Universidad del Valle de Guatemala

MM2033- 2 semestre - 2021

Licenciatura en matemática aplicada

TEORÍA DE CONJUNTOS

Catedrático: Nancy Zurita

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay
Carné: 19857
Correo: rom19857@uvg.edu.gt

1 de septiembre de 2021

Índice

1. Sesión 2

1.1. Axiomática

A0: (Axioma de vacío) Existe vacío. Notación: $\varnothing$.

A1: (Axioma de extensión) $\forall x(x \in A \iff x \in B) \implies A = B$.

A2: (Esquema axiomático de separación) $\exists B\ \forall x \ni (x \in B \iff [x \in A \wedge \Phi(x)])$.

Definición 1. *(Conjunto) y es conjunto* $\iff (\exists x(x \in y)) \vee (y = \varnothing)$.

Definición 2. *(No pertenencia)* $x \notin y \iff \neg(x \in y)$.

Teorema 1. $\forall x, x \notin \varnothing$.

Teorema 2. $\forall x, x \notin A \iff A = \varnothing$.

Definición 3. *(Contención)* $A \subseteq B \iff \forall x(x \in A \implies x \in B)$.

Definición 4. *(Contención estricta)* $A \subset B \iff (A \subseteq B \wedge A \neq B)$.

Teorema 3. $A \subseteq \varnothing \implies A = \varnothing$.

Teorema 4. $\neg(A \subset A)$.

A0: AXIOMA DE VACÍO

Existe vacío.

Notación: $\emptyset$

DEFINICIÓN DE CONJUNTO

$y \text{ es conjunto } \Leftrightarrow (\exists x(x \in y) ó (y = \emptyset)$

vacío es conjunto

A1: AXIOMA DE EXTENSIÓN

$\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Longrightarrow A = B$

A2: ESQUEMA AXIOMÁTICO DE SEPARACIÓN

$\exists B \forall x \ni (x \in B \Leftrightarrow [x \in A \text{ y } \Phi(x)])$

Construye conjunto.

DEFINICIÓN DE NO PERTENENCIA

$x \notin y \Leftrightarrow \neg(x \in y)$

TEOREMAS

$\Phi(x): x \neq x$

1. $\forall x, x \notin \emptyset$

dem: Sea $\Phi(x)$ la expresión $x \neq x$. Por esquema axiomático de separación, $\exists B \forall x \ni (x \in \Phi \ \& \ x \neq x)$. Supóngase $\exists x \in B \Rightarrow x \neq x$ ($\Leftarrow\!\!\times$) $\Rightarrow \forall x, x \notin B$. Por definición de conjunto $B = \Phi \Rightarrow \forall x, x \notin \Phi$. ∎

A2: ESQUEMA AXIOMÁTICO DE SEPARACIÓN

$\exists B \forall x \ni (x \in B \Leftrightarrow [x \in A \text{ y } \Phi(x)])$

conjunto !!

---

2. $\forall x, x \notin A \Leftrightarrow A = \emptyset$

vacío es único como conjunto

dem:

($\Rightarrow$) Si $\forall x, x \notin A \rightarrow$ Por definición de conjunto, $A = \Phi$.

($\Leftarrow$) Si $A = \Phi \rightarrow$ Por teorema anterior $\forall x, x \in \Phi = A \Rightarrow \forall x, x \notin A$. ∎

$(p \Rightarrow q) \equiv (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

p	$\Rightarrow$	q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

* DEFINICIÓN DE CONTENCIÓN

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

** DEFINICIÓN DE CONTENCIÓN ESTRICTA

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ y } A \neq B)$$

TEOREMAS

1. $A \subseteq \emptyset \Longrightarrow A = \emptyset$

dem: Sea A un conjunto $\ni A \subseteq \Phi$.
$\Rightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in \Phi)$. Se asume que la implicación es verdadera, también lo es su contrapuesta. Es decir, $\forall x (x \notin \Phi \Rightarrow x \notin A)$.
Como $\forall x$, $x \notin \Phi$ es siempre verdadero $\Rightarrow$ $\forall x$, $x \notin A$ es verdadero $\Rightarrow A = \Phi$ ∎

2. $\neg(A \subset A)$

dem: Sea A un conjunto. Supóngase que $A \subset A \Rightarrow A \subseteq A$ & $A \neq A$. $\Rightarrow$ $A \neq A$.
Además, $A \subseteq A \Rightarrow A \subseteq A$ & $A \subseteq A \Rightarrow$
$\forall x [x \in A \Rightarrow x \in A]$ & $\forall x [x \in A \Rightarrow x \in A]$
$\Rightarrow \forall x [x \in A \Leftrightarrow x \in A] \Rightarrow A = A$ por Axioma de Extensión. $(\rightarrow\leftarrow)$.

$\therefore \neg(A \subset A)$. ∎

2. Sesión 3

Teorema 5. *(Construcción de la interesección)* $\exists! C, \forall x \ni (x \in C \iff x \in A \wedge x \in B)$.

Definición 5. $A \cap B = y \iff [\forall x (x \in y \iff [x \in A \wedge x \in B]) \wedge y \text{ } \textit{es conjunto.}]$

Teorema 6. *(Varios)*

1. $x \in A \cap B \Leftrightarrow [x \in A \text{ } y \text{ } x \in B]$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

A3: (De la unión) $\exists C \forall x \ni (x \in C \iff [x \in \vee x \in B])$.

Teorema 7. *(Construcción de la unión)* $\exists! C, \forall x \ni (x \in C \iff [x \in A \vee x \in B])$

Definición 6. $A \cup B = y \iff [\forall x (x \in y \iff [x \in A \vee x \in B]) \wedge y \text{ } \textit{es conjunto.}]$

Teorema 8. *(Varios)*

1. $x \in A \cup B \Leftrightarrow [x \in A \text{ } ó \text{ } x \in B]$
2. $A \cup A = A$
3. $A \cup \emptyset = A$
4. $A \cup B = B \cup A$
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

A0 A. Vacío

A1 A. Extensión (Unicidad - Cuando hay igualdad)

A2 Existencia.

A3 Existencia.

Teorema 9. *(Construcción de la diferencia de conjuntos)* $\exists! C, \forall x \ni (x \in C \iff [x \in \wedge x \notin B])$.

Definición 7. *Sea*

$$A \sim B = y \iff [\forall x (x \in y \iff [x \in A \wedge x \notin B]) \wedge y \text{ es conjunto.}]$$

Teorema 10. *(Varios)*

1. $x \in A \sim B \iff [x \in A \wedge x \notin B]$.

2. $A \sim A = \varnothing$.

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE LA INTERSECCIÓN

$\exists! C, \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \ y \ x \in B])$

Existencia Sea $\Phi(x): x \in B$. Por EAS

$\exists C \ \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ \underbrace{\Phi(x)}_{x \in B}))$

$\therefore \exists C \ \forall x \ni \boxed{[x \in C \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ x \in B)]}$

Unicidad Supóngase $\exists C' \ \forall x \ni \boxed{[x \in C' \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ x \in B)]}$

Si $x \in C' \Leftrightarrow x \in A \ \& \ x \in B \Leftrightarrow x \in C$

$\therefore \boxed{x \in C' \Leftrightarrow x \in C}$. Por Axioma de Extensión

Si $\forall x \in C' \Leftrightarrow x \in C \Rightarrow \boxed{C' = C}$

$\therefore C$ es único

$$\boxed{\exists! C \ \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ x \in B))}$$

DEFINICIÓN

$$A \cap B = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \forall x (x \in y \Leftrightarrow [x \in A \ y \ x \in B]) \\ \wedge \\ y \text{ es conjunto} \end{bmatrix}$$

TEOREMAS

1. $x \in A \cap B \Leftrightarrow [x \in A \ y \ x \in B]$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(1) dem: Sea $A \cap B = A \cap B$.
Al aplicar la definición
$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \ \& \ x \in B$. ∎

(2) Sea $\underbrace{x \in A}$ $\Leftrightarrow x \in A \ \& \ x \in A$

$\therefore \boxed{x \in A \Leftrightarrow x \in A \cap A}$

$\boxed{p \Rightarrow p \wedge p}$

$p \wedge q \Rightarrow p$

Por axioma de extensión
$A = A \cap A$ ∎

TEOREMAS

1. $x \in A \cap B \Leftrightarrow [x \in A \ y \ x \in B]$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(3) dem: Supóngase que $x \in A \cap \phi$.
$\Rightarrow x \in A \ \& \ x \in \phi \Rightarrow x \in \phi \ (\rightarrow\!\leftarrow)$
$\Rightarrow x \notin A \cap \phi, \ \forall x. \Rightarrow A \cap \phi = \phi$ ∎

A3: DE LA UNIÓN

$$\exists C \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B])$$

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE LA UNIÓN

$$\exists!\, C, \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B])$$

Existencia: Asegura Axioma de la Union.

Unicidad: Asegura Axioma de Extensión.

DEFINICIÓN

$$A \cup B = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \forall x (x \in y \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B]) \\ \wedge \\ y \text{ es conjunto} \end{bmatrix}$$

TEOREMAS

1. $x \in A \cup B \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B]$
2. $A \cup A = A$
3. $A \cup \emptyset = A$
4. $A \cup B = B \cup A$
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

dem:
1) Sabemos que $A \cup B = A \cup B$.
De la definición,
$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$. ■

2) dem: Sea $x \in A \Leftrightarrow \boxed{x \in A \vee x \in A}$
$\Rightarrow$ $x \in A \Leftrightarrow x \in A \cup A$
Por Ax. de Extensión, $A = A \cup A$ ■

3) dem: Sea $x \in A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in \phi \Leftrightarrow x \in A \cup \phi$
Por Ax. de Extensión, $A = A \cup \phi$. ■

A. Vacío
A. Ext
EAS
A. Unión

Unicidad cuando hay igualdad.

Existencia

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE LA DIFERENCIA DE CONJUNTOS

$$\exists!\, C, \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \text{ y } x \notin B])$$

Existencia: $\Phi(x): x \notin B$
EAS

Unicidad: A. Ext.

$A \sim B$

ó

$A - B$

DEFINICIÓN

$$A\sim B = y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\forall x(x \in y \Longrightarrow [x \in A \ \ y \ \ x \notin B]) \\ \wedge \\ y \ es \ conjunto\end{array}\right]$$

considera ϕ

TEOREMAS

1. $x \in A\sim B \Leftrightarrow [x \in A \ \ y \ \ x \notin B]$
2. $A\sim A = \emptyset$

① dem: Sabemos que $A \sim B = A \sim B$. Por definición

$x \in A\sim B \Leftrightarrow x \in A \ \& \ x \notin B$ ∎

② dem: Sea $x \in A \sim A \Leftrightarrow$

$x \in A \ \& \ x \notin A$ ($\rightarrow\!\leftarrow$).

$\forall x, x \notin A \sim A \Rightarrow A \sim A = \phi$ ∎

3. Sesión 4

A4: (De parejas) $\exists A \forall z \ni (z \in A \iff [z = x \vee z = y])$.

Teorema 11. *(Construcción de conjuntos con dos elementos)* $\exists! A \forall z \ni (z \in A \iff [z = x \vee z = y])$.

Definición 8. $w = \{x, y\} \iff [\forall z (z \in w \iff [z = x \vee z = y])]$

Teorema 12. *(Varios)*

1. $z \in \{x, y\} \iff [z = x \vee z = y]$.

2. $\{x, y\} = \{u, v\} \implies [(x = u \wedge y = v) \vee (x = v \wedge y = u)]$.

Teorema 13.

$$\{x\} = \{x, x\}$$

$$\{x, y, z\} = \{x, y\} \cup \{z\}$$

$$\{w, x, y, z\} = \{w, x\} \cup \{y, z\}$$

Teorema 14. $\{x\} = \{y\} \implies x = y$.

Definición 9. *(Pareja ordenada)*

1. $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

2. *Si* $\Delta \neq \Box \implies (x, y) = \{\{x, \Delta\}, \{y, \Box\}\}$

Teorema 15. $(x, y) = (u, v) \implies [x = u \wedge y = v]$

Si $A=B$ y $[x \in A = B$
$\Leftrightarrow x \in B]$

Condición $\longrightarrow$ $A=B$

A_0: Existe vacío
A_1: EAS
A_2: Extensión
A_3: Unión

Construyen conjuntos

ÚNICA

¿Qué conjunto existe?

VACÍO

AXIOMAS DE ZERMELO-FRAENKL

Parejas

2 "objetos"

Pares ordenados

A4: DE PAREJAS

$\exists A \forall z \ni (z \in A \Leftrightarrow [z = x \text{ ó } z = y])$

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE CONJUNTOS CON DOS ELEMENTOS

$\exists! A \forall z \ni (z \in A \Leftrightarrow [z = x \text{ ó } z = y])$

Existencia → Axioma de parejas.

Unicidad → Axioma de Extensión

DEFINICIÓN

$w = \{x, y\} \Leftrightarrow [\forall z (z \in w \Leftrightarrow [z = x \text{ ó } z = y])]$

TEOREMAS

1. $z \in \{x, y\} \Leftrightarrow [z = x \text{ ó } z = y]$

dem: Sea $\{x,y\} = \{x,y\}$ Entonces por definición. $\forall z \in \{x,y\} \Leftrightarrow [z = x \text{ ó } z = y]$.

2. $\{x, y\} = \{u, v\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = u & \wedge & y = v \\ & \text{ó} & \\ x = v & \wedge & y = u \end{bmatrix}$

dem: Sea $\{x,y\} = \{u,v\}$. Sabemos que $u \in \{u,v\} \Rightarrow u \in \{x,y\} \Rightarrow$

$z \in \{u,v\} \Leftrightarrow z = u$ ó $z = v$

- $u = x$ ó $u = y$. De igual manera:
- $v = x$ ó $v = y$
- $x = u$ ó $x = v$
- $y = u$ ó $y = v$

CASO 1: Si $x=y \Rightarrow u=x=y=v \Rightarrow \begin{bmatrix} x=u & \wedge & y=v \\ & \text{ó} & \\ x=v & \wedge & y=u \end{bmatrix}$

CASO 2: Si $x \neq y \Rightarrow x=u$ ó $y=u$.

- Si $x \neq u \Rightarrow y=u$ & $x=v$ ó
- Si $y \neq u \Rightarrow x=u$ & $y=v$

$\therefore$ Se cumple $\begin{bmatrix} x=u & \wedge & y=v \\ & \text{ó} & \\ x=v & \wedge & y=u \end{bmatrix}$ ∎

Unitarios

singleton!!

DEFINICIÓN: Ax. Parejas

$\{x\} = \{x,x\}$ ← Ax. Extensión

$\{x,y,z\} = \{x,y\} \cup \{z\}$ ← Ax. Unión

$\{w,x,y,z\} = \{w,x\} \cup \{y,z\}$ ← Ax. Unión

TEOREMA

$$\{x\} = \{y\} \Rightarrow x = y$$

Dem: Sea $\{x\} = \{y\} \Rightarrow \{x,x\} = \{y,y\}$. Por teorema anterior; $\begin{cases} x=y \text{ \& } x=y \Rightarrow x=y \\ \text{ó} \\ y=x \text{ \& } y=x \end{cases}$ ∎

DEFINICIÓN: PAREJA ORDENADA

$$(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$$

También, si $\Delta \neq \boxdot \Rightarrow (x,y) = \{\{x,\Delta\},\{y,\boxdot\}\}$

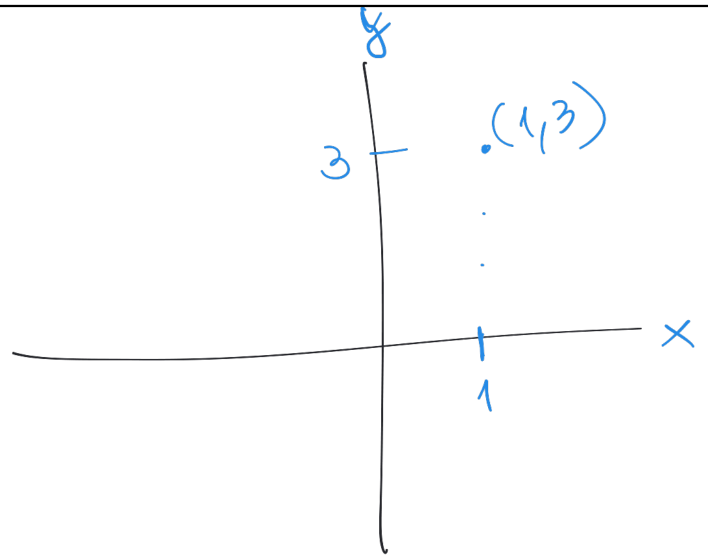
TEOREMA

$$(x,y) = (u,v) \Rightarrow [x = u \ \wedge \ y = v]$$

Leer pág. 23

Teorema 46

Ejercicio en clase 2



$(1,3)$

$$(1,3) = \{\{1\}, \{1,3\}\}$$

4. Sesión 5

Definición 10 (Por abstracción (EAS))**.** $\{x : \Phi(x)\}$

1. *Es la notación usual de conjunto.*

2. $\Phi(x)$*: Es el operador que nos da una nueva forma de ligar variables.*

Definición 11 (Esquema de definición)**.** $y = \{x : \Phi(x)\} \iff [\forall x(x \in y \iff \Phi(x)) \wedge y$ *es conjunto,*$] \vee [y = \varnothing \wedge \neg\exists B \forall x(x \in B \iff \Phi(x))]$

NOTA. *Si* x *es un conjunto*

$$\{x : \Phi(x)\} = \{x : x \text{ es conjunto y } \Phi(x)\}$$

Definición 12 (Esquema teoremático)**.** $x \in \{x : \Phi(x)\} \implies \Phi(y)$.

Teorema 16. $A = \{x : x \in A\}$

Teorema 17. $\{x : x \neq x\} = \varnothing$.

Teorema 18. *(Varios)*

1. $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

2. $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

3. $A\tilde{B} = \{x \in \wedge x \notin B\}$

Teorema 19. $\{x : x = x\} = \varnothing$

NOTA.
1. *Las definiciones que no necesitan un teorema que las justifique son axiomas.*

2. $\neg\exists A \forall x, x \in A$.

A5: Axioma de la suma. $\exists C \forall x \ni (x \in C \iff \exists B[x \in B \wedge B \in A])$.

Definición 13. $\cup A = \{x : \exists B[x \in B \wedge B \in A]\}$

Teorema 20. $x \in \cup A \iff \exists B[x \in B \wedge B \in A]$

Teorema 21. *(Varios)*

1. $\cup\varnothing = \varnothing$

2. $\cup\{\varnothing\} = \varnothing$

3. $\cup\{A\} = A$

4. $\cup\{A, B\} = A \cup B$

Definición 14. $\cap A = \{x : \forall B[B \in A \implies x \in B]\}$

Teorema 22. $x \in \cap A \iff (\forall B[B \in A \implies x \in B] \land \exists B(B \in A))$

Teorema 23.

1. $\cap\varnothing = \varnothing$

2. $\cap\{\varnothing\} = \varnothing$

AXIOMAS DE ZERMELO-FRAENKL

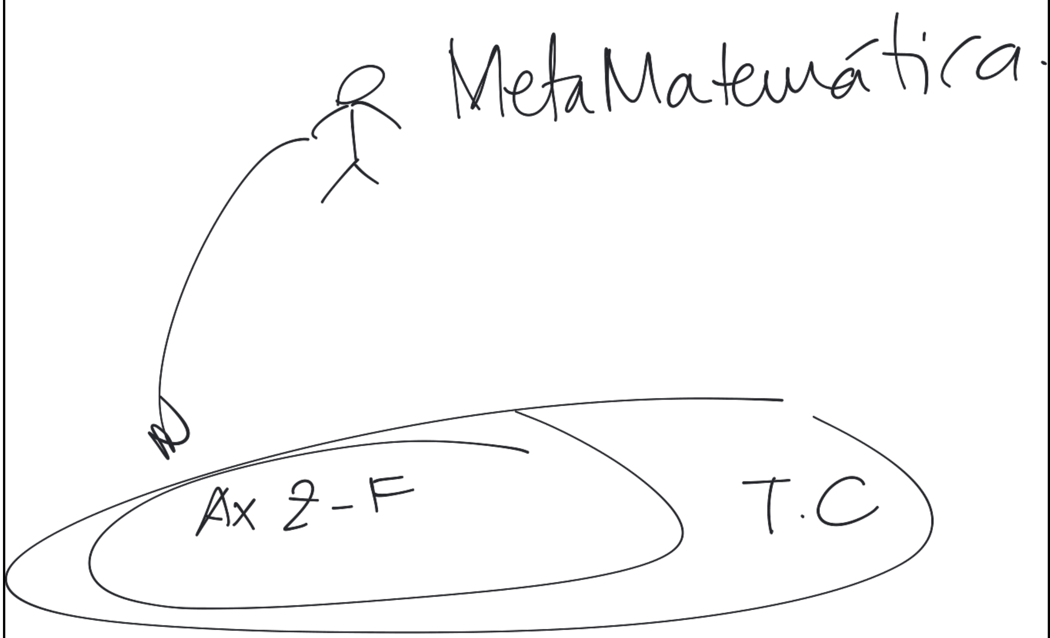
A0: $\exists\ \phi$
A1: Ax. Ext.
A2: EAS
A3: Ax. Unión.
A4: Ax. Parejas.

* Leer Cap. 1 Libro: Laberinto de conocimiento.

EAS

Definición por abstracción
$\{x : \Phi(x)\}$

- Es la notación usual de conjunto
- $\Phi(x)$: Es el operador que nos da una nueva forma de ligar variables



ESQUEMA DE DEFINICIÓN

$$y = \{x : \Phi(x)\} \iff \begin{array}{c} \forall x\big(x \in y \iff \Phi(x)\big) \;\wedge\; y \textit{ es conjunto} \\ \text{ó} \\ y = \emptyset \wedge \neg\exists B \forall x\big(x \in B \iff \Phi(x)\big) \end{array}$$

Nota: Si x es un conjunto

$$\underline{\{x : \Phi(x)\}} = \{x : x \textit{ es conjunto y } \Phi(x)\}$$

* diferentes tipos de conjuntos.

ESQUEMA TEOREMÁTICO

$$y \in \{x : \Phi(x)\} \Longrightarrow \Phi(y)$$

dem: Sea $y \in \{x : \Phi(x)\} \Rightarrow \{x : \Phi(x)\} \neq \emptyset$.

$\Rightarrow$ por esquema de def. $\Phi(y)$. $\blacksquare$

TEOREMA

$$A = \{x : x \in A\}$$

dem: Sea A un conjunto y $\Phi(x): x \in A$.
Por lógica sabemos que es verdadero
decir $(x \in A \Leftrightarrow x \in A) \Rightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow \Phi(x))$.
Por esquema de definición, $A = \{x : \Phi(x)\}$
$\Rightarrow A = \{x : x \in A\}$ ■

TEOREMA

$$\{x : x \neq x\} = \emptyset$$

dem: Supóngase que $y \in \{x : x \neq x\} \Rightarrow$
Por esquema teoremático, $y \neq y$ ($\Rightarrow\!\Leftarrow$).
$\Rightarrow y \notin \{x : x \neq x\}, \forall y . \Rightarrow \{x : x \neq x\} = \phi$. ■

TEOREMA

i. $A \cap B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\}$
ii. $A \cup B = \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}$
iii. $A \sim B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$

Por esquema teoremático

Nota:

1. Axioma: define objetos sin necesidad de teoremas que justifican.

2. ~~$\neg\exists A, \forall x, x\in A$~~ No existe el conjunto de todos los elemento

Supóngase $\exists A \ni \forall x, x\in A \Rightarrow$ Por EAS

$$\exists B\ \forall x\,(x\in B \Leftrightarrow (x\in A \wedge \Phi(x))).$$

$$\forall x\,(x\in A \Leftrightarrow \Phi(x)).$$ $\boxed{\text{Ax Abstracción}}$

$\downarrow$

Paradoja de Russell.

TEOREMA

$$\{x : x = x\} = \emptyset$$

dem: Sea $A = \{x : x = x\} \Rightarrow \forall x,\ x = x.$

$\Rightarrow \forall x,\ x\in A \Rightarrow \exists A \ni \forall x, x\in A.\ (\rightarrow\!\leftarrow).$

$\Rightarrow$ Por esquema de def. $\{x : x=x\} = \emptyset.$

$\blacksquare$

NOTA

1. Las definiciones que no necesitan un teorema que las justifique son AXIOMAS

2. $\neg\exists A\ \forall x, x\in A$

A5: AXIOMA DE LA SUMA

$\exists C \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow \exists B[x \in B \text{ y } B \in A])$

DEFINICIÓN

$\cup A = \{x : \exists B[x \in B \text{ y } B \in A]\}$

TEOREMA

$x \in \cup A \Leftrightarrow \exists B[x \in B \text{ y } B \in A]$

TEOREMAS

1. $\cup \emptyset = \emptyset$
2. $\cup \{\emptyset\} = \emptyset$
3. $\cup \{A\} = A$
4. $\cup \{A, B\} = A \cup B$

Ej en clase 3

Sábado 24 de julio.

① $\cup \phi = \phi$.

dem: Sea $x \in \cup \phi$. Además, sabemos $\forall B, B \notin \phi$. Si $x \in \cup \phi \Rightarrow \exists B (x \in B \text{ \& } B \in \phi)(\rightarrow\leftarrow)$

$\Rightarrow \forall x, x \notin \cup \phi \Rightarrow \cup \phi = \phi$. ∎

② $\cup \{\phi\} = \phi$.

dem: Sea $x \in \cup \{\phi\} \Rightarrow \exists B (x \in B \text{ \& } B \in \{\phi\})$

Pero por Ax. Parejas si $B \in \{\phi\} \Rightarrow B = \phi$.

$\Rightarrow x \in B = \phi (\rightarrow\leftarrow) \Rightarrow \cup\{\phi\} = \phi$. ∎

$A = \{1, 2, 3, \{x\}, \{y, z\}\}$

$\cup A = \{x, y, z\}$

$\cup A = \{x : \exists B (x \in B \ \& \ B \in A)\}$

DEFINICIÓN:

$$\cap A = \{x : \forall B\, [B \in A \Longrightarrow x \in B]\}$$

TEOREMA

$$x \in \cap A \Leftrightarrow (\boxed{\forall B [B \in A \Longrightarrow x \in B]}\ y\ \exists B\,(B \in A))$$

TEOREMAS

1. $\cap \emptyset = \emptyset$

2. $\cap \{\emptyset\} = \emptyset$

dem:

(1) Sea $x \in \cap \Phi \Rightarrow \forall B\, (B \in \Phi \Rightarrow x \in B)$ & $\exists B\, (B \in \Phi)$ $(\to\!\!\!\!\times)$

$\Rightarrow \forall x,\ x \notin \cap \Phi \Rightarrow \cap \Phi = \Phi$ ▨

(2) Sea $x \in \cap \{\Phi\} \Rightarrow \forall B\, (B \in \{\Phi\} \Rightarrow x \in B)$ & $\exists B\, (B \in \{\Phi\})$.

$\Rightarrow \exists B\, (B \in \{\Phi\})$. Por Ax. Parejas $\Rightarrow B = \Phi$.

Por otro lado, $\forall B = \Phi\, (B \in \{\Phi\} \Rightarrow x \in B = \Phi)$ $(\to\!\!\!\!\times)$

$\Rightarrow \forall x,\ x \notin \cap \{\Phi\} \Rightarrow \cap \{\Phi\} = \Phi$. ▨

5. Sesión 9

Ej 2

PPPØ

por teorema $P\emptyset = \{\emptyset\}$

$\Rightarrow PP\emptyset = P\{\emptyset\} = \{\{\emptyset\},\emptyset\}$

$\Rightarrow PPP\emptyset = P\{\{\emptyset\},\emptyset\} = \{\{\{\emptyset\},\emptyset\},\{\emptyset\},\emptyset\}$

$\mathcal{P}(A)$ 2^n elementos

Sea $\mathcal{P}\phi = \{\phi\}$ por teorema 89. Ahora, $\mathcal{P}\mathcal{P}\phi = \{\phi,\{\phi\}\}$ por teorema 90. Considérese

$\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\phi = \{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$

Supóngase $\exists B \neq \phi \ni B \in \mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\phi \xrightarrow{T88}$

$B \subseteq \mathcal{P}\mathcal{P}\phi \Rightarrow \boxed{B \subseteq \{\phi,\{\phi\}\}}$

$\forall x \in B \Rightarrow x \in \{\phi,\{\phi\}\} \Rightarrow x = \phi$ ó $x = \{\phi\}$.

$\longrightarrow B = \{\phi\}$ ó $B = \{\{\phi\}\}$ ó $B = \{\phi,\{\phi\}\}$

---

5. $\mathcal{P}\mathcal{P}0 = \{0, \{0\}\}$

Demostración: Sea $\mathcal{P}0 = \{0\}$ por el teorema ~~anterior~~ 89 ya demostrado. Definiendo $A = \{0\}$, si $\mathcal{P}A$, por el teorema ~~anterior~~ 88 demostrado $\ni 0 \in \mathcal{P}A \rightarrow$ $\mathcal{P}\mathcal{P}0 = \{0, \{0\}\}$.

Por teo 87

Sea $B \neq \phi \in \mathcal{P}\mathcal{P}\phi \Rightarrow B \subseteq \mathcal{P}\phi$

$\forall x \in B \Rightarrow x \in \mathcal{P}\phi = \{\phi\} \Rightarrow x = \phi$

$\rightarrow B = \{\phi\} = A$

Por teorema 88, $\phi \in \mathcal{P}\mathcal{P}\phi$

$\Longrightarrow \mathcal{P}\mathcal{P}\phi = \{\phi, \{\phi\}\}$.

---

④ Teorema 93: $\mathcal{P}(A \cap B) = (\mathcal{P}A) \cap (\mathcal{P}B)$

añadir implicación regreso!!

dem: Sean $\boxed{A, B, C}$ conjuntos. Por teorema 1 intersección $C \in (\mathcal{P}A) \cap (\mathcal{P}B) \longleftrightarrow C \in (\mathcal{P}A) \wedge C \in (\mathcal{P}B)$

$\rightarrow$ por teorema 86 $\rightarrow$ $C \subseteq A \wedge C \subseteq B$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ si $x \in C \rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \rightarrow$ por def de contención $\therefore$ $C \subseteq (A \cap B)$ $\therefore$ Por teorema 86 $\therefore$ $C \in \mathcal{P}(A \cap B)$ $\rightarrow$

$\forall C\,(C \in (\mathcal{P}A) \cap (\mathcal{P}B) \longleftrightarrow C \in \mathcal{P}(A \cap B))$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ Por A1 $\mathcal{P}(A \cap B) = (\mathcal{P}A) \cap (\mathcal{P}B)$ ■

Ax. Extensión

Problema 1.5. *Demostrar teorema 94.* $\mathcal{P}(A \sim B) \subseteq ((\mathcal{P}A) \sim (\mathcal{P}B)) \cup \{\varnothing\}$.

Demostración. ~~Tenemos dos casos:~~ Sean A, B, C conjuntos $\ni C \in \mathcal{P}(A \sim B)$

1. $A \sim B$ no es vacío. $C \in \mathcal{P}(A \sim B) \iff C \subseteq (A \sim B) \iff C \subseteq A \wedge C \not\subseteq B \iff$ $C \in \mathcal{P}A \wedge C \notin \mathcal{P}B \implies C \in [(\mathcal{P}A) \sim (\mathcal{P}B)]$.

2. $A \sim B$ es vacío. $\implies \mathcal{P}(A \sim B) = \{\varnothing\}$.

Por lo tanto, $\mathcal{P}(A \sim B) \subseteq ((\mathcal{P}A) \sim (\mathcal{P}B)) \cup \{\varnothing\}$. ∎

CASO 1: $A \sim B = \phi \rightarrow C \in \mathcal{P}(\phi) = \{\phi\} \ni C = \phi$

$\mathcal{P}(A \sim B) \subseteq \{\phi\}$

ó

CASO 2: $A \sim B \neq \phi \Rightarrow C \subseteq A \sim B \Rightarrow \forall x$

$x \in C \Rightarrow [x \in A \sim B] \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B. \Rightarrow x \in A$

$\boxed{\forall x \in C \Rightarrow x \in A} \wedge \boxed{\forall x \in C \Rightarrow x \notin B}$

$C \subseteq A \wedge C \not\subseteq B \rightarrow C \in \mathcal{P}A \wedge C \notin \mathcal{P}(B)$

$C \in [\mathcal{P}A \sim \mathcal{P}B]$

$\therefore \mathcal{P}(A \sim B) \subseteq \mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$

---

eorema 96. $x \in (A \times B) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists z) : \begin{cases} y \in A \\ z \in B \\ x = (y, z) \end{cases}$

Sean A, B conjuntos.

Demostración. Supongamos que $x \in (A \times B)$

por por esquema teoremático y definición $\begin{cases} y \in A \\ z \in B \\ x = (y, z) \end{cases}$

Supongamos que $(\exists x)(\exists z) : \begin{cases} y \in A \\ z \in B \\ x = (y, z) \end{cases}$ por definición $x \in (A \times B)$

teorema 97. $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$

Demostración.

Parte 2

1) Teorema 96. $x \in A \times B \leftrightarrow \exists y, z \ni (y \in A \ \& \ z \in B \ \& \ x = \langle y, z \rangle)$

Sabemos $A \times B = A \times B \ni A \neq \beta \rightarrow x \subset A \times B = \dot{x} \subset A \times B$

Decimos $C = A \times B$, entonces por teorema 95,

$\exists (A \times B) \ \forall x \ni [x \in (A \times B) \leftrightarrow (\exists y, z)(y \in A \ \& \ z \in B \ \& \ x = \langle y, z \rangle)$

$\Rightarrow$ Dado $x \in (A \times B) \leftrightarrow x \in A \times B)$

$\therefore x \in (A \times B) \leftrightarrow (\exists y, z)(y \in A \ \& \ z \in B \ \& \ x = \langle y, z \rangle)$ ∎

1. Demostrar teorema 97.

Sea A, B conjuntos.

Dado $(x,y) \in A \times B$

$\to x \in A$ & $y \in B$

Sea $x \in A$ & $y \in B$

por teorema 96 ¿cómo?

$(x,y) \in A \times B$ ■

Sea $(x,y) \in A \times B$ por T96 $\exists\, a,b \ni$

$a \in A$ & $b \in B$ & $\underbrace{(x,y) = (a,b)}$

$\Leftrightarrow x = a$ & $y = b$

$\Leftrightarrow x \in A$ & $y \in B$

$\Leftrightarrow \exists\, x \in A$ & $x \in B$.

TEOREMA 101

$B \subseteq C \to A \times B \subseteq A \times C$

conjunto!!

Sean A, B y C, donde $B \subseteq C$ y $y \in A$. Por definición de contención $\forall x\, (x \in B \Leftrightarrow x \in C)$. $\to (y, x_1) \in A \times B \wedge (y, x_2) \in A \times C$ por definición de producto cartesiano y teorema 97. $A = A \to y = y$. Y como $B \subseteq C \to \forall x_1 \exists x_2 \mid x_1 = x_2$. $\to \forall (y, x_1) \exists (y, x_2) \mid (y, x_1) = (y, x_2)$. ∴ Por definición de contención $A \times B \subseteq A \times C$ ■

Sea $(a,b) \in A \times B \Rightarrow a \in A$ & $b \in B$

$\Rightarrow a \in A$ & $b \in C \Rightarrow (a,b) \in A \times C$.

$\exists\, a \in A$ & $b \in C$.

Ejercicio 4. Dar un contra-ejemplo simple para mostrar que, en general, no es el caso que $A \cup (B \times C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Demostración. Sean $A = \{x\}, B = \{y\}, C = \{z\} \implies A \cup (B \times C) = A \cup \{\langle y, z\rangle\} = \{x, \langle y, z\rangle\}$. Por otro lado, $(A \times B) \cup (A \times C) = \{\langle x, y\rangle\} \cup \{\langle x, z\rangle\} = \{\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle\} \therefore A \cup (B \times C) \neq (A \times B) \cup (A \times C)$ ■

$A = B = C = \{x\}$

$A \cup (B \times C) = \{x, (x,x)\}$

$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(x,x)\}$

6. Sesión 11

¿Y AHORA?

AXIOMAS DE VON NEWMAN

A0. Existe un conjunto tal que $\forall x, x \notin A$

A1. Si $x = y$ y además $x \in A$ entonces $y \in A$

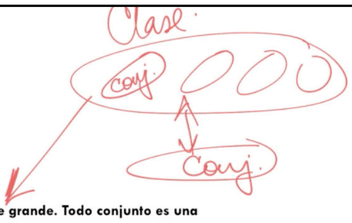
A2. Sea P(x) un enunciado de x que puede expresarse enteramente por los símbolos ∈, ∧, ∨, ~, ∀, ∃, ⇒ corchetes y variables x, y, z, A, B, C,…. Entonces existe una Clase C que consiste en todos los elementos x que satisfacen P(x).

A3. Cada subclase de un conjunto es un conjunto

A4. Si A y B son conjuntos entonces {A, B} es un conjunto

A5. Si $\mathcal{A}$ es un conjunto de conjuntos, entonces $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ es un conjunto

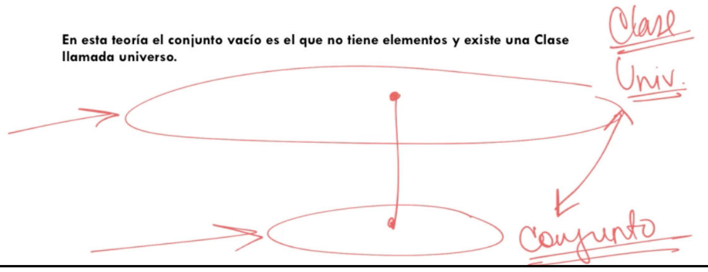
A6. Si A es un conjunto, el conjunto potencia es conjunto.



NOTA IMPORTANTE

Una Clase denota una colección excesivamente grande. Todo conjunto es una clase pero no toda clase es un conjunto.

En esta teoría el conjunto vacío es el que no tiene elementos y existe una Clase llamada universo.



Sea G una gráfica.

- El dominio de G es el conjunto

$$domG = \{x \mid \exists y \ \ tal\ que \ \ (x,y) \in G\}$$

- El Rango de G es el conjunto

$$ranG = \{y \mid \exists x \ \ tal\ que \ \ (x,y) \in G\}$$

1. Sean G, H, J gráficas, entonces
   a. $(G^{-1})^{-1} = G$
   b. $(G \circ H)^{-1} = H^{-1} \circ G^{-1}$

a. $(x,y) \in (G^{-1})^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y,x) \in G^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x,y) \in G$

$(x,y) \in (G^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in G$

$\therefore (G^{-1})^{-1} = G$

2. Sean G, H gráficas, entonces
   a. $domG = ranG^{-1}$
   b. $dom(G \circ H) \subseteq domH$

1. Sean G, H, J gráficas, entonces
   a. $(G^{-1})^{-1} = G$
   b. $(G \circ H)^{-1} = H^{-1} \circ G^{-1}$

b. $(x,y) \in (G \circ H)^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y,x) \in (G \circ H) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists z \ni (y,z) \in H$ & $(z,x) \in G \Leftrightarrow \exists z \ni (z,y) \in H^{-1}$ & $(x,z) \in G^{-1} \Leftrightarrow \exists z \ni (x,z) \in G^{-1}$ & $(z,y) \in H^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in H^{-1} \circ G^{-1}$.

2. Sean G, H gráficas, entonces
   a. $domG = ranG^{-1}$
   b. $dom(G \circ H) \subseteq domH$

2. Sean G, H gráficas, entonces
   a. $domG = ranG^{-1}$
   b. $dom(G \circ H) \subseteq domH$

a. $x \in domG \Leftrightarrow \exists y \ni (x,y) \in G \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists y \ni (y,x) \in G^{-1} \Leftrightarrow x \in RanG^{-1}$

$\therefore x \in domG \Leftrightarrow x \in ranG^{-1}$

$domG = ranG^{-1}$

2. Sean G, H gráficas, entonces

a. $dom G = ran G^{-1}$

b. $dom(G \circ H) \subseteq dom H$

b. $x \in dom(G \circ H) \Rightarrow \exists y \ni (x, y) \in G \circ H$

$\Rightarrow \exists y, z \ni (x, z) \in H \ \& \ (z, y) \in G. \Rightarrow$

$\exists z \ni (x, z) \in H \Rightarrow x \in dom H$

$\therefore x \in dom(G \circ H) \Rightarrow x \in dom H$

$dom G \circ H \subseteq dom H$

7. Sesión 12

Axioma de Regularidad

$$A \neq \phi \Rightarrow \exists x (x \in A \ \& \ \forall y (y \in x \Rightarrow y \notin A))$$

Nota: Si $\forall x, x \in A$ & x es conjunto

$$A \neq \phi \Rightarrow \exists x (x \in A \ \& \ x \cap A = \phi)$$

Teorema 105: $A \notin A$

dem: Sea A un conjunto $\ni$ $A \in A$. Sabemos que $A \in \{A\}$ (Por Ax. de Parejas) $\Rightarrow A \in A \cap \{A\}$.

Suponga se por contradicción ($A \neq \phi$)

Por otro lado, si $x \in \{A\} \Rightarrow x = A$ (Por ax. de Parejas) $\Rightarrow \forall x \in \{A\}$, x es conjunto.

Por ax. de Regularidad $\exists x \in \{A\} \ni x \cap \{A\} = \phi$

$\Rightarrow \phi = x \cap \{A\} = A \cap \{A\} \Rightarrow A \cap \{A\} = \phi$

$\Rightarrow A \in \phi$ $(\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore A \notin A$. ∎

Teorema 106: $\neg (A \in B \ \& \ B \in A)$

dem: Sean A, B conjuntos. Por contradicción supóngase que $A \in B$ & $B \in A$. Por ax. de parejas, $A \in \{A, B\}$ & $B \in \{A, B\}$ $\Rightarrow$ $A \in B \cap \{A, B\}$, $B \in A \cap \{A, B\}$.

$\{A,B\} \neq \phi$

Si $x \in \{A, B\} \Rightarrow x = A$ ó $x = B$ (por ax. Parejas)

$\Rightarrow x$ es conjunto $\forall x \in \{A, B\}$.

Por ax. de Regularidad $\exists x \in \{A, B\} \ni$ $x \cap \{A, B\} = \phi$.

- Si $x = A \Rightarrow A \cap \{A, B\} = \phi \Rightarrow B \in \phi$ $(\rightarrow\leftarrow)$
- Si $x = B \Rightarrow B \cap \{A, B\} = \phi \Rightarrow A \in \phi$ $(\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore \neg (A \in B \ \& \ B \in A)$ ∎

Teorema 107: $A \subseteq A \times A \Rightarrow A = \phi$

dem: Sea A un conjunto $\ni A \subseteq A \times A$ y $A \neq \phi$.

Sea $z \in A \Rightarrow z \in A \times A$ $\exists$ $x, y \in A \ni z = (x, y)$

Pero $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Considérese $[A] \cup [\bigcup A]$. Si $c \in A \cup \bigcup A \Rightarrow c \in A$ ó $c \in \bigcup A$.

CASO 1: Si $c \in A \Rightarrow c \in A \times A \Rightarrow c$ es un conjunto no vacío. Por otro lado si $c \in A$ $\Rightarrow c \subseteq \bigcup A$. $\Rightarrow$ $\boxed{c \cap \bigcup A \neq \phi.}$

CASO 2: Si $c \in \bigcup A \Rightarrow \exists B (c \in B \ \& \ B \in A)$. Nótese que si $B \in A \Rightarrow \exists x, y \in A \ni B = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Pero $c \in B = \{\{x\}, \{x, y\}\} \Rightarrow c = \{x\}$ ó $c = \{x, y\}$ $\Rightarrow c$ es conjunto no vacío y como $x, y \in A \neq \phi$

$\Rightarrow$ $\boxed{c \cap A \neq \phi.}$

$\Rightarrow (c \cap \bigcup A) \cup (c \cap A) \neq \phi$

$\Rightarrow c \cap (\bigcup A \cup A) \neq \phi \Rightarrow c \cap (A \cup \bigcup A) \neq \phi, \forall c$.

Pero $\forall c$, c es conjunto si $c \in A \cup \bigcup A$.

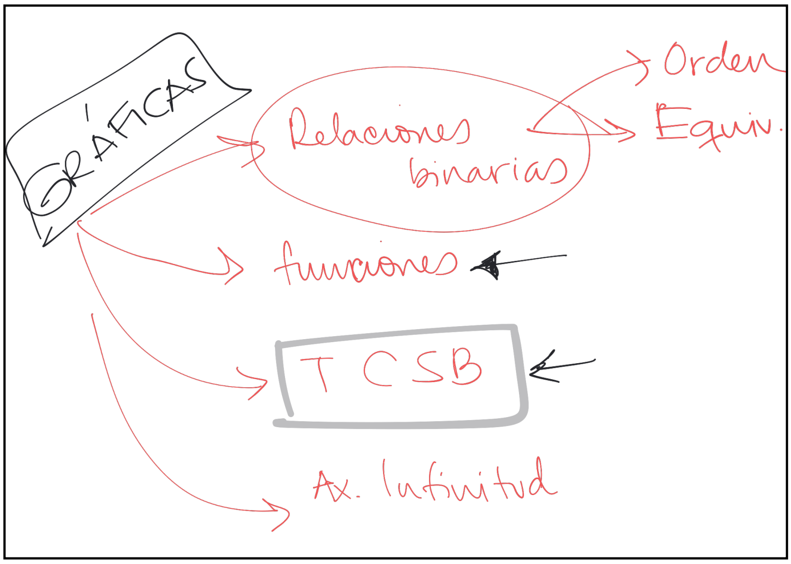
Por ax. de Regularidad $\exists c \in A \cup \bigcup A \ni$ $c \cap A \cup \bigcup A = \phi$ $(\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore A = \phi$. ∎

A Z-F

- A0 ϕ existe
- A1 Ax. Ext.
- A2 EAS
- A3 Ax. Unión
- A4 Ax. Parejas
- A5 Ax. Potencia
- A6 Ax. Regularidad
- A7 Ax. Suma

8: Ax. Reemplazo, Ax. Infinitud, Ax. Elección


GRÁFICAS
Relaciones binarias
Orden
Equiv.
funciones
TCSB
Ax. Infinitud

8. Sesión 13 y 14

HT4 } $\overset{\text{Ax.}}{\text{Suma}}$ / $\cup A$, $\cap A$

HT5 →

GRÁFICAS

Comprobación 2 → Dedekind Riemmann

MANIFOLD ← VARIEDAD

FUNCIONES

FUNCIÓN

Es una de las ideas básicas y forma parte de TODAS las ramas de lamatemática.

Otros nombres utilizados: MORFISMO – MAPEO – CORRESPONDENCIA.

A.Moderna

general!

mapping!!

DEFINICIÓN

gráfica, conjuntos.

Una función de A a B es una triada (f, A, B) donde A y B son conjuntos y $f \subseteq A \times B \ni$

a) $\forall x \in A \ \exists\, y \in B \ \ni (x, y) \in f$

b) Si $(x, y_1), (x, y_2) \in f$ entonces $y_1 = y_2$

$\boxed{\forall x \in A \ \exists!\, y \in B \ni f(x) = y}$

NOTA

1. (f, A, B) se escribe como $f: A \to B$

2. A, B pueden ser familias de conjuntos

3. f es una gráfica

Da vida al ax. de Elección

TEOREMA (de caracterización de funciones) ("Podrían" ser def)

Sean A, B conjuntos y f una gráfica $\ni f \subseteq A \times B$. Entonces, (f, A, B) es función ssi

hip. general

i) Si $(x, y_1), (x, y_2) \in f$ entonces $y_1 = y_2$

ii) $dom f = A$

iii) $ran f \subseteq B$

a) $\forall x \in A \ \exists\, y \in B \ \ni (x, y) \in f$

b) Si $(x, y_1), (x, y_2) \in f$ entonces $y_1 = y_2$

dem: Sean A, B conjuntos $\ni f \subseteq A \times B$ es una gráfica.

($\Rightarrow$) Sea (f, A, B) una función. $\Rightarrow f$ cumple las condiciones (a) & (b)

a) $\forall x \in A \; \exists y \in B \; \ni (x, y) \in f$

b) Si $(x, y_1), (x, y_2) \in f$ entonces $y_1 = y_2$

i) Se cumple por (b)

ii) ($\subseteq$) Sea $x \in dom f \Rightarrow \exists y \ni (x,y) \in f \subseteq A \times B$ $\Rightarrow (x,y) \in A \times B \Rightarrow x \in A$ & $y \in B \Rightarrow x \in A$ $\therefore dom f \subseteq A$

($\supseteq$) Sea $x \in A \Rightarrow \exists y \in B \ni (x,y) \in f$ por (a) $\Rightarrow x \in dom f$. $\therefore A \subseteq dom f$.

$\Rightarrow dom f = A$.

iii) Sea $x \in ran f \Rightarrow \exists y \ni (x,y) \in f \subseteq A \times B \Rightarrow$ $(x,y) \in A \times B \Rightarrow x \in A$ & $y \in B \Rightarrow$ $\Rightarrow y \in B$ $\therefore ran f \subseteq B$

Entonces f cumple
$$\begin{cases} \text{i) Si } (x, y_1), (x, y_2) \in f \text{ entonces } y_1 = y_2 \\ \text{ii) } domf = A \\ \text{iii) } ranf \subseteq B \end{cases}$$

($\Leftarrow$) Supóngase que f cumple (i), (ii) & (iii)

i) Si $(x, y_1), (x, y_2) \in f$ entonces $y_1 = y_2$

ii) $domf = A$

iii) $ranf \subseteq B$

a) Sea $x \in A \Rightarrow$ por ii), $x \in dom f \Rightarrow \exists y \ni$ $(x,y) \in f \Rightarrow y \in ran f \subseteq B \Rightarrow y \in B$.
Por lo tanto, $\forall x \in A \; \exists y \in B \ni (x,y) \in f$.

b) Se cumple por (i).

$\therefore f$ cumple
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \forall x \in A \; \exists y \in B \; \ni (x, y) \in f \\ \text{b) Si } (x, y_1), (x, y_2) \in f \text{ entonces } y_1 = y_2 \end{array} \right.$$
$\Rightarrow f$ es función.

COROLARIO

Sea $f: A \to B$ una función. Si C es un conjunto tal que $ranf \subseteq C$ entonces $f: A \to C$ es función

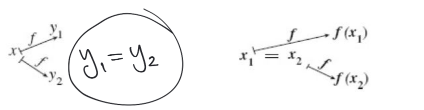
NOTA

1. $f(x) = y$ es lo mismo que decir $(x, y) \in f$ } La notación usual

2. Las condiciones a y b de la definición de función se pueden reescribir como

a)* $\forall x \in A \; \exists y \in B \; \ni f(x) = y$

b)* Si $f(x) = y_1$ y $f(x) = y_2$ entonces $y_1 = y_2$



Si $x_1 = x_2$ entonces $f(x_1) = f(x_2)$

TEOREMA. Se usa para construir las operaciones de los naturales

Sean $f: A \to B$ y $g: A \to B$ funciones. Entonces,

$$f = g \text{ ssi } \forall x \in A, f(x) = g(x)$$

dem: Sean $f: A \to B$ & $g: A \to B$ funciones.

($\Rightarrow$) Supóngase $f = g$. Sea $x \in A$ cualquiera $\Rightarrow$ $\exists y \in B \ni f(x) = y \Rightarrow (x,y) \in f \Rightarrow (x,y) \in g$ $\Rightarrow g(x) = y$. $\therefore f(x) = g(x) \Rightarrow \forall x \in A, f(x) = g(x)$.

($\Leftarrow$) Supóngase que $\forall x, f(x) = g(x)$. $(x,y) \in f \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow g(x) = y \Leftrightarrow (x,y) \in g$
Por Ax. de extensión, $f = g$.

DEFINICIÓN

Sea $f: A \to B$ una función. Decimos que f es:

1. Inyectiva

$$\text{Si } (x_1, y), (x_2, y) \in f \text{ entonces } x_1 = x_2$$

* Sean $x_1, x_2 \in A \ni f(x_1) = f(x_2) = y \Rightarrow x_1 = x_2$

2. Sobreyectiva:

$$\forall y \in B\ \exists x \in A \ni (x, y) \in f$$
$$ran f = B$$

3. Biyectiva: Si es inyectiva y sobreyectiva

También es llamda una correspondencia uno a uno o biunivoca.

TEOREMA

Si $f: A \to B$ y $g: B \to C$ son funciones entonces $g \circ f: A \to C$ es una función

dem: Sean $f: A \to B$ & $g: B \to C$ funciones.
Sabemos que $g \circ f \subseteq A \times C$ es gráfica.

i) $dom\, g \circ f = A$ Nótese que $dom\, g \circ f = dom\, f = A$ ya que $g \circ f$ es gráfica y f es función $\therefore dom\, g \circ f = A$

ii) $ran\, g \circ f \subseteq C$ Sabemos que $ran\, g \circ f \subseteq ran\, g \subseteq C$ ya que $g \circ f$ es gráfica y g es función $\therefore ran\, g \circ f \subseteq C$.

i) Sean $(x, z_1)(x, z_2) \in g \circ f \Rightarrow \exists\, y_1, y_2 \ni$ $[(x, y_1), (x, y_2) \in f]$ & $[(y_1, z_1), (y_2, z_2) \in g] \Rightarrow$
como f es función $y_1 = y_2. \Rightarrow$
$(y_1, z_1)(y_1, z_2) \in g \Rightarrow$ como g es función
$z_1 = z_2$

$\therefore g \circ f$ es función ■

Por teorema de caracterización de funciones

DEFINCIÓN

Una función $f: A \to B$ es invertible si $f^{-1}: B \to A$ es función.

TEOREMA

Si $f: A \to B$ es biyectiva entonces $f^{-1}: B \to A$ es función biyectiva

(I) (II)

f^{-1} FUNCIÓN

(I) dem: Sea $f: A \to B$ función biyectiva $\Rightarrow$ $dom\, f = A$ & $ran\, f = B$. Sabemos que $f^{-1} \subseteq B \times A$ es gráfica inversa de f.

ii) $B = ran\, f = dom\, f^{-1}$. $\Rightarrow dom\, f^{-1} = B$

iii) $ran\, f^{-1} = dom\, f = A \subseteq A \Rightarrow ran\, f^{-1} \subseteq A$.

i) Sean $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1} \Rightarrow (x_1, y)(x_2, y) \in f$ $\Rightarrow x_1 = x_2$ ya que f es inyectiva.
$\therefore$ por (i), (ii) & (iii) f^{-1} es función.

f^{-1} BIYECTIVA

(II) inyectividad: Supóngase que $(y_1, x)(y_2, x) \in f^{-1} \Rightarrow (x, y_1), (x, y_2) \in f$ $\Rightarrow y_1 = y_2$ ya que f es función $\Rightarrow f^{-1}$ es inyectiva.

Sobre: Nótese que $ran\, f^{-1} = dom\, f = A$ $\Rightarrow ran\, f^{-1} = A \Rightarrow f^{-1}$ es sobre

$\therefore f^{-1}$ es biyectiva

■

$f: A \to B$ } f is a mapping of A into B

FUNCIÓN CUALQUIERA

f sobreyectiva f is a mapping of A onto B

f biyectiva $\Rightarrow$ f es invertible

(f^{-1} es función)

TEOREMA

Si $f: A \rightarrow B$ es función invertible entonces $f: A \rightarrow B$ es biyectiva.

dem: Sea $f: A \to B$ función invertible. Entonces, f^{-1} es función.

* injectividad: Sean $(x_1, y)(x_2, y) \in f \Rightarrow (y, x_1)(y, x_2) \in f^{-1}$ que es función $\Rightarrow x_1 = x_2$.
  $\Rightarrow$ f es inyectiva.

* Sobre: $(\subseteq)$ Sabemos que $\operatorname{ran} f \subseteq B$ por ser f función.
  $(\supseteq)$ Sea $y \in B \Rightarrow \exists x \in A \ni (y, x) \in f^{-1}$ ya que f^{-1} es función $\Rightarrow \exists x \ni (x, y) \in f$ $\Rightarrow y \in \operatorname{ran} f. \Rightarrow B \subseteq \operatorname{ran} f$ $\therefore \operatorname{ran} f = B$

  $\{\operatorname{ran} f = B\}$

  $\Rightarrow$ f es sobre

$\therefore$ f es biyectiva

FAMILIAS DE FUNCIONES

DEFINICIÓN

Sean A, B conjuntos (o clases), entonces la clase de todas las funciones de A hacia B se denota como B^A. Es decir,

$$B^A = \{f: \quad f: A \to B\}$$

Si se define $2 = \{0,1\}$ entonces $2^A = \{f: \quad f: A \to 2\}$

FUNCIÓN CARACTERÍSTICA

Sea A un conjunto y $B \subseteq A$ entonces se define la función característica de B de la siguiente manera:

$$C_B: A \to 2 \ni$$

$$C_B(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in B \\ 1 & si\ x \notin B \end{cases}, \quad \forall x \in A$$

$$\boxed{\{C_B\}_{B \subseteq A} \subseteq 2^A}$$

Ej

$A = \{a, b, c, d, e\}$

$B = \{b, d\}$

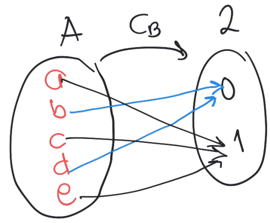
$C_B: A \to 2 \ni$

$C_B(x) = \begin{cases} 0 & x \in B \\ 1 & x \notin B \end{cases}$

$\forall x \in A$

COMO GRÁFICA

$$\boxed{C_B = \{(a,1), (b,0), (c,1), (d,0), (e,1)\}}$$



TEOREMA

$2^A = \{C_B\}_{B \subseteq A}$

Si A es un conjunto entonces existe una función biyectiva entre 2^A y $\mathcal{P}(A)$

Demostración:

Sea $\gamma: \mathcal{P}(A) \to 2^A$ tal que $\gamma(B) = C_B$ donde $B \in A$ y C_B es su función característica.

1. Demuestre que γ es función $\longrightarrow$ Def/ Teorema de Caracterización
2. Demuestre que γ es biyectiva
   - inyectiva
   - Sobre

Ej Clase 5

domingo 22/8/2021

(*February 19, 2005*)

Cantor-Schroeder-Bernstein Theorem

Paul Garrett garrett@math.umn.edu http://www.math.umn.edu/˜garrett/

This is the key result that allows comparison of infinities. Perhaps it is the first serious theorem in set theory after Cantor's diagonalization argument. Apparently Cantor *conjectured* this result, and it was proven independently by F. Bernstein and E. Schröder in the 1890's. This author is of the opinion that the proof given below is the *natural* proof one would find after sufficient experimentation and reflection. [Suppes 1960] gives a somewhat more formal version, and says that this proof is in [Fraenkel 1953], p. 102-103, and is attributed by Fraenkel to J. M. Whitaker. One must mention [Hausdorff 1914] as an influential source which helped to standardize modern usage.

It is noteworthy that there is no invocation of the Axiom of Choice, since one can imagine otherwise.

The argument below is not the most succinct possible, but is intended to lend a greater sense of inevitability to the conclusion than might the shortest possible version.

Theorem: Let A and B be sets, with injections $f : A \to B$ and $g : B \to A$. Then there exists a canonical *bijection* $F : A \to B$.

Proof: Let

$$A_o = \{a \in A : a \notin g(B)\} \qquad B_o = \{b \in B : b \notin f(A)\}$$

The sets

$$A_{2n} = (g \circ f)^n(A_o) \qquad A_{2n+1} = (g \circ f)^n g(B_o)$$

are disjoint. Let A_∞ be the complement in A to the union $\bigcup_n A_n$. Define F by

$$F(a) = \begin{cases} f(a) & (\text{for } a \in A_n,\ n \in 2\mathbf{Z}) \\ g^{-1}(a) & (\text{for } a \in A_n,\ n \in 1 + 2\mathbf{Z}) \\ f(a) & (\text{for } a \in A_\infty) \end{cases}$$

We must verify that this moderately clever apparent definition really gives a well-defined F, and that F is a bijection. For $n \geq 1$, let

$$B_n = f(A_{n-1})$$

and also let $B_\infty = f(A_\infty)$.

The underlying fact is that $A \cup B$ (disjoint union) is *partitioned* into one-sided or two-sided maximal sequences of elements that map to each other under f and g: we have three patterns. First, one may have

$$a_o \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} a_1 \xrightarrow{f} b_2 \xrightarrow{g} a_2 \to \ldots \xrightarrow{f} b_n \xrightarrow{g} a_n \to \ldots$$

beginning with $a_o \in A_o$, all $a_i \in A$ and $b_i \in B$. Second, one may have

$$b_o \xrightarrow{g} a_1 \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} a_2 \xrightarrow{f} b_2 \to \ldots \xrightarrow{g} a_n \xrightarrow{f} b_n \to \ldots$$

with $b_o \in B_o$, and $a_i \in A$ and $b_i \in B$. The third and last possibility is that none of the elements involved is an image of A_o or B_o under any number of iterations of $f \circ g$ or $g \circ f$. Such elements fit into pictures of the form

$$\ldots \xrightarrow{g} a_{-2} \xrightarrow{f} b_{-1} \xrightarrow{g} a_{-1} \xrightarrow{f} b_o \xrightarrow{g} a_o \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} \ldots$$

where $a_i \in A$ and $b_i \in B$. The fundamental point is that any two distinct such sequences of elements are disjoint. And any element certainly lies in such a sequence.

The one-sided sequences of the form

$$a_o \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} a_1 \xrightarrow{f} b_2 \xrightarrow{g} a_2 \to \ldots \xrightarrow{f} b_n \xrightarrow{g} a_n \to \ldots$$

beginning with $a_o \in A_o$, can be broken up to give part of the definition of F by

$$F : a_o \xrightarrow{f} b_1 \quad F : a_1 \xrightarrow{f} b_2 \ldots$$

The one-sided sequences of the form

$$b_o \xrightarrow{g} a_1 \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} a_2 \xrightarrow{f} b_2 \rightarrow \ldots \xrightarrow{g} a_n \xrightarrow{f} b_n \rightarrow \ldots$$

with $b_o \in B_o$, beginning with $b_o \in B_o$, can be broken up to give another part of the definition of F

$$b_o \xrightarrow{g} a_1 \quad b_1 \xrightarrow{g} a_2 \ldots$$

which is to say

$$F : a_1 \xrightarrow{g^{-1}} b_o \quad F : a_2 \xrightarrow{g^{-1}} b_1 \ldots$$

For a double-sided sequence,

$$\ldots \xrightarrow{g} a_{-2} \xrightarrow{f} b_{-1} \xrightarrow{g} a_{-1} \xrightarrow{f} b_o \xrightarrow{g} a_o \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} \ldots$$

there are two equally simple ways to break it up, and we choose

$$F : a_i \xrightarrow{f} b_{i+1}$$

Since the sequences partition $A \cup B$, and since every element of B (and A) appears, F is surely a bijection from A to B. ///

[Fraenkel 1953] A. Fraenkel, *Abstract Set Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1953.

[Hausdorff 1914] F. Hausdorff, *Grundzuge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914; reprinted Chelsea, NY, 1949.

[Suppes 1960] P. Suppes, *Axiomatic Set Theory*, Van Nostrand, 1960; reprinted Dover, 1972.

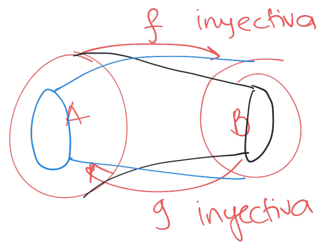
---

9. Sesión 15

TEOREMA DE CANTOR SCHROEDER BERNSTEIN

TEOREMA DE CANTOR-SCHROEDER-BERNSTEIN

Sean A y B conjuntos. Sean $f: A \to B$ y $g: B \to A$ funciones inyectivas entonces existe $F: A \to B$ tal que F es biyectiva.



NOTA

comparar esa "característica" con la de B de A

"característica de A y de B"

"TAMAÑO" ¿mide?

- Sean A y B conjuntos. Decimos $|A| \leqslant |B|$ si y sólo si existe $f: A \to B$ función inyectiva.
- Sean A y B conjuntos. Decimos $|A| = |B|$ si y sólo si existe $f: A \to B$ función biyectiva.
- Sean X, Y y Z conjuntos. Entonces,
  1. $\forall X,\ |X| \leqslant |X|$ (Reflex)
  2. Si $|X| \leqslant |Y|$ y $|Y| \leqslant |Z|$ entonces $|X| \leqslant |Z|$ (transitividad)
  3. ¿¿Si $|X| \leqslant |Y|$ y $|Y| \leqslant |X|$ entonces $|X| = |Y|$?? (antisimetría)

$\leq$ en los conjunto ORDEN

TCSB

(*February 19, 2005*)

Cantor-Schroeder-Bernstein Theorem

Paul Garrett garrett@math.umn.edu http://www.math.umn.edu/~garrett/

This is the key result that allows comparison of infinities. Perhaps it is the first serious theorem in set theory after Cantor's diagonalization argument. Apparently Cantor *conjectured* this result, and it was proven independently by F. Bernstein and E. Schröder in the 1890's. This author is of the opinion that the proof given below is the *natural* proof one would find after sufficient experimentation and reflection. [Suppes 1960] gives a somewhat more formal version, and says that this proof is in [Fraenkel 1953], p. 102-103, and is attributed by Fraenkel to J. M. Whitaker. One must mention [Hausdorff 1914] as an influential source which helped to standardize modern usage.

It is noteworthy that there is no invocation of the Axiom of Choice, since one can imagine otherwise.

The argument below is not the most succinct possible, but is intended to lend a greater sense of inevitability to the conclusion than might the shortest possible version.

Theorem: Let A and B be sets, with injections $f: A \to B$ and $g: B \to A$. Then there exists a canonical *bijection* $F: A \to B$.

Proof: Let

$$A_o = \{a \in A : a \notin g(B)\} \qquad B_o = \{b \in B : b \notin f(A)\}$$

The sets

$$A_{2n} = (g \circ f)^n (A_o) \qquad A_{2n+1} = (g \circ f)^n g(B_o)$$

are disjoint. Let A_∞ be the complement in A to the union $\bigcup_n A_n$. Define F by

$$F(a) = \begin{cases} f(a) & (\text{for } a \in A_n,\ n \in 2\mathbf{Z}) \\ g^{-1}(a) & (\text{for } a \in A_n,\ n \in 1 + 2\mathbf{Z}) \\ f(a) & (\text{for } a \in A_\infty) \end{cases}$$

We must verify that this moderately clever apparent definition really gives a well-defined F, and that F is a bijection. For $n \geq 1$, let

$$B_n = f(A_{n-1})$$

and also let $B_\infty = f(A_\infty)$.

The underlying fact is that $A \cup B$ (disjoint union) is *partitioned* into one-sided or two-sided maximal sequences of elements that map to each other under f and g: we have three patterns. First, one may have

$$a_o \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} a_1 \xrightarrow{f} b_2 \xrightarrow{g} a_2 \to \ldots \xrightarrow{f} b_n \xrightarrow{g} a_n \to \ldots$$

beginning with $a_o \in A_o$, all $a_i \in A$ and $b_i \in B$. Second, one may have

$$b_o \xrightarrow{g} a_1 \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} a_2 \xrightarrow{f} b_2 \to \ldots \xrightarrow{g} a_n \xrightarrow{f} b_n \to \ldots$$

with $b_o \in B_o$, and $a_i \in A$ and $b_i \in B$. The third and last possibility is that none of the elements involved is an image of A_o or B_o under any number of iterations of $f \circ g$ or $g \circ f$. Such elements fit into pictures of the form

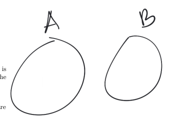
$$\ldots \xrightarrow{g} a_{-2} \xrightarrow{f} b_{-1} \xrightarrow{g} a_{-1} \xrightarrow{f} b_o \xrightarrow{g} a_o \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} \ldots$$

where $a_i \in A$ and $b_i \in B$. The fundamental point is that any two distinct such sequences of elements are disjoint. And any element certainly lies in such a sequence.

The one-sided sequences of the form

$$a_o \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} a_1 \xrightarrow{f} b_2 \xrightarrow{g} a_2 \to \ldots \xrightarrow{f} b_n \xrightarrow{g} a_n \to \ldots$$

unión disjunta $A \cap B = \phi$



beginning with $a_o \in A_o$, can be broken up to give part of the definition of F by

$$F: a_o \xrightarrow{f} b_1 \qquad F: a_1 \xrightarrow{f} b_2 \ldots$$

The one-sided sequences of the form

$$b_o \xrightarrow{g} a_1 \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} a_2 \xrightarrow{f} b_2 \to \ldots \xrightarrow{g} a_n \xrightarrow{f} b_n \to \ldots$$

with $b_o \in B_o$, beginning with $b_o \in B_o$, can be broken up to give another part of the definition of F

$$b_o \xrightarrow{g} a_1 \qquad b_1 \xrightarrow{g} a_2 \ldots$$

which is to say

$$F: a_1 \xrightarrow{g^{-1}} b_o \qquad F: a_2 \xrightarrow{g^{-1}} b_1 \ldots$$

For a double-sided sequence,

$$\ldots \xrightarrow{g} a_{-2} \xrightarrow{f} b_{-1} \xrightarrow{g} a_{-1} \xrightarrow{f} b_o \xrightarrow{g} a_o \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} \ldots$$

there are two equally simple ways to break it up, and we choose

$$F: a_i \xrightarrow{f} b_{i+1}$$

Since the sequences partition $A \cup B$, and since every element of B (and A) appears, F is surely a bijection from A to B. ///

[Fraenkel 1953] A. Fraenkel, *Abstract Set Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1953.

[Hausdorff 1914] F. Hausdorff, *Grundzuge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914; reprinted Chelsea, NY, 1949.

[Suppes 1960] P. Suppes, *Axiomatic Set Theory*, Van Nostrand, 1960; reprinted Dover, 1972.

Conjuntos A_{2n} A_{2n+1} A_∞ ?

¿Regla de asignación? ¿inversa? ¿cuándo se usa?

CÓMO FUNCIONA

LEMA

Si el TCSB es válido para conjuntos disjuntos entonces es válido para cualquier par de conjuntos.

dem: Supóngase que TCSB se cumple para conjuntos disjuntos. Sean X, Y conjuntos $\ni$ $\exists\, f: X \to Y$ & $g: Y \to X$ $\ni$ f, g son funciones inyectivas.

TCSB: Si $|X| \leq |Y|$ y $|Y| \leq |X| \Rightarrow |X| = |Y|$.

Sean $\Delta \neq 0 \ni X' = X \times \{\Delta\}$ y $Y' = Y \times \{0\} \Rightarrow X' \cap Y' = \phi$. X', Y' son disjuntos. Nótese que

$\alpha: X \to X' \ni$ & $\beta: Y \to Y'$

$\alpha(x) = (x, \Delta)$ $\quad$ $\beta(y) = (y, 0)$

son funciones biyectivas.

$\Rightarrow \alpha^{-1}, \beta^{-1}$ son funciones biyectivas

Sean $f' = \beta \circ f \circ \alpha^{-1}: X' \to Y'$ que son

$g' = \alpha \circ g \circ \beta^{-1}: Y' \to X'$

inyectivas. (*) Por TCSB para conjuntos disjuntos $\exists\, F': X' \to Y'$! Entonces, sea $F = \beta^{-1} \circ F' \circ \alpha: X \to Y$. Como β^{-1}, F' & α son biyectivas $\Rightarrow F$ es biyectiva (*)

$\Rightarrow$ TCSB se cumple para cualquier par de conjuntos ■

$$X \xrightarrow{\alpha} X' \xrightarrow{F'} Y' \xrightarrow{\beta^{-1}} Y$$

DEFINICIÓN

xor

Sean X y Y conjuntos disjuntos y $f: X \to Y$ y $g: Y \to X$ funciones inyectivas. Sean $a, b \in X \cup Y$, decimos que a es ancestro de b si

$$f(a) = b \text{ ó } g(a) = b$$

LEMA

ANCESTRO ES ÚNICO si hay ancestro.

Todo elemento de $X \cup Y$ posee a lo sumo un ancestro

dem: Sean X, Y conjuntos disjuntos $\ni$ $f: X \to Y$ & $g: Y \to X$ son inyectivas. Sea $b \in X \cup Y$. Supóngase que b tiene ancestros a, a'.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} f(a) = b \\ \text{ó} \\ g(a) = b \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} f(a') = b \\ \text{ó} \\ g(a') = b \end{bmatrix}.$$

i) Si $f(a) = b \Rightarrow b \in Y$. Además, si $g(a') = b \Rightarrow b \in X$
$\Rightarrow b \in Y$ & $b \in X \Rightarrow b \in Y \cap X = \phi \Rightarrow b \in \phi$ ($\rightarrow\leftarrow$).
$\Rightarrow f(a') = b \Rightarrow f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$

ii) Si $g(a) = b \Rightarrow b \in X$. Además, si $f(a') = b \Rightarrow b \in Y$
$\Rightarrow b \in X$ & $b \in Y \Rightarrow b \in X \cap Y = \phi \Rightarrow b \in \phi$
$\Rightarrow g(a') = b \Rightarrow g(a) = g(a') \Rightarrow a = a'$

$\therefore \forall b \in X \cup Y$ su ancestro es a lo sumo 1 ■

DEFINICIONES

Sea $a \in X \cup Y$ entonces una cadena de ancestros de a es la tupla:

$$(c_0, c_1, \dots, c_n)$$

Donde cada c_i es ancestro de c_{i+1} y $c_n = a$ y la profundidad de la cadena es n

Los elementso de $X \cup Y$ se pueden clasificar en dos tipos:

1. Los que tienen cadenas de profundidad infinita

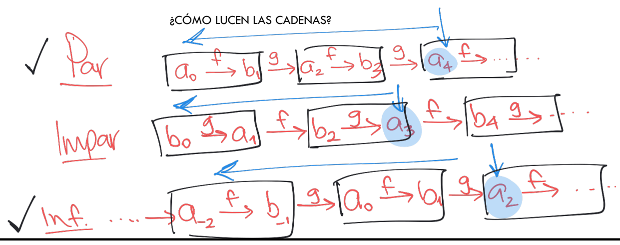
2. Los que poseen cadenas de profundidad n

NOTA

El conjunto X se puede escribir como $X = X_\infty \cup X_{par} \cup X_{impar}$ donde

$X_\infty = \{a \in X | a \text{ posee profundidad infinita}\}$
$X_{par} = \{a \in X | a \text{ posee profundidad par}\}$
$X_{impar} = \{a \in X | a \text{ posee profundidad impar}\}$

¿CÓMO LUCEN LAS CADENAS?



Defínase la función

$$F: X \to Y \ni$$

$$F(a) = \begin{cases} f(a) & a \in X_{\infty} \cup X_{par} \\ g^{-1}(a) & a \in X_{impar} \end{cases}$$

NOTA: F es biyectiva.