Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2033 - Teoría de Conjuntos - Catedrático: Nancy Zurita
24 de julio de 2021

HT 2

Para A y B conjuntos:

1. $(A \cap B) \subseteq A$

   Demostración. $x \in A \cap B \implies [x \in A \wedge x \in B] \implies x \in A$. Por axioma de extensión $(A \cap B) \subseteq A$. ■

2. Si $A \subseteq B$ entonces

   a) $(A \cap B) = A$

   Demostración. Por hipótesis, $A \subseteq B$, $x \in A \implies x \in B$. Entonces $x \in A \cap B \iff (\underbrace{x \in A}_{\implies x \in B} \wedge x \in B) \iff x \in A$. Por axioma de extensión $(A \cap B) = A$. ■

   b) $(A \cup B) = B$

   Demostración. Por hipótesis, $A \subseteq B$, $x \in A \implies x \in B$. Entonces $x \in A \cup B \iff (\underbrace{x \in A}_{\implies x \in B} \vee x \in B) \iff x \in B$. Por axioma de extensión, $(A \cup B) = B$. ■

3. $A \subseteq (A \cup B)$

   Demostración. $x \in A \implies (x \in A \vee x \in B) \implies x \in A \cup B$. Por axioma de extensión, $A \subseteq (A \cup B)$. ■

4. Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$ entonces $(A \cup B) \subseteq C$.

   Demostración. Por hipótesis, $[x \in A \implies x \in C] \wedge [x \in B \implies x \in C]$. Sea $x \in A \cup B$. Entonces $(\underbrace{x \in A}_{\implies x \in C} \vee \underbrace{x \in B}_{\implies x \in C})$, por hipótesis $x \in C$. Por axioma de extensión, $(A \cup B) \subseteq C$. ■

5. $A \cap (A \sim B) = A \sim B$

   Demostración. $x \in [A \cap (A \sim B)] \iff x \in A \wedge [x \in (A \sim B)] \iff x \in A \wedge [x \in A \wedge x \notin B] \iff (x \in A) \wedge (x \notin B)$. Por axioma de extensión, $A \cap (A \sim B) = A \sim B$. ■

6. $(A \cap B) \sim B = \varnothing$

   Demostración. $x \in [(A \cap B) \sim B] \iff [x \in (A \cap B)] \wedge [x \notin B] \iff [x \in A \wedge x \in B] \wedge [x \notin B] \iff x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin B)$ $(\rightarrow\leftarrow)$. $\forall x, x \notin [(A \cap B) \sim B] \implies (A \cap B) \sim B = \varnothing$. ■

7. $(A \sim B) \cap B = \varnothing$

   Demostración. $x \in [(A \sim B) \cap B] \iff [x \in (A \sim B) \wedge x \in B] \iff [x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in B](\rightarrow\leftarrow)$. $\forall x, x \notin [(A \sim B) \cap B] \implies (A \sim B) \cap B = \varnothing$. ■

8. Si se define la diferencia simétrica como

$$A \div B = (A \sim B) \cup (B \sim A)$$

   . Entonces demuestre que

   a) $(A \div \varnothing) = A$

   Demostración. Usamos la definición de diferencia simétrica, $(A \div \varnothing) = (A \sim \varnothing) \cup (\varnothing \sim A)$. Entonces, $x \in [(A \sim \varnothing) \cup (\varnothing \sim A)] \iff [x \in (A \sim \varnothing) \vee x \in (\varnothing \sim A)] \iff [x \in A \wedge x \notin \varnothing] \vee [x \in \varnothing \wedge x \notin A]$. Si (1) $x \in A \wedge x \notin \varnothing \implies x \in A$, y (2) $[x \in \varnothing \wedge x \notin A]$ ambos son falsos, entonces $x \in A$. Por axioma de extensión, $(A \div \varnothing) = A$. ■

   b) Si $A = B$ entonces $A \div B = \varnothing$

   Demostración. Por hipótesis, $x \in A \iff x \in B$. Por la definición de diferencia simétrica $A \div B = (A \sim B) \cup (B \sim A)$. Entonces $x \in [(A \sim B) \cup (B \sim A)] \iff [x \in (A \sim B)] \vee [x \in (B \sim A)] \iff [x \in A \wedge x \notin B] \vee [x \in B \wedge x \notin A]$. Por hipótesis, $[x \in A \wedge x \notin A] \vee [x \in B \wedge x \notin B](\rightarrow\leftarrow)$. $\forall x, x \notin (A \div B) \implies A \div B = \varnothing$. ■