Universidad del Valle de Guatemala

MM2034 - 1 semestre - 2021

Licenciatura en matemática aplicada

ANÁLISIS DE VARIABLE REAL 1

Catedrático: Dorval Carías

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay
Carné: 19857
Correo: rom19857@uvg.edu.gt

19 de junio de 2021

Índice

1. Propiedades de $\mathbb{R}$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un campo.

Definición 1. *Un conjunto no vacío P de elementos de un campo $\mathbb{F}$ es una clase positiva si cumple:*

1. *Si $a, b \in P \implies a + b \in P$.*

2. *Si $a, b \in P \implies a \cdot b \in P$.*

3. *Si $a \in \mathbb{F}$, entonces:*

   a) *$a \in P$ o $a = 0$ o $-a \in P$. (Ley de tricotomía)*

NOTA. *Sea $N = \{-a : a \in P\}$ la clase negativa relativa a P. $\implies$ $\mathbb{F} = P \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$.*

Ejemplo 1. 1. *$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un campo. Sea $P\{a/b \in \mathbb{Q} \ni a, b \in \mathbb{Z}^+\} \implies P$ es una clase positiva de $\mathbb{Q}$.*

2. *Sea $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, en las operaciones:*

+	0	1
0	0	1
1	1	0

*	0	1
0	0	0
1	0	1

$\implies$ *$(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ es un campo.*

   a) *Sea $P = \{0\}$. Cumple las propiedades: 1, 2. No cumple 3. $\implies$ P no es una clase positiva de $\mathbb{Z}_2$.*

   b) *Sea $P' = \{1\}$. No cumple el 1. $\implies$ P' no es clase positiva de $\mathbb{Z}_2$.*

Definición 2. *Sea P la clase positiva del campo $\mathbb{F}$, entonces se dice que $\mathbb{F}$ está ordenada por P (o que $\mathbb{F}$ es un campo ordenado).*

1. *Si* $a \in P$*, se dice que* a *es positivo. Notación* $a > 0$.

2. *Si* $a \in P$ *o* $a = 0$*, se dice que* a *es no negativo. Notación* $a \geq 0$.

3. *Si* $a, b \in \mathbb{F}$ *y* $a - b \in P$*, se escribe* $a > b$.

4. *Si* $a, b \in \mathbb{F}$ *y* $a - b \in P$ *o* $a - b = 0$*, se escribe* $a \geq b$.

Proposición 1. *Otras propiedades:*

1. *Si* $a > b$ *y* $b > c \implies a > c$.

2. *Si* $a, b \in \mathbb{F}$*, entonces*

   a) $a > b$ *o* $a = b$ *o* $b > a$.

3. *Si* $a \geq b$ *y* $b \geq a \implies a = b$.

Proposición 2. *Sea* $\mathbb{F}$ *un campo ordenado:*

1. *Si* $a \neq 0 \implies a^2 > 0$.

2. *1>0.*

3. *Si* $n \in \mathbb{Z}^+ \implies n > 0$.

Teorema 1. *Sean* $a, b, c \in \mathbb{F}$.

1. *Si* $a > b \implies a + c > b + c$.

2. *Si* $a > b$ *y* $c > d \implies a + c > b + d$.

3. *Si* $a > b$ *y* $c > 0 \implies ac > bc$.

4. *Si* $a > b$ *y* $c < 0 \implies ac < bc$.

5. *Si* $a > 0 \implies a^{-1} > 0$.

6. *Si* $a < 0 \implies a^{-1} < 0$.

Corolario 1.1. *Si* $a > b \implies a > \frac{a+b}{2} > b$.

NOTA. *Hagamos* $b = 0$*. Entonces, si* $a > 0 \implies a > \frac{a}{2} > 0$*. Entonces, en un campo ordenado no existe un número positivo menor.*

Teorema 2. *Si $ab > 0$, entonces, $a > 0$ y $b > 0$ o $a < 0$ y $b < 0$.*

Definición 3. *Sea $\mathbb{F}$ un campo una clase positiva P. Se define la función valor absoluto:*

$$|\cdot| : \mathbb{F} \to P \cup \{0\} \ni$$

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0. \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Teorema 3.

1. *$|a| = 0 \iff a = 0$.*
2. *$|-a| = |a|$.*
3. *$|ab| = |a| \cdot |b|$.*
4. *Si $c \geq 0 \implies |a| \leq c \iff -c \leq a \leq c$.*

NOTA. *Como $|a| \geq 0 \implies |a| \leq |a| \implies -|a| \leq a \leq |a|, \forall a$.*

Teorema 4 (Desigualdad triangular)**.** *Sean a y b elementos de un campo ordenado $\mathbb{F}$. Entonces,*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

NOTA (Desigualdad triangular)**.** *Si a, b son elementos del campo ordenado $\mathbb{F}$, entonces:*

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

Definición 4. *Un campo ordenado $\mathbb{F}$ es arquimediano si $\forall x \in \mathbb{F}\ \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni x < n$.*

NOTA. *La clase positiva P de $\mathbb{F}$ es arquimediana si $\forall x \in \mathbb{F}\ \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni n - x \in P$.*

Teorema 5. *Si $\mathbb{F}$ es un campo arquimediano, entonces:*

1. *Si $y > 0$ y $z > 0 \implies \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni ny > z$.*
2. *Si $z > 0 \implies \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni 0 < 1/n < z$.*
3. *Si $y > 0 \implies \exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni n - 1 \leq y < n$.*

1.1. Supremo e Ínfimo

NOTA (Cota superior más pequeño)**.** *Sea* $B \subseteq \mathbb{Q}$*,* $B \neq \mathbb{Q}$*. Entonces,* B *es acotado superiormente si* $k \in \mathbb{Q} \ni k \geq b$*,* $\forall b \in B$*. En este caso* k *es cota superior de* B*.*

Ejemplo 2. *Considérese*

1. *Sea* $\{a \in \mathbb{Q} \ni a < 4\}$*. Este conjunto está acotado superiormente por 4 (pero también 5, 6,... son cotas superiores). Por otro lado,* $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ *no es acotado.*

2. *Si* $B \subseteq \mathbb{Q}, B \neq \mathbb{Q}$ *y* B *es acotado superiormente, entonces la cota superior más pequeña de* B *es un número* $k \in \mathbb{B}$ *es un número* $k \in \mathbb{Q} \ni$

   a*)* K *es cota superior.*

   b*) Si* c *es cota superior de* B*, entonces* $c \geq k$*.*

3. *Si existe la cota superior más pequeña de* B*, esta es única. Suponga que* k_1 *y* k_2 *son cotas superiores más pequeñas. Entonces:*

   a*) Como* k_1 *es cota superior más pequeña y* k_2 *es cota superior* $\implies k_2 \geq k_1$*.*

   b*) Como* k_2 *es cota superior más pequeña y* k_1 *es cota superior.* $\implies k_1 \geq k_2 \implies k_1 = k_2$*.*

4. *Considérese el conjunto*

$$C = \{a \in \mathbb{Q} : a \geq 0 \ y \ a^2 < 2\}.$$

Nótese que C *está acotado superiormente. En efecto, si* $a \in C \implies a^2 < 4 \implies a < 2 \implies 2$ *es cota superior de* C*.*

Ejemplo 3. *Ejemplos*

a*) ¿Es 2 la menor cota superior de* C*? No, considere* $a^2 < 9/4 \implies a < 3/2 = 1{,}5$*.*

b) *Los números racionales: 2, 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 1.41422, 1.41214,... son cotas superiores de C.*

c) *C no tiene en $\mathbb{Q}$ una cota superior más pequeña. Nótese que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, debería ser la cota superior más pequeña de C.*

Definición 5. *El conjunto de números reales $\mathbb{R}$ es un campo ordenado que satisface:*

P1 $\forall x > 0$ *en* $\mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni x < n > y$.

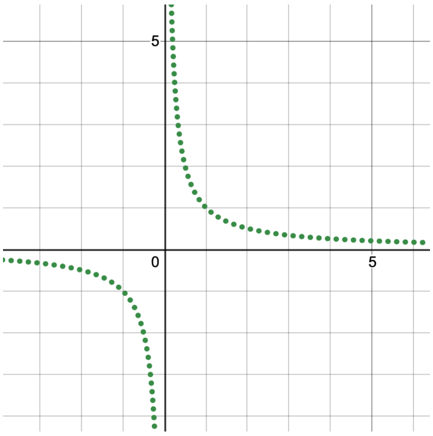
P2 *Cada subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que es acotado superiormente tiene una* $\underbrace{\textit{cota superior más pequeña}}_{\textit{supremo}}$ *en $\mathbb{R}$.*

NOTA. *Cada subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que es acotado inferiormente tiene una cota inferior más grande (**ínfimo**). En efecto si A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente, considere $-A$ y aplique el axioma del supremo.*

1. *Supremo de A:* $\sup A$.
2. *Ínfimo de A:* $\inf A$.

Ejemplo 4.

Considere $\left(\frac{1}{n}\right)$.



$\implies \inf\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$

Ejemplo 5.

$\sup[a,b] = b; \inf[a,b] = a.$

$\sup(a,b) = b; \inf(a,b) = a.$

NOTA. *1. Si el* $\sup A \in A \implies \sup A$ *es el máximo de* A.

2. Si el $\inf A \in A \implies \inf A$ *es el mínimo de* A.

Convenciones:

1. Si A no está acotada superiormente, entonces escribimos

$$\sup A = \infty$$

2. Si A no está acotado inferiormente, entonces escribimos

$$\inf A = -\infty$$

3. Si $A = \emptyset$ (Recordemos que cada número real es cota superior e inferior de $\emptyset$), se escribe:

$$\sup \emptyset = -\infty \text{ e } \inf \emptyset = \infty$$

NOTA. *En todo caso, se dice que el* $\sup A$ *e* $\inf A$ *existen si son un úmero finito.*

1.2. Espacios métricos

Definición 6. *Sea X un conjunto y*

$$d : X \times X \to \mathbb{R} \ni$$

$\forall a, b, c \in X$ *satisface:*

1. *Positividad.* $d(a, b) \geq 0$; $d(a, b) = 0 \iff a = b$.

2. *Simetría.* $d(a, b) = d(b, a)$.

3. *Desigualdad triiangular.* $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, d)$, *entonces* (X, d) *es un espacio métrico y* d *es una métrica sobre* X *o una distancia sobre* X.

Proposición 3 (Reordonamiento de la desigualdad triangular)**.** *Si* (X, d) *es un espacio métrico y si* $a, b, c \in X$, *entonces:*

$$|d(a, b) - d(b, c)| \leq d(a, c).$$

Ejemplo 6. 1. *Sea* $X = \mathbb{R}$ *y* $d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni d_1(a, b) = |a - b|$. $\implies (\mathbb{R}, d_1)$ *es un espacio métrico. En efecto, sean* $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Entonces:*

   a) *Pior definición,* $d_1(a, b) = |a - b| \geq 0$.

      1) *Si* $d(a, b) = |a - b| = 0 \implies a - b = 0 \implies a = b$.

      2) *Si* $a = b \implies d(a, b) = |a - a| = |0| = 0$.

   b) $d(a, b) = |a - b| = | - (a - b)| = |b - a| = d(b, a)$.

   c) $d(a, b) = |a - b| = |(a - c) + (c - d)| \leq |a - c| + |c - b| = d(a, c) + d(c, b)$.

2. *Cada conjunto admite una métrica. Sea $X \neq \emptyset$, entonces se define la métrica discreta así:* $d : X \times X \to \mathbb{R} \ni$

$$d(a,b) = \begin{cases} 1, & a \neq b \\ 0, & a = b \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ (X, d) *es espacio métrico.*

Ejemplo 7 (Métrica Euclidiana en $\mathbb{R}^n$)**.** *Sea* $X = \mathbb{R}^n$ *y sean:* $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. *Definamos:* $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ni$

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\,.$$

$\Longrightarrow$ $(\mathbb{R}^n, d_2)$ *es métrica.*

Lema 6. *Sean* $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$, *números reales cualquiera. Entonces, se cumplen:*

1. *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$
$$(\overline{a} \cdot \overline{b}) \leq \|\overline{a}\| \cdot \|\overline{b}\|$$

2. *Desigualdad de Minkowski*

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2\right]^{1/2} \leq \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right] + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right]^{1/2}$$

Ejemplo 8. *Considere* $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ni$

$$d_\infty(x,y) = \max\left\{|x_i - y_i| : i = 1, \cdots, n\right\}.$$

$\Longrightarrow$ d_∞ *es una métrica en* $\mathbb{R}^n$.

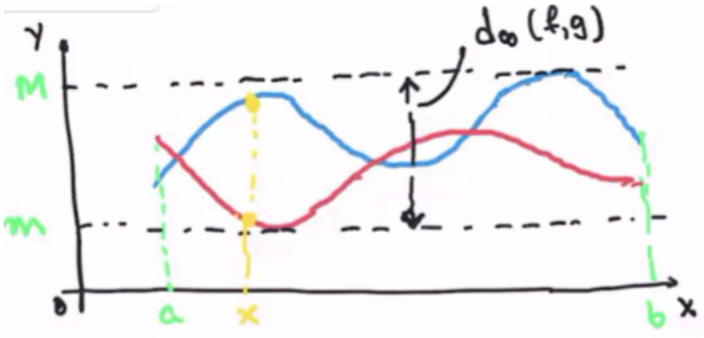
Ejemplo 9. $x = (2, 3, 4)$ *y* $y = (-1, 2, 0)$.

$$\implies d_\infty(x, y) = \text{máx}\{|2 - (-1)|, |3 - 2|, |4 - 0|\} = \text{máx}\{3, 1, 4\} = 4.$$

Ejemplo 10. *Sea* $B([a, b])$ *el conjunto de funciones acotadas definidas en* $[a, b]$ *y de valores reales. También se denota:*

$$l^\infty([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \ni |f(x)| \leq M, M > 0\}$$

. $\implies$ *Dadas* $f, g \in l^\infty[a, b]$.



$\implies d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|\}$, *la cual es una métrica en* $l^\infty[a, b]$ *y se llama métrica o distancia del supremo.*

Ejemplo 11. *Sea* $C[a, b]$ *el conjunto de funciones continuas sobre* $[a, b]$ *con valores reales. Entonces, si* $f, g \in C[a, b]$, *se tiene la métrica:*

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

sobre $C[a, b]$.

Definición 7. *Suponga que* V *es un espacio vectorail sobre el campo* $\mathbb{F}$ *(*$\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*) y que:*

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R} \ni$$

$\forall x, y \in V$ *y* $\alpha \in \mathbb{F}$ *se cumplen:*

1. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0$.

2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Entonces, $\|\cdot\|$ es una norma sobre V y decimos que $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

NOTA. *Sea V un espacio vectorial normado. Entonces, considere:*

$$d : V \times V \to \mathbb{R} \ni$$

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Nótese que:

1. $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$;

   a) *Si* $x = y \implies d(x,y) = \|x-y\| = 0$.

   b) *Si* $d(x,y) = \|x-y\| = 0 \implies x-y=0 \implies x=y$.

2. $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = |-1| \cdot \|y-x\| = \|y-x\| = d(y,x)$.

3. $d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq \|x- <\|+|z-y\| = d(x,z)+d(z,y)$.
   $\implies d(x,y) = \|x-y\|$ *es una métrica sobre V. Esta es la métrica inducida por la norma.*