Ej 2

$PPP\emptyset$

por teorema $P\emptyset = \{\emptyset\}$

$\Rightarrow PP\emptyset = P\{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$

$\Rightarrow PPP\emptyset = P\{\{\emptyset\},\emptyset\} = \{\{\{\emptyset\},\emptyset\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}$

$\wp(A)$ 2^n elementos

Sea $\wp\phi = \{\phi\}$ por teorema 89. Ahora, $\wp\wp\phi = \{\phi, \{\phi\}\}$ por teorema 90. Considérese $\wp\wp\wp\phi = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

T88

Supóngase $\exists B \ni B \in \wp\wp\wp\phi \Rightarrow$ ($B \neq \phi$)

$B \subseteq \wp\wp\phi \Rightarrow \boxed{B \subseteq \{\phi, \{\phi\}\}}$

$\forall x \in B \Rightarrow x \in \{\phi, \{\phi\}\} \Rightarrow x = \phi$ ó $x = \{\phi\}$.

$\longrightarrow B = \{\phi\}$ ó $B = \{\{\phi\}\}$ ó $B = \{\phi, \{\phi\}\}$

---

5. $\wp\wp 0 = \{0, \{0\}\}$

Demostración: Sea $\wp 0 = \{0\}$ por el teorema ~~anterior~~ 89 ya demostrado. Definiendo $A = \{0\}$, si $\wp A$, por el teorema ~~anterior~~ 88 demostrado $\ni 0 \in \wp A \rightarrow$ $\wp\wp 0 = \{0, \{0\}\}$.

Por teo 87

Sea $B \in \wp\wp\phi \Rightarrow B \subseteq \wp\phi$ ($B \neq \phi$)

$\forall x \in B \Rightarrow x \in \wp\phi = \{\phi\} \Rightarrow x = \phi$

$\Rightarrow B = \{\phi\} = A$

Por teorema 88, $\phi \in \wp\wp\phi$

$\Rightarrow \wp\wp\phi = \{\phi, \{\phi\}\}$.

---

(4) Teorema 93: $\wp(A \cap B) = (\wp A) \cap (\wp B)$

añadir implicación regreso!!

dem: Sean $\boxed{A, B, C}$ conjuntos. Por teorema 1 intersección $C \in (\wp A) \cap (\wp B) \leftrightarrow C \in (\wp A) \wedge C \in (\wp B)$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{por teorema 86} \rightarrow}$ $C \subseteq A \wedge C \subseteq B$ $\rightarrow$ si $x \in C \rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \rightarrow$ por def de contención $C \subseteq (A \cap B)$ $\therefore$ Por teorema 86 $C \in \wp(A \cap B) \rightarrow$

$\forall C (C \in (\wp A) \cap (\wp B) \longleftrightarrow C \in \wp(A \cap B) \rightarrow$

$\rightarrow$ Por A 1 $\wp(A \cap B) = (\wp A) \cap (\wp B)$ ■

Ax. Extensión

Problema 1.5. *Demostrar teorema 94.* $\mathcal{P}(A \sim B) \subseteq ((\mathcal{P}A) \sim (\mathcal{P}B)) \cup \{\varnothing\}$.

Demostración. ~~Tenemos dos casos:~~ Sean A, B, C conjuntos $\ni C \in \mathcal{P}(A \sim B)$

1. $A \sim B$ no es vacío. $C \in \mathcal{P}(A \sim B) \iff C \subseteq (A \sim B) \iff C \subseteq A \wedge C \not\subseteq B \iff$
   $C \in \mathcal{P}A \wedge C \notin \mathcal{P}B \implies C \in [(\mathcal{P}A) \sim (\mathcal{P}B)]$.

2. $A \sim B$ es vacío. $\implies \mathcal{P}(A \sim B) = \{\varnothing\}$.

Por lo tanto, $\mathcal{P}(A \sim B) \subseteq ((\mathcal{P}A) \sim (\mathcal{P}B)) \cup \{\varnothing\}$. ∎

CASO 1: $A \sim B = \phi \rightarrow C \in \mathcal{P}(\phi) = \{\phi\} \ni C = \phi$

$\mathcal{P}(A \sim B) \subseteq \{\phi\}$

ó

CASO 2: $A \sim B \neq \phi \Rightarrow C \subseteq A \sim B \Rightarrow \forall x$

$x \in C \Rightarrow [x \in A \sim B] \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B. \Rightarrow x \in A$

$\boxed{\forall x \in C \Rightarrow x \in A} \wedge \boxed{\forall x \in C \Rightarrow x \notin B}$

$C \subseteq A \wedge C \not\subseteq B \rightarrow C \in \mathcal{P}A \wedge C \notin \mathcal{P}(B)$

$C \in [\mathcal{P}A \sim \mathcal{P}B]$

$\therefore \mathcal{P}(A \sim B) \subseteq \mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$

teorema 96. $x \in (A \times B) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists z) : \begin{cases} y \in A \\ z \in B \\ x = (y, z) \end{cases}$

Sean A, B conjuntos.

Demostración. Supongamos que $x \in (A \times B)$

por por esquema teoremático y definición $\begin{cases} y \in A \\ z \in B \\ x = (y, z) \end{cases}$

Supongamos que $(\exists x)(\exists z) : \begin{cases} y \in A \\ z \in B \\ x = (y, z) \end{cases}$ por definición $x \in (A \times B)$

teorema 97. $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$

Demostración.

Parte 2

1) Teorema 96. $x \in A \times B \leftrightarrow \exists y, z \ni (y \in A \ \& \ z \in B \ \& \ x = \langle y, z \rangle)$

Sabemos $A \times B = A \times B \ni A \neq B \rightarrow x \subset A \times B = x \subset A \times B$

Decimos $C = A \times B$, entonces por teorema 95,

$\exists (A \times B) \forall x \ni (x \in (A \times B) \leftrightarrow (\exists y, z)(y \in A \ \& \ z \in B \ \& \ x = \langle y, z \rangle)$

$\Rightarrow$ Dado $x \in (A \times B) \leftrightarrow x \in A \times B)$

$\therefore x \in (A \times B) \leftrightarrow (\exists y, z)(y \in A \ \& \ z \in B \ \& \ x = \langle y, z \rangle)$ ∎

1(x) Demostrar teorema 97.

Sea: A, B conjuntos.

Dado $(x,y) \in A\times B$
$\rightarrow x \in A$ & $y \in B$

Sea $x \in A$ & $y \in B$
por teorema 96 ¿cómo?
$(x,y) \in A \times B$ ∎

Sea $(x,y) \in A\times B$ por T96 $\exists\, a,b \ni$
$a\in A$ & $b\in B$ & $\underbrace{(x,y)=(a,b)}$

$\Leftrightarrow x=a$ & $y=b$

$\Leftrightarrow x\in A$ & $y \in B$

$\Leftrightarrow \exists\, x\in A$ & $x\in B$.

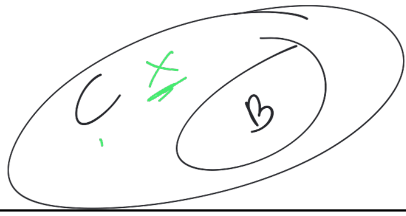
TEOREMA 101

$B \subseteq C \rightarrow A\times B \subseteq A\times C$

conjunto!!

Sean A, B y C, donde $B \subseteq C$ y $y \in A$. Por definición de contención $\forall x\,(x\in B \Leftrightarrow x \in C) \rightarrow (y,x_1) \in A\times B \wedge (y,x_2) \in A\times C$ por definición de producto cartesiano y teorema 97. $A=A \rightarrow y=y$. Y como $B\subseteq C \rightarrow \forall x_1 \exists x_2 \mid x_1 = x_2$. $\rightarrow \forall (y,x_1) \exists (y,x_2) \mid (y,x_1)=(y,x_2)$. ∴ Por definición de contención $A\times B \subseteq A\times C$ ∎

Sea $(a,b) \in A\times B \Rightarrow a\in A$ & $b \in B$
$\Rightarrow a\in A$ & $b\in C \Rightarrow (a,b)\in A\times C$.
$\exists\, a\in A$ & $b \in C$.



Ejercicio 4. Dar un contra-ejemplo simple para mostrar que, en general, no es el caso que $A\cup(B\times C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

Demostración. Sean $A = \{x\}, B = \{y\}, C = \{z\} \implies A\cup(B\times C) = A\cup\{\langle y,z\rangle\} = \{x, \langle y,z\rangle\}$. Por otro lado, $(A\times B)\cup(A\times C) = \{\langle x,y\rangle\}\cup\{\langle x,z\rangle\} = \{\langle x,y\rangle,\langle x,z\rangle\} \therefore A\cup(B\times C) \neq (A\times B)\cup(A\times C)$ ∎

$A=B=C=\{x\}$ $\quad A\cup(B\times C) = \{x,(x,x)\}$

$(A\times B)\cup(A\times C) = \{(x,x)\}$