

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE  
GUATEMALA

MM2034 - 2 SEMESTRE - 2021

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA APLICADA

---

# GEOMETRÍA MODERNA

Catedrático: María Eugenia Pinillos

---

*Estudiante:* Rudik Roberto Rompich Cotzoyaj

*Carné:* 19857

*Correo:* rom19857@uvg.edu.gt

20 de julio de 2021

# Índice

<b>1 Sesión 1</b>	<b>1</b>
1.1 Transformaciones en el plano . . . . .	1
1.1.1 Clases . . . . .	1
1.1.2 Notación . . . . .	3
<b>2 Sesión 2</b>	<b>4</b>
<b>3 Sesión 3</b>	<b>4</b>
<b>4 Sesión 4 y Sesión 5</b>	<b>8</b>

# 1. Sesión 1

## 1.1. Transformaciones en el plano

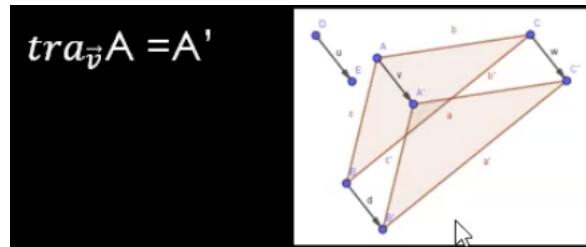
**Definición 1.** 1. Una transformación en el plano es una función que le asigna a cada punto en el plano otro punto en el plano al cuál llamaremos imagen.

2. Una transformación a una figura en el plano obtenemos una nueva figura que llamaremos la transformada.

### 1.1.1. Clases

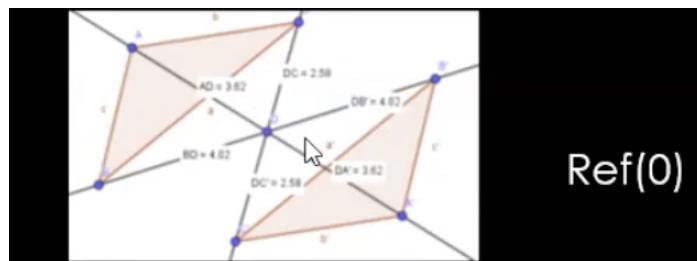
1. **Isométricas:** transformaciones que conservan la forma, las longitudes, las áreas y ángulos(en magnitud) de una figura.

a) **Traslación:** Sea  $A$  un punto en el plano y  $\vec{v}$  un vector, una traslación en el plano se dará cuando cada punto de la figura se mueva en la dirección de  $\vec{v}$ .

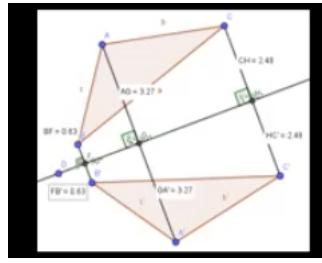


b) **Reflexión o Simetría:** Existen dos clases de reflexiones.

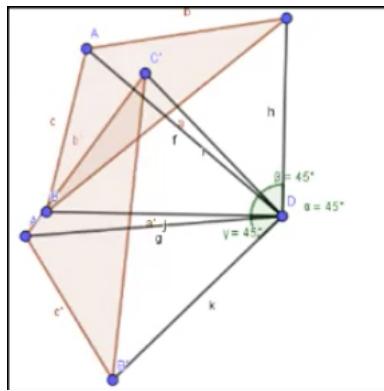
1) **Puntual o central:** Cuando reflejamos una figura respecto a un punto.  $[Ref(0)]$



2) **Axial:** Reflejamos la figura respecto a una recta, llamada eje de reflexión.  $[Ref(I)]$



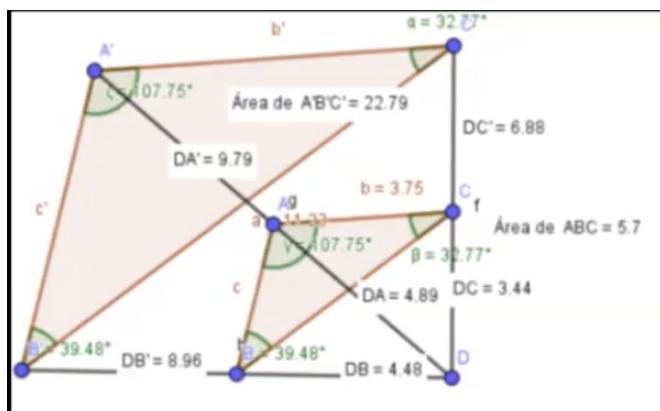
- c) **Rotación:** Es una transformación que cambia la dirección de una figura, en este caso se tiene un punto fijo 0 y un ángulo constante (positivo o negativo). La distancia del punto al 0 es constante.



2. **No isométricas:** son aquellas transformaciones que alteran la forma y dimensión de la figura.

- a) **Homotecia:** es una transformación en la que se obtiene una figura a escala de la original, se necesita un punto fijo 0 y una constante de proporcionalidad  $k$ .

- 1) Cambia longitudes y áreas pero conserva ángulos.
- 2) Si  $k > 0$  conserva la dirección.
- 3) Si  $k < 0$  se obtiene la dirección opuesta.



### 1.1.2. Notación

#### Isométricas

1. Traslación:  $\text{Tra } \overrightarrow{AB}$ .

2. Reflexión:

a)  $\text{Ref}(0)$ .

b)  $\text{Ref}(l)$ .

3. Rotación:  $\text{Rot}(A, \theta)$ .

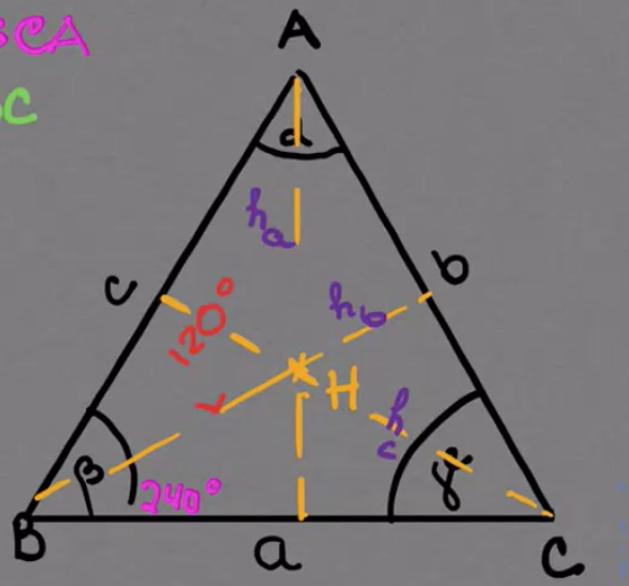
4. Homotecia:  $\text{Hom}(A, k)$ .

#### Ejemplo 1.

$$\triangle ABC : \quad \text{Hom}(A'', 2) \circ \text{rot}(0, 30^\circ) \circ \text{Rel}(B)$$

## 2. Sesión 2

$\text{Rot}(H, 120^\circ)(\Delta ABC) = \Delta CAB$   
 $\text{Rot}(H, 240^\circ)(\Delta ABC) = \Delta BCA$   
 $\text{Rot}(H, 360^\circ) \Delta ABC = \Delta ABC$   
 $\text{ref } h_a(\Delta ABC) = \Delta ACB$   
 $\text{ref } h_b(\Delta ABC) = \Delta CBA$   
 $\text{ref } h_c(\Delta ABC) = \Delta BAC$



O	$R_{120}$	$R_{240}$	$R_O$	$r_{ha}$	$r_{hb}$	$r_{hc}$	B
$R_{120}$	$R_{240}$	$R_O$	$R_{120}$	$r_{ha}$	$r_{hc}$	$r_{hb}$	
$R_{240}$	$R_O$	$R_{120}$	$R_{240}$	$r_{hc}$	$r_{ha}$	$r_{hb}$	
$R_O$	$R_{120}$	$R_{240}$	$R_O$	$r_{ha}$	$r_{hb}$	$r_{hc}$	
$r_{ha}$	$r_{nc}$	$r_{hb}$	$r_{ha}$	$R_O$	$R_{240}$	$R_{120}$	
$r_{hb}$	$r_{ha}$	$r_{nc}$	$r_{hb}$	$R_{120}$	$R_O$	$R_{240}$	
$r_{hc}$	$r_{hb}$	$r_{ha}$	$r_{hc}$	$R_{240}$	$R_{120}$	$R_O$	

↳ elementos neutro

## 3. Sesión 3

## 1.1 SEGMENTOS LINEALES DIRIGIDOS

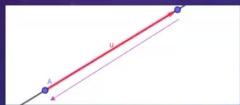
- Sea  $l$  una línea recta
- $A, B$  puntos que pertenecen a  $l$  ( $A, B \in l$ )
- Llamamos  $\overrightarrow{AB}$  segmento de  $l$

## SEGMENTO DIRIGIDO

- En la geometría elemental, lo que más utilizamos es la longitud del segmento.
- Para nuestro curso vamos a necesitar el concepto de segmentos dirigidos, es decir vamos a considerar una dirección

## SEGMENTOS DIRIGIDOS

- El segmento dirigido de  $A$  a  $B$  lo indicamos  $\overrightarrow{AB}$



- El segmento dirigido de  $B$  a  $A$  lo indicamos como  $\overrightarrow{BA}$

## PROPIEDADES

- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$  o  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$
- $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$
- Sean  $A, B, C \in l$
- $\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
- Un segmento dirigido puede tener longitud cero  $|\overrightarrow{AB}| = 0$  si  $A = B$

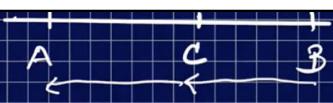
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= -\overrightarrow{BA} \Rightarrow \left\{ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}, \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0} \right. \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} \quad \left. \right\}\end{aligned}$$



Léxico Matemático  
 Objetos  
 Axiomas  
 Teoremas  
 Definiciones

Sean  $A, B, C \in l$  (puntos colineales)

$$\begin{aligned}ii) \quad \overbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}^{\overrightarrow{AC}} + \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{0} \\ \overbrace{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}}^{\overrightarrow{0}} &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$$



Definir  $|\vec{AB}|$  longitud

Propiedades:

$$|\vec{AB}| = |\vec{BA}|$$

$$|\vec{AB}| = 0 \Rightarrow A = B$$

Teorema de Euler:

Sean  $A, B, C, D \in l \Rightarrow$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$$

Demoststrar:

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$$

Demostración:

Expresamos todos los segmentos dejando un punto fijo:

~~$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} + (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot (\vec{DC} + \vec{CB}) + (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}) \cdot \vec{BC}$$~~

~~$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AB} \cdot \vec{DC} + \vec{AB} \cdot \vec{CB} + \vec{BC} \cdot \vec{DC} + \vec{BC} \cdot \vec{CB}$$~~

~~$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{BC} + \vec{CD} \cdot \vec{BC}$$~~

$$= 0$$

Otra forma:

$$\vec{AB}(\vec{CA} + \vec{AD}) + AC(ADA + \vec{AB})$$

~~$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AB} \cdot \vec{DC} + \vec{AB} \cdot \vec{CB} + \vec{BC} \cdot \vec{DC} + \vec{BC} \cdot \vec{CB}$$~~
~~$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{BC} + \vec{CD} \cdot \vec{BC}$$~~

$$= 0$$

Otra forma:

~~$$\vec{AB}(\vec{CA} + \vec{AD}) + \vec{AC}(\vec{DA} + \vec{AB}) + AD(\vec{BA} + \vec{AC})$$~~
~~$$\vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AC} \cdot \vec{DA} + \vec{AC} \cdot \vec{AB} + \vec{AD} \cdot \vec{BA} + \vec{AD} \cdot \vec{AC}$$~~

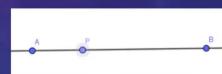
$$= 0$$

## PARTICIÓN DE UN SEGMENTO DE LÍNEA

- Sea  $l$  una línea,  $A, B \in l$ ,  $A \neq B$  Tomemos el segmento  $\overrightarrow{AB}$

- Sea  $P \in \overrightarrow{AB}$

1.  $P$  se encuentra entre  $A$  y  $B$



2.  $P$  se encuentra fuera del segmento



## DEFINICIÓN

Se dice que  $P$  divide el segmento  $AB$  en la razón  $\frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} = k$

1. Si  $P$  está en el interior de  $AB$ , entonces  $k > 0$  (división interna)
2. Si  $P$  está en el exterior de  $AB$  entonces  $k < 0$  (división externa)

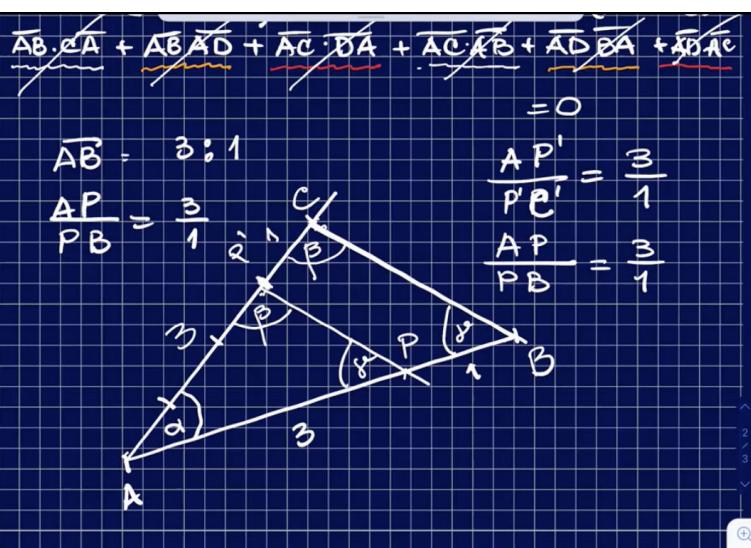
## DIVISIÓN IMPROPIA

- Si  $P$  coincide con  $A$  o con  $B$  entonces decimos que  $P$  divide impropriamente el segmento  $AB$ , la razón puede ser  $0$  o  $\infty$

## DEFINICIÓN

- Sean  $A, B, P, Q \in l$   $P, Q$  divide externamente e internamente a  $AB$  en razones numéricas igual

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = -\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}}$$



$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{3}{1} \quad \overline{PQ} = 1$$

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{QB}} = \frac{3}{1}$$

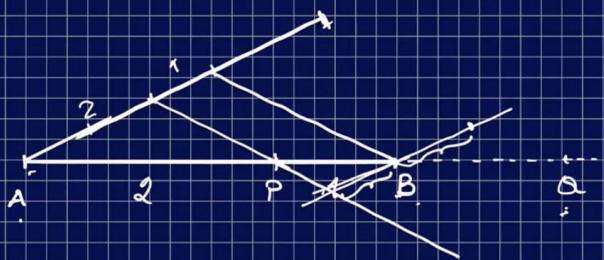
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{3}{1}$$

Recordatorio:  
(Leyes de los rayos)

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

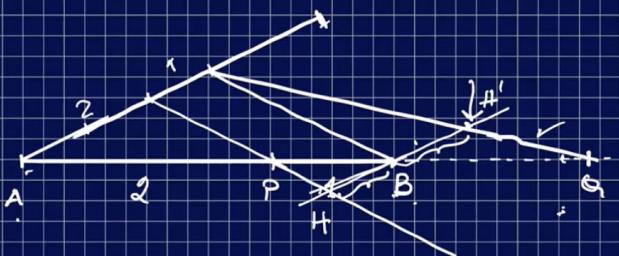
Construir  $P, Q$  tales que dividen interna y externamente un segmento  $\overline{AB}$  en proporción  $\frac{x}{y}$

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = -\frac{x}{y}$$



internamente un segmento  $\overline{AB}$  en proporción  $\frac{x}{y}$

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = -\frac{x}{y}$$

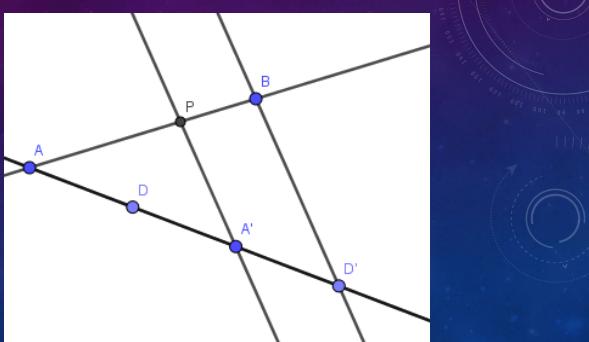


Tarea: revisar construcción

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}}$$

## 4. Sesión 4 y Sesión 5

## CONSTRUCCIÓN DE RAZONES



## EJERCICIOS

- Sea  $AB=8$  Obtenga el punto P que divide AB en proporción 3:1
- Determine el punto Q que divide el segmento AB en proporción 3:1

## ÁNGULOS DIRIGIDOS

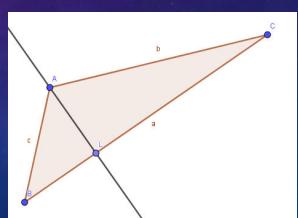
- Decimos que un ángulo es positivo si lo medimos encontra del movimiento de las agujas de un reloj.
- De lo contrario es un ángulo negativo
- El definir ángulos dirigidos nos ayudan para evitar ambigüedades .

## TEOREMA DE LA BISECTRIZ

- La bisectriz de un ángulo en un triángulo, divide el lado opuesto en segmentos cuya razón es la misma a la de los lados adyacentes del ángulo.
- Hacer la demostración

## TEOREMA DE LA BISECTRIZ GENERALIZADO

- Si el vértice A del triángulo ABC es unido a cualquier punto L en la línea BC entonces
- $$\frac{BL}{LC} = \frac{AB \sin BAL}{CA \sin LAC}$$
- Demostrar



## PUNTOS AL INFINITO

- Sean AB y CD dos lineal paralelas, llamaremos punto al infinito, al punto donde se intersectan AB y CD

## RECTA AL INFINITO

- Cada conjunto de líneas rectas paralelas en el plano tienen un punto al infinito esto nos lleva a inferir que todos estos puntos se encuentran sobre una línea que llamaremos línea al infinito

## HILERA Y ACES

- Definición:
  - Puntos que se encuentran en la misma línea se denominan puntos colineales
  - Un número finito de puntos colineales lo llamamos hilera de puntos
  - La línea donde se encuentran los puntos se conoce como la base de la hilera
  - Todas las rectas que pasan por un mismo punto se llaman líneas concurrentes
  - Un número finito de rectas concurrentes lo llamaremos haz
  - Una línea de un haz se denomina rayo, el punto concurrente es el vértice
  - Si el haz está formado por rectas paralelas el vértice es el punto al infinito.

## SEMEJANZA

- Definición: Dos polígonos con el mismo número de lados son *semejantes*, si sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes iguales.
- Los polígonos pueden ser directamente semejantes, cuando conservan su orientación, o inversamente semejantes cuando la invierten.

## HOMOTECIA

- Ya vimos cuando trabajamos las transformaciones en el plano que la homotecia produce objetos que conservan ángulos y que los lados de la nueva figura son proporcionales con los de la figura original, esto quiere decir que la homotecia está produciendo figuras semejantes.

## PROPIEDADES

- Sean  $A;B;C$  tres puntos colineales en el lado de un polígono, al aplicarle una homotecia las imágenes  $A';B';C'$  también son colineales y las rectas que los contienen son paralelas. ¿Por qué?

## HOMOTECIAS

- Sabemos que en una homotecia necesitamos un punto fijo llamado centro de Homotecia o *centro de similitud*,  $O$ , y la constante  $k$  que nos indica que proporción tendrán los lados entre sí, llamada razón de homotecia o razón de *similitud*

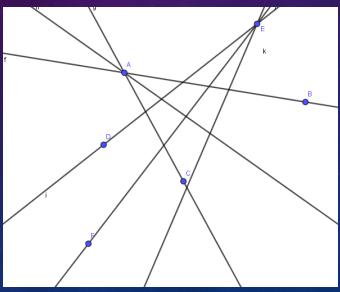
## SIMETRÍA CON RESPECTO A UN PUNTO

- La reflexión puntual, otra de las transformaciones que vimos, puede ser trabajada como una homotecia donde la  $k = -1$ , a ella se le denomina simetría puntual.
- Algunas figuras conocidas tienen simetría puntual:
  - a. En un círculos cada semicircunferencia es simétrica respecto al centro del círculo
  - El cuadrado, el rectángulo y el rombo son ejemplos de polígonos simétricos respecto a su centro

## LÍNEAS ANTIPARALELAS

- Se tienen dos pares de líneas, la bisectriz de uno de los pares de líneas interseca el otro par, si los ángulos interiores en el mismo lado de la transversal son iguales, entonces decimos que el segundo par de líneas son antiparalelas entre sí con respecto al primer par .

## ANTIPARALELAS



## PROPIEDADES

- Si una de las antiparalelas se refleja sobre la bisectriz entonces queda paralela a la otra.
- Las bisectrices de cada par de líneas son perpendiculares entre sí.
- Si  $a, b$  son antiparalelas entre sí respecto a  $c, d$  entonces  $c, d$  son antiparalelas entre sí respecto a  $a, b$
- (explique cada una de las propiedades)

## EJEMPLOS

- En una triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa y uno de los catetos son antiparalelas respecto a la hipotenusa y el otro cateto.
- Los lados no paralelos de un trapecio regular son antiparalelos respecto a los lados paralelos
- (construya las figuras y verifique)

$\triangle CAD \approx \triangle CEB$

$$\frac{CA}{CD} = \frac{AE}{DB}$$

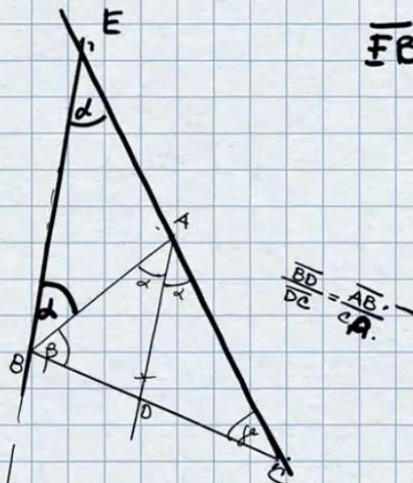
$$\overline{AB} = \overline{EA}$$

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}$$

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$$

$\overline{FB} \parallel \overline{AD}$



$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$$

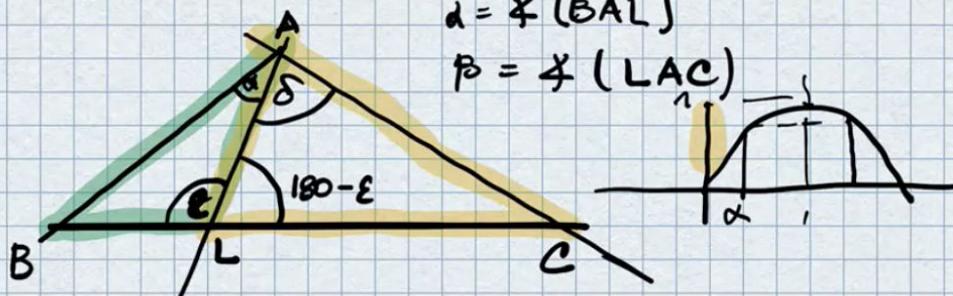
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$$

Teorema Generalizado:

$$\sin \delta = \sin(180 - \epsilon)$$

$$\alpha = \gamma \text{ (BAL)}$$

$$\beta = \gamma \text{ (LAC)}$$



$$\text{A demostrar: } \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \frac{AB \sin \alpha}{CA \sin \delta}$$

Usando ley de senos:

$$\triangle ABL \Rightarrow \frac{\overline{BL}}{\overline{AB}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \epsilon}$$

Recordatorio:

$$\sin \epsilon = \sin(180 - \epsilon)$$

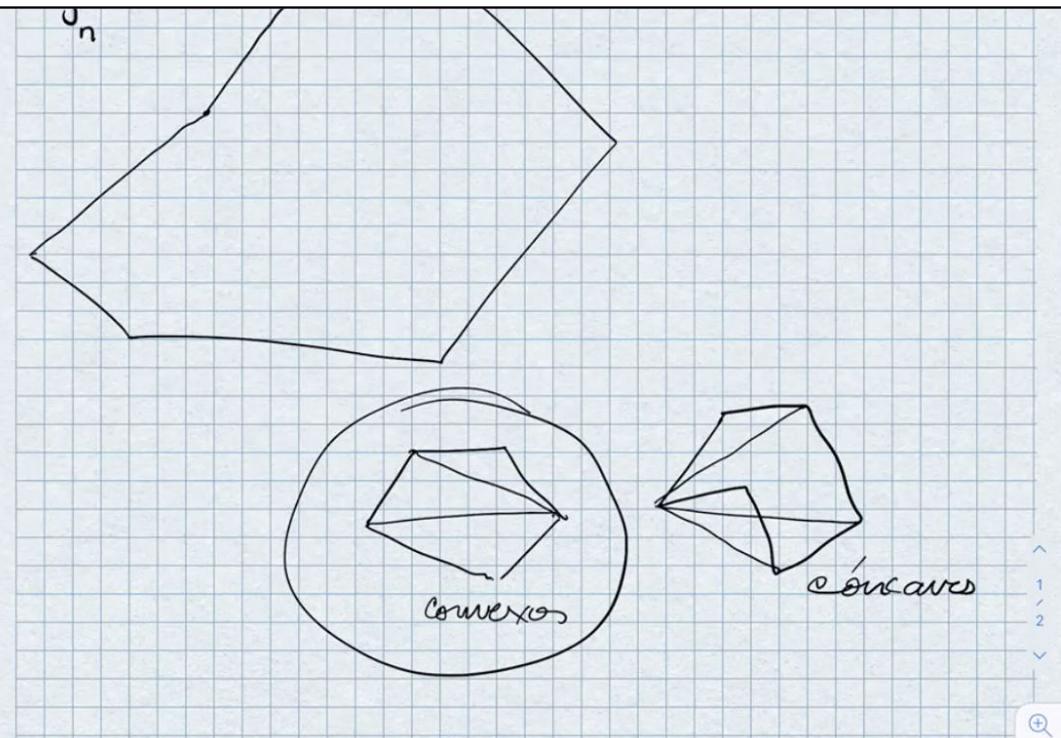
$$\triangle ALC \Rightarrow \frac{\overline{LC}}{\overline{CA}} = \frac{\sin \delta}{\sin(180 - \epsilon)}$$

$$\text{Despejamos: } BL = \frac{AB \cdot \sin \alpha}{\sin \epsilon}$$

$$LC = \frac{CA \cdot \sin \delta}{\sin(180 - \epsilon)}$$

} dividimos

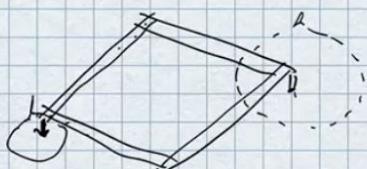
$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \frac{\frac{AB \sin \alpha}{\sin \epsilon}}{\frac{CA \sin \delta}{\sin(180 - \epsilon)}} = \frac{AB \sin \alpha}{CA \sin \delta}$$



Parekthesis: Tarea (2) (Jueves 29.7.2021)

Pantógrafos:

Construir un pantógrafo.



2	3	4
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Propiedades:

$A, B, C$  colineales     $A, B, C$  e lado de un polígono

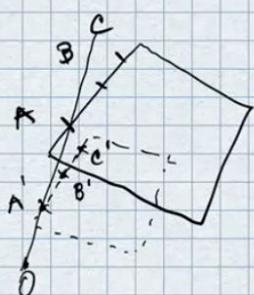
Si aplicamos una homotecia  $\Rightarrow A', B', C'$  (imágenes de  $A, B, C$ ) también son colineales.

$$l(A, B, C) \parallel l(A', B', C')$$

$A, B, C$  colineales     $A, B, C$  e lado de un polígono

Si aplicamos una homotecia  $\Rightarrow A', B', C'$  (imágenes de  $A, B, C$ ) también son colineales.

$$l(A, B, C) \parallel l(A', B', C')$$

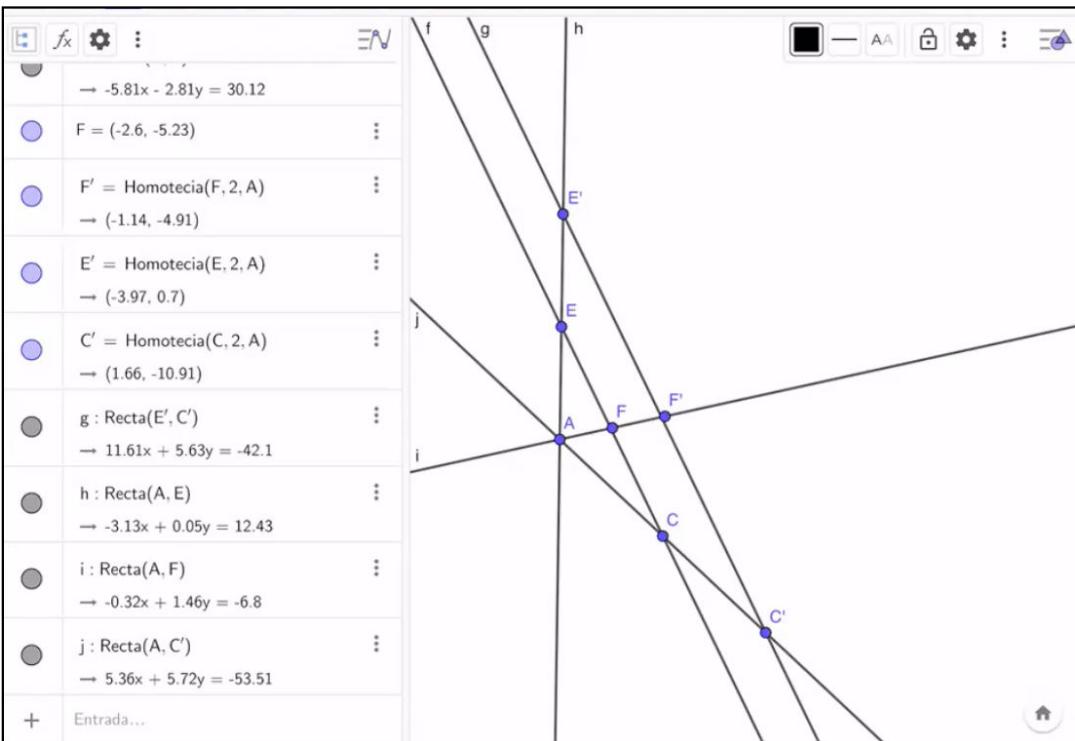


i) Si  $A, B, C$  son colineales

$A', B', C'$  " "

donde  $A', B', C'$  son las imágenes correspondientes de una homotecia.

ii)  $l(A, B, C) \parallel l(A', B', C')$



Sabemos:

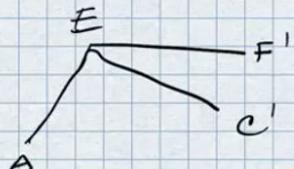
- i)  $E, F, C$  son colineales
- ii) como se produjo  $H(A, b)$   
 $\Rightarrow AEE'$  son colineales

$$AFF' \quad " \quad "$$

$$ACC' \quad " \quad "$$

$\Rightarrow$  podemos decir:

$$\frac{AE}{AE'} = \frac{AF}{AF'} = \frac{AC}{AC'} = \text{constante}$$



$$\Rightarrow \triangle AEF \approx \triangle AE'F' \Rightarrow \triangle AEF \cong \triangle AE'F'$$

$$\triangle AEC \approx \triangle AE'C' \Rightarrow \triangle AEC \cong \triangle AE'C'$$

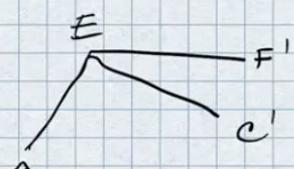
$\Rightarrow AEE'$  son colineales

$$AFF' \quad " \quad "$$

$$ACC' \quad " \quad "$$

$\Rightarrow$  podemos decir:

$$\frac{AE}{AE'} = \frac{AF}{AF'} = \frac{AC}{AC'} = \text{constante}$$



$$\Rightarrow \triangle AEF \approx \triangle AE'F' \Rightarrow \underline{\underline{\triangle AEF \cong \triangle AE'F'}}$$

$$\triangle AEC \approx \triangle AE'C' \Rightarrow \underline{\underline{\triangle AEC \cong \triangle AE'C'}}$$

Sabemos que  $EF, C$  son colineales

$$\Rightarrow \triangle AEF \cong \triangle AEC$$

$$\therefore \triangle AE'F' \cong \triangle AE'C'$$

$\Rightarrow E', F', C'$  son colineales.

$\Rightarrow E, F, C$  son concurrentes.

$$l(EFC) \parallel l(E'F'C')$$

