Universidad del Valle de Guatemala

MM2034 - 1 semestre - 2021

Licenciatura en matemática aplicada

ANÁLISIS DE VARIABLE REAL 2

Catedrático: Dorval Carías

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay

Carné: 19857

Correo: rom19857@uvg.edu.gt

12 de julio de 2021

Índice

1. Sesión 1 - 5 de julio de 2021

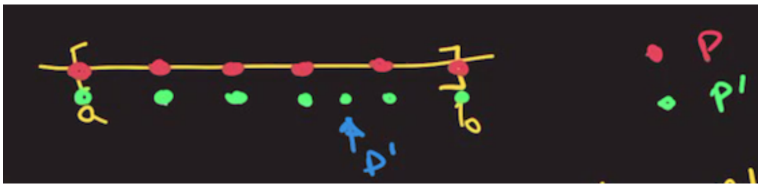
NOTA. *La teoría a continuación se refiere a funciones acotadas.*

Definición 1. *Una **partición** P del intervalo $[a,b]$ es un conjunto finito: $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ donde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.*

NOTA. *$P[a,b]$ denota el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.*

NOTA.

1. *Una partición $P' \in P[a,b]$ es un **refinamiento** de $P \in P[a,b]$, si $P \subset P'$*



***Notación:** si $P \subset P' \implies$ Se denota: $P' \preceq P$.*

a) $P \preceq P (\iff P \subset P)$, $\forall P \in P[a,b]$.

b) *Si* $P' \preceq P$ *y* $P \preceq P' \implies P = P'$.

c) *Si* $P' \preceq P$ *y* $P'' \preceq P' \implies P'' \preceq P$.

$\implies$ *La relación $\preceq$ es de orden parcial.*

2. *Para $P \in P[a,b], \Delta x_k := x_k - x_{k-1}$, es la longitud del k-ésimo subintervalo en la partición. Nótese que:*

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$$

3. *La norma o malla de $P \in P[a,b]$ se define: $\|P\| = \max\{\Delta x_k : k = 1, 2, \cdots, n\}$. Note que, si $P' \preceq P \implies \|P'\| \preceq \|P\|$.*

Definición 2. *Sea $P \in P[a,b]$ y sean, para $k = 1, \cdots, n$,*

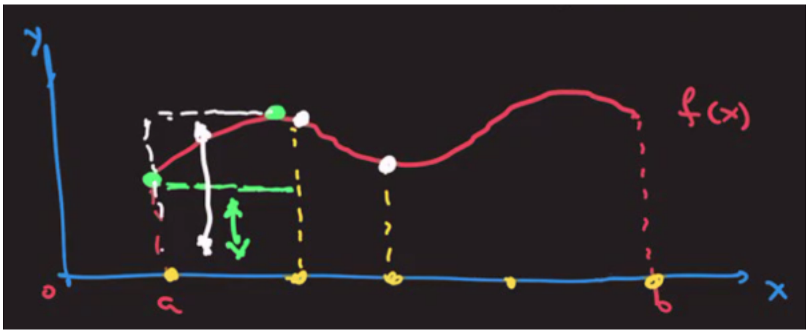
$$M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$m_k(f) = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Entonces, los números:

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k, \quad L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\Delta x_k$$

se llaman la suma superior e inferior de Darboux de f para partición P.

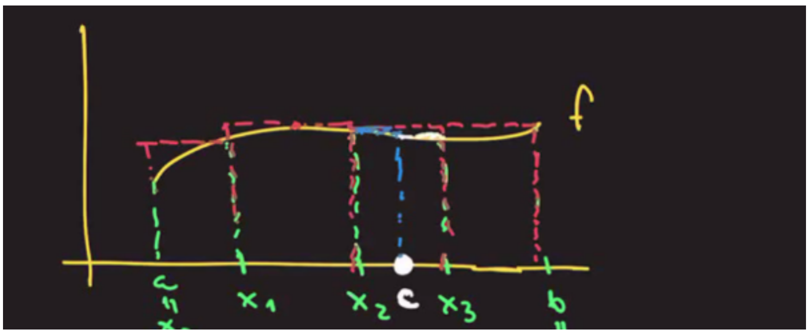


Proposición 1. *Sean $P, P', P_1, P_2 \in P[a,b]$. Entonces,*

1.
$$P' \preceq P \implies P' \preceq P \implies \begin{cases} U(P',f) \leqslant U(P,f) \\ L(P',f) \geqslant L(P,f) \end{cases}$$

2.
$$L(P_1, f) \leq U(P_2, f)$$

Demostración. Tenemos:



1. Sea $P' = P \cup \{c\}$ y suponga que $c \in [x_{i-1}, x_i] \subset P \implies U(P', f) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} M_k(f)\Delta x_k + M'(c - x_{i-1}) + M''(x_i - c)$. Como $M' \leq M_i(f)$ y $M'' \leq M_i(f)$. $\implies U(P', f) \leq \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} M_k(f)\Delta x_k + M_i(f)\underbrace{[(c - x_{i-1}) + (x_i - c)]}_{\Delta x_i} = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k = U(P, f)$.
2. Como $P_1, P_2 \in P[a, b]$, sea $P = P_1 \cup P_2$. Como $P \preceq P_1$ y $P \preceq P_2$, entonces $L(P_1, f) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq U(P_2, f)$.

■

Definición 3. *1. Se define la integral superior de Riemman de f sobre $[a, b]$.*

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P, f) : P \in P[a, b]\}$$

2. Se define la integral interior de Riemman de f sobre $[a, b]$.

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P, f) : P \in P[a, b]\}$$

Ejemplo 1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R} \ni f(x) = c$.*

1. $U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} c\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c(b - a) \implies \overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P, f) : P \in P[a, b]\} = c(b - a)$.

2. $L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} c\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c(b - a) \implies \underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P, f) : P \in P[a, b]\} = c(b - a)$

Ejemplo 2. *Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R} \ni$*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{I}rr \end{cases}$$

Sea $P \in P[0, 1]$. Entonces,

1. $U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} 1\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1 - 0 = 1 \implies \overline{\int_0^1} f = \inf\{\underbrace{U(P, f)}_{1} : P \in P[0, 1]\} = 1$.

2. $L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} 0\Delta x_k = 0 \implies \underline{\int_0^1} f = \sup\{\underbrace{L(P, f)}_{0} : P \in P[0, 1]\} = 0$.

Integral de Riemann

Cauchy → Riemann → Riemann-Stieltjes → Lebesgue

Darboux

Dani, Áscoli → HK

Nota: La teoría a continuación se refiere a funciones acotadas.

Def: Una partición P del intervalo $[a,b]$ es un conjunto finito: $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ donde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Notación: $\mathcal{P}[a,b]$ denota al conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.

Notas:

1) Una partición $P' \in \mathcal{P}[a,b]$ es un refinamiento de $P \in \mathcal{P}[a,b]$, si $P \subset P'$

Notación: si $P \subset P'$ $\Rightarrow$ se denota: $P' \leq P$

i) $P \leq P$ $(\Leftrightarrow P \subset P)$, $\forall P \in \mathcal{P}[a,b]$.

ii) Si $P' \leq P$ y $P \leq P'$ $\Rightarrow$ $P = P'$

iii) Si $P' \leq P$ y $P'' \leq P'$ $\Rightarrow$ $P'' \leq P$

$\Rightarrow$ la relación $\leq$ es de orden parcial.

2) Para $P \in \mathcal{P}[a,b]$, $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$, es la longitud del k-ésimo subintervalo en la partición. Nótese que:

•) $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$

3) La norma o malla de $P \in \mathcal{P}[a,b]$ se define: $\|P\| = \text{máx}\{\Delta x_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$

Note que, si $P' \leq P$ $\Rightarrow$ $\|P'\| \leq \|P\|$

Def: Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$ y sean, para $k = 1, \ldots, n$,

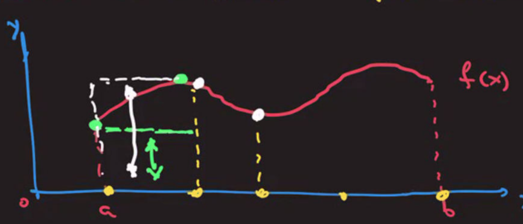
$$M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$m_k(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Entonces, los números:

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k, \quad L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\Delta x_k$$

se llaman la suma superior e inferior de Darboux de f para la partición P.



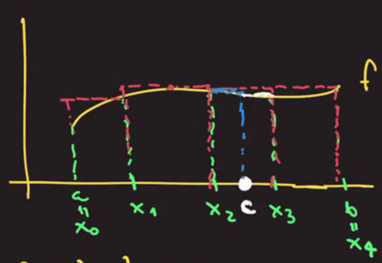
Prop: Sean $P, P', P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$. Entonces,

1) $P' \leq P \Rightarrow \begin{cases} U(P',f) \leq U(P,f) \\ L(P',f) \geq L(P,f) \end{cases}$

2) $L(P_1,f) \leq U(P_2,f)$

Dem:

(1)



Sea $P' = P \cup \{c\}$ y suponga que $c \in [x_{i-1}, x_i] \subset P$

$$\Rightarrow U(P',f) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} M_k(f)\Delta x_k + M'(c - x_{i-1}) + M''(x_i - c).$$

Como $M' \leq M_i(f)$ y $M'' \leq M_i(f)$, entonces

$$\Rightarrow U(P^*, f) \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} M_k(f)\Delta x_k + M_i(f)\left[\underbrace{(\cancel{t} - x_{i-1}) + (x_i - \cancel{t})}_{\Delta x_i}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k = U(P, f).$$

2) Como $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$, sea $P = P_1 \cup P_2$.

Como $P \supseteq P_1$ y $P \supseteq P_2$, entonces

$$L(P_1, f) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq U(P_2, f)$$

$\square$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf \{ U(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b] \}$$

2) La integral inferior de Riemann de f sobre $[a,b]$ se define

$$\underline{\int_a^b} f = \sup \{ L(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b] \}$$

Ej: 1) Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \ni f(x) = c$

$$\Rightarrow U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} c\,\Delta x_k = c \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c(b-a)$$

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} c\,\Delta x_k = c(b-a)$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f = \inf \{ U(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b] \} = c(b-a)$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup \{ L(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b] \} = c(b-a)$$

Ej 2) Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ni f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I}rr \end{cases}$

Sea $P \in \mathcal{P}[0,1]$. Entonces

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} 1\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1 - 0 = 1$$

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} 0\,\Delta x_k = 0$$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1} f = \inf \{ U(\overset{1}{P,f}) : P \in \mathcal{P}[0,1] \} = 1$$

$$\underline{\int_0^1} f = \sup \{ L(\overset{0}{P,f}) : P \in \mathcal{P}[0,1] \} = 0$$

2. Sesión 2

$$\Rightarrow \overline{\int_0^1} f = \inf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}[0,1]\} = 1$$

$$\underline{\int_0^1} f = \sup\{L(P,f) : P \in \mathcal{P}[0,1]\} = 0$$

Prop: $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$

Dem: Sea $\epsilon > 0$. Como $\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$

$\Rightarrow \exists\, P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b] \ni U(P_\epsilon, f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon$

$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f + \epsilon$ es cota superior de

$\{L(P,f) : P \in [a,b]\} \Rightarrow \sup\{L(P,f) : P \in [a,b]\} < \overline{\int_a^b} f + \epsilon \Rightarrow \underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f + \epsilon$. Dada la arbitrariedad de ϵ, se tiene:

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$$

□

Def: Se dice que una función acotada f es Riemann integrable sobre $[a,b]$, si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En este caso,

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

El conjunto de funciones Riemann integrables sobre $[a,b]$ se denota $\mathcal{R}[a,b]$.

Teorema (Criterio de Cauchy Riemann para integrabilidad)

Una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable sobre $[a,b]$ ssi $\forall \epsilon > 0\ \exists\, P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b] \ni \forall P \le P_\epsilon$, se tiene que

$$0 \le U(P,f) - L(P,f) < \epsilon.$$

Dem:

$(\Rightarrow)$ Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Sea $\epsilon > 0$ y sea

$$A = \int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

$\Rightarrow$ Existen particiones $P', P'' \in \mathcal{P}[a,b] \ni$

$$U(P', f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon/2$$

$$L(P'', f) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\epsilon}{2}$$

Sea $P_\epsilon = P' \cup P''$ y considere $P \le P_\epsilon$. Entonces,

$$A - \frac{\epsilon}{2} < L(P'', f) \le L(P_\epsilon, f) \le L(P,f) \le U(P,f) \le U(P_\epsilon, f) \le U(P', f) < A + \epsilon/2$$

Entonces: $A - \epsilon/2 < L(P,f)$, y

$$U(P,f) < A + \epsilon/2$$

$$\Rightarrow -\cancel{A} + \epsilon/2 > -L(P,f)$$

$$\cancel{A} + \epsilon/2 > U(P,f) \quad \Big\} +$$

$$\epsilon > U(P,f) - L(P,f).$$

$(\Leftarrow)$ Sea $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists\, P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b] \ni P \le P_\epsilon$, se tiene que $U(P,f) - L(P,f) < \epsilon \Leftrightarrow U(P,f) < L(P,f) + \epsilon$

Para esta partición se tiene que:

$$\overline{\int_a^b} f \le U(P,f) < L(P,f) + \epsilon \le \underline{\int_a^b} f + \epsilon$$

$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f < \underline{\int_a^b} f + \epsilon$. Por la arbitrariedad

0:45:33

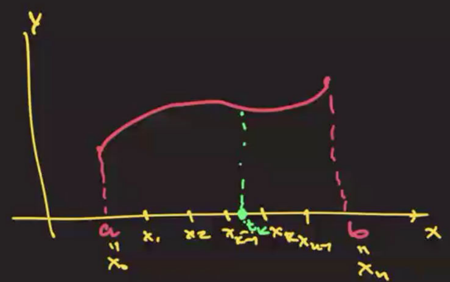
de ϵ, se tiene que: $\overline{\int_a^b} f \le \underline{\int_a^b} f$. Por teorema anterior, sabemos que:

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b].$$

□

Teorema: Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Entonces, $f \in \mathcal{R}[c,d]$, para cualquier $[c,d] \subset [a,b]$. □



$A_1, A_2, \ldots, A_n$

$\{t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots, t_n\}$

$m_k(f) \le f(t_k) \le M_k(f)$

de ϵ, se tiene que: $\overline{\int_a^b} f \le \underline{\int_a^b} f$. Por teorema anterior, sabemos que:

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]. \qquad \square$$

Teorema: Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Entonces, $f \in \mathcal{R}[c,d]$, para cualquier $[c,d] \subset [a,b]$. $\square$

Def: Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$ y sea $t_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset P$, $k = 1, \ldots, n$. Una suma del tipo:

$$S(P, f, \{t_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \Delta x_k$$

se llama suma de Riemann de f para la partición P y con la muestra $t_1, \ldots, t_n$.

Teorema: Los enunciados siguientes son equivalentes:

a) $f \in \mathcal{R}[a,b]$

b) Existe un número A con la siguiente propiedad: $\forall \epsilon > 0 \; \exists \, P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b] \ni P \preceq P_\epsilon$

$t_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset [a,b]$, $k = 1, \ldots, n$, se cumple: $|S(P, f, \{t_k\}) - A| < \epsilon$.

$$A = \underbrace{\lim_{\boxed{\substack{\|P\| \to 0 \\ n \to \infty}}}}_{\text{Riemann}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \Delta x_k$$

Dem:

$a \Rightarrow b$: Sabemos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y suponga que $A = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Sea $\epsilon > 0$ y considere particiones $P', P'' \in \mathcal{P}[a,b]$, tales que

$$U(P, f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon, \quad P \preceq P'$$

$$L(P, f) > \underline{\int_a^b} f - \epsilon, \quad P \preceq P''$$

Sea $P_\epsilon = P' \cup P''$ y sea $P \preceq P_\epsilon$. Entonces,

$$\underline{\int_a^b} f - \epsilon < L(P, f) \le S(P, f, \{t_k\}) \le U(P, f) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon$$

$$\Rightarrow \overset{A}{\cancel{\int_a^b f}} - \epsilon < S(P, f, \{t_k\}) < \overset{A}{\cancel{\overline{\int_a^b} f}} + \epsilon$$

$$\Rightarrow -\epsilon < S(P, f, \{t_k\}) - A < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |S(P, f, \{t_k\}) - A| < \epsilon.$$