

Universidad del Valle de Guatemala  
Departamento de Matemática  
Licenciatura en Matemática Aplicada

**Estudiante:** Rudik Roberto Rompich  
**Correo:** rom19857@uvg.edu.gt  
**Carné:** 19857

MM2033 - Teoría de Conjuntos - Catedrático: Nancy Zurita  
17 de agosto de 2021

---

## HT 4

### 1. Ejercicios

Para  $A$  y  $B$  conjuntos:

**Problema 1.1.**  $\cup\{A, B\} = A \cup B$

*Demostración.* Sean  $A, B$  y  $C$  conjuntos. Supóngase que  $x \in \cup\{A, B\} \iff (\exists C)(x \in C \wedge C \in \{A, B\}) \iff [x \in C \wedge (C = A \vee C = B)] \iff [(x \in C \wedge C = A) \vee (x \in C \wedge C = B)] \iff x \in A \vee x \in B \iff x \in A \cup B$ . Por lo tanto,  $\cup\{A, B\} = A \cup B$ . ■

**Problema 1.2.**  $\cup(A \cup B) = (\cup A) \cup (\cup B)$

*Demostración.* Sean  $A, B$  y  $C$  conjuntos. Supóngase que  $x \in \cup(A \cup B) \iff (\exists C)(x \in C \wedge C \in A \cup B) \iff [x \in C \wedge (C \in A \vee C \in B)] \iff [(x \in C \wedge C \in A) \vee (x \in C \wedge C \in B)] \iff x \in (\cup A) \cup (\cup B)$ . Por lo tanto,  $\cup(A \cup B) = (\cup A) \cup (\cup B)$ . ■

**Problema 1.3.**  $(A \subseteq B) \Rightarrow (\cup A \subseteq \cup B)$

*Demostración.* Sean  $A, B$  y  $C$  conjuntos. Por hipótesis,  $A \subseteq B \Rightarrow (C \in A \Rightarrow C \in B)$ . Supóngase  $x \in \cup A \Rightarrow (\exists C)(x \in C \wedge C \in A) \Rightarrow (x \in C \wedge C \in B) \Rightarrow x \in \cup B$ . Por lo tanto,  $(A \subseteq B) \Rightarrow (\cup A \subseteq \cup B)$ . ■

**Problema 1.4.**  $\cap\langle x, y \rangle = \{x\}$

*Demostración.* Sea  $B$  un conjunto. Supóngase  $c \in \cap\langle x, y \rangle \iff (\forall B)(B \in \langle x, y \rangle \Rightarrow c \in B) \wedge (\exists B)(B \in \langle x, y \rangle) \iff (\forall B)(B \in \langle x, y \rangle \Rightarrow c \in B) \wedge (B \in \{\{x\}, \{x, y\}\}) \iff (\forall B)(B \in \langle x, y \rangle \Rightarrow c \in B) \wedge (B = \{x\} \vee B = \{x, y\}) \iff (c \in B \wedge B = \{x\}) \vee (c \in B \wedge B = \{x, y\}) \iff c \in \{x\} \wedge c \in \{x, y\}$ . Por lo tanto,  $\cap\langle x, y \rangle = \{x\}$ . ■

**Problema 1.5.**  $(A \in B) \Rightarrow (A \subseteq \cup B)$

*Demostración.* Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Supóngase  $x \in A$  y por hipótesis  $A \in B$  y por la definición de la unión de un conjunto  $\cup B$ . ■

**Problema 1.6.**  $\cup\langle x, y \rangle = \{x, y\}$

**Demostración.** Sea  $B$  un conjunto. Supóngase  $c \in \cup\langle x, y \rangle \iff (\exists B)(c \in B \wedge B \in \langle x, y \rangle) \iff (c \in B) \wedge (B \in \{\{x\}, \{x, y\}\}) \iff (c \in B) \wedge (B = \{x\} \vee B = \{x, y\}) \iff (c \in \{x\}) \wedge (x \in \{x, y\})$ . Por lo tanto,  $\cup\langle x, y \rangle = \{x, y\}$ . ■

**Problema 1.7.**  $\cup\cup\langle A, B \rangle = A \cup B$

**Demostración.** Sean  $A, B$  y  $C$ . Supóngase  $x \in \cup\cup\langle A, B \rangle \iff (\exists C)(x \in C \wedge C \in \cup\langle A, B \rangle) \iff x \in C \wedge \underbrace{C \in \{A, B\}}_{\text{Problema 1.6}} \iff x \in C \wedge (C = A \vee C = B) \iff x \in A \vee x \in B \iff x \in A \cup B$ . Por lo tanto,  $\cup\cup\langle A, B \rangle = A \cup B$ . ■

**Problema 1.8.**  $\cap\{A\} = A$

**Demostración.** Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Supóngase  $x \in \cap\{A\} \iff (\forall B)(B \in \{A\} \implies x \in B) \wedge (\exists B)(B \in \{A\}) \iff x \in B \wedge B = A \iff x \in A$ . ■

**Problema 1.9.**  $\cap\{A, B\} = A \cap B$

**Demostración.** Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Supóngase  $x \in \cap\{A, B\} \iff (\forall C)(C \in \{A, B\} \implies x \in C) \wedge (\exists C)(C \in \{A, B\}) \iff (\forall C)(C \in \{A, B\} \implies x \in C) \wedge (C = A \vee C = B) \iff x \in A \wedge x \in B \iff x \in A \cap B$ . Por lo tanto,  $\cap\{A, B\} = A \cap B$ . ■

**Problema 1.10.**  $\cap\cap\langle A, B \rangle = A$

**Demostración.** Sean  $A, B$  y  $C$  conjuntos. Supóngase  $c \in \cap\cap\langle A, B \rangle \iff (\forall C)(C \in \cap\langle A, B \rangle \implies x \in \underbrace{\cap\langle A, B \rangle}_{\text{Problema 1.4}}) \wedge (\exists C)(C \in \underbrace{\cap\langle A, B \rangle}_{\text{Problema 1.4}}) \iff (\forall C)(C \in \cap\langle A, B \rangle \implies x \in \{A\}) \wedge (\exists C)(C \in \{A\}) \iff (\forall C)(C \in \cap\langle A, B \rangle \implies x \in \{A\}) \wedge (C = A) \iff x \in A$ . Por lo tanto,  $\cap\cap\langle A, B \rangle = A$ . ■

**Problema 1.11.**  $\cap A \subseteq \cup A$

**Demostración.** Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Supóngase que  $x \in \cap A \implies (\forall B)(B \in A \implies x \in B) \wedge (\exists B)(B \in A) \implies x \in B \wedge B \in A \implies \cup A$ . Por lo tanto,  $\cap A \subseteq \cup A$ . ■

**Problema 1.12.** Si  $\emptyset \in A$  entonces  $\cap A = \emptyset$ .

**Demostración.** Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Supóngase que  $x \in \cap A \iff (\emptyset \in A \implies x \in \emptyset)$ . Por lo tanto,  $\cap A = \emptyset$ . ■