Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2033 - Teoría de Conjuntos - Catedrático: Nancy Zurita
14 de agosto de 2021

HT 4

1. Ejercicios

Para A y B conjuntos:

Problema 1.1. $\cup\{A, B\} = A \cup B$

Demostración. Sean A, B y C conjuntos. Supóngase que $x \in \cup\{A, B\} \iff (\exists C)(x \in C \land C \in \{A, B\}) \iff [x \in C \land (C = A \lor C = B)] \iff [(x \in C \land C = A) \lor (x \in C \land C = B)] \iff x \in A \lor x \in B \iff x \in A \cup B$. Por lo tanto, $\cup\{A, B\} = A \cup B$. ■

Problema 1.2. $\cup(A \cup B) = (\cup A) \cup (\cup B)$

Demostración. Sean A, B y C conjuntos. Supóngase que $x \in \cup(A \cup B) \iff (\exists C)(x \in C \land C \in A \cup B) \iff [x \in C \land (C \in A \lor C \in B)] \iff [(x \in C \land C \in A) \lor (x \in C \land C \in B)] \iff x \in (\cup A) \cup (\cup B)$. Por lo tanto, $\cup(A \cup B) = (\cup A) \cup (\cup B)$. ■

Problema 1.3. $(A \subseteq B) \Rightarrow (\cup A \subseteq \cup B)$

Demostración. Sean A, B y C conjuntos. Por hipótesis, $A \subseteq B \implies (C \in A \implies C \in B)$. Supóngase $x \in \cup A \implies (\exists C)(x \in C \land C \in A) \implies (x \in C \land C \in B) \implies x \in \cup B$. Por lo tanto, $(A \subseteq B) \Rightarrow (\cup A \subseteq \cup B)$. ■

Problema 1.4. $\cap\langle x, y\rangle = \{x\}$

Demostración. Sea B un conjunto. Supóngase $c \in \cap\langle x, y\rangle \iff (\forall B)(B \in \langle x, y\rangle \implies c \in B) \land (\exists B)(B \in \langle x, y\rangle) \iff (\forall B)(B \in \langle x, y\rangle \implies c \in B) \land (B \in \{\{x\}, \{x, y\}\}) \iff (\forall B)(B \in \langle x, y\rangle \implies c \in B) \land (B = \{x\} \lor B = \{x, y\}) \iff (c \in B \land B = \{x\}) \lor (c \in B \land B = \{x, y\}) \iff c \in \{x\} \land c \in \{x, y\}$. Por lo tanto, $\cap\langle x, y\rangle = \{x\}$. ■

Problema 1.5. $(A \in B) \Rightarrow (A \subseteq \cup B)$

Demostración. Sean A y B conjuntos. Supóngase $x \in A$ y por hipótesis $A \in B$ y por la definición de la unión de un conjunto $\cup B$. ■

Problema 1.6. $\cup\langle x,y\rangle=\{x,y\}$

Demostración. Sea B un conjunto. Supóngase $c\in\cup\langle x,y\rangle \iff (\exists B)(c\in B\wedge B\in\langle x,y\rangle)\iff (c\in B)\wedge(B\in\{\{x\},\{x,y\}\})\iff (c\in B)\wedge(B=\{x\}\vee B=\{x,y\})\iff (c\in\{x\})\vee(x\in\{x,y\})$. Por lo tanto, $\cup\langle x,y\rangle=\{x,y\}$. ■

Problema 1.7. $\cup\cup\langle A,B\rangle=A\cup B$

Demostración. Sean A,B y C. Supóngase $x\in\cup\cup\langle A,B\rangle \iff (\exists C)(x\in C\wedge C\in\cup\langle A,B\rangle)\iff x\in C\wedge \underbrace{C\in\{A,B\}}_{\text{Problema 1.6}}\iff x\in C\wedge(C=A\vee C=B)\iff x\in A\vee x\in B\iff x\in A\cup B$. Por lo tanto, $\cup\cup\langle A,B\rangle=A\cup B$. ■

Problema 1.8. $\cap\{A\}=A$

Demostración. Sean A y B conjuntos. Supóngase $x\in\cap\{A\}\iff(\forall B)(B\in\{A\}\implies x\in B)\wedge(\exists B)(B\in\{A\})\iff x\in B\wedge B=A\iff x\in A$. ■

Problema 1.9. $\cap\{A,B\}=A\cap B$

Demostración. Sean A y B conjuntos. Supóngase $x\in\cap\{A,B\}\iff(\forall C)(C\in\{A,B\}\implies x\in C)\wedge(\exists C)(C\in\{A,B\})\iff(\forall C)(C\in\{A,B\}\implies x\in C)\wedge(C=A\vee C=B)\iff x\in A\wedge x\in B\iff x\in A\cup B$. Por lo tanto, $\cap\{A,B\}=A\cap B$. ■

Problema 1.10. $\cap\cap\langle A,B\rangle=A$

Demostración. Sean A,B y C conjuntos. Supóngase $c\in\cap\cap\langle A,B\rangle\iff(\forall C)(C\in\cap\langle A,B\rangle\implies x\in \underbrace{\cap\langle A,B\rangle}_{\text{Problema 1.4}})\wedge(\exists C)(C\in \underbrace{\cap\langle A,B\rangle}_{\text{Problema 1.4}})\iff(\forall C)(C\in\cap\langle A,B\rangle\implies x\in\{A\})\wedge(\exists C)(C\in\{A\})\iff(\forall C)(C\in\cap\langle A,B\rangle\implies x\in\{A\})\wedge(C=A)\iff x\in A$. Por lo tanto, $\cap\cap\langle A,B\rangle=A$. ■

Problema 1.11. $\cap A\subseteq\cup A$

Demostración. Sean A y B conjuntos. Supóngase que $x\in\cap A\iff(\forall B)(B\in A\implies x\in B)\wedge(\exists B)(B\in A)\iff x\in B\wedge B\in A\iff\cup A$. Por lo tanto, $\cap A\subseteq\cup A$. ■

Problema 1.12. *Si* $\varnothing\in A$ *entonces* $\cap A=\varnothing$.

Demostración. Sean A y B conjuntos. Supóngase que $x\in\cap A\iff(\varnothing\in A\implies x\in\varnothing)$. Por lo tanto, $\cap A=\varnothing$. ■