

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

MM2033- 2 SEMESTRE - 2021

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA APLICADA

TEORÍA DE CONJUNTOS

Catedrático: Nancy Zurita

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzoyay

Carné: 19857

Correo: rom19857@uvg.edu.gt

14 de julio de 2021

Índice

1	Sesión 2	1
1.1	Axiomática	1
2	Sesión 3	4

1. Sesión 2

1.1. Axiomática

A0: (Axioma de vacío) Existe vacío. Notación: \emptyset .

A1: (Axioma de extensión) $\forall x(x \in A \iff x \in B) \implies A = B$.

A2: (Esquema axiomático de separación) $\exists B \forall x \ni (x \in B \iff [x \in A \wedge \Phi(x)])$.

Definición 1. (*Conjunto*) y es conjunto $\iff (\exists x(x \in y)) \vee (y = \emptyset)$.

Definición 2. (*No pertenencia*) $x \notin y \iff \neg(x \in y)$.

Teorema 1. $\forall x, x \notin \emptyset$.

Teorema 2. $\forall x, x \notin A \iff A = \emptyset$.

Definición 3. (*Contención*) $A \subseteq B \iff \forall x(x \in A \implies x \in B)$.

Definición 4. (*Contención estricta*) $A \subset B \iff (A \subseteq B \wedge A \neq B)$.

Teorema 3. $A \subseteq \emptyset \implies A = \emptyset$.

Teorema 4. $\neg(A \subset A)$.

A0: AXIOMA DE VACÍO

Existe vacío.

Notación: \emptyset

A1: AXIOMA DE EXTENSIÓN

$$\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B$$

A2: ESQUEMA AXIOMÁTICO DE SEPARACIÓN

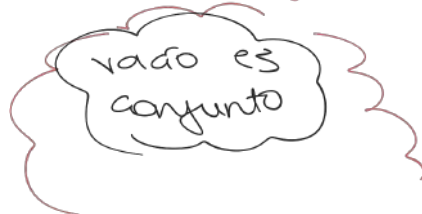
$$\exists B \forall x \exists (x \in B \Leftrightarrow [x \in A \wedge \Phi(x)])$$

DEFINICIÓN DE NO PERTENENCIA

$$x \notin y \Leftrightarrow \neg(x \in y)$$

DEFINICIÓN DE CONJUNTO

$$y \text{ es conjunto} \Leftrightarrow (\exists x (x \in y) \vee y = \emptyset)$$

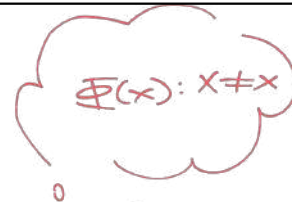


Construye
conjunto.

TEOREMAS

$$1. \forall x, x \notin \emptyset$$

dem: Sea $\Phi(x)$ la expresión $x \neq x$. Por esquema axiomático de separación,
 $\exists B \forall x \exists (x \in B \Leftrightarrow x \neq x)$. Supóngase
 $\exists x \in B \Rightarrow x \neq x$ (falso) $\Rightarrow \forall x, x \notin B$. Por
 definición de conjunto $B = \emptyset \Rightarrow \forall x, x \notin \emptyset$. \square



A2: ESQUEMA AXIOMÁTICO DE SEPARACIÓN

$$\exists B \forall x \exists (x \in B \Leftrightarrow [x \in A \wedge \Phi(x)])$$

conjunto !!

$$2. \forall x, x \notin A \Leftrightarrow A = \emptyset$$

vacío
único
es como
conjunto

dem:

(\Rightarrow) Si $\forall x, x \notin A \Rightarrow$ Por definición
de conjunto, $A = \emptyset$.

(\Leftarrow) Si $A = \emptyset \Rightarrow$ Por teorema anterior
 $\forall x, x \notin \emptyset = A \Rightarrow \forall x, x \notin A$.

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$$

* DEFINICIÓN DE CONTENCIÓN

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

** DEFINICIÓN DE CONTENCIÓN ESTRICTA

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ y } A \neq B)$$

P	Q	P \Rightarrow Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

TEOREMAS

1. $A \subseteq \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$

dem: Sea A un conjunto $\neg A \subseteq \emptyset$.
 $\Rightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in \emptyset)$. Se asume que
 la implicación es verdadera, también lo
 es su contrapuesta. Es decir, $\forall x (x \notin \emptyset \Rightarrow x \notin A)$.
 Como $\forall x, x \notin \emptyset$ es siempre verdadero \Rightarrow
 $\forall x, x \notin A$ es verdadero $\Rightarrow A = \emptyset$ \square

2. $\neg(A \subset A)$

dem: Sea A un conjunto. Supóngase
 que $A \subset A \Rightarrow A \subseteq A \text{ y } A \neq A \Rightarrow A \neq A$.
 Además, $A \subseteq A \Rightarrow A \subseteq A \text{ y } A \subseteq A \Rightarrow$
 $\forall x [x \in A \Rightarrow x \in A] \text{ y } \forall x [x \in A \Rightarrow x \in A]$
 $\Rightarrow \forall x [x \in A \Leftrightarrow x \in A] \Rightarrow A = A$ por
 Axioma de Extensión. ~~(\times)~~.

$\therefore \neg(A \subset A)$ \square

2. Sesión 3

Teorema 5. (Construcción de la intersección) $\exists! C, \forall x \ni (x \in C \iff x \in A \wedge x \in B)$.

Definición 5. $A \cap B = y \iff [\forall x (x \in y \iff [x \in A \wedge x \in B])] \wedge y \text{ es conjunto.}$

Teorema 6. (Varios)

1. $x \in A \cap B \iff [x \in A \wedge x \in B]$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

A3: (De la unión) $\exists C \forall x \ni (x \in C \iff [x \in \forall x \in B])$.

Teorema 7. (Construcción de la unión) $\exists! C, \forall x \ni (x \in C \iff [x \in A \vee x \in B])$

Definición 6. $A \cup B = y \iff [\forall x (x \in y \iff [x \in A \vee x \in B])] \wedge y \text{ es conjunto.}$

Teorema 8. (Varios)

1. $x \in A \cup B \iff [x \in A \vee x \in B]$
2. $A \cup A = A$
3. $A \cup \emptyset = A$
4. $A \cup B = B \cup A$
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

A0 A. Vacío

A1 A. Extensión (Unicidad - Cuando hay igualdad)

A2 Existencia.

A3 Existencia.

Teorema 9. (Construcción de la diferencia de conjuntos) $\exists! C, \forall x \ni (x \in C \iff [x \in A \wedge x \notin B])$.

Definición 7. $A \sim B = y \iff [\forall x (x \in y \iff [x \in A \wedge x \notin B])] \wedge y \text{ es conjunto.}$

Teorema 10. (Varios)

1. $x \in A \sim B \iff [x \in A \wedge x \notin B]$.
2. $A \sim A = \emptyset$.

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE LA INTERSECCIÓN

$$\exists! C, \forall x \exists (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \vee x \in B])$$

Existencia Sea $\Phi(x): x \in B$. Por EAS

$$\exists C \forall x \exists (x \in C \Leftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x)))$$

$$\therefore \exists C \forall x \exists [x \in C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)]$$

Unicidad Supóngase $\exists C' \forall x \exists [x \in C' \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)]$

$$\text{Si } x \in C' \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in C$$

$$\therefore [x \in C' \Leftrightarrow x \in C] \text{ Por Axioma de Extensión}$$

$$\text{Si } \forall x \in C' \Leftrightarrow x \in C \Rightarrow [C' = C]$$

$\therefore C$ es único

$$\boxed{\exists! C \forall x \exists (x \in C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B))}$$

DEFINICIÓN

$$A \cap B = y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \forall x (x \in y \Leftrightarrow [x \in A \wedge x \in B]) \\ \wedge \\ y \text{ es conjunto} \end{array} \right]$$

TEOREMAS

1. $x \in A \cap B \Leftrightarrow [x \in A \wedge x \in B]$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

① dem: Sea $A \cap B = A \cap B$.
Al aplicar la definición
 $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$.

② Sea $x \in A \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A$
 $\therefore [x \in A \Leftrightarrow x \in A \cap A]$

Por axioma de extensión
 $A = A \cap A$

$$\boxed{p \Rightarrow p \wedge p}$$

$p \wedge p \Rightarrow p$

TEOREMAS

1. $x \in A \cap B \Leftrightarrow [x \in A \wedge x \in B]$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

③ dem: Supóngase que $x \in A \cap \emptyset$.
 $\Rightarrow x \in A \wedge x \in \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset$ (✗)
 $\Rightarrow x \notin A \cap \emptyset, \forall x. \Rightarrow A \cap \emptyset = \emptyset$

A3: DE LA UNIÓN

$$\exists C \forall x \exists (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \vee x \in B])$$

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE LA UNIÓN

$$\exists! C, \forall x \exists (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \vee x \in B])$$

Existencia: Asegura Axioma de la Unión.
 Unicidad: Asegura Axioma de Extensión.

DEFINICIÓN

$$A \cup B = y \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x (x \in y \Leftrightarrow [x \in A \vee x \in B]) \\ \wedge \\ y \text{ es conjunto} \end{cases}$$

TEOREMAS

1. $x \in A \cup B \Leftrightarrow [x \in A \vee x \in B]$
2. $A \cup A = A$
3. $A \cup \emptyset = A$
4. $A \cup B = B \cup A$
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

① dem: Sabemos que $A \cup B = A \cup B$.
 De la definición,
 $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$.

② dem: Sea $x \in A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A$
 $\Rightarrow x \in A \Leftrightarrow x \in A \cup A$

Por Ax. de Extensión, $A = A \cup A$

③ dem: Sea $x \in A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in \emptyset \Leftrightarrow x \in A \cup \emptyset$

Por Ax. de Extensión, $A = A \cup \emptyset$.

A. vacío
 A. Ext.
 EAS
 A. Unión

Unicidad cuando hay igualdad.

Existencia

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE LA DIFERENCIA DE CONJUNTOS

$$\exists! C, \forall x \exists (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \wedge x \notin B])$$

Existencia: $\Phi(x): x \notin B$
 EAS

Unicidad: A. Ext.

DEFINICIÓN

$A \sim B = y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \forall x (x \in y \Rightarrow [x \in A \vee x \notin B]) \\ \wedge \\ y \text{ es conjunto} \end{array} \right]$

$A \sim B$
 \vee
 $A - B$

Considera \emptyset

TEOREMAS

1. $x \in A \sim B \Leftrightarrow [x \in A \vee x \notin B]$

2. $A \sim A = \emptyset$

① dem: Sabemos que $A \cap B = A \cap B$. Por definición

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

② dem: Sea $x \in A \cap A \Leftrightarrow$
 $x \in A \wedge x \in A$ (\rightarrow ~~$x \notin A$~~).
 $\forall x, x \notin A \cap A \Rightarrow A \cap A = \emptyset$