Universidad del Valle de Guatemala

MM2033- 2 semestre - 2021

Licenciatura en matemática aplicada

TEORÍA DE CONJUNTOS

Catedrático: Nancy Zurita

Estudiante: Rudik Roberto Rompich Cotzojay
Carné: 19857
Correo: rom19857@uvg.edu.gt

5 de agosto de 2021

Índice

1. Sesión 2

1.1. Axiomática

A0: (Axioma de vacío) Existe vacío. Notación: $\varnothing$.

A1: (Axioma de extensión) $\forall x(x \in A \iff x \in B) \implies A = B$.

A2: (Esquema axiomático de separación) $\exists B\ \forall x \ni (x \in B \iff [x \in A \wedge \Phi(x)])$.

Definición 1. *(Conjunto) y es conjunto* $\iff (\exists x(x \in y)) \vee (y = \varnothing)$.

Definición 2. *(No pertenencia)* $x \notin y \iff \neg(x \in y)$.

Teorema 1. $\forall x, x \notin \varnothing$.

Teorema 2. $\forall x, x \notin A \iff A = \varnothing$.

Definición 3. *(Contención)* $A \subseteq B \iff \forall x(x \in A \implies x \in B)$.

Definición 4. *(Contención estricta)* $A \subset B \iff (A \subseteq B \wedge A \neq B)$.

Teorema 3. $A \subseteq \varnothing \implies A = \varnothing$.

Teorema 4. $\neg(A \subset A)$.

A0: AXIOMA DE VACÍO

Existe vacío.

Notación: $\emptyset$

A1: AXIOMA DE EXTENSIÓN

$$\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Longrightarrow A = B$$

A2: ESQUEMA AXIOMÁTICO DE SEPARACIÓN

$$\exists B \forall x \ni (x \in B \Leftrightarrow [x \in A \text{ y } \Phi(x)])$$

Construye conjunto.

DEFINICIÓN DE CONJUNTO

$$y \text{ es conjunto } \Leftrightarrow (\exists x(x \in y) \text{ ó } (y = \emptyset)$$

vacío es conjunto

DEFINICIÓN DE NO PERTENENCIA

$$x \notin y \Leftrightarrow \neg(x \in y)$$

TEOREMAS

$\Phi(x): x \neq x$

1. $\forall x, x \notin \emptyset$

dem: Sea $\Phi(x)$ la expresión $x \neq x$. Por esquema axiomático de separación, $\exists B \forall x \ni (x \in \Phi \;\&\; x \neq x)$. Supóngase $\exists x \in B \Rightarrow x \neq x$ $(\leftarrow\!\!\!\!\times)$ $\Rightarrow \forall x, x \notin B$. Por definición de conjunto $B = \Phi \Rightarrow \forall x, x \notin \Phi$. ■

A2: ESQUEMA AXIOMÁTICO DE SEPARACIÓN

$$\exists B \forall x \ni (x \in B \Leftrightarrow [x \in A \text{ y } \Phi(x)])$$

conjunto !!

2. $\forall x, x \notin A \Leftrightarrow A = \emptyset$

vacío es único como conjunto

dem:

$(\Rightarrow)$ Si $\forall x, x \notin A \Rightarrow$ Por definición de conjunto, $A = \Phi$.

$(\Leftarrow)$ Si $A = \Phi \Rightarrow$ Por teorema anterior $\forall x, x \notin \Phi = A \Rightarrow \forall x, x \notin A$.

■

$(p \Rightarrow q) \equiv (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

p	⇒	q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

* DEFINICIÓN DE CONTENCIÓN

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

** DEFINICIÓN DE CONTENCIÓN ESTRICTA

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ y } A \neq B)$$

TEOREMAS

1. $A \subseteq \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$

dem: Sea A un conjunto $\ni A \subseteq \Phi$. Se asume que $\Rightarrow \forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in \Phi)$. la implicación es verdadera, también lo es su contrapuesta. Es decir, $\forall x\,(x \notin \Phi \Rightarrow x \notin A)$.
Como $\forall x$, $x \notin \Phi$ es siempre verdadero $\Rightarrow$
$\forall x$, $x \notin A$ es verdadero $\Rightarrow A = \Phi$ ■

2. $\neg(A \subset A)$

dem: Sea A un conjunto. Supóngase que $A \subset A \Rightarrow A \subseteq A$ & $A \neq A$. $\Rightarrow$ $A \neq A$.
Además, $A \subseteq A \Rightarrow A \subseteq A$ & $A \subseteq A \Rightarrow$
$\forall x\,[x \in A \Rightarrow x \in A]$ & $\forall x\,[x \in A \Rightarrow x \in A]$
$\Rightarrow \forall x\,[x \in A \Leftrightarrow x \in A] \Rightarrow A = A$ por
Axioma de Extensión. $(\rightarrow\!\leftarrow)$.

$\therefore \neg(A \subset A)$. ■

2. Sesión 3

Teorema 5. *(Construcción de la interesección)* $\exists! C, \forall x \ni (x \in C \iff x \in A \wedge x \in B)$.

Definición 5. $A \cap B = y \iff [\forall x(x \in y \iff [x \in A \wedge x \in B]) \wedge y \text{ es conjunto.}]$

Teorema 6. *(Varios)*

1. $x \in A \cap B \Leftrightarrow [x \in A \text{ y } x \in B]$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

A3: (De la unión) $\exists C \forall x \ni (x \in C \iff [x \in \vee x \in B])$.

Teorema 7. *(Construcción de la unión)* $\exists! C, \forall x \ni (x \in C \iff [x \in A \vee x \in B])$

Definición 6. $A \cup B = y \iff [\forall x(x \in y \iff [x \in A \vee x \in B]) \wedge y \text{ es conjunto.}]$

Teorema 8. *(Varios)*

1. $x \in A \cup B \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B]$
2. $A \cup A = A$
3. $A \cup \emptyset = A$
4. $A \cup B = B \cup A$
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

A0 A. Vacío
A1 A. Extensión (Unicidad - Cuando hay igualdad)
A2 Existencia.
A3 Existencia.

Teorema 9. *(Construcción de la diferencia de conjuntos)* $\exists! C, \forall x \ni (x \in C \iff [x \in \wedge x \notin B])$.

Definición 7. *Sea*

$$A \sim B = y \iff [\forall x (x \in y \iff [x \in A \wedge x \notin B]) \wedge y \text{ es conjunto.}]$$

Teorema 10. *(Varios)*

1. $x \in A \sim B \iff [x \in A \wedge x \notin B]$.

2. $A \sim A = \varnothing$.

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE LA INTERSECCIÓN

$\exists! C, \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \ y \ x \in B])$

Existencia Sea $\Phi(x): x \in B$. Por EAS

$\exists C \ \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ \underbrace{\Phi(x)}_{x \in B}))$

$\therefore \exists C \ \forall x \ni \boxed{[x \in C \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ x \in B)]}$

Unicidad Supóngase $\exists C' \ \forall x \ni \boxed{[x \in C' \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ x \in B)]}$

Si $x \in C' \Leftrightarrow x \in A \ \& \ x \in B \Leftrightarrow x \in C$

$\therefore \boxed{x \in C' \Leftrightarrow x \in C}$. Por Axioma de Extensión

Si $\forall x \in C' \Leftrightarrow x \in C \Rightarrow \boxed{C' = C}$

$\therefore$ C es único

$$\boxed{\exists! C \ \forall x \ (x \in C \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ x \in B))}$$

DEFINICIÓN

$$A \cap B = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \forall x(x \in y \Leftrightarrow [x \in A \ y \ x \in B]) \\ \wedge \\ y \text{ es conjunto} \end{bmatrix}$$

TEOREMAS

1. $x \in A \cap B \Leftrightarrow [x \in A \ y \ x \in B]$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(1) dem: Sea $A \cap B = A \cap B$. Al aplicar la definición $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \ \& \ x \in B$. ∎

(2) Sea $x \in A \Leftrightarrow x \in A \ \& \ x \in A$

$\therefore \boxed{x \in A \Leftrightarrow x \in A \cap A}$

$\boxed{P \Rightarrow P \wedge P}$

$P \wedge q \Rightarrow P$

Por axioma de extensión $A = A \cap A$ ∎

TEOREMAS

1. $x \in A \cap B \Leftrightarrow [x \in A \ y \ x \in B]$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(3) dem: Supóngase que $x \in A \cap \phi$.

$\Rightarrow x \in A \ \& \ x \in \phi \Rightarrow x \in \phi$ (⨯)

$\Rightarrow x \notin A \cap \phi, \ \forall x. \Rightarrow A \cap \phi = \phi$ ∎

A3: DE LA UNIÓN

$$\exists C \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B])$$

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE LA UNIÓN

$$\exists!\, C, \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B])$$

Existencia: Asegura Axioma de la Union.

Unicidad: Asegura Axioma de Extensión.

DEFINICIÓN

$$A \cup B = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \forall x (x \in y \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B]) \\ \wedge \\ y \text{ es conjunto} \end{bmatrix}$$

TEOREMAS

1. $x \in A \cup B \Leftrightarrow [x \in A \text{ ó } x \in B]$
2. $A \cup A = A$
3. $A \cup \emptyset = A$
4. $A \cup B = B \cup A$
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(1) dem: Sabemos que $A \cup B = A \cup B$. De la definición, $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$. ■

(2) dem: Sea $x \in A \Leftrightarrow \boxed{x \in A \vee x \in A}$

$\Rightarrow \quad x \in A \Leftrightarrow x \in A \cup A$

Por Ax. de Extensión, $A = A \cup A$ ■

(3) dem: Sea $x \in A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in \emptyset \Leftrightarrow x \in A \cup \emptyset$

Por Ax. de Extensión, $A = A \cup \emptyset$. ■

A. Vacío

A. Ext

EAS

A. Unión

Unicidad cuando hay igualdad.

Existencia

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE LA DIFERENCIA DE CONJUNTOS

$$\exists!\, C, \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow [x \in A \text{ y } x \notin B])$$

Existencia: $\Phi(x): x \notin B$
EAS

Unicidad: A. Ext.

$A \sim B$ ó $A - B$

considera ϕ

DEFINICIÓN

$$A \sim B = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \forall x (x \in y \Longrightarrow [x \in A \; y \; x \notin B]) \\ \wedge \\ y \text{ es conjunto} \end{bmatrix}$$

TEOREMAS

1. $x \in A \sim B \Leftrightarrow [x \in A \;\; y \;\; x \notin B]$
2. $A \sim A = \emptyset$

① dem: Sabemos que $A \sim B = A \sim B$. Por definición

$x \in A \sim B \Leftrightarrow x \in A$ y $x \notin B$ ∎

② dem: Sea $x \in A \sim A \Leftrightarrow$

$x \in A$ y $x \notin A$ $(\rightarrow\leftarrow)$.

$\forall x, x \notin A \sim A \Rightarrow A \sim A = \phi$ ∎

3. Sesión 4

A4: (De parejas) $\exists A \forall z \ni (z \in A \iff [z = x \lor z = y])$.

Teorema 11. *(Construcción de conjuntos con dos elementos)* $\exists! A \forall z \ni (z \in A \iff [z = x \lor z = y])$.

Definición 8. $w = \{x, y\} \iff [\forall z (z \in w \iff [z = x \lor z = y])]$

Teorema 12. *(Varios)*

1. $z \in \{x, y\} \iff [z = x \lor z = y]$.

2. $\{x, y\} = \{u, v\} \implies [(x = u \land y = v) \lor (x = v \land y = u)]$.

Teorema 13.

$$\{x\} = \{x, x\}$$

$$\{x, y, z\} = \{x, y\} \cup \{z\}$$

$$\{w, x, y, z\} = \{w, x\} \cup \{y, z\}$$

Teorema 14. $\{x\} = \{y\} \implies x = y$.

Definición 9. *(Pareja ordenada)*

1. $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

2. *Si* $\Delta \neq \Box \implies (x, y) = \{\{x, \Delta\}, \{y, \Box\}\}$

Teorema 15. $(x, y) = (u, v) \implies [x = u \land y = v]$

Si $A=B$ y $[x \in A = B \Leftrightarrow x \in B]$

Condición $\longrightarrow$ $A=B$

A0: Existe vacío

A1: EAS.

A2: Extensión

A3: Unión.

construyen conjuntos.

ÚNICA

¿Qué conjunto existe?

VACÍO

AXIOMAS DE ZERMELO-FRAENKL

Parejas

2 "objetos"

Pares ordenados

A4: DE PAREJAS

$$\exists A \forall z \ni (z \in A \Leftrightarrow [z = x \text{ ó } z = y])$$

TEOREMA CONSTRUCCIÓN DE CONJUNTOS CON DOS ELEMENTOS

$$\exists! A \forall z \ni (z \in A \Leftrightarrow [z = x \text{ ó } z = y])$$

Existencia → Axioma de parejas.

Unicidad → Axioma de Extensión

DEFINICIÓN

$$w = \{x, y\} \Leftrightarrow [\forall z (z \in w \Leftrightarrow [z = x \text{ ó } z = y])]$$

TEOREMAS

1. $z \in \{x, y\} \Leftrightarrow [z = x \text{ ó } z = y]$

dem: Sea $\{x,y\} = \{x,y\}$
Entonces por definición.
$\forall z \in \{x,y\} \Leftrightarrow [z = x \text{ ó } z = y]$. ∎

2. $\{x, y\} = \{u, v\} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x = u & \wedge & y = v \\ & \text{ó} & \\ x = v & \wedge & y = u \end{bmatrix}$

dem: Sea $\{x,y\} = \{u,v\}$. Sabemos que $u \in \{u,v\} \Rightarrow u \in \{x,y\} \Rightarrow$

- $u = x$ ó $u = y$. De igual manera:
- $v = x$ ó $v = y$
- $x = u$ ó $x = v$
- $y = u$ ó $y = v$

$z \in \{u,v\} \Leftrightarrow$
$z = u$ ó $z = v$

CASO 1: Si $x=y \Rightarrow u=x=y=v \Rightarrow \begin{bmatrix} x=u & \wedge & y=v \\ & \text{ó} & \\ x=v & \wedge & y=u \end{bmatrix}$

CASO 2: Si $x \neq y \Rightarrow x=u$ ó $y=u$.

- Si $x \neq u \Rightarrow y=u$ & $x=v$ ó
- Si $y \neq u \Rightarrow x=u$ & $y=v$

$\therefore$ Se cumple $\begin{bmatrix} x=u & \wedge & y=v \\ & \text{ó} & \\ x=v & \wedge & y=u \end{bmatrix}$ ∎

DEFINICIÓN: Ax. Parejas

Unitarios singleton!!

$\{x\} = \{x,x\} \leftarrow$ Ax. Extensión

$\{x,y,z\} = \{x,y\} \cup \{z\} \leftarrow$ Ax. Unión

$\{w,x,y,z\} = \{w,x\} \cup \{y,z\} \leftarrow$ Ax. Unión

TEOREMA

$$\{x\} = \{y\} \Rightarrow x = y$$

Dem: Sea $\{x\}=\{y\} \Rightarrow \{x,x\} = \{y,y\}$. Por teorema anterior; $\left\{ \begin{array}{l} x=y \text{ \& } x=y \Rightarrow x=y \\ \text{ó} \\ y=x \text{ \& } y=x \end{array} \right.$ ∎

DEFINICIÓN: PAREJA ORDENADA

$$(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$$

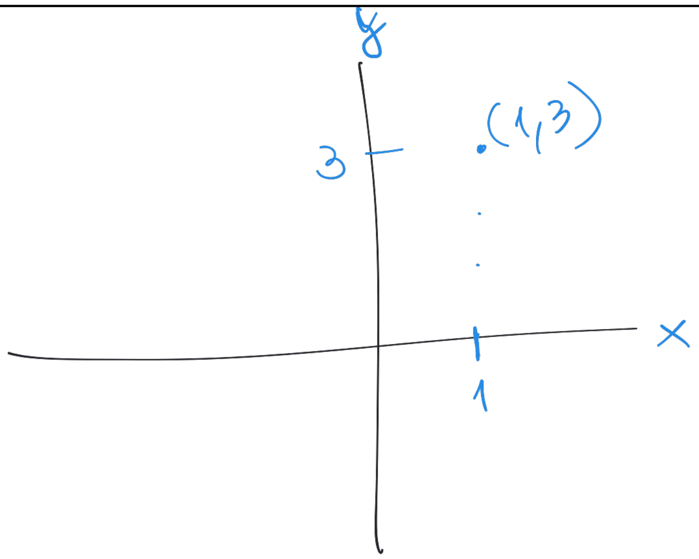
También, si $\Delta \neq \boxdot \Rightarrow (x,y) = \{\{x,\Delta\},\{y,\boxdot\}\}$

TEOREMA

$$(x,y) = (u,v) \Rightarrow [x = u \ \wedge \ y = v]$$

Leer pág. 23 Teorema 46

Ejercicio en clase 2



$(1,3)$

$$(1,3) = \{\{1\},\{1,3\}\}$$

4. Sesión 5

Definición 10 (Por abstracción (EAS))**.** $\{x : \Phi(x)\}$

1. *Es la notación usual de conjunto.*

2. $\Phi(x)$*: Es el operador que nos da una nueva forma de ligar variables.*

Definición 11 (Esquema de definición)**.** $y = \{x : \Phi(x)\} \iff [\forall x(x \in y \iff \Phi(x)) \wedge y$ *es conjunto,*$] \vee [y = \varnothing \wedge \neg\exists B \forall x(x \in B \iff \Phi(x))]$

NOTA. *Si* x *es un conjunto*

$$\{x : \Phi(x)\} = \{x : x \textit{ es conjunto y } \Phi(x)\}$$

Definición 12 (Esquema teoremático)**.** $x \in \{x : \Phi(x)\} \implies \Phi(y)$.

Teorema 16. $A = \{x : x \in A\}$

Teorema 17. $\{x : x \neq x\} = \varnothing$.

Teorema 18. *(Varios)*

1. $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

2. $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

3. $A\tilde{B} = \{x \in \wedge x \notin B\}$

Teorema 19. $\{x : x = x\} = \varnothing$

NOTA. 1. *Las definiciones que no necesitan un teorema que las justifique son axiomas.*

2. $\neg\exists A \forall x, x \in A$.

> A5: Axioma de la suma. $\exists C \forall x \ni (x \in C \iff \exists B[x \in B \wedge B \in A])$.

Definición 13. $\cup A = \{x : \exists B[x \in B \wedge B \in A]\}$

Teorema 20. $x \in \cup A \iff \exists B[x \in B \wedge B \in A]$

Teorema 21. *(Varios)*

1. $\cup\varnothing = \varnothing$

2. $\cup\{\varnothing\} = \varnothing$

3. $\cup\{A\} = A$

4. $\cup\{A, B\} = A \cup B$

Definición 14. $\cap A = \{x : \forall B[B \in A \implies x \in B]\}$

Teorema 22. $x \in \cap A \iff (\forall B[B \in A \implies x \in B] \wedge \exists B(B \in A))$

Teorema 23.

1. $\cap\varnothing = \varnothing$

2. $\cap\{\varnothing\} = \varnothing$

AXIOMAS DE ZERMELO-FRAENKL

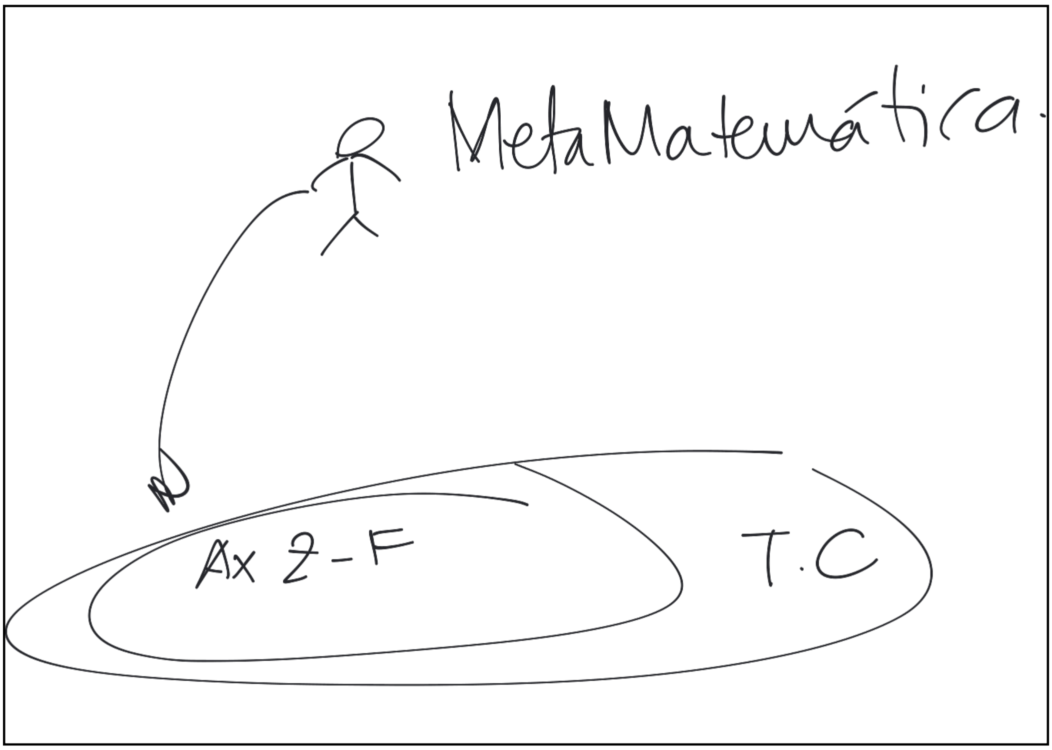
A0: $\exists\ \emptyset$
A1: Ax. Ext.
A2: EAS
A3: Ax. Unión.
A4: Ax. Parejas.

* Leer Cap. 1 Libro: Laberinto de conocimiento.

$\boxed{\text{EAS}}$

Definición por abstracción
$\{x : \Phi(x)\}$

- Es la notación usual de conjunto
- $\Phi(x)$: Es el operador que nos da una nueva forma de ligar variables



ESQUEMA DE DEFINICIÓN

$$y = \{x : \Phi(x)\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \forall x\big(x \in y \Leftrightarrow \Phi(x)\big) \ \wedge \ \ y \textit{ es conjunto} \\ \text{ó} \\ y = \emptyset \wedge \neg\exists B \forall x\big(x \in B \Leftrightarrow \Phi(x)\big) \end{array}$$

Nota: Si x es un conjunto

$$\underline{\{x : \Phi(x)\}} = \{x : x \textit{ es conjunto y } \Phi(x)\}$$

* diferentes tipos de conjuntos.

ESQUEMA TEOREMÁTICO

$$y \in \{x : \Phi(x)\} \Longrightarrow \Phi(y)$$

dem: Sea $y \in \{x : \Phi(x)\} \Rightarrow \{x : \Phi(x)\} \neq \emptyset$.

$\Rightarrow$ por esquema de def. $\Phi(y)$. $\boxtimes$

TEOREMA

$$A = \{x : x \in A\}$$

dem: Sea A un conjunto. y $\Phi(x) : x \in A$.
Por lógica sabemos que es verdadero
decir $(x \in A \Leftrightarrow x \in A) \Rightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow \Phi(x))$.
Por esquema de definición, $A = \{x : \Phi(x)\}$
$\Rightarrow A = \{x : x \in A\}$ ∎

TEOREMA

$$\{x : x \neq x\} = \emptyset$$

dem: Supóngase que $y \in \{x : x \neq x\} \Rightarrow$
Por esquema teoremático, $y \neq y$ ($\cancel{\to}$).
$\Rightarrow y \notin \{x : x \neq x\}, \forall y . \Rightarrow \{x : x \neq x\} = \phi$. ∎

TEOREMA

i. $A \cap B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\}$
ii. $A \cup B = \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}$
iii. $A \sim B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$

} Por esquema teoremático

Nota:

1 Axioma: define objetos sin necesidad de teoremas que justifican.

2 $\cancel{\boxed{\neg \exists A, \forall x, x \in A}}$ No existe el conjunto de todos los elemento

Supóngase $\exists A \ni \forall x, x \in A \Rightarrow$ Por EAS

$\exists B \, \forall x \, (x \in B \Leftrightarrow (x \in A \,\&\, \Phi(x)))$.

$\forall x \, (x \in A \Leftrightarrow \Phi(x))$. $\}$ $\boxed{\text{Ax Abstracción}}$ $\downarrow$ Paradoja de Russell.

TEOREMA

$$\{x : x = x\} = \emptyset$$

dem: Sea $A = \{x : x = x\} \Rightarrow \forall x, \; x = x$.

$\Rightarrow \forall x, \; x \in A \Rightarrow \exists A \ni \forall x, x \in A$. $(\not\to)$.

$\Rightarrow$ Por esquema de def. $\{x : x = x\} = \phi$.

■

NOTA

1. Las definiciones que no necesitan un teorema que las justifique son AXIOMAS

2. $\neg \exists A \; \forall x, x \in A$

A5: AXIOMA DE LA SUMA

$$\exists C \forall x \ni (x \in C \Leftrightarrow \exists B[x \in B \text{ y } B \in A])$$

DEFINICIÓN

$$\cup A = \{x : \exists B[x \in B \text{ y } B \in A]\}$$

TEOREMA

$$x \in \cup A \Leftrightarrow \exists B[x \in B \text{ y } B \in A]$$

TEOREMAS

1. $\cup \emptyset = \emptyset$
2. $\cup \{\emptyset\} = \emptyset$
3. $\cup \{A\} = A$
4. $\cup \{A, B\} = A \cup B$

Ej en clase 3

Sábado 24 de julio.

$\boxed{(1)\ \cup\phi = \phi.}$

dem: Sea $x \in \cup\phi$. Además, sabemos $\forall B, B \notin \phi$. Si $x \in \cup\phi \Rightarrow \exists B(x \in B \,\&\, B \in \phi)(\rightarrow\leftarrow)$

$\Rightarrow \forall x, x \notin \cup\phi \Rightarrow \cup\phi = \phi.$ ∎

$\boxed{(2)\ \cup\{\phi\} = \phi.}$

dem: Sea $x \in \cup\{\phi\} \Rightarrow \exists B(x \in B \,\&\, B \in \{\phi\})$

Pero por Ax. Parejas si $B \in \{\phi\} \Rightarrow B = \phi$.

$\Rightarrow x \in B = \phi (\rightarrow\leftarrow) \Rightarrow \cup\{\phi\} = \phi.$ ∎

$A = \{1, 2, 3, \{x\}, \{y, z\}\}$

$\cup A = \{x, y, z\}$

$\cup A = \{x : \exists B \, (x \in B \;\&\; B \in A)\}$

DEFINICIÓN:

$$\cap A = \{x : \forall B \, [B \in A \Rightarrow x \in B]\}$$

TEOREMA

$$x \in \cap A \Leftrightarrow (\boxed{\forall B [B \in A \Rightarrow x \in B]} \text{ y } \exists B \, (B \in A))$$

TEOREMAS

1. $\cap \emptyset = \emptyset$

2. $\cap \{\emptyset\} = \emptyset$

dem:

(1) Sea $x \in \cap \emptyset \Rightarrow \forall B \, (B \in \emptyset \Rightarrow x \in B)$ & $\exists B \, (B \in \emptyset)$ $(\rightarrow \leftarrow)$

$\Rightarrow \forall x, \; x \notin \cap \emptyset \Rightarrow \cap \emptyset = \emptyset$ ■

(2) Sea $x \in \cap \{\emptyset\} \Rightarrow \forall B \, (B \in \{\emptyset\} \Rightarrow x \in B)$ & $\exists B \, (B \in \{\emptyset\})$.

$\Rightarrow \exists B \, (B \in \{\emptyset\})$. Por Ax. Parejas

$\Rightarrow B = \emptyset$.

Por otro lado, $\forall B = \emptyset \, (B \in \{\emptyset\} \Rightarrow x \in B = \emptyset)$ $(\rightarrow \leftarrow)$

$\Rightarrow \forall x, \; x \notin \cap \{\emptyset\} \Rightarrow \cap \{\emptyset\} = \emptyset$. ■

5. Sesión 9

Ej 2

$\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\emptyset$

por teorema $\mathcal{P}\emptyset = \{\emptyset\}$

$\Rightarrow \mathcal{P}\mathcal{P}\emptyset = \mathcal{P}\{\emptyset\} = \{\{\emptyset\},\emptyset\}$

$\Rightarrow \mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\emptyset = \mathcal{P}\{\{\emptyset\},\emptyset\} = \{\{\{\emptyset\},\emptyset\},\{\emptyset\},\emptyset\}$

$\wp(A)$ 2^n elementos

Sea $\wp\phi = \{\phi\}$ por teorema 89. Ahora, $\wp\wp\phi = \{\phi,\{\phi\}\}$ por teorema 90. Considérese

$\wp\wp\wp\phi = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi,\{\phi\}\}\}$

T88

Supóngase $\exists B \ni B \neq \phi$, $B \in \wp\wp\wp\phi \Rightarrow$

$B \subseteq \wp\wp\phi \Rightarrow \boxed{B \subseteq \{\phi, \{\phi\}\}}$

$\forall x \in B \Rightarrow x \in \{\phi,\{\phi\}\} \Rightarrow x = \phi$ ó $x = \{\phi\}$.

$\rightarrow B = \{\phi\}$ ó $B = \{\{\phi\}\}$ ó $B = \{\phi, \{\phi\}\}$

---

5. $\wp\wp 0 = \{0, \{0\}\}$

Demostración: Sea $\wp 0 = \{0\}$ por el teorema ~~anterior~~ 89 ya demostrado. Definiendo $A = \{0\}$, si $\wp A$, por el teorema ~~anterior~~ 88 demostrado $\ni 0 \in \wp A \rightarrow$ $\wp\wp 0 = \{0, \{0\}\}$.

Por teo 87

Sea $B \in \wp\wp\phi$, $B \neq \phi$ $\Rightarrow B \subseteq \wp\phi$

$\forall x \in B \Rightarrow x \in \wp\phi = \{\phi\} \Rightarrow x = \phi$

$\rightarrow B = \{\phi\} = A$

Por teorema 88, $\phi \in \wp\wp\phi$

$\Rightarrow \wp\wp\phi = \{\phi, \{\phi\}\}$.

---

(4) Teorema 93: $\wp(A \cap B) = (\wp A) \cap (\wp B)$

añadir implicación regreso!!

dem: Sean $\boxed{A, B, C}$ conjuntos. Por teorema 1 intersección $C \in (\wp A) \cap (\wp B) \leftrightarrow C \in (\wp A) \wedge C \in (\wp B)$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{por teorema 86} \rightarrow}$ $C \subseteq A \wedge C \subseteq B$ +

$\rightarrow$ si $x \in C \rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \rightarrow$ por def de contención $\therefore$ $C \subseteq (A \cap B)$ $\therefore$ Por teorema 86 $\therefore$ $C \in \wp(A \cap B)$ $\rightarrow$

$\forall C\,(C \in (\wp A) \cap (\wp B) \longleftrightarrow C \in \wp(A \cap B)) \rightarrow$

$\rightarrow$ Por A1 $\wp(A \cap B) = (\wp A) \cap (\wp B)$ ■

Ax. Extensión

Problema 1.5. *Demostrar teorema 94.* $\mathcal{P}(A \sim B) \subseteq ((\mathcal{P}A) \sim (\mathcal{P}B)) \cup \{\varnothing\}$.

Demostración. ~~Tenemos dos casos:~~ Sean A, B, C conjuntos $\ni C \in \mathcal{P}(A \sim B)$

1. $A \sim B$ no es vacío. $C \in \mathcal{P}(A \sim B) \iff C \subseteq (A \sim B) \iff C \subseteq A \wedge C \not\subseteq B \iff C \in \mathcal{P}A \wedge C \notin \mathcal{P}B \implies C \in [(\mathcal{P}A) \sim (\mathcal{P}B)]$.
2. $A \sim B$ es vacío. $\implies \mathcal{P}(A \sim B) = \{\varnothing\}$.

Por lo tanto, $\mathcal{P}(A \sim B) \subseteq ((\mathcal{P}A) \sim (\mathcal{P}B)) \cup \{\varnothing\}$. ∎

CASO 1: $A \sim B = \phi \rightarrow C \in \mathcal{P}(\phi) = \{\phi\} \ni C = \phi$

$\mathcal{P}(A \sim B) \subseteq \{\phi\}$

ó

CASO 2: $A \sim B \neq \phi \Rightarrow C \subseteq A \sim B \Rightarrow \forall x$

$x \in C \Rightarrow [x \in A \sim B] \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B. \Rightarrow x \in A$

$\boxed{\forall x \in C \Rightarrow x \in A} \wedge \boxed{\forall x \in C \Rightarrow x \notin B}$

$C \subseteq A \wedge C \notin B \Rightarrow C \in \mathcal{P}A \wedge C \notin \mathcal{P}(B)$

$C \in [\mathcal{P}A \sim \mathcal{P}B]$

$\therefore \mathcal{P}(A \sim B) \subseteq \mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$

eorema 96. $x \in (A \times B) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists z) : \begin{cases} y \in A \\ z \in B \\ x = (y, z) \end{cases}$

Demostración. Sean A, B conjuntos. Supongamos que $x \in (A \times B)$

por por esquema teoremático y definición $\begin{cases} y \in A \\ z \in B \\ x = (y, z) \end{cases}$

Supongamos que $(\exists x)(\exists z) : \begin{cases} y \in A \\ z \in B \\ x = (y, z) \end{cases}$ por definición $x \in (A \times B)$

teorema 97. $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$

Demostración.

Parte 2

1) Teorema 96. $x \in A \times B \leftrightarrow \exists y, z \ni (y \in A \ \& \ z \in B \ \& \ x = \langle y, z \rangle)$

Sabemos $A \times B = A \times B \ni A \neq B \rightarrow x \subset A \times B = x \subset A \times B$

Decimos $C = A \times B$, entonces por teorema 95,

$\exists (A \times B) \forall x \ni (x \in (A \times B) \leftrightarrow (\exists y, z)(y \in A \ \& \ z \in B \ \& \ x = \langle y, z \rangle)$

$\Rightarrow$ Dado $x \in (A \times B) \leftrightarrow x \in A \times B)$

$\therefore x \in (A \times B) \leftrightarrow (\exists y, z)(y \in A \ \& \ z \in B \ \& \ x = \langle y, z \rangle)$ ∎

1. Demostrar teorema 97.

Sea: A, B conjuntos.

Dado $(x,y) \in A \times B$

$\rightarrow x \in A$ & $y \in B$

Sea $x \in A$ & $y \in B$

por teorema 96 ¿cómo?

$(x,y) \in A \times B$ ■

Sea $(x,y) \in A \times B$ por

T96 $\exists a, b \ni$

$a \in A$ & $b \in B$ & $(x,y) = (a,b)$

$\Leftrightarrow x = a$ & $y = b$

$\Leftrightarrow x \in A$ & $y \in B$

$\Leftrightarrow \exists x \in A$ & $x \in B$.

TEOREMA 101

$B \subseteq C \rightarrow A \times B \subseteq A \times C$

conjunto!!

Sean A, B y C, donde $B \subseteq C$ y $y \in A$. Por definición de contención $\forall x (x \in B \Leftrightarrow x \in C)$. $\rightarrow (y, x_1) \in A \times B \wedge (y, x_2) \in A \times C$ por definición de producto cartesiano y teorema 97. $A = A \rightarrow y = y$. Y como $B \subseteq C \rightarrow \forall x_1 \exists x_2 \mid x_1 = x_2$. $\rightarrow \forall (y, x_1) \exists (y, x_2) \mid (y, x_1) = (y, x_2)$. $\therefore$ Por definición de contención $A \times B \subseteq A \times C$ ■

Sea $(a,b) \in A \times B \Rightarrow a \in A$ & $b \in B$

$\Rightarrow a \in A$ & $b \in C \Rightarrow (a,b) \in A \times C$.

$\exists a \in A$ & $b \in C$.

Ejercicio 4. Dar un contra-ejemplo simple para mostrar que, en general, no es el caso que $A \cup (B \times C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Demostración. Sean $A = \{x\}, B = \{y\}, C = \{z\} \implies A \cup (B \times C) = A \cup \{\langle y, z\rangle\} = \{x, \langle y, z\rangle\}$. Por otro lado, $(A \times B) \cup (A \times C) = \{\langle x, y\rangle\} \cup \{\langle x, z\rangle\} = \{\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle\} \therefore A \cup (B \times C) \neq (A \times B) \cup (A \times C)$ ■

$A = B = C = \{x\}$

$A \cup (B \times C) = \{x, (x,x)\}$

$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(x,x)\}$