TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE LA INTERSECCIÓN

$\exists! C, \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \ y \ x \in B])$

Existencia Sea $\Phi(x): x \in B$. Por EAS

$\exists C \ \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ \underbrace{\Phi(x)}_{x \in B}))$

$\therefore \exists C \ \forall x \ni \boxed{[x \in C \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ x \in B)]}$

Unicidad Supóngase $\exists C' \ \forall x \ni \boxed{[x \in C' \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ x \in B)]}$

Si $x \in C' \Leftrightarrow x \in A \ \& \ x \in B \Leftrightarrow x \in C$

$\therefore \boxed{x \in C' \Leftrightarrow x \in C}$. Por Axioma de Extensión

Si $\forall x \in C' \Leftrightarrow x \in C \Rightarrow \boxed{C' = C}$

$\therefore$ C es único

$$\boxed{\exists! C \ \forall x \ (x \in C \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ x \in B))}$$

DEFINICIÓN

$$A \cap B = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \forall x(x \in y \Leftrightarrow [x \in A \ y \ x \in B]) \\ \wedge \\ y \text{ es conjunto} \end{bmatrix}$$

TEOREMAS

1. $x \in A \cap B \Leftrightarrow [x \in A \ y \ x \in B]$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(1) dem: Sea $A \cap B = A \cap B$.
Al aplicar la definición
$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \ \& \ x \in B$. ∎

(2) Sea $x \in A \Leftrightarrow x \in A \ \& \ x \in A$

$\therefore \boxed{x \in A \Leftrightarrow x \in A \cap A}$

$\boxed{p \Rightarrow p \wedge p}$

$p \wedge q \Rightarrow p$

Por axioma de extensión
$A = A \cap A$ ∎

TEOREMAS

1. $x \in A \cap B \Leftrightarrow [x \in A \ y \ x \in B]$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(3) dem: Supóngase que $x \in A \cap \phi$.
$\Rightarrow x \in A \ \& \ x \in \phi \Rightarrow x \in \phi \ (\rightarrow\!\leftarrow)$
$\Rightarrow x \notin A \cap \phi, \forall x. \Rightarrow A \cap \phi = \phi$ ∎

A3: DE LA UNIÓN

$\exists C \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B])$

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE LA UNIÓN

$\exists! C, \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B])$

Existencia: Asegura Axioma de la Union.

Unicidad: Asegura Axioma de Extensión.

DEFINICIÓN

$A \cup B = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \forall x (x \in y \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B]) \\ \wedge \\ y \text{ es conjunto} \end{bmatrix}$

TEOREMAS

1. $x \in A \cup B \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B]$
2. $A \cup A = A$
3. $A \cup \emptyset = A$
4. $A \cup B = B \cup A$
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

dem:

1) Sabemos que $A \cup B = A \cup B$.
De la definición,
$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$. ∎

2) dem: Sea $x \in A \Leftrightarrow \boxed{x \in A \vee x \in A}$
$\Rightarrow x \in A \Leftrightarrow x \in A \cup A$
Por Ax. de Extensión, $A = A \cup A$ ∎

3) dem: Sea $x \in A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in \phi \Leftrightarrow x \in A \cup \phi$
Por Ax. de Extensión, $A = A \cup \phi$. ∎

A. Vacío
A. Ext
EAS
A. Unión

Unicidad cuando hay igualdad.

Existencia

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE LA DIFERENCIA DE CONJUNTOS

$\exists! C, \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \text{ y } x \notin B])$

Existencia: $\Phi(x): x \notin B$
EAS

Unicidad: A.Ext.

A ∖ B
ó
A − B

DEFINICIÓN

$$\underline{A \sim B} = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \forall x (x \in y \Leftrightarrow [x \in A \ \ y \ \ x \notin B]) \\ \wedge \\ y \text{ es conjunto} \end{bmatrix}$$

considera ϕ

TEOREMAS

1. $x \in A \sim B \Leftrightarrow [x \in A \ \ y \ \ x \notin B]$
2. $A \sim A = \emptyset$

① dem: Sabemos que $A \sim B = A \sim B$. Por definición

$x \in A \sim B \Leftrightarrow x \in A$ & $x \notin B$

∎

② dem: Sea $x \in A \sim A \Leftrightarrow$
$x \in A$ & $x \notin A$ ($\rightarrow\!\leftarrow$).

$\forall x, x \notin A \sim A \Rightarrow A \sim A = \phi$

∎