Si $A = B$ y $[x \in A = B \Leftrightarrow x \in B]$

Condición $\Longrightarrow$ $A = B$

---

A0: Existe vacío

A1: EAS

A2: Extensión

A3: Unión

construyen conjuntos

ÚNICA

¿Qué conjunto existe?

VACÍO

---

AXIOMAS DE ZERMELO-FRAENKL

Parejas

2 "objetos"

Pares ordenados

A4: DE PAREJAS

$\exists A \forall z \ni (z \in A \Leftrightarrow [z = x \text{ ó } z = y])$

## TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE CONJUNTOS CON DOS ELEMENTOS

$\exists! A \forall z \ni (z \in A \Leftrightarrow [z = x \text{ ó } z = y])$

Existencia → Axioma de parejas.

Unicidad → Axioma de Extensión

DEFINICIÓN

$w = \{x, y\} \Leftrightarrow [\forall z (z \in w \Leftrightarrow [z = x \text{ ó } z = y])]$

## TEOREMAS

1. $z \in \{x, y\} \Leftrightarrow [z = x \text{ ó } z = y]$

dem: Sea $\{x,y\} = \{x,y\}$

Entonces por definición.

$\forall z \in \{x,y\} \Leftrightarrow [z = x \text{ ó } z = y]$.

2. $\{x, y\} = \{u, v\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = u & \wedge & y = v \\ & \text{ó} & \\ x = v & \wedge & y = u \end{bmatrix}$

dem: Sea $\{x,y\} = \{u,v\}$. Sabemos que $u \in \{u,v\} \Rightarrow u \in \{x,y\} \Rightarrow$

- $u = x$ ó $u = y$. De igual manera:
- $v = x$ ó $v = y$
- $x = u$ ó $x = v$
- $y = u$ ó $y = v$

$z \in \{u,v\} \Leftrightarrow$

$z = u$ ó $z = v$

CASO 1: Si $x=y \Rightarrow u=x=y=v \Rightarrow \begin{bmatrix} x=u & \wedge & y=v \\ & \text{ó} & \\ x=v & \wedge & y=u \end{bmatrix}$

CASO 2: Si $x \neq y \Rightarrow x=u$ ó $y=u$.

- Si $x \neq u \Rightarrow y=u$ & $x=v$ ó
- Si $y \neq u \Rightarrow x=u$ & $y=v$

$\therefore$ Se cumple $\begin{bmatrix} x=u & \wedge & y=v \\ & \text{ó} & \\ x=v & \wedge & y=u \end{bmatrix}$

■

DEFINICIÓN: Ax. Parejas

Unitarios

singleton!!

$\{x\} = \{x,x\}$ ← Ax. Extensión

$\{x,y,z\} = \{x,y\} \cup \{z\}$ ← Ax. Unión

$\{w,x,y,z\} = \{w,x\} \cup \{y,z\}$ ← Ax. Unión

## TEOREMA

$\{x\} = \{y\} \Rightarrow x = y$

Dem: Sea $\{x\}=\{y\} \Rightarrow \{x,x\}=\{y,y\}$. Por teorema anterior; $\begin{cases} x=y \text{ \& } x=y \Rightarrow x=y \\ \text{ó} \\ y=x \text{ \& } y=x \end{cases}$

■

DEFINICIÓN: PAREJA ORDENADA

$$(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$$

También, si $\Delta \neq \boxdot \Rightarrow (x,y) = \{\{x,\Delta\},\{y,\boxdot\}\}$

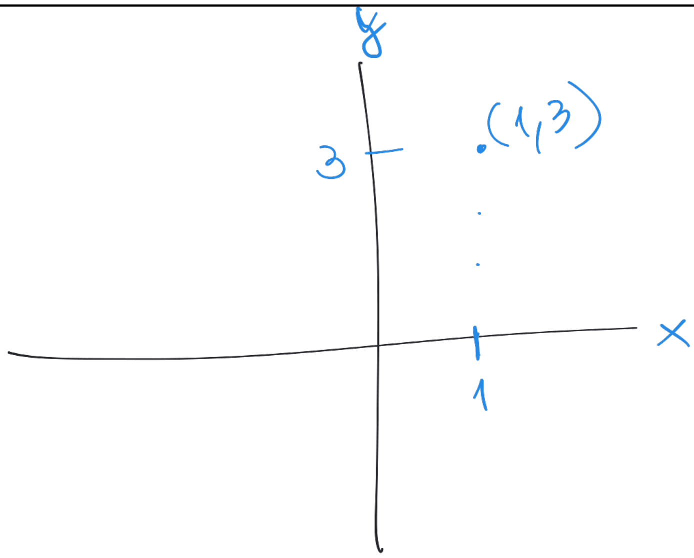
## TEOREMA

$(x,y) = (u,v) \Rightarrow [x = u \;\; \wedge \;\; y = v]$

Leer pág. 23

Teorema 46

Ejercicio en clase 2




$(1,3)$

$$(1,3) = \{\{1\},\{1,3\}\}$$