

Universidad del Valle de Guatemala

Departamento de Matemática

Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich

Correo: rom19857@uvg.edu.gt

Carné: 19857

MM2033 - Teoría de Conjuntos - Catedrático: Nancy Zurita

20 de agosto de 2021

HT 5

Instrucciones: Del libro de Set Theory de Charles Pinter, resuelva los ejercicios 3, 6, 8, 9 de la sección 1.5 del Capítulo 1.

1. Problemas

Problema 1.1. (Ejercicio 3) Probar el teorema 1.38. Sean G y H los gráficos. Si $\text{ran } H \subseteq \text{dom } G$ entonces $\text{dom}(G \circ H) = \text{dom } H$.

Demostración. Sean G y H gráficos.

- (\implies) Supóngase $x \in \text{dom}(G \circ H) \implies \exists y \ni (x, y) \in G \circ H \implies \exists z \wedge \exists y \ni (x, z) \in H \wedge (z, y) \in G \implies \text{dom } H \wedge \text{ran } G \implies \text{dom } H$. Por lo tanto, $\text{dom}(G \circ H) \subseteq \text{dom } H$
- (\impliedby) Supóngase $x \in \text{dom } H \implies \exists u \ni (x, u) \in H$. Por hipótesis, $(u \in \text{ran } H \implies u \in \text{dom } G) \iff (\exists v \ni (v, u) \in H \implies \exists w \ni (u, w) \in G)$, entonces tenemos $\exists u \wedge \exists w \ni (x, u) \in H \wedge (u, w) \in G \iff \exists w \ni (x, w) \in G \circ H \iff x \in \text{dom}(G \circ H) \implies (x \in H \implies x \in \text{dom}(G \circ H)) \implies \text{dom } H \subseteq \text{dom}(G \circ H)$.

Por lo tanto, $\text{dom}(G \circ H) = \text{dom } H$. ■

Problema 1.2. (Ejercicio 6) Si G, H, J , y K son gráficos, probar:

1. Si $G \subseteq H$ y $J \subseteq K$, entonces $G \circ J \subseteq H \circ K$.

Demostración. Sean G, H, J , y K gráficos, tal que supóngase que $(x, y) \in G \circ J \implies \exists z \ni (x, z) \in J \wedge (z, y) \in G$. Por hipótesis, $\exists z \ni (x, z) \in K \wedge (z, y) \in K \implies (x, y) \in H \circ K$. Por lo tanto, $G \circ J \subseteq H \circ K$. ■

2. $G \subseteq H$ si y solo si $G^{-1} \subseteq H^{-1}$.

Demostración. Sean G, H, J y K gráficos tal que,

(\implies) Supóngase $(x, y) \in G^{-1} \implies (y, x) \in G \implies (y, x) \in H \implies (x, y) \in H^{-1}$.

(\impliedby) Supóngase $(x, y) \in G \implies (y, x) \in G^{-1} \implies (y, x) \in H^{-1} \implies (x, y) \in H$.

Por lo tanto, $G \subseteq H$ si y solo si $G^{-1} \subseteq H^{-1}$. ■

Problema 1.3. (Ejercicio 8) Sean G y H gráficos, probar:

1. Si $G \subseteq A \times B$, entonces $G^{-1} \subseteq B \times A$.

Demostración. Sean G y H gráficos tal que, $(x, y) \in G^{-1} \implies (y, x) \in G \implies (y, x) \in A \times B \implies (x, y) \in (A \times B)^{-1} \implies x \in B \wedge y \in A \implies x \in B \times A$. Por lo tanto, $G \subseteq A \times B$, entonces $G^{-1} \subseteq B \times A$. ■

2. Si $G \subseteq A \times B$ y $H \subseteq B \times C$, entonces $H \circ G \subseteq A \times C$.

Demostración. Sean G y H gráficos tal que, $(x, y) \in H \circ G \implies \exists z \ni (x, z) \in G \wedge (z, y) \in H \implies \exists z \ni (x, z) \in A \times B \wedge (z, y) \in B \times C \implies \exists z \ni (x \in A \wedge z \in B) \wedge (z \in B \wedge y \in C) \implies \exists z \ni (z \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \implies (x, y) \in A \times C$. Por lo tanto, $G \subseteq A \times B$ y $H \subseteq B \times C$, entonces $H \circ G \subseteq A \times C$. ■

Problema 1.4. (Ejercicio 9) Si G y H son gráficos, probar:

1. $\text{dom}(G \cup H) = (\text{dom } G) \cup (\text{dom } H)$.

Demostración. Sean G y H gráficos tal que, $x \in \text{dom}(G \cup H) \iff \exists y \ni (x, y) \in G \cup H \iff \exists y \ni (x, y) \in G \vee (x, y) \in H \iff x \in \text{dom } G \vee x \in \text{dom } H \iff x \in (\text{dom } G) \cup (\text{dom } H)$. Por lo tanto, $\text{dom}(G \cup H) = (\text{dom } G) \cup (\text{dom } H)$. ■

2. $\text{ran}(G \cup H) = (\text{ran } G) \cup (\text{ran } H)$.

Demostración. Sean G y H gráficos tal que, $y \in \text{ran}(G \cup H) \iff \exists x \ni (x, y) \in (G \cup H) \iff (x, y) \in G \vee (x, y) \in H \implies y \in (\text{ran } G) \cup (\text{ran } H)$. Por lo tanto, $\text{ran}(G \cup H) = (\text{ran } G) \cup (\text{ran } H)$. ■

3. $\text{dom } G - \text{dom } H \subseteq \text{dom}(G - H)$.

Demostración. Sean G y H gráficos tal que, $x \in \text{dom } G \wedge x \notin \text{dom } H \implies \exists y \ni (x, y) \in G \wedge (x, y) \notin H \implies \exists y \ni (x, y) \in (G - H) \implies x \in \text{dom}(G - H)$. Por lo tanto, $\text{dom } G - \text{dom } H \subseteq \text{dom}(G - H)$. ■

4. $\text{ran } G - \text{ran } H \subseteq \text{ran}(G - H)$.

Demostración. Sean G y H gráficos tal que, $y \in \text{ran } G \wedge y \notin \text{ran } H \implies \exists x \ni (x, y) \in G \wedge (x, y) \notin H \implies \exists x \ni (x, y) \in (G - H) \implies y \in \text{ran}(G - H)$. Por lo tanto, $\text{ran } G - \text{ran } H \subseteq \text{ran}(G - H)$. ■