Axioma de Regularidad

$$A \neq \phi \Rightarrow \exists x \left(x \in A \ \& \ \forall y \left(y \in x \Rightarrow y \notin A \right) \right)$$

Nota: Si $\forall x, x \in A$ & x es conjunto

$$A \neq \phi \Rightarrow \exists x \left(x \in A \ \& \ x \cap A = \phi \right)$$

Teorema 105: $A \notin A$

dem: Sea A un conjunto $\ni$ $A \in A$ (supóngase por contradicción) ($A \neq \phi$). Sabemos que $A \in \{A\}$ (Por Ax. de Parejas) $\Rightarrow A \in A \cap \{A\}$.

Por otro lado, si $x \in \{A\} \Rightarrow x = A$ (Por ax. de Parejas) $\Rightarrow \forall x \in \{A\}$, x es conjunto.

Por ax. de Regularidad $\exists x \in \{A\} \ni x \cap \{A\} = \phi$

$\Rightarrow \phi = x \cap \{A\} = A \cap \{A\} \Rightarrow A \cap \{A\} = \phi$

$\Rightarrow A \in \phi \ (\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore A \notin A$. ■

Teorema 106: $\neg (A \in B \ \& \ B \in A)$

dem:
Sean A, B conjuntos. Por contradicción supóngase que $A \in B$ & $B \in A$. Por ax. de parejas, $A \in \{A, B\}$ & $B \in \{A, B\}$ $\Rightarrow$ $A \in B \cap \{A, B\}$. $B \in A \cap \{A, B\}$

$\{A,B\} \neq \phi$

Si $x \in \{A, B\} \Rightarrow x = A$ ó $x = B$ (por ax. Parejas)

$\Rightarrow x$ es conjunto $\forall x \in \{A, B\}$.

Por ax. de Regularidad $\exists x \in \{A, B\} \ni$ $x \cap \{A, B\} = \phi$.

- Si $x = A \Rightarrow A \cap \{A, B\} = \phi \Rightarrow B \in \phi \ (\rightarrow\leftarrow)$
- Si $x = B \Rightarrow B \cap \{A, B\} = \phi \Rightarrow A \in \phi \ (\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore \neg (A \in B \ \& \ B \in A)$ ■

Teorema 107: $A \subseteq A \times A \Rightarrow A = \phi$

dem: Sea A un conjunto $\ni A \subseteq A \times A$ y $A \neq \phi$.
Sea $z \in A \Rightarrow z \in A \times A$ $\exists$ $x, y \in A \ni z = (x, y)$
Pero $(x,y) = \{\{x\}, \{x,y\}\}$.
Considérese $[A] \cup [\cup A]$. Si $c \in A \cup \cup A \Rightarrow c \in A$ ó $c \in \cup A$.

CASO 1: Si $c \in A \Rightarrow c \in A \times A \Rightarrow c$ es un conjunto no vacío. Por otro lado si $c \in A$ $\Rightarrow c \subseteq \cup A$. $\Rightarrow$ $\boxed{c \cap \cup A \neq \phi.}$

CASO 2: Si $c \in \cup A \Rightarrow \exists B (c \in B \ \& \ B \in A)$. Nótese que si $B \in A \Rightarrow \exists x, y \in A \ni B = \{\{x\}, \{x,y\}\}$. Pero $c \in B = \{\{x\}, \{x,y\}\} \Rightarrow c = \{x\}$ ó $c = \{x,y\}$
$\Rightarrow c$ es conjunto no vacío y como $x, y \in A \neq \phi$
$\Rightarrow \boxed{c \cap A \neq \phi.}$

$\Rightarrow (c \cap \cup A) \cup (c \cap A) \neq \phi$

$\Rightarrow c \cap (\cup A \cup A) \neq \phi \Rightarrow c \cap (A \cup \cup A) \neq \phi, \forall c.$

Pero $\forall c$, c es conjunto si $c \in A \cup \cup A$.
Por ax. de Regularidad $\exists c \in A \cup \cup A \ni$
$c \cap A \cup \cup A = \phi \ (\rightarrow\leftarrow)$

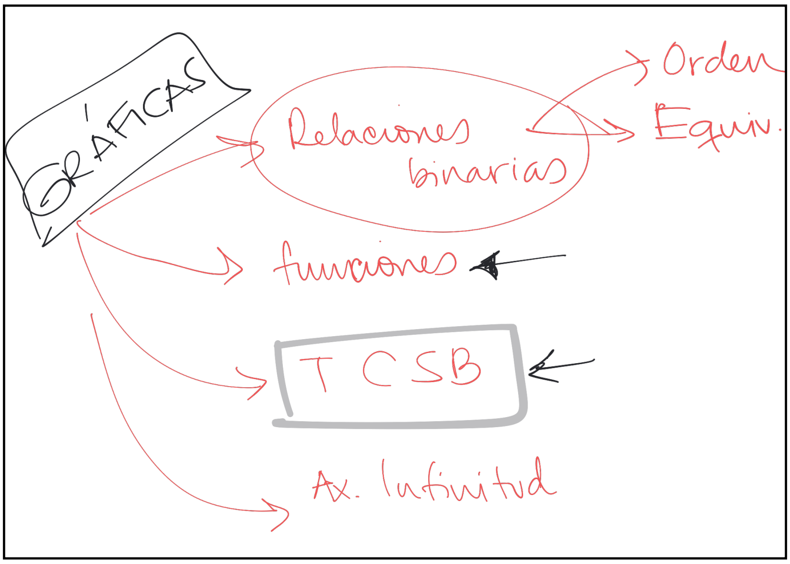
$\therefore A = \phi$. ■

A Z-F

- A0 ϕ exist
- A1 Ax. Ext.
- A2 EAS
- A3 Ax. Unión
- A4 Ax Parejas
- A5 Ax. Potencia
- A6 Ax Regularidad
- A7 Ax. Suma

8

Ax. Reemplazo
Ax. Infinitud
Ax. Elección


GRÁFICAS
Relaciones binarias
Orden
Equiv.
funciones
TCSB
Ax. Infinitud