Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2033 - Teoría de Conjuntos - Catedrático: Nancy Zurita
3 de agosto de 2021

HT 3

1. Leer las secciones 2.7 (Axioma del conjunto Potencia) y 2.8 (Producto Cartesiano entre conjuntos)
2. Prepararse para presentar dichos ejercicios en clase el día jueves 30 de Julio .

1. Página 32

Resolver todos los ejercicios de la página 32 (Total 6).

Problema 1.1. *Hallar:* $\mathcal{P}\{Arquímedes\}, \mathcal{P}\mathcal{P}\{Arquímedes\}, \mathcal{P}\{\{Arquímedes, Newton\}, \varnothing\}$.

Solución. Tenemos:

1. $\mathcal{P}\{\text{Arquímedes}\} = \{\varnothing, \text{Arquímedes}\}$
2. $\mathcal{P}\mathcal{P}\{\text{Arquímedes}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\text{Arquímedes}\}, \{\varnothing, \text{Arquímedes}\}\}$
3. $\mathcal{P}\{\{\text{Arquímedes}, Newton\}, \varnothing\} = \{\varnothing, \{\{\text{Arquímedes}, Newton\}\}, \{\varnothing\}, \{\text{Arquímedes}, Newton\}\}$

$\square$

Problema 1.2. *Hallar:* $\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\varnothing$.

Solución. Considerando $\mathcal{P}\varnothing = \{\varnothing\}$.

$$\implies \mathcal{P}\mathcal{P}\varnothing = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \implies \mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\varnothing = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

$\square$

Problema 1.3. *Demostrar los teoremas 88 y 90.*

88. $\varnothing \in \mathcal{P}A$.

Demostración. Previamente, conocíamos que $\varnothing \subseteq A$. $\therefore$ Por teorema de caracterización,

$$\varnothing \subseteq A \implies \varnothing \in \mathcal{P}A.$$

■

99. $\mathcal{P}\mathcal{P}\varnothing = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Demostración. Se cumple trivialmente por la definición, ver el **Problema 1.2**. ■

Problema 1.4. *Demostrar el teorema 93.* $\mathcal{P}(A \cap B) = (\mathcal{P}A) \cap (\mathcal{P}B)$.

Demostración. $C \in \mathcal{P}(A \cap B) \iff C \subseteq (A \cap B) \iff C \subseteq A \wedge C \subseteq B \iff C \in \mathcal{P}A \wedge C \in \mathcal{P}B \iff C \in [(\mathcal{P}A) \cap (\mathcal{P}B)]$. $\therefore$ $\mathcal{P}(A \cap B) = (\mathcal{P}A) \cap (\mathcal{P}B)$ ■

Problema 1.5. *Demostrar teorema 94.* $\mathcal{P}(A \sim B) \subseteq ((\mathcal{P}A) \sim (\mathcal{P}B)) \cup \{\varnothing\}$.

Demostración. Tenemos dos casos:

1. $A \sim B$ no es vacío. $C \in \mathcal{P}(A \sim B) \iff C \subseteq (A \sim B) \iff C \subseteq A \wedge C \nsubseteq B \iff C \in \mathcal{P}A \wedge C \notin \mathcal{P}B \implies C \in [(\mathcal{P}A) \sim (\mathcal{P}B)]$.
2. $A \sim B$ es vacío. $\implies \mathcal{P}(A \sim B) = \{\varnothing\}$.

Por lo tanto, $\mathcal{P}(A \sim B) \subseteq ((\mathcal{P}A) \sim (\mathcal{P}B)) \cup \{\varnothing\}$. ■

Problema 1.6. *Dar contraejemplos para mostrar que no siempre es el caso de que*

1. $(\mathcal{P}A) \cup (\mathcal{P}B) = \mathcal{P}(A \cup B)$.

Solución. Supóngase que tenemos un conjunto $A = \{0, 1\}$ y $B = \{2\}$.

a) $(\mathcal{P}A) \cup (\mathcal{P}B)$. Implica $\mathcal{P}A = \{0, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$, $\mathcal{P}B = \{0, \{2\}\}$. Entonces,

$$(\mathcal{P}A) \cup (\mathcal{P}B) = \{0, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{2\}\}.$$

b) $\mathcal{P}(A \cup B)$. Implica $A \cup B = \{0, 1, 2\}$. Entonces

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \{0, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

Por lo tanto, $(\mathcal{P}A) \cup (\mathcal{P}B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$ □

2. $\mathcal{P}(A \sim B) = (\mathcal{P}A) \sim (\mathcal{P}B)$.

Solución. Supóngase que $A = \{2, 1\}$ y $B = \{2\}$.

a) $\mathcal{P}(A \sim B)$. Implica $A \sim B = \{1\}$. Entonces $\mathcal{P}(A \sim B) = \{0, \{1\}\}$.

b) $(\mathcal{P}A) \sim (\mathcal{P}B)$. Implica $(\mathcal{P}A) = \{0, \{2\}, \{1\}, \{2, 1\}\}$ y $(\mathcal{P}B) = \{0, \{2\}\}$. Entonces:

$$(\mathcal{P}A) \sim (\mathcal{P}B) = \{\{1\}, \{2, 1\}\}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{P}(A \sim B) \neq (\mathcal{P}A) \sim (\mathcal{P}B).$$

□

2. Página 34

Resolver todos los ejercicios de la página 34 (Total 6)

Problema 2.1. *Demostrar los teoremas 96 y 97 .*

96. $x \in A \times B \iff (\exists y)(\exists z)(y \in A \wedge z \in B \wedge x = \langle y, z\rangle)$.

Demostración. Inmediatamente por el teorema de existencia. Sea $A \times B = A \times B$, entonces $\forall x \in A \times B \iff (\exists y)(\exists z)(y \in A \wedge z \in B \wedge x = \langle y, z\rangle)$. ∎

97. $\langle x, y\rangle \in A \times B \iff x \in A \wedge y \in B$.

Demostración. Inmediatamente por la definición. Sea $A \times B = \{\langle x, y\rangle : x \in A \wedge y \in B\}$. Por lo tanto, $\langle x, y\rangle \in A \times B \iff x \in A \wedge y \in B$. ∎

Problema 2.2. *Demostrar el teorema 101.* $B \subseteq C \implies A \times B \subseteq A \times C$.

Demostración. Por hipótesis, $B \subseteq C \iff (y \in B \implies y \in C)$. Entonces, supóngase que $\langle x, y\rangle \in A \times B \implies x \in A \wedge y \in B \implies x \in A \wedge y \in C \implies \langle x, y\rangle \in A \times C$. $\therefore A \times B \subseteq A \times C$. ∎

Problema 2.3. *Demostrar los teoremas 103 y 104.*

103. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Demostración. Supóngase $\langle x, y\rangle \in [A \times (B \cup C)] \iff x \in A \wedge [y \in (B \cup C)] \iff x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \iff (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \iff \langle x, y\rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$. $\therefore A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$. ∎

104. $A \times (B \sim C) = (A \times B) \sim (A \times C)$.

> *Nótese que* $\langle x, y\rangle \notin A \times B \iff x \notin A \vee x \notin B$.

Demostración. $\langle x, y\rangle \in A \times (B \sim C) \iff x \in A \wedge [y \in (B \sim C)] \iff x \in A \wedge [(y \in B) \wedge (y \notin C)] \iff [(x \in A) \wedge (y \in B)] \wedge (y \notin C) \iff \langle x, y\rangle \in (A \times B) \sim (A \times C)$. ∎

Problema 2.4. *Dar un contra-ejemplo simple para mostrar que, en general, no es el caso de que*

$$A \cup (B \times C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

Demostración. Supóngase $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}$. Comprobamos:

1. $A \cup (B \times C)$. Determinamos, $(B \times C) = \{\langle 2, 3\rangle\}$ tal que $A \cup (B \times C) = \{1, \langle 2, 3\rangle\}$
2. $(A \times B) \cup (A \times C)$. Determinamos, $(A \times B) = \{\langle 1, 2\rangle\}$ y $(A \times C) = \{\langle 1, 3\rangle\}$. Entonces, $(A \times B) \cup (A \times C) = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$

Por lo tanto,

$$A \cup (B \times C) \neq (A \times B) \cup (A \times C)$$

∎

Problema 2.5. *¿Es asociativa la operación producto cartesiano? Si lo es, demostrarlo. Si no, dar un contra-ejemplo.*

Solución. Procedemos con un contraejemplo para deducir que

$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$$

Sea $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}$, entonces

1. $A \times (B \times C)$. Determinamos $(B \times C) = \{\langle 2, 3\rangle\}$. Por lo tanto, $A \times (B \times C) = \{\langle 1, \langle 2, 3\rangle\rangle\}$.
2. $(A \times B) \times C$. Determinamos $(A \times B) = \{\langle 1, 2\rangle\}$. Por lo tanto, $(A \times B) \times C = \{\langle\langle 1, 2\rangle, 3\rangle\}$

Por lo tanto, no es asociativa. $\square$

Problema 2.6. *Demostrar que*

$$A \times \bigcap B = \bigcap_{C \in B} (A \times C) = \bigcap (A \times B)$$

Según Suppes,

$$\bigcup A = \bigcup_{B \in A} B \quad \text{y} \quad \bigcap A = \bigcap_{B \in A} B$$

Demostración. $\langle x, y\rangle \in A \times \bigcap B \iff x \in A \wedge y \in \bigcap B \iff (x \in A) \wedge [(\forall C)(C \in B \implies x \in C) \wedge (\exists C)(C \in B)] \iff (\forall C)(x \in A \wedge x \in C) \wedge (\exists C)(C \in B) \iff \bigcap_{C \in B}(A \times C)$. $\blacksquare$