Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2033 - Teoría de Conjuntos - Catedrático: Nancy Zurita
25 de septiembre de 2021

HT 7

1. Sección

Instrucciones: Resuelva los siguientes problemas:

Problema 1.1. *Sea* $A = \mathbb{Z}$*, si se define una relación* $\approx$ *sobre* A *tal que:* $x \approx y$ *si* $x - y \in \mathbb{Z}$*. Determine si la relación* $\approx$ *es: reflexiva, simétrica, transitiva, antisimétrica, de orden parcial y/o de equivalencia. Si la relación es de equivalencia construya el conjunto cociente.*

Demostración. content... ■

Problema 1.2. *Dado* X *un conjunto no vacío, muestre que existe una única relación de equivalencia* R *sobre* X*, tal que el conjunto cociente es un conjunto unitario.*

Demostración. content... ■

Problema 1.3. *Demuestre que si* R *y* S *son relaciones de equivalencia la intersección entre ellas también es relación de equivalencia. ¿Es la unión relación de equivalencia?*

Demostración. content... ■

Problema 1.4. *Sea* $f : X \to Y$ *una función sobreyectiva, con* X *un conjunto no vacío. Defina la relación* $E = \{(a, b) \mid \quad f(a) = f(b)\}$

1. *Muestre que* E *es una relación de equivalencia.*

   Demostración. content... ■

2. *Demuestre que los conjuntos* Y *y* E/X *son equipotentes (i.e. existe una función biyectiva entre* Y *y* E/X*).*

   Demostración. content... ■

2. Sección

Instrucciones: Resuelva los siguientes ejercicios del libro de Pinter:

2.1. Capítulo 3

2.1.1. Ejercicios 3.2

Problema 2.1. *(Problema 2) Let G be a relation in A; prove each of the following:*

1. *G is irreflexive if and only if $G \cap I = \varnothing$.*

   Demostración. Sea

   ($\Longrightarrow$) Supóngase G no es reflexiva, $\forall x \in A \ni (x,x) \notin G$. Sea

$$\begin{aligned}(x,y) \in G \cap I &\implies (x,y) \in G \wedge \underbrace{(x,y)}_{x=y} \in I \\ &\implies \underbrace{(x,x) \in G}_{(\to\leftarrow)} \wedge (x,x) \in I\end{aligned}$$

   $\therefore \forall (x,y) \notin G \cap I \implies G \cap I = \varnothing.$

   ($\Longleftarrow$) Supóngase $G \cap I = \varnothing$. Sea $(x,y) \in G$, pero como $G \cap I = \varnothing \implies I \nsubseteq G \implies \forall x \in A \ni (x,x) \notin G \implies G$ no es reflexiva.

   $\therefore G \cap I = \varnothing.$ ∎

2. *G is asymmetric if and only if $G \cap G^{-1} = \varnothing$.*

   Demostración. Sea

   ($\Longrightarrow$) Supóngase G es asimétrica, tal que

$$\begin{aligned}(x,y) \in G \cap G^{-1} &\implies \underbrace{(x,y) \in G}_{\substack{\text{definición}\\ \text{asimetría}}} \wedge (x,y) \in G^{-1} \\ &\implies (y,x) \notin G \wedge (y,x) \in G (\to\leftarrow)\end{aligned}$$

   $\therefore (x,y) \notin G \cap G^{-1}. \therefore G \cap G^{-1} = \varnothing.$

   ($\Longleftarrow$) Supóngase $G \cap G^{-1} = \varnothing$, tal que

$$\begin{aligned}(x,y) \in G \wedge (y,x) \in G &\implies (x,y) \in G \wedge (x,y) \in G^{-1} \\ &\implies (x,y) \in G \cap G^{-1} = \varnothing \\ &\implies (y,x) \notin G.\end{aligned}$$

   $\therefore G$ es asimétrica.

   $\therefore G \cap G^{-1} = \varnothing.$

   ∎

3. *G is intransitive if and only if $(G \circ G) \cap G = \varnothing$.*

Demostración. Sea

$(\implies)$ Sea G intransitiva, tal que

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in (G \circ G) \cap G &\implies (x,y) \in (G \circ G) \wedge (x,y) \in G \\
&\implies \underbrace{[\exists z \ni (x,z) \in G \wedge (z,y) \in G]}_{\substack{\text{definición} \\ \text{intransitiva}}} \wedge (x,y) \in G \\
&\implies (x,y) \notin G \wedge (x,y) \in G (\rightarrow\leftarrow)
\end{aligned}
$$

$\therefore (x,y) \notin (G \circ G) \cap G \implies (G \circ G) \cap G = \varnothing.$

$(\impliedby)$ Sea $(G \circ G) \cap G = \varnothing$ tal que,

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in G \wedge (x,y) \in G &\implies [\exists z \ni (x,z) \in G \wedge (z,y) \in G] \wedge (x,y) \in G \\
&\implies (x,y) \in (G \circ G) \wedge (x,y) \in G \\
&\implies (x,y) \in (G \circ G) \cap G = \varnothing \\
&\implies (x,y) \notin G
\end{aligned}
$$

$\therefore G$ es intransitiva.

$\therefore (G \circ G) \cap G = \varnothing.$

■

Problema 2.2. *(Problema 3) Show that if is an equivalence relation in A, then $G \circ G = G$.*

Demostración. Supóngase que tenemos una relación de equivalencia en A (i.e. reflexivo, simétrico y transitivo) tal que,

$(\implies)$ Sea

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in G \circ G &\implies \exists z \ni \underbrace{(x,z) \in G \wedge (z,y) \in G}_{\substack{\text{definición} \\ \text{transitividad}}} \\
&\implies (x,y) \in G
\end{aligned}
$$

$\therefore G \circ G \subseteq G.$

$(\impliedby)$ Sea

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in G &\implies \underbrace{(x,x) \in G}_{\substack{\text{definición} \\ \text{reflexividad}}} \wedge (x,y) \in G \\
&\implies \exists z = x \ni (x,z) \in G \wedge (z,y) \in G \\
&\implies (x,y) \in G \circ G
\end{aligned}
$$

$\therefore G \subseteq G \circ G.$

$\therefore G \circ G = G.$ ■

Problema 2.3. *(Problema 7) Let G and H be relations in A; suppose that G is reflexive and H is reflexive and transitive. Show that $G \subseteq H$ if and only if $G \circ H = H$. (In particular, this holds if G and H are equivalence relations.)*

Demostración. Sea G reflexiva y H reflexiva y transitiva.

$(\implies)$ Sea $G \subseteq H$, tal que

$(\implies)$ Sea

$$\begin{aligned}(x,y) \in G \circ H &\implies \exists z \ni \underbrace{(x,z) \in G}_{\text{hipótesis}} \wedge (z,y) \in H \\ &\implies \exists z \ni \underbrace{(x,z) \in H \wedge (z,y) \in H}_{\substack{\text{definición} \\ \text{transitividad}}} \\ &\implies (x,y) \in H\end{aligned}$$

$\therefore G \circ H \subseteq H.$

$(\impliedby)$ Sea

$$\begin{aligned}(x,y) \in H &\implies \underbrace{(x,x) \in G}_{\substack{\text{definición} \\ \text{reflexividad}}} \wedge (x,y) \in H \\ &\implies \exists z = x \ni (x,z) \in G \wedge (z,y) \in H \\ &\implies (x,y) \in G \circ H\end{aligned}$$

$\therefore H \subseteq G \circ H.$

$\therefore G \circ H = H.$

$(\impliedby)$ Sea $G \circ H = H$, tal que

$$\begin{aligned}(x,y) \in G &\implies (x,y) \in G \wedge \underbrace{(y,y) \in H}_{\substack{\text{definición} \\ \text{reflexividad}}} \\ &\implies \exists z = y \ni (x,z) \in G \wedge (z,y) \in H \\ &\implies \underbrace{(x,y) \in G \circ H}_{\text{hipótesis}} \\ &\implies (x,y) \in H\end{aligned}$$

$\therefore G \subseteq H.$

■

2.1.2. Ejercicios 3.3

Problema 2.4. *(Problema 10) Suppose $f : A \to B$ is an injective function, and $\{A_i\}_{i\in I}$ is a partition of A. Prove that $\left\{\bar{f}(\mathrm{A_i})\right\}_{i\in I}$ is a partition of $\bar{f}(\mathrm{A})$.*

Demostración. content... ■

2.1.3. Ejercicios 3.4

Problema 2.5. *(Problema 3) Let $f : A \to B$ be a function and let G be an equivalence relation in B. Prove that $\breve{f}(\mathrm{G})$ is an equivalence relation in A.*

Demostración. content... ■

2.1.4. Ejercicios 3.5

Problema 2.6. *(Problema 3) Let $f : A \to B$ be a function and let G be an equivalence relation in B. Prove that $\breve{f}(\mathrm{G})$ is an equivalence relation in A.*

Demostración. content... ■

2.2. Capítulo 4

2.2.1. Ejercicios 4.2

Problema 2.7. *(Problema 2) Let $f : A \to B$ be an increasing function. If C is a chain of A, prove that $\bar{f}(C)$ is a chain of B.*

Demostración. content... ■

2.2.2. Ejercicios 4.3

Problema 2.8. *(Problema 10) Let A and B be partially ordered classes, and let $f : A \to B$ be an isomorphism. Prove each of the following:*

1. *a is a maximal element of A iff $f(a)$ is a maximal element of B.*

   Demostración. content... ■

2. *a is the greatest element of A iff $f(a)$ is the greatest element of B.*

   Demostración. content... ■

3. *Suppose $C \subseteq A; x$ is an upper bound of C iff $f(x)$ is an upper bound of $\bar{f}(C)$.*

   Demostración. content... ■

4. *$b = \sup C$ iff $f(b) = \sup \bar{f}(C)$.*

   Demostración. content... ■

2.2.3. Ejercicios 4.5

Problema 2.9. *(Problema 1) Let A be a fully ordered set. Prove that the set of all sections of A (ordered by inclusion) is fully ordered.*

Demostración. content... ■

Problema 2.10. *(Problema 9) Let A be a well-ordered class; prove the following:*

1. *The intersection of any family of sections of A is a section of A.*

   Demostración. content... ■

2. *The union of any family of sections of A is a section of A.*

   Demostración. content... ■

2.2.4. Ejercicios 4.6

Problema 2.11. *(Problema 4) Let A and B be well-ordered classes. Prove that if $f : A \to B$ and $g : B \to A$ are isomorphisms, then $g = f^{-1}$.*

Demostración. content... ■