A0: AXIOMA DE VACÍO

Existe vacío.

Notación: $\emptyset$

DEFINICIÓN DE CONJUNTO

$y\ es\ conjunto \iff (\exists x(x \in y))\ ó\ (y = \emptyset)$

vacío es conjunto

A1: AXIOMA DE EXTENSIÓN

$\forall x(x \in A \iff x \in B) \implies A = B$

A2: ESQUEMA AXIOMÁTICO DE SEPARACIÓN

$\exists B \forall x \ni (x \in B \iff [x \in A\ y\ \Phi(x)])$

Construye conjunto.

DEFINICIÓN DE NO PERTENENCIA

$x \notin y \iff \neg(x \in y)$

TEOREMAS

$\Phi(x): x \neq x$

1. $\forall x, x \notin \emptyset$

dem: Sea $\Phi(x)$ la expresión $x \neq x$. Por esquema axiomático de separación, $\exists B \forall x \ni (x \in \emptyset\ \&\ x \neq x)$. Supóngase $\exists x \in B \Rightarrow x \neq x\ (\Rightarrow\Leftarrow) \Rightarrow \forall x, x \notin B$. Por definición de conjunto $B = \emptyset \Rightarrow \forall x, x \notin \emptyset$. ■

A2: ESQUEMA AXIOMÁTICO DE SEPARACIÓN

$\exists B \forall x \ni (x \in B \iff [x \in A\ y\ \Phi(x)])$

conjunto !!

2. $\forall x, x \notin A \iff A = \emptyset$

vacío es único como conjunto

dem:

$(\Rightarrow)$ Si $\forall x, x \notin A \rightarrow$ Por definición de conjunto, $A = \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ Si $A = \emptyset \rightarrow$ Por teorema anterior $\forall x, x \in \emptyset = A \Rightarrow \forall x, x \notin A$. ■

$(p \Rightarrow q) \equiv (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

p	$\Rightarrow$	q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

* DEFINICIÓN DE CONTENCIÓN

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

** DEFINICIÓN DE CONTENCIÓN ESTRICTA

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ y } A \neq B)$$

TEOREMAS

1. $A \subseteq \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$

dem: Sea A un conjunto $\ni A \subseteq \Phi$. $\Rightarrow \forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in \Phi)$. Se asume que la implicación es verdadera, también lo es su contrapuesta. Es decir, $\forall x\,(x \notin \Phi \Rightarrow x \notin A)$. Como $\forall x,\ x \notin \Phi$ es siempre verdadero $\Rightarrow$ $\forall x,\ x \notin A$ es verdadero $\Rightarrow A = \Phi$ ■

2. $\neg(A \subset A)$

dem: Sea A un conjunto. Supóngase que $A \subset A \Rightarrow A \subseteq A$ y $A \neq A$. $\Rightarrow A \neq A$. Además, $A \subseteq A \Rightarrow A \subseteq A$ y $A \subseteq A \Rightarrow$ $\forall x\,[x \in A \Rightarrow x \in A]$ y $\forall x\,[x \in A \Rightarrow x \in A]$ $\Rightarrow \forall x\,[x \in A \Leftrightarrow x \in A] \Rightarrow A = A$ por Axioma de Extensión. $(\rightarrow\leftarrow)$.

$\therefore \neg(A \subset A)$. ■