Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2033 - Teoría de Conjuntos - Catedrático: Nancy Zurita
10 de septiembre de 2021

Ejercicio en clase 5

Problema 0.1. *Si A es un conjunto entonces existe una función biyectiva entre 2^A y $\mathcal{P}(A)$.*

> **Definición 1.** *(Función característica) Sea A un conjunto y $B \subseteq A$ entonces se define la función característica de B de la siguiente manera:*
>
> $$C_B : A \to 2 \ni$$
>
> $$C_B(x) = \begin{cases} 0, & x \in B \\ 1, & x \notin B \end{cases}, \quad x \in A.$$

Demostración. Sea $\gamma : \mathcal{P}(A) \to 2^A$ y supóngase $B \in \mathcal{P}(A)$, tal que

$$\gamma(B) = \underbrace{\{C_B\}_{B\in A}}_{\substack{\text{función} \\ \text{característica}}}, \quad \forall B \in \mathcal{P}(A).$$

Nótese que $\{C_B\}_{B\in A} \subseteq 2^A$. Comprobaremos que γ es una función y posteriormente que es una función biyectiva:

1. Función, tal que por el teorema de caracterización para funciones:

    a) $B \in \mathcal{P}(A) \ni \gamma(B) = \{C_B\}_{B\in A}$.
    b) Inyectividad en el inciso **2.a**.

2. Biyectividad, tal que

    a) Inyectividad. Supóngase X y $Y \in \mathcal{P}(A) \ni$

    $$\begin{gathered} \gamma(X) = \gamma(Y) \\ \{C_X\}_{X\in A} = \{C_Y\}_{Y\in A} \\ \{x \in A \ni C_X(x) = 0\} = \{x \in A \ni C_Y(x) = 0\} \\ X = Y \end{gathered}$$

    Por lo tanto, γ es inyectiva.

b) Sobreyectividad. Supóngase que tenemos una función $f \in 2^A$ y ahora dígase que $f^{-1}(0) = B \implies f = \{C_B\}_{B\in A} = \gamma(B)$. Por lo tanto, γ es sobreyectiva.

Por lo tanto, γ es función biyectiva.

Entonces, $2^A \subseteq \{C_B\}_{B\in A}$ tal que $2^A = \{C_B\}_{B\in A}$. Por lo tanto, existe una función γ biyectiva entre 2^A y $\mathcal{P}(A)$. ■