Vecteurs et Courbes

Contrôle - correction

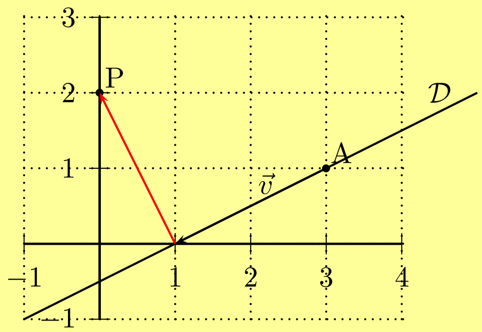
Exercice 1

On donne deux points $A(3,1)$ et $P(0,2)$ ainsi qu'un vecteur $\vec{v}(-2,-1)$

1. Dessiner la droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$
2. Trouver un système d'équations paramétriques décrivant $\mathcal{D}$
3. Trouver un vecteur normal à $\mathcal{D}$
4. Trouver une équation cartésienne de $\mathcal{D}$
5. Est-ce que le point $M(200,100)$ est sur la droite ? Sinon se trouve-t-il du même coté que P ?

Solution:

1. Dessin de la droite



2. Un point $N(x,y)$ de la droite vérifie l'équation vectorielle $N = A + t\vec{v}$, soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

   d'où le système $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$

3. Il suffit de prendre un vecteur orthogonal à $\vec{v}$, c'est-à-dire un vecteur $\vec{n}$ dont le produit scalaire avec $\vec{v}$ est égal à 0. Par exemple $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \left(< \vec{n}, \vec{v} >= \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \times (-2) + 2 \times (-1) = 0 \right)$

4. On peut trouver une équation cartésienne en posant justement qu'un point $N(x,y)$ de la droite vérifie l'équation vectorielle $< \overrightarrow{AN}, \vec{n} >= 0 \left(\overrightarrow{AN} \perp \vec{n} \right)$

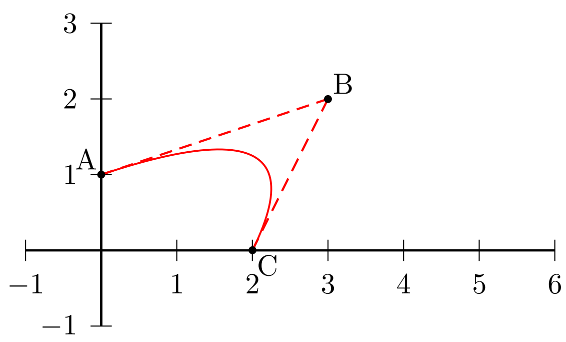
   Or $\overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}$ donc $< \overrightarrow{AN}, \vec{n} >= \begin{pmatrix} x-3 & y-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -(x-3) + 2(y-1) = \boxed{\text{-x+2y+1=0}}$

5. On remplace dans cette dernière équation x et y par les coordonnées de M : $-200 + 2 \times 100 + 1 = 1 \neq 0$ donc M n'est pas sur la droite.Pour savoir de quel côté de la droite M se trouve on remarque que $-200 + 2 \times 100 + 1$ est le produit scalaire $< \overrightarrow{AM}, \vec{n} >$ et qu'il est positif $= 1$.

   Reste à calculer le produit scalaire $< \overrightarrow{AP}, \vec{n} >= \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5$.

   Les deux produits scalaires étant de même signe, les points M et P sont du même côté de la droite.

Exercice 2



On ne demande pas ici de calculer les équations à partir des données mais plutôt de procéder par élimination, en étudiant les valeurs des fonctions et de leur dérivée en $t = 0$ et $t = 1$.

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 3 - 2t - t^2 \\ 2 - 4t + 3t^2 \end{pmatrix} \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 2t(3 - 2t) \\ -3t^2 + 2t + 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 2(1 + t - 2t^2) \\ t(4 - 3t) \end{pmatrix} \qquad Q_4 = \begin{pmatrix} t(4 - t) \\ 1 - 2t + 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$Q_5 = \begin{pmatrix} 2(1 - t^2) \\ t(2t - 1) \end{pmatrix} \qquad Q_6 = \begin{pmatrix} t(3 - t) \\ 1 - 3t + 2t^2 \end{pmatrix}$$

Parmi les équations paramétriques suivantes il y en a deux qui représentent la courbe de Bézier ci-contre.

Solution:

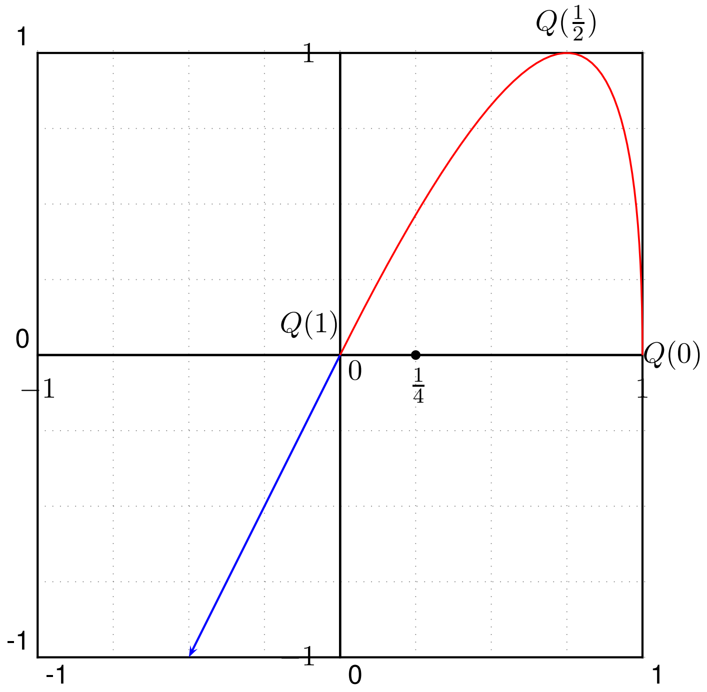
courbe	t=0	t=1	conclusion
$Q_1(t) =$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	NON, car la courbe ne passe pas par $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
$Q_2(t) =$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	conviendrait. $Q_2(0) = A$ et $Q_2(1) = C$ Il faut regarder la dérivée pour avoir les tangentes à la courbe.
$Q'_2(t) = \begin{pmatrix} 6 - 8t \\ -6t + 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$	OUI, $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$. sens de parcours : $A \to C$
$Q_3(t) =$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	conviendrait. $Q_3(0) = C$ et $Q_3(1) = A$
$Q'_3(t) = \begin{pmatrix} -4t \\ 4t - 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$	NON, ne convient pas car mauvaise tangente en C
$Q_4(t) =$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	NON, la courbe ne passe pas par $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
$Q_5(t) =$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	conviendrait. $Q_5(0) = C$ et $Q_5(1) = A$
$Q'_5(t) = \begin{pmatrix} 2 - 8t \\ 4 - 6t \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$	OUI, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{CB}$ et $\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BA}$ sens de parcours $C \to A$
$Q_6(t) =$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	conviendrait. $Q_6(0) = A$ et $Q_6(1) = C$
$Q'6(t) = \begin{pmatrix} 3 - 2t \\ -3 + 4t \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	NON, les tangentes ne correspondent pas.

Exercice 3

On donne la courbe paramétrée Q définie pour $t \in [0, 1]$ par

$$\left\{ \begin{array}{llll} Q: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & Q(t) = \begin{pmatrix} 1 - t^2 \\ 4t(1 - t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

1. Calculer $Q(0), Q(\frac{1}{2})$ et $Q(1)$
2. Calculer $Q'(t)$ puis $Q'(0), Q'(\frac{1}{2})$ et $Q'(1)$
3. A l'aide des résultats précédents, tracer la courbe sur le graphe ci-dessous.(Attention chaque carreau est de longueur $\frac{1}{4}$). Indiquer un vecteur tangent en $Q(1)$.



Solution:

1. $Q(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Q(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $Q'(t) = \begin{pmatrix} -2t \\ 4 - 8t \end{pmatrix}$

   $Q'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $Q'(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   et $Q'(1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$
3. Un vecteur tangent en $Q(1)$ est donné par un vecteur colinéaire à $Q'(1)$, par exemple $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ dessiné en bleu sur le graphique.