Universidad del Valle de Guatemala

MM2033- 2 semestre - 2021

Licenciatura en matemática aplicada

TEORÍA DE CONJUNTOS

Catedrático: Nancy Zurita

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay

Carné: 19857

Correo: rom19857@uvg.edu.gt

15 de julio de 2021

Índice

1. Sesión 2

1.1. Axiomática

A0: (Axioma de vacío) Existe vacío. Notación: $\varnothing$.

A1: (Axioma de extensión) $\forall x(x \in A \iff x \in B) \implies A = B$.

A2: (Esquema axiomático de separación) $\exists B\ \forall x \ni (x \in B \iff [x \in A \wedge \Phi(x)])$.

Definición 1. *(Conjunto) y es conjunto* $\iff (\exists x(x \in y)) \vee (y = \varnothing)$.

Definición 2. *(No pertenencia)* $x \notin y \iff \neg(x \in y)$.

Teorema 1. $\forall x, x \notin \varnothing$.

Teorema 2. $\forall x, x \notin A \iff A = \varnothing$.

Definición 3. *(Contención)* $A \subseteq B \iff \forall x(x \in A \implies x \in B)$.

Definición 4. *(Contención estricta)* $A \subset B \iff (A \subseteq B \wedge A \neq B)$.

Teorema 3. $A \subseteq \varnothing \implies A = \varnothing$.

Teorema 4. $\neg(A \subset A)$.

A0: AXIOMA DE VACÍO

Existe vacío.

Notación: $\emptyset$

A1: AXIOMA DE EXTENSIÓN

$$\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Longrightarrow A = B$$

A2: ESQUEMA AXIOMÁTICO DE SEPARACIÓN

$$\exists B \forall x \ni (x \in B \Leftrightarrow [x \in A \text{ y } \Phi(x)])$$

Construye conjunto.

DEFINICIÓN DE CONJUNTO

$$y \text{ es conjunto } \Leftrightarrow (\exists x(x \in y) \text{ ó } (y = \emptyset))$$

vacío es conjunto

DEFINICIÓN DE NO PERTENENCIA

$$x \notin y \Leftrightarrow \neg(x \in y)$$

TEOREMAS

$\Phi(x): x \neq x$

1. $\forall x, x \notin \emptyset$

dem: Sea $\Phi(x)$ la expresión $x \neq x$. Por esquema axiomático de separación, $\exists B \forall x \ni (x \in \emptyset \;\&\; x \neq x)$. Supóngase $\exists x \in B \Rightarrow x \neq x$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$ $\Rightarrow \forall x, x \notin B$. Por definición de conjunto $B = \emptyset$. $\Rightarrow \forall x, x \notin \emptyset$. ■

A2: ESQUEMA AXIOMÁTICO DE SEPARACIÓN

$$\exists B \forall x \ni (x \in B \Leftrightarrow [x \in A \text{ y } \Phi(x)])$$

conjunto !!

2. $\forall x, x \notin A \Leftrightarrow A = \emptyset$

vacío es único como conjunto

dem:

$(\Rightarrow)$ Si $\forall x, x \notin A \rightarrow$ Por definición de conjunto, $A = \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ Si $A = \emptyset \rightarrow$ Por teorema anterior

$\forall x, x \in \emptyset = A \Rightarrow \forall x, x \notin A$. ■

$(p \Rightarrow q) \equiv (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

p	⇒	q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

* DEFINICIÓN DE CONTENCIÓN

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

** DEFINICIÓN DE CONTENCIÓN ESTRICTA

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ y } A \neq B)$$

TEOREMAS

1. $A \subseteq \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$

dem: Sea A un conjunto $\ni A \subseteq \Phi$.
$\Rightarrow \forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in \Phi)$. Se asume que la implicación es verdadera, también lo es su contrapuesta. Es decir, $\forall x\,(x \notin \Phi \Rightarrow x \notin A)$.
Como $\forall x,\ x \notin \Phi$ es siempre verdadero $\Rightarrow$ $\forall x,\ x \notin A$ es verdadero $\Rightarrow A = \Phi$ ∎

2. $\neg(A \subset A)$

dem: Sea A un conjunto. Supóngase que $A \subset A \Rightarrow A \subseteq A \wedge A \neq A. \Rightarrow A \neq A$.
Además, $A \subseteq A \Rightarrow A \subseteq A \wedge A \subseteq A \Rightarrow$
$\forall x\,[x \in A \Rightarrow x \in A] \wedge \forall x\,[x \in A \Rightarrow x \in A]$
$\Rightarrow \forall x\,[x \in A \Leftrightarrow x \in A] \Rightarrow A = A$ por Axioma de Extensión. $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

$\therefore \neg(A \subset A)$. ∎

2. Sesión 3

Teorema 5. *(Construcción de la interesección)* $\exists! C, \forall x \ni (x \in C \iff x \in A \wedge x \in B)$.

Definición 5. $A \cap B = y \iff [\forall x(x \in y \iff [x \in A \wedge x \in B]) \wedge y$ *es conjunto.*$]$

Teorema 6. *(Varios)*

1. $x \in A \cap B \Leftrightarrow [x \in A$ *y* $x \in B]$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

A3: (De la unión) $\exists C \forall x \ni (x \in C \iff [x \in \vee x \in B])$.

Teorema 7. *(Construcción de la unión)* $\exists! C, \forall x \ni (x \in C \iff [x \in A \vee x \in B])$

Definición 6. $A \cup B = y \iff [\forall x(x \in y \iff [x \in A \vee x \in B]) \wedge y$ *es conjunto.*$]$

Teorema 8. *(Varios)*

1. $x \in A \cup B \Leftrightarrow [x \in A$ *ó* $x \in B]$
2. $A \cup A = A$
3. $A \cup \emptyset = A$
4. $A \cup B = B \cup A$
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

A0 A. Vacío
A1 A. Extensión (Unicidad - Cuando hay igualdad)
A2 Existencia.
A3 Existencia.

Teorema 9. *(Construcción de la diferencia de conjuntos)* $\exists! C, \forall x \ni (x \in C \iff [x \in \wedge x \notin B])$.

Definición 7. *Sea*

$$A \sim B = y \iff [\forall x(x \in y \iff [x \in A \wedge x \notin B]) \wedge y \text{ es conjunto.}]$$

Teorema 10. *(Varios)*

1. $x \in A \sim B \iff [x \in A \wedge x \notin B]$.

2. $A \sim A = \varnothing$.

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE LA INTERSECCIÓN

$\exists! C, \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \ y \ x \in B])$

Existencia Sea $\Phi(x): x \in B$. Por EAS

$\exists C \ \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ \underbrace{\Phi(x)}_{x \in B}))$

$\therefore \exists C \ \forall x \ni [x \in C \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ x \in B)]$

Unicidad Supóngase $\exists C' \ \forall x \ni [x \in C' \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ x \in B)]$

Si $x \in C' \Leftrightarrow x \in A \ \& \ x \in B \Leftrightarrow x \in C$

$\therefore \boxed{x \in C' \Leftrightarrow x \in C}$. Por Axioma de Extensión

Si $\forall x \in C' \Leftrightarrow x \in C \Rightarrow \boxed{C' = C}$

$\therefore$ C es único

$$\boxed{\exists! C \ \forall x \ (x \in C \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ x \in B))}$$

DEFINICIÓN

$A \cap B = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \forall x (x \in y \Leftrightarrow [x \in A \ y \ x \in B]) \\ \wedge \\ y \text{ es conjunto} \end{bmatrix}$

TEOREMAS

1. $x \in A \cap B \Leftrightarrow [x \in A \ y \ x \in B]$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(1) dem: Sea $A \cap B = A \cap B$. Al aplicar la definición $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \ \& \ x \in B$. ∎

(2) Sea $x \in A \Leftrightarrow x \in A \ \& \ x \in A$

$\therefore \boxed{x \in A \Leftrightarrow x \in A \cap A}$

Por axioma de extensión $A = A \cap A$ ∎

$\boxed{P \Rightarrow P \wedge P}$

$p \wedge q \Rightarrow p$

TEOREMAS

1. $x \in A \cap B \Leftrightarrow [x \in A \ y \ x \in B]$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(3) dem: Supóngase que $x \in A \cap \emptyset$.

$\Rightarrow x \in A \ \& \ x \in \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset$ (⨯)

$\Rightarrow x \notin A \cap \emptyset, \forall x. \Rightarrow A \cap \emptyset = \emptyset$ ∎

A3: DE LA UNIÓN

$\exists C \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B])$

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE LA UNIÓN

$\exists! C, \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B])$

Existencia: Asegura Axioma de la Union.

Unicidad: Asegura Axioma de Extensión.

DEFINICIÓN

$$A \cup B = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \forall x(x \in y \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B]) \\ \wedge \\ y \text{ es conjunto} \end{bmatrix}$$

TEOREMAS

1. $x \in A \cup B \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B]$
2. $A \cup A = A$
3. $A \cup \emptyset = A$
4. $A \cup B = B \cup A$
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

dem:

(1) Sabemos que $A \cup B = A \cup B$.
De la definición,
$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$. ■

(2) dem: Sea $x \in A \Leftrightarrow \boxed{x \in A \vee x \in A}$
$\Rightarrow x \in A \Leftrightarrow x \in A \cup A$
Por Ax. de Extensión, $A = A \cup A$ ■

(3) dem: Sea $x \in A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in \phi \Leftrightarrow x \in A \cup \phi$

Por Ax. de Extensión, $A = A \cup \phi$. ■

A. Vacío
A. Ext
EAS
A. Unión

Unicidad cuando hay igualdad.

Existencia

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE LA DIFERENCIA DE CONJUNTOS

$\exists! C, \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \wedge x \notin B])$

Existencia: $\Phi(x): x \notin B$
EAS

Unicidad: A. Ext.

$A \backsim B$

ó

$A - B$

Considera

ϕ

DEFINICIÓN

$$A\sim B = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \forall x(x \in y \Leftrightarrow [x \in A \ \ y \ \ x \notin B]) \\ \wedge \\ y \text{ es conjunto} \end{bmatrix}$$

TEOREMAS

1. $x \in A\sim B \Leftrightarrow [x \in A \ \ y \ \ x \notin B]$
2. $A\sim A = \emptyset$

① dem: Sabemos que $A \backsim B = A \backsim B$. Por definición

$x \in A \backsim B \Leftrightarrow x \in A$ & $x \notin B$

∎

② dem: Sea $x \in A \backsim A \Leftrightarrow$

$x \in A$ & $x \notin A$ ($\rightarrow\!\leftarrow$).

$\forall x, x \notin A \backsim A \Rightarrow A \backsim A = \phi$

∎

3. Sesión 4

A4: (De parejas) $\exists A \forall z \ni (z \in A \iff [z = x \vee z = y])$.

Teorema 11. *(Construcción de conjuntos con dos elementos)* $\exists! A \forall z \ni (z \in A \iff [z = x \vee z = y])$.

Definición 8. $w = \{x, y\} \iff [\forall z (z \in w \iff [z = x \vee z = y])]$

Teorema 12. *(Varios)*

1. $z \in \{x, y\} \iff [z = x \vee z = y]$.

2. $\{x, y\} = \{u, v\} \implies [(x = u \wedge y = v) \vee (x = v \wedge y = u)]$.

Teorema 13.

$$\{x\} = \{x, x\}$$

$$\{x, y, z\} = \{x, y\} \cup \{z\}$$

$$\{w, x, y, z\} = \{w, x\} \cup \{y, z\}$$

Teorema 14. $\{x\} = \{y\} \implies x = y$.

Definición 9. *(Pareja ordenada)*

1. $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

2. *Si* $\Delta \neq \square \implies (x, y) = \{\{x, \Delta\}, \{y, \square\}\}$

Teorema 15. $(x, y) = (u, v) \implies [x = u \wedge y = v]$