

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE
GUATEMALA

MM2033- 2 SEMESTRE - 2021

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA APLICADA

TEORÍA DE CONJUNTOS

Catedrático: Nancy Zurita

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzoyaj

Carné: 19857

Correo: rom19857@uvg.edu.gt

24 de julio de 2021

Índice

1 Sesión 2	1
1.1 Axiomática	1
2 Sesión 3	4
3 Sesión 4	9
4 Sesión 5	14

1. Sesión 2

1.1. Axiomática

A0: (Axioma de vacío) Existe vacío. Notación: \emptyset .

A1: (Axioma de extensión) $\forall x(x \in A \iff x \in B) \implies A = B$.

A2: (Esquema axiomático de separación) $\exists B \forall x \exists (x \in B \iff [x \in A \wedge \Phi(x)])$.

Definición 1. (*Conjunto*) y es conjunto $\iff (\exists x(x \in y)) \vee (y = \emptyset)$.

Definición 2. (*No pertenencia*) $x \notin y \iff \neg(x \in y)$.

Teorema 1. $\forall x, x \notin \emptyset$.

Teorema 2. $\forall x, x \notin A \iff A = \emptyset$.

Definición 3. (*Contención*) $A \subseteq B \iff \forall x(x \in A \implies x \in B)$.

Definición 4. (*Contención estricta*) $A \subset B \iff (A \subseteq B \wedge A \neq B)$.

Teorema 3. $A \subseteq \emptyset \implies A = \emptyset$.

Teorema 4. $\neg(A \subset A)$.

A0: AXIOMA DE VACÍO

Existe vacío.

Notación: \emptyset

A1: AXIOMA DE EXTENSIÓN

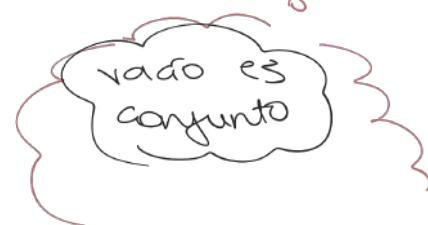
$\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B$

A2: ESQUEMA AXIOMÁTICO DE SEPARACIÓN

$\exists B \forall x \exists (x \in B \Leftrightarrow [x \in A \text{ y } \Phi(x)])$

DEFINICIÓN DE CONJUNTO

y es conjunto $\Leftrightarrow (\exists x(x \in y) \text{ ó } y = \emptyset)$



DEFINICIÓN DE NO PERTENENCIA

$x \notin y \Leftrightarrow \neg(x \in y)$

Construye
conjunto.

TEOREMAS

1. $\forall x, x \notin \emptyset$

$\Phi(x): x \neq x$

dem: Sea $\Phi(x)$ la expresión $x \neq x$. Por esquema axiomático de separación,
 $\exists B \forall x \exists (x \in \emptyset \wedge x \neq x)$. Supóngase
 $\exists x \in \emptyset \Rightarrow x \neq x$ (\leftarrow) $\Rightarrow \forall x, x \notin \emptyset$. Por
definición de conjunto $\emptyset = \emptyset \Rightarrow \forall x, x \notin \emptyset$.

A2: ESQUEMA AXIOMÁTICO DE SEPARACIÓN

$\exists B \forall x \exists (x \in B \Leftrightarrow [x \in A \text{ y } \Phi(x)])$

conjunto !

2. $\forall x, x \notin A \Leftrightarrow A = \emptyset$

*vacio
es unico
como
conjunto*

dem:

\Rightarrow Si $\forall x, x \notin A \Rightarrow$ Por definición
de conjunto, $A = \emptyset$.

\Leftarrow Si $A = \emptyset \Rightarrow$ Por teorema anterior

$\forall x, x \in \emptyset = A \Rightarrow \forall x, x \notin A$.

$$(P \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg P)$$

* DEFINICIÓN DE CONTENCIÓN

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

* DEFINICIÓN DE CONTENCIÓN ESTRICTA

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ y } A \neq B)$$

P	\Rightarrow	q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

TEOREMAS

1. $A \subseteq \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$

dem: Sea A un conjunto $\Rightarrow A \subseteq \emptyset$.

$$\Rightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in \emptyset). \text{ Se asume que}$$

la implicación es verdadera, también lo

es su contrapuesta. Es decir, $\forall x(x \notin \emptyset \Rightarrow x \notin A)$

Como $\forall x, x \notin \emptyset$ es siempre verdadero \Rightarrow

$\forall x, x \notin A$ es verdadero $\Rightarrow A = \emptyset$

2. $\neg(A \subset A)$

dem: Sea A un conjunto. Supóngase
que $A \subset A \Rightarrow A \subseteq A \wedge A \neq A \Rightarrow A = A$

Además, $A \subseteq A \Rightarrow A \subseteq A \wedge A \subseteq A \Rightarrow$

$$\forall x[x \in A \Rightarrow x \in A] \wedge \forall x[x \in A \Rightarrow x \in A]$$

$\Rightarrow \forall x[x \in A \Leftrightarrow x \in A] \Rightarrow A = A$ por

Axioma de Extensión. (\times)

$$\therefore \neg(A \subset A).$$

2. Sesión 3

Teorema 5. (*Construcción de la intersección*) $\exists!C, \forall x \exists (x \in C \iff x \in A \wedge x \in B)$.

Definición 5. $A \cap B = y \iff [\forall x(x \in y \iff [x \in A \wedge x \in B]) \wedge y \text{ es conjunto.}]$

Teorema 6. (*Varios*)

$$1. x \in A \cap B \iff [x \in A \wedge x \in B]$$

$$2. A \cap A = A$$

$$3. A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$4. A \cap B = B \cap A$$

$$5. A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

A3: (De la unión) $\exists C \forall x \exists (x \in C \iff [x \in \bigvee x \in B])$.

Teorema 7. (*Construcción de la unión*) $\exists!C, \forall x \exists (x \in C \iff [x \in A \vee x \in B])$

Definición 6. $A \cup B = y \iff [\forall x(x \in y \iff [x \in A \vee x \in B]) \wedge y \text{ es conjunto.}]$

Teorema 8. (*Varios*)

$$1. x \in A \cup B \iff [x \in A \vee x \in B]$$

$$2. A \cup A = A$$

$$3. A \cup \emptyset = A$$

$$4. A \cup B = B \cup A$$

$$5. A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

A0 A. Vacío

A1 A. Extensión (Unicidad - Cuando hay igualdad)

A2 Existencia.

A3 Existencia.

Teorema 9. (*Construcción de la diferencia de conjuntos*) $\exists!C, \forall x \exists (x \in C \iff [x \in A \wedge x \notin B]).$

Definición 7. Sea

$$A \sim B = y \iff [\forall x(x \in y \iff [x \in A \wedge x \notin B]) \wedge y \text{ es conjunto.}]$$

Teorema 10. (*Varios*)

1. $x \in A \sim B \iff [x \in A \wedge x \notin B].$
2. $A \sim A = \emptyset.$

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE LA INTERSECCIÓN

$\exists ! C, \forall x (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \wedge x \in B])$

Existencia Sea $\Phi(x) : x \in B$. Por EAS

$$\exists C \forall x [x \in C \Leftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x))]$$

Unicidad Supóngase $\exists C' \forall x [x \in C' \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)]$

$$\text{Si } x \in C' \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in C$$

$\therefore [x \in C' \Leftrightarrow x \in C]$, Por. Axioma de Extensión

$$\text{Si } \forall x [x \in C' \Leftrightarrow x \in C] \Rightarrow [C' = C]$$

$\therefore C$ es único

$$\boxed{\exists ! C \forall x (x \in C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B))}$$

DEFINICIÓN

$$A \cap B = y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \forall x (x \in y \Leftrightarrow [x \in A \wedge x \in B]) \\ \wedge \\ \text{y es conjunto} \end{array} \right]$$

TEOREMAS

1. $x \in A \cap B \Leftrightarrow [x \in A \wedge x \in B]$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

① dem: Sea $A \cap B = A \cap B$.

Al aplicar la definición
 $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$.

$$\begin{array}{c} P \Rightarrow P \wedge P \\ \hline P \wedge Q \Rightarrow P \end{array}$$

② dem: Sea $x \in A \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A$

$$\circ \quad \boxed{x \in A \Leftrightarrow x \in A \wedge A}$$

3 Por axioma de extensión
 $A = A \cap A$

TEOREMAS

1. $x \in A \cap B \Leftrightarrow [x \in A \wedge x \in B]$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

③ dem: Supóngase que $x \in A \cap \emptyset$.

$$\Rightarrow x \in A \wedge x \in \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset (\text{F})$$

$$\Rightarrow x \notin A \cap \emptyset, \forall x. \Rightarrow A \cap \emptyset = \emptyset$$

A3: DE LA UNIÓN

$$\exists C \forall x \exists (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B])$$

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE LA UNIÓN

$$\exists! C, \forall x \exists (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B])$$

Existencia: Asegura Axioma de la Unión.
 Unicidad: Asegura Axioma de Extensión.

DEFINICIÓN

$$A \cup B = y \Leftrightarrow [\forall x (x \in y \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B])]$$

y es conjunto

TEOREMAS

1. $x \in A \cup B \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B]$
2. $A \cup A = A$
3. $A \cup \emptyset = A$
4. $A \cup B = B \cup A$
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

① dem: Sabemos que $A \cup B = B \cup A$.

De la definición,

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B.$$

② dem: Sea $x \in A \Leftrightarrow [x \in A \vee x \in A]$

$$\Rightarrow x \in A \Leftrightarrow x \in A \cup A$$

Por Ax. de Extensión, $A = A \cup A$ ■

③ dem: Sea $x \in A \Leftrightarrow [x \in A \vee x \in \emptyset] \Leftrightarrow x \in A \cup \emptyset$

Por Ax. de Extensión, $A = A \cup \emptyset$. ■

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE LA DIFERENCIA DE CONJUNTOS

$$\exists! C, \forall x \exists (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \text{ y } x \notin B])$$



Existencia: $\Phi(x): x \notin B$
EAS

Unicidad: A. Ext.

DEFINICIÓN

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

TEOREMAS

1. $x \in A \setminus B \Leftrightarrow [x \in A \text{ y } x \notin B]$

2. $A \setminus A = \emptyset$

① dem: Sabemos que $A \cap B = A \setminus B$. Por definición

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ y } x \in B$$

② dem: Sea $x \in A \cap A \Leftrightarrow$

$$x \in A \text{ y } x \notin A (\times)$$

$$\forall x, x \notin A \cap A \Rightarrow A \cap A = \emptyset$$

■

3. Sesión 4

A4: (De parejas) $\exists A \forall z \exists (z \in A \iff [z = x \vee z = y]).$

Teorema 11. (*Construcción de conjuntos con dos elementos*) $\exists! A \forall z \exists (z \in A \iff [z = x \vee z = y]).$

Definición 8. $w = \{x, y\} \iff [\forall z (z \in w \iff [z = x \vee z = y])]$

Teorema 12. (*Varios*)

$$1. z \in \{x, y\} \iff [z = x \vee z = y].$$

$$2. \{x, y\} = \{u, v\} \implies [(x = u \wedge y = v) \vee (x = v \wedge y = u)].$$

Teorema 13.

$$\{x\} = \{x, x\}$$

$$\{x, y, z\} = \{x, y\} \cup \{z\}$$

$$\{w, x, y, z\} = \{w, x\} \cup \{y, z\}$$

Teorema 14. $\{x\} = \{y\} \implies x = y.$

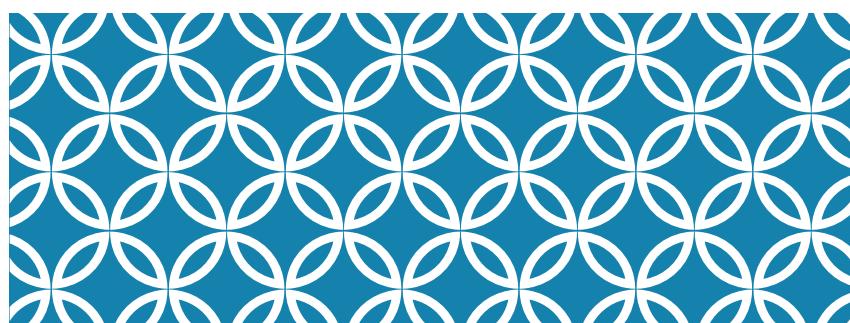
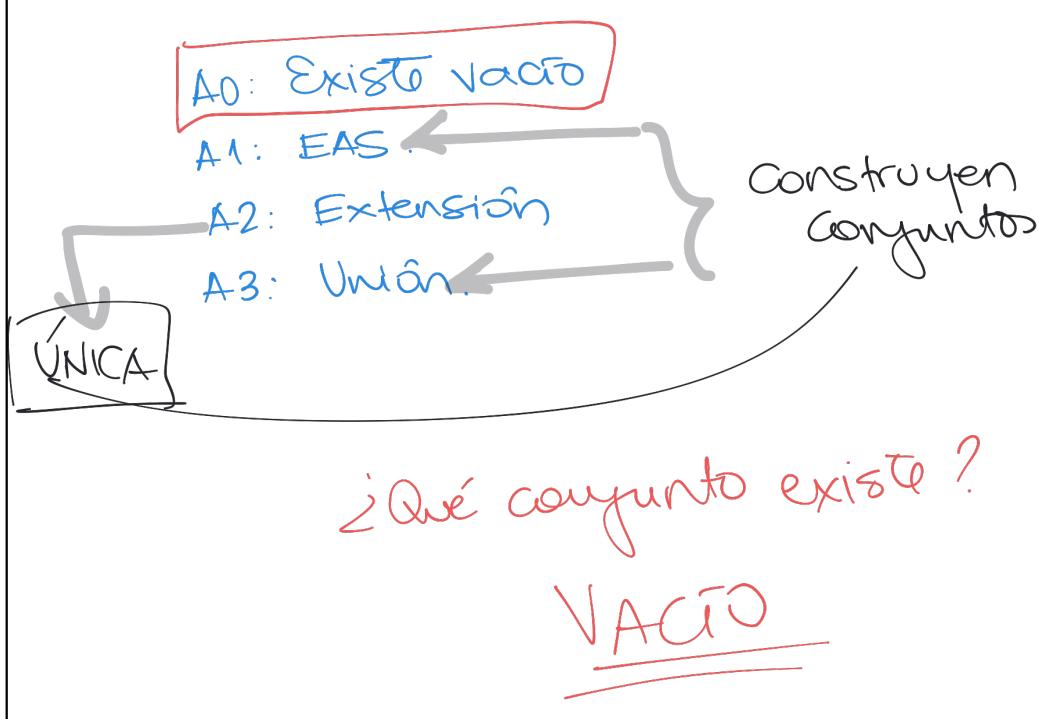
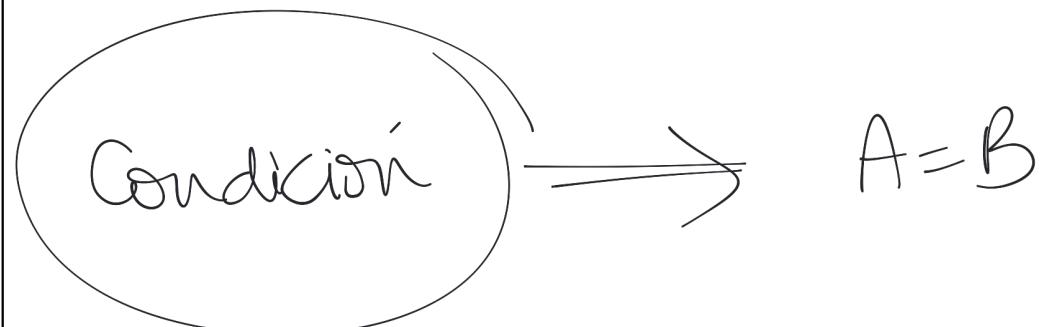
Definición 9. (*Pareja ordenada*)

$$1. (x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

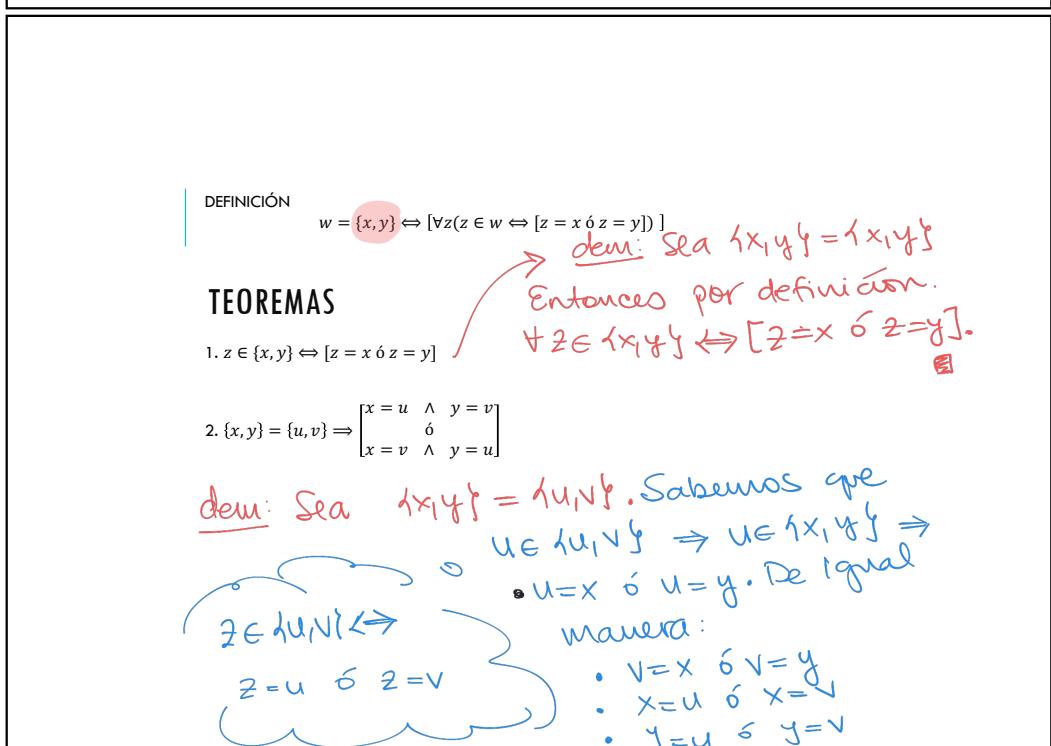
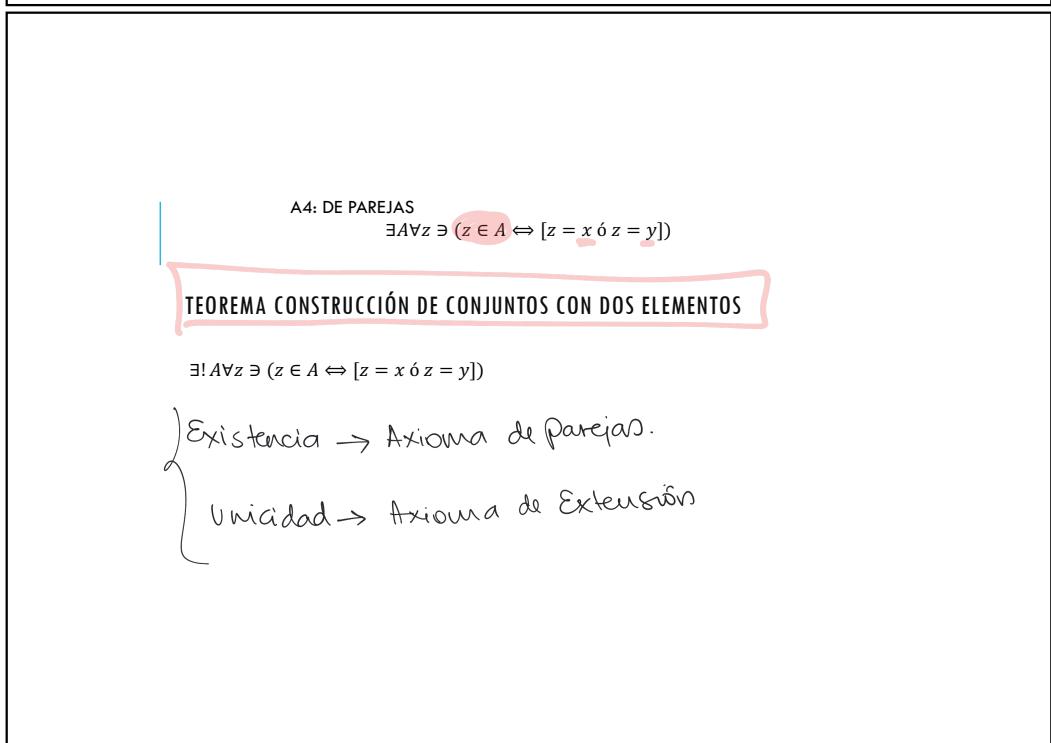
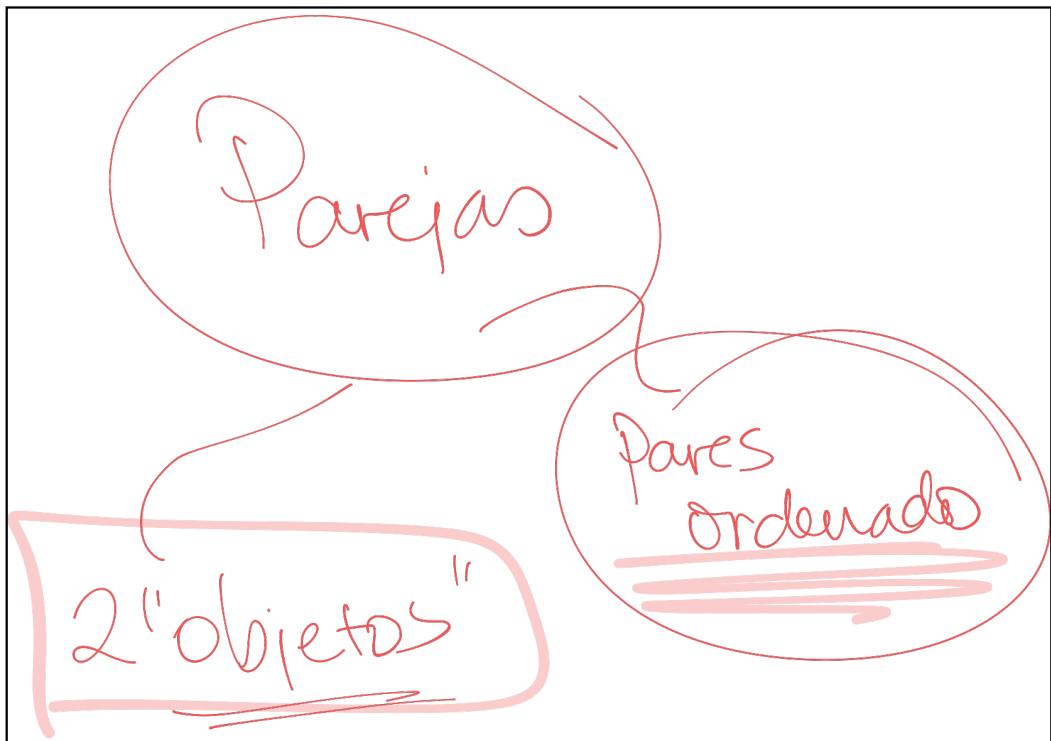
$$2. Si \Delta \neq \square \implies (x, y) = \{\{x, \Delta\}, \{y, \square\}\}$$

Teorema 15. $(x, y) = (u, v) \implies [x = u \wedge y = v]$

Si $A = B$ y $\{x \in A = B\}$
 $\Leftrightarrow x \in B\}$



AXIOMAS DE ZERMELO-FRAENKL



CASO 1: Si $x=y \Rightarrow u=x=y=v \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = u & \wedge \quad y = v \\ x = v & \vee \quad y = u \end{cases}$$

CASO 2: Si $x \neq y \Rightarrow x=u \vee y=u$.

- Si $x \neq u \Rightarrow y=u \wedge x=v$
- Si $y \neq u \Rightarrow x=u \wedge y=v$

\therefore ~~completo~~

$$\begin{cases} x = u & \wedge \quad y = v \\ x = v & \vee \quad y = u \end{cases}$$



DEFINICIÓN:

$$\begin{array}{c} \text{Parejas} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \{x\} = \{x, x\} \leftarrow \text{Ax. Extensión} \\ \{x, y, z\} = \{x, y\} \cup \{z\} \leftarrow \text{Ax. Unión} \\ \{w, x, y, z\} = \{w, x\} \cup \{y, z\} \leftarrow \text{Ax. Unión} \end{array}$$

Unitarios
singulares!!

TEOREMA

$$\{x\} = \{y\} \Rightarrow x = y$$

Dem: Sea $\{x\} = \{y\} \Rightarrow \{x, x\} = \{y, y\}$. Por

teorema anterior; $\begin{cases} x = y \wedge x = y \Rightarrow x = y \\ y = x \wedge y = x \end{cases}$



DEFINICIÓN: PAREJA ORDENADA

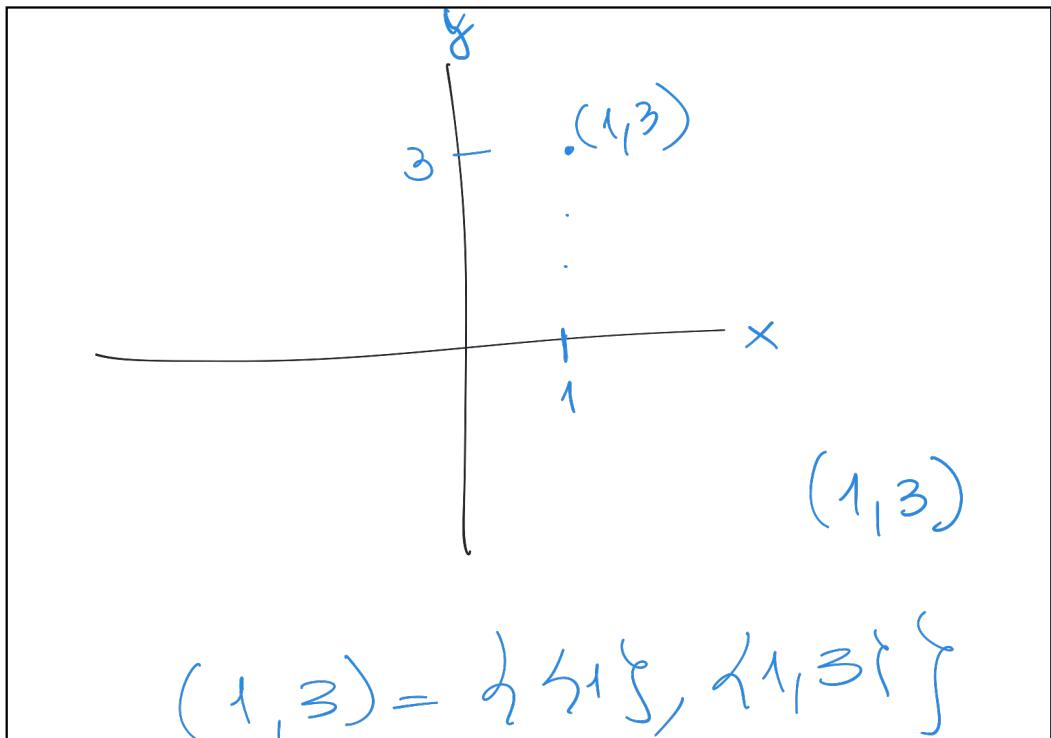
$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

También, si $\Delta \neq \square \Rightarrow (x, y) = \{\{x, \Delta\}, \{y, \square\}\}$

TEOREMA

$$(x, y) = (u, v) \Rightarrow [x = u \wedge y = v]$$

Ler pág. 23
Teorema 4b
Ejercicio en clase 2



4. Sesión 5

Definición 10 (Por abstracción (EAS)). $\{x : \Phi(x)\}$

1. Es la notación usual de conjunto.

2. $\Phi(x)$: Es el operador que nos da una nueva forma de ligar variables.

Definición 11 (Esquema de definición). $y = \{x : \Phi(x)\} \iff [\forall x(x \in y \iff \Phi(x)) \wedge y \text{ es conjunto},] \vee [y = \emptyset \wedge \neg \exists B \forall x(x \in B \iff \Phi(x))]$

NOTA. Si x es un conjunto

$$\{x : \Phi(x)\} = \{x : x \text{ es conjunto y } \Phi(x)\}$$

Definición 12 (Esquema teoremativo). $x \in \{x : \Phi(x)\} \implies \Phi(y).$

Teorema 16. $A = \{x : x \in A\}$

Teorema 17. $\{x : x \neq x\} = \emptyset.$

Teorema 18. (Varios)

1. $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

2. $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

3. $A \tilde{\cup} B = \{x \in \wedge x \notin B\}$

Teorema 19. $\{x : x = x\} = \emptyset$

NOTA. 1. Las definiciones que no necesitan un teorema que las justifique son axiomas.

2. $\neg \exists A \forall x, x \in A.$

A5: Axioma de la suma. $\exists C \forall x \exists (x \in C \iff \exists B[x \in B \wedge B \in A]).$

Definición 13. $\cup A = \{x : \exists B[x \in B \wedge B \in A]\}$

Teorema 20. $x \in \cup A \iff \exists B[x \in B \wedge B \in A]$

Teorema 21. (*Varios*)

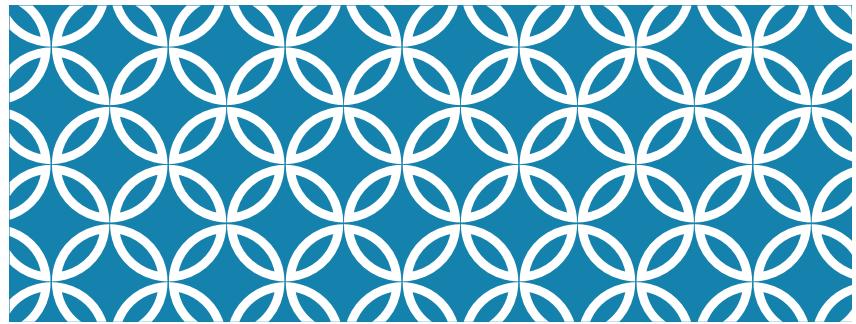
1. $\cup\emptyset = \emptyset$
2. $\cup\{\emptyset\} = \emptyset$
3. $\cup\{A\} = A$
4. $\cup\{A, B\} = A \cup B$

Definición 14. $\cap A = \{x : \forall B[B \in A \implies x \in B]\}$

Teorema 22. $x \in \cap A \iff (\forall B[B \in A \implies x \in B] \wedge \exists B(B \in A))$

Teorema 23. 1. $\cap\emptyset = \emptyset$

2. $\cap\{\emptyset\} = \emptyset$



AXIOMAS DE ZERMELO-FRAENKL

- } A0: $\exists \phi$
A1: Ax. Ext.
A2: EAS
A3: Ax. Unión.
A4: Ax. Parejas.

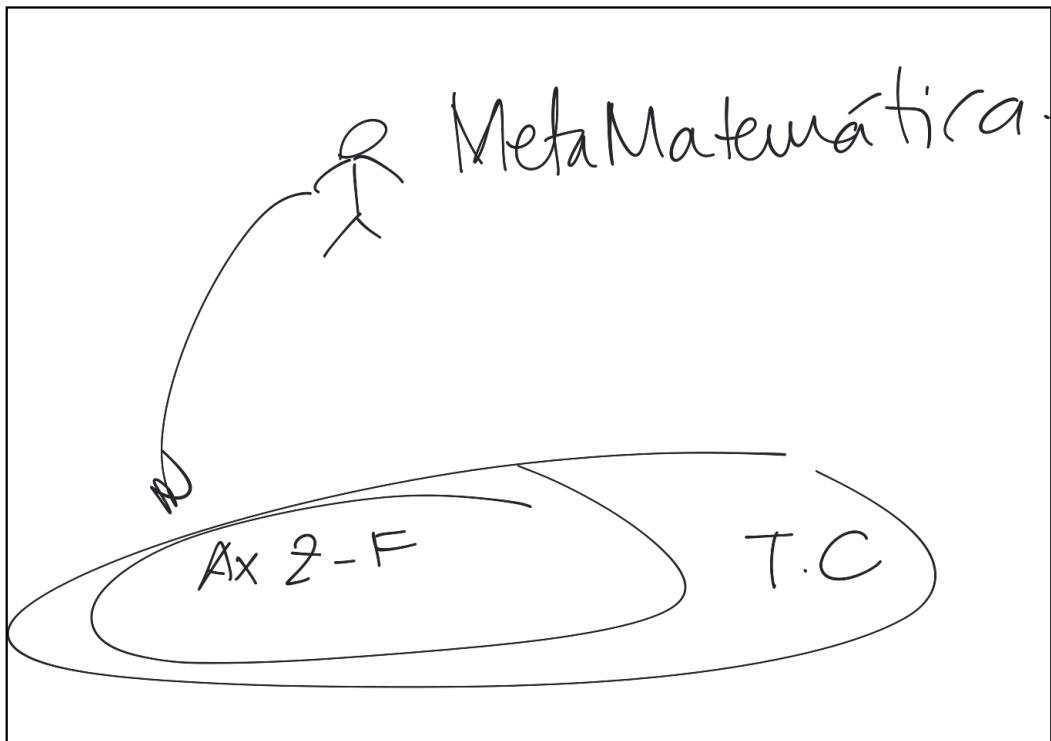
* Leer Cap. 1 libro: Laberinto de conocimiento



Definición por abstracción
 $\{x: \Phi(x)\}$

Es la notación usual de conjunto

$\Phi(x)$: Es el operador que nos da una nueva forma de ligar variables



ESQUEMA DE DEFINICIÓN

$$y = \{x : \Phi(x)\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall x(x \in y \Leftrightarrow \Phi(x)) \wedge y \text{ es conjunto} \\ \text{ó} \\ y = \emptyset \wedge \neg \exists B \forall x(x \in B \Leftrightarrow \Phi(x)) \end{array}$$

Nota: Si x es un conjunto

$$\underline{\{x : \Phi(x)\}} = \{x : x \text{ es conjunto y } \Phi(x)\}$$

* diferentes tipos
de conjuntos.

ESQUEMA TEOREMÁTICO

$$y \in \{x : \Phi(x)\} \Rightarrow \Phi(y)$$

dem: Sea $y \in \{x : \Phi(x)\} \Rightarrow \{x : \Phi(x)\} \neq \emptyset$.
 \Rightarrow por esquema de def. $\Phi(y)$.

TEOREMA

$$A = \{x : x \in A\}$$

dem: Sea A un conjunto. y $\Phi(x) : x \in A$.
Por lógica sabemos que es verdadero
decir $(x \in A \Leftrightarrow x \in A) \Rightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow \Phi(x))$.
Por esquema de definición, $A = \{x : \Phi(x)\}$
 $\Rightarrow A = \{x : x \in A\}$ ■

TEOREMA

$$\{x : x \neq x\} = \emptyset$$

dem: Supongase que $y \in \{x : x \neq x\} \Rightarrow$
Por esquema teoremático, $y \neq y$ (\times).
 $\Rightarrow y \notin \{x : x \neq x\}$, $\forall y \Rightarrow \{x : x \neq x\} = \emptyset$. ■

TEOREMA

- i. $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- ii. $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- iii. $A \sim B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

} Por esquema
teoremático

Nota:

①

Axioma:

define objetos
sin necesidad
de teoremas que
justifican.

②

$\neg \exists A, \forall x, x \in A$

No existe el conjunto
de todos los elementos

Supóngase $\exists A \ni \forall x, x \in A \rightarrow$ Por EAS

$\exists B \forall x (x \in B \Leftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x))).$

$\forall x (x \in A \Leftrightarrow \Phi(x)).$ \downarrow Ax Abstracción

↓
Paradoja de
Russell.

TEOREMA

$$\{x : x = x\} = \emptyset$$

dem: Sea $A = \{x : x = x\} \Rightarrow \forall x, x = x.$
 $\Rightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow \exists A \ni \forall x, x \in A. (\times)$.
 \Rightarrow Por esquema de def. $\{x : x = x\} = \emptyset.$ \blacksquare

NOTA

1. Las definiciones que no necesitan un teorema que las justifique son AXIOMAS

2. $\neg \exists A \forall x, x \in A$

A5: AXIOMA DE LA SUMA
 $\exists C \forall x \exists (x \in C \Leftrightarrow \exists B [x \in B \text{ y } B \in A])$

DEFINICIÓN

$$\cup A = \{x : \exists B [x \in B \text{ y } B \in A]\}$$

TEOREMA

$$x \in \cup A \Leftrightarrow \exists B [x \in B \text{ y } B \in A]$$

TEOREMAS

$$1. \cup \emptyset = \emptyset$$

$$2. \cup \{\emptyset\} = \emptyset$$

$$3. \cup \{A\} = A$$

$$4. \cup \{A, B\} = A \cup B$$

Ejercitarse 3

Sábado 24 de julio.

1) $\cup \emptyset = \emptyset$.

dem: Sea $x \in \cup \emptyset$. Además, sabemos $\forall B, B \notin \emptyset$. Si $x \in \cup \emptyset \Rightarrow \exists B (x \in B \text{ y } B \in \emptyset)$

$$\Rightarrow \forall x, x \notin \cup \emptyset \Rightarrow \cup \emptyset = \emptyset. \blacksquare$$

2) $\cup \{\emptyset\} = \emptyset$.

dem: Sea $x \in \cup \{\emptyset\} \Rightarrow \exists B (x \in B \text{ y } B \in \{\emptyset\})$
Pero por Ax. Parejas si $B \in \{\emptyset\} \Rightarrow B = \emptyset$.
 $\Rightarrow x \in B = \emptyset (\rightarrow \leftarrow) \Rightarrow \cup \{\emptyset\} = \emptyset. \blacksquare$

$$A = \{1, 2, 3, \{x\}, \{y, z\}\}$$

$$\cup A = \{x, y, z\}$$

$$\cup A = \{x : \exists B (x \in B \text{ & } B \in A)\}$$

DEFINICIÓN:

$$\cap A = \{x : \forall B [B \in A \Rightarrow x \in B]\}$$

TEOREMA

$$x \in \cap A \Leftrightarrow (\forall B [B \in A \Rightarrow x \in B] \text{ y } \exists B (B \in A))$$

TEOREMAS

$$1. \cap \emptyset = \emptyset$$

$$2. \cap \{\emptyset\} = \emptyset$$

dem:

$$\textcircled{1} \text{ Sea } x \in \cap \emptyset \Rightarrow \forall B (B \in \emptyset \Rightarrow x \in B) \text{ & } \exists B (B \in \emptyset) \quad (\times)$$

$$\Rightarrow \forall x, x \notin \cap \emptyset \Rightarrow \cap \emptyset = \emptyset \quad \blacksquare$$

$$\textcircled{2} \text{ Sea } x \in \cap \{\emptyset\} \Rightarrow \forall B (B \in \{\emptyset\} \Rightarrow x \in B) \text{ & } \exists B (B \in \{\emptyset\}).$$

$$\Rightarrow \exists B (B \in \{\emptyset\}), \text{ Por Ax. Parejas}$$

$$\Rightarrow B = \emptyset.$$

$$\text{Por otro lado, } \forall B = \emptyset (B \in \{\emptyset\} \Rightarrow x \in B = \emptyset) \quad (\times)$$

$$\Rightarrow \forall x, x \notin \cap \{\emptyset\} \Rightarrow \cap \{\emptyset\} = \emptyset.$$