Universidad del Valle de Guatemala

MM2034 - 2 semestre - 2021

Licenciatura en matemática aplicada

GEOMETRÍA MODERNA

Catedrático: María Eugenia Pinillos

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay
Carné: 19857
Correo: rom19857@uvg.edu.gt

12 de julio de 2021

Índice

1. Sesión 1

1.1. Transformaciones en el plano

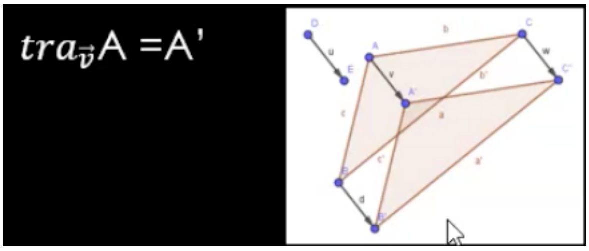
Definición 1. 1. *Una transformación en el plano es una función que le asigna a cada punto en el plano otro punto en el plano al cuál llamaremos imagen.*

2. *Una transformación a una figura en el plano obtenemos una nueva figura que llamaremos la transformada.*

1.1.1. Clases

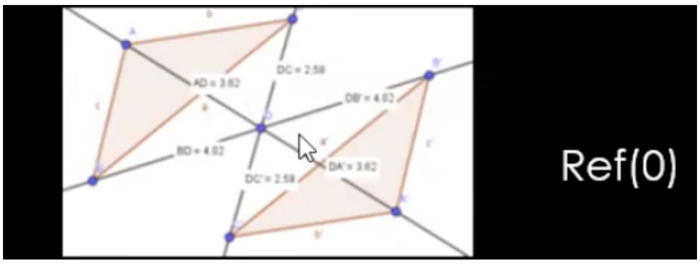
1. **Isométricas**: transformaciones que conservan **la forma, las longitudes, las áreas y ángulos(en magnitud) de una figura.**

   a) **Traslación**: Sea A un punto en el plano y $\vec{v}$ un vector, una traslación en el plano se dará cuando cada punto de la figura se mueva en la dirección de $\vec{v}$.

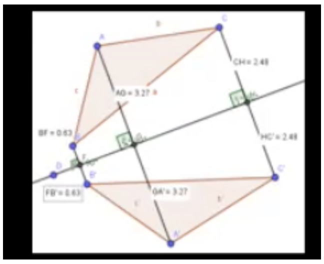


   b) **Reflexión o Simetría:** Existen dos clases de reflexiones.

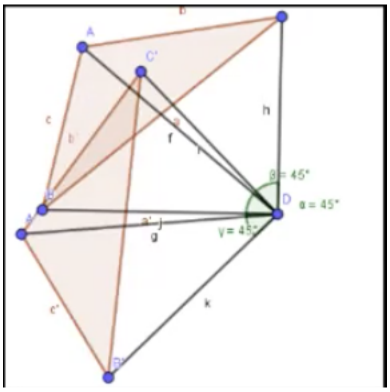
      1) **Puntual o central:** Cuando reflejamos una figura respecto a un punto. [$Ref(0)$]



      2) **Axial:** Reflejamos la figura respecto a una recta, llamada eje de reflexión. [$Ref(I)$]



c) **Rotación**: Es una transformación que cambia la dirección de una figura, en este caso se tiene un punto fijo 0 y un ángulo constante (positivo o negativo). La distancia del punto al 0 es constante.



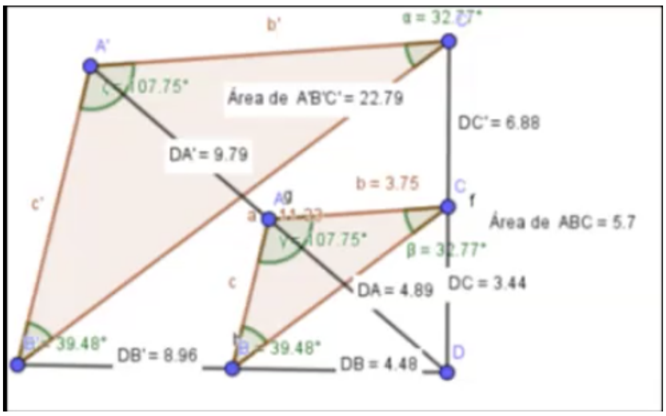
2. **No isométricas**: son aquellas transformaciones que alteran la forma y dimensión de la figura.

   a) **Homotecia**: es una transformación en la que se obtiene una figura a escala de la original, se necesita un punto fijo 0 y una constante de proporcionalidad k.

      1) Cambia longitudes y áreas pero conserva ángulos.

      2) Si $k > 0$ conserva la dirección.

      3) Si $k < 0$ se obtiene la dirección opuesta.



1.1.2. Notación

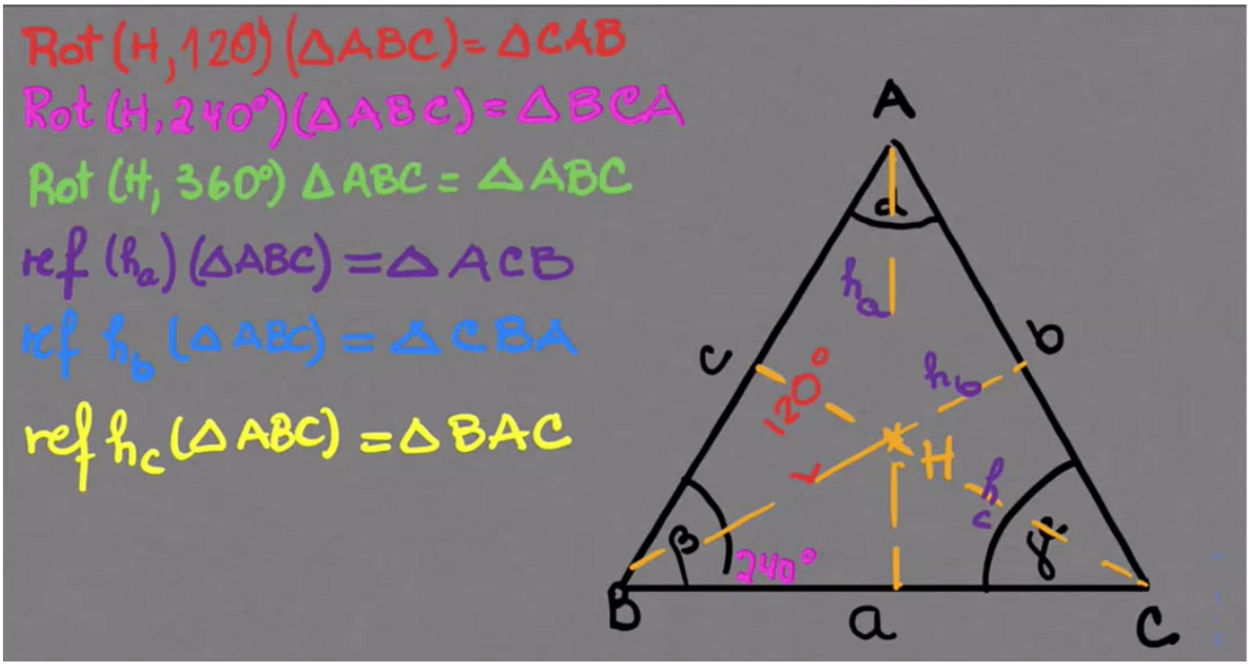
Isométricas

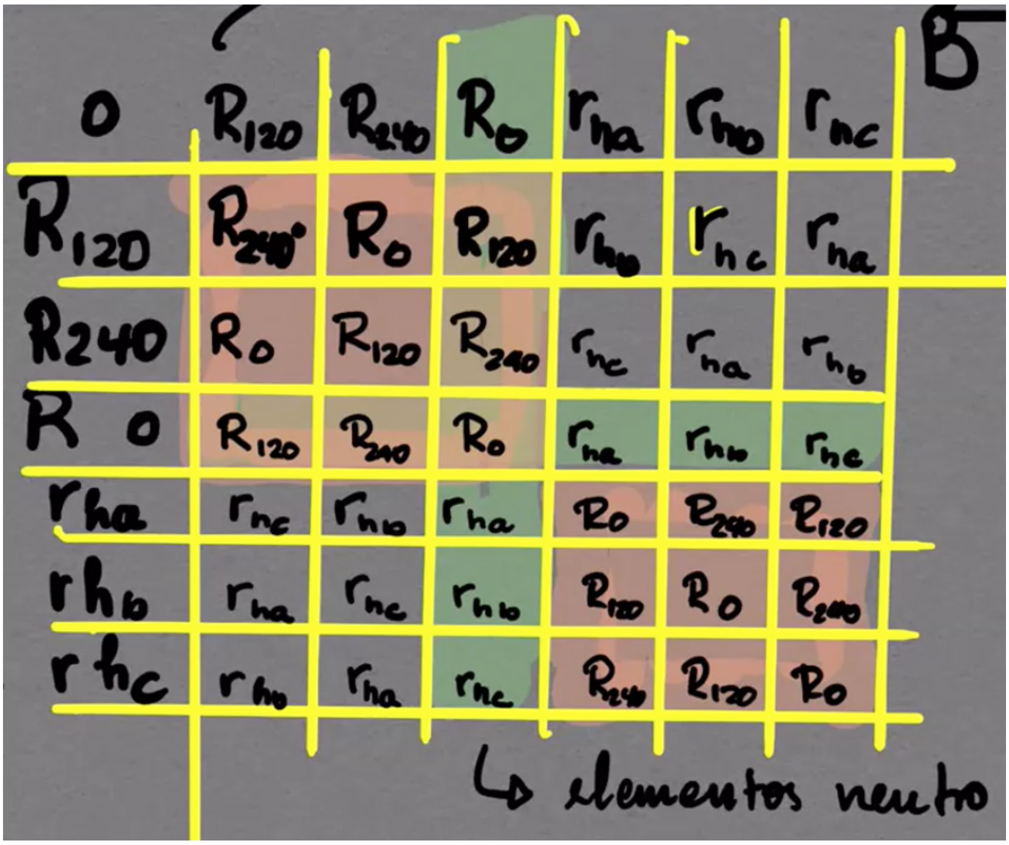
1. Traslación: Tra $\overrightarrow{AB}$.
2. Reflexión:
   a) Ref(0).
   b) Ref(l).
3. Rotación: $\mathrm{Rot}(A, \theta)$.
4. Homotecia: $\mathrm{Hom}(A, k)$.

Ejemplo 1.

$$\triangle\,\mathrm{ABC}: \quad \mathrm{Hom}(A'', 2) \circ \mathrm{rot}(0, 30^\circ) \circ \mathrm{Rel}(B)$$

2. Sesión 2





o	R_{120}	R_{240}	R_0	r_{ha}	r_{hb}	r_{hc}
R_{120}	R_{240}	R_0	R_{120}	r_{hb}	r_{hc}	r_{ha}
R_{240}	R_0	R_{120}	R_{240}	r_{hc}	r_{ha}	r_{hb}
R_0	R_{120}	R_{240}	R_0	r_{ha}	r_{hb}	r_{hc}
r_{ha}	r_{hc}	r_{hb}	r_{ha}	R_0	R_{240}	R_{120}
r_{hb}	r_{ha}	r_{hc}	r_{hb}	R_{120}	R_0	R_{240}
r_{hc}	r_{hb}	r_{ha}	r_{hc}	R_{240}	R_{120}	R_0

↳ elementos neutro

3. Sesión 3

1.1 SEGMENTOS LINEALES DIRIGIDOS

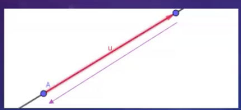
- Sea l una línea recta
- A,B puntos que pertenecen a l   (A,B ϵ l)
- Llamamos $\overline{AB}$ segmento de l

SEGMENTO DIRIGIDO

- En la geometría elemental, lo que más utilizamos es la longitud del segmento.
- Para nuestro curso vamos a necesitar el concepto de segmentos dirigidos, es decir vamos a considerar una dirección

SEGMENTOS DIRIGIDOS

- El segmento dirigido de A a B lo indicamos $\overrightarrow{AB}$



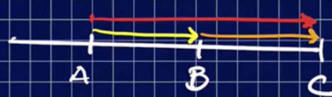
- El segmento dirigido de B a A lo indicamos como $\overrightarrow{BA}$

PROPIEDADES

- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ o $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0$
- $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$
- Sean A,B,C ϵ l
- $\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
- Un segmento dirigido puede tener longitud cero $|\overrightarrow{AB}|$=0 si $A = B$

$\vec{AB} = -\vec{BA} \Rightarrow \begin{cases} \vec{AB}+\vec{BA} = 0 \\ \vec{AA} = 0 \end{cases}$

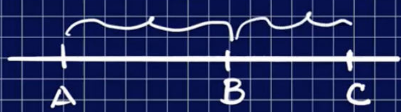
$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$



Teoría Matemática
- Objetos
- Axiomas
- Teoremas
- Definiciones

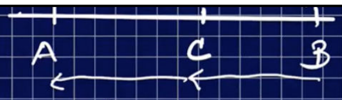
A B C

Sean A, B, C $\in l$ (puntos colineales)



ii) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$

$\vec{AC} + \vec{CA} = \vec{0}$



Definir $|\overrightarrow{AB}|$ longitud

Propiedades:

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 0 \Rightarrow A = B$$

1 Teorema de Euler:

Sean $A, B, C, D \in \ell \Rightarrow$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$$

Demostrar:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$$

Demostración:

Expresemos todos los segmentos dejando un punto fijo:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{BC}$$

$$\cancel{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD}} + \cancel{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{DC}} + \cancel{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CB}} + \cancel{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}} + \cancel{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CB}}$$
$$\cancel{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}} + \cancel{\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{BC}} + \cancel{\overrightarrow{CD}\,\overrightarrow{BC}}$$
$$= 0$$

Otra forma:

$$\overline{AB}(\overline{CA} + \overline{AD}) + AC(DA + AB)$$

$$\cancel{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD}} + \cancel{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{DC}} + \cancel{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CB}} + \cancel{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}} + \cancel{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CB}}$$
$$\cancel{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}} + \cancel{\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{BC}} + \cancel{\overrightarrow{CD}\,\overrightarrow{BC}}$$
$$= 0$$

Otra forma:

$$\overline{AB}(\overline{CA} + \overline{AD}) + \overline{AC}(\overline{DA} + \overline{AB}) + AD(\overline{BA} + \overline{AC})$$

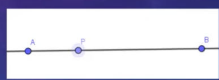
$$\cancel{\overline{AB}\cdot\overline{CA}} + \cancel{\overline{AB}\,\overline{AD}} + \cancel{\overline{AC}\cdot\overline{DA}} + \cancel{\overline{AC}\cdot\overline{AB}} + \cancel{\overline{AD}\,\overline{BA}} + \cancel{\overline{AD}\,\overline{AC}}$$

$$= 0$$

PARTICIÓN DE UN SEGMENTO DE LINEA

- Sea l una línea, A,B $\in l$, $A \neq B$ $\quad$ *Tomemos el segmento* $\overrightarrow{AB}$
- Sea P $\in$ $\overrightarrow{AB}$

1. P se encuentra entre A y B



2. P se encuentra fuera del segmento

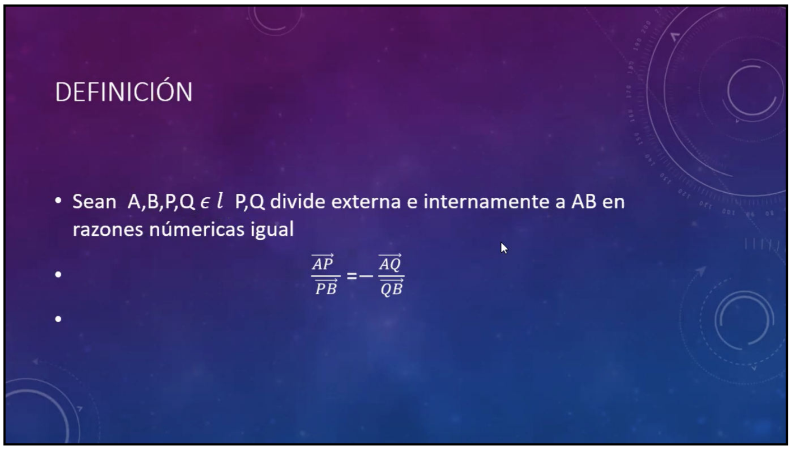
DEFINICIÓN

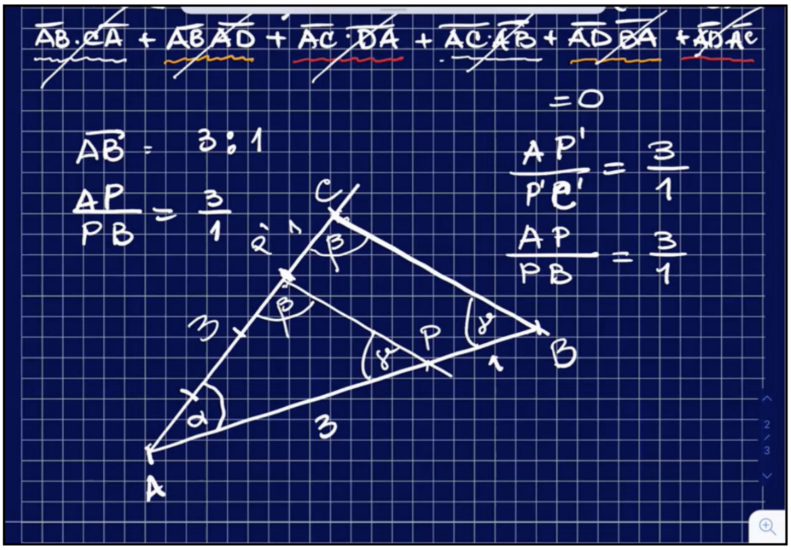
Se dice que P divide el segmento AB en la razón $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$=k

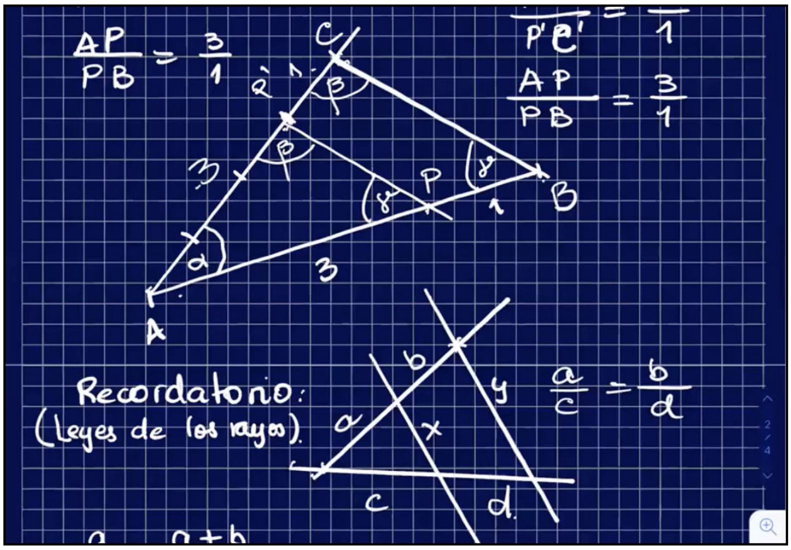
1. Si P está en el interior de AB, entonces k>0 (división interna)
2. Si P está en el exterior de AB entonces k<0 (división externa)

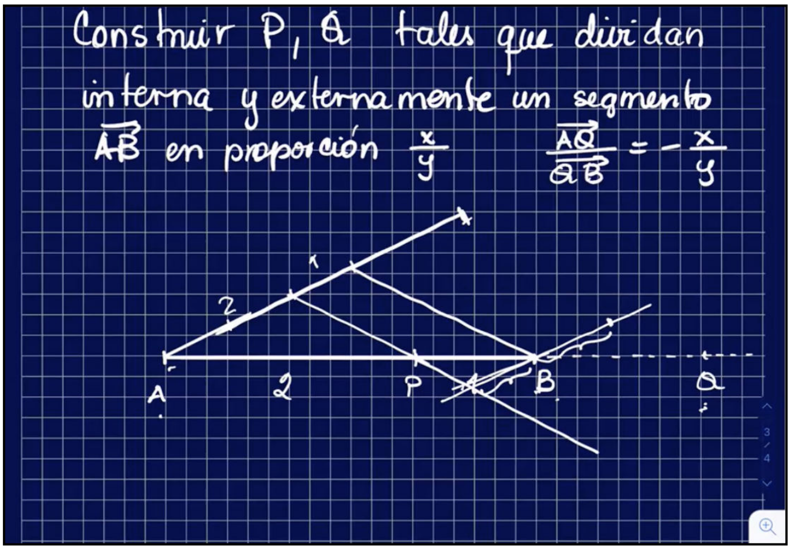
DIVISIÓN IMPROPIA

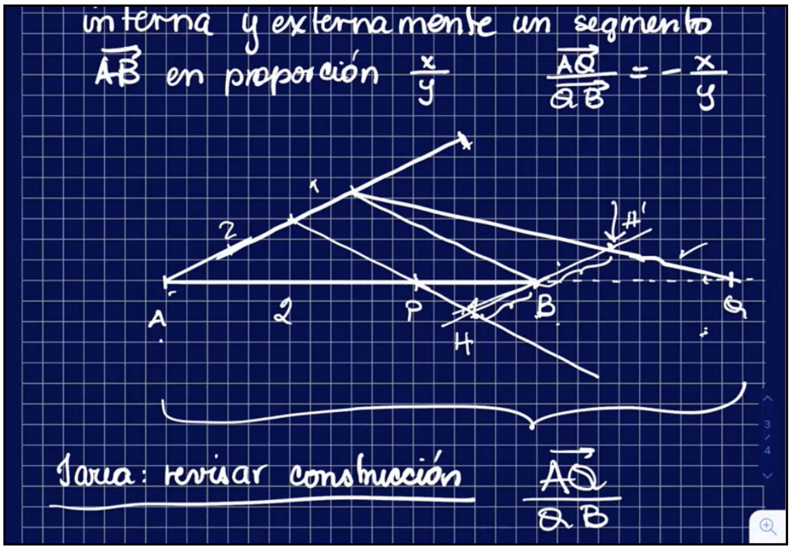
- Si P coincide con A o con B entonces decimos que P divide impropiamente el segmento AB, la razón puede ser 0 o ∞


DEFINICIÓN
• Sean A,B,P,Q ϵ l P,Q divide externa e internamente a AB en razones númericas igual
$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = -\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}}$


=0
$\overrightarrow{AB}$ = 3:1
$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$
$\frac{AP'}{P'C'} = \frac{3}{1}$
$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$
C
B
A
P
3
1


$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$
$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$
Recordatorio:
(Leyes de los rayos)
$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$


Construir P, Q tales que dividan interna y externamente un segmento $\overrightarrow{AB}$ en proporción $\frac{x}{y}$
$\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}} = -\frac{x}{y}$
A
P
B
Q


interna y externamente un segmento $\overrightarrow{AB}$ en proporción $\frac{x}{y}$
$\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}} = -\frac{x}{y}$
H'
A
P
B
Q
H
Tarea: revisar construcción
$\frac{\overrightarrow{AQ}}{QB}$