Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2031 - Geometría Moderna - Catedrático: María Eugenia Contreras
18 de septiembre de 2021

Parcial 2

Problema 1. *Dos circunferencias se intersecan en los puntos A y B. Sea l una recta cualquiera que pasa por el punto A interceptando las circunferencias en los puntos P y Q. Sea R un punto que divide el segmento PQ en una razón constante. Demuestre que el lugar geométrico para R es una circunferencia.*

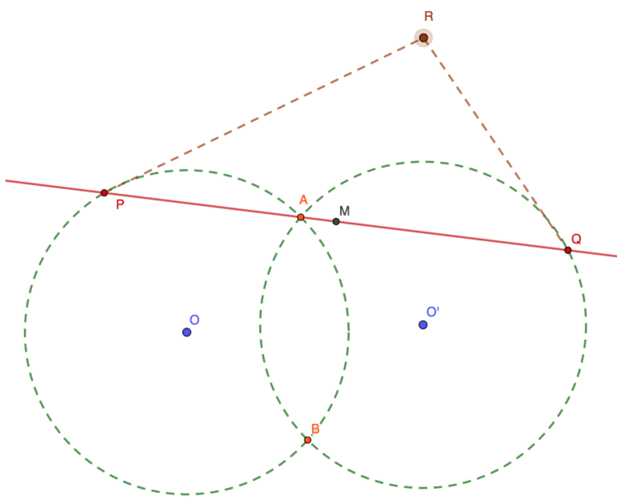

Figura 1: Construcción

El círculo de Apolonio no se puede usar ya que P y Q no son fijos.

Demostración. Por hipótesis, tenemos que los círculos con centros O y O' respectivamente se intersectan en A y B; también l es una recta que intersecta a P y Q y tenemos que

$$\frac{RP}{RQ} = k \implies \frac{RP^2}{RQ^2} = k^2 \implies RP^2 = k^2 RQ^2. \tag{1}$$

Supóngase que M es el punto medio de PQ y sin pérdida de generalidad, asumamos que está ubicado en $(0,0)$ (En caso contrario, tendríamos que hacer probablemente una parametrización que incluya la ubicación de O y O'...) $\implies PM = MQ = m$ tal que $P(-m,0)$ y $Q(0,m)$. Por otra parte R se encuentra en un punto cualesquiera, $R(x,y)$. $\implies$ Considerando (1) tenemos:

$$(x-m)^2 + y^2 = k^2\left[(x+m)^2 + y^2\right]$$
$$x^2 - 2xm + m^2 + y^2 = x^2k^2 + 2xmk^2 + m^2k^2 + y^2k^2$$
$$x^2 - 2xm + m^2 + y^2 - x^2k^2 - 2xmk^2 - m^2k^2 - y^2k^2 = 0$$
$$x^2(1-k^2) + y^2(1-k^2) - 2mx(1+k^2) + m^2(1-k^2) = 0 \qquad (\div(1-k^2))$$

Entonces, tenemos

$$x^2 + y^2 - \frac{2mx(1+k^2)}{1-k^2} + m^2 = 0,$$

la cual es la ecuación del círculo y por lo tanto el punto geométrico de R es un círculo. ■

Problema 2. *Sea A un punto cualesquiera de la circunferencia de similitud de dos circunferencias cuyos centros son O y O'. Dibujar AO, y en ella obtener $AO'' = kAO'$. Utilizando a O'' como centro, dibujar una circunferencia cuyo radio es k veces el de la circunferencia O'. Estas circunferencias O y O'' son homotéticas con A como centro de similitud.*

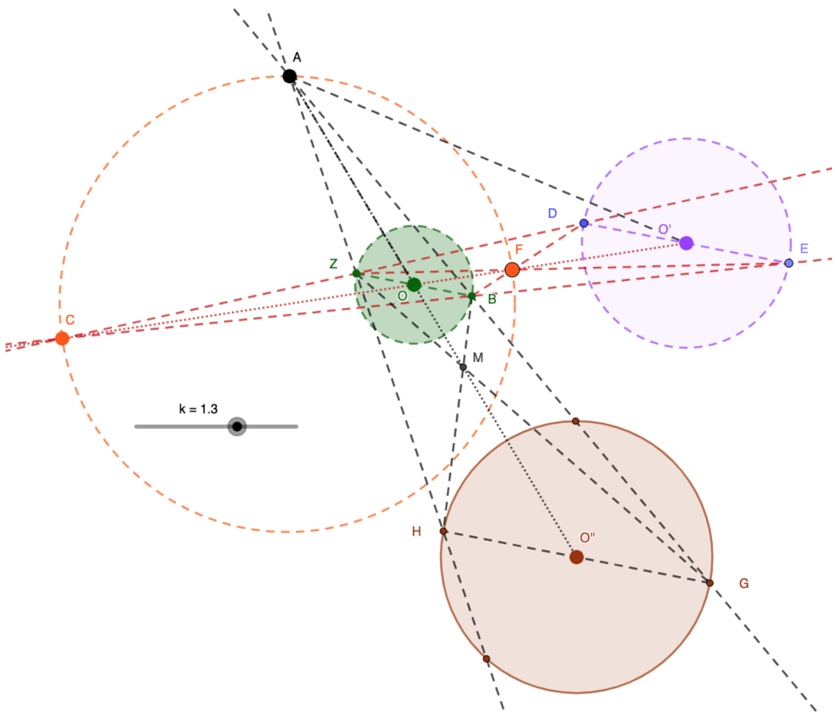

Figura 2: Construcción

Demostración. Por hipótesis, sabemos que $AO'' = kAO'$ está sobre AO y tenemos el circulo con O'' como centro y $k \cdot EO'$ como radio. Ahora bien, demostraremos que las dos circunferencias son homotéticas, sea $HG \parallel ZB$ en donde HZ y HB interceptan los puntos A y M respectivamente. $\implies$ Por el teorema de paralelas y transversas $\angle BOM \cong \angle HO''M \implies$ Por ángulos verticales $O''MH \cong OMB \implies \triangle MBO \sim \triangle ZMB$. $\implies$ La circunferencias con centros O y O'' son homotéticas donde A y M son los centros de similitud. ■

Problema 3. *P y P' son dos puntos antihomólogos de dos circunferencias cuyos centros son O y O' respectivamente, y A es el centro de similitud que está en PP'. Determine si los triángulos APO y $AP'O'$ son semejantes.*

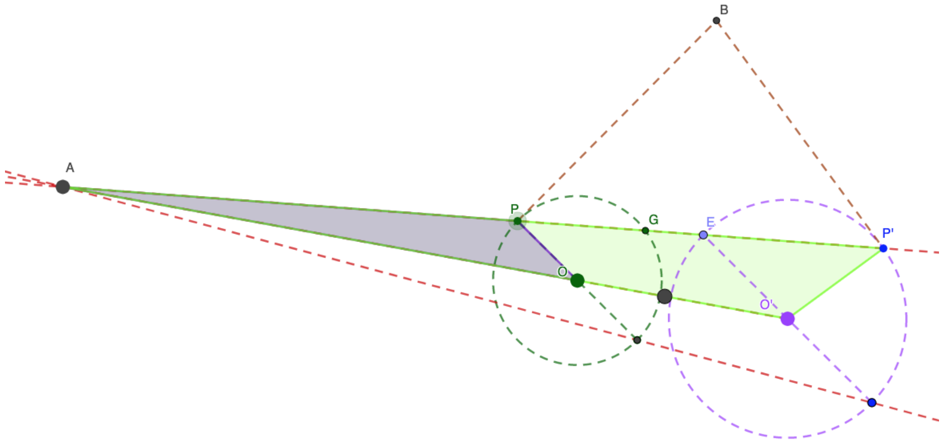

Figura 3: Construcción

Demostración. Por hipótesis, P y P' son dos puntos antihomólogos de dos circunferencias cuyos centros son O y O' respectivamente, y A es el centro de similitud que está en PP'. Por reducción al absurdo, supóngase que $\triangle APO$ y $\triangle AP'O'$ son semejantes. Es decir,

$$\angle PAO \cong P'AO', \angle AOP \cong \angle AO'P' \quad \text{y} \quad \angle OPA \cong \angle O'P'A.$$

$\Longrightarrow$ Por la construcción de los puntos antihomólogos tenemos $OP \parallel O'E$. Además, se propuso que BP y $P'B$ son tangentes a P' y P, respectivamente tal que por teorema tenemos $\angle BPP' \cong \angle PP'B$. $\Longrightarrow$ Por la definición de tangente,

$$\angle PP'B + \angle O'P'A = 90^\circ \tag{1}$$

y

$$\angle BPP' + \angle P'PO = 90^\circ \tag{2}$$

De (1) se tiene que $\underbrace{\angle BPP'}_{\cong \angle PP'B} + \underbrace{\angle OPA}_{\cong \angle O'P'A} = 90^\circ$ e igualando con (2) tenemos

$$\angle BPP' + \angle OPA = \angle BPP' + \angle P'PO \tag{3}$$

$\Longrightarrow$ $\angle OPA = \angle P'PO$. Sin embargo, nótese que $\angle OPA + \angle P'PO = 180^\circ \Longrightarrow \angle OPA = \angle P'PO = 90^\circ \Longrightarrow$ Tomando en cuenta (1) y (2) tenemos $\angle BPP' \cong \angle PP'B = 0^\circ$. Pero eso implicaría que P y P' no son puntos antihomólogos ($\rightarrow\leftarrow$).

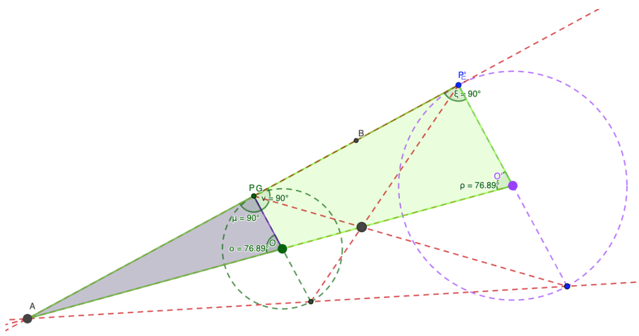

Figura 4: Contradicción - Caso especial

Por lo tanto, $\triangle APO$ y $\triangle AP'O'$ no son semejantes. ■

Problema 4. *Si una circunferencia corta los lados BC, CA y AB del triángulo ABC en los puntos P, P', Q, Q', R, R' respectivamente, y si AP, BQ y CR son concurrentes, entonces AP', BQ', y CR' también son concurrentes.*

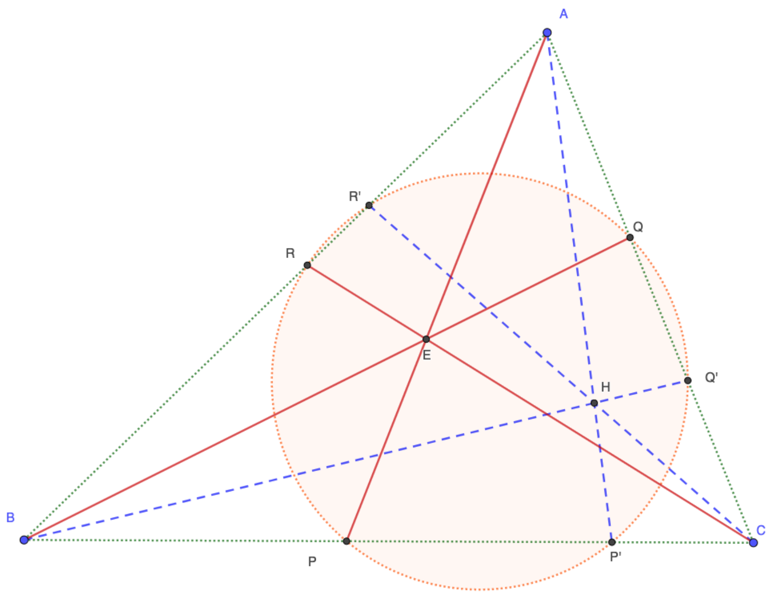

Figura 5: Construcción

Demostración. Por hipótesis, una circunferencia corta los lados BC, CA y AB del triángulo ABC en los puntos P, P', Q, Q', R, R' respectivamente, además

$$AP \cap BQ \cap CR,$$

que se intersectan en E. Por el teorema de Ceva, la siguiente igualdad se cumple:

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1. \tag{4}$$

$\implies$ Sean P', Q' y R' puntos que están en BC, CA y AB del $\triangle ABC$. Por teorema de triángulos similares tenemos,

$$\frac{P'B}{R'B} = \frac{RB}{PB}, \quad \frac{R'A}{Q'A} = \frac{QA}{RA}, \quad \frac{Q'C}{P'C} = \frac{PC}{QC}.$$

Multiplicando dichas ecuaciones, tenemos:

$$\frac{P'B}{R'B} \cdot \frac{R'A}{Q'A} \cdot \frac{Q'C}{P'C} = \underbrace{\frac{RB}{PB} \cdot \frac{QA}{RA} \cdot \frac{PC}{QC}}_{\text{Por (4)}} = 1$$

$\implies$ Por lo anterior, ya tenemos el valor absoluto de los segmentos, la siguiente igualdad se cumple

$$\frac{AR'}{R'B} \cdot \frac{BP'}{P'C} \cdot \frac{CQ'}{Q'A} = 1.$$

Por lo tanto, por el teorema de Ceva $AP' \cap BQ' \cap CR'$. ∎