UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

MM2033- 2 SEMESTRE - 2021

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA APLICADA

TEORÍA DE CONJUNTOS

Catedrático: Nancy Zurita

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay
Carné: 19857
Correo: rom19857@uvg.edu.gt

11 de julio de 2021

Índice

1. Sesión 2

1.1. Axiomática

A0: (Axioma de vacío) Existe vacío. Notación: $\varnothing$.

A1: (Axioma de extensión) $\forall x(x \in A \iff x \in B) \implies A = B$.

A2: (Esquema axiomático de separación) $\exists B\ \forall x \ni (x \in B \iff [x \in A \wedge \Phi(x)])$.

Definición 1. *(Conjunto) y es conjunto* $\iff (\exists x(x \in y)) \vee (y = \varnothing)$.

Definición 2. *(No pertenencia)* $x \notin y \iff \neg(x \in y)$.

Teorema 1. $\forall x, x \notin \varnothing$.

Teorema 2. $\forall x, x \notin A \iff A = \varnothing$.

Definición 3. *(Contención)* $A \subseteq B \iff \forall x(x \in A \implies x \in B)$.

Definición 4. *(Contención estricta)* $A \subset B \iff (A \subseteq B \wedge A \neq B)$.

Teorema 3. $A \subseteq \varnothing \implies A = \varnothing$.

Teorema 4. $\neg(A \subset A)$.

A0: AXIOMA DE VACÍO

Existe vacío.

Notación: $\emptyset$

A1: AXIOMA DE EXTENSIÓN

$\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Longrightarrow A = B$

A2: ESQUEMA AXIOMÁTICO DE SEPARACIÓN

$\exists B \forall x \ni (x \in B \Leftrightarrow [x \in A \text{ y } \Phi(x)])$

Construye conjunto.

DEFINICIÓN DE CONJUNTO

$y \text{ es conjunto } \Leftrightarrow (\exists x(x \in y) \text{ ó } (y = \emptyset)$

vacío es conjunto

DEFINICIÓN DE NO PERTENENCIA

$x \notin y \Leftrightarrow \neg(x \in y)$

TEOREMAS

$\Phi(x): x \neq x$

1. $\forall x, x \notin \emptyset$

dem: Sea $\Phi(x)$ la expresión $x \neq x$. Por esquema axiomático de separación, $\exists B \forall x \ni (x \in \Phi \ \& \ x \neq x)$. Supóngase $\exists x \in B \Rightarrow x \neq x$ $(\leftarrow\!\!\!\times\!\!\!\rightarrow)$ $\Rightarrow \forall x, x \notin B$. Por definición de conjunto $B = \Phi \Rightarrow \forall x, x \notin \Phi$. ■

A2: ESQUEMA AXIOMÁTICO DE SEPARACIÓN

$\exists B \forall x \ni (x \in B \Leftrightarrow [x \in A \text{ y } \Phi(x)])$

conjunto !!

2. $\forall x, x \notin A \Leftrightarrow A = \emptyset$

vacío es único como conjunto

dem:

$(\Rightarrow)$ Si $\forall x, x \notin A \rightarrow$ Por definición de conjunto, $A = \Phi$.

$(\Leftarrow)$ Si $A = \Phi \rightarrow$ Por teorema anterior $\forall x, x \in \Phi = A \Rightarrow \forall x, x \notin A$.

■

$(p \Rightarrow q) \equiv (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

p	$\Rightarrow$	q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

* DEFINICIÓN DE CONTENCIÓN

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

** DEFINICIÓN DE CONTENCIÓN ESTRICTA

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ y } A \neq B)$$

TEOREMAS

1. $A \subseteq \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$

dem: Sea A un conjunto $\ni A \subseteq \emptyset$. $\Rightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in \emptyset)$. Se asume que la implicación es verdadera, también lo es su contrapuesta. Es decir, $\forall x(x \notin \emptyset \Rightarrow x \notin A)$. Como $\forall x,\ x \notin \emptyset$ es siempre verdadero $\Rightarrow$ $\forall x,\ x \notin A$ es verdadero $\Rightarrow A = \emptyset$ ■

2. $\neg(A \subset A)$

dem: Sea A un conjunto. Supóngase que $A \subset A \Rightarrow A \subseteq A$ y $A \neq A$. $\Rightarrow A \neq A$.

Además, $A \subseteq A \Rightarrow A \subseteq A$ y $A \subseteq A \Rightarrow$ $\forall x[x \in A \Rightarrow x \in A]$ y $\forall x[x \in A \Rightarrow x \in A]$ $\Rightarrow \forall x[x \in A \Leftrightarrow x \in A] \Rightarrow A = A$ por Axioma de Extensión. $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

$\therefore \neg(A \subset A)$. ■