ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4
СПЛАЙН-МЕТОД. МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИВЫХ ЛИНИЙ

Цели работы:

1. Составить программу для реализации нескольких форм построения сплайновых кривых линий (однопараметрические множества).

2. Провести сравнение условий гладкости кривых, построенных разными способами по одному и тому же точечному базису.

Краткие теоретические сведения

Параметрической кубической кривой является кривая, в которой *x*, *y*, *z* – многочлены третьего порядка относительно некоторого параметра *t*.

$$P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d.$$

Форма Эрмита

Форма Эрмита приведена на рис. 4.1.

Зададим концевые точки $P1$и $P4$ и касательные векторы $R1$и $R4$.

Тогда $x(t) = T \times Mh \times Ghx,$

$y(t) = T \times Mh \times Ghy,$

$z(t) = T \times Mh \times Ghz,$

где T – вектор-строка степени t; Mh – Эрмитова матрица; Gh – геометрический вектор Эрмита.

$$Mh = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Ghx = \begin{pmatrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{pmatrix}$$

Форма Безье

Форма Безье (рис. 4.2) очень близка к эрмитовой форме, однако отличается от неё заданием касательных векторов в конечных точках. В форме Безье используются четыре точки. Касательные векторы в конечных точках задаются отрезками $P1P2$ и $P3P4$.

$x(t) = T \times Mh \times Gbx,$

$y(t) = T \times Mh \times Gby,$

$z(t) = T \times Mh \times Gbz,$

где T – вектор-строка степени t; Mb – матрица Безье; Gb – геометрический вектор Безье.

$$Mb = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Gbx = \begin{pmatrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{pmatrix}$$

Форма *B*-сплайнов

Кривая, представленная в виде кубического B-сплайна (рис. 4.3), в общем случае может проходить через любые управляющие точки, однако она непрерывна и непрерывностью изменения обладают ее касательный вектор и кривизна.

$$x(t) = T \times Ms \times Gsx,$$
$$y(t) = T \times Ms \times Gsy,$$
$$z(t) = T \times Ms \times Gsz,$$

$$Ms = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Gsx = \begin{pmatrix} Pi-1 \\ Pi2 \\ Pi+1 \\ Pi+2 \end{pmatrix}$$

Бикубические поверхности

Бикубические поверхности задаются кубическими уравнениями от двух переменных s и t. Изменив оба параметра от 0 до 1, можно определить все точки на куске поверхности. Если одному из параметров присвоить постоянное значение, а другой изменять в диапазоне 0–1, то в результате получим кубическую кривую.

Куски в форме B-сплайнов представляют в виде

$$x(s, t) = S \times Ms \times Px \times Ms^T \times T^T,$$
$$y(s, t) = S \times Ms \times Px \times Ms^T \times T^T,$$
$$z(s, t) = S \times Ms \times Px \times Ms^T \times T^T.$$

Здесь, как и для кривых в форме B-сплайнов, достигается C^2-непрерывность. Матрица, состоящая из 16 управляющих точек, описывает кусок, а также в общем случае и точки, не лежащие на самом куске.

Примеры различных изображений даны на рис. 4.4, рис. 4.5, рис. 4.6, рис. 4.7, рис. 4.8, рис.4.9, рис. 4.10.

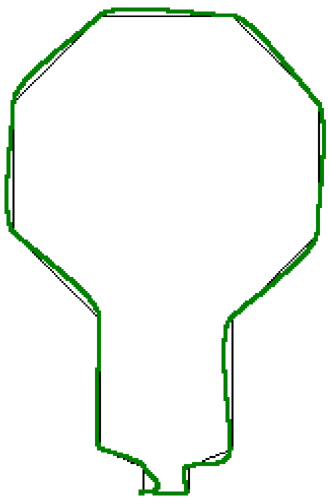
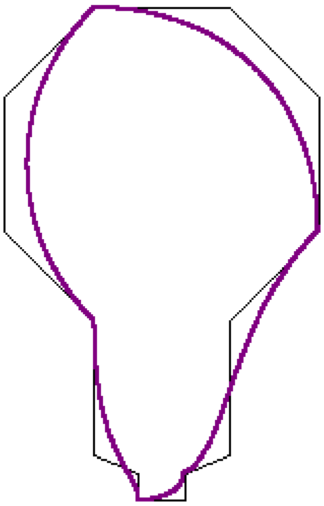
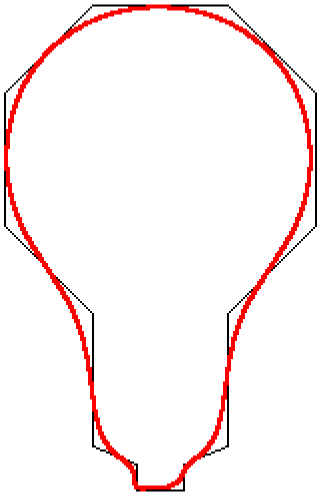




Рис. 4.1. Форма Эрмита   Рис. 4.2. Форма Безье   Рис. 4.3. Форма *B*-сплайна

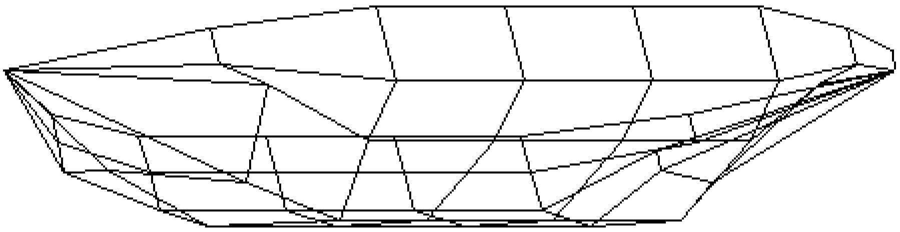


Рис. 4.4. Поверхность до сплайна

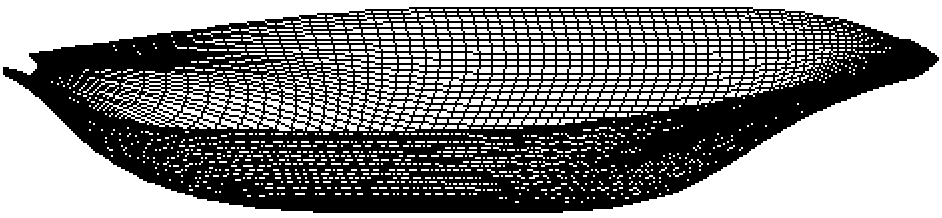


Рис. 4.5. Поверхность после сплайна

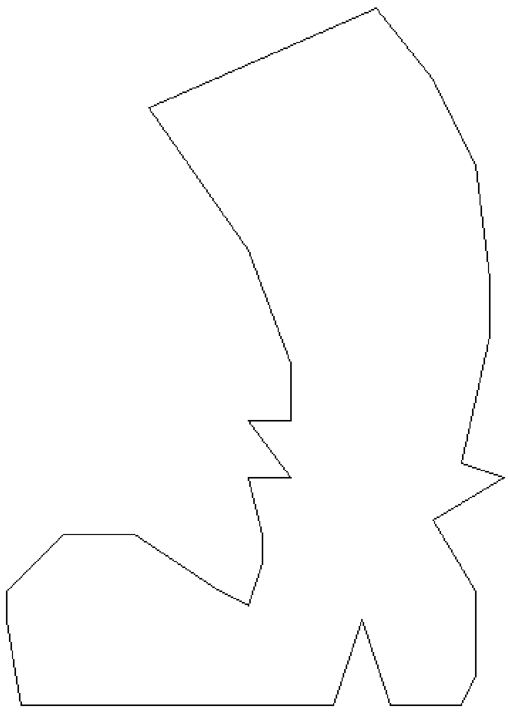


Рис. 4.6. Исходный объект

Рис. 4.7. Форма Эрмита

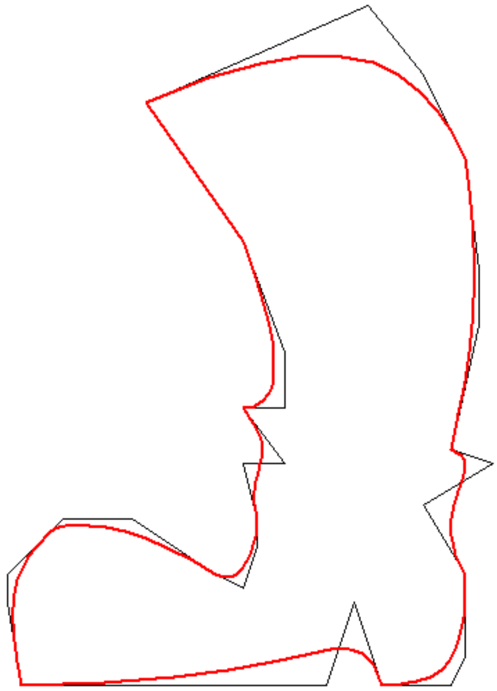


Рис. 4.8. Форма Безье

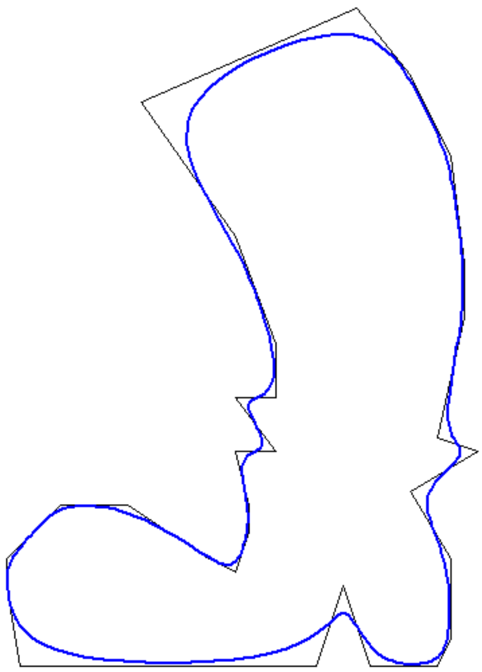


Рис. 4.9. Форма *B*-сплайна

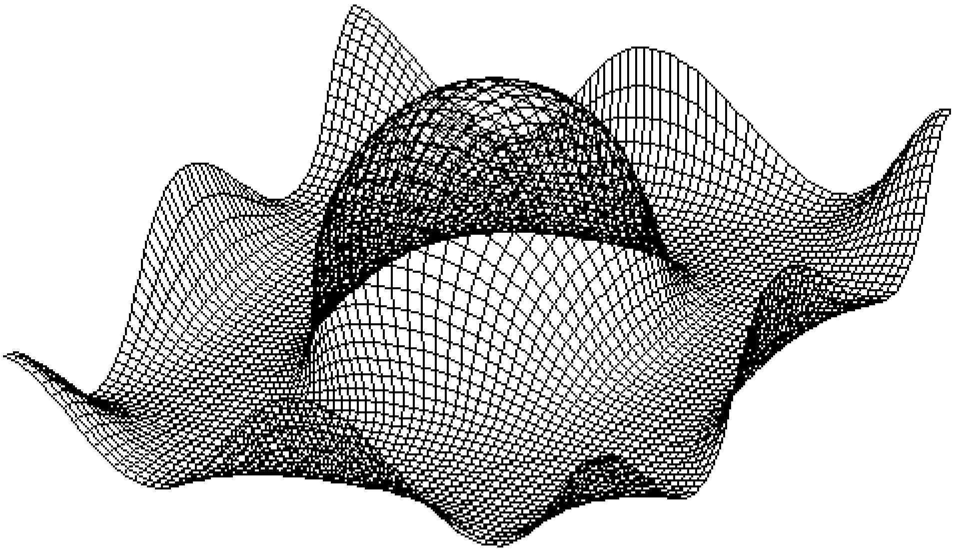


Рис. 4.10. Сплайн поверхности шляпы

Примеры преобразований

Примеры преобразований приведены на рис. 4.11–4.14.

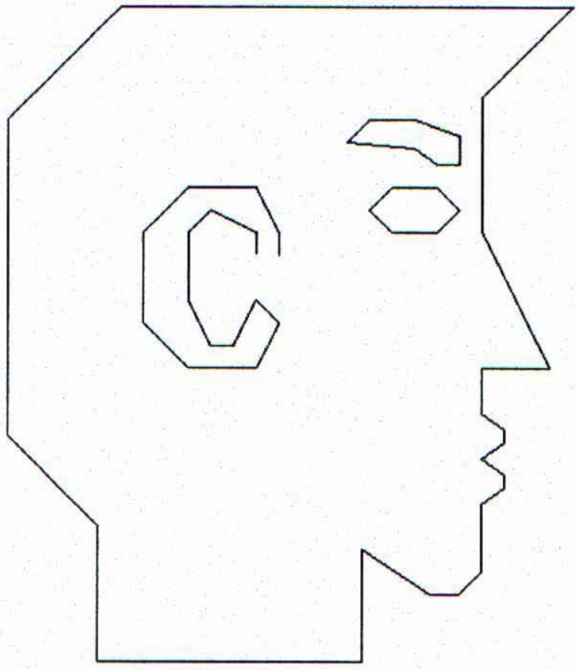


Рис. 4.11. Исходный объект

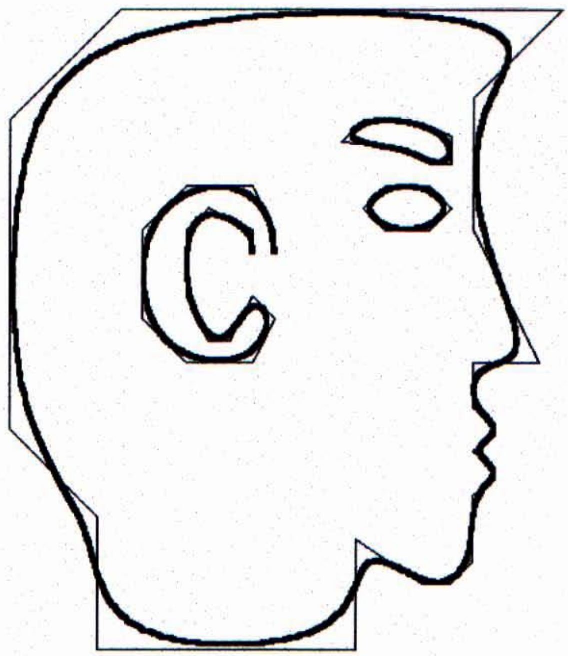


Рис. 4.12. Форма *B*-сплайна

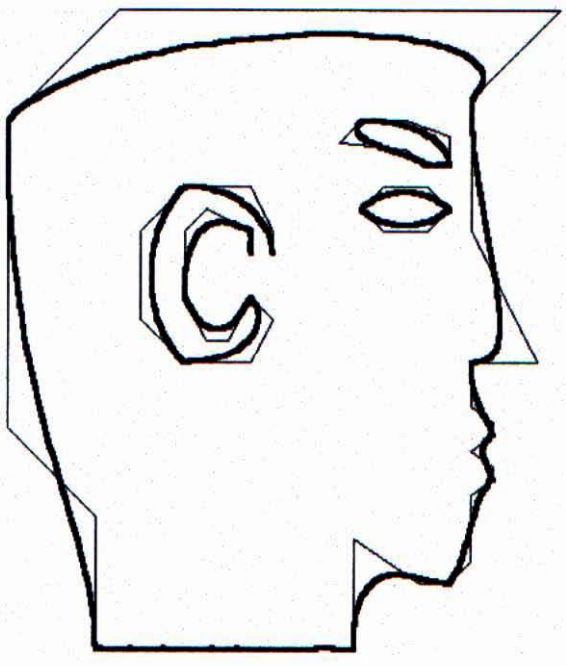


Рис. 4.13. Форма Безье

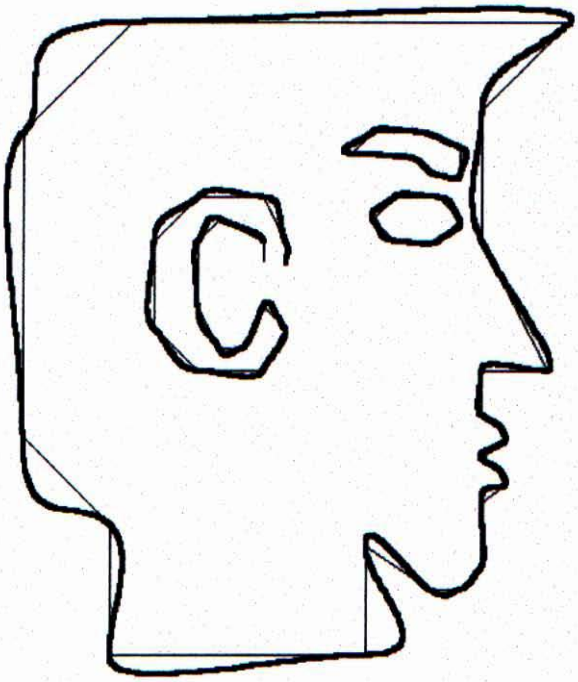
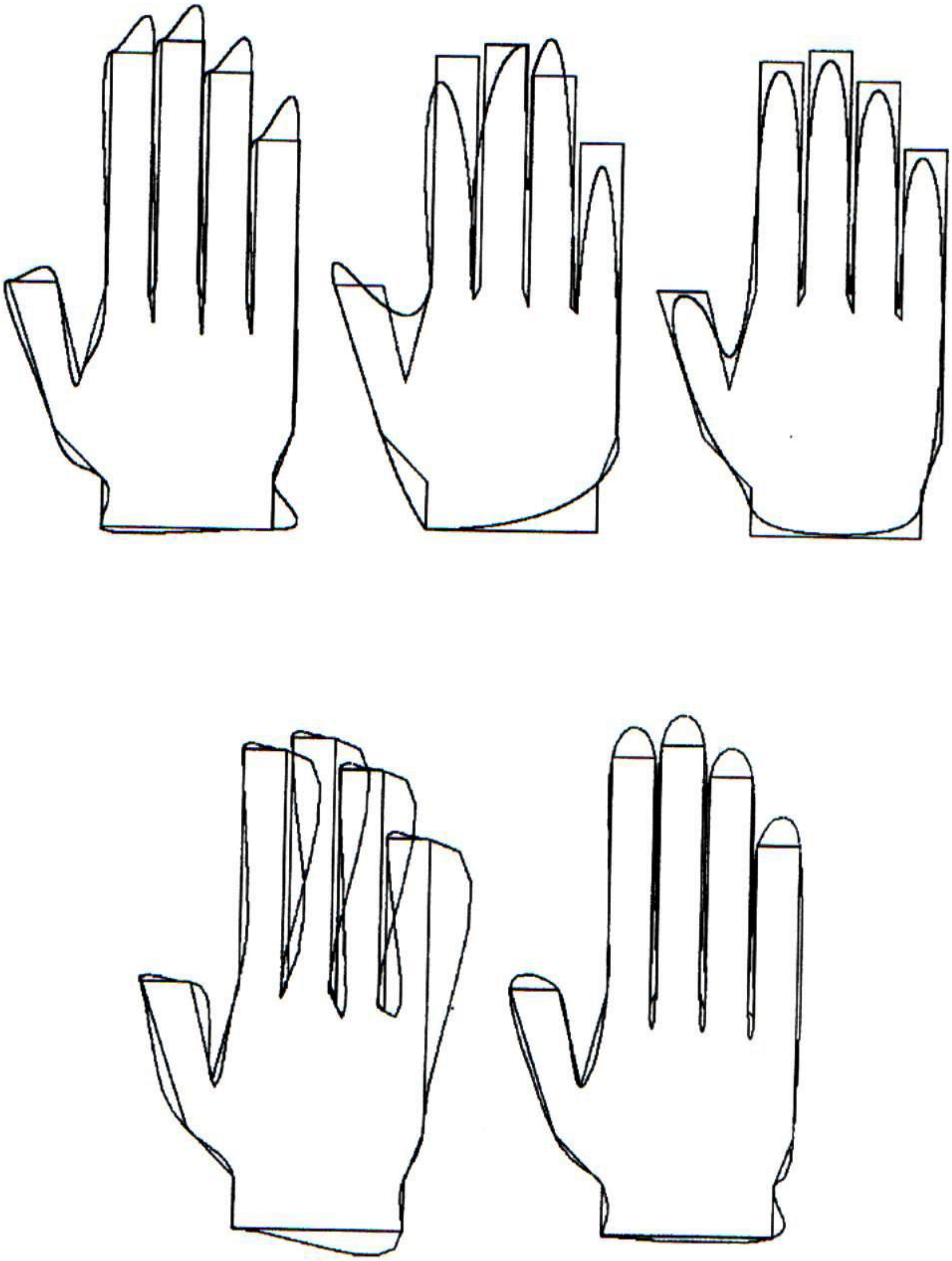


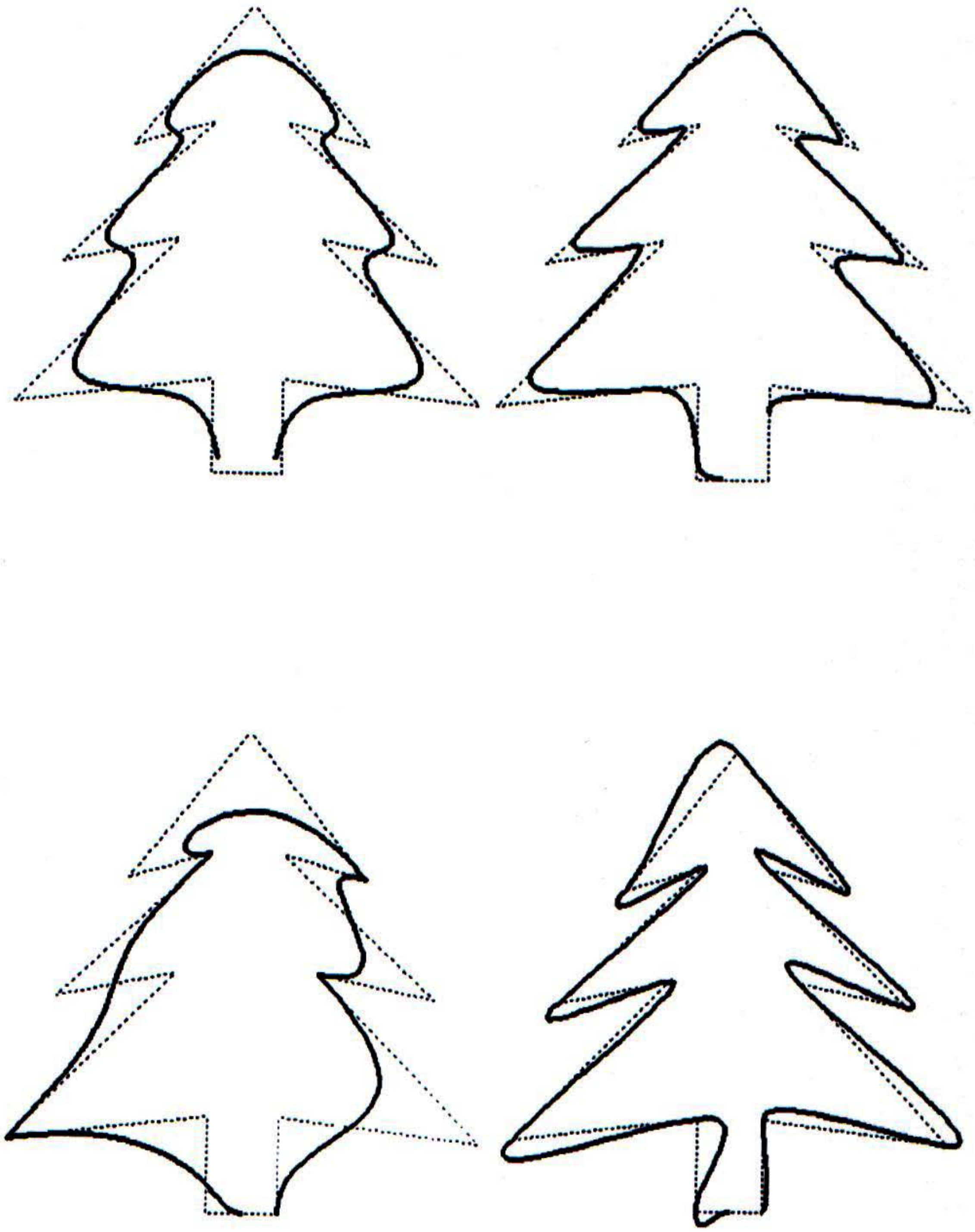
Рис. 4.14. Форма Эрмита

Варианты заданий

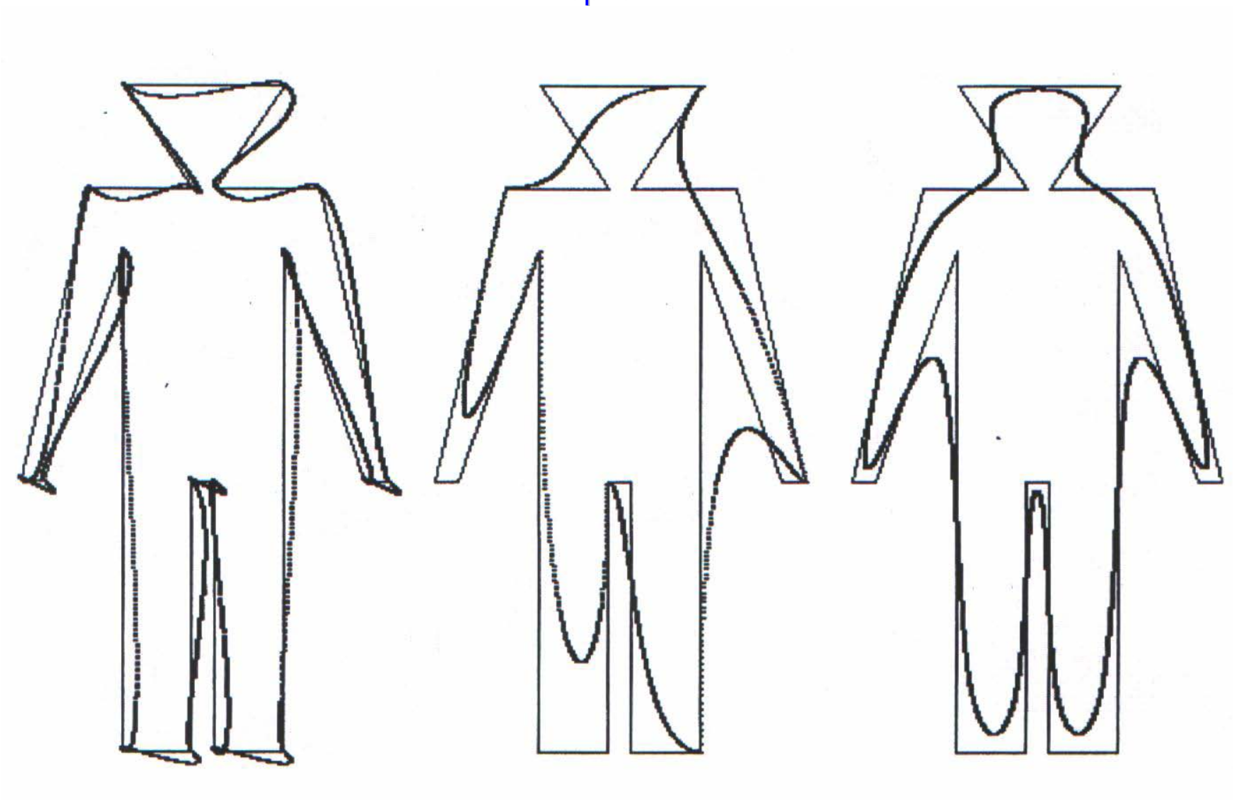
Вариант 1



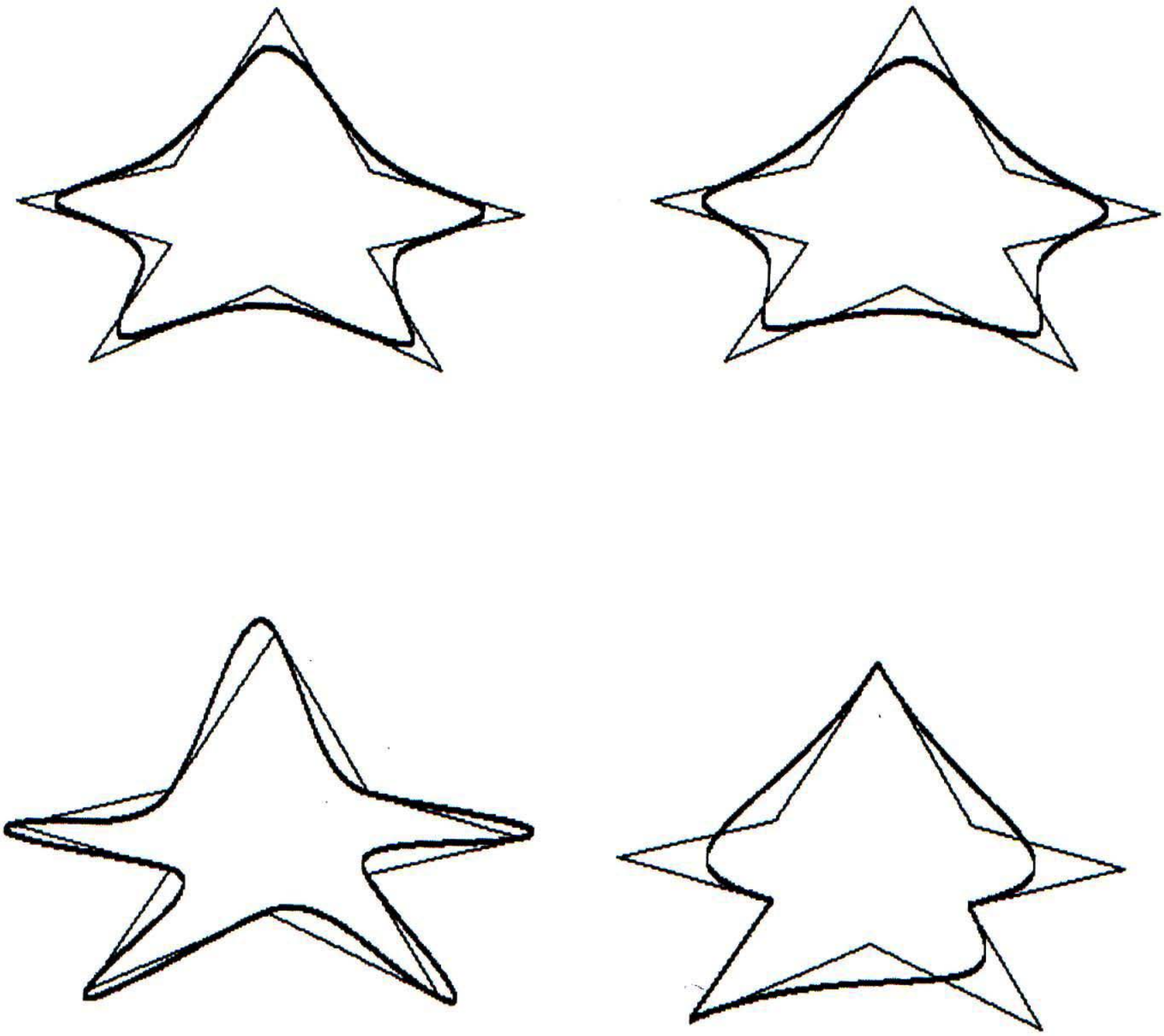
Вариант 2



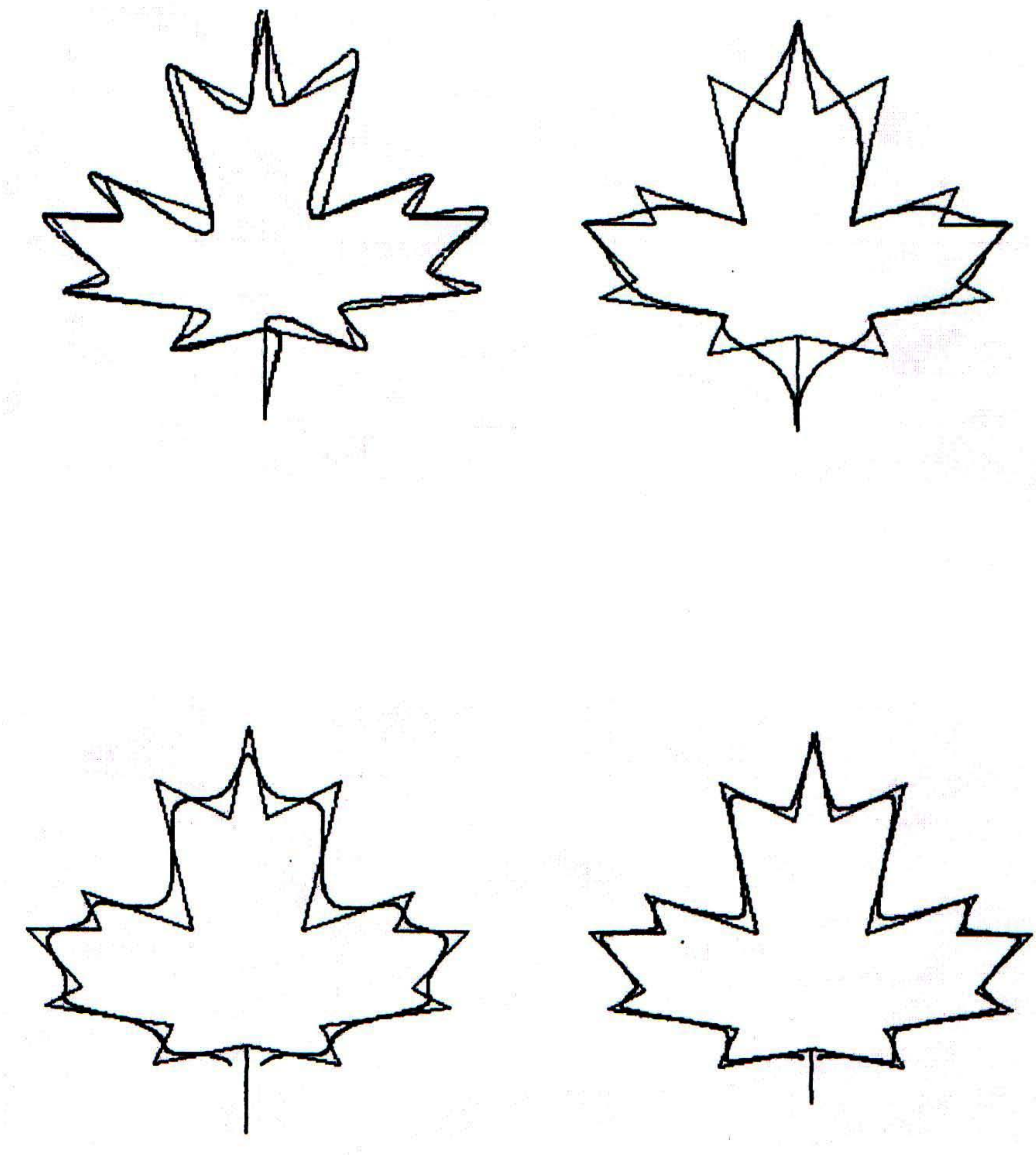
Вариант 3



Вариант 4



Вариант 5



Вариант 6

Оформление отчета по лабораторной работе

В отчете должны быть представлены результаты всех этапов лабораторной работы. Структура отчета следующая:

1. Постановка задачи и выбор объекта. Результаты предварительной работы с изображениями объекта – оцифровка объекта.
2. Краткое математическое описание выполняемых геометрических преобразований (единичных преобразований и композиций) в матричной форме.
3. Листинг программы, реализующей геометрические преобразования объекта.
4. Результаты выполненных преобразований в виде копий графического экрана: ортогональные проекции, прямоугольные аксонометрические проекции (диметрия и изометрия) и три вида перспективных проекций (с разным количеством точек схода лучей).