos que:

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]. \qquad \square$$

Teorema: Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Entonces, $f \in \mathcal{R}[c,d]$, para cualquier $[c,d] \subset [a,b]$. $\square$

Def: Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$ y sea $t_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset P$, $k = 1, \dots, n$. Una suma del tipo:

$$S(P, f, \{t_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \Delta x_k$$

se llama suma de Riemann de f para la partición P y con la muestra $t_1, \dots, t_n$.

Teorema: Los enunciados siguientes son equivalentes:

a) $f \in \mathcal{R}[a,b]$

b) Existe un número A con la siguiente propiedad:
$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b] \ni P \preceq P_\epsilon$

$t_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset [a,b]$, $k = 1, \dots, n$, se cumple: $|S(P, f, \{t_k\}) - A| < \epsilon$.

$$\ulcorner \ A = \underset{\text{Riemann}}{\underset{\boxed{\substack{\|P\| \to 0 \\ n \to \infty}}}{\operatorname{Lim}}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \Delta x_k \ \lrcorner$$

Dem:
$a \Rightarrow b$: Sabemos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y suponga que $A = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Sea $\epsilon > 0$ y considere particiones $P', P'' \in \mathcal{P}[a,b]$, tales que

$$U(P, f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon, \quad P \preceq P'$$

$$L(P, f) > \underline{\int_a^b} f - \epsilon, \quad P \preceq P''$$

Sea $P_\epsilon = P' \cup P''$ y sea $P \preceq P_\epsilon$. Entonces,

$$\underline{\int_a^b} f - \epsilon < L(P, f) \le S(P, f, \{t_k\}) \le U(P, f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon$$

$$\Rightarrow \cancelto{A}{\underline{\int_a^b} f} - \epsilon < S(P, f, \{t_k\}) < \cancelto{A}{\overline{\int_a^b} f} + \epsilon$$

$$\Rightarrow -\epsilon < S(P, f, \{t_k\}) - A < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |S(P, f, \{t_k\}) - A| < \epsilon.$$

3. Sesión 3

Definición 7. *La* ***oscilación*** *de una función acotada f sobre un conjunto A es* $\mathrm{osc}_A(f) := \sup_A(f) - \inf_A(f)$.

NOTA. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada, y si $P \in P[a,b]$, entonces:*

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n}[M_k(f) - m_k(f)]\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{osc}_{I_k}(f)\Delta x_k$$

Proposición 3. *Suponga que $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son acotadas y suponga que $g \in R[a,b]$. Si $\exists c > 0 \ni \mathrm{osc}_I(f) \leq c\, \mathrm{osc}_I(g)$, sobre cada subintervalo $I \subseteq [a,b]$, entonces $f \in R[a,b]$.*

Teorema 4. *$f \in R[a,b]$ ssi existe una sucesión de particiones (P_n), $P_n \in P[a,b], \forall n \in \mathbb{Z}^+ \ni \lim_{n\to\infty}[U(f,P_n) - L(f,P_n)] = 0$. En este caso,*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n).$$

Teorema 5. *Una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable.*

Teorema 6. *Una función monótona $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable.*

(b) $\Rightarrow$ (a): Sea $\varepsilon > 0$ y sea $P_\varepsilon \in \mathcal{P}[a,b] \ni \forall P \preceq P_\varepsilon$, y cualesquiera $t_k, t'_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset P$, se cumple:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k - A \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\,\Delta x_k - A \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} \left[f(t_k) - f(t'_k) \right] \Delta x_k \right| = \qquad (*)$$

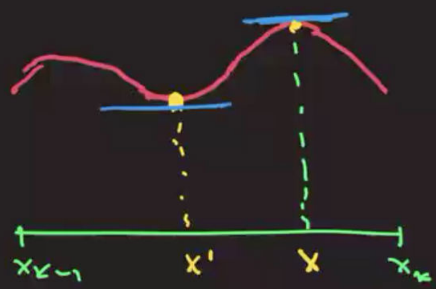
$$= \left| \left(\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k - A \right) + \left(A - \sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\,\Delta x_k \right) \right|$$

$$\leq \left| \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k - A \right| + \left| \sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\,\Delta x_k - A \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Por otro lado:

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup \left\{ f(x) - f(x') : x, x' \in [x_{k-1}, x_k] \right\}$$



$$\leq \left| \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x_k - A \right| + \left| \sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\,\Delta x_k - A \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Por otro lado:

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup \left\{ f(x) - f(x') : x, x' \in [x_{k-1}, x_k] \right\}$$

Entonces, para $h > 0$ podemos encontrar t_k, t'_k en $[x_{k-1}, x_k] \ni$

$$f(t_k) - f(t'_k) > M_k(f) - m_k(f) - h$$

Sea $h = \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$

$$\Rightarrow U(P,f)-L(P,f) = \sum_{k=1}^{n}[M_k(f)-m_k(f)]\Delta x_k$$

$$< \sum_{k=1}^{n}[f(t_k)-f(t_k')+h]\Delta x_k$$

$$< \sum_{k=1}^{n}[f(t_k)-f(t_k')]\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} h\Delta x_k$$

$$\leq \left|\sum_{k=1}^{n}[f(t_k)-f(t_k')]\Delta x_k\right| + h\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k$$

$$\leq \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3\cancel{(b-a)}}\cancel{(b-a)} = \epsilon.$$

$\Rightarrow$ Por el criterio de Cachy, se tiene

$f \in R[a,b]$ ◻

<u>Def:</u> La <u>oscilación</u> de una función acotada f sobre un conjunto A es $\underset{A}{\operatorname{osc}}(f) := \sup_A(f) - \inf_A(f)$

<u>Nota:</u> si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es acotada, y si $P\in \mathcal{P}[a,b]$, entonces:

$$U(P,f)-L(P,f) = \sum_{k=1}^{n}[M_k(f)-m_k(f)]\Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\underset{I_k}{\operatorname{osc}}(f)\,\Delta x_k$$

<u>Prop:</u> Suponga que $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ son acotadas y suponga que $g\in R[a,b]$. Si $\exists\, c>0$ ∋ $\underset{I}{\operatorname{osc}}(f) \leq c\,\underset{I}{\operatorname{osc}}(g)$, sobre cada subintervalo $I\subseteq[a,b]$, entonces $f\in R[a,b]$.

<u>Dem:</u> Sea $\epsilon>0$ y $P_\epsilon\in\mathcal{P}[a,b]$ ∋ $P\supseteq P_\epsilon$. Entonces,

$$U(P,f)-L(P,f) = \sum_{k=1}^{n}\underset{I_k}{\operatorname{osc}}(f)\,\Delta x_k \rightarrow |I_k| \leq$$

$I_k \subset P$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} c\,\underset{I_k}{\operatorname{osc}}(g)\cdot|I_k| = c\,[\underbrace{U(P,g)-L(P,g)}_{<\epsilon}]$$

$\Rightarrow f\in R[a,b]$.

Teorema (⭑⭑⭑): $f \in R[a,b]$ ssi existe una sucesión de particiones (P_n), $P_n \in P[a,b]$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ $\ni$

$$\lim_{n\to\infty} [U(f,P_n) - L(f,P_n)] = 0.$$

En este caso, $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n)$.

Dem:

$(\Leftarrow)$ Dado $\epsilon > 0$ $\exists\, n \in \mathbb{Z}^+ \ni$ para $P_n \in P[a,b]$, se cumple $U(f,P_n) - L(f,P_n) < \epsilon$. Entonces, por el criterio de integrabilidad de Cauchy, se cumple: $f \in R[a,b]$.

$(\Rightarrow)$ Sea $f \in R[a,b] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ \ \exists\, P_n \in P[a,b] \ni$

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) < \frac{1}{n} \Rightarrow U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0$$

⭑: Ejercicio.

Ej: Considere $f : [0,1] \to \mathbb{R} \ni f(x) = x^2$.

Sea P_n la partición de $[0,1]$ en n subintervalos de tamaño $1/n$, y con puntos $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, \dots, n$. Si $I_k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, entonces

$$\sup_{I_k}(f) = x_k^2, \quad \inf_{I_k}(f) = x_{k-1}^2$$

$$\Rightarrow U(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Teorema (⭑⭑⭑): Una función continua $\boxed{f : [a,b] \to \mathbb{R}}$ sobre un compacto $[a,b]$ es Riemann-integrable.

Dem: Sea $\epsilon > 0$. Sabemos que f es uniformemente continua sobre $[a,b] \Rightarrow \exists\, \delta > 0 \ni$

si $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}, \forall x,y \in [a,b]$

Considere una partición $P = \{I_1, I_2, \dots, I_n\} \in P[a,b]$, tal que $\boxed{|I_k| < \delta}$ $k=1,\dots,n$.

Weierstrass

Como f es continua sobre $[a,b] \Rightarrow \exists\ x_k, y_k \in I_k$ t.q. $M_k(f) - m_k(f) = f(x_k) - f(y_k) < \frac{\epsilon}{b-a}$.

Entonces, $U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\Delta x_k$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a} \Delta x_k = \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\epsilon}{\cancel{b-a}} \cancel{(b-a)} = \epsilon.$$

$\Rightarrow f \in R[a,b]$

□

Teorema: Una función monótona $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sobre un compacto es Riemann-integrable

4. Sesión 4

Teorema 7. *Una función monótona $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann-integrable.*

NOTA. *Una función monótona no es necesariamente continua [¿Qué sucede si f tiene un conjunto no contable de discontinuidades de salto en $[a,b]$?]*

Proposición 4. *Sea*

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f \qquad (f \in R[a,b]).$$

NOTA. *Sean f y g funciones acotadas sobre el intervalo $I \implies f+g$ es acotada.*

Proposición 5. *(Supremos e ínfimos)*

$$\sup_I(f+g) \leq \sup_I(f) + \sup_I(g)$$

$$\inf_I(f+g) \geq \inf_I(f) + \inf_I(g)$$

Proposición 6. *Sea*

$$\operatorname{osc}_I(f+g) = \operatorname{osc}_I(f) + \operatorname{osc}_I(g)$$

Proposición 7. *$f, g \in R(I) \implies f+g \in R(I)$.*

NOTA. *Las integrales superior e inferior de funciones no integrables no son, en general, lineales.*

Definición 8. *Sea $a < b$.*

1. $\overline{\int_a^b} f := -\overline{\int_a^b} f$ *y* $\underline{\int_a^b} f := -\underline{\int_b^a} f$. *Si las integrales coinciden, entonces:*

$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

2. $\forall c \in [a,b]$, *se define:* $\overline{\int_c^c} f = \underline{\int_a^c} f = 0$.

Proposición 8. *(Varios)*

1. $\overline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g$.

2. $\underline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g$.

Teorema 8. *Si* $f, g \in R \implies \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Proposición 9. *(Monotonicidad) Sean* $f, g \in R[a,b]$ *y suponga que* $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]$. *Entonces:*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b f$$

Teorema 9. *Suponga que* $f \in R[a,b]$ *y sea* $M = \sup_{[a,b]}(f)$ *y* $m = \text{ínf}_{[a,b]} f$. *Entonces,*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Teorema 10. *(Valor medio para integrales) Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es continua, entonces* $\exists c \in [a,b] \ni$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

Teorema: Una función monótona $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (sobre un compacto) es Riemann-integrable.

Dem: Suponga que f es monótona creciente en $[a,b]$. Sea $P_n=\{I_1,I_2,\dots,I_n\}$ una partición de $[a,b]$ $\ni$ $I_k=[x_{k-1},x_k]$, $|I_k|=\frac{b-a}{n}$, y $x_k=a+\frac{(b-a)}{n}k$, $k=0,1,\dots,n$.

$$\Rightarrow M_k(f)=\sup_{I_k}(f)=f(x_k),\quad m_k(f)=f(x_{k-1})$$

$$\Rightarrow U(f,P_n)-L(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n}[M_k(f)-m_k(f)]\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$=\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]$$

$$=\left(\frac{b-a}{n}\right)[f(b)-f(a)].\quad \text{Si } n\to\infty$$

$$\Rightarrow U(f,P_n)-L(f,P_n)\to 0\Rightarrow f\in\mathcal{R}[a,b].$$ $\square$

Nota: Una función monótona no es necesariamente continua [¿Qué sucede si f tiene un conjunto no contable de discontinuidades de salto en $[a,b]$?]

0:15:52

Prop $\int_a^b cf=c\int_a^b f\qquad (f\in\mathcal{R}[a,b])$

Dem.

$\boxed{c>0}$ $\overline{\int_a^b} cf=\inf_{P\in P[a,b]}U(cf,P)=\inf_{P\in P[a,b]}\sum_{k=1}^{n}\sup_{I_k}(cf)\cdot|I_k|$

$$=\inf_P c\sum_{k=1}^{n}\sup_{I_k}(f)\cdot|I_k|=c\inf_P U(f,P)$$

$$=c\overline{\int_a^b} f$$

Por otra parte: $\underline{\int_a^b} cf=\sup_P L(cf,P)=$

$$=\sup_P cL(f,P)=c\sup_P L(f,P)=c\underline{\int_a^b} f$$

Si $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \int_a^b cf = c\int_a^b f$.

$\boxed{c<0}$ Considere $-f \Rightarrow \sup_A(-f) = -\inf_A(f)$

$$\inf_A(-f) = -\sup_A(f)$$

Entonces:

$$\overline{\int_a^b}(-f) = \inf_P \mathcal{U}(-f,P) = \inf_P \sum_{k=1}^{n} \sup_{I_k}(-f)\cdot|I_k|$$

$$= \inf_P (-1)\cdot\sum_{k=1}^{n} \inf(f)\cdot|I_k| =$$

$$= (-1)\sup_P L(f,P) = -\underline{\int_a^b} f$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b}(-f) = \sup_P L(-f,P) = \sup_P (-1)\,\mathcal{U}(f,P) =$$

$$= (-1)\inf \mathcal{U}(f,P) = -\overline{\int_a^b} f$$

Como $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \int_a^b(-f) = -\int_a^b f$.

Por último, $-c = -|c|$

$$\Rightarrow \int_a^b(-|c|)f = -\int_a^b |c|f = -|c|\int_a^b f$$

$\square$

Nota: Sean f y g funciones acotadas sobre el intervalo $I \Rightarrow f+g$ es acotada.

0:36:31

Por otra parte se tiene, por las propiedades de ínfimo y supremo, que:

$$\sup_I(f+g) \leq \sup_I(f) + \sup_I(g)$$

$$\inf_I(f+g) \geq \inf_I(f) + \inf_I(g)$$

Suponga que $f, g \in \mathcal{R}(I)$

$$\Rightarrow \underset{I}{\operatorname{osc}}(f+g) = \sup_I(f+g) - \inf_I(f+g) \leq$$

$$\leq \left[\sup_I(f) + \sup_I(g)\right] - \inf_I(f+g)$$

$$\leq \left[\sup_I(f) + \sup_I(g)\right] - \left[\inf_I(f) + \inf_I(g)\right]$$

$$= \left[\sup_I(f) - \inf_I(f)\right] + \left[\sup_I(g) - \inf_I(g)\right]$$

$$= \underset{I}{\mathrm{osc}}(f) + \underset{I}{\mathrm{osc}}(g).$$

Como $f, g \in R(I) \Rightarrow f+g \in R(I)$.

Ej: Sean $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ni$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases} \quad \leftarrow \text{Dirichlet}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1, & x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Nótese que $g = 1 - f$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1} f = 1 = \overline{\int_0^1} g \quad ; \quad \underline{\int_0^1} f = 0 = \underline{\int_0^1} g$$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1} (f+g) = 1 = \underline{\int_0^1} (f+g)$$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1} (f+g) < \overline{\int_0^1} f + \overline{\int_0^1} g$$

$$\underline{\int_0^1} f+g > \underline{\int_0^1} f + \underline{\int_0^1} g$$

0:50:00

Entonces: Las integrales superior e inferior de funciones no integrables no son, en general, lineales.

Def. Sea $a < b$.

a) $\overline{\int_a^b} f := - \overline{\int_b^a} f$ y $\underline{\int_a^b} f := - \underline{\int_b^a} f$.

Si las integrales coinciden, entonces:

$$\int_a^b f = - \int_b^a f.$$

b) $\forall c \in [a,b]$, se define: $\overline{\int_c^c} f = \underline{\int_c^c} f = 0$

Prop: (a) $\overline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g$

(b) $\underline{\int_a^b}(f+g) \geq \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g$

$\square$

Teorema: Si $f, g \in R \Rightarrow \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Dem: $\overline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g = \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g$

$\leq \underline{\int_a^b}(f+g)$

además, sabemos:

$$\underline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b}(f+g)$$

$\Rightarrow \underline{\int_a^b}(f+g) = \overline{\int_a^b}(f+g) \Rightarrow f+g \in R[a,b]$

$\Rightarrow \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$

$\square$

Prop: Sean $f, g \in R[a,b]$ y suponga que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Entonces:

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

monotonicidad

Dem: Sea f integrable y supóngase que $f \geq 0$.

Sea $P \in P[a,b] \ni P = [a,b]$

$\Rightarrow L(f,P) = \inf_P (f) \cdot (b-a) \geq 0$

$\Rightarrow \int_a^b f = \underline{\int_a^b} f \geq L(P,f) \geq 0$

$\Rightarrow$ Si $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$.

Si se tiene que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$,

hagamos $h(x) = g(x) - f(x)$, $\forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow h(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b h(x)\,dx \geq 0$

$\Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx \geq 0$

$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$

$\square$

Teorema: Suponga que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y sean

$M = \sup_{[a,b]} (f)$ y $m = \inf_{[a,b]} f$.

Entonces, $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

Dem: Sabemos que $m \leq f \leq M$

$\Rightarrow \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M$

$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$. $\square$

Teorema (Valor medio para integrales)

Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $\exists\, c \in [a,b] \ni$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Dem: Como f es continua sobre el compacto $[a,b]$, entonces f alcanza su máximo, M, y su mínimo m, en $[a,b]$. Entonces,

$m \leq f \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$

$\Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M$

Como f es continua en $[a,b]$, por el Teorema del valor medio, existe $c \in [a,b] \ni$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

$\square$

Lunes: • Teoremas fundamentales del cálculo.