Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

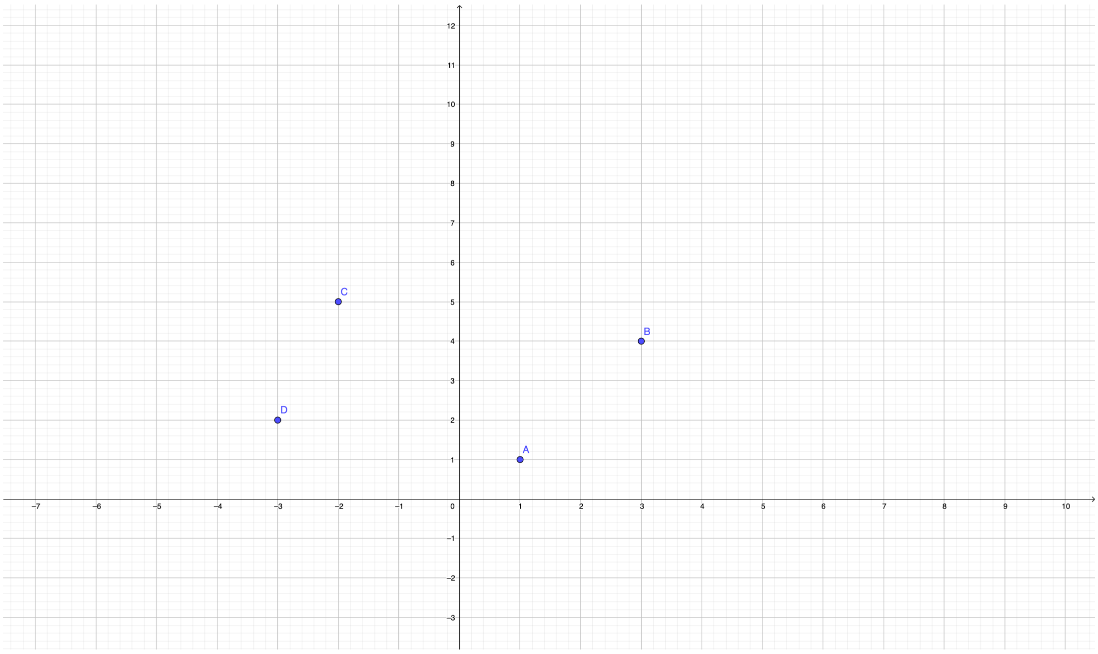
MM2031 - Geometría Moderna - Catedrático: María Eugenia Contreras Pinillos
22 de julio de 2021

HT 1

Problema 1. *Resolver:*

1. *Localice en un plano los puntos* $A(1,1)$, $B(3,4)$, $C(-2,5)$ *y* $D(-3,2)$.

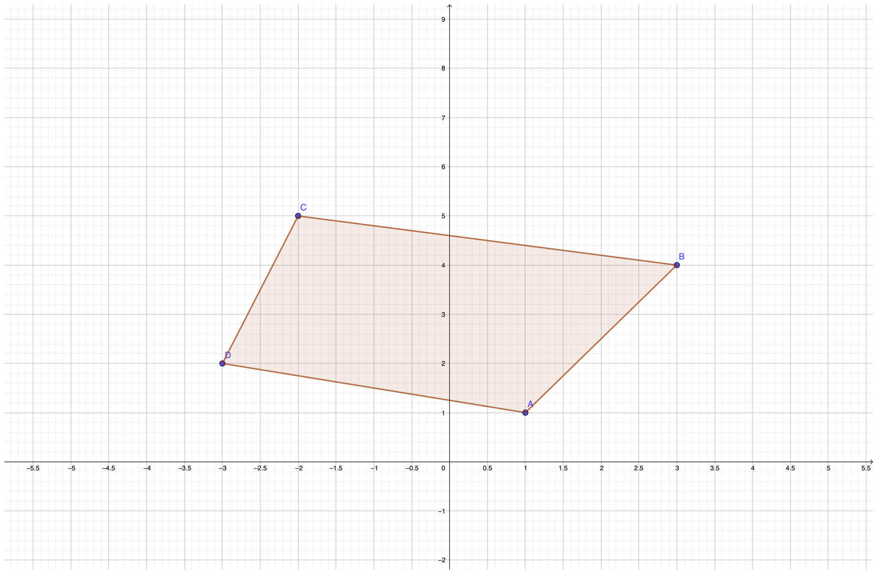
   Solución. .



$\square$

2. *Una de los puntos para obtener el cuadrilátero* $ABCD$.

   Solución. .

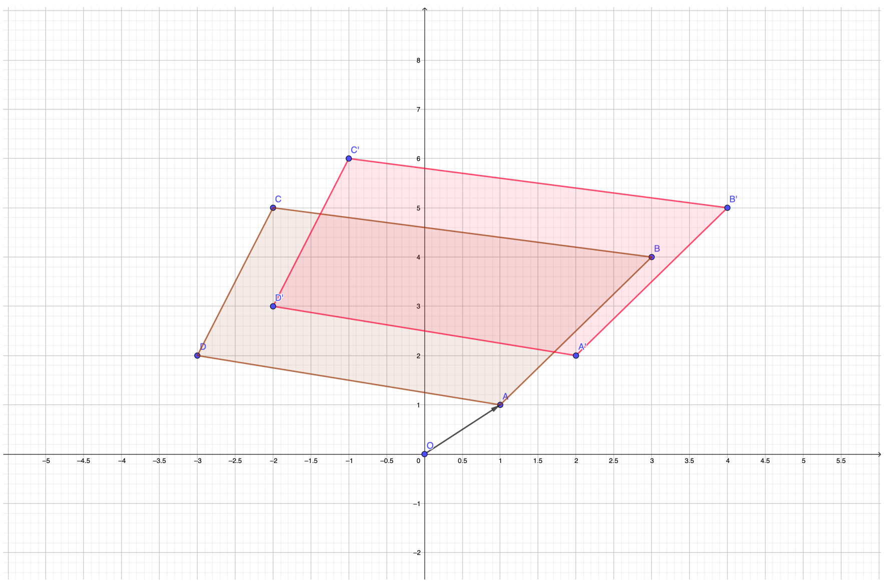


□

3. *Aplique ahora las siguientes transformaciones al cuadrilátero original:*

   a) *Una traslación en dirección del vector* $0A$.

   Solución. $\overrightarrow{0A}$ consiste en una traslación (1,1), entonces a cada punto se le suman una unidad: $A(1+1,1+1) = A'(2,2)$, $B(3+1,4+1) = B'(4,5)$, $C(-2+1,5+1) = C'(-1,6)$ y $D(-3+1,2+1) = D'(-2,3)$.



□

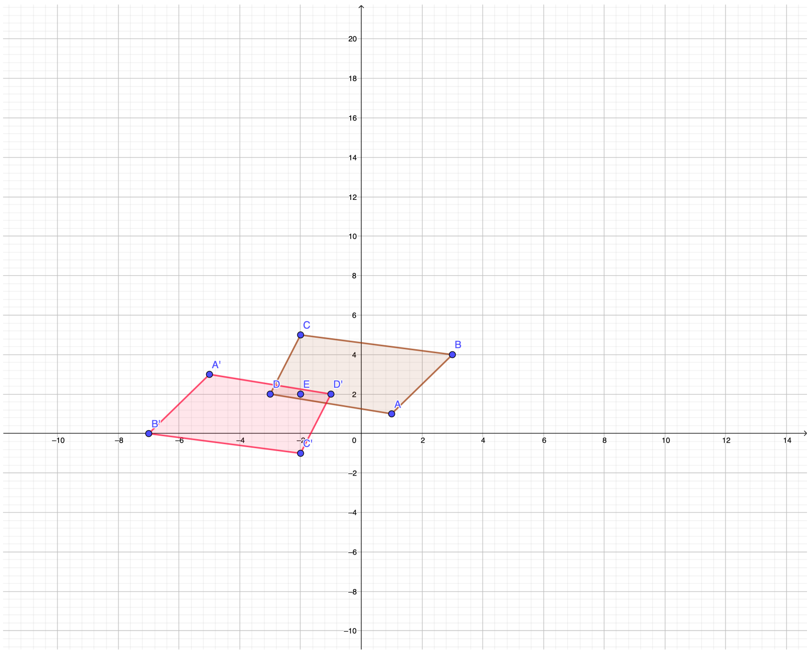
   b) *Reflexión respecto al punto* $E(-2,2)$.

   Solución. La ecuación para encontrar la reflexión dado un punto se define como:

$$\begin{cases} x' = 2x_c - x \\ y' = 2y_c - y \end{cases} \implies \begin{cases} x' = 2(-2) - x = -4 - x \\ y' = 2(2) - y = 4 - y \end{cases}$$

Por lo tanto, la nueva figura es:

$$A'(-5,3), B'(-7,0), C(-2,-1), D(-1,2).$$



$\square$

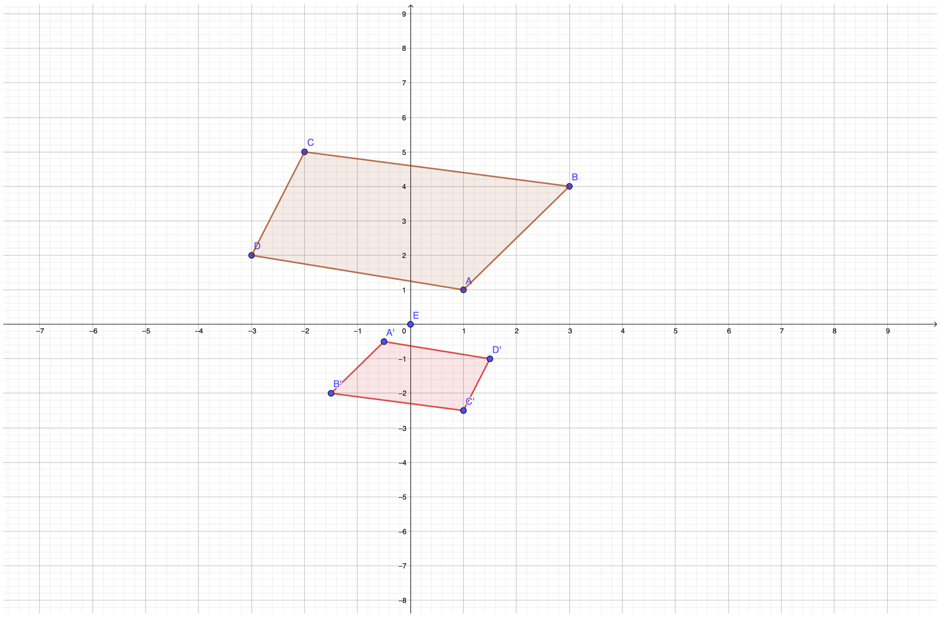
c) *Homotecia respecto al origen* $(0,0)$ *de* $k = -(0{,}5)$.

Solución. Usuaremos la ecuación siguiente para hacer la hometecia:

$$H(x,y) = (k(x-a)+a, k(y-b)+b)\,, \quad k = factor, (a,b) = punto.$$

Por lo que tenemos:

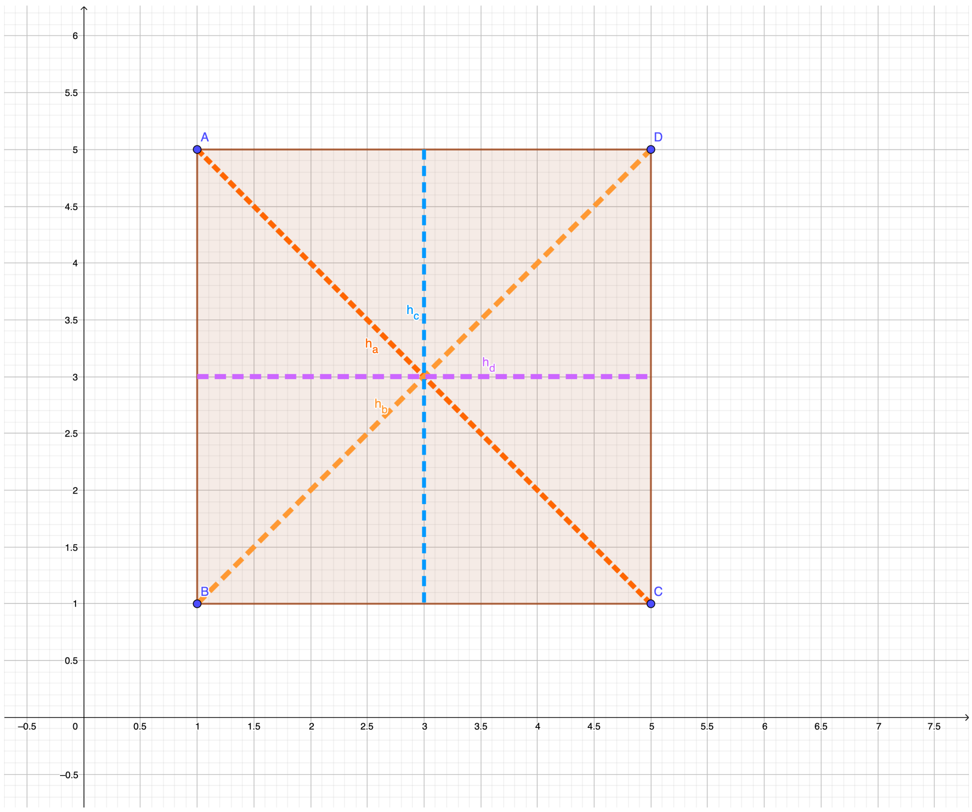
$$\begin{aligned} H(x,y) &= (-0{,}5(x), -0{,}5(y)) \\ A'(1,1) &= (-0{,}5(1), -0{,}5(1)) = (-1/2, -1/2) \\ B'(3,4) &= (-0{,}5(3), -0{,}5(4)) = (-3/2, -2) \\ C'(-2,5) &= (-0{,}5(-2), -0{,}5(5)) = (1, -5/2) \\ D'(-3,2) &= (-0{,}5(-3), -0{,}5(2)) = (3/2, -1) \end{aligned}$$



□

Problema 2. *Dado un cuadrado determinar las transformaciones que llevan al cuadrado sobre el mismo. Luego completar la tabla con la composición de transformaciones como lo hicimos con el triángulo equilátero.*

Solución. Se propone encontrar los ejes de simetría del cuadrado por medio de sus bisectrices y mediatrices, tal que



Entonces, una de sus transformaciones que llevan al cuadrado sobre el mismo es:

$$\mathrm{Rot}(H, 360°).$$

Nombraremos el cuadrado como: $\square ABCD$, procedemos a hacer el cuadro:

$\boldsymbol{0}$	$\underline{R_0}$	$\underline{R_{90}}$	$\underline{R_{180}}$	$\underline{R_{270}}$	$\underline{h_d}$	$\underline{h_c}$	$\underline{h_a}$	$\underline{h_b}$
$\underline{R_0}$	R_0	R_{90}	R_{180}	R_{270}	h_d	h_c	h_a	h_b
$\underline{R_{90}}$	R_{90}	R_{180}	R_{270}	R_0	h_b	h_a	h_d	h_c
$\underline{R_{180}}$	R_{180}	R_{270}	R_0	R_{90}	h_c	h_d	h_b	h_a
$\underline{R_{270}}$	R_{270}	R_0	R_{90}	R_{180}	h_a	h_b	h_c	h_d
$\underline{h_d}$	h_d	h_a	h_c	h_b	R_0	R_{180}	R_{90}	R_{270}
$\underline{h_c}$	h_c	h_b	h_d	h_a	R_{180}	R_0	R_{270}	R_{90}
$\underline{h_a}$	h_a	h_c	h_b	h_d	R_{270}	R_{90}	R_0	R_{180}
$\underline{h_b}$	h_b	h_d	h_a	h_c	R_{90}	R_{270}	R_{180}	R_0

□

Problema 3. *Dado el poligono cuyos vértices se encuentran en los puntos:*

$$A = (3,3), B = (5,1), \quad C = (7,1), \quad D = (9,3), E = (9,5)$$

Aplique las siguientes transformaciones:

1. *Rotación* $= \mathrm{rot}\,(\mathrm{D}, 90°)$
2. *Reflexión:* Ref $\overrightarrow{AE}$
3. *Traslación* $= \mathrm{Tra}(\overrightarrow{AC})$
4. *Homotecia* $= \mathrm{Hom}\left(O(0,0), k = \frac{1}{2}\right)$

En el siguiente orden:

$$\mathrm{rot}\,(D, 90°) \circ \mathrm{Ref}\,\overrightarrow{AE} \circ \mathrm{Tra}(\overrightarrow{AC}) \circ \mathrm{Hom}\left(\mathrm{O}(0,0), \mathrm{k} = \frac{1}{2}\right)$$

Solución. Aplicando las siguientes transformaciones:

1. Rotación $= \mathrm{rot}\,(\mathrm{D}, 90°)$ - Celeste
2. Reflexión: Ref $\overrightarrow{AE}$ - Naranja
3. Traslación $= \mathrm{Tra}(\overrightarrow{AC})$- Verde
4. Homotecia $= \mathrm{Hom}\left(O(0,0), k = \frac{1}{2}\right)$ - Morado

Comenzamos con la **homotecia**:

$$\begin{cases} H(x,y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y) \\ A'(3,3) = (3/2, 3/2) \\ B'(5,1) = (5/2, 1/2) \\ C'(7,1) = (7/2, 1/2) \\ D'(9,3) = (9/2, 3/2) \\ E'(9,5) = (9/2, 5/2) \end{cases}$$

Traslación, definida como Tra $\overrightarrow{AC} = (7-3, 1-3) = (4, -2)$

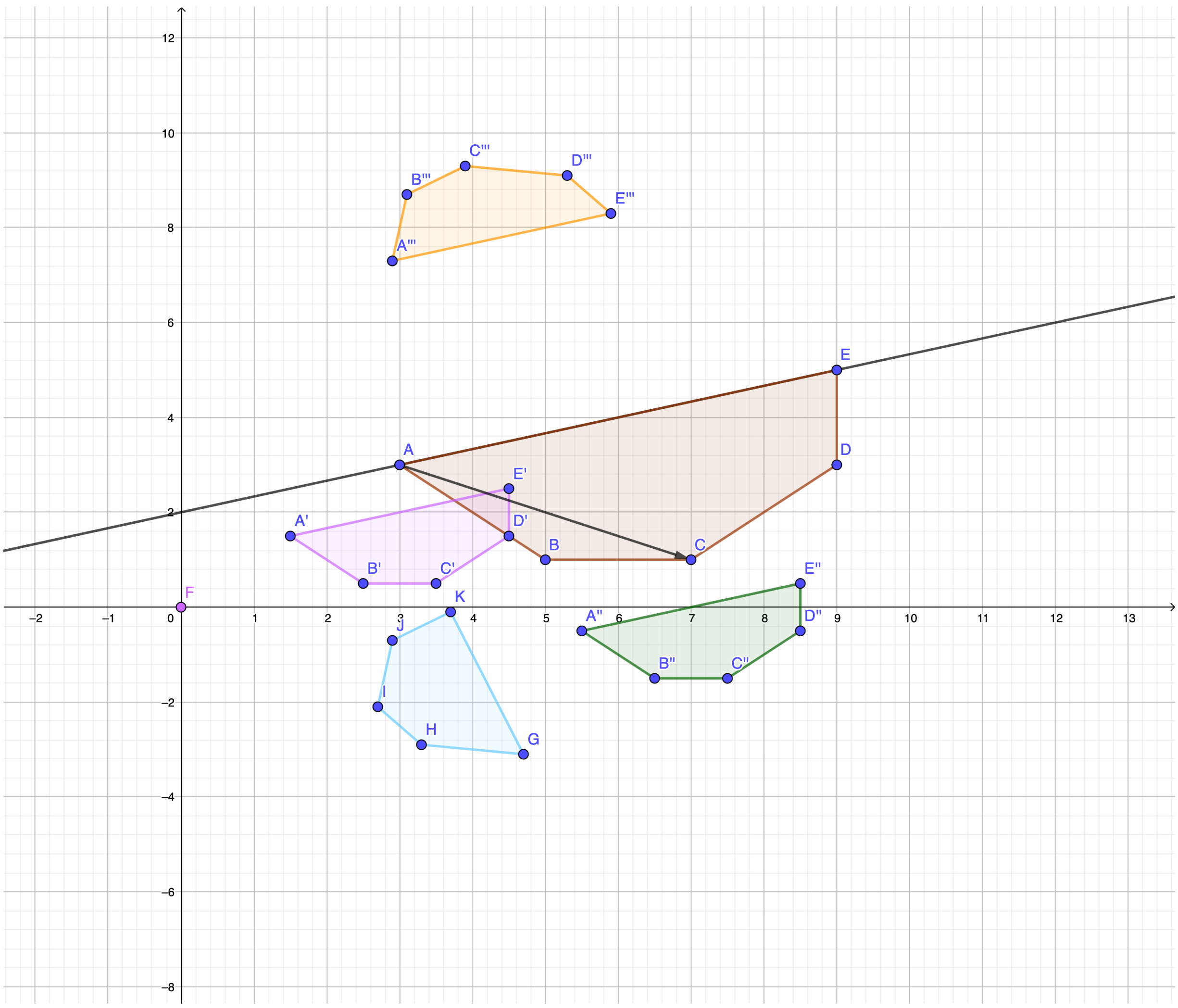
$$\begin{cases} \text{Tra}(x'', y'') = (x''+4, y''-2) \\ A''(3/2, 3/2) = (11/2, -1/2) \\ B''(5/2, 1/2) = (13/2, -3/2) \\ C''(7/2, 1/2) = (15/2, -3/2) \\ D''(9/2, 3/2) = (17/2, -1/2) \\ E''(9/2, 5/2) = (17/2, 1/2) \end{cases}$$

Reflexión, la reflexión sobre la recta se obtiene con el (p, q) respecto a la recta $ay+bx+c = 0$ definido como

$$\left(\frac{p(a^2-b^2) - 2b(aq+c)}{a^2+b^2}, \frac{q(b^2-a^2) - 2a(bp+c)}{a^2+b^2} \right)$$

Finalmente, la **rotación**, se obtiene con (ángulos en radianes):

$$X = B_X + (A_X - B_X)\cos\phi - (A_Y - B_Y)\sin\phi$$
$$Y = B_Y + (A_X - B_X)\sin\phi + (A_Y - B_Y)\cos\phi$$



□

Problema 4. *Si A,B y C son puntos colineales distintos, P,Q y R son los puntos medios de* BC, CA *y* AB *respectivamente muestre que el punto medio de CR coincide con el punto medio de PQ (Haga una construcción)*

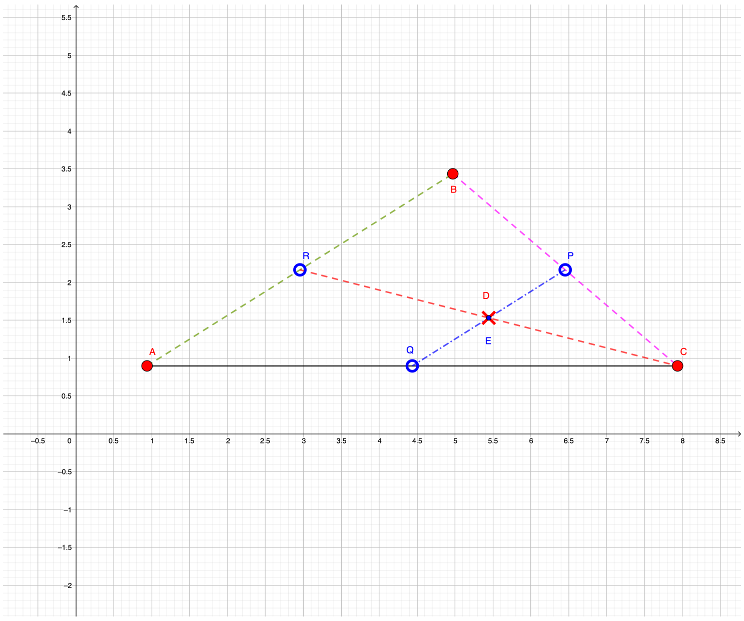


Figura 1: Construcción

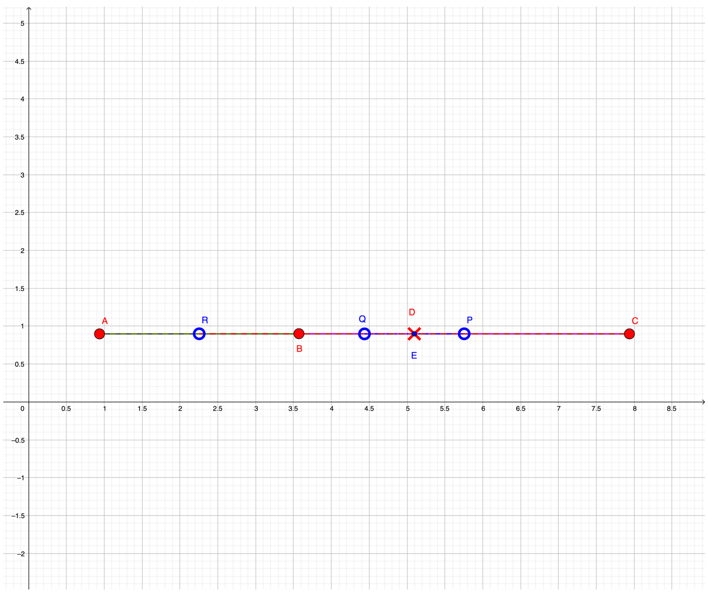


Figura 2: Construcción

Demostración. Vamos a considerar la definición de punto medio como:

$$M = \frac{1}{2}(A + B).$$

Por hipótesis, tenemos 3 puntos medio definidos como:

$$P = \frac{1}{2}(B + C), Q = \frac{1}{2}(C + A), R = \frac{1}{2}(A + B).$$

Ahora bien, nos piden mostrar que

$$D = \frac{1}{2}(C+R), E = \frac{1}{2}(P+Q) \ni D = E.$$

Por lo que procedemos a calcular D y E:

- $D = \frac{1}{2}(C+R) = \frac{1}{2}\left[C + \frac{1}{2}(A+B)\right] = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{2}C.$
- $E = \frac{1}{2}(P+Q) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(B+C) + \frac{1}{2}(A+C)\right] = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{2}C$

$$\therefore\ D = E.$$

■

Problema 5. *Muestre que si P es el punto medio de BC en el triángulo ABC, y si AB es menor que AC entonces el ángulo PAC es menor que el ángulo BAP.*

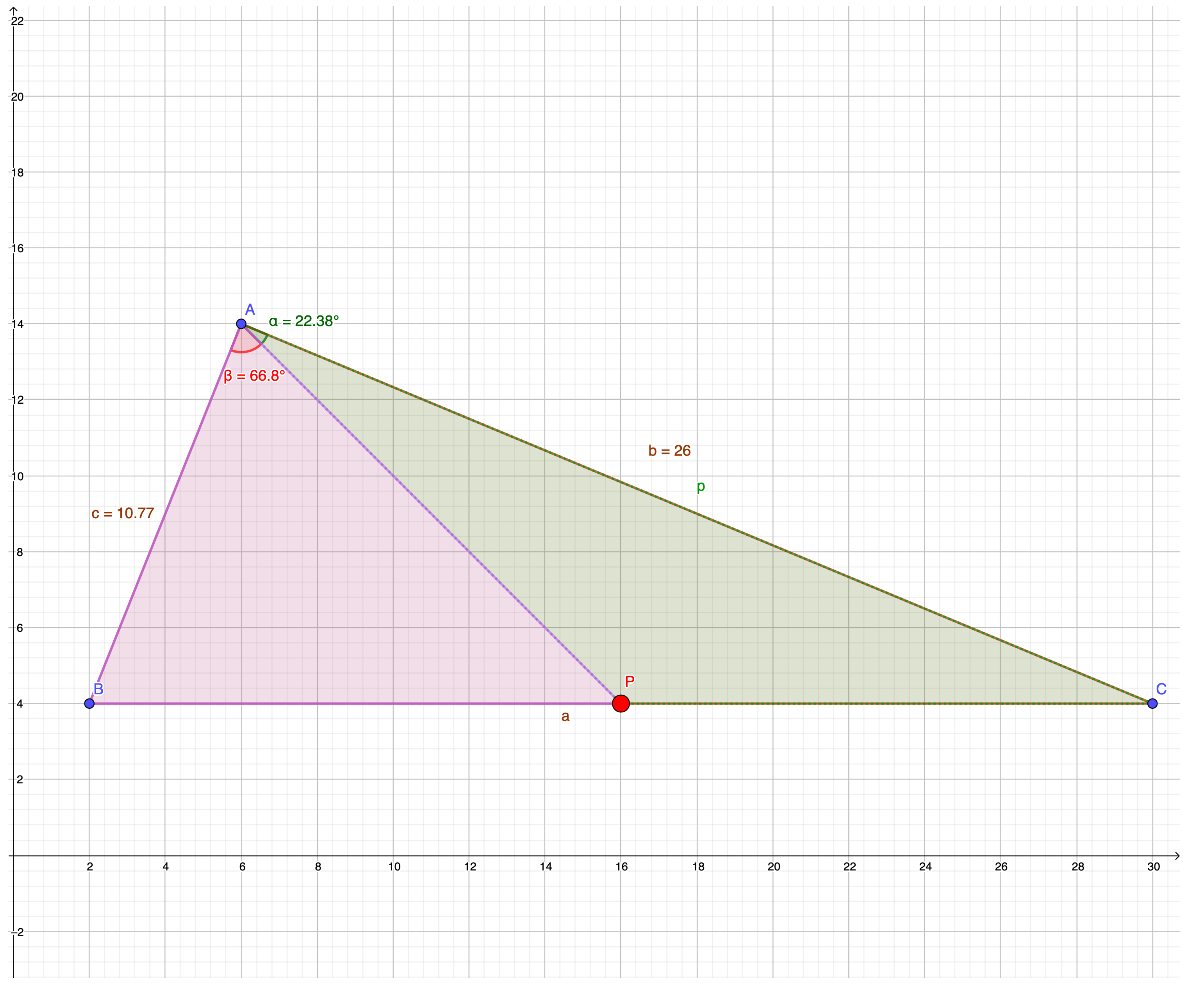


Figura 3: Construcción

Demostración. Dado un $\triangle ABC$. A probar: $\angle PAC < \angle BAP$. Por hipótesis tenemos: $P = \frac{1}{2}(B+C)$, que también se podría expresar como $BP = PC$ y $AB < AC$. Ahora bien, notamos que la condición se cumple trivialmente por el teorema de la bisectriz generalizado tal que,

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB \operatorname{sen} BAP}{CA \operatorname{sen} PAC} \implies \frac{CA}{AB} = \frac{\operatorname{sen} BAP}{\operatorname{sen} PAC}.$$

$\therefore$ Por proporcionalidad, $\angle PAC < \angle BAP$.

$\blacksquare$