AXIOMAS DE ZERMELO-FRAENKL

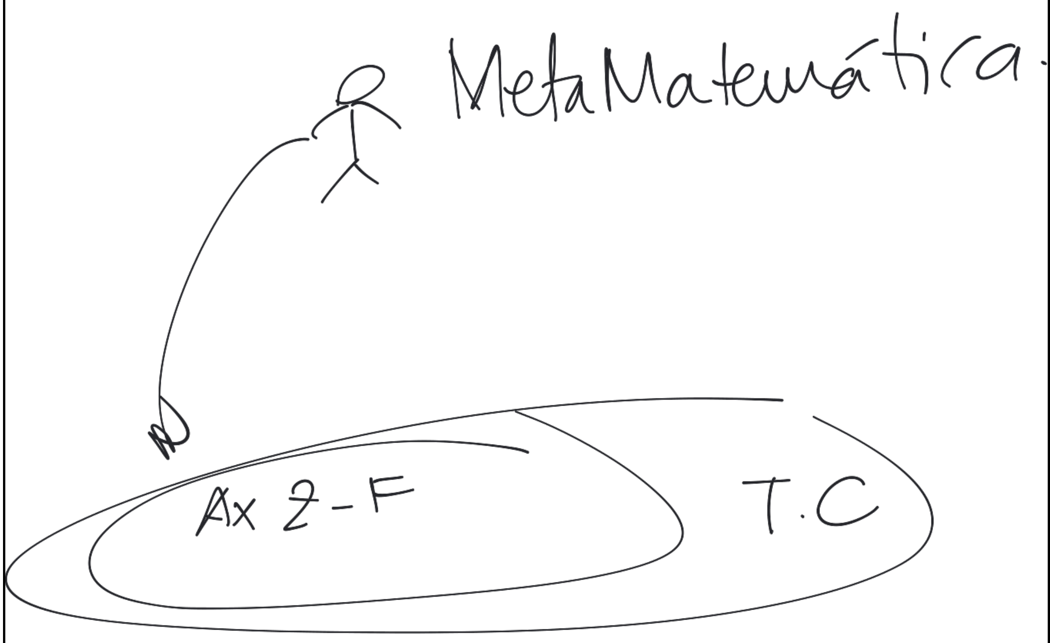
A0: $\exists\, \phi$
A1: Ax. Ext.
A2: EAS
A3: Ax. Unión.
A4: Ax. Parejas.

* Leer Cap. 1 Libro: Laberinto de conocimiento.

$\boxed{\text{EAS}}$

Definición por abstracción
$\{x : \Phi(x)\}$

- Es la notación usual de conjunto
- $\Phi(x)$: Es el operador que nos da una nueva forma de ligar variables



ESQUEMA DE DEFINICIÓN

$$y = \{x : \Phi(x)\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \forall x\big(x \in y \Leftrightarrow \Phi(x)\big) \;\; \wedge \;\; y \text{ es conjunto} \\ \text{ó} \\ y = \emptyset \wedge \neg \exists B \forall x\big(x \in B \Leftrightarrow \Phi(x)\big) \end{array}$$

Nota: Si x es un conjunto

$$\underline{\{x : \Phi(x)\}} = \{x : x \text{ es conjunto y } \Phi(x)\}$$

* diferentes tipos de conjuntos.

ESQUEMA TEOREMÁTICO

$$y \in \{x : \Phi(x)\} \Longrightarrow \Phi(y)$$

dem: Sea $y \in \{x : \Phi(x)\} \Rightarrow \{x : \Phi(x)\} \neq \emptyset$.
$\Rightarrow$ por esquema de def. $\Phi(y)$. ■

TEOREMA

$$A = \{x : x \in A\}$$

dem: Sea A un conjunto y $\Phi(x) : x \in A$.
Por lógica sabemos que es verdadero
decir $(x \in A \Leftrightarrow x \in A) \Rightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow \Phi(x))$.
Por esquema de definición, $A = \{x : \Phi(x)\}$
$\Rightarrow A = \{x : x \in A\}$

∎

TEOREMA

$$\{x : x \neq x\} = \emptyset$$

dem: Supóngase que $y \in \{x : x \neq x\} \Rightarrow$
Por esquema teoremático, $y \neq y$ ($\times$).
$\Rightarrow y \notin \{x : x \neq x\}, \forall y \Rightarrow \{x : x \neq x\} = \phi$.

∎

TEOREMA

i. $A \cap B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\}$
ii. $A \cup B = \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}$
iii. $A \sim B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$

} Por esquema teoremático

Nota:

1 Axioma: define objetos sin necesidad de teoremas que justifican.

2 $\boxed{\neg \exists A, \forall x, x \in A}$ No existe el conjunto de todos los elementos

Supóngase $\exists A \ni \forall x, x \in A \Rightarrow$ Por EAS

$\exists B\ \forall x\,(x \in B \Leftrightarrow (x \in A \;\&\; \Phi(x)))$.

$\forall x\,(x \in A \Leftrightarrow \Phi(x))$. $\boxed{\text{Ax Abstracción}}$

$\downarrow$

Paradoja de Russell.

TEOREMA

$$\{x: x = x\} = \emptyset$$

dem: Sea $A = \{x : x = x\} \Rightarrow \forall x,\ x = x$.

$\Rightarrow \forall x,\ x \in A \Rightarrow \exists A \ni \forall x, x \in A.\ (\cancel{\to})$.

$\Rightarrow$ Por esquema de def. $\{x : x = x\} = \phi$.

■

NOTA

1. Las definiciones que no necesitan un teorema que las justifique son AXIOMAS

2. $\neg\exists A\ \forall x, x \in A$

A5: AXIOMA DE LA SUMA

$\exists C \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow \exists B[x \in B \text{ y } B \in A])$

DEFINICIÓN

$\cup A = \{x : \exists B[x \in B \text{ y } B \in A]\}$

TEOREMA

$x \in \cup A \Leftrightarrow \exists B[x \in B \text{ y } B \in A]$

TEOREMAS

1. $\cup \emptyset = \emptyset$
2. $\cup \{\emptyset\} = \emptyset$
3. $\cup \{A\} = A$
4. $\cup \{A, B\} = A \cup B$

Ej en clase 3

Sábado 24 de julio.

① $\cup \phi = \phi$.

dem: Sea $x \in \cup \phi$. Además, sabemos $\forall B, B \notin \phi$. Si $x \in \cup \phi \Rightarrow \exists B (x \in B \ \& \ B \in \phi)(\rightarrow\leftarrow)$

$\Rightarrow \forall x, x \notin \cup \phi \Rightarrow \cup \phi = \phi$. ■

② $\cup \{\phi\} = \phi$.

dem: Sea $x \in \cup \{\phi\} \Rightarrow \exists B (x \in B \ \& \ B \in \{\phi\})$

Pero por Ax. Parejas si $B \in \{\phi\} \Rightarrow B = \phi$.

$\Rightarrow x \in B = \phi (\rightarrow\leftarrow) \Rightarrow \cup \{\phi\} = \phi$. ■

$A = \{1, 2, 3, \{x\}, \{y, z\}\}$

$\cup A = \{x, y, z\}$

$\cup A = \{x : \exists B (x \in B \ \& \ B \in A)\}$

DEFINICIÓN:

$\cap A = \{x : \forall B\ [B \in A \Longrightarrow x \in B]\}$

TEOREMA

$x \in \cap A \Leftrightarrow (\boxed{\forall B [B \in A \Longrightarrow x \in B]}\ y\ \exists B\ (B \in A))$

TEOREMAS

1. $\cap \emptyset = \emptyset$

2. $\cap \{\emptyset\} = \emptyset$

dem:

① Sea $x \in \cap \phi \Rightarrow \forall B (B \in \phi \Rightarrow x \in B)$ & $\exists B (B \in \phi)$ $(\rightarrow\!\leftarrow)$

$\Rightarrow \forall x, x \notin \cap \phi \Rightarrow \cap \phi = \phi$ ■

② Sea $x \in \cap \{\phi\} \Rightarrow \forall B (B \in \{\phi\} \Rightarrow x \in B)$ & $\exists B (B \in \{\phi\})$.

$\Rightarrow \exists B (B \in \{\phi\})$. Por Ax. Parejas

$\Rightarrow B = \phi$.

Por otro lado, $\forall B = \phi (B \in \{\phi\} \Rightarrow x \in B = \phi)$ $(\rightarrow\!\leftarrow)$

$\Rightarrow \forall x, x \notin \cap \{\phi\} \Rightarrow \cap \{\phi\} = \phi$.

■