Universidad del Valle de Guatemala

MM2033- 2 semestre - 2021

Licenciatura en matemática aplicada

TEORÍA DE CONJUNTOS

Catedrático: Nancy Zurita

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay
Carné: 19857
Correo: rom19857@uvg.edu.gt

14 de agosto de 2021

Índice

1. Sesión 2

1.1. Axiomática

A0: (Axioma de vacío) Existe vacío. Notación: $\varnothing$.

A1: (Axioma de extensión) $\forall x(x \in A \iff x \in B) \implies A = B$.

A2: (Esquema axiomático de separación) $\exists B\ \forall x \ni (x \in B \iff [x \in A \wedge \Phi(x)])$.

Definición 1. *(Conjunto) y es conjunto* $\iff (\exists x(x \in y)) \vee (y = \varnothing)$.

Definición 2. *(No pertenencia)* $x \notin y \iff \neg(x \in y)$.

Teorema 1. $\forall x, x \notin \varnothing$.

Teorema 2. $\forall x, x \notin A \iff A = \varnothing$.

Definición 3. *(Contención)* $A \subseteq B \iff \forall x(x \in A \implies x \in B)$.

Definición 4. *(Contención estricta)* $A \subset B \iff (A \subseteq B \wedge A \neq B)$.

Teorema 3. $A \subseteq \varnothing \implies A = \varnothing$.

Teorema 4. $\neg(A \subset A)$.

A0: AXIOMA DE VACÍO

Existe vacío.

Notación: $\emptyset$

A1: AXIOMA DE EXTENSIÓN

$$\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B$$

A2: ESQUEMA AXIOMÁTICO DE SEPARACIÓN

$$\exists B \forall x \ni (x \in B \Leftrightarrow [x \in A \text{ y } \Phi(x)])$$

Construye conjunto.

DEFINICIÓN DE CONJUNTO

y *es conjunto* $\Leftrightarrow (\exists x (x \in y)$ ó $(y = \emptyset)$

vacío es conjunto

DEFINICIÓN DE NO PERTENENCIA

$$x \notin y \Leftrightarrow \neg(x \in y)$$

TEOREMAS

$\Phi(x): x \neq x$

1. $\forall x, x \notin \emptyset$

dem: Sea $\Phi(x)$ la expresión $x \neq x$. Por esquema axiomático de separación, $\exists B \forall x \ni (x \in \phi \;\&\; x \neq x)$. Supóngase $\exists x \in B \Rightarrow x \neq x$ ($\Leftarrow\!\!\!\!\times$) $\Rightarrow \forall x, x \notin B$. Por definición de conjunto $B = \phi$. $\Rightarrow \forall x, x \notin \phi$. ∎

A2: ESQUEMA AXIOMÁTICO DE SEPARACIÓN

$$\exists B \forall x \ni (x \in B \Leftrightarrow [x \in A \text{ y } \Phi(x)])$$

conjunto !!

2. $\forall x, x \notin A \Leftrightarrow A = \emptyset$

vacío es único como conjunto

dem:

($\Rightarrow$) Si $\forall x, x \notin A \Rightarrow$ Por definición de conjunto, $A = \phi$.

($\Leftarrow$) Si $A = \phi \Rightarrow$ Por teorema anterior $\forall x, x \in \phi = A \Rightarrow \forall x, x \notin A$. ∎

$(p \Rightarrow q) \equiv (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

p	⇒	q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

✱ DEFINICIÓN DE CONTENCIÓN

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

✱✱ DEFINICIÓN DE CONTENCIÓN ESTRICTA

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ y } A \neq B)$$

TEOREMAS

1. $A \subseteq \emptyset \Longrightarrow A = \emptyset$

dem: Sea A un conjunto $\ni A \subseteq \phi$. Se asume que $\Rightarrow \forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in \phi)$. la implicación es verdadera, también lo es su contrapuesta. Es decir, $\forall x\,(x \notin \phi \Rightarrow x \notin A)$. Como $\forall x$, $x \notin \phi$ es siempre verdadero $\Rightarrow$ $\forall x$, $x \notin A$ es verdadero $\Rightarrow A = \phi$ ∎

2. $\neg(A \subset A)$

dem: Sea A un conjunto. Supóngase que $A \subset A \Rightarrow A \subseteq A$ y $A \neq A$. $\Rightarrow$ $A \neq A$.

Además, $A \subseteq A \Rightarrow A \subseteq A$ y $A \subseteq A \Rightarrow$ $\forall x\,[x \in A \Rightarrow x \in A]$ y $\forall x\,[x \in A \Rightarrow x \in A]$ $\Rightarrow \forall x\,[x \in A \Leftrightarrow x \in A] \Rightarrow A = A$ por Axioma de Extensión. $(\rightarrow\!\leftarrow)$.

$\therefore \neg(A \subset A)$. ∎

2. Sesión 3

Teorema 5. *(Construcción de la interesección)* $\exists ! C, \forall x \ni (x \in C \iff x \in A \wedge x \in B)$.

Definición 5. $A \cap B = y \iff [\forall x(x \in y \iff [x \in A \wedge x \in B]) \wedge y$ *es conjunto.*$]$

Teorema 6. *(Varios)*

1. $x \in A \cap B \Leftrightarrow [x \in A$ *y* $x \in B]$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

A3: (De la unión) $\exists C \forall x \ni (x \in C \iff [x \in \vee x \in B])$.

Teorema 7. *(Construcción de la unión)* $\exists ! C, \forall x \ni (x \in C \iff [x \in A \vee x \in B])$

Definición 6. $A \cup B = y \iff [\forall x(x \in y \iff [x \in A \vee x \in B]) \wedge y$ *es conjunto.*$]$

Teorema 8. *(Varios)*

1. $x \in A \cup B \Leftrightarrow [x \in A$ *ó* $x \in B]$
2. $A \cup A = A$
3. $A \cup \emptyset = A$
4. $A \cup B = B \cup A$
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

A0 A. Vacío
A1 A. Extensión (Unicidad - Cuando hay igualdad)
A2 Existencia.
A3 Existencia.

Teorema 9. *(Construcción de la diferencia de conjuntos)* $\exists! C, \forall x \ni (x \in C \iff [x \in \wedge x \notin B])$.

Definición 7. *Sea*

$$A \sim B = y \iff [\forall x (x \in y \iff [x \in A \wedge x \notin B]) \wedge y \text{ \textit{es conjunto.}}]$$

Teorema 10. *(Varios)*

1. $x \in A \sim B \iff [x \in A \wedge x \notin B]$.

2. $A \sim A = \varnothing$.

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE LA INTERSECCIÓN

$\exists! C, \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \ y \ x \in B])$

Existencia Sea $\Phi(x): x \in B$. Por EAS

$\exists C \ \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ \underbrace{\Phi(x)}_{x\in B}))$

$\therefore \exists C \ \forall x \ni \boxed{[x \in C \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ x \in B)]}$

Unicidad Supóngase $\exists C' \ \forall x \ni \boxed{[x \in C' \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ x \in B)]}$

Si $x \in C' \Leftrightarrow x \in A \ \& \ x \in B \Leftrightarrow x \in C$

$\therefore \boxed{x \in C' \Leftrightarrow x \in C}$. Por Axioma de Extensión

Si $\forall x \in C' \Leftrightarrow x \in C \Rightarrow \boxed{C' = C}$

$\therefore$ C es único

$$\boxed{\exists! C \ \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ x \in B))}$$

DEFINICIÓN

$$A \cap B = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \forall x (x \in y \Leftrightarrow [x \in A \ y \ x \in B]) \\ \wedge \\ y \textit{ es conjunto} \end{bmatrix}$$

TEOREMAS

1. $x \in A \cap B \Leftrightarrow [x \in A \ y \ x \in B]$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(1) dem: Sea $A \cap B = A \cap B$.
Al aplicar la definición
$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \ \& \ x \in B$. ∎

(2) Sea $x \in A \Leftrightarrow x \in A \ \& \ x \in A$

$\therefore \boxed{x \in A \Leftrightarrow x \in A \cap A}$

$\boxed{p \Rightarrow p \wedge p}$

$p \wedge q \Rightarrow p$

Por axioma de extensión
$A = A \cap A$ ∎

TEOREMAS

1. $x \in A \cap B \Leftrightarrow [x \in A \ y \ x \in B]$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(3) dem: Supóngase que $x \in A \cap \phi$.
$\Rightarrow x \in A \ \& \ x \in \phi \Rightarrow x \in \phi$ $(\rightarrow\!\leftarrow)$
$\Rightarrow x \notin A \cap \phi, \forall x. \Rightarrow A \cap \phi = \phi$ ∎

A3: DE LA UNIÓN

$$\exists C \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B])$$

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE LA UNIÓN

$$\exists! C, \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B])$$

Existencia: Asegura Axioma de la Unión.

Unicidad: Asegura Axioma de Extensión.

DEFINICIÓN

$$A \cup B = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \forall x (x \in y \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B]) \\ \wedge \\ y \text{ es conjunto} \end{bmatrix}$$

TEOREMAS

1. $x \in A \cup B \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B]$
2. $A \cup A = A$
3. $A \cup \emptyset = A$
4. $A \cup B = B \cup A$
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

dem:

(1) Sabemos que $A \cup B = A \cup B$.
De la definición,
$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$. ∎

(2) dem: Sea $x \in A \Leftrightarrow \boxed{x \in A \vee x \in A}$
$\Rightarrow x \in A \Leftrightarrow x \in A \cup A$
Por Ax. de Extensión, $A = A \cup A$ ∎

(3) dem: Sea $\boxed{x \in A} \Leftrightarrow \boxed{x \in A} \vee x \in \phi \Leftrightarrow x \in A \cup \phi$
Por Ax. de Extensión, $A = A \cup \phi$. ∎

A. Vacío
A. Ext
EAS
A. Unión

Unicidad cuando hay igualdad.

Existencia

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE LA DIFERENCIA DE CONJUNTOS

$$\exists! C, \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \text{ y } x \notin B])$$

Existencia: $\Phi(x): x \notin B$
EAS

Unicidad: A. Ext.

$A \sim B$ ó $A - B$

considera ϕ

DEFINICIÓN

$$A \sim B = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \forall x (x \in y \Longrightarrow [x \in A \ y \ x \notin B]) \\ \wedge \\ y \text{ es conjunto} \end{bmatrix}$$

TEOREMAS

1. $x \in A \sim B \Leftrightarrow [x \in A \ y \ x \notin B]$
2. $A \sim A = \emptyset$

① dem: Sabemos que $A \sim B = A \sim B$. Por definición

$x \in A \sim B \Leftrightarrow x \in A$ & $x \notin B$ ∎

② dem: Sea $x \in A \sim A \Leftrightarrow$

$x \in A$ & $x \notin A$ ($\times$).

$\forall x, x \notin A \sim A \Rightarrow A \sim A = \phi$ ∎

3. Sesión 4

A4: (De parejas) $\exists A \forall z \ni (z \in A \iff [z = x \vee z = y])$.

Teorema 11. *(Construcción de conjuntos con dos elementos)* $\exists! A \forall z \ni (z \in A \iff [z = x \vee z = y])$.

Definición 8. $w = \{x, y\} \iff [\forall z (z \in w \iff [z = x \vee z = y])]$

Teorema 12. *(Varios)*

1. $z \in \{x, y\} \iff [z = x \vee z = y]$.

2. $\{x, y\} = \{u, v\} \implies [(x = u \wedge y = v) \vee (x = v \wedge y = u)]$.

Teorema 13.

$$\{x\} = \{x, x\}$$

$$\{x, y, z\} = \{x, y\} \cup \{z\}$$

$$\{w, x, y, z\} = \{w, x\} \cup \{y, z\}$$

Teorema 14. $\{x\} = \{y\} \implies x = y$.

Definición 9. *(Pareja ordenada)*

1. $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

2. *Si* $\Delta \neq \Box \implies (x, y) = \{\{x, \Delta\}, \{y, \Box\}\}$

Teorema 15. $(x, y) = (u, v) \implies [x = u \wedge y = v]$

Si $A = B$ y $[x \in A = B \iff x \in B]$

Condición $\Longrightarrow A = B$

$\boxed{A_0: \text{ Existe vacío}}$

$A1$: EAS

$A2$: Extensión

$A3$: Unión

construyen conjuntos.

ÚNICA

¿Qué conjunto existe?

VACÍO

AXIOMAS DE ZERMELO-FRAENKL

Parejas

2 "objetos"

Pares ordenados

A4: DE PAREJAS

$$\exists A \forall z \ni (z \in A \Leftrightarrow [z = x \text{ ó } z = y])$$

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE CONJUNTOS CON DOS ELEMENTOS

$$\exists! A \forall z \ni (z \in A \Leftrightarrow [z = x \text{ ó } z = y])$$

Existencia $\rightarrow$ Axioma de parejas.

Unicidad $\rightarrow$ Axioma de Extensión

DEFINICIÓN

$$w = \{x, y\} \Leftrightarrow [\forall z (z \in w \Leftrightarrow [z = x \text{ ó } z = y])\ ]$$

TEOREMAS

1. $z \in \{x, y\} \Leftrightarrow [z = x \text{ ó } z = y]$

dem: Sea $\{x,y\} = \{x,y\}$

Entonces por definición.

$\forall z \in \{x,y\} \Leftrightarrow [z = x \text{ ó } z = y]$. ■

2. $\{x, y\} = \{u, v\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = u & \wedge & y = v \\ & \text{ó} & \\ x = v & \wedge & y = u \end{bmatrix}$

dem: Sea $\{x,y\} = \{u,v\}$. Sabemos que $u \in \{u,v\} \Rightarrow u \in \{x,y\} \Rightarrow$

- $u = x$ ó $u = y$. De igual manera:
- $v = x$ ó $v = y$
- $x = u$ ó $x = v$
- $y = u$ ó $y = v$

$z \in \{u,v\} \Leftrightarrow$

$z = u$ ó $z = v$

CASO 1: Si $x=y \Rightarrow u=x=y=v \Rightarrow \begin{bmatrix} x=u & \wedge & y=v \\ & \text{ó} & \\ x=v & \wedge & y=u \end{bmatrix}$

CASO 2: Si $x \neq y \Rightarrow x=u$ ó $y=u$.

- Si $x \neq u \Rightarrow y=u$ & $x=v$ ó
- Si $y \neq u \Rightarrow x=u$ & $y=v$

$\therefore$ Se cumple $\begin{bmatrix} x=u & \wedge & y=v \\ & \text{ó} & \\ x=v & \wedge & y=u \end{bmatrix}$

Unitarios

singleton!!

DEFINICIÓN: Ax. Parejas

$\{x\} = \{x,x\}$ ← Ax. Extensión

$\{x,y,z\} = \{x,y\} \cup \{z\}$ ← Ax. Unión

$\{w,x,y,z\} = \{w,x\} \cup \{y,z\}$ ← Ax. Unión

TEOREMA

$\{x\} = \{y\} \Rightarrow x = y$

Dem: Sea $\{x\} = \{y\} \Rightarrow \{x,x\} = \{y,y\}$. Por teorema anterior; $\left\{ \begin{array}{l} x=y \text{ \& } x=y \Rightarrow x=y \\ \quad\quad \text{ó} \\ y=x \text{ \& } y=x \end{array} \right.$

DEFINICIÓN: PAREJA ORDENADA

$(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$

También, si $\Delta \neq \boxdot \Rightarrow (x,y) = \{\{x,\Delta\},\{y,\boxdot\}\}$

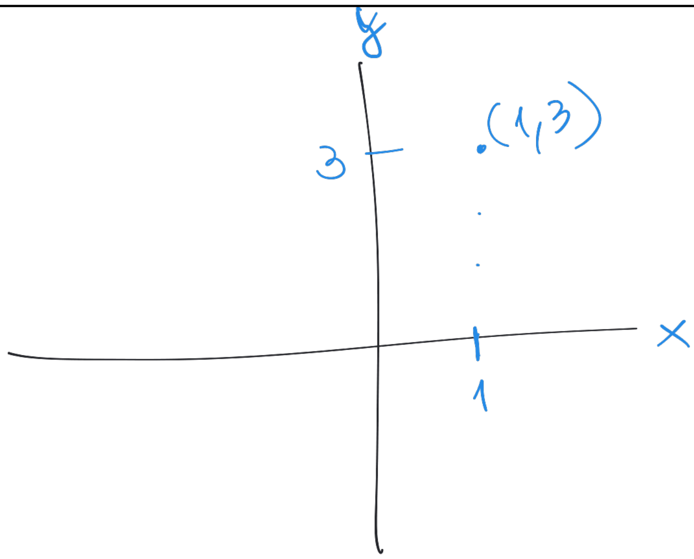
TEOREMA

$(x,y) = (u,v) \Rightarrow [x = u \ \wedge \ y = v]$

Leer pág. 23

Teorema 46

Ejercicio en clase 2



$(1,3)$

$(1,3) = \{\{1\},\{1,3\}\}$

4. Sesión 5

Definición 10 (Por abstracción (EAS))**.** $\{x : \Phi(x)\}$

1. *Es la notación usual de conjunto.*

2. $\Phi(x)$*: Es el operador que nos da una nueva forma de ligar variables.*

Definición 11 (Esquema de definición)**.** $y = \{x : \Phi(x)\} \iff [\forall x(x \in y \iff \Phi(x)) \wedge y \text{ es conjunto,}] \vee [y = \varnothing \wedge \neg\exists B \forall x(x \in B \iff \Phi(x))]$

NOTA. *Si x es un conjunto*

$$\{x : \Phi(x)\} = \{x : x \text{ es conjunto y } \Phi(x)\}$$

Definición 12 (Esquema teoremático)**.** $x \in \{x : \Phi(x)\} \implies \Phi(y)$.

Teorema 16. $A = \{x : x \in A\}$

Teorema 17. $\{x : x \neq x\} = \varnothing$.

Teorema 18. *(Varios)*

1. $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

2. $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

3. $A\tilde{B} = \{x \in \wedge x \notin B\}$

Teorema 19. $\{x : x = x\} = \varnothing$

NOTA.
1. *Las definiciones que no necesitan un teorema que las justifique son axiomas.*

2. $\neg\exists A \forall x, x \in A$.

> A5: Axioma de la suma. $\exists C \forall x \ni (x \in C \iff \exists B[x \in B \wedge B \in A])$.

Definición 13. $\cup A = \{x : \exists B[x \in B \wedge B \in A]\}$

Teorema 20. $x \in \cup A \iff \exists B[x \in B \wedge B \in A]$

Teorema 21. *(Varios)*

1. $\cup\varnothing = \varnothing$
2. $\cup\{\varnothing\} = \varnothing$
3. $\cup\{A\} = A$
4. $\cup\{A, B\} = A \cup B$

Definición 14. $\cap A = \{x : \forall B[B \in A \implies x \in B]\}$

Teorema 22. $x \in \cap A \iff (\forall B[B \in A \implies x \in B] \wedge \exists B(B \in A))$

Teorema 23.

1. $\cap\varnothing = \varnothing$
2. $\cap\{\varnothing\} = \varnothing$

AXIOMAS DE ZERMELO-FRAENKL

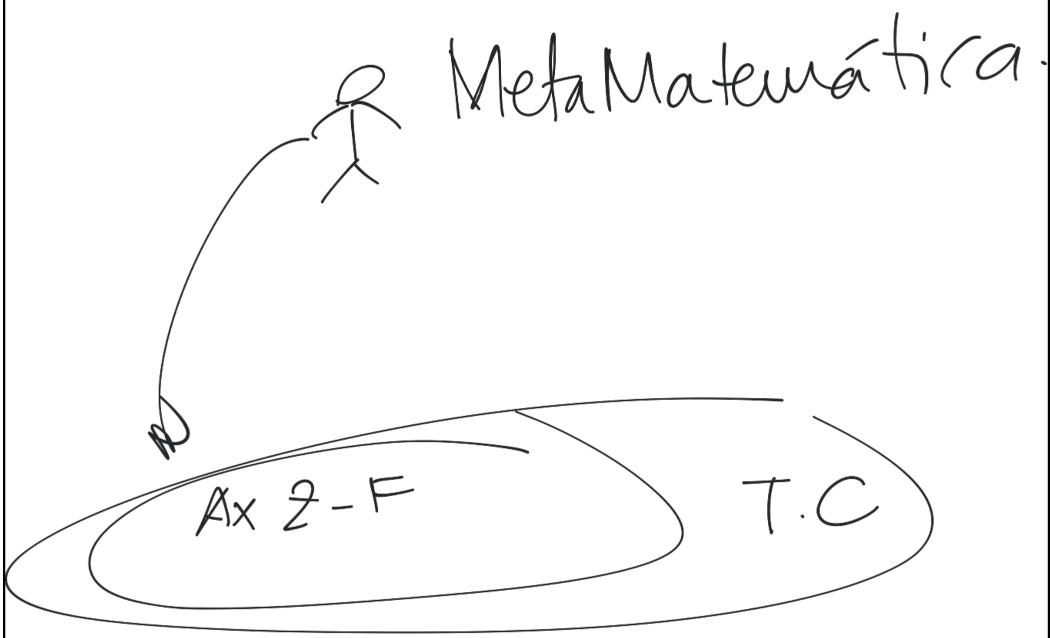
A0: $\exists \, \phi$
A1: Ax. Ext.
A2: EAS
A3: Ax. Unión.
A4: Ax. Parejas.

* Leer Cap. 1 Libro: Laberinto de conocimiento.

$\boxed{\text{EAS}}$

Definición por abstracción
$\{x : \Phi(x)\}$

- Es la notación usual de conjunto
- $\Phi(x)$: Es el operador que nos da una nueva forma de ligar variables



ESQUEMA DE DEFINICIÓN

$$y = \{x : \Phi(x)\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \forall x\big(x \in y \Leftrightarrow \Phi(x)\big) \;\wedge\; y \textit{ es conjunto} \\ \text{ó} \\ y = \emptyset \wedge \neg\exists B \forall x\big(x \in B \Leftrightarrow \Phi(x)\big) \end{array}$$

Nota: Si x es un conjunto

$$\underline{\{x : \Phi(x)\}} = \{x : x \textit{ es conjunto y } \Phi(x)\}$$

* diferentes tipos de conjuntos.

ESQUEMA TEOREMÁTICO

$$y \in \{x : \Phi(x)\} \Longrightarrow \Phi(y)$$

dem: Sea $y \in \{x : \Phi(x)\} \Rightarrow \{x : \Phi(x)\} \neq \emptyset$.
$\Rightarrow$ por esquema de def. $\Phi(y)$. ☒

TEOREMA

$$A = \{x : x \in A\}$$

dem: Sea A un conjunto y $\Phi(x) : x \in A$.
Por lógica sabemos que es verdadero
decir $(x \in A \Leftrightarrow x \in A) \Rightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow \Phi(x))$.
Por esquema de definición, $A = \{x : \Phi(x)\}$
$\Rightarrow A = \{x : x \in A\}$

∎

TEOREMA

$$\{x : x \neq x\} = \emptyset$$

dem: Supóngase que $y \in \{x : x \neq x\} \Rightarrow$
Por esquema teoremático, $y \neq y$ ($\cancel{\to}$).
$\Rightarrow y \notin \{x : x \neq x\}, \forall y \Rightarrow \{x : x \neq x\} = \phi$.

∎

TEOREMA

i. $A \cap B = \{x : x \in A \;\wedge\; x \in B\}$
ii. $A \cup B = \{x : x \in A \;\vee\; x \in B\}$
iii. $A \sim B = \{x : x \in A \;\wedge\; x \notin B\}$

} Por esquema teoremático

Nota:

1 Axioma: define objetos sin necesidad de teoremas que justifican.

2 $\boxed{\cancel{\neg\exists A, \forall x, x\in A}}$ No existe el conjunto de todos los elementos

Supóngase $\exists A \ni \forall x, x\in A \Rightarrow$ Por EAS

$\exists B\ \forall x\,(x\in B \Leftrightarrow (x\in A \wedge \Phi(x)))$.

$\forall x\,(x\in A \Leftrightarrow \Phi(x))$. $\boxed{\text{Ax Abstracción}}$

Paradoja de Russell.

TEOREMA

$$\{x : x = x\} = \emptyset$$

dem: Sea $A = \{x : x = x\} \Rightarrow \forall x,\ x = x.$

$\Rightarrow \forall x,\ x\in A \Rightarrow \exists A \ni \forall x, x\in A.\ (\rightarrow\!\leftarrow)$.

$\Rightarrow$ Por esquema de def. $\{x : x = x\} = \emptyset$.

■

NOTA

1. Las definiciones que no necesitan un teorema que las justifique son AXIOMAS

2. $\neg\exists A\ \forall x, x\in A$

A5: AXIOMA DE LA SUMA

$$\exists C \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow \exists B[x \in B \text{ y } B \in A])$$

DEFINICIÓN

$$\cup A = \{x : \exists B[x \in B \text{ y } B \in A]\}$$

TEOREMA

$$x \in \cup A \Leftrightarrow \exists B[x \in B \text{ y } B \in A]$$

TEOREMAS

1. $\cup \emptyset = \emptyset$
2. $\cup \{\emptyset\} = \emptyset$
3. $\cup \{A\} = A$
4. $\cup \{A, B\} = A \cup B$

Ej en clase 3

Sábado 24 de julio.

① $\boxed{\cup \phi = \phi.}$

dem: Sea $x \in \cup \phi$. Además, sabemos $\forall B, B \notin \phi$. Si $x \in \cup \phi \Rightarrow \exists B (x \in B \,\&\, B \in \phi) (\rightarrow\leftarrow)$

$\Rightarrow \forall x, x \notin \cup \phi \Rightarrow \cup \phi = \phi.$ ■

② $\boxed{\cup \{\phi\} = \phi.}$

dem: Sea $x \in \cup \{\phi\} \Rightarrow \exists B (x \in B \,\&\, B \in \{\phi\})$

Pero por Ax. Parejas si $B \in \{\phi\} \Rightarrow B = \phi$.

$\Rightarrow x \in B = \phi (\rightarrow\leftarrow) \Rightarrow \cup \{\phi\} = \phi.$ ■

$$A = \{1, 2, 3, \{x\}, \{y, z\}\}$$

$$\cup A = \{x, y, z\}$$

$$\cup A = \{x : \exists B\,(x \in B \ \& \ B \in A)\}$$

DEFINICIÓN:

$$\cap A = \{x : \forall B\,[B \in A \Rightarrow x \in B]\}$$

TEOREMA

$$x \in \cap A \Leftrightarrow (\boxed{\forall B[B \in A \Rightarrow x \in B]} \ y \ \exists B\,(B \in A))$$

TEOREMAS

1. $\cap \emptyset = \emptyset$

2. $\cap \{\emptyset\} = \emptyset$

dem:

① Sea $x \in \cap\phi \Rightarrow \forall B\,(B \in \phi \Rightarrow x \in B)$ & $\exists B\,(B \in \phi)$ $(\rightarrow\leftarrow)$

$\Rightarrow \forall x,\ x \notin \cap\phi \Rightarrow \cap\phi = \phi$ ∎

② Sea $x \in \cap\{\phi\} \Rightarrow \forall B\,(B \in \{\phi\} \Rightarrow x \in B)$ & $\exists B\,(B \in \{\phi\})$.

$\Rightarrow \exists B\,(B \in \{\phi\})$. Por Ax. Parejas

$\Rightarrow B = \phi$.

Por otro lado, $\forall B = \phi\,(B \in \{\phi\} \Rightarrow x \in B = \phi)$ $(\rightarrow\leftarrow)$

$\Rightarrow \forall x,\ x \notin \cap\{\phi\} \Rightarrow \cap\{\phi\} = \phi$. ∎

5. Sesión 9

Ej 2

$PPP\emptyset$

por teorema $P\emptyset = \{\emptyset\}$

$\Rightarrow PP\emptyset = P\{\emptyset\} = \{\{\emptyset\},\emptyset\}$

$\Rightarrow PPP\emptyset = P\{\{\emptyset\},\emptyset\} = \{\{\{\emptyset\},\emptyset\},\{\emptyset\},\emptyset\}$

$\wp(A)$ 2^n elementos

Sea $\wp\phi = \{\phi\}$ por teorema 89. Ahora, $\wp\wp\phi = \{\phi,\{\phi\}\}$ por teorema 90. Considérese

$\wp\wp\wp\phi = \{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$

T88

Supóngase $\exists\, B \neq \phi \ni B \in \wp\wp\wp\phi \Rightarrow$

$B \subseteq \wp\wp\phi \Rightarrow \boxed{B \subseteq \{\phi,\{\phi\}\}}$

$\forall x \in B \Rightarrow x \in \{\phi,\{\phi\}\} \Rightarrow x = \phi$ ó $x = \{\phi\}$.

$\longrightarrow B = \{\phi\}$ ó $B = \{\{\phi\}\}$ ó $B = \{\phi,\{\phi\}\}$

5. $\wp\wp 0 = \{0,\{0\}\}$

Demostración: Sea $\wp 0 = \{0\}$ por el teorema ~~anterior~~ 89 ya demostrado. Definiendo $A = \{0\}$, si $\wp A$, por el teorema ~~anterior~~ 88 demostrado $\ni 0 \in \wp A \rightarrow$ $\wp\wp 0 = \{0,\{0\}\}$. Por teo 87

Sea $B \neq \phi \in \wp\wp\phi \Rightarrow B \subseteq \wp\phi$

$\forall x \in B \Rightarrow x \in \wp\phi = \{\phi\} \Rightarrow x = \phi$

$\rightarrow B = \{\phi\} = A$

Por teorema 88, $\phi \in \wp\wp\phi$

$\Longrightarrow \wp\wp\phi = \{\phi,\{\phi\}\}$.

④ Teorema 93: $\wp(A\cap B) = (\wp A)\cap(\wp B)$

añadir implicación regreso!!

dem: Sean $\boxed{A, B, C}$ conjuntos. Por teorema 1 intersección $C \in (\wp A)\cap(\wp B) \leftrightarrow C \in (\wp A) \wedge C \in (\wp B)$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{por teorema 86} \rightarrow}$ $C \subseteq A \wedge C \subseteq B \rightarrow$

$\rightarrow$ si $x \in C \rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \rightarrow$ por def de contención $\therefore C \subseteq (A\cap B)$ $\therefore$ Por teorema 86 $\therefore C \in \wp(A\cap B) \rightarrow$

$\forall C\,(C \in (\wp A)\cap(\wp B) \longleftrightarrow C \in \wp(A\cap B)) \longrightarrow$

$\rightarrow$ Por A 1 $\wp(A\cap B) = (\wp A)\cap(\wp B)$ ∎

Ax. Extensión

Problema 1.5. *Demostrar teorema 94.* $\mathcal{P}(A\sim B)\subseteq((\mathcal{P}A)\sim(\mathcal{P}B))\cup\{\varnothing\}$.

Demostración. ~~Tenemos dos casos:~~ Sean A, B, C conjuntos $\ni C\in\mathcal{P}(A\sim B)$

1. $A\sim B$ no es vacío. $C\in\mathcal{P}(A\sim B)\iff C\subseteq(A\sim B)\iff C\subseteq A\wedge C\nsubseteq B\iff C\in\mathcal{P}A\wedge C\notin\mathcal{P}B\implies C\in[(\mathcal{P}A)\sim(\mathcal{P}B)]$.
2. $A\sim B$ es vacío. $\implies\mathcal{P}(A\sim B)=\{\varnothing\}$.

Por lo tanto, $\mathcal{P}(A\sim B)\subseteq((\mathcal{P}A)\sim(\mathcal{P}B))\cup\{\varnothing\}$. ■

CASO 1: $A\sim B=\phi \rightarrow C\in\mathcal{P}(\phi)=\{\phi\}\ni C=\phi$

$\mathcal{P}(A\sim B)\subseteq\{\phi\}$

ó

CASO 2: $A\sim B\neq\phi\Rightarrow C\subseteq A\sim B\Rightarrow\forall x$

$x\in C\Rightarrow[x\in A\sim B]\Rightarrow x\in A\wedge x\notin B.\Rightarrow x\in A$

$\boxed{\forall x\in C\Rightarrow x\in A}\wedge\boxed{\forall x\in C\Rightarrow x\notin B}$

$C\subseteq A\wedge C\nsubseteq B\rightarrow C\in\mathcal{P}A\wedge C\notin\mathcal{P}(B)$

$C\in[\mathcal{P}A\sim\mathcal{P}B]$

$\therefore\mathcal{P}(A\sim B)\subseteq\mathcal{P}(A)\sim\mathcal{P}(B)$

---

eorema 96. $x\in(A\times B)\Leftrightarrow(\exists y)(\exists z):\begin{cases}y\in A\\ z\in B\\ x=(y,z)\end{cases}$

Sean A, B conjuntos.

Demostración. Supongamos que $x\in(A\times B)$

por por esquema teoremático y definición $\begin{cases}y\in A\\ z\in B\\ x=(y,z)\end{cases}$

Supongamos que $(\exists x)(\exists z):\begin{cases}y\in A\\ z\in B\\ x=(y,z)\end{cases}$ por definición $x\in(A\times B)$

teorema 97. $(x,y)\in A\times B\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B$

Demostración.

Parte 2

1) Teorema 96. $x\in A\times B\leftrightarrow\exists y,z\ni(y\in A\ \&\ z\in B\ \&\ x=\langle y,z\rangle)$

Sabemos $A\times B=A\times B\ni A\neq B\rightarrow x\in A\times B=x\in A\times B$

Decimos $C=A\times B$, entonces por teorema 95,

$\exists(A\times B)\ \forall x\ni[x\in(A\times B)\leftrightarrow(\exists y,z)(y\in A\ \&\ z\in B\ \&\ x=\langle y,z\rangle)$

$\Rightarrow$ Dado $x\in(A\times B)\leftrightarrow x\in A\times B)$

$\therefore x\in(A\times B)\leftrightarrow(\exists y,z)(y\in A\ \&\ z\in B\ \&\ x=\langle y,z\rangle)$ ■

1(x) Demostrar teorema 97.

Sea A, B conjuntos.

Dado $(x,y) \in A\times B$

$\Rightarrow x \in A$ & $y \in B$

Sea $x \in A$ & $y \in B$

por teorema 96 ¿cómo?

$(x,y) \in A \times B$

Sea $(x,y) \in A\times B$ por T96 $\exists\, a,b \ni$

$a\in A$ & $b \in B$ & $(x,y)=(a,b)$

$\Leftrightarrow x=a$ & $y=b$

$\Leftrightarrow x\in A$ & $y \in B$

$\Leftrightarrow \exists\, x\in A$ & $x \in B$.

TEOREMA 101

$B \subseteq C \rightarrow A\times B \subseteq A \times C$

conjunto!!

Sean A, B y C, donde $B\subseteq C$ y $y \in A$. Por definición de contención $\forall x\,(x\in B \rightarrow x \in C) \rightarrow (y,x_1)\in A\times B \wedge (y,x_2) \in A\times C$ por definición de producto cartesiano y teorema 97. $A=A \rightarrow y=y$. Y como $B\subseteq C \rightarrow$ $\forall x_1 \exists x_2 \mid x_1 = x_2$. $\rightarrow \forall (y,x_1) \exists (y,x_2) \mid (y,x_1)=(y,x_2)$. $\therefore$ Por definición de contención $A\times B \subseteq A\times C$ ■

Sea $(a,b)\in A\times B \Rightarrow a\in A$ & $b\in B$

$\Rightarrow a \in A$ & $b\in C \Rightarrow (a,b)\in A\times C$.

$\exists\, a\in A$ & $b\in C$.

Ejercicio 4. Dar un contra-ejemplo simple para mostrar que, en general, no es el caso que $A\cup(B\times C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

Demostración. Sean $A=\{x\}, B=\{y\}, C=\{z\} \implies A\cup(B\times C) = A\cup\{\langle y,z\rangle\} = \{x, \langle y,z\rangle\}$. Por otro lado, $(A\times B)\cup(A\times C) = \{\langle x,y\rangle\}\cup\{\langle x,z\rangle\} = \{\langle x,y\rangle, \langle x,z\rangle\} \therefore A\cup(B\times C) \neq (A\times B)\cup(A\times C)$ ■

$A=B=C=\{x\}$

$A\cup(B\times C) = \{x, (x,x)\}$

$(A\times B)\cup(A\times C) = \{(x,x)\}$

6. Sesión 11

¿Y AHORA?

AXIOMAS DE VON NEWMAN

A0. Existe un conjunto tal que $\forall x, x \notin A$

A1. Si $x = y$ y además $x \in A$ entonces $y \in A$

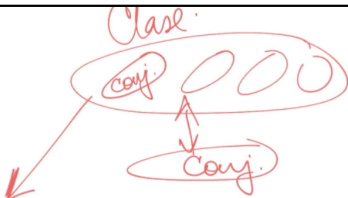
A2. Sea P(x) un enunciado de x que puede expresarse enteramente por los símbolos $\in$, $\wedge$, $\not\forall$, $\sim$, $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ corchetes y variables x, y, z, A, B, C,…. Entonces existe una Clase C que consiste en todos los elementos x que satisfacen P(x).

A3. Cada subclase de un conjunto es un conjunto

A4. Si A y B son conjuntos entonces {A, B} es un conjunto

A5. Si $\mathcal{A}$ es un conjunto de conjuntos, entonces $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ es un conjunto

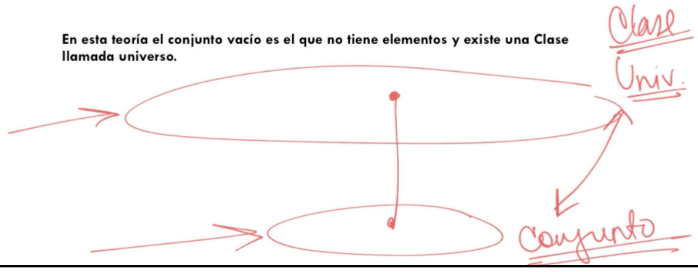
A6. Si A es un conjunto, el conjunto potencia es conjunto.



NOTA IMPORTANTE

Una Clase denota una colección excesivamente grande. Todo conjunto es una clase pero no toda clase es un conjunto.

En esta teoría el conjunto vacío es el que no tiene elementos y existe una Clase llamada universo.



Sea G una gráfica.

- El dominio de G es el conjunto

$$domG = \{x \mid \exists y \;\; tal\ que \;\; (x,y) \in G\}$$

- El Rango de G es el conjunto

$$ranG = \{y \mid \exists x \;\; tal\ que \;\; (x,y) \in G\}$$

1. Sean G, H, J gráficas, entonces
   a. $(G^{-1})^{-1} = G$
   b. $(G \circ H)^{-1} = H^{-1} \circ G^{-1}$

a. $(x,y) \in (G^{-1})^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y,x) \in G^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x,y) \in G$

$(x,y) \in (G^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in G$

$\therefore (G^{-1})^{-1} = G$

2. Sean G, H gráficas, entonces
   a. $domG = ranG^{-1}$
   b. $dom(G \circ H) \subseteq domH$

1. Sean G, H, J gráficas, entonces
   a. $(G^{-1})^{-1} = G$
   b. $(G \circ H)^{-1} = H^{-1} \circ G^{-1}$

b. $(x,y) \in (G \circ H)^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y,x) \in (G \circ H) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists z \ni (y,z) \in H$ & $(z,x) \in G \Leftrightarrow \exists z \ni (z,y) \in H^{-1}$ & $(x,z) \in G^{-1} \Leftrightarrow \exists z \ni (x,z) \in G^{-1}$ & $(z,y) \in H^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in H^{-1} \circ G^{-1}$.

2. Sean G, H gráficas, entonces
   a. $domG = ranG^{-1}$
   b. $dom(G \circ H) \subseteq domH$

2. Sean G, H gráficas, entonces
   a. $domG = ranG^{-1}$
   b. $dom(G \circ H) \subseteq domH$

a. $x \in domG \Leftrightarrow \exists y \ni (x,y) \in G \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists y \ni (y,x) \in G^{-1} \Leftrightarrow x \in Ran\, G^{-1}$

$\therefore x \in domG \Leftrightarrow x \in ranG^{-1}$

$domG = ranG^{-1}$

2. Sean G, H gráficas, entonces

a. $domG = ranG^{-1}$

b. $dom(G \circ H) \subseteq domH$

b. $x \in dom(G \circ H) \Rightarrow \exists y \ni (x,y) \in G \circ H$

$\Rightarrow \exists y, z \ni (x,z) \in H$ & $(z,y) \in G. \Rightarrow$

$\exists z \ni (x,z) \in H \Rightarrow x \in dom H$

$\therefore x \in dom(G \circ H) \Rightarrow x \in dom H$

$dom G \circ H \subseteq dom H$

7. Sesión 12

Axioma de Regularidad

$$A \neq \phi \Rightarrow \exists x \left(x\in A \ \& \ \forall y (y\in x \Rightarrow y\notin A)\right)$$

Nota: Si $\forall x, x\in A$ & x es conjunto

$$A\neq\phi \Rightarrow \exists x \left(x\in A \ \& \ x\cap A=\phi \right)$$

Teorema 105: $A\notin A$

dem: Sea A un conjunto $\ni$ $A\in A$ (Supóngase por contradicción) ($A\neq\phi$). Sabemos que $A\in\{A\}$ (Por Ax. de Parejas) $\Rightarrow A\in A\cap\{A\}$.

Por otro lado, si $x\in\{A\} \Rightarrow x=A$ (Por ax. de Parejas) $\Rightarrow \forall x\in\{A\}$, x es conjunto.

Por ax. de Regularidad $\exists x\in\{A\} \ni x\cap\{A\}=\phi$

$\Rightarrow \phi = x\cap\{A\} = A\cap\{A\} \Rightarrow A\cap\{A\}=\phi$

$\Rightarrow A\in\phi$ $(\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore A\notin A$. ∎

Teorema 106: $\neg(A\in B \ \& \ B\in A)$

dem: Sean A,B conjuntos. Por contradicción supóngase que $A\in B$ & $B\in A$. Por ax. de parejas, $A\in\{A,B\}$ & $B\in\{A,B\}$ $\Rightarrow$ $A\in B\cap\{A,B\}$. $B\in A\cap\{A,B\}$

$\{A,B\}\neq\phi$

Si $x\in\{A,B\} \Rightarrow x=A$ ó $x=B$ (por ax. Parejas)

$\Rightarrow x$ es conjunto $\forall x\in\{A,B\}$.

Por ax. de Regularidad $\exists x\in\{A,B\} \ni$ $x\cap\{A,B\}=\phi$.

- Si $x=A \Rightarrow A\cap\{A,B\}=\phi \Rightarrow B\in\phi$ $(\rightarrow\leftarrow)$
- Si $x=B \Rightarrow B\cap\{A,B\}=\phi \Rightarrow A\in\phi$ $(\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore \neg(A\in B \ \& \ B\in A)$ ∎

Teorema 107: $A\subseteq A\times A \Rightarrow A=\phi$

dem: Sea A un conjunto $\ni A\subseteq A\times A$ y $A\neq\phi$.

Sea $z\in A \Rightarrow z\in A\times A$ $\exists$ $x,y\in A \ni z=(x,y)$

Pero $(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$.

Considérese $A\cup\bigcup A$. Si $c\in A\cup\bigcup A \Rightarrow c\in A$ ó $c\in\bigcup A$.

CASO 1: Si $c\in A \Rightarrow c\in A\times A \Rightarrow c$ es un conjunto no vacío. Por otro lado si $c\in A$ $\Rightarrow c\subseteq\bigcup A \Rightarrow c\cap\bigcup A\neq\phi$.

CASO 2: Si $c\in\bigcup A \Rightarrow \exists B(c\in B \ \& \ B\in A)$. Nótese que si $B\in A \Rightarrow \exists x,y\in A \ni B=\{\{x\},\{x,y\}\}$. Pero $c\in B=\{\{x\},\{x,y\}\} \Rightarrow c=\{x\}$ ó $c=\{x,y\}$

$\Rightarrow c$ es conjunto no vacío y como $x,y\in A\neq\phi$

$\Rightarrow c\cap A\neq\phi$

$\Rightarrow (c\cap\bigcup A)\cup(c\cap A)\neq\phi$

$\Rightarrow c\cap(\bigcup A\cup A)\neq\phi \Rightarrow c\cap(A\cup\bigcup A)\neq\phi, \forall c$.

Pero $\forall c$, c es conjunto si $c\in A\cup\bigcup A$. Por ax. de Regularidad $\exists c\in A\cup\bigcup A \ni$ $c\cap A\cup\bigcup A=\phi$ $(\rightarrow\leftarrow)$

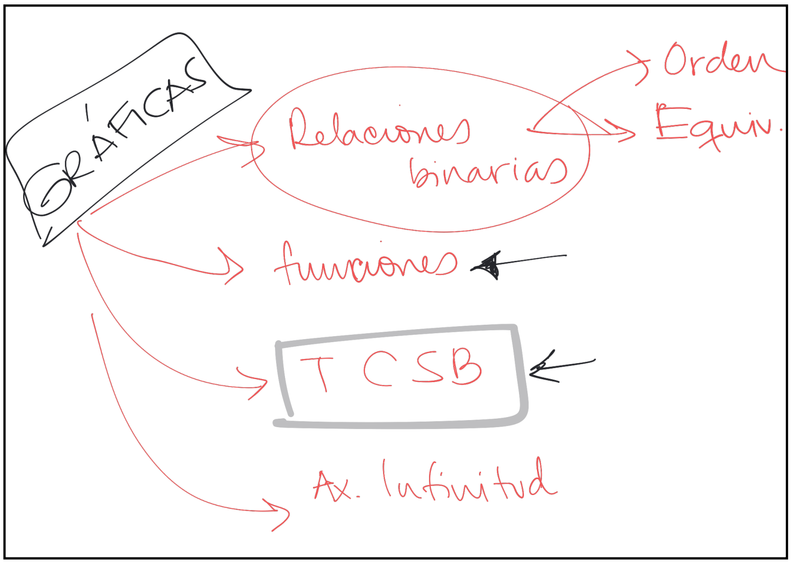
$\therefore A=\phi$. ∎

A Z-F

- A0 ϕ exist
- A1 Ax. Ext.
- A2 EAS
- A3 Ax. Unión
- A4 Ax Parejas
- A5 Ax. Potencia
- A6 Ax Regularidad
- A7 Ax. Suma

8

- Ax. Reemplazo
- Ax. Infinitud
- Ax. Elección


GRÁFICAS
Relaciones binarias
Orden
Equiv.
funciones
TCSB
Ax. Infinitud