

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Цель работы: построить линию пересечения кривых поверхностей и решить задачу визуализации полученного решения, используя аппарат трехмерных преобразований и вычисления плоских проекций [лабораторной работы № 2](#).

Краткие теоретические сведения

В данной лабораторной работе в качестве геометрических объектов задаются поверхности кривой формы. Предлагается решить позиционную задачу на взаимное пересечение нескольких кривых поверхностей. Используются поверхности, формообразование которых имеет аналитическое описание.

В задаче предлагается задание как минимум двух кривых поверхностей: одна из них – поверхность вращения второго порядка; другая – линейчатая поверхность общего вида. Выбор этих классов поверхностей очевиден – они имеют широкое применение в технике, моделировании и конструировании объектов сложной формы, обладают свойством технологичности.

Результат решения задачи – определение линии пересечения заданных поверхностей. Формализация процедур построения линии пересечения основывается на применении следующего подхода. Линия пересечения определяется как массив точек, принадлежащих одной и другой поверхности. Для этого одна из кривых поверхностей (линейчатая поверхность общего вида) декомпозируется на пучок прямых линий. Задача, таким образом, сводится к определению точек встречи каждой прямой линии, принадлежащей линейчатой поверхности, с поверхностью вращения второго порядка. Это действие оформляется в процедуру и повторяется в цикле необходимое (для достижения заданной точности) количество раз.

Ниже приводится математическое описание процедуры.

Определение точки встречи прямой с поверхностью вращения

Аналитически решение задачи на пересечение прямой с поверхностью вращения заключается в совместном решении уравнений поверхности вращения и прямой.

Уравнения поверхностей вращения второго порядка в локальной системе координат имеют следующий вид:

Сфера	$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$
Эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$
Однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$
Двуполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1.$
Конус	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0.$
Цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$

Эти уравнения можно записать в следующем виде:

$$x^2 + y^2 + k_1 \cdot z^2 = k_2. \quad (3.1)$$

Значения коэффициентов k_1 и k_2 для приведенных поверхностей представлены в [табл. 3.1](#).

Таблица 3.1

Название поверхности	k_1	k_2	Примечание
Сфера	1	R^2	R – радиус сферы
Эллипсоид	$\frac{a^2}{b^2}$	a^2	a и b – полуоси эллипса в плоскости xOz
Однополостный гиперболоид	$-\frac{a^2}{b^2}$	a^2	a и b – действительная и мнимая полуоси гиперболы в плоскости xOz
Двухполостный гиперболоид	$-\frac{a^2}{b^2}$	$-a^2$	a и b – действительная и мнимая полуоси гиперболы в плоскости xOz
Конус	$-\frac{a^2}{b^2}$	0	$\operatorname{tg} \alpha = a/b$, α – угол наклона образующей конуса к его оси
Цилиндр	0	a^2	a – радиус цилиндра

Таким образом, поверхности вращения второго порядка выражаются в компактном, удобном для аналитического решения виде.

Уравнение прямой, проходящей через две точки, имеет вид

$$\frac{x - x_N}{x_M - x_N} = \frac{y - y_N}{y_M - y_N} = \frac{z - z_N}{z_M - z_N}. \quad (3.2)$$

Из уравнения (3.2) выразим, например, x и y через z :

$$x = x_N + \rho(z - z_N), \quad (3.3)$$

$$y = y_N + \delta(z - z_N), \quad (3.4)$$

где коэффициенты $\rho = \frac{x_M - x_N}{z_M - z_N}$ и $\delta = \frac{y_M - y_N}{z_M - z_N}$.

Подставив выражения (3.3) и (3.4) в уравнение (3.1), получим квадратное уравнение относительно z :

$$Az^2 + Bz + C = 0, \quad (3.5)$$

где коэффициенты и свободный член соответственно равны:

$$\begin{aligned} A &= \rho^2 + \delta^2 + k_1, \\ B &= 2[\rho \cdot x_N + \delta \cdot y_N - (\rho^2 + \delta^2)z_N], \\ C &= (x_N - \rho \cdot z_N)^2 + (y_N - \delta \cdot z_N)^2 - k_2. \end{aligned}$$

Корни квадратного уравнения (3.5) – это координаты z_1 и z_2 искомых точек пересечения. Координаты x_1, x_2 и y_1, y_2 определяются из соотношений (3.3) и (3.4).

Решение в общем виде является универсальным для решения задач на пересечение поверхностей вращения второго порядка с прямой.

Порядок выполнения работы

1. На первом этапе выполнения работы выбираются кривые поверхности для задачи. Важно задать такое сочетание: одна поверхность – поверхность вращения второго порядка, а другая – линейчатая поверхность.

2. На втором этапе составляется программа, в результате выполнения которой на экране дисплея демонстрируется задача. Начинается работа с оформления процедуры определения пересечения прямой в пространстве

с поверхностью вращения второго порядка. Далее вычисляется массив точек, принадлежащих линии пересечения.

3. На этапе визуализации задачи выполняются следующие действия:

- задается точечный или линейчатый каркас поверхностей;
- в геометрическую модель поверхностей включается массив точек линии пересечения;
- выводятся на экран ортогональные проекции и проекции, обеспечивающие наглядное изображение поверхностей и линий их пересечения. Для демонстрации работы алгоритма задаются преобразования одного объекта (перемещение, вращение, масштабирование и др.) относительно другого объекта. Для этого используется аппарат трехмерных геометрических преобразований [лабораторной работы № 2](#).

На [рис. 3.1](#), [рис. 3.2](#), [рис. 3.3](#) представлены результаты решения задачи на пересечение сферы с прямым круговым цилиндром.

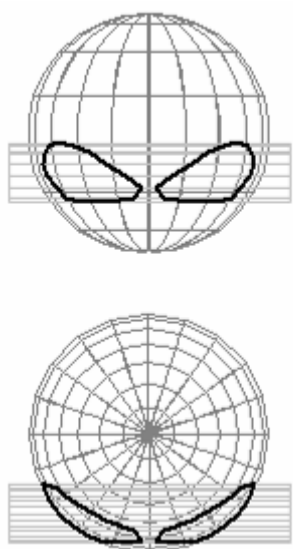


Рис. 3.1. Ортогональные проекции

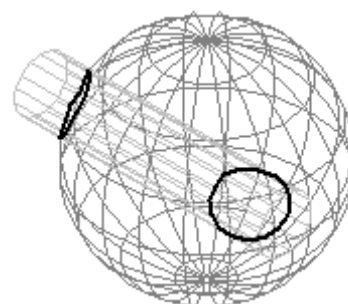


Рис. 3.2. Изометрия

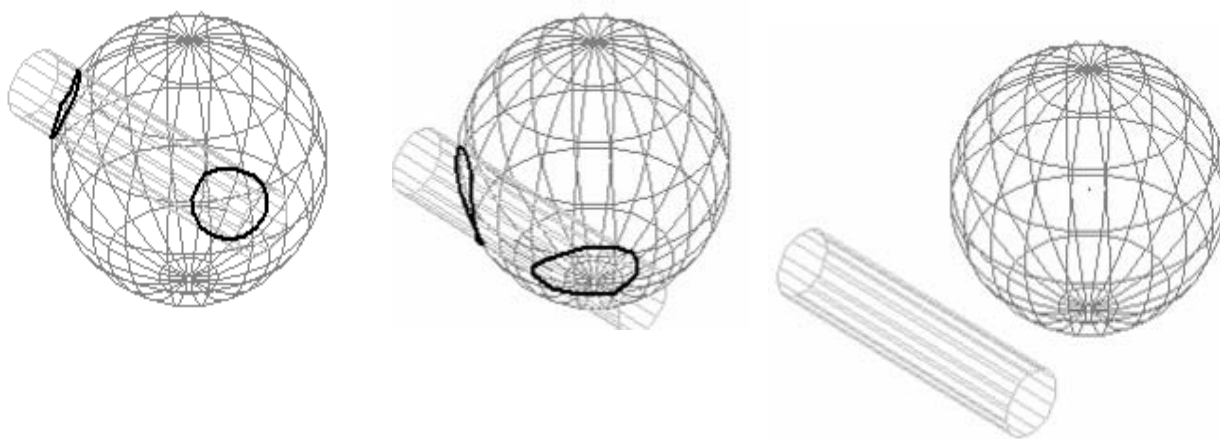


Рис. 3.3. Перемещение одной поверхности относительно другой

Примеры преобразований

Примеры преобразований приведены на [рис. 3.4](#), [рис. 3.5](#).

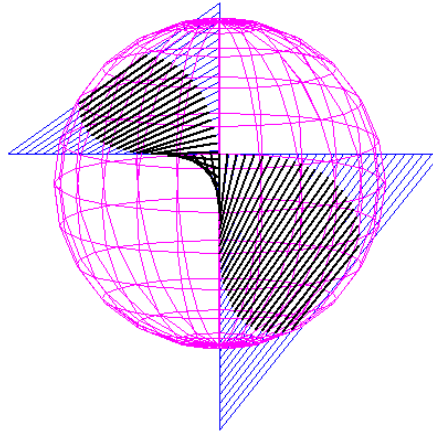


Рис. 3.4. Пересечение сферы и косой плоскости

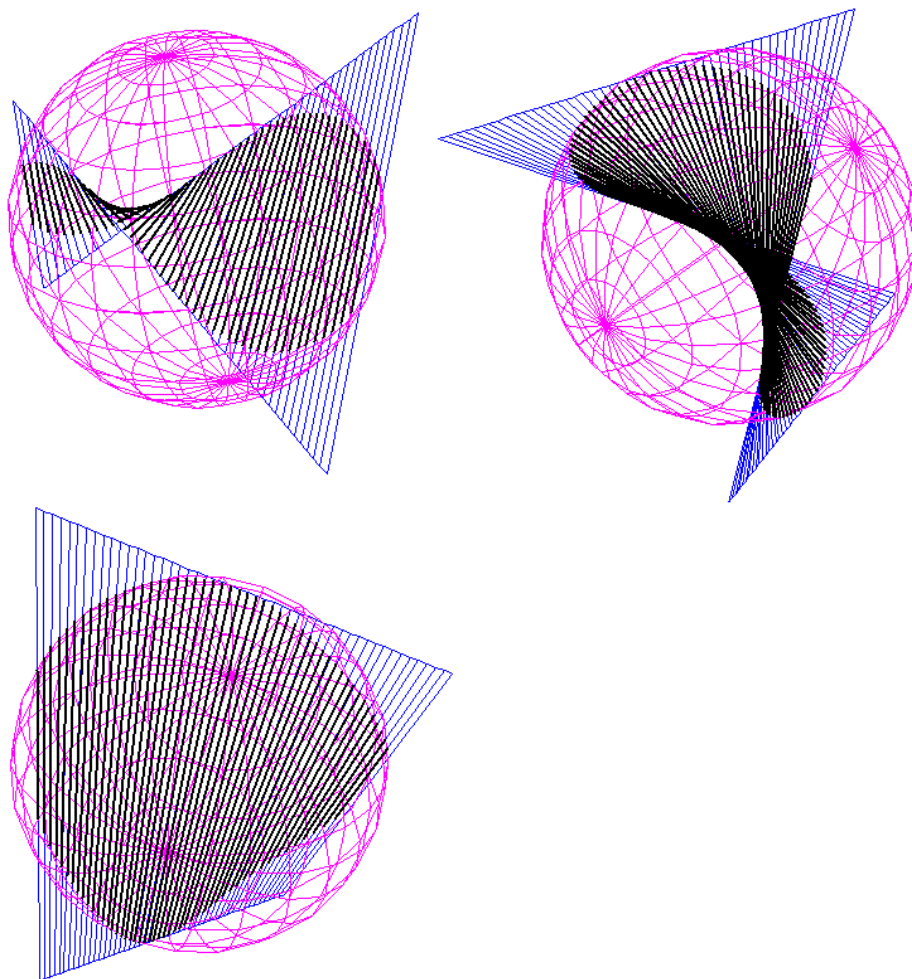
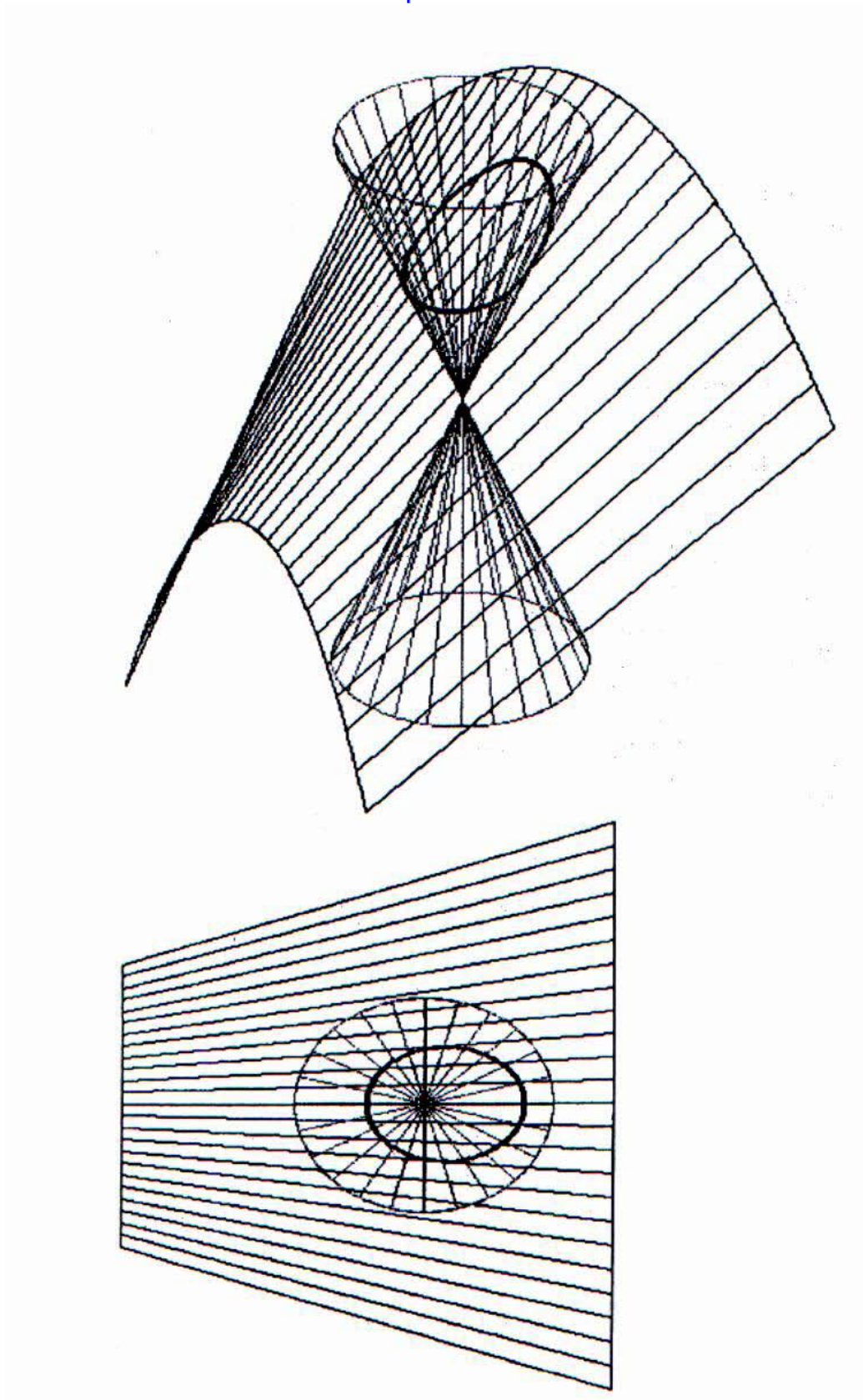


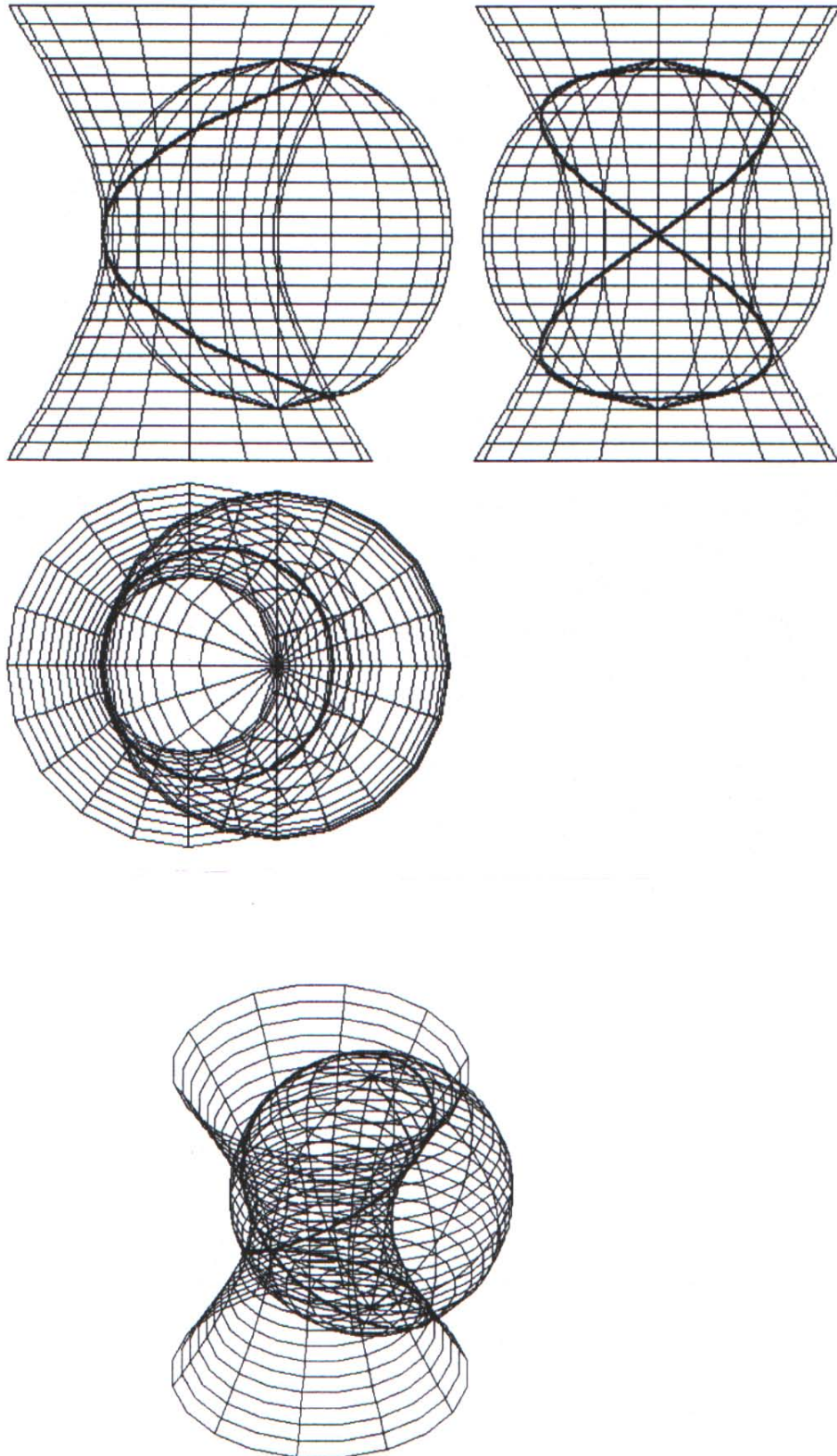
Рис. 3.5. Ортогональные проекции

Варианты заданий

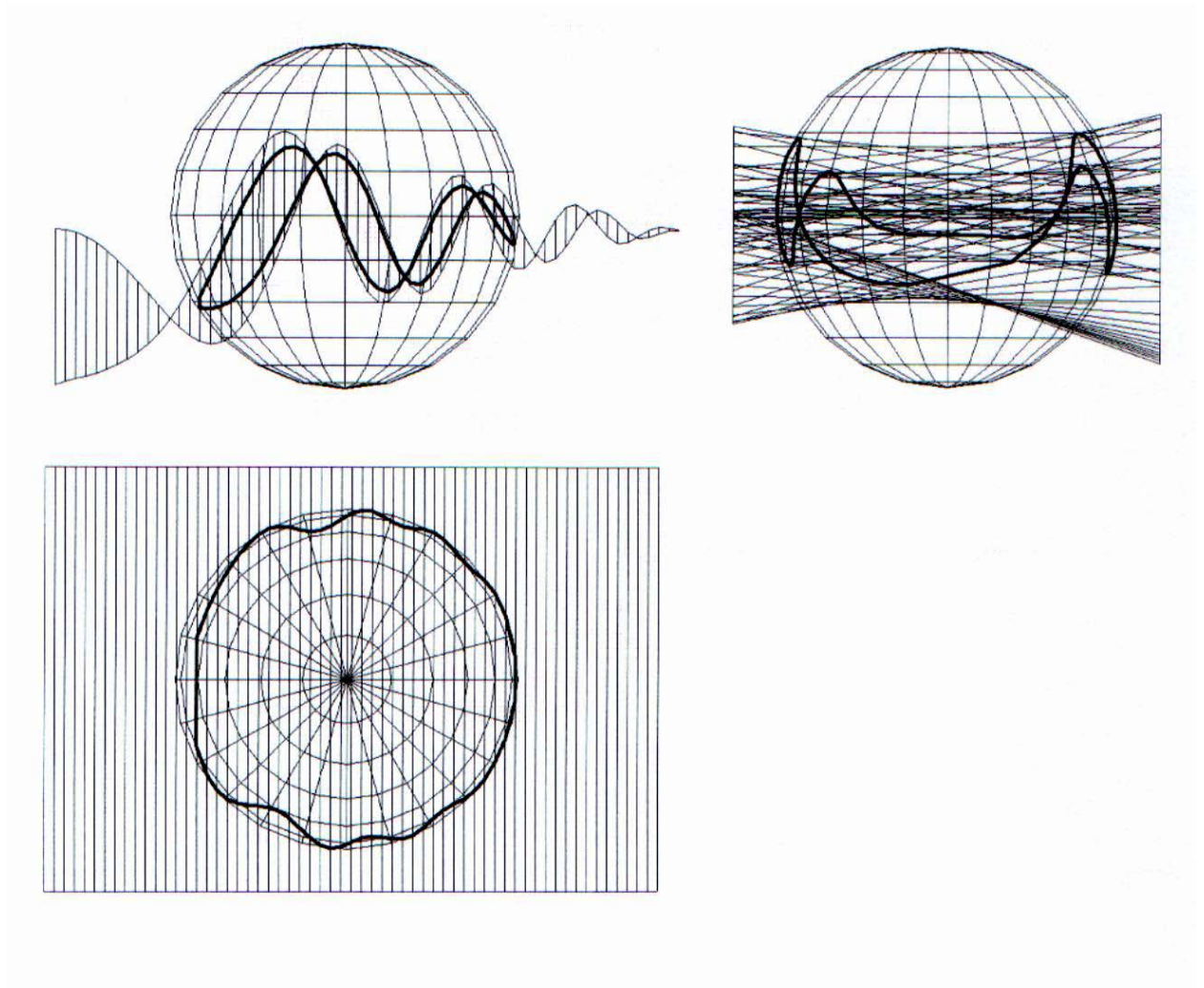
Вариант 1

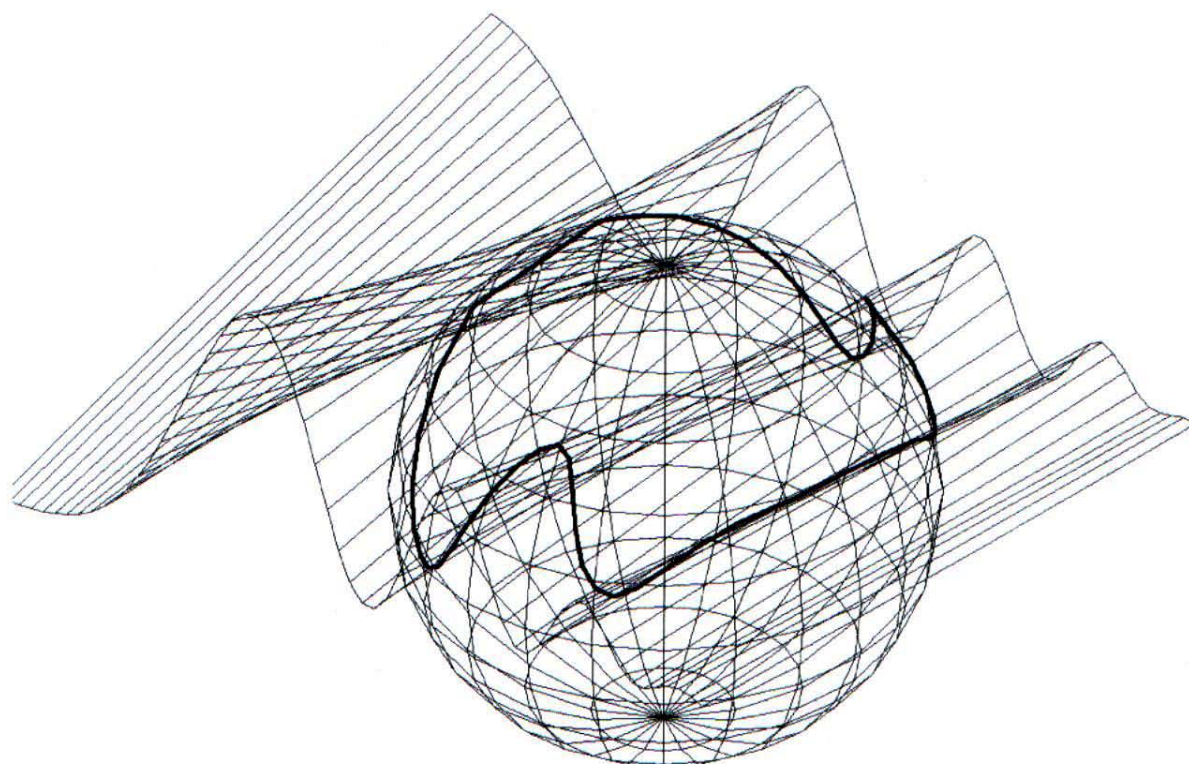
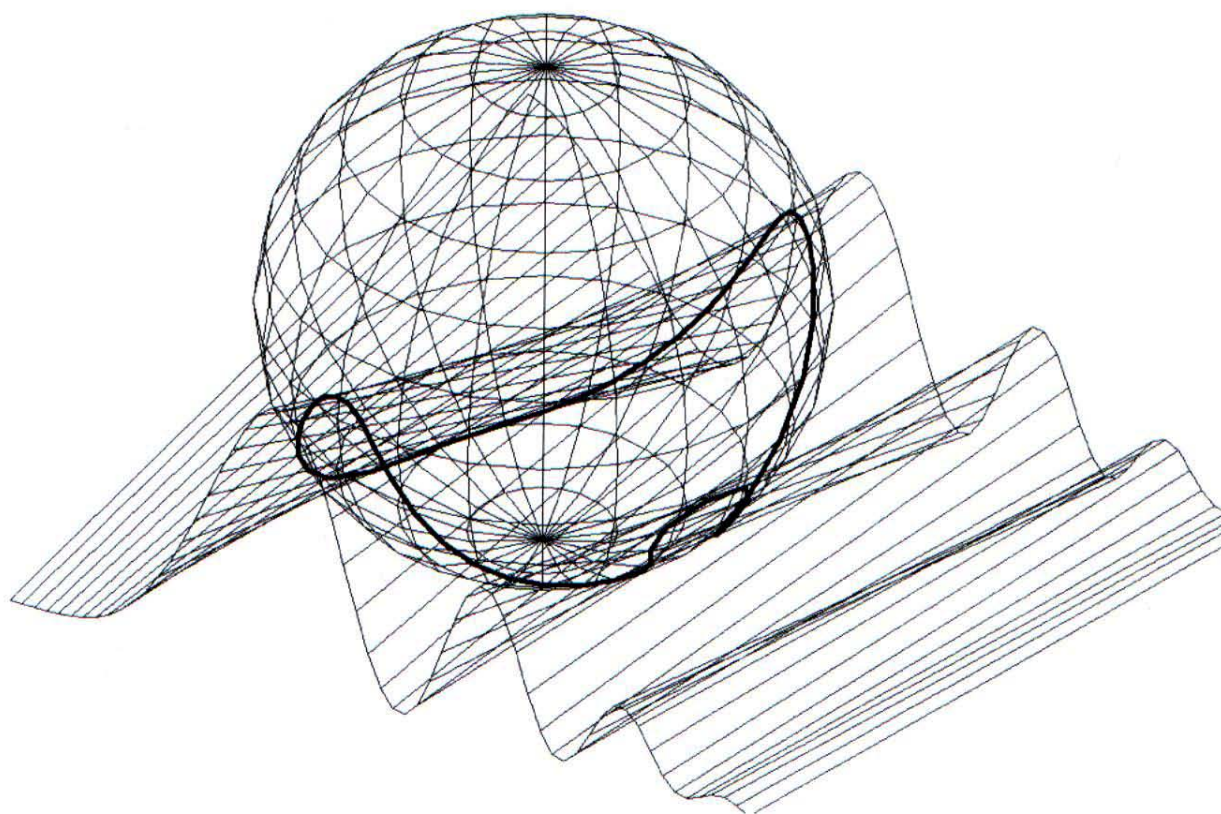


Вариант 2

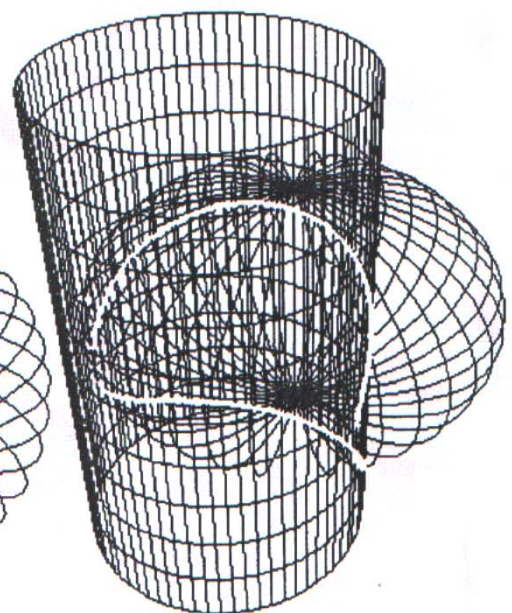
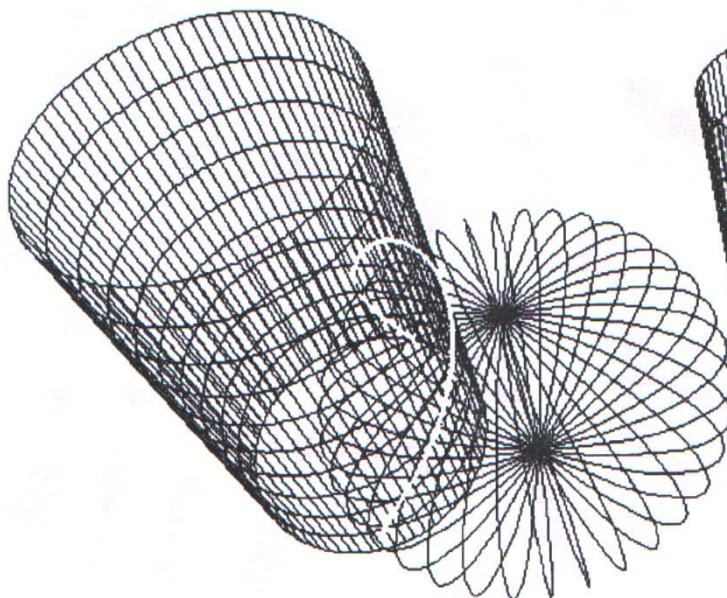
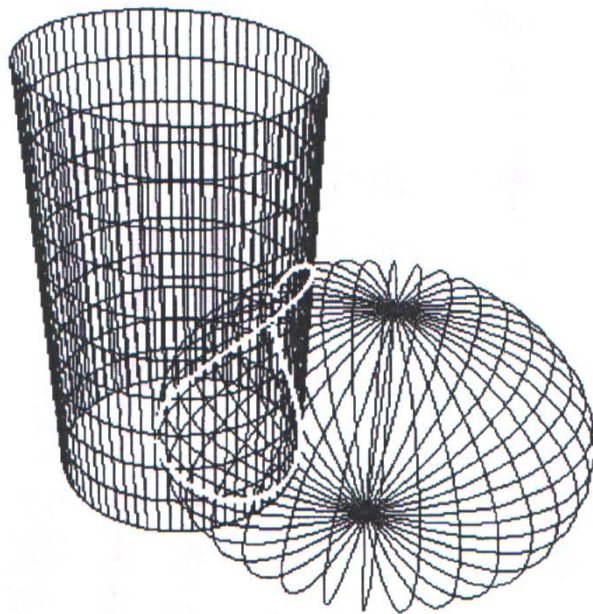


Вариант 3

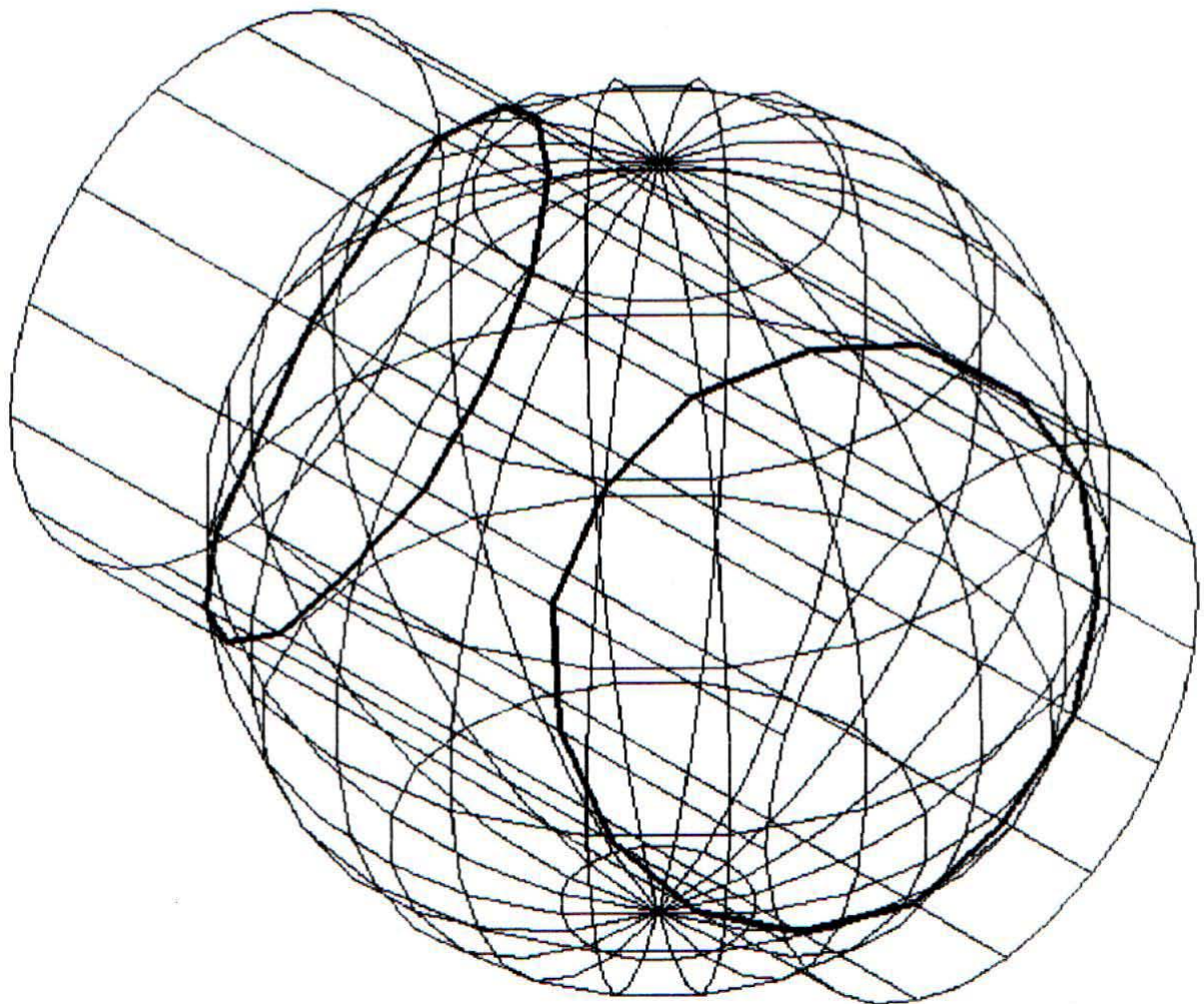
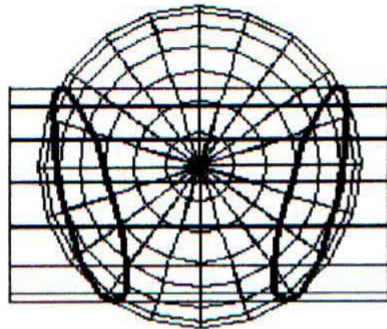
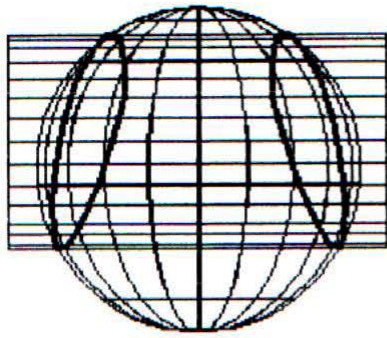




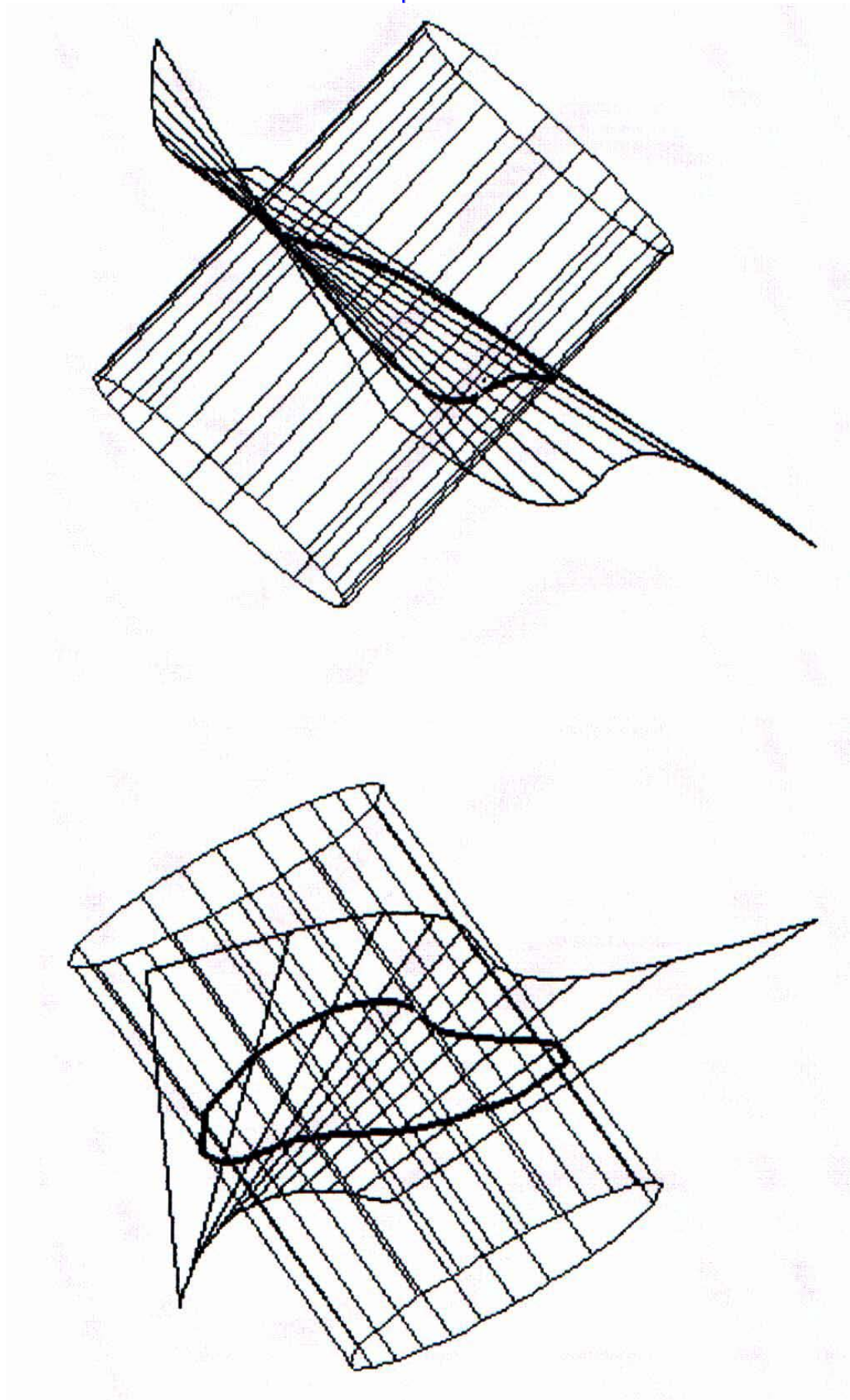
Вариант 4



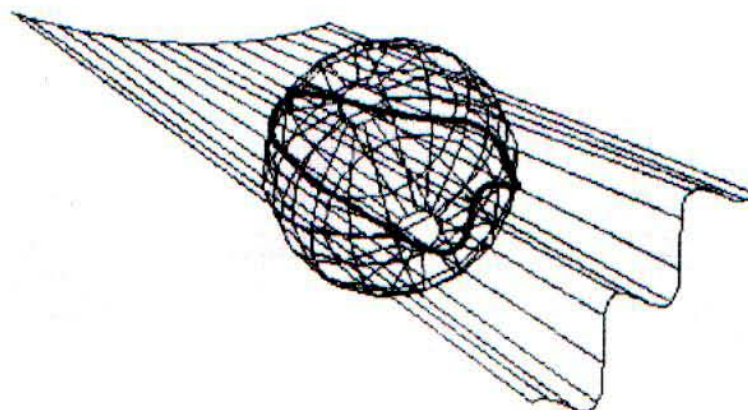
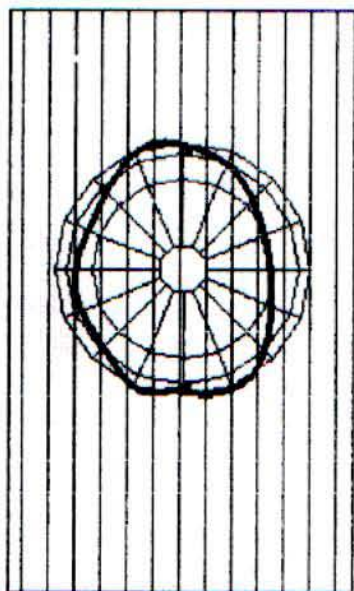
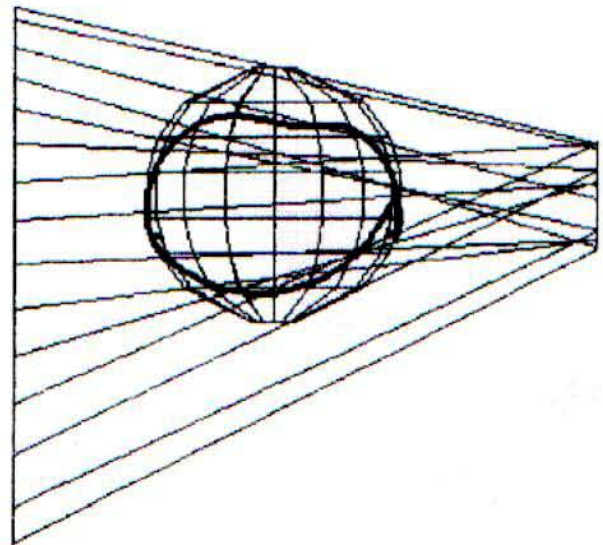
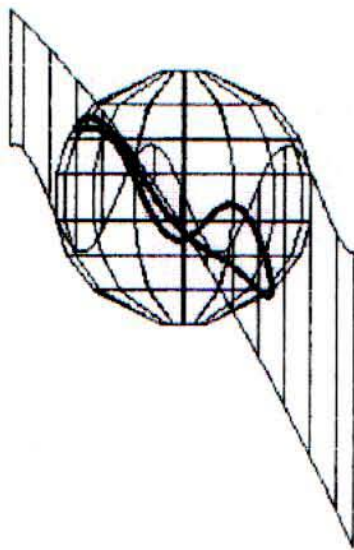
Вариант 5



Вариант 6



Вариант 7



Оформление отчета по лабораторной работе

В отчете должны быть представлены результаты всех этапов лабораторной работы. Структура отчета следующая:

1. Постановка задачи и выбор объектов.
2. Краткое математическое описание, в котором следует привести два основных этапа выполнения лабораторной работы.

Первый этап – решение позиционной задачи на пересечение двух или более объектов кривой формы (поверхности вращения второго порядка, линейчатые поверхности). Результат этого этапа – реализация алгоритма определения массива точек, принадлежащих линии пересечения.

Второй этап – визуализация задачи. Необходимо рассчитать каркасы заданных поверхностей и линию (линии) их пересечения. На экране компьютера выполняются трехмерные преобразования и вычисляются плоские проекции.

3. Листинг программы, реализующей геометрические преобразования объекта.

4. Результаты выполненных преобразований в виде копий графического экрана. Демонстрируются следующие изображения:

- ортогональные проекции;
- наглядное изображение (аксонометрическая или центральная проекции).

Задается преобразование (перемещение, вращение, масштабирование и др.), которое демонстрирует изменение положения одного объекта относительно другого и алгоритм по корректному вычислению точек на линии пересечения.