Universidad del Valle de Guatemala
Departamento de Matemática
Licenciatura en Matemática Aplicada

Estudiante: Rudik Roberto Rompich
Correo: rom19857@uvg.edu.gt
Carné: 19857

MM2033 - Teoría de Conjuntos - Catedrático: Nancy Zurita
11 de julio de 2021

HT 1

1. Sección A

Problemas de [1] - Sección 1.1

Problema 1.1 (Problema 1). *Probar el* ***teorema 1.8****. Para todas las oraciones P, Q y R, las siguientes expresiones son verdaderas:*

i) $P \vee Q \iff Q \vee P$.

Demostración. Tenemos:

P	Q	$P \wedge Q$	$Q \wedge P$	$P \wedge Q \iff Q \wedge P$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	V

∎

i)' $P \wedge Q \iff Q \wedge P$.

Demostración. Tenemos:

P	Q	$P \wedge Q$	$Q \wedge P$	$P \wedge Q \iff Q \wedge P$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

∎

ii) $P \vee (Q \vee R) \iff (P \vee Q) \vee R.$

Demostración. Tenemos:

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \vee Q$	$P \vee (Q \vee R)$	$(P \vee Q) \vee R$	$P \vee (Q \vee R) \iff (P \vee Q) \vee R.$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V

■

ii)' $P \wedge (Q \wedge R) \iff (P \wedge Q) \wedge R.$

Demostración. Tenemos:

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \wedge Q$	$P \wedge (Q \wedge R)$	$(P \wedge Q) \wedge R$	$P \wedge (Q \wedge R) \iff (P \wedge Q) \wedge R$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	V
F	V	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	V

■

iii) $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$

Demostración. Tenemos:

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

■

iii)' $P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$

Demostración. Tenemos:

P	Q	R	$(Q \wedge R)$	$(P \vee Q)$	$(P \vee R)$	$P \vee (Q \wedge R)$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

■

iv) $P \vee P \iff P$.

Demostración. Tenemos:

P	$P \vee P$	$P \vee P \iff P$
V	V	V
F	F	V

■

iv)' $P \wedge P \iff P$.

Demostración. Tenemos:

P	$P \wedge P$	$P \wedge P \iff P$
V	V	V
F	F	V

■

Problema 1.2 (Problema 4)**.** *Probar que la sisguientes expresiones son verdaderas para todo P y Q.*

1. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

Demostración. Tenemos:

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$(P \Rightarrow Q)$	$(\neg Q \Rightarrow \neg P)$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

■

2. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$.

Demostración. Tenemos:

P	Q	$\neg P$	$(P \Rightarrow Q)$	$(\neg P \vee Q)$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	v

■

3. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$.

Demostración. Tenemos:

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$(P \Rightarrow Q)$	$(P \wedge \neg Q)$	$\neg(P \wedge \neg Q)$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$.
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V

■

4. $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$

Demostración. Tenemos:

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$	$[P \wedge (P \Rightarrow Q)]$	$[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

■

5. $[(P \vee Q) \wedge \neg P] \Rightarrow Q$.

Demostración. Tenemos:

P	Q	$\neg P$	$(P \vee Q)$	$[(P \vee Q) \wedge \neg P]$	$[(P \vee Q) \wedge \neg P] \Rightarrow Q$
V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V

■

Problema 1.3 (Problema 5)**.** *Probar que la sisguientes expresiones son verdaderas para todo P y Q y R.*

1. $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Demostración. Tenemos:

P	Q	R	$(P \Rightarrow Q)$	$(Q \Rightarrow R)$	$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)]$	$(P \Rightarrow R)$	$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

■

2. $[(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow Q)] \Leftrightarrow [(P \vee R) \Rightarrow Q]$.

P	Q	R	$(P \Rightarrow Q)$	$(R \Rightarrow Q)$	$(P \vee R)$	$[(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow Q)]$	$[(P \vee R) \Rightarrow Q]$	$\Longleftrightarrow$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F	V	V	V

Demostración. ■

3. $[(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)] \Leftrightarrow [P \Rightarrow (Q \wedge R)]$.

Demostración. Tenemos:

P	Q	R	$(P \Rightarrow Q)$	$(Q \wedge R)$	$(P \implies R)$	$[(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)]$	$[P \Rightarrow (Q \wedge R)]$	$\Longleftrightarrow$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V

■

Problema 1.4 (Problema 6)**.** *Probar que, para todas las expresiones P, Q y R, si $Q \iff R$ es verdadero, entonces las siguientes expresiones son verdaderas:*

1. $P \vee Q \Leftrightarrow P \vee R$.

   Demostración. Tenemos:

P	Q	R	$Q \iff R$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$P \vee Q \Leftrightarrow P \vee R$	$(Q \iff R) \implies (P \vee Q \Leftrightarrow P \vee R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	V
F	F	V	F	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F	V	V

■

2. $P \wedge Q \Leftrightarrow P \wedge R$.

   Demostración. Tenemos:

P	Q	R	$Q \iff R$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$P \wedge Q \Leftrightarrow P \wedge R$	$(Q \iff R) \implies (P \wedge Q \Leftrightarrow P \wedge R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F	V	V

■

3. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R)$.

   Demostración. Tenemos:

P	Q	R	$Q \iff R$	$(P \Rightarrow Q)$	$(P \Rightarrow R)$	$[(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R)]$	$(Q \iff R) \implies [(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R)]$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

■

2. Sección B

Dado los conjuntos A, B y C, demuestre que:

Problema 2.1. *$A \subseteq A$.*

Demostración. A probar: $A \subseteq A$. Por definición de contención, $\forall x(x \in A \implies x \in A) \implies A \subseteq A$. ■

Problema 2.2. *Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$.*

Demostración. A probar: $A = B$. Por hipótesis, $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. $\implies$ Por definición de contención, $[\forall x(x \in A \implies x \in B)] \wedge [\forall x(x \in B \implies x \in A)]$. $\implies \forall x[(x \in A \implies x \in B) \wedge (x \in B \implies x \in A)] \implies \forall x[x \in A \iff x \in B]$. $\implies$ Por el axioma de extensión, $A = B$. ■

Problema 2.3. *Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.*

Demostración. A probar: $A \subseteq C$ (i.e. $x \in A \implies x \in C$). Por hipótesis, $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. $\implies$ Por definición de contención, $[\forall x(x \in A \implies x \in B) \wedge \forall x(x \in B \implies x \in C)]$ $\implies \forall x[(x \in A \implies x \in B) \wedge (x \in B \implies x \in C)] \implies \forall x(x \in A \implies x \in C) \implies A \subseteq C$. ■

Problema 2.4. *Si $A \subset B$ entonces $\neg(B \subset A)$.*

Demostración. Por reducción al absurdo, $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$. $\implies$ Por la definición de contención estricta $[(A \subseteq B) \wedge (A \neq B)] \wedge [(B \subseteq A) \wedge (B \neq A)] \implies [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \wedge (A \neq B)]$. $\implies$ Por el Problema 2.2 sabemos que si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$, tal que $[(A = B) \wedge (A \neq B)](\rightarrow\leftarrow)$. $\therefore \neg(B \subset A)$. ■

Problema 2.5. *Si $A \subset B$ entonces $A \subseteq B$.*

Demostración. A probar: $A \subseteq B$ (i.e. $x \in A \implies x \in B$). Por hipótesis, $A \subset B$. $\implies$ Por definición de contención estricta, $(A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$. ■

Referencias

Pinter, C. C. (2014). *A book of set theory.* Courier Corporation.