Prop. Si $|r|<1 \Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a r^n} = \frac{1}{1-r}$, y la serie diverge para $|r| \geq 1$ (series geométricas).

$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1}$

Dem: $|r| \neq 1$

Considere: $1-r^{n+1} = (1-r)(1+r+r^2+\dots+r^n)$, $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 1+r+r^2+\dots+r^n = \frac{1-\boxed{r^{n+1}}}{1-r}$, $r \neq 1$

Si $n \to \infty \Rightarrow 1+r+r^2+\dots+r^n+\dots \to \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & |r|<1 \\ \text{Diverge}, & |r|>1 \end{cases}$

$|r| = 1$ $\begin{cases} r=1 \\ r=-1 \end{cases}$. Nótese que, en ambos casos, se tiene que $\boxed{\lim_{n\to\infty} 1^n \neq 0}$ y $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \neq 0 \Rightarrow$ La serie diverge

Nota: Recordemos: $1+x+x^2+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x|<1$.

Prop: (Criterio de comparación)... Términos positivos

i) Si $\sum_1 b_k$ converge y $\boxed{0 \leq a_k \leq b_k} \Rightarrow \sum_1 a_k$ converge.

ii) Si $\sum_1 c_k$ diverge y $\boxed{0 \leq c_k \leq d_k} \Rightarrow \sum_1 d_k$ diverge.

Dem: (i) Sea $\sum_1 b_k$ converge $\Rightarrow$ La sucesión de sumas parciales de la serie forma una sucesión de Cauchy $\Rightarrow$ Para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ y para cada $p=1,2,\dots$ se tiene que: $a_k+a_{k+1}+\dots+a_{k+p} \leq b_k+b_{k+1}+\dots+b_{k+p}$, $p=1,2,\dots$

$\Rightarrow$ la sucesión de sumas parciales de $\sum a_k$ es de Cauchy $\Rightarrow \sum a_k$ converge.

ii) Suponga que $\sum_1 c_k$ diverge y que $0 \leq c_k \leq d_k$. Es decir, la serie diverge a ∞.

$\Rightarrow$ Dado $M>0$ $\exists$ $k_0 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ para $k \geq k_0$, se tiene:

$$c_1+c_2+\dots+c_k > M$$

$\Rightarrow$ Se cumple que $d_1+\dots+d_k \geq c_1+c_2+\dots+c_k > M$

$\Rightarrow$ La serie $\sum_1 d_k$ diverge. $\square$

Prop: (P-series): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge para $p>1$ y diverge para $p \leq 1$.

Dem. ① Caso $p=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (criterio de condensación)

② Caso $p \leq 1$. Entonces, la serie es de términos positivos y sabemos que, para $p \leq 1$, se tiene $n^p \leq n^1 \Rightarrow \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow$ por comparación $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge.

③ $p>1$ (criterio de condensación)

Prop: (Criterio de la razón)

① Suponga que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existe y es menor que 1 $\Rightarrow$ La serie $\sum_1 a_n$ converge absolutamente. ② Si el límite tiende a infinito o es mayor que 1. $\Rightarrow$ La serie diverge. ③ Si el límite es 1, el criterio no es concluyente.

Dem. ① Suponga que $\lim_{n\to\infty} \boxed{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = r < 1$

Sea $r' \in \mathbb{R} \ni r < r' < 1$ y sea $N_0 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N_0$

$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r'$. Entonces, $\forall\, k \geq N_0$, se tiene:

$|a_k| \leq r'|a_{k-1}| \leq (r')^2 \cdot |a_{k-2}| \leq \dots \leq (r')^{k-N_0} \cdot |a_{N_0}|$

$\Rightarrow$ La serie $\sum_{k=N_0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=N_0}^{\infty} |a_{N_0}| \cdot (r')^{k-N_0}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} |a_{N_0}| \cdot (r')^k$$

$\therefore \sum_{k=N_0}^{\infty} |a_k|$ converge por comparación con la serie geométrica.

③ Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, la cual es convergente por p-serie. Pero:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Por otra parte, la serie divergente $1+1+1+\dots$ es t.q. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1$

② Suponga que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r > 1$. Sea $r' \in \mathbb{R} \ni r > r' > 1$ y sea $N_0 \in \mathbb{Z}^+ \ni$ si $n \geq N_0$, entonces $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > r' \Rightarrow |a_k| > r'|a_{k-1}| > (r')^2 \cdot |a_{k-2}| > \dots > (r')^{k-N_0} \cdot |a_{N_0}|$

Teorema (condensación): Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ni a_n > 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ y (a_n) es decreciente. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

convergen o divergen de forma conjunta.

Ej. 1) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. $\Rightarrow$ considere $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{2^n} \cdot \frac{1}{\cancel{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$. Como $\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

2) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Entonces, consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \left(\frac{1}{(2^n)^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = \frac{1}{1 - 1/2} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

3.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n[\ln(n)]^2} \Rightarrow$ Considere $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{2^n} \cdot \frac{1}{\cancel{2^n}\,[\ln(2^n)]^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n \ln 2]^2} = \frac{1}{(\ln 2)^2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\text{converge}}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n[\ln n]^2}$ converge por condensación.

4) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)\sqrt{\ln(\ln n)}}$. Considere

$$\sum_{n=3}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \cancel{2^n} \frac{1}{\cancel{2^n}(\ln 2^n)\sqrt{\ln(\ln 2^n)}} =$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n \ln 2)\sqrt{\ln(n \ln 2)}} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n \ln 2)}}$$

$\underset{\text{condensación}}{\Rightarrow} \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \cancel{2^n} \cdot \frac{1}{\cancel{2^n} \cdot \sqrt{\ln(2^n \cdot \ln 2)}}$

$$= \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln 2^n + \ln(\ln 2)}} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n \ln 2 + \ln(\ln 2)}}$$

$\underset{\text{condensación}}{\Rightarrow} \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{2^n \ln 2 + \ln(\ln 2)}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{\sqrt{2^x \ln 2 + \ln(\ln 2)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{2^x} \cancel{\ln 2}}{\frac{\cancel{2^x}(\cancel{\ln} 2)^2}{2\sqrt{2^x \ln 2 + \ln(\ln 2)}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2^x \ln 2 + \ln(\ln 2)}}{\ln 2} \longrightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ La serie diverge.

Ejercicio: $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln(\ln n))}$.

Nota: 1) Criterio de la integral

Sea $f(x)$ una función continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$, y sea $f(n) = a_n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ssi $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

② Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y considere $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$

Sea $x = 2^t \Rightarrow dx = 2^t \ln 2\, dt$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx = (\ln 2) \int_0^{\infty} 2^t f(2^t)\,dt$$

Si $x = 1 \Rightarrow 1 = 2^t \Rightarrow t = 0$
Si $x = \infty \Rightarrow t = \infty$ $\Rightarrow \sum a_n$ converge ssi $\sum 2^n \underbrace{f(2^n)}_{a_{2^n}}$ converge.

Teorema (2do criterio de la razón). Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, y sean

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{2n}}{a_n}\right| = L_1 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{2n+1}}{a_n}\right| = L_2.$$

Si:

i) $L_1 < \frac{1}{2}$ y $L_2 < \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

ii) $L_1 > \frac{1}{2}$ y $L_2 > \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

iii) $L_1 = \frac{1}{2}$ o $L_2 = \frac{1}{2}$, o si $L_1 > \frac{1}{2}$ y $L_2 < \frac{1}{2}$, o visceversa, el criterio no es concluyente.

Ej: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$. Utilizando el 2do criterio de la razón:

•) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{8n^3+1}}{\frac{n}{n^3+1}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n(n^3+n)}{n(8n^3+1)} = \frac{1}{4} = L_1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{2n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{(2n+1)^3+1}}{\frac{n}{n^3+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(n^3+1)}{n[(2n+1)^3+1]}$$

$$= \frac{1}{4} = L_2.$$

Como $L_1 < \frac{1}{2}$ y $L_2 < \frac{1}{2} \Rightarrow$ la serie converge.

Ej: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(2n)}{4\cancel{n^2}}}{\frac{\ln(n)}{\cancel{n^2}}} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2n)}{\ln(n)} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n}\cdot 2}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{\ln(2n+1)}{(2n+1)^2}}{\frac{\ln n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \ln(2n+1)}{(2n+1)^2 \ln n}$$

$$\bullet \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2n+1)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n+1}(2)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} = 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(2n+1)^2}\cdot 1$$

$$\bullet \lim_{n\to\infty} \cancel{\frac{\ln(2n+1)}{\ln n}}$$

$$= \frac{1}{4} = L_2$$

$\Rightarrow L_1 = \frac{1}{4} < 1/2$, $L_2 = \frac{1}{4} < 1/2$ $\Rightarrow$ la serie converge.

Ej: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$;

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}\ln(2n)}}{\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n}}\ln(n)}{\sqrt{2}\cancel{\sqrt{n}}\ln(2n)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(2n)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\frac{1}{2n}\cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = L_1$$

$\sqrt{2} < 2$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+1}\ln(2n+1)}}{\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\ln n}{\sqrt{2n+1}\ln(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\cdot\frac{\ln n}{\ln 2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = L_2$$

$$\lim \frac{\ln n}{\ln(2n+1)} = \lim \frac{1/n}{\frac{1}{2n+1}\cdot 2} = \lim \frac{2n+1}{2n} = 1$$

$\Rightarrow L_1 > 1/2$, $L_2 > 1/2$ $\Rightarrow$ la serie diverge.

Teorema (criterio de Raabe): Sea $\sum_{n=1} a_n$, $a_n > 0$, y asuma que $L = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$.

i) Si $L > 1 \Rightarrow$ la serie converge.

ii) Si $L < 1 \Rightarrow$ la serie diverge.

iii) Si $L = 1 \Rightarrow$ el criterio no es concluyente.

Ej: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Por Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1/n^3}{1/(n+1)^3} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(n+1)^3 - n^3}{n^3}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3n^2+3n+1}{n^3}\right) = 3 > 1 \Rightarrow \text{La serie converge.}$$

Ej: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$; Por Raabe, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{n!/2^n}{(n+1)!/2^{n+1}} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{n!\,2^{n+1}}{(n+1)!\,2^n} - 1\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{2}{n+1} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2-n-1}{n+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n - n^2 - 1}{n+1} \to -\infty < 1 \Rightarrow \text{la serie diverge.}$$

Ej: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$; Recordemos:

$(2n)!! = (2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 2$

$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 1$

Por Raabe,

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}} - 1\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{\cancel{(2n-1)!!}\,(2n+2)\cancel{(2n)!!}}{\cancel{(2n)!!}\,(2n+1)\cancel{(2n-1)!!}} - 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(\cancel{2n}+2) - (\cancel{2n}+1)}{(2n+1)}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ la serie diverge.