HT4 } Ax. Suma / $\cup A$, $\cap A$

HT5 → GRÁFICAS

Comprobación 2 → Dedekind, Riemmann

MANIFOLD ← VARIEDAD

FUNCIONES

FUNCIÓN

Es una de las ideas básicas y forma parte de TODAS las ramas de lamatemática.

Otros nombres utilizados: MORFISMO – MAPEO – CORRESPONDENCIA.

A. Moderna

general !

mapping !!

DEFINICIÓN

gráfica, conjuntos

Una función de A a B es una triada (f, A, B) donde A y B son conjuntos y $f \subseteq A \times B \ni$

a) $\forall x \in A \ \exists y \in B \ \ni (x, y) \in f$

b) Si $(x, y_1), (x, y_2) \in f$ entonces $y_1 = y_2$

$\boxed{\forall x \in A \ \exists! \, y \in B \ni f(x) = y}$

NOTA

1. (f, A, B) se escribe como $f: A \to B$
2. A, B pueden ser familias de conjuntos
3. f es una gráfica

Da vida al ax. de Elección

TEOREMA (de caracterización de funciones) ("Podrían" ser def)

Sean A, B conjuntos y f una gráfica $\ni f \subseteq A \times B$. Entonces, (f, A, B) es función ssi

hip. general

i) Si $(x, y_1), (x, y_2) \in f$ entonces $y_1 = y_2$

ii) $dom f = A$

iii) $ran f \subseteq B$

a) $\forall x \in A \ \exists y \in B \ \ni (x, y) \in f$

b) Si $(x, y_1), (x, y_2) \in f$ entonces $y_1 = y_2$

dem: Sean A, B conjuntos $\ni f \subseteq A \times B$ es una gráfica.

($\Rightarrow$) Sea (f, A, B) una función. $\Rightarrow f$ cumple las condiciones (a) & (b)

a) $\forall x \in A \ \exists y \in B \ \ni (x,y) \in f$

b) Si $(x,y_1),(x,y_2) \in f$ entonces $y_1 = y_2$

i) Se cumple por (b)

ii) ($\subseteq$) Sea $x \in dom f \Rightarrow \exists y \ni (x,y) \in f \subseteq A \times B$ $\Rightarrow (x,y) \in A \times B \Rightarrow x \in A$ & $y \in B \Rightarrow x \in A$ $\therefore dom f \subseteq A$

($\supseteq$) Sea $x \in A \Rightarrow \exists y \in B \ni (x,y) \in f$ por (a) $\Rightarrow x \in dom f$. $\therefore A \subseteq dom f$.

$\Rightarrow dom f = A$.

iii) Sea $x \in ran f \Rightarrow \exists y \ni (x,y) \in f \subseteq A \times B \Rightarrow$ $(x,y) \in A \times B \Rightarrow x \in A$ & $y \in B \Rightarrow$ $\Rightarrow y \in B$ $\therefore ran f \subseteq B$

Entonces f cumple

i) Si $(x,y_1),(x,y_2) \in f$ entonces $y_1 = y_2$

ii) $dom f = A$

iii) $ran f \subseteq B$

($\Leftarrow$) Supóngase que f cumple (i), (ii) & (iii)

i) Si $(x,y_1),(x,y_2) \in f$ entonces $y_1 = y_2$

ii) $dom f = A$

iii) $ran f \subseteq B$

a) Sea $x \in A \Rightarrow$ por ii), $x \in dom f \Rightarrow \exists y \ni$ $(x,y) \in f \Rightarrow y \in ran f \subseteq B \Rightarrow y \in B$. Por lo tanto, $\forall x \in A \ \exists y \in B \ni (x,y) \in f$.

b) Se cumple por (i).

$\therefore f$ cumple

a) $\forall x \in A \ \exists y \in B \ \ni (x,y) \in f$

b) Si $(x,y_1),(x,y_2) \in f$ entonces $y_1 = y_2$

$\Rightarrow f$ es función. ■

COROLARIO

Sea $f: A \to B$ una función. Si C es un conjunto tal que $ran f \subseteq C$ entonces $f: A \to C$ es función

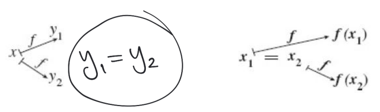
NOTA

1. $f(x) = y$ es lo mismo que decir $(x,y) \in f$ } La notación usual

2. Las condiciones a y b de la definición de función se pueden reescribir como

a)* $\forall x \in A \ \exists y \in B \ \ni f(x) = y$

b)* Si $f(x) = y_1$ y $f(x) = y_2$ entonces $y_1 = y_2$



Si $x_1 = x_2$ entonces $f(x_1) = f(x_2)$

TEOREMA

{Se usa para construir las operaciones de los naturales}

Sean $f: A \to B$ y $g: A \to B$ funciones. Entonces,

$$f = g \text{ ssi } \forall x \in A, f(x) = g(x)$$

dem: Sean $f: A \to B$ & $g: A \to B$ funciones.

($\Rightarrow$) Supóngase $f = g$. Sea $x \in A$ cualquiera $\Rightarrow$ $\exists y \in B \ni f(x) = y \Rightarrow (x,y) \in f \Rightarrow (x,y) \in g$ $\Rightarrow g(x) = y$. $\therefore f(x) = g(x) \Rightarrow \forall x \in A, f(x) = g(x)$.

($\Leftarrow$) Supóngase que $\forall x, f(x) = g(x)$. $(x,y) \in f \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow g(x) = y \Leftrightarrow (x,y) \in g$ Por Ax. de extensión, $f = g$. ■

DEFINICIÓN

Sea $f: A \to B$ una función. Decimos que f es:

1. Inyectiva

Si $(x_1, y), (x_2, y) \in f$ entonces $x_1 = x_2$

* Sean $x_1, x_2 \in A \ni f(x_1) = f(x_2) = y \Rightarrow x_1 = x_2$

2. Sobreyectiva:

$\forall y \in B\ \exists x \in A \ni (x, y) \in f$

$ran f = B$

3. Biyectiva: Si es inyectiva y sobreyectiva

También es llamda una correspondencia uno a uno o biunivoca.

TEOREMA

Si $f: A \to B$ y $g: B \to C$ son funciones entonces $g \circ f: A \to C$ es una función

dem: Sean $f: A \to B$ & $g: B \to C$ funciones.
Sabemos que $g \circ f \subseteq A \times C$ es gráfica.

i) $dom\, g\circ f = A$ Nótese que $dom\, g\circ f = dom\, f = A$ ya que $g\circ f$ es gráfica y f es función $\therefore dom\, g\circ f = A$

ii) $ran\, g\circ f \subseteq C$ Sabemos que $ran\, g\circ f \subseteq ran\, g \subseteq C$ ya que $g\circ f$ es gráfica y g es función $\therefore ran\, g\circ f \subseteq C$.

i) Sean $(x, z_1)(x, z_2) \in g\circ f \Rightarrow \exists\, y_1, y_2 \ni$ $[(x, y_1), (x, y_2) \in f]$ & $[(y_1, z_1), (y_2, z_2) \in g] \Rightarrow$ como f es función $y_1 = y_2$. $\Rightarrow$ como g es función $(y_1, z_1)(y_1, z_2) \in g \Rightarrow$

$z_1 = z_2$

$\therefore g\circ f$ es función {Por teorema de caracterización de funciones} ∎

DEFINCIÓN

Una función $f: A \to B$ es invertible si $f^{-1}: B \to A$ es función.

TEOREMA

Si $f: A \to B$ es biyectiva entonces $f^{-1}: B \to A$ es función biyectiva
(I) (II)

dem: Sea $f: A \to B$ función biyectiva $\Rightarrow$ $dom\, f = A$ & $ran\, f = B$. Sabemos que $f^{-1} \subseteq B \times A$ es gráfica inversa de f.

f^{-1} FUNCIÓN (I)

ii) $B = ran\, f = dom\, f^{-1}$. $\Rightarrow dom\, f^{-1} = B$

iii) $ran\, f^{-1} = dom\, f = A \subseteq A \Rightarrow ran\, f^{-1} \subseteq A$.

i) Sean $(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1} \Rightarrow (x_1, y)(x_2, y) \in f$ $\Rightarrow x_1 = x_2$ ya que f es inyectiva.

$\therefore$ por (i), (ii) & (iii) f^{-1} es función.

f^{-1} BIYECTIVA (II)

inyectividad: Supóngase que $(y_1, x)(y_2, x) \in f^{-1} \Rightarrow (x, y_1), (x, y_2) \in f$ $\Rightarrow y_1 = y_2$ ya que f es función $\Rightarrow f^{-1}$ es inyectiva.

sobre: Nótese que $ran\, f^{-1} = dom\, f = A$ $\Rightarrow ran\, f^{-1} = A \Rightarrow f^{-1}$ es sobre

$\therefore f^{-1}$ es biyectiva ∎

$f: A \to B$ } f is a mapping of A into B

FUNCIÓN CUALQUIERA

f sobreyectiva — f is a mapping of A onto B

f biyectiva $\Rightarrow$ f es invertible

(f^{-1} es función)

TEOREMA

Si $f: A \to B$ es función invertible entonces $f: A \to B$ es biyectiva.

dem: Sea $f: A \to B$ función invertible. Entonces, f^{-1} es función.

* injectividad: Sean $(x_1, y)(x_2, y) \in f \Rightarrow (y, x_1)(y, x_2) \in f^{-1}$ que es función $\Rightarrow x_1 = x_2$.

$\Rightarrow f$ es inyectiva.

* Sobre: ($\subseteq$) Sabemos que $\operatorname{ran} f \subseteq B$ por ser f función.

($\supseteq$) Sea $y \in B \Rightarrow \exists x \in A \ni (y, x) \in f^{-1}$ ya que f^{-1} es función $\Rightarrow \exists x \ni (x, y) \in f \Rightarrow y \in \operatorname{ran} f. \Rightarrow B \subseteq \operatorname{ran} f$ $\therefore \operatorname{ran} f = B$

{$\operatorname{ran} f = B$}

$\Rightarrow f$ es sobre

$\therefore f$ es biyectiva