Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2034 - Análisis de Variable Real 2 - Catedrático: Dorval Carías
18 de julio de 2021

HT 1

Problema 1. *Suponga que* $f \geq 0, f$ *es continua en* $[a, b]$, y $\int_a^b f(x)dx = 0$. *Demuestre que* $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.

Demostración. Por hipótesis, sabemos que: $f \geq 0$, f es continua en $[a, b]$ $\implies$ por teorema $f \in R[a, b]$ y $\int_a^b f = 0$. ■

Problema 2. *Sean* f, g *y* h *funciones acotadas en* $[a, b]$.

1. *Demuestre que si* $h(x) = 0$ *en* $[a, b]$*, excepto en un número finito de puntos de* $[a, b]$*, entonces* h *es Riemann integrable en* $[a, b]$ *y se tiene que* $\int_a^b h = 0$.

   Demostración. Por hipótesis, tenemos un número finito de puntos en donde $h(x) \neq 0$ en $[a, b]$. Supóngase que este número finito de puntos se puede expresar como $\{s_1, s_2, s_3, \cdots, s_k\}$. Nótese que $|h(x)| \leq M$. ■

2. *Demuestre que si* f *y* g *son Riemann integrables en* $[a, b]$ *y* $f(x) = g(x)$ *en* $[a, b]$*, excepto en un número finito de puntos de ese intervalo, entonces se tiene que:*

$$\int_a^b f = \int_a^b g$$

   Demostración. Por hipótesis, tenemos un número finito de puntos en donde $f(x) \neq g(x)$ en $[a, b]$. Supóngase que este número finito de puntos se puede expresar como $\{s_1, s_2, s_3, \cdots, s_k\}$. Nótese que $|f(x)| \leq M$ y $|g(x)| \leq M$. ■

Problema 3. *Sea* f *una función acotada en* $[a, b]$*. Suponga que* f *es integrable en todo intervalo de la forma* $[c, d]$*, con* $a < c < d < b$*. Demuestre que* f *es integrable en* $[a, b]$.

Demostración. C. ■

Problema 4. *Considere f la función definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & , x \in \mathbb{Q} \\ x & , x \in \mathbb{I}rr \end{cases}$$

¿Es f integrable en $[0,1]$?

Solución. Para determinar que f es integrable en $[0,1]$, debemos comprobar que:

$$\underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f = \int_0^1 f.$$

Entonces,

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{k} M_k(f)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{k} (x)\Delta x_k = x\sum_{k=1}^{k} \Delta x_k = x(1-0) = x. \tag{1}$$

$$\begin{aligned} L(P,f) &= \sum_{k=1}^{k} m_k(f)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{k}(1-x)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{k}\Delta x_k - x\sum_{k=1}^{k}\Delta x_k = \\ &= (1-0) - x(1-0) = 1-x. \end{aligned} \tag{2}$$

Por (1) sabemos que,

$$\overline{\int_0^1} f = \inf_{P\in P[a,b]} \{U(P,f)\} = 1-x.$$

Por (2) sabemos que,

$$\underline{\int_0^1} f = \sup_{P\in P[a,b]} \{L(P,f)\} = x.$$

$\implies \underline{\int_0^1} f \neq \overline{\int_0^1} f. \therefore f$ no es integrable en $[0,1]$. □

> Un caso particular, como se demostró en clase, si $x = 0$ (función de Dirichlet) entonces no es integrable.

Problema 5. *Suponga que f es una función acotada de valores reales sobre $[a,b]$, y que $f^2 \in R[a,b]$. ¿Implica lo anterior que $f \in R[a,b]$?*

Solución. Procederemos con un contraejemplo. Sean f^2 y f definidos sobre $[a,b]$, tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{I}rr \end{cases} \implies f^2(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & x \in \mathbb{I}rr. \end{cases}$$

Comprobamos que $f^2(x) \in R[a,b]$,

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{k} M_k(f)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{k}(x^2)\Delta x_k = x^2\sum_{k=1}^{k}\Delta x_k = x^2(1-0) = x^2. \tag{1}$$

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{k} m_k(f)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{k}(x^2)\Delta x_k = x^2\sum_{k=1}^{k}\Delta x_k = x^2(1-0) = x^2. \tag{2}$$

Por (1) sabemos que,

$$\overline{\int_0^1} f = \inf_{P\in P[a,b]}\{U(P,f)\} = x^2.$$

Por (2) sabemos que,

$$\underline{\int_0^1} f = \sup_{P\in P[a,b]}\{L(P,f)\} = x^2.$$

$$\implies \underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f. \ \therefore f^2(x) \in R[a,b]$$

Ahora bien, comprobamos que $f(x) \in R[a,b]$,

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{k} M_k(f)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{k}(x^2)\Delta x_k = x\sum_{k=1}^{k}\Delta x_k = x(1-0) = x. \tag{1}$$

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{k} m_k(f)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{k}(-x)\Delta x_k = -x\sum_{k=1}^{k}\Delta x_k = -x(1-0) = -x. \tag{2}$$

Por (1) sabemos que,

$$\overline{\int_0^1} f = \inf_{P\in P[a,b]}\{U(P,f)\} = x.$$

Por (2) sabemos que,

$$\underline{\int_0^1} f = \sup_{P\in P[a,b]}\{L(P,f)\} = -x.$$

$$\implies \underline{\int_0^1} \neq \overline{\int_0^1} f. \ \therefore f \notin R[0,1].$$

Por lo que podemos concluir que si f es una función acotada de valores reales sobre $[a,b]$, y que $f^2 \in R[a,b]$, no necesariamente implica que $f \in R[a,b]$.

$\square$