**Universidad del Valle de Guatemala**
Departamento de Matemática
**Estudiante:** Rudik Roberto Rompich
**Correo:** rom19857@uvg.edu.gt
**Carné:** 19857

MM2033 - Teoría de Conjuntos - Catedrático: Nancy Zurita
5 de agosto de 2021

---

# HT 1

## 1. Sección A

Problemas de [1] - Sección 1.1

**Problema 1.1** (Problema 1)**.** *Probar el* ***teorema 1.8****. Para todas las oraciones* $P, Q$ *y* $R$*, las siguientes expresiones son verdaderas:*

*i)* $P \vee Q \iff Q \vee P$.

*Demostración.* Tenemos:

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $Q \wedge P$ | $P \wedge Q \iff Q \wedge P$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| V | F | V | V | V |
| F | V | V | V | V |
| F | F | F | F | V |

■

*i)’* $P \wedge Q \iff Q \wedge P$.

*Demostración.* Tenemos:

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $Q \wedge P$ | $P \wedge Q \iff Q \wedge P$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | F | V |
| F | V | F | F | V |
| F | F | F | F | V |

■

*ii)* $P \vee (Q \vee R) \iff (P \vee Q) \vee R$.

*Demostración.* Tenemos:

| $P$ | $Q$ | $R$ | $Q \vee R$ | $P \vee Q$ | $P \vee (Q \vee R)$ | $(P \vee Q) \vee R$ | $P \vee (Q \vee R) \iff (P \vee Q) \vee R.$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | V | V | V | V |
| V | F | V | V | V | V | V | V |
| V | F | F | F | V | V | V | V |
| F | V | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | V | V | V | V | V |
| F | F | V | V | F | V | V | V |
| F | F | F | F | F | F | F | V |

■

*ii)'* $P \wedge (Q \wedge R) \iff (P \wedge Q) \wedge R.$

*Demostración.* Tenemos:

| $P$ | $Q$ | $R$ | $Q \wedge R$ | $P \wedge Q$ | $P \wedge (Q \wedge R)$ | $(P \wedge Q) \wedge R$ | $P \wedge (Q \wedge R) \iff (P \wedge Q) \wedge R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | F | V | F | F | V |
| V | F | V | F | F | F | F | V |
| V | F | F | F | F | F | F | V |
| F | V | V | V | F | F | F | V |
| F | V | F | F | F | F | F | V |
| F | F | V | F | F | F | F | V |
| F | F | F | F | F | F | F | V |

■

*iii)* $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$

*Demostración.* Tenemos:

| $P$ | $Q$ | $R$ | $Q \vee R$ | $P \wedge Q$ | $P \wedge R$ | $P \wedge (Q \vee R)$ | $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ | $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | V | F | V | V | V |
| V | F | V | V | F | V | V | V | V |
| V | F | F | F | F | F | F | F | V |
| F | V | V | V | F | F | F | F | V |
| F | V | F | V | F | F | F | F | V |
| F | F | V | V | F | F | F | F | V |
| F | F | F | F | F | F | F | F | V |

■

*iii)'* $P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$

*Demostración.* Tenemos:

| $P$ | $Q$ | $R$ | $(Q \wedge R)$ | $(P \vee Q)$ | $(P \vee R)$ | $P \vee (Q \wedge R)$ | $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ | $P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | F | V | V | V | V | V |
| V | F | V | F | V | V | V | V | V |
| V | F | F | F | V | V | V | V | V |
| F | V | V | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | F | V | F | F | F | V |
| F | F | V | F | F | V | F | F | V |
| F | F | F | F | F | F | F | F | V |

■

*iv)* $P \vee P \iff P.$

*Demostración.* Tenemos:

| $P$ | $P \vee P$ | $P \vee P \iff P$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| F | F | V |

■

*iv)'* $P \wedge P \iff P.$

*Demostración.* Tenemos:

| $P$ | $P \wedge P$ | $P \wedge P \iff P$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| F | F | V |

■

**Problema 1.2** (Problema 4)**.** *Probar que la sisguientes expresiones son verdaderas para todo $P$ y $Q$.*

1. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P).$

   *Demostración.* Tenemos:

| $P$ | $Q$ | $\neg Q$ | $\neg P$ | $(P \Rightarrow Q)$ | $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ | $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V | V | V |
| V | F | V | F | F | F | V |
| F | V | F | V | V | V | V |
| F | F | V | V | V | V | V |

■

2. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q).$

*Demostración.* Tenemos:

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $(P \Rightarrow Q)$ | $(\neg P \vee Q)$ | $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | V | V | V |
| V | F | F | F | F | V |
| F | V | V | V | V | V |
| F | F | V | V | V | v |

■

*3.* $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$.

*Demostración.* Tenemos:

| $P$ | $Q$ | $\neg Q$ | $\neg P$ | $(P \Rightarrow Q)$ | $(P \wedge \neg Q)$ | $\neg(P \wedge \neg Q)$ | $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V | F | V | V |
| V | F | V | F | F | V | F | V |
| F | V | F | V | V | F | V | V |
| F | F | V | V | V | F | V | V |

■

*4.* $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$

*Demostración.* Tenemos:

| $P$ | $Q$ | $(P \Rightarrow Q)$ | $[P \wedge (P \Rightarrow Q)]$ | $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | F | V |
| F | V | V | F | V |
| F | F | V | F | V |

■

*5.* $[(P \vee Q) \wedge \neg P] \Rightarrow Q$.

*Demostración.* Tenemos:

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $(P \vee Q)$ | $[(P \vee Q) \wedge \neg P]$ | $[(P \vee Q) \wedge \neg P] \Rightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | V | F | V |
| V | F | F | V | F | V |
| F | V | V | V | V | V |
| F | F | V | F | F | V |

■

**Problema 1.3** (Problema 5). *Probar que la sisguientes expresiones son verdaderas para todo $P$ y $Q$ y $R$.*

1. $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

   *Demostración.* Tenemos:

| $P$ | $Q$ | $R$ | $(P \Rightarrow Q)$ | $(Q \Rightarrow R)$ | $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)]$ | $(P \Rightarrow R)$ | $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | F | F | F | V |
| V | F | V | F | V | F | V | V |
| V | F | F | F | V | F | F | V |
| F | V | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | V | F | F | V | V |
| F | F | V | V | V | V | V | V |
| F | F | F | V | V | V | V | V |

■

2. $[(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow Q)] \Leftrightarrow [(P \vee R) \Rightarrow Q]$.

| $P$ | $Q$ | $R$ | $(P \Rightarrow Q)$ | $(R \Rightarrow Q)$ | $(P \vee R)$ | $[(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow Q)]$ | $[(P \vee R) \Rightarrow Q]$ | $\Longleftrightarrow$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | V | V | V | V | V |
| V | F | V | F | F | V | F | F | V |
| V | F | F | F | V | V | F | F | V |
| F | V | V | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | V | V | F | V | V | V |
| F | F | V | V | F | V | F | F | V |
| F | F | F | V | V | F | V | V | V |

   *Demostración.* ■

3. $[(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)] \Leftrightarrow [P \Rightarrow (Q \wedge R)]$.

   *Demostración.* Tenemos:

| $P$ | $Q$ | $R$ | $(P \Rightarrow Q)$ | $(Q \wedge R)$ | $(P \implies R)$ | $[(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)]$ | $[P \Rightarrow (Q \wedge R)]$ | $\Longleftrightarrow$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | F | F | F | F | V |
| V | F | V | F | F | V | F | F | V |
| V | F | F | F | F | F | F | F | V |
| F | V | V | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | V | F | V | V | V | V |
| F | F | V | V | F | V | V | V | V |
| F | F | F | V | V | V | V | V | V |

■

**Problema 1.4** (Problema 6)**.** *Probar que, para todas las expresiones $P, Q$ y $R$, si $Q \iff R$ es verdadero, entonces las siguientes expresiones son verdaderas:*

1. $P \vee Q \Leftrightarrow P \vee R$.

*Demostración.* Tenemos:

| $P$ | $Q$ | $R$ | $Q \iff R$ | $P \vee Q$ | $P \vee R$ | $P \vee Q \Leftrightarrow P \vee R$ | $(Q \iff R) \implies (P \vee Q \Leftrightarrow P \vee R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | F | V | V | V | V |
| V | F | V | F | V | V | V | V |
| V | F | F | V | V | V | V | V |
| F | V | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | F | V | F | F | V |
| F | F | V | F | F | V | F | V |
| F | F | F | F | F | F | V | V |

■

2. $P \wedge Q \Leftrightarrow P \wedge R$.

*Demostración.* Tenemos:

| $P$ | $Q$ | $R$ | $Q \iff R$ | $P \wedge Q$ | $P \wedge R$ | $P \wedge Q \Leftrightarrow P \wedge R$ | $(Q \iff R) \implies (P \wedge Q \Leftrightarrow P \wedge R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | F | V | F | F | V |
| V | F | V | F | F | V | V | V |
| V | F | F | V | F | F | V | V |
| F | V | V | V | F | F | V | V |
| F | V | F | F | F | F | V | V |
| F | F | V | F | F | F | V | V |
| F | F | F | F | F | F | V | V |

■

3. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R)$.

*Demostración.* Tenemos:

| $P$ | $Q$ | $R$ | $Q \iff R$ | $(P \Rightarrow Q)$ | $(P \Rightarrow R)$ | $[(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R)]$ | $(Q \iff R) \implies [(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R)]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | F | V | F | F | V |
| V | F | V | F | F | V | F | V |
| V | F | F | V | F | F | V | V |
| F | V | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | F | V | V | V | V |
| F | F | V | F | V | V | V | V |
| F | F | F | F | V | V | V | V |

■

# 2. Sección B

Dado los conjuntos $A, B$ y $C$, demuestre que:

**Problema 2.1.** *$A \subseteq A$.*

*Demostración.* A probar: $A \subseteq A$. Por definición de contención, $\forall x(x \in A \implies x \in A) \implies A \subseteq A$. ■

**Problema 2.2.** *Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$.*

*Demostración.* A probar: $A = B$. Por hipótesis, $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. $\implies$ Por definición de contención, $[\forall x(x \in A \implies x \in B)] \wedge [\forall x(x \in B \implies x \in A)]$. $\implies \forall x[(x \in A \implies x \in B) \wedge (x \in B \implies x \in A)] \implies \forall x[x \in A \iff x \in B]$. $\implies$ Por el axioma de extensión, $A = B$. ■

**Problema 2.3.** *Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.*

*Demostración.* A probar: $A \subseteq C$ (i.e. $x \in A \implies x \in C$). Por hipótesis, $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. $\implies$ Por definición de contención, $[\forall x(x \in A \implies x \in B) \wedge \forall x(x \in B \implies x \in C)]$ $\implies \forall x[(x \in A \implies x \in B) \wedge (x \in B \implies x \in C)] \implies \forall x(x \in A \implies x \in C) \implies A \subseteq C$. ■

**Problema 2.4.** *Si $A \subset B$ entonces $\neg(B \subset A)$.*

*Demostración.* Por reducción al absurdo, $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$. $\implies$ Por la definición de contención estricta $[(A \subseteq B) \wedge (A \neq B)] \wedge [(B \subseteq A) \wedge (B \neq A)] \implies [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \wedge (A \neq B)]$. $\implies$ Por el Problema 2.2 sabemos que si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$, tal que $[(A = B) \wedge (A \neq B)](\rightarrow\leftarrow)$. $\therefore \neg(B \subset A)$. ■

**Problema 2.5.** *Si $A \subset B$ entonces $A \subseteq B$.*

*Demostración.* A probar: $A \subseteq B$ (i.e. $x \in A \implies x \in B$). Por hipótesis, $A \subset B$. $\implies$ Por definición de contención estricta, $(A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$. ■

# Referencias

Pinter, C. C. (2014). *A book of set theory.* Courier Corporation.