Universidad del Valle de Guatemala

MM2034 - 2 semestre - 2021

Licenciatura en matemática aplicada

GEOMETRÍA MODERNA

Catedrático: María Eugenia Pinillos

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay
Carné: 19857
Correo: rom19857@uvg.edu.gt

20 de julio de 2021

Índice

1. Sesión 1

1.1. Transformaciones en el plano

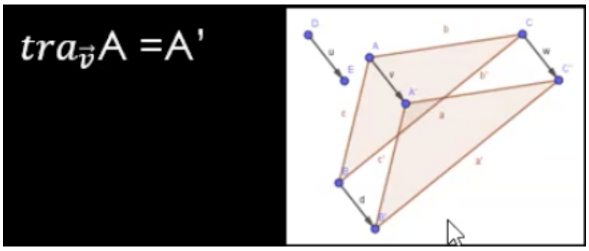
Definición 1. *1. Una transformación en el plano es una función que le asigna a cada punto en el plano otro punto en el plano al cuál llamaremos imagen.*

2. Una transformación a una figura en el plano obtenemos una nueva figura que llamaremos la transformada.

1.1.1. Clases

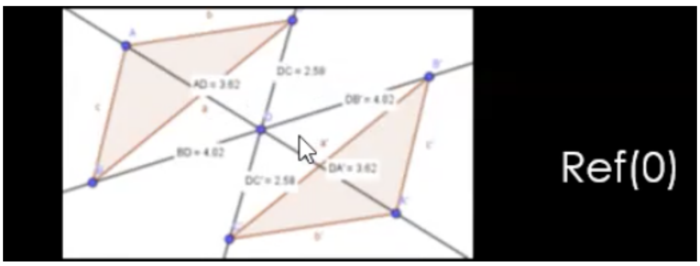
1. **Isométricas**: transformaciones que conservan **la forma, las longitudes, las áreas y ángulos(en magnitud) de una figura.**

   a) **Traslación**: Sea A un punto en el plano y $\vec{v}$ un vector, una traslación en el plano se dará cuando cada punto de la figura se mueva en la dirección de $\vec{v}$.

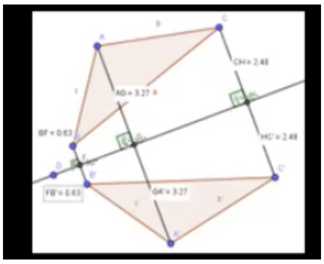


   b) **Reflexión o Simetría:** Existen dos clases de reflexiones.

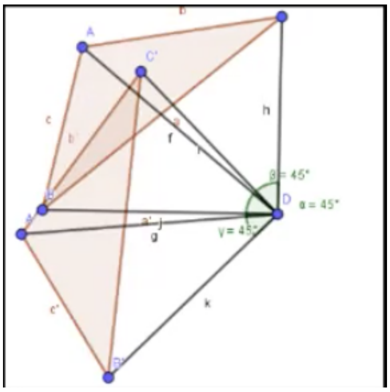
   1) **Puntual o central:** Cuando reflejamos una figura respecto a un punto. $[Ref(0)]$



   2) **Axial:** Reflejamos la figura respecto a una recta, llamada eje de reflexión. $[Ref(I)]$



c) **Rotación**: Es una transformación que cambia la dirección de una figura, en este caso se tiene un punto fijo 0 y un ángulo constante (positivo o negativo). La distancia del punto al 0 es constante.



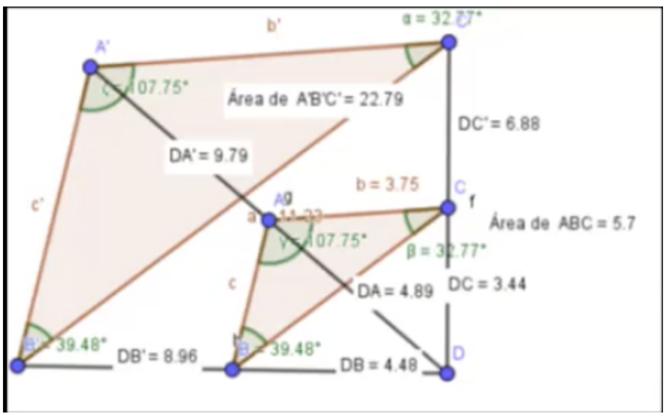
2. **No isométricas**: son aquellas transformaciones que alteran la forma y dimensión de la figura.

   a) **Homotecia**: es una transformación en la que se obtiene una figura a escala de la original, se necesita un punto fijo 0 y una constante de proporcionalidad k.

      1) Cambia longitudes y áreas pero conserva ángulos.

      2) Si $k > 0$ conserva la dirección.

      3) Si $k < 0$ se obtiene la dirección opuesta.



1.1.2. Notación

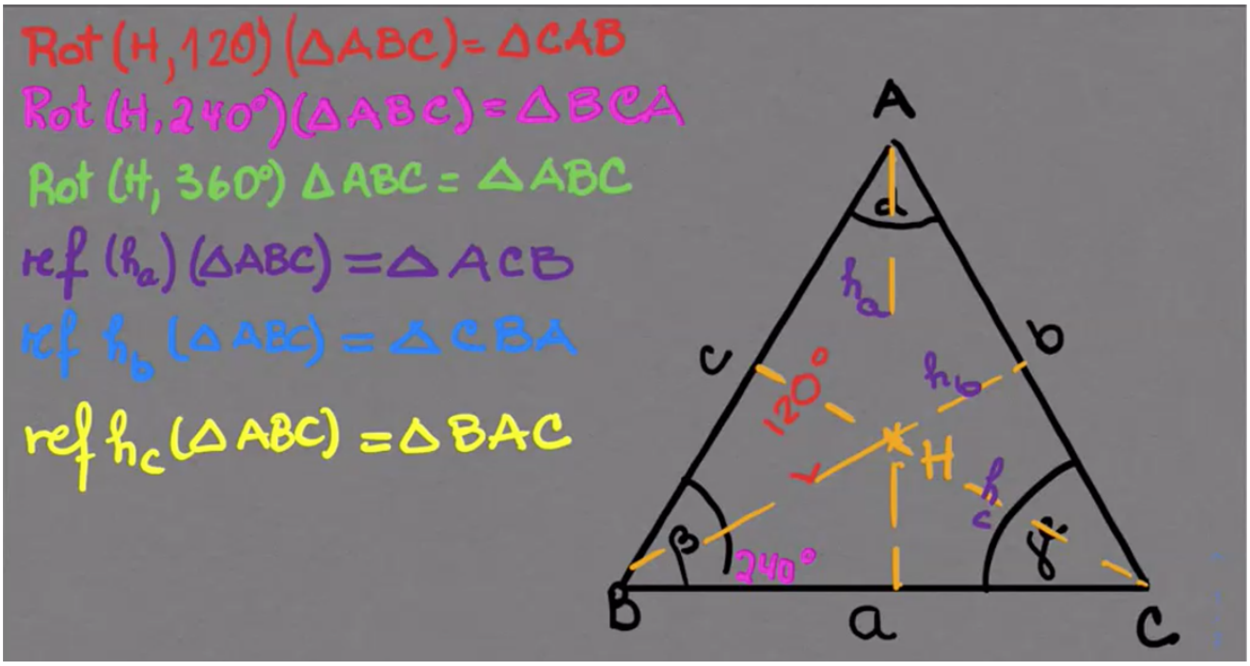
Isométricas

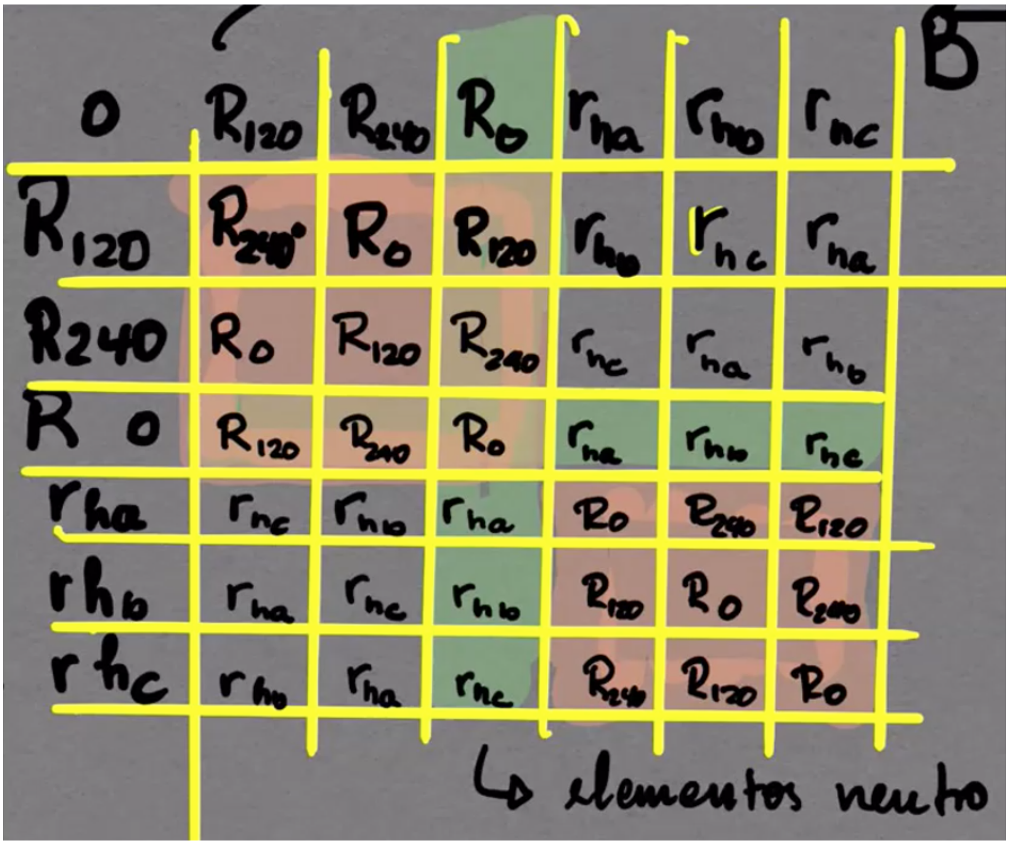
1. Traslación: Tra $\overrightarrow{AB}$.
2. Reflexión:
   a) Ref(0).
   b) Ref(l).
3. Rotación: Rot(A, θ).
4. Homotecia: Hom(A, k).

Ejemplo 1.

$$\triangle \text{ABC}: \quad \text{Hom}(A'', 2) \circ \text{rot}(0, 30°) \circ \text{Rel}(B)$$

2. Sesión 2





o	R_{120}	R_{240}	R_0	r_{ha}	r_{hb}	r_{hc}
R_{120}	R_{240}	R_0	R_{120}	r_{hb}	r_{hc}	r_{ha}
R_{240}	R_0	R_{120}	R_{240}	r_{hc}	r_{ha}	r_{hb}
R_0	R_{120}	R_{240}	R_0	r_{ha}	r_{hb}	r_{hc}
r_{ha}	r_{hc}	r_{hb}	r_{ha}	R_0	R_{240}	R_{120}
r_{hb}	r_{ha}	r_{hc}	r_{hb}	R_{120}	R_0	R_{240}
r_{hc}	r_{hb}	r_{ha}	r_{hc}	R_{240}	R_{120}	R_0

3. Sesión 3

1.1 SEGMENTOS LINEALES DIRIGIDOS

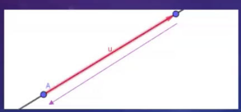
- Sea l una línea recta
- A,B puntos que pertenecen a l (A,B ϵ l)
- Llamamos $\overline{AB}$ segmento de l

SEGMENTO DIRIGIDO

- En la geometría elemental, lo que más utilizamos es la longitud del segmento.
- Para nuestro curso vamos a necesitar el concepto de segmentos dirigidos, es decir vamos a considerar una dirección

SEGMENTOS DIRIGIDOS

- El segmento dirigido de A a B lo indicamos $\overrightarrow{AB}$



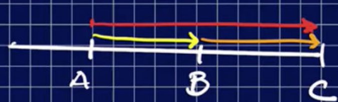
- El segmento dirigido de B a A lo indicamos como $\overrightarrow{BA}$

PROPIEDADES

- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ o $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0$
- $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$
- Sean A,B,C ϵ l
- $\Rightarrow \overrightarrow{AB}+ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}=0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}= -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
- Un segmento dirigido puede tener longitud cero $|\overrightarrow{AB}|$=0 si $A = B$

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0 \\ \overrightarrow{AA} = 0 \end{cases}$

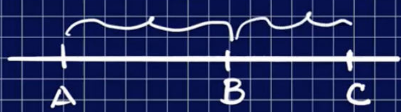
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Teoría Matemática
- Objetos
- Axiomas
- Teoremas
- Definiciones

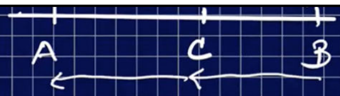
A B C

Sean A, B, C $\in l$ (puntos colineales)



ii) $\underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

$\underbrace{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}} = \vec{0}$



Definir $|\vec{AB}|$ longitud

Propiedades:

$$|\vec{AB}| = |\vec{BA}|$$

$$|\vec{AB}| = 0 \Rightarrow A = B$$

1 Teorema de Euler:

Sean $A, B, C, D \in \ell \Rightarrow$

$$\vec{AB}\cdot\vec{CD} + \vec{AC}\cdot\vec{DB} + \vec{AD}\cdot\vec{BC} = 0$$

Demostrar:

$$\vec{AB}\cdot\vec{CD} + \vec{AC}\cdot\vec{DB} + \vec{AD}\cdot\vec{BC} = 0$$

Demostración:

Expresemos todos los segmentos dejando un punto fijo:

$$\vec{AB}\,\vec{CD} + (\vec{AB}+\vec{BC})(\vec{DC}+\vec{CB}) + (\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD})\,\vec{BC}$$

$$\cancel{\vec{AB}\,\vec{CD}} + \cancel{\vec{AB}\,\vec{DC}} + \cancel{\vec{AB}\,\vec{CB}} + \cancel{\vec{BC}\cdot\vec{DC}} + \cancel{\vec{BC}\,\vec{CB}}$$

$$+ \cancel{\vec{AB}\,\vec{BC}} + \cancel{\vec{BC}\,\vec{BC}} + \cancel{\vec{CD}\,\vec{BC}}$$

$$= 0$$

Otra forma:

$$\vec{AB}(\vec{CA}+\vec{AD}) + AC(DA+AB)$$

$$\cancel{\vec{AB}\,\vec{CD}} + \cancel{\vec{AB}\,\vec{DC}} + \cancel{\vec{AB}\,\vec{CB}} + \cancel{\vec{BC}\cdot\vec{DC}} + \cancel{\vec{BC}\,\vec{CB}}$$

$$+ \cancel{\vec{AB}\,\vec{BC}} + \cancel{\vec{BC}\,\vec{BC}} + \cancel{\vec{CD}\,\vec{BC}}$$

$$= 0$$

Otra forma:

$$\vec{AB}(\vec{CA}+\vec{AD}) + \vec{AC}(\vec{DA}+\vec{AB}) + AD(\vec{BA}+\vec{AC})$$

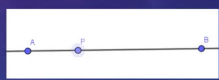
$$\cancel{\vec{AB}\cdot\vec{CA}} + \cancel{\vec{AB}\,\vec{AD}} + \cancel{\vec{AC}\cdot\vec{DA}} + \cancel{\vec{AC}\,\vec{AB}} + \cancel{\vec{AD}\,\vec{BA}} + \cancel{\vec{AD}\,\vec{AC}}$$

$$= 0$$

PARTICIÓN DE UN SEGMENTO DE LINEA

- Sea l una línea, A,B $\in l$, $A \neq B$ $\quad$ *Tomemos el segmento* $\overrightarrow{AB}$
- Sea P $\in$ $\overrightarrow{AB}$

1. P se encuentra entre A y B



2. P se encuentra fuera del segmento

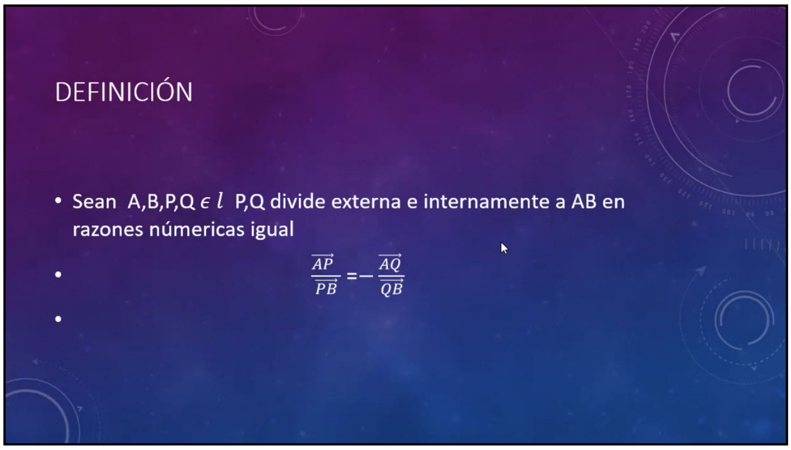
DEFINICIÓN

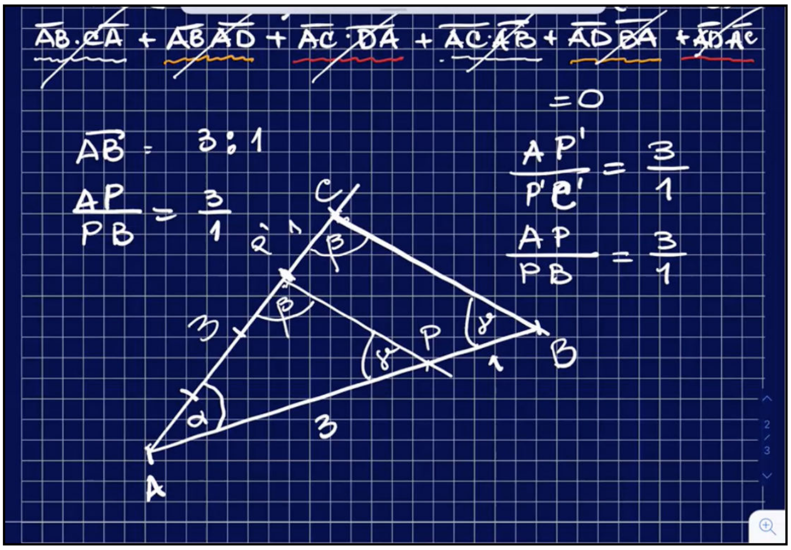
Se dice que P divide el segmento AB en la razón $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = k$

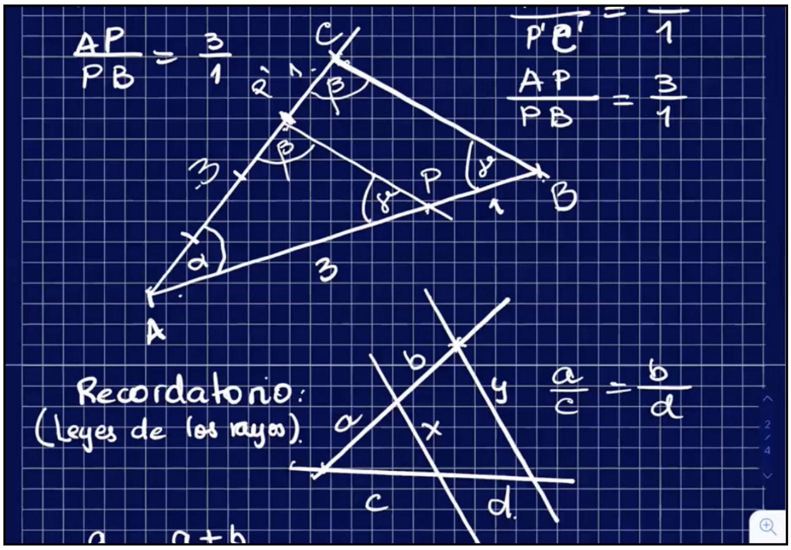
1. Si P está en el interior de AB, entonces k>0 (división interna)
2. Si P está en el exterior de AB entonces k<0 (división externa)

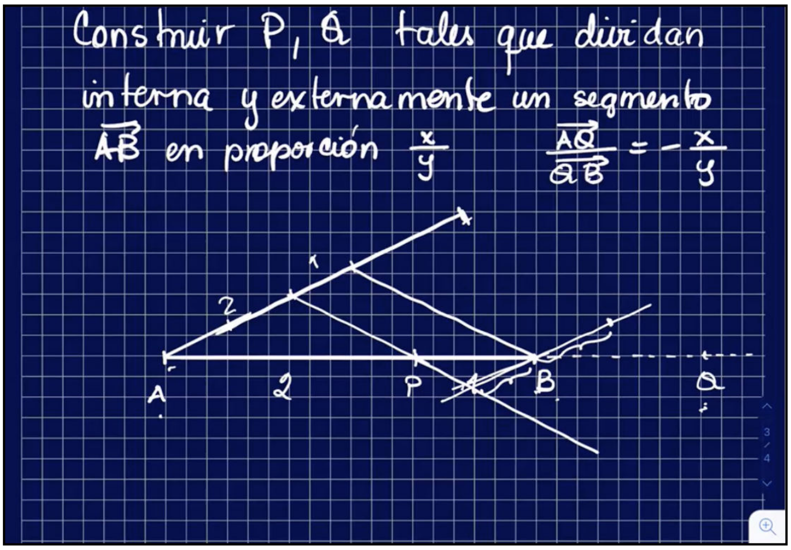
DIVISIÓN IMPROPIA

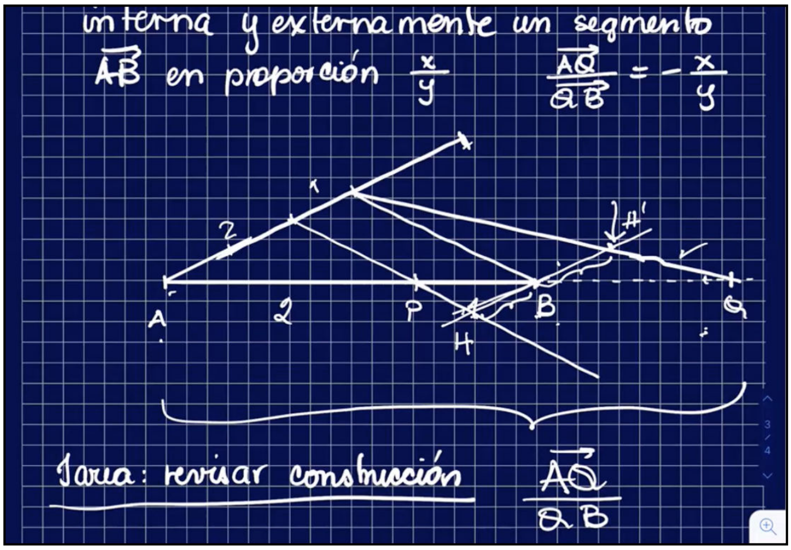
- Si P coincide con A o con B entonces decimos que P divide impropiamente el segmento AB, la razón puede ser 0 o ∞


DEFINICIÓN
• Sean A,B,P,Q ϵ l P,Q divide externa e internamente a AB en razones númericas igual
$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = -\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}}$


$\overline{AB}\cdot\overline{CA} + \overline{AB}\,\overline{AD} + \overline{AC}\cdot\overline{DA} + \overline{AC}\cdot\overline{AB} + \overline{AD}\,\overline{BA} + \overline{AD}\,\overline{AC} = 0$
$\overline{AB} = 3:1$
$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$
$\frac{AP'}{P'C'} = \frac{3}{1}$
$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$
C
B
A
P
3
1
3
α
β
γ

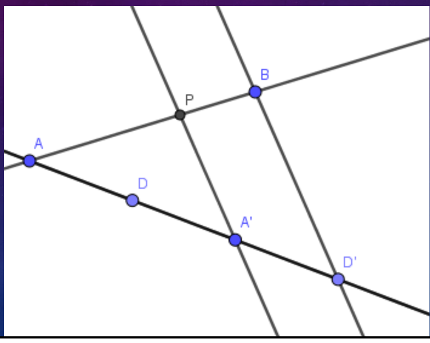

$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$
$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$
C
B
A
P
3
1
3
Recordatorio:
(Leyes de los rayos)
a
b
c
d
x
y
$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$


Construir P, Q tales que dividan interna y externamente un segmento $\overline{AB}$ en proporción $\frac{x}{y}$
$\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}} = -\frac{x}{y}$
A
2
P
B
Q
2
1


interna y externamente un segmento $\overline{AB}$ en proporción $\frac{x}{y}$
$\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}} = -\frac{x}{y}$
A
2
P
B
Q
H
H'
2
1
Tarea: revisar construcción
$\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}}$

4. Sesión 4 y Sesión 5

CONSTRUCCIÓN DE RAZONES



EJERCICIOS

- Sea AB=8 Obtenga el punto P que divide AB en proporción 3:1
- Determine el punto Q que divide el segmento AB en proporción 3:-1

ÁNGULOS DIRIGIDOS

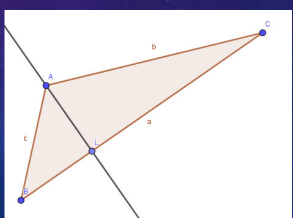
- Decimos que un ángulo es positivo si lo medimos encontra del movimiento de las agujas de un reloj.
- De lo contrario es un ángulo negativo
- El definir ángulos dirigidos nos ayudan para evitar ambigüedades .

TEOREMA DE LA BISECTRIZ

- La bisectriz de un ángulo en un triángulo, divide el lado opuesto en segmentos cuya razón es la misma a la de los lados adyacentes del ángulo.
- Hacer la demostración

TEOREMA DE LA BISECTRIZ GENERALIZADO

- Si el vértice A del triángulo ABC es unido a cualquier punto L en la línea BC entonces
- $\frac{BL}{LC} = \frac{AB \sin BAL}{CA \sin LAC}$
- Demostrar



PUNTOS AL INFINITO

- Sean AB y CD dos lineal paralelas, llamaremos punto al infinito, al punto donde se intersectan AB y CD

RECTA AL INFINITO

- Cada conjunto de líneas rectas paralelas en el plano tienen un punto al infinito esto nos lleva a inferir que todos estos puntos se encuentran sobre una línea que llamaremos línea al infinito

HILERA Y ACES

- Definición:
- Puntos que se encuentran en la misma línea se denominan puntos colineales
- Un número finito de puntos colineales lo llamamos hilera de puntos
- La línea donde se encuentran los puntos se conoce como la base de la hilera
- Todas las rectas que pasan por un mismo punto se llaman líneas concurrentes
- Un número finito de rectas concurrentes lo llamaremos haz
- Una línea de un haz se denomina rayo, el punto concurrente es el vértice
- Si el haz está formado por rectas paralelas el vértice es el punto al infinito.

SEMEJANZA

- Definición:Dos polígonos con el mismo número de lados son *semejantes,* si sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes iguales.
- Los polígonos pueden ser directamente semejantes, cuando conservan su orientación, o inversamente semejantes cuando la invierten.

HOMOTECIA

- Ya vimos cuando trabajamos las transformaciones en el plano que la homotecia produce objetos que conservan ángulos y que los lados de la nueva figura son proporcionales con los de la figura original, esto quiere decir que la homotecia está produciendo figuras semejantes.

PROPIEDADES

- Sean A;B;C tres puntos colineales en el lado de una polígono, al aplicarle una homotecia las imágenes A';B';C' también son colineales y las rectas que los contienen son paralelas. ¿Por qué?

HOMOTECIAS

- Sabemos que en una homotecia necesitamos un punto fijo llamado centro de Homotecia o *centro de similitud*, 0, y la constante k que nos indica que proporción tendrán los lados entre sí, llamada razón de homotecia o razón de *similitud*

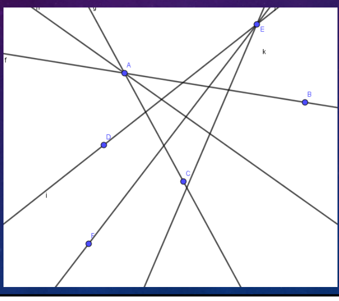
SIMETRÍA CON RESPECTO A UN PUNTO

- La reflexión puntual, otra de las transformaciones que vimos, puede ser trabajada como una homotecia donde la $k = -1$, a ella se le denomina simetría puntual.
- Algunas figuras conocidas tienen simetría puntual:
- a. En un circunferencias cada semicircunferencia es simétrica respecto al centro del círculo
- El cuadrado, el rectángulo y el rombo son ejemplos de polígonos simétricos respecto a su centro

LÍNEAS ANTIPARALELAS

- Se tienen dos pares de líneas, la bisectriz de uno de los pares de líneas interseca el otro par, si los ángulos interiores en el mismo lado de la transversal son iguales, entonces decimos que el segundo par de líneas son antiparalelas entre sí con respecto al primer par .

ANTIPARALELAS



PROPIEDADES

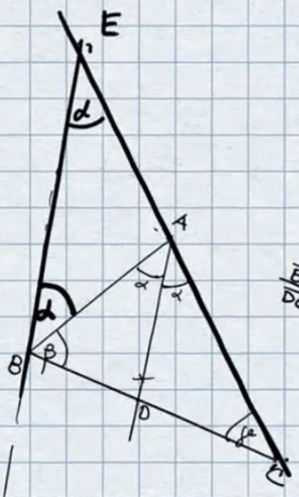
- Si una de las antiparalelas se refleja sobre la bisectriz entonces queda paralela a la otra.
- Las bisectrices de cada par de líneas son perpendiculares entre sí.
- Si a,b son antiparalelas entre sí respecto a c,d entonces c,d son antiparalelas entre sí respecto a a,b
- (explique cada una de las propiedades)

EJEMPLOS

- En una triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa y uno de los catetos son antiparalelas respecto a la hipotenusa y el otro cateto.
- Los lados no paralelos de un trapecio regular son antiparalelos respecto a los lados paralelos
- (construya las figuras y verifique)

$\triangle CAD \approx \triangle CEB$

$$\frac{CA}{CD} = \frac{AE}{DB}$$



$\overline{FB} \parallel \overrightarrow{AD}$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}$$

$$\overline{AB} = \overrightarrow{EA}$$

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}$$

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$$

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$$

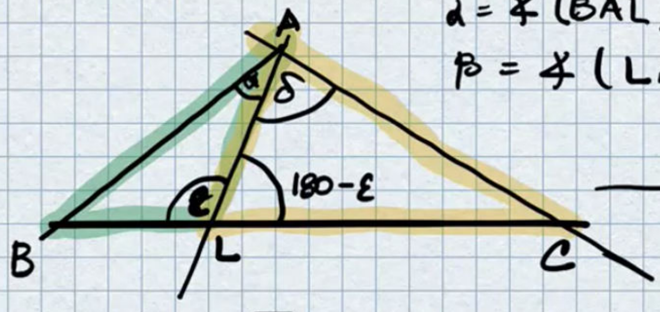
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$$

Teorema Generalizado:

$\operatorname{sen} \varepsilon = \operatorname{sen}(180-\varepsilon)$

$\alpha = \measuredangle(BAL)$

$\beta = \measuredangle(LAC)$



A demostrar: $\dfrac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \dfrac{AB \operatorname{sen} \alpha}{CA \operatorname{sen} \delta}$

Usando ley de senos:

$\triangle ABL \Rightarrow \dfrac{BL}{AB} = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \varepsilon}$

Recordatorio:
$\operatorname{sen} \varepsilon = \operatorname{sen}(180-\varepsilon)$

$\triangle ALC \Rightarrow \dfrac{LC}{CA} = \dfrac{\operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen}(180-\varepsilon)}$

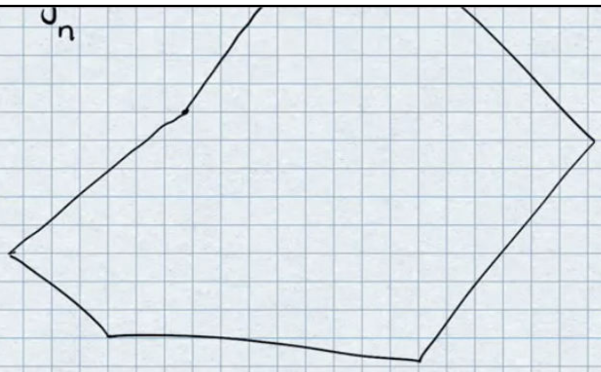
Despejamos:

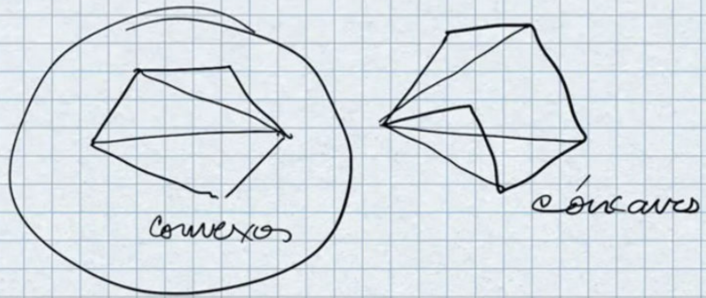
$$BL = \frac{AB \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \varepsilon}$$

$$LC = \frac{CA \cdot \operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen}(180-\varepsilon)}$$

dividimos

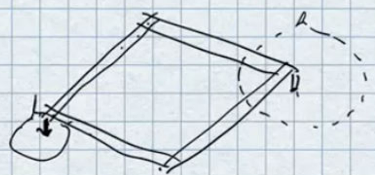
$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \frac{AB \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cancel{\operatorname{sen} \varepsilon}}}{CA \cdot \dfrac{\operatorname{sen} \delta}{\cancel{\operatorname{sen}(180-\varepsilon)}}} = \frac{\overline{AB} \operatorname{sen} \alpha}{CA \operatorname{sen} \delta}.$$





Paréntesis: Tarea (2) (Jueves 29.7.2021)

Pantógrafos:



Construir un pantógrafo.

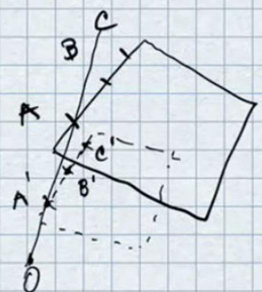
$2 \quad 3 \quad 4$

$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}$

Propiedades:

A, B, C colineales $A, B, C \in$ lado de un polígono
Si aplicamos una Homotecia $\Rightarrow A', B', C'$ (imágenes de A, B, C) también son colineales.
$l(A,B,C) \parallel l(A',B',C')$

A, B, C colineales $A, B, C \in$ lado de un polígono
Si aplicamos una Homotecia $\Rightarrow A', B', C'$ (imágenes de A, B, C) también son colineales.
$l(A,B,C) \parallel l(A',B',C')$



i) Si A, B, C son colineales
A', B', C' " "
donde A', B', C' son las imágenes correspondientes de una Homotecia.

ii) $l(A,BC) \parallel l(A'B'C')$

$\rightarrow -5.81x - 2.81y = 30.12$

$F = (-2.6, -5.23)$

$F' = \text{Homotecia}(F, 2, A)$
$\rightarrow (-1.14, -4.91)$

$E' = \text{Homotecia}(E, 2, A)$
$\rightarrow (-3.97, 0.7)$

$C' = \text{Homotecia}(C, 2, A)$
$\rightarrow (1.66, -10.91)$

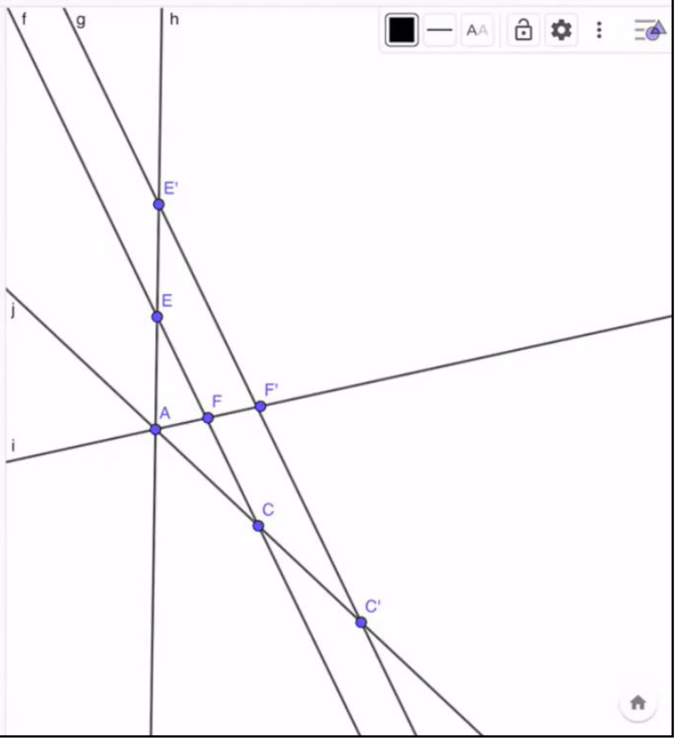
$g : \text{Recta}(E', C')$
$\rightarrow 11.61x + 5.63y = -42.1$

$h : \text{Recta}(A, E)$
$\rightarrow -3.13x + 0.05y = 12.43$

$i : \text{Recta}(A, F)$
$\rightarrow -0.32x + 1.46y = -6.8$

$j : \text{Recta}(A, C')$
$\rightarrow 5.36x + 5.72y = -53.51$

Entrada...



Sabemos:

i) E, F, C son colineales

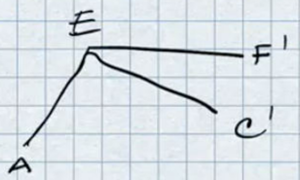
ii) Como se produjo $H(A, k)$

$\Rightarrow$ AEE' son colineales

AFF' " "

ACC' " "

$\Rightarrow$ podemos decir:



$$\frac{AE}{AE'} = \frac{AF}{AF'} = \frac{AC}{AC'} = \text{constante}$$

$\Rightarrow \triangle AEF \approx \triangle AE'F' \Rightarrow \measuredangle AEF \triangleq \measuredangle AE'F'$

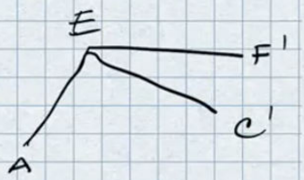
$\triangle AEC \approx \triangle A'E'C' \Rightarrow \measuredangle AEC \triangleq \measuredangle AE'C'$

$\Rightarrow$ AEE' son colineales

AFF' " "

ACC' " "

$\Rightarrow$ podemos decir:



$$\frac{AE}{AE'} = \frac{AF}{AF'} = \frac{AC}{AC'} = \text{constante}$$

$\Rightarrow \triangle AEF \approx \triangle AE'F' \Rightarrow \measuredangle AEF \triangleq \measuredangle AE'F'$

$\triangle AEC \approx \triangle A'E'C' \Rightarrow \measuredangle AEC \triangleq \measuredangle AE'C'$

Sabemos que E, F, C son colineales

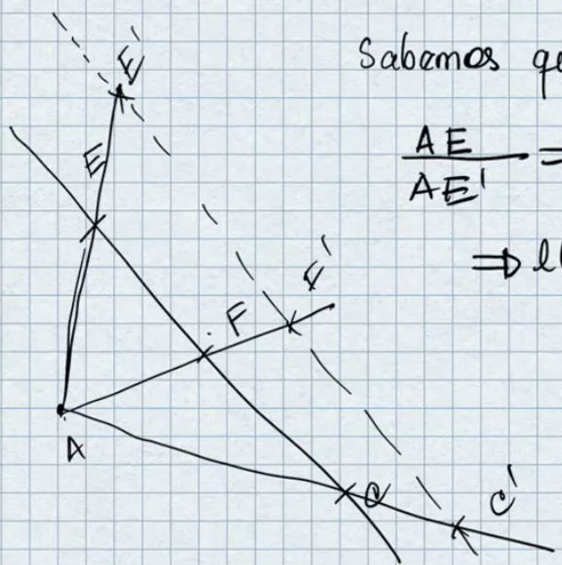
$\Rightarrow \measuredangle AEF \triangleq \measuredangle AEC$

$\therefore \measuredangle AE'F' \triangleq \measuredangle AE'C'$

$\Rightarrow$ E', F', C' son colineales.

$\Rightarrow E, F, C$ son colineales.

$\ell(E,F,C) \parallel \ell(E',F',C')$



Sabemos que

$$\frac{AE}{AE'} = \frac{AF}{AF'} \Rightarrow EF \parallel E'F'$$

$$\Rightarrow \ell(EFC) \parallel \ell(E'F'C')$$